Lemmi sempreverdi di Analisi

Scambio di limite con integrale e/o successione

Derivabilità del limite di una successione

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni derivabili sull'intervallo $I = [a, b]$. Si supponga che:

1. Le derivate f'_n convergano uniformemente su I ad una funzione g
2. $\exists x_0 \in I$ tale che $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = l \in \mathbb{R}$

Allora le funzioni f_n convergono uniformemente su I alla funzione f che soddisfa le condizioni:

$$\begin{cases} f'(x) = g(x) & \forall x \in I \\ f(x_0) = l \end{cases}$$

Convergenza totale

Sia $(V, \|\|)$ uno spazio vettoriale normato. Sono allora equivalenti le seguenti due condizioni:

1. Rispetto alla distanza $d(v, v') = \|v - v'\|$ indotta dalla norma $\|\cdot\|$, (V, d) è completo
2. Data comunque una successione $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di V tali che $\sum_0^\infty \|v_n\| < +\infty$, le serie $\sum_0^\infty v_n$ converge ad un elemento di V

Convergenza normale e criterio di Weierstrass

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori reali definite su un insieme E, e si supponga che:

1. $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste una costante $M_n > 0$ tale che $| f_n(x) | \leq M_n \quad \forall x \in E$
2. $sum_{n=0}^{\infty} M_n < +\infty$

Allora la serie $\sum_0^\infty f_n$ converge uniformemente su E. In particolare, se (E, d) è uno spazio metrico e le funzioni f_n sono continue, anche la somma della serie $\sum_0^\infty f_n$ è continua.

Derivazione sotto il segno d'integrale

Sia $L : [a, b] \times (c, d) \to \mathbb{R}\ \mathcal{C}^0$ e tale che $\frac{\mathrm{d}L(t,s)}{\mathrm{d}s}$ è continua in $[a, b] \times (c, d)$. Allora vale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_a^b L(t, s)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}L(t, s)\,\mathrm{d}t \qquad \forall s \in (c, d)$$

Scambio limite integrale

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni che converge puntualmente ad f su un insieme E, e che converge uniformemente in ogni compatto contenuto in E ed esiste una funzione g ad integrale finito tale che $| f_n(x) | \leq g(x) \quad \forall x \forall n$. Allora si ha $\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x) = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$