TRUCCHI DI ANALISI 3

TEOREMI DI CONVERGENZA INTEGRALE

CONVERGENZA MONOTONA

CONVERGENZA DOMINATA

EQUAZIONI DIFFERENZIALI CLASSICHE

EQUAZIONE DELLA CORDA VIBRANTE

EQUAZIONE DEL CALORE

EQUAZIONE DI POISSON / LAPLACE

PROIEZIONE SU UN CONVESSO

Sia H uno spazio di Hilbert e $K \subset H$ un convesso chiuso. Allora si ha che:

- $\exists! P_K : H \to K$, chiamata mappa di proiezione, tale che $\forall x \in H$ si ha $\|x - P_K(x)\| = \min_{y \in K} \|x - y\|$.
- Il proiettato è "sul bordo" del convesso, ovvero $\forall w \in K$ si ha $\langle x - P_K x \mid w - P_K x \rangle \leq 0$
- La mappa di proiezione è lipschitziana, ovvero $\forall f, g \in X$ si ha $\|P_K f - P_K g\| \leq \|f - g\|$

Inoltre, supponendo che K sia un sottospazio vettoriale chiuso si ha che:

- "La congiungente x e $P_K(x)$ è ortogonale a K", ovvero $\forall w \in K \quad \langle x - P_K(x) \mid w \rangle = 0$
- $H = K \oplus K^{\perp}$
- La proiezione P_K è lineare ed inoltre vale $\|P\| = 1$ (dove la norma è quella operatoriale)
- Definendo $Q = I - P$ si ha, $\forall x \in H$ la decomposizione seguente:
  - $x = P(x) + Q(x)$
  - $\langle P(x), Q(x) \mid = \rangle 0$
  - $\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2$

ESISTENZA

Ad x fissato si prenda una successione di $y_n \in K$ che tendono all'$\inf_{y \in K} \|y - x\|$. Vogliamo mostrare che è una successione di Cauchy: in questo modo, per completezza dell'Hilbert, avremmo che $y_n \to y_\infty \in H$ e per chiusura di K si ha $y_\infty \in K$, da cui potremmo definire $P(x) = y_\infty$.
Chiamiamo ora $d_n = \|x - y_n\|$ ed abbiamo che $d_n \to d = \inf_n \|x - y_n\|$. Utilizzando l'identità del parallelogramma si ha, se $n, m > N$ che vale:

$$\|\frac{(x - y_n) + (x - y_m)}{2}\|^2 + \|\frac{(x - y_n) - (x - y_m)}{2}\|^2 = \frac{1}{2}(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2)$$

ovvero, riscrivendo che:

$$\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\|^2 + \|\frac{y_n - y_m}{2}\|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2)$$

Ma sappiamo che per convessità si ha $\frac{y_n+y_m}{2} \in K$ e quindi, per definizione di estremo inferiore si ha $\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\|^2 \geq d^2$ e quindi $\|\frac{y_n-y_m}{2}\| \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 - d^2) + \frac{1}{2}(d_m^2 - d^2) \leq \varepsilon$
Ciò significa che la successione y_n è di cauchy in H da cui segue la tesi.

Unicità

Supponiamo per assurdo che esistano due punti che realizzano il minimo, e li denotiamo con p e q. (ovviamente dipendono da x, ma qui li stiamo pensando ad x fissato). Allora dall'identità del parallelogramma si ha
$$\|x-\frac{p+q}{2}\|^2+\|\frac{p-q}{2}\|^2=\frac{1}{2}(\|x-p\|^2+\|x-q\|^2)=d^2$$
Allora siccome, come prima, $\frac{p+q}{2}\in K$ per convessità, si ha che $\|\frac{p-q}{2}\|^2\leq d^2-d^2=0$, da cui segue $p=q$.

Proiettato sul Bordo

Diciamo che il proiettato sta "sul bordo" (non in maniera propria) del convesso (come è abbastanza intuitivo che sia facendo un disegno in $\mathbb{R}^2$) e lo esprimiamo dicendo che il segmento che congiunge x a P_Kx è "dalla parte opposta" (ovvero ha prodotto scalare negativo) rispetto ad ogni segmento che congiunge un qualunque punto w del compatto a P_Kx.
Lemma preliminare: Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabile e supponiamo che in a vi sia un minimo. Allora $f'(a)\geq 0$ (Dove il limite è inteso sulla parte che sta dentro al dominio di definizione). Dunque, se $f:K\subseteq\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ è $\mathcal{C}^1$ e definiamo $\phi(t)=f(x_0+t(x-x_0))$ per $t\in[0,1]$, allora si ha che $\phi'(0)=\langle\nabla f(x_0)\mid x-x_0\rangle\geq 0$.
Definiamo ora $\Psi(t)=\|x-((1-t)P_K(x)+tw)\|^2$. Per il lemma precedente si ha $\Psi'(0)\geq 0\quad\forall w\in K$. Ma sappiamo che $\Psi(t)=\|x-P_K(x)+t(P_K(x)-w)\|^2=\|x-P_K(x)\|^2+2t\langle x-P_K(x)\mid P_K(x)-w\rangle+t^2\|P_K(x)-w\|^2$ e quindi $\Psi'(0)=2\langle x-P_K(x)\mid P_K(x)-w\rangle\leq 0\quad\forall w\in K$
(In realtà, ma non lo dimostriamo, vale anche il viceversa: se il punto $P_K(x)$ gode della proprietà precedente, allora è il punto di proiezione)

