

# TOPOLOGIA GENERALE

## DIMOSTRAZIONI E CONTROESEMPI

### DEFINIZIONI DELLE PROPRIETÀ

---

N1 Ogni punto ha una base di intorni numerabile.

N2 Lo spazio ha una base di aperti numerabile.

Sep Se esiste un sottoinsieme denso e numerabile.

T0 Dati due punti c'è un aperto che li distingue.  $(\forall x, y \in X \quad \exists A \text{ aperto t.c. } x \in A, y \notin A \text{ oppure } x \notin A, y \in A)$

T1 I punti sono chiusi.

T2 Punti distinti hanno intorni disgiunti.

Reg Un punto ed un chiuso che non lo contiene hanno intorni disgiunti.

Norm Ogni coppia di chiusi disgiunti ha intorni disgiunti.

T3 Reg + T0.

T4 Norm + T1.

Cpt Ogni ricoprimento di aperti ha un sottoricoprimento finito.

Lind Ogni ricoprimento di aperti ha un sottoricoprimento numerabile.

Conn Non esistono due aperti propri la cui unione è lo spazio intero. (Vale anche con i chiusi)

PathConn Presi due punti esiste un arco che li connette  $(\forall x, y \in X \quad \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow X \text{ continua t.c. } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y)$

LocConn Ogni punto ha una base di intorni connessi.

LocPathConn Ogni punto ha una base di intorni connessi per archi.

LocCpt Ogni punto ha un intorno compatto

SemilocCpt Ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni compatti

ParaCpt Ogni ricoprimento aperto ha un raffinamento localmente finito.

ExCpt Lo spazio possiede un'eshaustione in compatti

Metr Metrizzabile, ovvero esiste una distanza che induce la topologia.

| Proprietà   | Sottospazi | Prodotti   | Quozienti | Funzioni $\mathcal{C}^0$ | Implica          |
|-------------|------------|------------|-----------|--------------------------|------------------|
| N1          | ✓          | Numerabili |           |                          |                  |
| N2          | ✓          | Numerabili | Aperti    | Aperte                   | Sep, Lind, N1    |
| Sep         | ×          | Numerabili |           | ✓                        | (+Metr) N2       |
| T0          | ✓          | Arbitrari  |           |                          |                  |
| T1          | ✓          | Arbitrari  |           |                          | T0               |
| T2          | ✓          | Arbitrari  |           |                          | T1               |
| Reg         | ✓          | Arbitrari  |           |                          |                  |
| Norm        | Chiusi     | ×          |           |                          |                  |
| T3          | ✓          | Arbitrari  |           |                          | T2               |
| T4          | Chiusi     | ×          |           |                          | T3               |
| Cpt         | Chiusi     | Arbitrari  |           | ✓                        | (+T2) Chiuso     |
| Lind        | Chiusi     | ×          |           |                          |                  |
| Conn        | ×          | Arbitrari  |           | ✓                        |                  |
| PathConn    | ×          | Arbitrari  |           | ✓                        | Conn             |
| LocConn     | Aperti     |            |           |                          |                  |
| LocPathConn | Aperti     |            |           |                          |                  |
| LocCpt      | Chiusi     | Finiti     |           |                          | (+T2) SemiLocCpt |
| SemiLocCpt  |            |            |           |                          |                  |
| ParaCpt     | Chiusi     | ×          |           |                          |                  |
| ExCpt       |            |            |           |                          |                  |
| Metr        | ✓          | Numerabili |           |                          | N1               |

## LEMMI INSIEMISTICI UTILI

$f : A \rightarrow B$  funzione,  $X \subseteq A, Y \subseteq B$ . Allora valgono:

- $X \subseteq f^{-1}(f(X))$
- $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$
- $f(\cup_i X_i) = \cup_i f(X_i)$
- $f(\cap_i X_i) \subseteq \cap_i f(X_i)$
- Se  $f$  è iniettiva allora  $f(\cap_i X_i) = \cap_i f(X_i)$
- $f^{-1}(\cup_i Y_i) = \cup_i f^{-1}(Y_i)$
- $f^{-1}(\cap_i Y_i) = \cap_i f^{-1}(Y_i)$

N1

N2

SEP

## LA SEPARABILITÀ NON PASSA AI SOTTOSPAZI

Usando il fatto (dimostrato dopo) che prodotti numerabili di separabili sono separabili, si consideri  $\mathbb{R}_{sf}$ , ovvero  $\mathbb{R}$  con la topologia di Sorgenfrey. Esso è separabile, infatti  $\mathbb{Q}_{sf}$  è sicuramente numerabile, inoltre è denso. Sia infatti  $x \in \mathbb{R}_{sf}$  e sia  $U_x$  un suo intorno. Allora, siccome sono una base per la topologia,  $\exists a, b$  t.c.  $x \in [a, b) \subseteq U_x$ . Per densità dei razionali nell'ordinamento dei reali, si ha  $\exists q \in \mathbb{Q}_{sf}$  t.c.  $q \in [a, b)$ .

