ANALISI 3

SERIE E TRASFORMATA DI FOURIER

SERIE DI FOURIER

- (**Relazioni di ortogonalità**) Valgono le seguenti formule:
  1. Se $m + n > 0$ allora $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\ \mathrm{d}x = \pi\delta_{mn}$
  2. Se $m + n > 0$ allora $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\ \mathrm{d}x = \pi\delta_{mn}$
  3. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ si ha $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\ \mathrm{d}x = 0$

  Ovvero seni e coseni (interi) sono ortogonali sull'intervallo $[-\pi, \pi]$

- (**Serie di Fourier**) Data una funzione f definiamo Serie di Fourier la serie formale seguente

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

  dove si ha $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)f(x)\ \mathrm{d}x$, $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)f(x)\ \mathrm{d}x$, $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\ \mathrm{d}x$. Ovvero gli a_k, b_k, c_n sono legati dalle seguenti relazioni:
  $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ e $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$ $\forall k > 0$

NUCLEO DI DIRICHLET

- (**Nucleo di Dirichlet**) $D_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikz} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})z)}{\sin(\frac{z}{2})}$ [Raccogliere e^{-inz} e sommare la geometrica]
- (**Parità ed integrale**) $D_n(z)$ è pari e si ha $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) = 2\pi$ [Scambiare somma con integrale]
- (**Riemann-Lebesgue per i coefficienti**) Se $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ allora si ha $\hat{f}_n \to 0$ per $\mid n \mid \to \infty$ [Considerare la norma $\mathcal{L}^2$ delle code]
- (**Più regolarità più decrescenza**) Se $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$ allora $\mid n \mid^k \hat{f}_n \in \ell^2(\mathbb{Z})$. In particolare $\hat{f}_n = o(\mid n \mid^{-k})$ quando $\mid n \mid \to \infty$ [Integrare per parti la precedente]
- ($f\mathcal{C}^1$ **convergenza assoluta**) Se $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ allora la Serie di Fourier converge assolutamente [Usare GM-QM sulla precedente]
- ($f\mathcal{C}^1$ **convergenza delle parziali**) Se $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ allora $S_n(f, x) \to f(x)$ per $n \to \infty$ e $\forall x \in \mathbb{T}$ [Scrivere S_n come convoluzione tra f e D_n e moltiplicare per uno. Poi stimare la differenza con RL]
- ($f\mathcal{C}^1$ **a tratti, convergenza delle parziali**) Se $f \in CT0$ e la derivata esiste ovunque tranne al più in un numero finito di punti, nei quali $\exists f'_{\pm}(x_0) \in \mathbb{R}$ derivate sinistre e destre, allora si ha $S_n(f, x) \to f(x)$ quando $n \to \infty$ [Usare la parità di D_n e spezzare in due pezzi per la stima con le derivate da un lato]