

Formulario di Fisica II

Idea originaria di Federico Glaudo e Giada Franz

Piccole aggiunte di Dario Balboni

7 novembre 2016

1 Costanti fisiche

Costante dielettrica nel vuoto

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.987 \cdot 10^9$$

Permeabilità magnetica nel vuoto

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1.256 \cdot 10^{-6} \frac{H}{m}$$

Velocità della luce nel vuoto

$$c = 2.997 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

2 Leggi fondamentali del campo elettrico

Legge di Coulomb

Chiamando $\epsilon = \epsilon_0$ se siamo nel vuoto e $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ se siamo in un mezzo:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

Campo elettrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{r}'$$

Potenziale

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Legge di Gauss

$$\frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho = \int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \hat{n}$$

I equazione di Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

II equazione di Maxwell (Elettrostatica)

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Equazione di Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Energia elettrostatica

$$U_E = \frac{1}{2} \int \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{2} \int \rho V = \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E}^2$$

Forza agente su una carica

La forza di Lorentz agente su una carica **in assenza di campo magnetico** è

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

3 Primi termini dello sviluppo del potenziale

Nel caso in cui la distribuzione di carica sia sufficientemente localizzata, si può sviluppare il potenziale ai primi ordini con le formule:

Termine di monopolo

$$V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\int \rho \right)$$

Termine di dipolo

$$V(\vec{r}) \approx \frac{\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \left(\int \rho(\vec{r}') \vec{r}' d\vec{r}' \right)$$

4 Conduttori

Pressione elettrostatica

$$p = \frac{dF^\perp}{dS} = \frac{dq}{dS} \cdot \frac{E_{in}^\perp + E_{out}^\perp}{2} = \sigma \cdot \frac{E_{in}^\perp + E_{out}^\perp}{2}$$

Campo e pressione sulla superficie di un conduttore

$$E^\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$
$$p = \sigma \frac{E^\perp}{2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

Sistema di conduttori

Chiamiamo $\vec{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$ il vettore delle cariche e $\vec{V} = (V_1, \dots, V_n)$ il vettore dei potenziali degli n con-

duttori, allora esiste una matrice C tale che $\vec{Q} = C\vec{V}$. Inoltre:

$$U = \frac{1}{2} \sum Q_i V_i$$

5 Configurazioni speciali di carica

Campi e potenziali particolari

Carica puntiforme

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$$

Non se ne può calcolare l'energia elettrostatica poiché diverge. I fisici la chiamano autoenergia e viene solitamente tolta negli altri conti per trovare l'energia elettrostatica.

Filo

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r}$$

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r)$$

Piano

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$V(r) = -\frac{\sigma r}{2\epsilon_0}$$

Sfera uniformemente carica Si suppone, ovviamente che R sia il raggio della sfera, $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ la sua carica totale.

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \frac{r}{R} \hat{r} & \text{dentro alla sfera} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} & \text{fuori dalla sfera} \end{cases}$$

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left(-\frac{r^2}{2R^3} + \frac{3}{2R} \right) & \text{dentro alla sfera} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & \text{fuori dalla sfera} \end{cases}$$

$$U_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} \frac{6}{5}$$

Guscio sferico con carica superficiale

Filo ciccione

Due cariche uguali a distanza fissata Si suppone che vi siano due cariche Q (dello stesso valore e segno) a distanza $2D$. Useremo le coordinate cilindriche ρ, z, ϕ .

$$\vec{E}(z, \rho) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{(\rho^2 + (z-D)^2)(\rho^2 + (z+D)^2)} (z(\rho^2 + z^2 - D^2)\hat{z} + \rho(\rho^2 + z^2 + D^2)\hat{\rho})$$

Due cariche diverse a distanza fissata

Dipolo

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{r^3} \right)$$

$$\tau = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$\vec{F} = D\vec{E} \cdot \vec{p}$$

Carica immagine

Piano Nel simmetrico rispetto al piano una carica $-q$.

Sfera a terra Nell'inverso rispetto alla sfera, cioè in $x' = \frac{R^2}{x}$, una carica $q' = -\frac{qR}{x}$.

Sfera isolata Se c'è una carica q all'esterno della sfera, le cariche immagine (per risolvere il problema all'esterno della sfera) sono due: una nell'inverso rispetto alla sfera di carica $q' = -\frac{qR}{x}$ e una nel centro della sfera di carica $-q'$ (in modo che la carica totale nella sfera sia 0).

6 Condensatori

Relazione tra carica e capacità

$$Q = CV$$

Relazione tra corrente e tensione

$$I = C \frac{dV}{dt}$$

Energia di un condensatore

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Capacità di vari condensatori

Nota: la presenza di un materiale fra le armature di un condensatore ne aumenta la capacità di un fattore ϵ_r (numero puro) detto costante dielettrica relativa che dipende dalle caratteristiche del materiale. (Tutte le formule della capacità vengono moltiplicate per ϵ_r)

Condensatore piano

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

dove S è la superficie del condensatore e d è la distanza fra le due piastre.

Condensatore cilindrico

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R}{r}\right)}$$

dove h è l'altezza del cilindro e R, r sono rispettivamente il raggio della piastra esterna e quello della piastra interna.

