

# Formulario di Fisica II

Idea originaria di Federico Glaudo e Giada Franz  
Piccole aggiunte di Dario Balboni

19 dicembre 2016

## 1 Costanti fisiche

Costante dielettrica nel vuoto

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.987 \cdot 10^9$$

Permeabilità magnetica nel vuoto

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1.256 \cdot 10^{-6} \frac{H}{m}$$

Velocità della luce nel vuoto

$$c = 2.997 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

## 2 Leggi fondamentali del campo elettrico

Legge di Coulomb

Chiamando  $\epsilon = \epsilon_0$  se siamo nel vuoto e  $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$  se siamo in un mezzo:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

Campo elettrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{r}'$$

Potenziale

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Legge di Gauss

$$\frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho = \int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \hat{n}$$

I equazione di Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

## II equazione di Maxwell (Elettrostatica)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Equazione di Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Energia elettrostatica

$$U_E = \frac{1}{2} \int \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{2} \int \rho V = \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E}^2$$

Forza agente su una carica

La forza di Lorentz agente su una carica **in assenza di campo magnetico** è

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

## 3 Primi termini dello sviluppo del potenziale

Nel caso in cui la distribuzione di carica sia sufficientemente localizzata, si può sviluppare il potenziale ai primi ordini con le formule:

Termine di monopolo

$$V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \int \rho \right)$$

Termine di dipolo

$$V(\vec{r}) \approx \frac{\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \left( \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' d\vec{r}' \right)$$

## 4 Conduttori

Pressione elettrostatica

$$p = \frac{dF^\perp}{dS} = \frac{dq}{dS} \cdot \frac{E_{in}^\perp + E_{out}^\perp}{2} = \sigma \cdot \frac{E_{in}^\perp + E_{out}^\perp}{2}$$

Campo e pressione sulla superficie di un conduttore

$$E^\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$p = \sigma \frac{E^\perp}{2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

## Sistema di conduttori

Chiamiamo  $\vec{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$  il vettore delle cariche e  $\vec{V} = (V_1, \dots, V_n)$  il vettore dei potenziali degli  $n$  con-

duttori, allora esiste una matrice  $C$  tale che  $\vec{Q} = C\vec{V}$ . Inoltre:

$$U = \frac{1}{2} \sum Q_i V_i$$

## 5 Configurazioni speciali di carica

### Campi e potenziali particolari

#### Carica puntiforme

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$$

Non se ne può calcolare l'energia elettrostatica poiché diverge. I fisici la chiamano autoenergia e viene solitamente tolta negli altri conti per trovare l'energia elettrostatica.

#### Filo

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r}$$

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r)$$

#### Piano

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$V(r) = -\frac{\sigma r}{2\epsilon_0}$$

**Sfera uniformemente carica** Si suppone, ovviamente che  $R$  sia il raggio della sfera,  $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$  la sua carica totale.

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \frac{r}{R} \hat{r} & \text{dentro alla sfera} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} & \text{fuori dalla sfera} \end{cases}$$

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left( -\frac{r^2}{2R^3} + \frac{3}{2R} \right) & \text{dentro alla sfera} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & \text{fuori dalla sfera} \end{cases}$$

$$U_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} \frac{6}{5}$$

#### Guscio sferico con carica superficiale

#### Filo ciccione

**Due cariche uguali a distanza fissata** Si suppone che vi siano due cariche  $Q$  (dello stesso valore e segno) a distanza  $2D$ . Useremo le coordinate cilindriche  $\rho, z, \phi$ .

$$\vec{E}(z, \rho) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{(\rho^2 + (z-D)^2)(\rho^2 + (z+D)^2)} (z(\rho^2 + z^2 - D^2)\hat{z} + \rho(\rho^2 + z^2 + D^2)\hat{\rho})$$

#### Due cariche diverse a distanza fissata

#### Dipolo

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{r^3} \right)$$

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$\vec{F} = D\vec{E} \cdot \vec{p}$$

#### Carica immagine

**Piano** Nel simmetrico rispetto al piano una carica  $-q$ .

**Sfera a terra** Nell'inverso rispetto alla sfera, cioè in  $x' = \frac{R^2}{x}$ , una carica  $q' = -\frac{qR}{x}$ .

**Sfera isolata** Se c'è una carica  $q$  all'esterno della sfera, le cariche immagine (per risolvere il problema all'esterno della sfera) sono due: una nell'inverso rispetto alla sfera di carica  $q' = -\frac{qR}{x}$  e una nel centro della sfera di carica  $-q'$  (in modo che la carica totale nella sfera sia 0).

