TRUCCHI DI ANALISI 3

Questo file cerca di raccogliere alcuni teoremi, con dimostrazione, molto utili (non solo in Analisi 3). In particolare sono state esplicitate tecniche che si è viste utilizzare più volte negli esami.

TEOREMI DI CONVERGENZA INTEGRALE

CONVERGENZA MONOTONA

Sia (X, Σ, μ) uno spazio di misura. Siano inoltre $f_0, f_1, f_2, \ldots$ una sequenza non decrescente di funzioni Σ-misurabili e positive, ovvero $\forall k \in \mathbb{N}$ si ha $0 \leq f_k \leq f_{k+1}$ quasi ovunque.
Allora possiamo definire quasi ovunque il limite $f = \operatorname{supess}_{k\in\mathbb{N}} f_k$ e si ha che f è Σ-misurabile e vale inoltre che

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu = \int_X f$$

dove l'integrazione è alla Lebesgue.

Dimostrazione

Per induzione si può mostrare che per $n \leq m$ si ha che $f_n \leq f_m$ quasi ovunque. Allora sull'intersezione degli insiemi dove vale $f_k \leq f_{k+1}$ si può definire f prendendo il $\sup$ delle f_k. Il complementare è ovviamente di misura nulla.
Mostriamo ora che f è misurabile: l'insieme $F_a = \{f \geq a\}$ (in notazione da probabilisti) è l'unione degli insiemi $E_{k,a} = \{f_k \geq a\} \cap \{f_{k+1} - f_k \geq 0\}$ che sono quindi misurabili. Chiamiamo $E = \cap_{k\in\mathbb{N}}\{f_{k+1} - f_k \geq 0\}$
Ovviamente $\int_X f \geq \int_X f_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$, per la monotonia dell'integrale (eventualmente spezzando sull'insieme dove non vale $f \geq f_k$, che però ha misura nulla). Allora, passando al limite (che esiste per monotonia) si ha $\int_X f \geq \lim_{k\to\infty} \int_X f_k$.
Per la disuguaglianza opposta consideriamo una sequenza non decrescente di funzioni semplici positive g_k tali che $g_k \leq f$ e che $\lim_k \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$ che esiste per definizione di integrale. Basta ora dimostrare che $\forall k \in \mathbb{N}$ si ha $\int_X g_k \, \mathrm{d}\mu \leq \lim_j \int_X f_j \, \mathrm{d}\mu$.
Sia $c \in (0, 1)$, si fissi $k \in \mathbb{N}$ e siano $E_r = \{f_r \leq cg_k\} \cap E$. Allora si ha $L = \cap_{r\in\mathbb{N}} E_r$ ha misura nulla (altrimenti si avrebbe che $f_s \mid_L \leq cg_k \quad \forall s$ e quindi anche $\sup_s f_s \mid_L \leq cg_k < f$ assurdo). Inoltre $E_{r+1} \subseteq E_r$, ovvero $\mu(E_{r+1}) \leq \mu(E_r)$. Quindi si ha che

$$\int_X cg_k \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X f_s \, \mathrm{d}\mu + \int_X cg_k \chi_{E_s} \, \mathrm{d}\mu$$

Ora, prima di tutto si ha che, a k fissato, facendo il limite in s, $\mid \int_X cg_k \chi_{E_s} \, \mathrm{d}\mu \mid \leq \mu(E_s) \max(g_k)$ ed il massimo di g_k esiste perché g_k è semplice. Allora si ha che il limite in s di $\mu(E_s)$ tende a zero (per monotonia degli insiemi). A questo punto abbiamo la disuguaglianza

$$\int_X cg_k \, \mathrm{d}\mu \leq \lim_{s\to\infty} \int_X f_s \, \mathrm{d}\mu$$

Ora facendo prima il limite per $c \to 1$ (visto che la disuguaglianza vale per $c \in (0, 1)$) e successivamente prendendo il limite in k si ha che

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu \leq \lim_{s\to\infty} \int_X f_s \, \mathrm{d}\mu$$

che era la nostra tesi originaria.

LEMMA DI FATOU

Sia (X, Σ, μ) uno spazio di misura. Siano inoltre $f_0, f_1, f_2, \ldots$ una sequenza di funzioni Σ-misurabili e positive q.o. Definiamo $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ quasi ovunque. Allora f è misurabile e si ha $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$

Dimostrazione

Lo dimostriamo usando convergenza monotona: Definiamo le funzioni $g_k = \inf_{n\geq k} f_n$ q.o. Allora la sequenza $g_0, g_1, \ldots$ è non decrescente e positiva di funzioni misurabili e converge puntualmente q.o. a $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$.
Per ogni $k \leq n$ si ha $g_k \leq f_n$ e per monotonia dell'integrale che $\int_X g_k \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$ e quindi segue che $\int_X g_k \, \mathrm{d}\mu \leq \inf_{n\geq k} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$.
Usando il teorema di convergenza monotona segue che

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu \leq \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

