TOPOLOGIA GENERALE

DEFINIZIONI DELLE PROPRIETÀ

N1 Ogni punto ha una base di intorni numerabile.

N2 Lo spazio ha una base di aperti numerabile.

Sep Se esiste un sottoinsieme denso e numerabile.

T0 Dati due punti c'è un aperto che li distingue. ($\forall x, y \in X \quad \exists A$ aperto t.c. $x \in A, y \notin A$ oppure $x \notin A, y \in A$)

T1 I punti sono chiusi.

T2 Punti distinti hanno intorni disgiunti.

Reg Un punto ed un chiuso che non lo contiene hanno intorni disgiunti.

Norm Ogni coppia di chiusi disgiunti ha intorni disgiunti.

T3 Reg + T0.

T4 Norm + T1.

Cpt Ogni ricoprimento di aperti ha un sottoricoprimento finito.

Lind Ogni ricoprimento di aperti ha un sottoricoprimento numerabile.

Conn Non esistono due aperti propri la cui unione è lo spazio intero. (Vale anche con i chiusi)

PathConn Presi due punti esiste un arco che li connette ($\forall x, y \in X \quad \exists \gamma : [0, 1] \to X$ continua t.c. $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$)

LocConn Ogni punto ha una base di intorni connessi.

LocPathConn Ogni punto ha una base di intorni connessi per archi.

LocCpt Ogni punto ha un intorno compatto

SemilocCpt Ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni compatti

ParaCpt Ogni ricoprimento aperto ha un raffinamento localmente finito.

ExCpt Lo spazio possiede un'esaustione in compatti

Metr Metrizzabile, ovvero esiste una distanza che induce la topologia.

Da aggiungere:
Metr: Sep ¡=¿ N2 ¡=¿ Lind, Metr =¿ N1, Metr: Cpt =¿ Sep, N2: Cpt ¡=¿ SeqCpt, Cpt =¿ ParaCpt, ParaCpt + T2 =¿ Norm.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{T4} \arrow[r] & \mathrm{T3} \arrow[r] & \mathrm{T2} \arrow[r] & \mathrm{T1} \arrow[r] & \mathrm{T0}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Lind} & \mathrm{PathConn} \arrow[r] & \mathrm{Conn} \\
\mathrm{N2} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Sep} & \mathrm{Reg} \arrow[r, "+\,\mathrm{N2}\ /\ +\,\mathrm{Lind}"] & \mathrm{Norm} \\
 & \mathrm{N1} & &
\end{tikzcd}
$$

EQUIVALENZE

- (**Condizione equivalente per essere una base**) Dato X insieme e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ esiste una topologia su X di cui $\mathcal{B}$ è una base se e soltanto se sono soddisfatte le seguenti due condizioni: $X = \cup\{B \mid B \in \mathcal{B}\}$ e per ogni coppia $A, B \in \mathcal{B}$ e per ogni punto $x \in A \cap B$ esiste $C \in \mathcal{B}$ tale che $x \in C \subseteq A \cap B$.
- (**Condizioni equivalenti alla continuità**) f è continua $\Leftrightarrow$ controimmagine di aperti è aperta $\Leftrightarrow \forall A \subseteq X \quad f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \Leftrightarrow \forall x \in X \quad \forall U$ t.c. $f(x) \in U \quad \exists V$ t.c. $x \in V \quad f(V) \subseteq U$.
- (**Condizioni equivalenti ad essere un omeomorfismo**) $f : X \to Y$ continua. Allora f è un omeomorfismo $\Leftrightarrow f$ è chiusa e biggettiva $\Leftrightarrow f$ è aperta e biggettiva.
- (**Condizioni che implicano essere immersione**) Sia $f : X \to Y$ continua. Allora se f è chiusa ed iniettiva, essa è un'immersione chiusa. Se invece f è aperta ed iniettiva, allora è un'immersione aperta.
- (**Condizioni equivalenti alla sconnessione**) X è sconnesso $\Leftrightarrow X$ è unione disgiunta di due aperti propri $\Leftrightarrow X$ è unione disgiunta di due chiusi propri.

