

ANALISI 3

SERIE E TRASFORMATA DI FOURIER

DEFINIZIONI E REMARKS

- ($f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ **a tratti**) Diciamo che $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ a tratti quando $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ e la derivata esiste dovunque tranne che in un numero finito di punti, nei quali esiste $f'_\pm(x_0) \in \mathbb{R}$ derivate destre e sinistre.

TEOREMI UTILI

- (**Densità in norma \mathcal{L}^1 delle \mathcal{C}_0^∞ nelle \mathcal{L}^1**) Sia $f \in \mathcal{L}^1(a, b)$. Allora $\forall \varepsilon > 0, \exists f_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(a, b)$ tale che

$$\|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1} = \int_a^b |f - f_\varepsilon| \, dx < \varepsilon$$

- (**Lemma di Riemann-Lebesgue**) $f \in \mathcal{L}^1(a, b)$. Allora $\int_a^b f(x) \sin(nx) \, dx \rightarrow 0$ quando $|n| \rightarrow \infty$ (e per il coseno si ha un enunciato analogo) [Si usi il teorema di densità precedente con qualche stima]

SERIE DI FOURIER

- (**Relazioni di ortogonalità**) Valgono le seguenti formule:

1. Se $m + n > 0$ allora $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) \, dx = \pi \delta_{mn}$
2. Se $m + n > 0$ allora $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) \, dx = \pi \delta_{mn}$
3. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ si ha $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) \, dx = 0$

Ovvero seni e coseni (interi) sono ortogonali sull'intervallo $[-\pi, \pi]$

- (**Serie di Fourier**) Data una funzione f definiamo Serie di Fourier la serie formale seguente

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

dove si ha $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) f(x) \, dx$, $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) f(x) \, dx$, $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx$. Ovvero gli a_k, b_k, c_n sono legati dalle seguenti relazioni:
 $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ e $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad \forall k > 0$

NUCLEO DI DIRICHLET

- (**Nucleo di Dirichlet**) $D_n(z) = \sum_{k=-n}^n e^{ikz} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})z)}{\sin(\frac{z}{2})}$ [Raccogliere e^{-inz} e sommare la geometrica]
- (**Parità ed integrale**) $D_n(z)$ è pari e si ha $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) \, dz = 2\pi$ [Scambiare somma con integrale]
- (**Riemann-Lebesgue per i coefficienti**) Se $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ allora si ha $\hat{f}_n \rightarrow 0$ per $|n| \rightarrow \infty$ [Considerare la norma \mathcal{L}^2 delle code]
- (**Più regolarità più decrescenza**) Se $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$ allora $|n|^k \hat{f}_n \in \ell^2(\mathbb{Z})$. In particolare $\hat{f}_n = o(|n|^{-k})$ quando $|n| \rightarrow \infty$ [Integrare per parti la precedente]
- (**$f \in \mathcal{C}^1$ convergenza assoluta**) Se $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ allora la Serie di Fourier converge assolutamente [Usare GM-QM sulla precedente]
- (**$f \in \mathcal{C}^1$ convergenza delle parziali**) Se $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ allora $S_n(f, x) \rightarrow f(x)$ per $n \rightarrow \infty$ e $\forall x \in \mathbb{T}$ [Scrivere S_n come convoluzione tra f e D_n e moltiplicare per uno. Poi stimare la differenza con RL]

- **($f \in C^1$ a tratti convergenza delle parziali)** Se $f \in C^1$ e la derivata esiste ovunque tranne al più in un numero finito di punti, nei quali $\exists f'_\pm(x_0) \in \mathbb{R}$ derivate sinistre e destre, allora si ha $S_n(f, x) \rightarrow f(x)$ quando $n \rightarrow \infty$ [Usare la parità di D_n e spezzare in due pezzi per la stima con le derivate da un lato]
- **($f \in C^1$ a tratti, comportamento nei punti di salto)** Siano x_1, \dots, x_n i punti di salto. In questi definiamo $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [-\pi, \pi] \setminus \{x_i\}_{i=1, \dots, n} \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{se } x \in \{x_i\}_{i=1, \dots, n} \end{cases}$, dove $f(x^\pm) = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} f(x + h)$, allora $S_n(f, x) \rightarrow \tilde{f}(x)$ quando $n \rightarrow \infty$ [Basta stimare come già precedentemente fatto solo nei punti di salto]
- **(Dini per la convergenza delle parziali)** Sia $f \in C^0(\mathbb{T})$ tale che $\exists \delta$ per cui si abbia

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+z) - f(x)|}{|z|} dz < +\infty$$

Allora si ha $S_n(f, x) \rightarrow f(x)$ (o eventualmente a $\tilde{f}(x)$ come sopra) [Usare Riemann-Lebesgue sulla funzione $g(z)$]

STIME

- **(Stime sui coefficienti di Fourier)** Siano $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$. Allora si ha:
 1. $|\hat{f}_k - \hat{g}_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)| dx$
 2. $|S_n(f, x) - S_n(g, x)| \leq \frac{2n+1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)| dx$
- **(serie dei coefficienti in $\uparrow^1(\mathbb{Z})$)** Se $\{c_n\} \in \uparrow^1(\mathbb{Z})$, allora la serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge ad un certo $g(x) \in C^0(\mathbb{T})$ tale che $c_n = \hat{g}_n \quad \forall n$.
- **(Sommabilità secondo Cesaro)** $\{a_n\} \in \mathbb{R}$ successione. Se $a_n \rightarrow L$ allora $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \rightarrow L$ (e a_n si dice sommabile secondo Cesaro)