Allora anche  $\mathbb{R}_{sf} \times \mathbb{R}_{sf}$  è separabile, ma non lo è il suo sottospazio  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{sf} \times \mathbb{R}_{sf} \mid x + y = 0\}$ : mostriamo infatti che esso ha la topologia discreta come sottospazio. Infatti sia  $(x, -x) \in R$ , esso è aperto poiché  $(x, -x) = [x, x + h) \times [-x, -x + h) \cap R$ , con  $h > 0$ . Quindi abbiamo un insieme di cardinalità del continuo con la topologia discreta, che non può essere separabile.

## LA SEPARABILITÀ PASSA AI PRODOTTI NUMERABILI

### Enunciato

$X := \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ , con  $D_i \subseteq X_i$  denso e numerabile. Allora anche  $X$  è separabile.

### Dimostrazione

Sia  $a_n \in D_n$  un punto a caso. Prendiamo  $D = \{(r_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} D_n \mid r_i = a_i \text{ per tutti tranne un numero finito di indici}\}$ , ovvero l'insieme che è costituito da prodotti finiti dei  $D_i$  in tutte le varie posizioni possibili. Questo insieme è denso: sia  $x \in X$ , allora  $\forall U_x$  intorno abbiamo  $\exists A = \prod_{n \in \mathbb{N}}^{FIN} [A_n / X_n]$  t.c.  $x \in A \subseteq U_x$ . Allora per ogni indice  $i$  tale che  $\pi_i(A) \neq X_i$  selezioniamo  $r_i = d_i \in \pi_i(A)$ , mentre per gli altri scegliamo  $r_i = a_i$ . Allora  $(r_i)_{i \in \mathbb{N}} \in D \cap A$ . Inoltre è anche numerabile poiché si può scrivere un suo elemento in questo modo: si denoti con  $(i)_2$  la stringa che in base due denota  $i \in \mathbb{N}$  con soli zeri e uni. Allora si associ ad un elemento  $x = (r_i)_{i \in \mathbb{N}} \in D$  la stringa ottenuta concatenando le seguenti informazioni:  $\forall i, T_i := \begin{cases} 2 & \text{se } r_i = a_i \\ (r_i)_2 & \text{se } r_i \neq a_i \end{cases}$  Questa stringa è infinita ma termina con un numero infinito di "2". Si levino questi numeri e si legga il numero così costruito in base tre. Allora questa è una iniezione nei naturali.

In realtà la separabilità si trasmette anche ai prodotti di cardinalità continua (Marcewski-Hewitt), ma è molto difficile da dimostrare, quindi non lo facciamo.

## IMMAGINE $\mathcal{C}^0$ DI UN SEPARABILE È SEPARABILE

### Enunciato

$X$  separabile.  $f : X \rightarrow Y \in \mathcal{C}^0$ , allora  $f(X)$  è separabile.

### Dimostrazione

Sia  $D \subset X$  il denso e numerabile di  $X$ . Allora dico che  $f(D) \cap f(X)$  è il denso e numerabile di  $f(X)$ . Ovviamente è numerabile. Mostriamo che è denso:  $f(X) = f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)}^{f(X)} = \overline{f(D)} \cap f(X) \cap f(X)$ . dove  $\overline{\phantom{x}} \subseteq$  vale per una definizione equivalente di continuità e sappiamo che la chiusura di  $f(D)$  in  $f(X)$  è uguale alla chiusura di  $f(D)$  intersecato  $f(X)$ .

## T0

---

### T0 PASSA AI SOTTOSPAZI

#### Enunciato

$X \text{ T0}, Y \subseteq X \implies Y \text{ T0}$ .

#### Dimostrazione

Siano  $a, b \in Y$ . Allora esiste un aperto  $A \subset X$  t.c.  $a \in A, b \notin A$  oppure  $a \notin A, b \in A$ . Allora  $B := A \cap Y$  è aperto in  $Y$  e vale  $a \in B, b \notin B$  oppure  $a \notin B, b \in B$ , a seconda di quale valeva prima.

### PRODOTTO ARBITRARIO DI T0 È T0

#### Enunciato

$X := \prod_i X_i, X_i \text{ T0 } \forall i$ , allora  $X$  è T0.