## 6 Condensatori

### Relazione tra carica e capacità

$$Q = CV$$

### Relazione tra corrente e tensione

$$I = C \frac{dV}{dt}$$

### Energia di un condensatore

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

### Capacità di vari condensatori

Nota: la presenza di un materiale fra le armature di un condensatore ne aumenta la capacità di un fattore  $\epsilon_r$  (numero puro) detto costante dielettrica relativa che dipende dalle caratteristiche del materiale. (Tutte le formule della capacità vengono moltiplicate per  $\epsilon_r$ )

#### Condensatore piano

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

dove  $S$  è la superficie del condensatore e  $d$  è la distanza fra le due piastre.

#### Condensatore cilindrico

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R}{r}\right)}$$

dove  $h$  è l'altezza del cilindro e  $R, r$  sono rispettivamente il raggio della piastra esterna e quello della piastra interna.

#### Condensatore sferico

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{Rr}{R-r}$$

dove  $R$  ed  $r$  sono rispettivamente il raggio della piastra esterna e quello della piastra interna.

#### Conduttore sferico isolato

$$C = 4\pi\epsilon_0 r$$

### Condensatori in parallelo

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

### Condensatori in serie

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

## 7 Correnti

### Equazione di continuità

Indichiamo con  $\vec{J}$  la densità di corrente.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_S \vec{J} \cdot \hat{n}$$

## Legge di Ohm (conducibilità e resistività)

La resistività  $\rho$  è tale che

$$\vec{J} = \frac{\vec{E}}{\rho}$$

e la conducibilità è  $\sigma = \frac{1}{\rho}$ .

### Effetto Joule

La potenza dissipata da un certo materiale in un certo istante è

$$P = \int \vec{E} \cdot \vec{J} = \int \frac{\vec{E}^2}{\rho}$$

dove per l'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato la legge di Ohm.

### Tempo di scarica

Se la carica rispetta un'equazione del tipo

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{\tau}$$

allora chiamiamo  $\tau$  il tempo di scarica. La soluzione di una tale equazione è

$$Q(t) = Q(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Per circuiti che si scaricano si ha

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

## 8 Resistenze

### Legge di Ohm

$$V = RI$$

### Relazione con Lunghezza e Sezione

$$R = \frac{d}{A}\rho$$

### Potenza dissipata

$$P = VI = RI^2$$

### Resistenze in serie

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

### Resistenze in parallelo

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

## 9 Sviluppo in multipoli (cartesiane)

Data una funzione  $v(\vec{R} + \vec{r})$  essa può essere sviluppata in un intorno dell'origine  $\vec{r} = 0$  e si ha

$$v(\vec{R} - \vec{r}) = v(\vec{R}) + \sum_{\alpha=x, y, z} r_{\alpha} v_{\alpha}(\vec{R}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=x, y, z} \sum_{\beta=x, y, z} r_{\alpha} r_{\beta} v_{\alpha\beta}(\vec{R}) + \dots$$

dove  $v_{\alpha}(\vec{R}) = \frac{\partial v(\vec{r}-\vec{R})}{\partial r_{\alpha}}|_{\vec{r}=0}$  e  $v_{\alpha\beta}(\vec{R}) = \frac{\partial^2 v(\vec{r}-\vec{R})}{\partial r_{\alpha} \partial r_{\beta}}|_{\vec{r}=0}$

In elettromagnetismo viene frequentemente considerata l'espressione  $v(\vec{r} - \vec{R}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|}$ , da cui differenziando si ottiene  $v(\vec{R}) = \frac{1}{R}$ ,  $v_{\alpha}(\vec{R}) = -\frac{R_{\alpha}}{R^3}$ ,  $v_{\alpha\beta}(\vec{R}) = \frac{3R_{\alpha}R_{\beta} - \delta_{\alpha\beta}R^2}{R^5}$  e quindi i rispettivi termini di monopolo, dipolo e quadrupolo elettrico sono definiti da  $q_{\text{tot}} = \sum_i q_i$ ,  $P_{\alpha} = \sum_i q_i r_{i\alpha}$  e  $Q_{\alpha\beta} = \sum_i q_i (3r_{i\alpha}r_{i\beta} - \delta_{\alpha\beta}r_i^2)$  da cui si ottiene l'espansione del potenziale elettrico nel seguente modo:

$$4\pi\epsilon_0 V(\vec{R}) = \frac{q_{\text{tot}}}{R} + \frac{1}{R^3} \sum_{\alpha=x, y, z} P_{\alpha} R_{\alpha} + \frac{1}{6R^5} \sum_{\alpha, \beta=x, y, z} Q_{\alpha\beta} (3R_{\alpha}R_{\beta} - \delta_{\alpha\beta}R^2)$$

## 10 Leggi fondamentali del campo magnetico

### Forza di Lorentz

Il campo magnetico  $\vec{B}$  è uno pseudovettore che genera su una carica in movimento la forza

