

FATTI DI ANALISI

Definizione (F_σ) Si dice F_σ un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ che sia unione numerabile di chiusi, ovvero se si può scrivere

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

Definizione (Insieme trascurabile) Si dice che un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è trascurabile (ovvero ha misura di Lebesgue nulla) se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{(a_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ t.c. } E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$

Definizione (Funzione oscillazione) Di una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (dove Ω è uno spazio metrico) si definisce la funzione oscillazione $\Theta_f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ come:

$$\Theta_f(x) := \lim_{r \rightarrow 0^+} \text{diam}(f(B_r(x)))$$

Proprietà importanti:

- \bar{x} è un punto di discontinuità $\Leftrightarrow \Theta_f(\bar{x}) > 0$.
- Θ_f è una funzione semicontinua inferiormente.
- Definizione equivalente: $\Theta_f(x) = (\limsup_{y \rightarrow x} f(y)) - (\liminf_{y \rightarrow x} f(y))$.

Caratterizzazione della Riemann-integrabilità Una funzione è Riemann-integrabile se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità è trascurabile.

Teorema fondamentale del calcolo integrale, versione pro $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (a, b) e f' Riemann-integrabile. Allora vale $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$

Teorema di Darboux Le derivate mappano connessi in connessi.

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ovunque derivabile, e si ponga $\alpha := f'(a), \beta := f'(b)$. Possiamo wlog supporre che $\alpha \leq \beta$. Allora si ha, $\forall \alpha < \lambda < \beta \quad \exists \xi \in (a, b) \text{ t.c. } f'(\xi) = \lambda$.

Dimostrazione Si consideri la funzione $g(x) := f(x) - \lambda x$. Questa funzione è continua (essendo λ fissato e f continua) e definita sul compatto $[a, b]$. Quindi ammette massimo e/o minimo. Siccome g è anche derivabile si ha, nel punto di massimo $0 = g'(M) = f'(M) - \lambda \Rightarrow f'(M) = \lambda$.

Punti di discontinuità di una funzione reale Una funzione f ha punti di discontinuità che sono un F_σ

Dimostrazione Si consideri la funzione oscillazione di f : $\Theta_f(x)$. Fissata una "soglia di oscillazione" ν si ha che $\text{Disc}_f^{\geq \nu} := \{x \mid \Theta_f(x) \geq \nu\}$ è un chiuso (Si dimostri che se c'è un punto y sul quale si accumula una successione (y_n) di punti t.c. $\Theta_f(y_n) \geq \nu$ allora si ha $\Theta_f(y) \geq \nu$). Ora, siccome i punti di discontinuità sono tutti e soli quelli con oscillazione maggiore di zero, si ha $\text{Disc}_f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Disc}_f^{\geq \frac{1}{n}}$, ovvero unione numerabile di chiusi.

Discontinuità di una funzione semicontinua inferiormente I punti di discontinuità di una funzione semicontinua inferiormente sono di prima categoria (ovvero unione numerabile di chiusi a parte interna vuota).

Prima Categoria - Misura di Lebesgue nulla Non c'è nessuna implicazione tra queste due; ovvero esistono insiemi di prima categoria ma di misura positiva ed insiemi a misura nulla di seconda categoria.

OPERATORI DIFFERENZIALI

COME CAMBIANO I DIFFERENZIALI

Cartesiane \rightarrow Polari

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

LAPLACIANO

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

CONVERGENZE VARIE

- **(Puntuale)** Una successione di funzioni $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ se $\forall x \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$
- **(Uniforme)** Una successione di funzioni $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 \quad \forall x \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$
- **(Assoluta)** Una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge assolutamente se le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$ converge puntualmente
- **(Totale / Normale)** Una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente (al suo limite) in A se vale che $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)| < +\infty$
- Assoluta \implies Puntuale
- Uniforme \implies Puntuale
- Totale \implies Uniforme, Assoluta

PASSAGGIO AL LIMITE

Nel seguito si usa $f_n(x)$ per indicare una generica successione di funzioni, $f(x)$ il suo limite (dove esiste)

- **(Continuità del Limite)** Se le $f_n(x)$ definitivamente sono continue, e la convergenza è uniforme, allora $f(x)$ è continua.
- **(Derivabilità del Limite)** Se le $f_n(x)$ convergono in un punto \bar{x} ad $f(\bar{x})$ e le derivate $f'_n(x)$ convergono uniformemente ad una funzione $g(x)$ allora si ha che le $f_n(x)$ convergono uniformemente ad una funzione derivabile $f(x)$ tale che $f'(x) = g(x)$
- **(Integrabilità del Limite)** Se le $f_n(x)$ convergono uniformemente alla $f(x)$ limite allora si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(t) dt = \int f(t) dt$

PROBLEMI DI CAUCHY

Nel seguito parliamo di un problema del seguente tipo: $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Con $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione continua definita su un aperto. Indicheremo una generica soluzione con $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe \mathcal{C}^1 con $x_0 \in I$, tale che $\forall x \in I \quad (x, \varphi(x)) \in U$ e $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ e che $\varphi(x_0) = y_0$

- **(Cauchy-Lipschitz, Esistenza ed Unicità Locali)** Se f è continua e localmente lipschitziana in y uniformemente rispetto a x , allora $\exists!$ φ soluzione **locale** di classe \mathcal{C}^1
- **(Teorema di Peano, Esistenza Locale)** Per garantire l'esistenza locale (ma non l'unicità!) basta che f sia continua
- Si assuma che l'equazione $y' = f(x, y)$ abbia esistenza ed unicità locale in ogni punto di U . Allora si ha
 - Unicità Globale** (ovvero se due soluzioni coincidono in un punto allora coincidono in tutto l'intervallo);
 - Dominio Aperto delle soluzioni massimali** (una soluzione massimale ha come dominio un intervallo aperto);
 - Fuga dai compatti delle soluzioni massimali** (ovvero una soluzione massimale esce definitivamente da ogni sottoinsieme compatto di U)
- **(Esistenza e Unicità Globale)** Supponendo che la funzione f sia continua e localmente lipschitziana rispetto a y (ovvero ipotesi di Cauchy-Lipschitz) e se si ha che per ogni intervallo compatto K : $\exists A_K, B_K > 0 \quad \|f(x, y)\| \leq A_K \|y\| + B_K \quad \forall (x, y) \in K \times \mathbb{R}^n$ allora per ogni $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ il problema ha una ed una sola soluzione definita su *tutto* I (supponiamo abbia soluzione limitata, allora deve fuggire dai compatti dove la f è definita, ma se prendiamo il compatto delimitato dal bound della lipschitzianità, la funzione non può fuggirne localmente)

SOLUZIONE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI COMUNI

- **(Lineari del prim'ordine)** Data l'equazione $y' = a(x)y(x) + b(x)$ (detta $A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt$ una primitiva di $a(x)$) si ottiene, moltiplicando entrambi i membri per $e^{A(x)}$, la soluzione generale $y(x) = e^{A(x)} \int_{x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt + c$
- **(A variabili separabili)** Data l'equazione $y' = g(x)f(y)$ si ha $\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x) dx$ e calcolando le primitive si risolve il problema