#### Dimostrazione

Siano  $a, b \in X$ . Allora  $a \neq b \implies \exists j$  t.c.  $a_j \neq b_j$ . Siccome  $X_j$  è T0, ho che  $\exists A_j \subset X_j$  aperto t.c.  $a_j \in A_j, b_j \notin A_j$  oppure  $a_j \notin A_j, b_j \in A_j$ . Allora  $A := A_j \times \prod_{i \neq j} X_i$  è un aperto di  $X$  che fa ciò che vogliamo.

## T1

---

### T1 PASSA AI SOTTOSPAZI

**Enunciato**

$X \text{ T1}, Y \subseteq X \implies Y \text{ T1}.$

**Dimostrazione**

Sia  $a \in Y$ . Allora  $\{a\} \subset X$  è chiuso in  $X$ , quindi  $\{a\} = \{a\} \cap Y$  è chiuso in  $Y$ .

### PRODOTTO ARBITRARIO DI T1 È T1

**Enunciato**

$X := \prod_i X_i, X_i \text{ T1 } \forall i$ , allora  $X$  è T1.

**Dimostrazione**

Sia  $x = (x_i)_{i \in I} \in X$ . Allora  $C_j := \{x_j\} \times \prod_{i \neq j} X_i$  è chiuso in  $X \quad \forall j$ . Inoltre  $x = \bigcap_j C_j$ , quindi  $\{x\}$  è chiuso in  $X$ .

## T2

---

### T2 PASSA AI SOTTOSPAZI

**Enunciato**

$X \text{ T2}, Y \subseteq X \implies Y \text{ T2}.$

**Dimostrazione**

Siano  $a, b \in Y, a \neq b$  e siano  $A, B \subseteq X$  gli aperti di  $X$  tali che  $a \in A, b \in B, A \cap B = \emptyset$ . Allora  $A \cap Y$  e  $B \cap Y$  sono aperti in  $Y$ , ancora disgiunti e contengono i due punti.

### PRODOTTO ARBITRARIO DI T2 È T2

**Enunciato**

$X := \prod_i X_i, X_i \text{ T2 } \forall i$ , allora  $X$  è T2.

**Dimostrazione**

Siano  $a, b \in X, a \neq b$ . Allora  $\exists j$  t.c.  $a_j \neq b_j$ . Siano  $A_j, B_j \subseteq X_j$  gli aperti di  $X_j$  tali che  $A_j \cap B_j = \emptyset, a_j \in A_j, b_j \in B_j$ . Allora  $A := A_j \prod_{i \neq j} X_i, B := B_j \prod_{i \neq j} X_i$  sono due aperti di  $X$  tali che  $a \in A, b \in B$ . Inoltre  $A \cap B = (A_j \cap B_j) \prod_{i \neq j} X_i = \emptyset$ .

## REG

---

## NORM

---

## T3

---

## T4

---

## CPT

---

### CHIUSO IN UN COMPATTO È COMPATTO

**Enunciato**

$X$  compatto.  $Y \subset X$  chiuso in  $X$ , allora  $Y$  è compatto.

**Dimostrazione**

Sia  $\{A_\lambda \cap Y\}_{\lambda \in \Lambda}$  il ricoprimento aperto di  $Y$ . Allora considero  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \cup (X \setminus Y)$  come ricoprimento di  $X$  (siccome  $X \setminus Y$  è aperto in  $X$ ). Allora ne esiste un ricoprimento finito, da cui abbiamo  $A_1, \dots, A_n, X \setminus Y$  tali che  $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ .

**LA COMPATTEZZA NON PASSA A SOTTOSPAZI ARBITRARI**

Basta considerare  $Y = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  come sottoinsieme di  $[0, 1]$  con la topologia euclidea.  $[0, 1]$  è compatto, mentre  $\{(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{3n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$  è un ricoprimento aperto di  $Y$  di cui non ne esiste uno finito, perché altrimenti lascia scoperto qualche  $\frac{1}{n}$  per qualche  $n$  abbastanza grande.

**IMMAGINE  $\mathcal{C}^0$  DI COMPATTI È COMPATTA****Enunciato**

$f : X \rightarrow Y$  con  $X$  Cpt. Allora  $f(X)$  è Cpt.

**Dimostrazione**

Siano  $A_\lambda \subset Y$  aperti in  $Y$  t.c.  $f(X) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ . Consideriamo  $B_\lambda := f^{-1}(A_\lambda)$ . Essi sono un ricoprimento aperto (perché  $f$  è  $\mathcal{C}^0$ ) di  $X$ . Per compattezza ne esiste un ricoprimento finito  $B_1, \dots, B_n$ . Allora  $A_1, \dots, A_n$  ricoprono  $f(X)$ .