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

### III legge di Maxwell (assenza di monopolo magnetico)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

### Legge di Ampère

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

### Legge della circuitazione

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_{\gamma}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{concatenata}}$$

### Biot-Savart

Nel caso di una distribuzione di carica localizzata:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{r}'$$

e nel caso di fili:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

## Densità di energia magnetica

$$u_B = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$$

## Pressione magnetica

$$|p| = u_B = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$$

## Energia magnetica

$$U_B = \int u_B = \frac{1}{2\mu_0} \int \vec{B}^2$$

## 11 Potenziale vettore

### Relazioni fondamentali con $\vec{B}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

### Biot-Savart per $\vec{A}$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

## 12 Potenziali e Gauge

Si deve avere:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases}$$

Nella Gauge di Lorentz, ovvero  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ , si ha

$$\begin{cases} -\nabla^2 V + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ -\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

## 13 Momento di dipolo magnetico

### Definizione di momento di dipolo

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{J}$$

### Caso di filo chiuso planare

Nel caso di un filo percorso da corrente  $I$  che racchiude una regione di piano con area (orientata)  $\vec{S}$ , vale

$$\vec{m} = I\vec{S}$$

### Termine di dipolo nel potenziale vettore

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

## Termine di dipolo nel campo magnetico

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$

## Costante giromagnetica

Un corpo di massa  $m$  e carica  $q$ , ammette una costante  $g$  che lega il momento di dipolo al momento angolare:

$$\vec{m} = g \frac{q}{2m} \vec{L}$$

Nel caso di una carica puntiforme o una sfera uniformemente carica  $g = 1$ ; per una sfera carica superficialmente  $g = \frac{5}{3}$ ; per un elettrone  $g = 2.002$ .

## 14 Forza e momento generati dal campo magnetico

### Forza del campo magnetico

Data una distribuzione di correnti  $\vec{J}$ , ed un campo magnetico *esterno*  $\vec{B}$ , la forza agente sulla distribuzione è:

$$\vec{F} = \int \vec{J} \times \vec{B}$$

### Forza di un campo costante

$$\vec{F} = 0$$

### Coppia torcente del campo magnetico

Data una distribuzione di correnti  $\vec{J}$ , ed un campo magnetico *esterno*  $\vec{B}$ , la coppia torcente, rispetto all'origine, agente sulla distribuzione è:

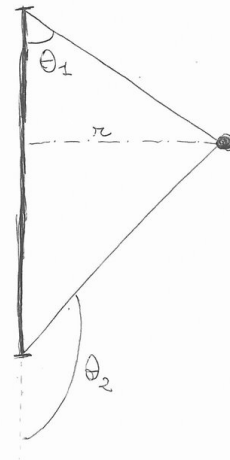
$$\vec{\tau} = \int \vec{r} \times (\vec{J} \times \vec{B})$$

### Coppia torcente di un campo costante

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0$$

## 15 Distribuzioni di corrente particolari

### Segmento di Filo



Il campo magnetico in un qualunque punto dello spazio è dato da

$$\vec{B} = \hat{\varphi} \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta$$

dove  $\theta_1$  e  $\theta_2$  sono l'angolo iniziale e l'angolo finale che la congiungente al filo forma con il filo stesso.

### Filo infinito

Un filo lungo l'asse  $\hat{z}$  percorso da corrente  $I$  genera

$$\vec{B}(\vec{r}) = \hat{\varphi} \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}$$

dove  $\hat{\varphi}$  è orientato in modo che se il pollice della mano destra è  $\hat{z}$ , le restanti dita ne descrivono il verso.

### Solenoido cilindrico

Un solenoide di raggio  $a$ , con  $n$  spire per unità di lunghezza percorse da corrente  $I$ , disposto lungo l'asse  $\hat{z}$  genera

$$\vec{B}(\vec{r}) = \hat{z} \mu_0 n I$$

che è diretto in modo che se le dita della mano destra seguono  $I$ , allora il pollice detta il verso di  $\vec{B}$ .

Inoltre, la sua autoinduttanza vale  $L = \mu_0 \frac{N^2 a^2 \pi}{l}$ , con  $l$  la sua lunghezza,  $N$  il numero di spire totali ( $n = \frac{N}{l}$ )

### Spira

Una spira di raggio  $a$  percorsa da corrente  $I$  con asse lungo  $\hat{z}$ , genera sull'asse  $\hat{z}$

$$\vec{B}(z) = \hat{z} \frac{\mu_0 a^2 I}{2(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dove anche questa volta  $\vec{B}$  è il pollice della mano destra e le altre dita seguono  $I$ .

## 16 Elettrodinamica

Ora tratteremo i casi, finora non considerati, di campo elettrico non costante e come questo incida sul campo magnetico. Questo farà sì che il campo elettrico non sia più conservativo e perciò non esista più un potenziale.