CONNESSIONE

- (**Multilemma sulla connessione**) Sia Y connesso e $f : X \to Y$ una funzione *continua* (?) e surgettiva tale che $f^{-1}(y)$ è connesso $\forall y \in Y$. Se f è aperta oppure se f è chiusa, allora anche X è connesso.
- (**Connessione della chiusura**) Sia Y un sottospazio connesso di X, e sia $Y \subseteq W \subseteq \bar{Y}$. Allora anche W è connesso.
- (**Chiusura delle componenti connesse**) Le componenti connesse sono chiuse.
- (**Estensione delle componenti connesse**) Supponiamo di avere $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ t.c. Z_i è connesso $\forall i$ e tali che $\forall i, j \in \Lambda \quad \exists i = k_1, k_2, \ldots, k_n = j \in \Lambda$ tali che $Z_{k_l} \cap Z_{k_{l+1}} \neq \emptyset$. Allora $\cup_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda$ è connesso.

COMPATTEZZA

- (**Heine-Borel**) Un sottospazio $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

- (**Multilemma sulla compattezza**) Sia Y compatto e $f : X \to Y$ una funzione chiusa. Se $f^{-1}(y)$ è compatto $\forall y \in Y$, allora anche X è compatto.
- (**Catene discendenti di compatti**) Siano K_i chiusi e compatti tali che $\ldots \subset K_2 \subset K_1$ una catena discendente numerabile di chiusi non vuoti e compatti di uno spazio topologico. Allora $\cap_i K_i \neq \emptyset$.
- (**Lemma di Wallace**) X, Y spazi topologici. $A \subseteq X, B \subseteq Y$ sottospazi compatti e $W \subset X \times Y$ un aperto tale che $A \times B \subseteq W$. Allora $\exists U \subseteq X, V \subseteq Y$, aperti tali che $A \subseteq U, B \subseteq V, U \times V \subseteq W$.
- (**Compatti hanno proiezioni chiuse**) Se X è compatto, la proiezione $p : X \times Y \to Y$ è un'applicazione chiusa.
- (**Localmente compatto $\implies$ ammette un ricoprimento fondamentale in compatti**).

Compattificazioni

- (**La compattificazione di Alexandroff è T_2**) $\hat{X}$ è di Hausdorff se e solo se X è di Hausdorff ed ogni punto di X possiede un intorno compatto.
- (**Immersioni aperte si estendono ad Alexandroff**) $f : X \to Y$ immersione aperta. Allora l'applicazione $g : Y \to \hat{X}$ definita da $g(y) := \begin{cases} x & \text{se } y = f(x) \\ \infty & \text{se } y \notin f(X) \end{cases}$ è continua. In particolare ogni spazio topologico compatto di Hausdorff Y coincide con la compattificazione di Alexandroff di $Y \setminus \{y\} \quad \forall y \in Y$

Altri Lemmi

- (**Continuità e ricoprimenti fondamentali**) Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento fondamentale di X. Un'applicazione $f : X \to Y$ è continua $\Leftrightarrow$ $\forall A \in \mathcal{A}$ la restrizione $f\ |_A : A \to Y$ è continua.
- (**$[0,1]$ è tutto quanto**) L'intervallo $[0,1]$ per la topologia euclidea è connesso, connesso per archi, compatto, localmente connesso, localmente connesso per archi, localmente compatto.
- (**Ricoprimenti localmente finiti**) I ricoprimenti aperti ed i ricoprimenti chiusi localmente finiti sono fondamentali.

Sottospazi

- (**Passaggio della chiusura**) $Y \subseteq X$ sottospazio, $A \subseteq Y$. Allora la chiusura di A in Y è uguale all'intersezione di Y con la chiusura di A in X.
- (**Passaggio di aperti-chiusi**) $Y \subseteq X$, $Z \subseteq Y$. Allora si hanno:
  - se Y aperto in $X,$ allora Z aperto in $Y \Leftrightarrow Z$ aperto in X
  - se Y chiuso in $X,$ allora Z chiuso in $Y \Leftrightarrow Z$ chiuso in X
  - se Y intorno di $y,$ allora Z intorno di y in $Y \Leftrightarrow Z$ intorno di y in X

Topologie Comuni

- (**Topologia discreta**) $\tau = \mathcal{P}(X)$ quindi ogni insieme è aperto. è indotta dalla distanza discreta: $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$
- (**Topologia indiscreta**) $\tau = \{\emptyset, X\}$, la meno fine tra tutte le topologie.