Lipschitzianità

Sappiamo che $\langle x-P_K(x)\mid w-P_K(x)\rangle\leq 0$ e ci giochiamo la disuguaglianza con $(x,w)=(f,P_K(g))=(g,P_K(f))$, ovvero si ottiene:

$$0\geq\langle f-P_K(f)\mid P_K(g)-P_K(f)\rangle+\langle g-P_K(g)\mid P_K(f)-P_K(g)\rangle=\langle f-P_K(f)\mid P_K(g)-P_K(f)\rangle-\langle g-P_K(g)\mid P_K(g)-P_K(f)\rangle=$$

Allora si ha

$$\|P_K(g)-P_K(f)\|^2=\langle P_K(g)-P_K(f)\mid P_K(g)-P_K(f)\rangle\leq\langle g-f\mid P_K(g)-P_K(f)\rangle\leq\|g-f\|\|P_K(g)-P_K(f)\|$$

E si ottiene la disuguaglianza cercata dividendo per $\|P_K(g)-P_K(f)\|$

Ortogonalità della congiungente

Supponendo ora che K sia un sottospazio vettoriale chiuso possiamo sostituire nella disuguaglianza precedente $w=0$ e $w=2P_K(x)$ ottenendo che $\langle x-P_K(x)\mid P_K(x)\rangle\geq 0$ e $\langle x-P_K(x)\mid P_K(x)\rangle\leq 0$, ovvero $\langle x-P_K(x)\mid P_K(x)\rangle=0$, ma allora otteniamo $\langle x-P_K(x)\mid w\rangle=\langle x-P_K(x)\mid w-P_K(x)\rangle\leq 0$.
Inoltre, valendo la disuguaglianza sia per w che per $-w$, si ottiene facilmente che $\langle x-P_K(x)\mid w\rangle=0$, che è la tesi.

Decomposizione in somma diretta

Dato $x\in H$, si ha $x=x-P_K(x)+P_K(x)$. Notiamo ora che $P_K(x)\in K$ e che, per quanto detto prima, $x-P_K(x)\in K^{\perp}$

La proiezione è lineare e di norma unitaria

Per vedere che è lineare, basta osservare che:

$$\begin{cases}\langle\alpha x+\beta y-P_K(\alpha x+\beta y),w\mid=\rangle 0 & \forall w\in K\\ \langle\alpha x+\beta y-\alpha P_K(x)-\beta P_K(y)\mid w\rangle=0 & \forall w\in K\end{cases}$$

Allora $\langle P_K(\alpha x+\beta y)-\alpha P_K(x)-\beta P_K(y)\mid w\rangle=0\quad\forall w\in K$ ma poiché $P_K(\alpha x+\beta y)-\alpha P_K(x)-\beta P_K(y)\in K$ si ha $\|P_K(\alpha x+\beta y)-\alpha P_K(x)-\beta P_K(y)\|=0$ e quindi $P_K(\alpha x+\beta y)=\alpha P_K(x)+\beta P_K(y)$.
Si ha inoltre che $\|x\|\|P_K(x)\|\geq\langle x\mid P_K(x)\rangle=\langle P_K(x)\mid P_K(x)\rangle=\|P_K(x)\|^2$ e quindi $\|P\|\leq 1$, ma preso $k\in K$ si ha che $P_K(k)=k$ e quindi $\|P\|\geq 1$, ovvero $\|P\|=1$.

Riesz-Fisher

Sia $f \in \text{Lincont}(H, \mathbb{R})$ continuo e limitato e lineare, con H spazio di Hilbert. Allora $\exists! y \in H$ tale che $f(x) = \langle x, y \mid \quad \rangle \forall x \in H$

Lemma della codimensione

Dato H spazio di Hilbert e $f \in \text{Lincont}(H, \mathbb{R})$ continuo e limitato e lineare non nullo si ha che codim Ker $f = 1$

Sia $y \in H$ tale che $f(y) \neq 0$. Allora definiamo $\lambda = \frac{1}{f(y)}$ in modo che $f(\lambda y) = 1$. Sia ora $y_0 = \lambda y$. Dato un qualunque $x \in H$ si ha $x = x - f(x)y_0 + f(x)y_0$, con $x - f(x)y_0 \in$ Ker f. Inoltre tale decomposizione è unica, in quanto se $x = x' + \alpha y_0 = x'' + \beta y_0$ con $x', x'' \in$ Ker f allora si ha $f(x) = \alpha = \beta$ e dunque $x' = x''$. Concludiamo quindi che $H =$ Ker $f \oplus$ Span (y_0), che è la tesi.

Esistenza

Supponiamo $f \neq 0$ e chiamiamo $K =$ Ker f. Allora K è un sottospazio lineare chiuso di codimensione 1. Chiamiamo quindi P la proiezione su K. Visto che $H = K \oplus K^{\perp}$ e $K^{\perp} = Span(y_0)$ con $f(y_0) = 1$, allora dato $h \in H$ si può scomporre come $x = \lambda y_0 + z$ con $z \in$ Ker $f = K$.
Allora $f(x) = \lambda f(y_0) = \lambda$ e si ha $\langle x \mid y_0 \rangle = \lambda \langle y_0 \mid y_0 \rangle = \lambda \|y_0\|^2$ dunque ponendo $y = \frac{y_0}{\|y_0\|^2}$ si ha l'esistenza.

Unicità

Supponiamo ora che esistano due elementi y, w che rappresentano f. Allora $\langle x, y - w \mid = \rangle 0 \quad \forall x \in H$ e quindi in particolare $\|y - w\|^2 = 0 \implies y = w$

Funzioni Armoniche

Serie e Trasformata di Fourier

Definizioni e Proprietà

Approssimanti

Riemann-Lebesgue