ETI

Questo file, a differenza degli altri, vuole essere un luogo dove raccolgo tutti i trucchetti vari di Teoria Degli Insiemi. Ciò viene reso necessario dal fatto che al corso si definiscono solo delle cose, e gli esercizi c'entrano poco con tutto quanto.

Assiomi

- (**Estensionalità**) Due classi sono uguali se hanno gli stessi elementi
- (**Di Astrazione**) Data una proprietà ben definita P, esiste una classe i cui elementi sono gli oggetti che verificano P.
- (**Di Comprensione**) Una sottoclasse di un insieme è un insieme
- (**Insieme Vuoto**) La classe vuota è un insieme
- (**Coppia**) Dati due insiemi a, b la coppia $\{a, b\}$ è un insieme
- (**Unione**) Se X è un insieme, allora $\cup X = \{z \mid z \in y \in X\}$ è un insieme
- (**Dell'Infinito**) $\exists X$ insieme tale che $\emptyset \in X$ e $a \in X \implies a \cup a \in X$
- (**Potenza**) Se X è un insieme, allora $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$ è un insieme
- (**Di Rimpiazzamento**) Se $F : X \to Y$ è una funzione tra classi ed il suo dominio X è un insieme, allora la sua immagine Im F è un insieme.
- (**Scelta**) Ne diamo un po' di formulazioni equivalenti:
  1. Dato un insieme X i cui elementi sono insiemi non vuoti a due a due disgiunti, esiste un insieme S che interseca ciascuno degli elementi di X in un singolo elemento.
  2. Data una famiglia $(X_i : i \in I)$ di insiemi non vuoti X_i, esiste una funzione f che associa a ciascun $i \in I$ un elemento $f(i) \in X_i$.
  3. Data una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi non vuoti, esiste una funzione g che associa a ciascun $X \in \mathcal{F}$ un elemento $g(X) \in X$. In particolare, fissato un insieme non vuoto A, possiamo considerare la famiglia $\mathcal{F} = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ di tutti i sottoinsiemi non vuoti di X ottenendo una funzione $g : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ che associa a ciascun sottoinsieme non vuoto $X \subseteq A$ un elemento $g(A) \in A$
  4. Siano X, Y due insiemi e sia $R \subseteq X \times Y$ una relazione tra X ed Y. Supponiamo che $(\forall x \in X)(\exists y \in Y) \quad R(x, y)$. Allora esiste $f : X \to Y$ tale che $(\forall x \in X) \quad R(x, f(x))$
  5. Per ogni famiglia $(X_i : i \in I)$ non vuota di insiemi non vuoti, il prodotto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$ è non vuoto.
  6. Data una funzione surgettiva $f : X \to Y$ tra due insiemi, esiste una funzione iniettiva $g : Y \to X$ tale che $f(g(y)) = y \quad \forall y \in Y$

Teoremi Importanti

Scrittura in base di ordinali

Dato un ordinale $\gamma \neq 0$ possiamo rappresentare ogni ordinale $\alpha \neq 0$ in modo unico nella forma $\alpha = \gamma^{\alpha_1} t_1 + \ldots + \gamma^{\alpha_k} t_k$ con $k \in \omega$, $t_1, \ldots, t_k < \gamma$ e $\alpha_1 > \ldots > \alpha_k$.

Ordinali fissi

Sia f : ON $\to$ ON una funzione crescente e continua, ovvero tale che $f(\lambda) = \sup_{\alpha < \lambda} f(\alpha)$ per ogni ordinale limite λ. Allora esistono ordinali x arbitrariamente grandi tali che $f(x) = x$.

Teorema di König

Per $i \in I$ sia α_i un cardinale. Definiamo la somma $\sum_{i \in I} \alpha_i$ come la cardinalità di $\cup_{i \in I} A_i$ dove gli A_i sono insiemi disgiunti tali che card $(A_i) = \alpha_i$.
König: Per ogni $i \in I$ siano α_i e β_i cardinali tali che $\alpha_i < \beta_i$. Allora $\sum_{i \in I} \alpha_i < \prod_{i \in I} \beta_i$.
Da notare che è praticamente l'unico teorema sui cardinali che prende disuguaglianze strette e ci dà una disuguaglianza stretta. Può quindi essere molto utile nei ragionamenti per assurdo

Definizioni Vuote

- (**Rango di un insieme**) Assumendo BF definiamo il concetto di rango di un insieme per ricorsione sulla relazione ben fondata $\in$:
$$\rho(X) = \sup\{\rho(y) + 1 \mid y \in X\}$$
. Notiamo che il rango è una funzione ρ : Set $\to$ ON
- ($^+$) Per ogni cardinale α esiste un cardinale α^+ con la proprietà che: α^+ è più grande di α e non esiste nessun cardinale tra α ed α^+.
- (**Aleph**) $\aleph_0 =$ card $(\mathbb{N})$, $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$, $\aleph_\lambda = \sup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$ se λ è ordinale limite.
- (**Beth**) $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$, $\beth_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} \beth_\alpha$ per λ limite.
- (**Funzione di Hartogs**) Dato un insieme X sia $H(X)$ la classe degli ordinali α di cardinalità $\leq$ card (X)

Cardinali, Aleph, Beth

- (**Sup di Cardinali**) Se X è un insieme di ordinali iniziali (cardinali) allora $\sup X$ è un ordinale iniziale (cardinale)
- (**Crescenza degli Aleph**) $\alpha < \beta \implies \aleph_\alpha < \aleph_\beta$
- (**Biggezione Ordinali-Cardinali**) La funzione $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ è una biggezione dalla classe ON degli ordinali verso la classe dei cardinali infiniti
- (**Operazioni tra cardinali**) Dati due cardinali infiniti α, β vale che
$$\alpha + \beta = \alpha \cdot \beta = \max\{\alpha, \beta\}$$
dove le operazioni sono tra cardinali.

