ANALISI 3

SERIE E TRASFORMATA DI FOURIER

DEFINIZIONI E REMARKS

- (**$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ a tratti**) Diciamo che $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ a tratti quando $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ e la derivata esiste dovunque tranne che in un numero finito di punti, nei quali esiste $f'_{\pm}(x_0) \in \mathbb{R}$ derivate destre e sinistre.

TEOREMI UTILI

- (**Densità in norma $\mathcal{L}^1$ delle $\mathcal{C}_0^\infty$ nelle $\mathcal{L}^1$**) Sia $f \in \mathcal{L}^1(a,b)$. Allora $\forall \varepsilon > 0, \exists f_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(a,b)$ tale che

$$\|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1} = \int_a^b \mid f - f_\varepsilon \mid \, \mathrm{d}x < \varepsilon$$

- (**Lemma di Riemann-Lebesgue**) $f \in \mathcal{L}^1(a,b)$. Allora $\int_a^b f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \to 0$ quando $\mid n \mid \to \infty$ (e per il coseno si ha un enunciato analogo) [Si usi il teorema di densità precedente con qualche stima]

SERIE DI FOURIER

- (**Relazioni di ortogonalità**) Valgono le seguenti formule:
  1. Se $m+n>0$ allora $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \pi\delta_{mn}$
  2. Se $m+n>0$ allora $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \pi\delta_{mn}$
  3. $\forall m,n \in \mathbb{N}$ si ha $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0$

  Ovvero seni e coseni (interi) sono ortogonali sull'intervallo $[-\pi,\pi]$

- (**Serie di Fourier**) Data una funzione f definiamo Serie di Fourier la serie formale seguente

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kx) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

  dove si ha $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)f(x)\,\mathrm{d}x$, $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)f(x)\,\mathrm{d}x$, $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$. Ovvero gli a_k, b_k, c_n sono legati dalle seguenti relazioni:
  $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ e $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$ $\forall k > 0$

NUCLEO DI DIRICHLET

- (**Nucleo di Dirichlet**) $D_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikz} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})z)}{\sin(\frac{z}{2})}$ [Raccogliere e^{-inz} e sommare la geometrica]

- (**Parità ed integrale**) $D_n(z)$ è pari e si ha $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) = 2\pi$ [Scambiare somma con integrale]

- (**Riemann-Lebesgue per i coefficienti**) Se $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ allora si ha $\hat{f}_n \to 0$ per $\mid n \mid \to \infty$ [Considerare la norma $\mathcal{L}^2$ delle code]

- (**Più regolarità più decrescenza**) Se $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$ allora $\mid n \mid^k \hat{f}_n \in \ell^2(\mathbb{Z})$. In particolare $\hat{f}_n = o(\mid n \mid^{-k})$ quando $\mid n \mid \to \infty$ [Integrare per parti la precedente]

- (**$f\mathcal{C}^1$ convergenza assoluta**) Se $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ allora la Serie di Fourier converge assolutamente [Usare GM-QM sulla precedente]

- (**$f\mathcal{C}^1$ convergenza delle parziali**) Se $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ allora $S_n(f,x) \to f(x)$ per $n \to \infty$ e $\forall x \in \mathbb{T}$ [Scrivere S_n come convoluzione tra f e D_n e moltiplicare per uno. Poi stimare la differenza con RL]

- ($f\mathcal{C}^1$ **a tratti convergenza delle parziali**) Se $f \in CT0$ e la derivata esiste ovunque tranne al più in un numero finito di punti, nei quali $\exists f'_{\pm}(x_0) \in \mathbb{R}$ derivate sinistre e destre, allora si ha $S_n(f,x) \to f(x)$ quando $n \to \infty$ [Usare la parità di D_n e spezzare in due pezzi per la stima con le derivate da un lato]