**COMPATTO IN UN T2 È CHIUSO****Enunciato**

$Y \subseteq X$  compatto,  $X$  T2 allora  $Y$  è chiuso in  $X$ .

**Dimostrazione**

Mostriamo che  $A := X \setminus Y$  è aperto in  $X$ : sia  $a \in A$ , siccome  $X$  è T2 abbiamo  $\forall y \in Y, \exists A_y, Y_y$  aperti in  $X$  t.c.  $a \in A_y, y \in Y_y, A_y \cap Y_y = \emptyset$ . Allora  $\{Y_y\}_{y \in Y}$  sono un ricoprimento aperto di  $Y$ , allora ne estraggo un ricoprimento finito  $Y_{y_1}, \dots, Y_{y_n}$ . Considero ora  $U := \bigcap_{i=1}^n A_{y_i}$  che è un insieme aperto in  $X$  (in quanto intersezione di un numero finito di aperti) che è disgiunto da ciascuno degli  $Y_i$  ed è quindi disgiunto da  $Y$ , ovvero  $X \setminus Y$  è aperto.

**LIND**

---

**CHIUSO IN UN LINDELÖF È LINDELÖF****Enunciato**

$X$  Lindelöf.  $Y \subset X$  chiuso in  $X$ , allora  $Y$  è Lindelöf.

**Dimostrazione**

Sia  $\{A_\lambda \cap Y\}_{\lambda \in \Lambda}$  il ricoprimento aperto di  $Y$ . Allora considero  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \cup (X \setminus Y)$  come ricoprimento di  $X$  (siccome  $X \setminus Y$  è aperto in  $X$ ). Allora ne esiste un ricoprimento numerabile, da cui abbiamo  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}, X \setminus Y$  tali che  $Y \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ .

**CONN**

---

**SOTTOSPAZI DI UN CONNESSO NON SONO CONNESSI**

Si prenda  $[0, 1]$  con la topologia euclidea e si considerino arbitrari tipi di sottospazi, solitamente non sono connessi. Ad esempio  $X = \{0\} \cup \{1\}$ .

**IMMAGINE  $\mathcal{C}^0$  DI CONNESSI È CONNESSA****Enunciato**

$f : X \rightarrow Y$  con  $X$  Conn. Allora  $f(X)$  è Conn.

**Dimostrazione**

Per assurdo siano  $A_1, A_2$  i due aperti in  $Y$  che sconnettono  $f(X)$ . Allora  $B_1 := f^{-1}(A_1), B_2 := f^{-1}(A_2)$  sono aperti (sono ancora disgiunti) che sconnettono  $X$ , Assurdo.

## PATHCONN

---

### SOTTOSPAZI DI UN CONNESSO PER ARCHI NON SONO CONNESSI PER ARCHI

Si prenda  $[0, 1]$  con la topologia euclidea e si considerino arbitrari tipi di sottospazi, solitamente non sono connessi per archi. Ad esempio  $X = \{0\} \cup \{1\}$ .

### IMMAGINE $\mathcal{C}^0$ DI CONNESSI PER ARCHI È CONNESSA PER ARCHI

**Enunciato**

$f : X \rightarrow Y$  con  $X$  PathConn. Allora  $f(X)$  è PathConn.

**Dimostrazione**

Siano  $y_1, y_2 \in f(X)$ , ovvero  $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ . Per ipotesi sia  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X \in \mathcal{C}^0$  tale che  $\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$ , consideriamo allora  $g := f \circ \gamma$ , anch'essa continua. Abbiamo  $g : [0, 1] \rightarrow Y \in \mathcal{C}^0$  tale che  $g(0) = y_1, g(1) = y_2$ .

### CONNESSO PER ARCHI IMPLICA CONNESSO

**Enunciato**

$X$  PathConn  $\implies X$  Conn.

**Dimostrazione**

Per assurdo siano  $A_1, A_2$  i due aperti in  $X$  che lo sconnettono. Siano  $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$  e si prenda  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X \in \mathcal{C}^0$  tale che  $\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$ . Allora  $B_1 := \gamma^{-1}(A_1), B_2 := \gamma^{-1}(A_2)$  sono ancora aperti e sconnettono  $[0, 1]$ , Assurdo.

## LOCConn

---

## LOCPATHConn

---

## METR

---

### SOTTOSPAZI DI METRIZZABILI SONO METRIZZABILI

Ovvio, basta restringere la funzione distanza

## PARACPT

---

## SORGENFREY

---