Funzione di Hartogs

- $H(X)$ è un ordinale.
- card $(H(X)) \not\leq$ card (X)

Gerarchia di Von Neumann

Viene definita per ricorsione transfinita la seguente famiglia di (? insiemi) indicizzata da ordinali:

- $V_0 = \emptyset$
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$
- $V_\lambda = \cup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ per λ ordinale limite.

Valgono i seguenti fatti:

- Ogni V_α è transitivo
- $\beta < \alpha \implies V_\beta \subseteq V_\alpha$
- $x \in V_\alpha \Leftrightarrow \rho(x) < \alpha$
- BF equivale all'affermazione che $\forall X \quad \exists \alpha \quad x \in V_\alpha$, ovvero che $V = \cup_{\alpha \in \mathrm{ON}} V_\alpha$ (V è l'universo degli insiemi)
- $x \subseteq y \in V_\alpha \implies x \in V_\alpha$
- (Assumendo BF) Una classe $X \subseteq V$ è un insieme $\Leftrightarrow \exists \alpha \in$ ON t.c. $X \in V_\alpha$
- $\forall \alpha$ si ha card $(V_{\omega+\alpha}) = \beth_\alpha \geq \aleph_\alpha$

COFINALITÀ

Una funzione $f : A \to B$ tra due insiemi ordinati si dice cofinale o illimitata se l'immagine di f non ha maggioranti stretti in B. La cofinalità di B è il minimo ordinale α tale che esiste una funzione cofinale $f : \alpha \to B$

- Se β è un ordinale successore si ha cof$\beta = 1$
- $\beta \geq$ cof$\alpha \Leftrightarrow \exists f : \beta \to \alpha$ cofinale.
- Per ogni ordinale α vale cof$\alpha \leq$ card $(\alpha) \leq \alpha$
- cof$\beta = \beta \implies \beta$ è un cardinale (ordinale iniziale)
- Ogni cardinale successore κ^+ (ovvero il minimo cardinale maggiore di κ) è tale che cof$\kappa^+ = \kappa^+$
- Vale cof$\kappa = \kappa \Leftrightarrow$ per ogni famiglia $(A_i : i \in I)$ di insiemi A_i tali che card $(A_i) < \kappa$ e card $(I) < \kappa$ si ha card $(\cup_{i \in I} A_i) < \kappa$
- Per ogni ordinale α si ha cof$2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$
- Se un ordinale limite α NON è un cardinale si ha cof$\alpha < \alpha$
- Per ogni ordinale limite cofcof$\alpha =$ cofα

ARITMETICA CARDINALE

Nel seguito diamo qualche risultato sull'esponenziazione di cardinali

- $2 \leq \kappa \leq \lambda$ e λ infinito $\implies \kappa^\lambda = 2^\lambda$
- Inoltre si ha $2^\lambda \geq \kappa \implies \kappa^\lambda = 2^\lambda$
- $\lambda \geq$ cof$\kappa \implies \kappa < \kappa^\lambda$
- Definiamo ora detto λ cardinale e card $(A) \geq \lambda$ l'insieme $[A]^\lambda = \{X \subseteq A : \text{card } (X) = \lambda\}$.
- card $(A) = \kappa \geq \lambda$ implica che $[A]^\lambda$ ha cardinalità κ^λ
- λ cardinale infinito e $\kappa_i > 0 \quad \forall i < \lambda$, allora

$$\sum_{i<\lambda} \kappa_i = \lambda \cdot \sup_{i<\lambda} \kappa_i$$

Calcoli pronti

Diamo ora delle regole di calcolo per fare conti con prodotti di cose in forma normale di Cantor

- Se $\alpha > \beta$ si ha $\omega^\beta b + \omega^\alpha a = \omega^\alpha a$
  Dim: Visto che $\alpha > \beta$ si ha $\exists \gamma \neq 0 \quad \alpha = \beta + \gamma$. Allora $\omega^\beta b + \omega^\alpha a = \omega^\beta (b + \omega^\gamma a)$ Mostrando che $b + \omega^\gamma a = \omega^\gamma a \quad \forall \gamma \neq 0$ si avrebbe la tesi. Siccome $b \in \omega$ si può definire in maniera piuttosto semplice la biggezione di ordinamenti in questione: mandiamo un elemento $n \in b$ nella γ-upla $(n, 0, 0, \dots)$ e data una γ-upla $(U_i)_{i \in \gamma}$ la si può mandare in $(U_0 + b, U_i)$.

- Se $0 < \alpha = \omega^{\alpha_1} c_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} c_k$ in CNF e $0 < \beta$ allora si ha

  $$\alpha \omega^\beta = \omega^{\alpha_1 + \beta}$$

  ed anche, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

  $$\alpha n = \omega^{\alpha_1} c_1 n + \omega^{\alpha_2} c_2 + \dots + \omega^{\alpha_k} c_k$$

Disuguaglianze stupide ma da dimostrare

Con gli ordinali dovrebbero valere (devo ancora verificarle) le seguenti disuguaglianze stupide

- $\forall \alpha \neq 0, \beta \geq 2 \quad \alpha\beta > \alpha + 1$
- $\forall \chi > \alpha, \gamma \neq 0 \quad \gamma^\chi > \alpha$
- $\forall \alpha \geq 2, \beta \geq 2 \quad \alpha^\beta > \alpha\beta$ (con uguaglianza solo nel caso $\alpha = \beta = 2$)

Assiomi Utilizzati

Viene di seguito riportata una tabella con i principali teoremi di Insiemi, e gli assiomi necessari per dimostrarli.