- ($f\mathcal{C}^1$ **a tratti, comportamento nei punti di salto**) Siano $x_1, \dots, x_n$ i punti di salto. In questi definiamo $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [-\pi, \pi] \setminus \{x_i\}_{i=1,\dots,n} \\ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & \text{se } x \in \{x_i\}_{i=1,\dots,n} \end{cases}$, dove $f(x^{\pm}) = \lim_{h \to 0^{\pm}} f(x+h)$, allora $S_n(f,x) \to \tilde{f}(x)$ quando $n \to \infty$ [Basta stimare come già precedentemente fatto solo nei punti di salto]

- (**Dini per la convergenza delle parziali**) Sia $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ tale che $\exists \delta$ per cui si abbia

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|\ f(x+z) - f(x)\ |}{|\ z\ |} \, \mathrm{d}z < +\infty$$

  Allora si ha $S_n(f,x) \to f(x)$ (o eventualmente a $\tilde{f}(x)$ come sopra) [Usare Riemann-Lebesgue sulla funzione $g(z)$]

STIME

- (**Stime sui coefficienti di Fourier**) Siano $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$. Allora si ha:
  1. $|\ \hat{f}_k - \hat{g}_k\ | \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\ f(x) - g(x)\ |\ \mathrm{d}x$
  2. $|\ S_n(f,x) - S_n(g,x)\ | \leq \frac{2n+1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\ f(x) - g(x)\ |\ \mathrm{d}x$

- (**serie dei coefficienti in $\updownarrow^1(\mathbb{Z})$**) Se $\{c_n\} \in \updownarrow^1(\mathbb{Z})$, allora la serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge ad un certo $g(x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ tale che $c_n = \hat{g}_n \quad \forall n$.

- (**Sommabilità secondo Cesaro**) $\{a_n\} \in \mathbb{R}$ successione. Se $a_n \to L$ allora $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \to L$ (e a_n si dice sommabile secondo Cesaro)

NUCLEO DI FEJER

- (**Nucleo di Fejer**) $\phi_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(z) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin(\frac{n}{2}z)}{\sin(\frac{z}{2})} \right)^2$

- (**Serie di Fourier alla Cesaro**) $\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f,x)$

- (**Proprietà del Nucleo di Fejer**) Si hanno le seguenti proprietà:
  1. (**Normalizzazione**) $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(z)\ \mathrm{d}z = 1$
  2. (**Parità**) $\phi_n(z) = \phi_n(-z)$
  3. (**Positività**) $\phi_n(z) \geq 0$
  4. (**Rapida decrescenza**) $\forall \varepsilon, \delta > 0 \quad \exists N$ t.c. $\forall z \notin [-\delta, \delta] \quad \forall n > N \qquad \phi_n(z) < \varepsilon$. [Stime]
  5. (**Velocità di decrescenza**) $\phi_n(0) = O(n)$

- (**Convergenza uniforme della Serie "di Fejer" per funzioni continue**) $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$. Allora $\sigma_n(f,x) \to f(x)$ uniformemente quando $n \to \infty$, cioè $\sup_{x \in [-\pi,\pi]} |\ \sigma_n(f,x) - f(x)\ | \to 0$ [Spezzare l'integrale nella parte interna ed esterna, e stimare in norma $\mathcal{L}^1$. Notare che la maggiorazione non dipende da x]

SUCCESSIONE DI DIRAC

- (**Successione di Dirac**) Una successione di funzioni $\{Q_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}\}$ si dice successione di Dirac se soddisfa le proprietà:
  1. (**Normalizzazione**) $\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(x)\ \mathrm{d}x = 1$
  2. (**Parità**) $Q_n(-x) = Q_n(x)$
  3. (**Positività**) $Q_n(x) \geq 0$

4. (**Quasi-nullità integrale esterna**) $\int_{\delta \leq |x|} Q_n(x)\, \mathrm{d}x \to 0$ se $n \to \infty \quad \forall \delta > 0$