NUCLEO DI FEJER

- **(Nucleo di Fejer)** $\phi_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(z) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin(\frac{n}{2}z)}{\sin(\frac{z}{2})} \right)^2$
- **(Serie di Fourier alla Cesaro)** $\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f, x)$
- **(Proprietà del Nucleo di Fejer)** Si hanno le seguenti proprietà:
 1. **(Normalizzazione)** $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(z) dz = 1$
 2. **(Parità)** $\phi_n(z) = \phi_n(-z)$
 3. **(Positività)** $\phi_n(z) \geq 0$
 4. **(Rapida decrescenza)** $\forall \varepsilon, \delta > 0 \quad \exists N$ t.c. $\forall z \notin [-\delta, \delta] \quad \forall n > N \quad \phi_n(z) < \varepsilon$. [Stime]
 5. **(Velocità di decrescenza)** $\phi_n(0) = O(n)$
- **(Convergenza uniforme della Serie "di Fejer" per funzioni continue)** $f \in C^0(\mathbb{T})$. Allora $\sigma_n(f, x) \rightarrow f(x)$ uniformemente quando $n \rightarrow \infty$, cioè $\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |\sigma_n(f, x) - f(x)| \rightarrow 0$ [Spezzare l'integrale nella parte interna ed esterna, e stimare in norma \mathcal{L}^1 . Notare che la maggiorazione non dipende da x]

SUCCESSIONE DI DIRAC

- **(Successione di Dirac)** Una successione di funzioni $\{Q_n : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}\}$ si dice successione di Dirac se soddisfa le proprietà:
 1. **(Normalizzazione)** $\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(x) dx = 1$
 2. **(Parità)** $Q_n(-x) = Q_n(x)$
 3. **(Positività)** $Q_n(x) \geq 0$

4. (Quasi-nullità integrale esterna) $\int_{\delta \leq |x|} Q_n(x) dx \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty \quad \forall \delta > 0$

- (Convergenza uniforme delle convolute) Se Q_n è una successione di Dirac, allora si ha

$$f \star Q_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-z)Q_n(z) dz \rightarrow f(x) \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

- (Coefficienti di Fourier della convoluzione) $(f \hat{\star} g)_n = \hat{f}_n \cdot \hat{g}_n$
- (Commutatività della convoluzione) $f \star g = g \star f$
- (Disuguaglianza di convoluzione in norma \mathcal{L}^1) Si ha $\|f \star g\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1} \cdot \|g\|_{\mathcal{L}^1}$
- (Disuguaglianza di convoluzione) $f \in \mathcal{L}^1, g \in \mathcal{L}^p, 1 \leq p \leq \infty$. Allora si ha $\|f \star g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1} \|g\|_{\mathcal{L}^p}$. [Per $p = \infty$ è evidente. Per gli altri utilizzare la disuguaglianza di Holder]
- (Coefficienti di Fourier della moltiplicazione) $\hat{f}g_n = \hat{f}_k \star \hat{g}_k(n)$
- (Derivabilità della Convoluta) $f \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n), g \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $f \star g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ e si ha $D^\alpha(f \star g)(x) = (D^\alpha f \star g)(x)$
- (Formula per le σ_n) $\sigma_n(f, x) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \hat{f}_k e^{ikx}$
- ("Completezza" dei coefficienti di fourier) Sia $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ t.c. $\hat{f}_k = 0 \forall k$. Allora $f \cong 0$
- (Convergenza assoluta in norma della successione di Dirac) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$. Allora $\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(f, x) - f(x)| dx \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$
- $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ tale che $\hat{f}_k = 0 \forall k$ allora si ha $f \cong 0$ quasi ovunque
- (Identità di Parseval) Sia $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{inx}$ con $\{\hat{f}_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Allora vale l'uguaglianza $\|f\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2$.
- (Massimalità della Circonferenza) C curva chiusa, semplice e \mathcal{C}^1 . Allora l'area della zona interna a C è massima quando C è la circonferenza. [Scrivere " $x(t), y(t)$ " in serie di fourier e calcolarne l'area per poi usare parseval]

CONTROESEMPI

- (Du Bois-Raymond) Si può costruire una funzione $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ tale che $S_n(f, x)$ NON converge a f per qualche x . Ovvero, non tutte le serie di fourier di funzioni continue convergono alla funzione di partenza.

FISICA

Cerchiamo in questa sezione di utilizzare i precedenti teoremi sulla serie di Fourier per risolvere problemi classici di Fisica.

EQUAZIONE DELLA CORDA VIBRANTE

L'equazione è $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Vogliamo capire per quali condizioni iniziali $u(0, x) = f(x)$ la soluzione esiste ed è unica.

1. (Alcune soluzioni) Ci accorgiamo che le funzioni $u_n(t, x) = \sin(nx) \cos(cnt)$ risolvono l'equazione, dunque ogni serie ottenuta sommandole con coefficienti risolve (per linearità dell'equazione).

2. **(Separazione delle variabili)** Proviamo a risolvere l'equazione separando le variabili. Scriviamo dunque $u(t, x) = T(t)X(x)$ e sostituendo nell'equazione principale si ha $\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$. Le due funzioni sono uguali, ma in variabili diverse. Ciò significa che sono costanti. Ovvero ci siamo ricondotti allo studio del sistema

$$\begin{cases} X''(x) + \frac{\lambda}{c^2} X(x) = 0 \\ X(-\pi) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

visto che vogliamo la corda fissata alle estremità. (D'ora in poi mettiamo $c = 1$)

SPAZI DI HILBERT

DEFINIZIONI E PRIME PROPRIETÀ

- **(Definizione)** Sia X spazio vettoriale su \mathbb{R} (oppure su \mathbb{C}) si dice spazio euclideo se esiste un prodotto interno $\langle \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ simmetrico (rispettivamente hermitiano) che induce una norma $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$
- **(Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)** $\forall x, y \in X \quad |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$