### Conduttore

Per conduttore ora si intenderà che la forza di Lorentz è nulla al suo interno.

## II equazione di Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

### Legge di Lenz

Nel caso di un circuito, la forma integrale della II equazione di Maxwell diventa:

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

dove  $\mathcal{E}$  è la forza elettromotrice (f.e.m.) indotta sul circuito e  $\Phi_B$  è il flusso di campo magnetico attraverso la superficie racchiusa dal circuito. Il segno della f.e.m. indotta è tale da opporsi sempre alla variazione di corrente.

## IV equazione di Maxwell

Questa legge generalizza sia l'equazione di continuità sia la legge di Ampère al caso elettrodinamico:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{B} + \mu_0 \vec{J} = 0$$

## 17 Formule di M. Complete

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}$$

## 18 Induzione magnetica

### Induttanza

L'induttanza è una costante  $L$  dipendente dalla geometria del circuito, tale che

$$\Phi_B = LI$$

dove  $\Phi_B$  è il flusso di campo magnetico generato dal circuito stesso.

### Induttore

Un induttore è una componente di un circuito la cui induttanza non è trascurabile. L'esempio tipico è un solenoide.

### Mutua induzione

Chiamando  $\vec{\mathcal{E}}$  il vettore delle f.e.m. indotte e  $\vec{I}$  il vettore delle correnti di  $n$  circuiti, esiste una matrice  $L$  simmetrica, che sulla diagonale ha le autoinduttanze dei singoli circuiti, tale che:

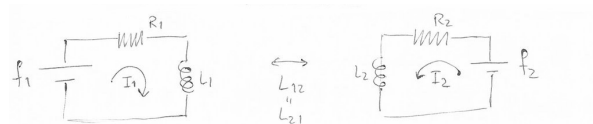
$$\vec{\mathcal{E}} = -L \frac{d\vec{I}}{dt}$$

e il valore  $L_{ij} = L_{ji}$  si calcola con

$$L_{ij} = L_{ji} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma_i} \oint_{\gamma_j} \frac{d\vec{l}_i \cdot d\vec{l}_j}{r}$$

dove con  $r$  indichiamo la distanza tra i punti in cui stiamo integrando.

### Mutua induzione tra due circuiti



Nel caso di due circuiti come in figura con mutua induzione tra di essi si hanno le seguenti formule:

$$\begin{cases} f_1 = I_1 R_1 + L_1 \dot{I}_1 + L_{12} \dot{I}_2 \\ f_2 = I_2 R_2 + L_2 \dot{I}_2 + L_{21} \dot{I}_1 \end{cases}$$

### Energia di un induttore

$$U = \frac{1}{2} LI^2$$

e nel caso di un sistema di induttori:

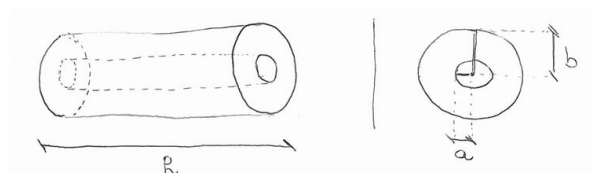
$$U = \frac{1}{2} \vec{I}^T L \vec{I}$$

### Circuiti RLC

$$\mathcal{E} = RI + \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2 Q}{dt^2}$$

## 19 Alcune induttanze

### Induttanza cavo coassiale



dove supponiamo che  $b > a$ ,  $h \gg b \simeq a$ . Allora l'induttanza è data da  $L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \log(\frac{b}{a})$

## 20 Formule nei materiali

### Formula fondamentale

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

### Densità di carica

$$\rho_{TOT} = \rho_{EXT} + \rho_{IND}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_{IND}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{EXT}$$

$$\vec{P} \cdot \hat{n} = \sigma_{IND}$$

## 21 Integrali “Noti”

$$\int \frac{r \, dr}{(r^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + 1}}$$

$$\int e^{\alpha t} \, dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}$$

$$\int t e^{\alpha t} \, dt = \frac{\alpha t - 1}{\alpha^2} e^{\alpha t}$$

## 22 Operatori differenziali

### Gradiente in cartesiane

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

### Gradiente in cilindriche

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

### Gradiente in sferiche

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

### Divergenza in cartesiane

$$\vec{\nabla} \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

### Divergenza in cilindriche

$$\vec{\nabla} \cdot A = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

### Divergenza in sferiche

$$\vec{\nabla} \cdot A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

### Rotore in cartesiane

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times A = & \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \\ & \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \\ & \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z} \end{aligned}$$

### Rotore in cilindriche

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times A = & \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \\ & \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \\ & \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{z} \end{aligned}$$

### Rotore in sferiche

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times A = & \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(A_\phi \sin \theta)}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \\ & \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \\ & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi} \end{aligned}$$