Condensatore sferico

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{Rr}{R-r}$$

dove R ed r sono rispettivamente il raggio della piastra esterna e quello della piastra interna.

Conduttore sferico isolato

$$C = 4\pi\epsilon_0 r$$

Condensatori in parallelo

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

Condensatori in serie

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

7 Correnti

Equazione di continuità

Indichiamo con \vec{J} la densità di corrente.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_S \vec{J} \cdot \hat{n}$$

Legge di Ohm (conducibilità e resistività)

La resistività ρ è tale che

$$\vec{J} = \frac{\vec{E}}{\rho}$$

e la conducibilità è $\sigma = \frac{1}{\rho}$.

Effetto Joule

La potenza dissipata da un certo materiale in un certo istante è

$$P = \int \vec{E} \cdot \vec{J} = \int \frac{\vec{E}^2}{\rho}$$

dove per l'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato la legge di Ohm.

Tempo di scarica

Se la carica rispetta un'equazione del tipo

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{\tau}$$

allora chiamiamo τ il tempo di scarica. La soluzione di una tale equazione è

$$Q(t) = Q(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Per circuiti che si scaricano si ha

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

8 Resistenze

Legge di Ohm

$$V = RI$$

Relazione con Lunghezza e Sezione

$$R = \frac{d}{A}\rho$$

Potenza dissipata

$$P = VI = RI^2$$

Resistenze in serie

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

Resistenze in parallelo

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

9 Sviluppo in multipoli (cartesiane)

Data una funzione $v(\vec{R} + \vec{r})$ essa può essere sviluppata in un intorno dell'origine $\vec{r} = 0$ e si ha

$$v(\vec{R} - \vec{r}) = v(\vec{R}) + \sum_{\alpha=x,y,z} r_{\alpha} v_{\alpha}(\vec{R}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=x,y,z} \sum_{\beta=x,y,z} r_{\alpha} r_{\beta} v_{\alpha\beta}(\vec{R}) + \dots$$

dove $v_{\alpha}(\vec{R}) = \frac{\partial v(\vec{r}-\vec{R})}{\partial r_{\alpha}} \big|_{\vec{r}=0}$ e $v_{\alpha\beta}(\vec{R}) = \frac{\partial^2 v(\vec{r}-\vec{R})}{\partial r_{\alpha} \partial r_{\beta}} \big|_{\vec{r}=0}$

In elettromagnetismo viene frequentemente considerata l'espressione $v(\vec{r} - \vec{R}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|}$, da cui differenziando si ottiene $v(\vec{R}) = \frac{1}{R}$, $v_{\alpha}(\vec{R}) = -\frac{R_{\alpha}}{R^3}$, $v_{\alpha\beta}(\vec{R}) = \frac{3R_{\alpha}R_{\beta} - \delta_{\alpha\beta}R^2}{R^5}$ e quindi i rispettivi termini di monopolo, dipolo e quadrupolo elettrico sono definiti da $q_{\text{tot}} = \sum_i q_i$, $P_{\alpha} = \sum_i q_i r_{i\alpha}$ e $Q_{\alpha\beta} = \sum_i q_i (3r_{i\alpha}r_{i\beta} - \delta_{\alpha\beta}r_i^2)$ da cui si ottiene l'espansione del potenziale elettrico nel seguente modo:

$$4\pi\epsilon_0 V(\vec{R}) = \frac{q_{\text{tot}}}{R} + \frac{1}{R^3} \sum_{\alpha=x,y,z} P_{\alpha} R_{\alpha} + \frac{1}{6R^5} \sum_{\alpha,\beta=x,y,z} Q_{\alpha\beta} (3R_{\alpha}R_{\beta} - \delta_{\alpha\beta}R^2)$$

10 Leggi fondamentali del campo magnetico

Forza di Lorentz

Il campo magnetico \vec{B} è uno pseudovettore che genera su una carica in movimento la forza

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

III legge di Maxwell (assenza di monopolo magnetico)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Legge di Ampère

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Legge della circuitazione

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_{\gamma}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{concatenata}}$$

Biot-Savart

Nel caso di una distribuzione di carica localizzata:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{r}'$$

e nel caso di fili:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Densità di energia magnetica

$$u_B = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$$

Pressione magnetica

$$|p| = u_B = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$$

Energia magnetica

$$U_B = \int u_B = \frac{1}{2\mu_0} \int \vec{B}^2$$

11 Potenziale vettore

Relazioni fondamentali con \vec{B}

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

Biot-Savart per \vec{A}

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

12 Momento di dipolo magnetico

Definizione di momento di dipolo

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{J}$$

Caso di filo chiuso planare

Nel caso di un filo percorso da corrente I che racchiude una regione di piano con area (orientata) \vec{S} , vale

$$\vec{m} = I\vec{S}$$

Termine di dipolo nel potenziale vettore

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

Termine di dipolo nel campo magnetico

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$

Costante giromagnetica

Un corpo di massa m e carica q , ammette una costante g che lega il momento di dipolo al momento angolare:

$$\vec{m} = g \frac{q}{2m} \vec{L}$$

Nel caso di una carica puntiforme o una sfera uniformemente carica $g = 1$; per una sfera carica superficialmente $g = \frac{5}{3}$; per un elettrone $g = 2.002$.