- (**Topologia euclidea su** $\mathbb{R}$) Un sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{R}$ è aperto se e solo se è unione di intervalli aperti.
- (**Topologia della semicontinuità superiore di** $\mathbb{R}$) Gli aperti non vuoti sono tutti e soli i sottoinsiemi della forma $(-\infty, a)$, al variare di $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

METRIZZABILITÀ

- (**Proprietà di un metrico**) Sia X spazio metrico. Allora X è T2.

GRUPPI TOPOLOGICI

- G è T2 $\Leftrightarrow \{e\}$ è chiuso
- $H \sqsubseteq G$. Se la parte interna di H è non vuota, allora H è aperto e chiuso in G
- $H \sqsubseteq G \implies \bar{H} \sqsubseteq G$
- La componente connessa di e è un sottogruppo chiuso di G

π_1 E RIVESTIMENTI

- Sia $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio convesso. Allora per ogni spazio topologico X si ha che due qualunque funzioni $f, g : X \to Y$ sono omotope attraverso $H(t, x) := t \cdot f(x) + (1 - t) \cdot g(x)$
- Se A è un retratto di X allora $i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ è iniettiva
- Se A è un retratto per deformazione di X allora $i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ è un isomorfismo di gruppi
- Sia $f : X \to Y$ un'equivalenza omotopica di spazi topologici. Allora $\forall a \in X$, l'applicazione $f_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, f(a))$ è un isomorfismo di gruppi
- S^n per $n \geq 2$ è semplicemente connesso (ovvero $\pi_1(S^n) = \{e\}$)
- $\mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \ldots, p_m\}$ è semplicemente connesso per $n \geq 3$
- Lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ è semplicemente connesso per ogni $m \geq 0$
- Sia X uno spazio topologico semplicemente connesso. Allora ogni rivestimento connesso $p : E \to X$ è banale, ossia un omeomorfismo
-

ESISTENZA DI SOLLEVAMENTI

Siano $p : E \to X$ un rivestimento e $f : S \to X$ un'applicazione continua. Per ogni $y \in S$ ed ogni $e \in p^{-1}(f(y))$ esiste un unico sollevamento $g : S \to E$ dell'applicazione f tale che $g(y) = e$.
Gli S per cui è noto che si possa fare sono: $[0,1]$, $[0,1]^2$, S^2, $\mathbb{R}^2$

TEOREMI DI NON-ESISTENZA

- (**Borsuk**) Non esistono applicazioni continue $f : S^2 \to S^1$ tali che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^2$
- Per ogni applicazione continua $g : S^2 \to \mathbb{R}^2$ esiste un punto $x \in S^2$ tale che $g(x) = g(-x)$
- Siano $n \geq 3$ ed $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto. Allora ogni applicazione continua $f : A \to \mathbb{R}^2$ non è iniettiva
- Non esistono applicazioni continue $r : D^2 \to S^1$ tali che $r(-x) = -r(x)$ per ogni $x \in S^1$

- (**Brouwer**) Ogni applicazione continua $f : D^2 \to D^2$ possiede almeno un punto fisso
- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione continua. Si assuma che esistano due costanti positive a e b con $a < 1$ tali che $|| x - f(x) || \leq a || x || + b$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$. Allora f è surgettiva

Che proprietà passano a cosa?

Vediamo alcune proprietà degli spazi
Attenzione! Non vi fidate troppo delle cose in rosso perchè devo ancora verificare i risultati

Proprietà	**Sottospazi**	**Prodotti**	**Quozienti**	**Funzioni $\mathcal{C}^0$**	**Implica**
N1	✓	Numerabili			
N2	✓	Numerabili	Aperti	Aperte	Sep, Lind, N1
Sep	×	Numerabili		✓	(+Metr) N2
T0	✓	Arbitrari			
T1	✓	Arbitrari			T0
T2	✓	Arbitrari			T1
Reg	✓	Arbitrari			
Norm	Chiusi	×			
T3	✓	Arbitrari			T2
T4	Chiusi	×			T3
Cpt	Chiusi	Arbitrari		✓	(+T2) Chiuso
Lind	Chiusi	×			
Conn	×	Arbitrari		✓	
PathConn	×	Arbitrari		✓	Conn
LocConn	Aperti				
LocPathConn	Aperti				
LocCpt	Chiusi	Finiti			(+T2) SemiLocCpt
SemiLocCpt					
ParaCpt	Chiusi	×			
ExCpt					
Metr	✓	Numerabili			N1

Lemmi

- LocCpt + T2 + N2 =¿ ExCpt