- (**Convergenza uniforme delle convolute**) Se Q_n è una successione di Dirac, allora si ha
$$f \star Q_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-z) Q_n(z)\, \mathrm{d}z \to f(x) \quad \text{per } n \to \infty$$
- (**Coefficienti di Fourier della convoluzione**) $\hat{(f \star g)}_n = \hat{f}_n \cdot \hat{g}_n$
- (**Commutatività della convoluzione**) $f \star g = g \star f$
- (**Disuguaglianza di convoluzione in norma $\mathcal{L}^1$**) Si ha $\|f \star g\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1} \cdot \|g\|_{\mathcal{L}^1}$
- (**Disuguaglianza di convoluzione**) $f \in \mathcal{L}^1, g \in \mathcal{L}^p, 1 \leq p \leq \infty$. Allora si ha $\|f \star g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1} \|g\|_{\mathcal{L}^p}$. [Per $p = \infty$ è evidente. Per gli altri utilizzare la disuguaglianza di Holder]
- (**Coefficienti di Fourier della moltiplicazione**) $\hat{fg}_n = \hat{f}_k \star \hat{g}_k(n)$
- (**Derivabilità della Convoluta**) $f \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n), g \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Allora $f \star g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ e si ha $D^\alpha(f \star g)(x) = (D^\alpha f \star g)(x)$
- (**Formula per le σ_n**) $\sigma_n(f,x) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \hat{f}_k e^{ikx}$
- (**"Completezza" dei coefficienti di fourier**) Sia $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ t.c. $\hat{f}_k = 0 \forall k$. Allora $f \cong 0$
- (**Convergenza assoluta in norma della successione di Dirac**) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$. Allora $\int_{-\pi}^{\pi} \mid \sigma_n(f,x) - f(x) \mid \mathrm{d}x \to 0$ per $n \to \infty$
- $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ tale che $\hat{f}_k = 0 \forall k$ allora si ha $f \cong 0$ quasi ovunque
- (**Identità di Parseval**) Sia $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{inx}$ con $\{\hat{f}_n\} \in \updownarrow^2(\mathbb{Z})$. Allora vale l'uguaglianza $\|f\|^2_{\mathcal{L}^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mid \hat{f}_n \mid^2$.
- (**Massimalità della Circonferenza**) C curva chiusa, semplice e $\mathcal{C}^1$. Allora l'area della zona interna a C è massima quando C è la circonferenza. [Scrivere "$x(t), y(t)$" in serie di fourier e calcolarne l'area per poi usare parseval]

CONTROESEMPI

- (**Du Bois-Raymond**) Si può costruire una funzione $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ tale che $S_n(f,x)$ NON converge a f per qualche x. Ovvero, non tutte le serie di fourier di funzioni continue convergono alla funzione di partenza.

FISICA

Cerchiamo in questa sezione di utilizzare i precedenti teoremi sulla serie di Fourier per risolvere problemi classici di Fisica.

EQUAZIONE DELLA CORDA VIBRANTE

L'equazione è $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Vogliamo capire per quali condizioni iniziali $u(0,x) = f(x)$ la soluzione esiste ed è unica.

1. (**Alcune soluzioni**) Ci accorgiamo che le funzioni $u_n(t,x) = \sin(nx)\cos(cnt)$ risolvono l'equazione, dunque ogni serie ottenuta sommandole con coefficienti risolve (per linearità dell'equazione).

2. (**Separazione delle variabili**) Proviamo a risolvere l'equazione separando le variabili. Scriviamo dunque $u(t,x) = T(t)X(x)$ e sostituendo nell'equazione principale si ha $\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$. Le due funzioni sono uguali, ma in variabili diverse. Ciò significa che sono costanti. Ovvero ci siamo ricondotti allo studio del sistema

$$\begin{cases} X''(x) + \frac{\lambda}{c^2} X(x) = 0 \\ X(-\pi) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

visto che vogliamo la corda fissata alle estremità. (D'ora in poi mettiamo $c = 1$)