13 Forza e momento generati dal campo magnetico

Forza del campo magnetico

Data una distribuzione di correnti \vec{J} , ed un campo magnetico *esterno* \vec{B} , la forza agente sulla distribuzione è:

$$\vec{F} = \int \vec{J} \times \vec{B}$$

Forza di un campo costante

$$\vec{F} = 0$$

Coppia torcente del campo magnetico

Data una distribuzione di correnti \vec{J} , ed un campo magnetico *esterno* \vec{B} , la coppia torcente, rispetto all'origine, agente sulla distribuzione è:

$$\vec{\tau} = \int \vec{r} \times (\vec{J} \times \vec{B})$$

Coppia torcente di un campo costante

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0$$

14 Distribuzioni di corrente particolari

Filo

Un filo lungo l'asse \hat{z} percorso da corrente I genera

$$\vec{B}(\vec{r}) = \hat{\varphi} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

dove $\hat{\varphi}$ è orientato in modo che se il pollice della mano destra è \hat{z} , le restanti dita ne descrivono il verso.

Solenoido

Un solenoide di raggio a , con n spire per unità di lunghezza percorse da corrente I , disposto lungo l'asse \hat{z} genera

$$\vec{B}(\vec{r}) = \hat{z} \mu_0 n I$$

che è diretto in modo che se le dita della mano destra seguono I , allora il pollice detta il verso di \vec{B} .

Spira

Una spira di raggio a percorsa da corrente I con asse lungo \hat{z} , genera sull'asse \hat{z}

$$\vec{B}(z) = \hat{z} \frac{\mu_0 a^2 I}{2(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dove anche questa volta \vec{B} è il pollice della mano destra e le altre dita seguono I .

15 Elettrodinamica

Ora tratteremo i casi, finora non considerati, di campo elettrico non costante e come questo incida sul campo magnetico. Questo farà sì che il campo elettrico non sia più conservativo e perciò non esista più un potenziale.

II equazione di Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Legge di Lenz

Nel caso di un circuito, la forma integrale della II equazione di Maxwell diventa:

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

dove \mathcal{E} è la forza elettromotrice (f.e.m.) indotta sul circuito e Φ_B è il flusso di campo magnetico attraverso la superficie racchiusa dal circuito. Il segno della f.e.m. indotta è tale da opporsi sempre alla variazione di corrente.

IV equazione di Maxwell

Questa legge generalizza sia l'equazione di continuità sia la legge di Ampère al caso elettrodinamico:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \nabla \times \vec{B} + \mu_0 \vec{J} = 0$$

16 Induzione magnetica

Induttanza

L'induttanza è una costante L dipendente dalla geometria del circuito, tale che

$$\Phi_B = LI$$

dove Φ_B è il flusso di campo magnetico generato dal circuito stesso.

Induttore

Un induttore è una componente di un circuito la cui induttanza non è trascurabile. L'esempio tipico è un solenoide.

Mutua induzione

Chiamando $\vec{\mathcal{E}}$ il vettore delle f.e.m. indotte e \vec{I} il vettore delle correnti di n circuiti, esiste una matrice L simmetrica, che sulla diagonale ha le autoinduttanze dei singoli circuiti, tale che:

$$\vec{\mathcal{E}} = -L \frac{d\vec{I}}{dt}$$

e il valore $L_{ij} = L_{ji}$ si calcola con

$$L_{ij} = L_{ji} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma_i} \oint_{\gamma_j} \frac{d\vec{l}_i \cdot d\vec{l}_j}{r}$$

dove con r indichiamo la distanza tra i punti in cui stiamo integrando.

Energia di un induttore

$$U = \frac{1}{2}LI^2$$

e nel caso di un sistema di induttori:

$$U = \frac{1}{2}\vec{I}^T L \vec{I}$$

Circuiti RLC

$$\mathcal{E} = RI + \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2Q}{dt^2}$$

17 Integrali “Noti”

$$\int \frac{r \, dr}{(r^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + 1}}$$

$$\int e^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}$$

$$\int t e^{\alpha t} dt = \frac{\alpha t - 1}{\alpha^2} e^{\alpha t}$$

18 Operatori differenziali

Gradiente in cartesiane

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

Gradiente in cilindriche

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

Gradiente in sferiche

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

Divergenza in cartesiane

$$\vec{\nabla} \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Divergenza in cilindriche

$$\vec{\nabla} \cdot A = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Divergenza in sferiche

$$\vec{\nabla} \cdot A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

Rotore in cartesiane

$$\begin{aligned} \nabla \times A = & \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \\ & \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \\ & \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z} \end{aligned}$$

Rotore in cilindriche

$$\begin{aligned} \nabla \times A = & \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \\ & \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \\ & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{z} \end{aligned}$$

Rotore in sferiche

$$\begin{aligned} \nabla \times A = & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(A_\phi \sin \theta)}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \\ & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \\ & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi} \end{aligned}$$