Convergenza Dominata

Sia (X, Σ, μ) uno spazio di misura. Siano inoltre $f_0, f_1, f_2, \ldots$ una sequenza di funzioni Σ-misurabili, tutte dominate da una funzione integrabile g, ovvero $| \ f_n \ | \leq g$ quasi ovunque. Se la sequenza di funzioni converge puntualmente quasi ovunque (ovvero per quasi ogni x si ha $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)$) allora le f_n sono integrabili, e si può definire quasi ovunque la funzione $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ e si ha che $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. (Per g integrabile si intende $\int_X | \ g \ | \ \mathrm{d}\mu < \infty$

Dimostrazione

Notiamo che $| \ f - f_n \ | \leq | \ f \ | + | \ f_n \ | \leq 2g$ q.o. Inoltre sappiamo che, per ipotesi $\limsup_{n\to\infty} | \ f - f_n \ | = 0$ q.o. Usando ora la linearità e la monotonia dell'integrale si ha che:

$$| \int_X f \, \mathrm{d}\mu - \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu | = | \int_X (f - f_n) \, \mathrm{d}\mu | \leq \int_X | \ f - f_n \ | \ \mathrm{d}\mu$$

Usando il lemma di Fatou "inverso" (ovvero quello con i limsup, che discende banalmente da quello con i liminf) si ha che

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X | \ f - f_n \ | \ \mathrm{d}\mu \leq \int_X \limsup n \to \infty \ | \ f - f_n \ | \ \mathrm{d}\mu = 0$$

(dove abbiamo usato che $| \ f - f_n \ |$ sia limitata da una funzione integrabile). Ciò implica che il limite esiste ed è

$$\lim_{n\to\infty} \int_X | \ f - f_n \ | \ \mathrm{d}\mu = 0$$

Ora togliendo il valore assoluto e per linearità si ottiene la tesi.

Stime sugli $\mathcal{L}^p$

Inclusione degli $\mathcal{L}^p$ sui limitati

Se $\mu(\Omega) < \infty$ allora si ha che per $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p$.
Infatti, $\forall x \in \mathbb{R}$ (o anche in $\mathbb{C}$) si ha $| \ x \ |^p \leq 1 + | \ x \ |^q$ (basta dividere in casi a seconda se $x < 1$ oppure $x \geq 1$).
E quindi $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \int_\Omega | \ f(x) \ |^p \ \mathrm{d}x \leq \int_\Omega 1 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega | \ f(x) \ |^q \ \mathrm{d}x =$
$\mu(\Omega) + \|f\|_{\mathcal{L}^q} < \infty$ se $f \in \mathcal{L}^q$, da cui $f \in \mathcal{L}^p$.

Continuità Integrale

Supponiamo che $f \in \mathcal{L}^1(a, b)$ (prolungata per periodicità fuori). Allora si ha che $\lim_{h\to 0} \int_a^b | \ f(t+h) - f(t) \ | \ \mathrm{d}t = 0$.

Dimostrazione

Per densità delle $\mathcal{C}^\infty$ in $\mathcal{L}^1$ posso prendere una sequenza di funzioni $f_n \in \mathcal{C}^\infty$ che tendono ad f. Allora si ha che

$$\int_a^b \mid f(t+h) - f(t) \mid \,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \mid f(t+h) - f_n(t+h) \mid \,\mathrm{d}t + \int_a^b \mid f_n(t+h) - f_n(t) \mid \,\mathrm{d}t + \int_a^b \mid f_n(t) - f(t) \mid \,\mathrm{d}t$$

Ora il primo e l'ultimo termine si stimano dicendo che $\lim_n \mid f(t) - f_n(t) \mid = 0$ ed inoltre si ha che, considerando gli opportuni mollificatori, si ha $\mid f - f_n \mid \leq 3 \mid f \mid$ ovvero sono limitate. Applicando quindi convergenza dominata essi tendono a zero in n.
Rimane da stimare $\lim_{h\to 0} \lim_{n\to infty} \int_a^b \mid f_n(t+h) - f_n(t) \mid \,\mathrm{d}t$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI CLASSICHE

EQUAZIONE DELLA CORDA VIBRANTE

EQUAZIONE DEL CALORE

EQUAZIONE DI POISSON / LAPLACE

PROIEZIONE SU UN CONVESSO

Sia H uno spazio di Hilbert e $K \subset H$ un convesso chiuso. Allora si ha che:

- $\exists ! P_K : H \to K$, chiamata mappa di proiezione, tale che $\forall x \in H$ si ha $\|x - P_K(x)\| = \min_{y\in K} \|x - y\|$.
- Il proiettato è "sul bordo" del convesso, ovvero $\forall w \in K$ si ha $\langle x - P_K x \mid w - P_K x\rangle \leq 0$
- La mappa di proiezione è lipschitziana, ovvero $\forall f, g \in X$ si ha $\|P_K f - P_K g\| \leq \|f - g\|$

Inoltre, supponendo che K sia un sottospazio vettoriale chiuso si ha che:

- "La congiungente x e $P_K(x)$ è ortogonale a K", ovvero $\forall w \in K \quad \langle x - P_K(x) \mid w\rangle = 0$
- $H = K \oplus K^\perp$
- La proiezione P_K è lineare ed inoltre vale $\|P\| = 1$ (dove la norma è quella operatoriale)
- Definendo $Q = I - P$ si ha, $\forall x \in H$ la decomposizione seguente:
  - $x = P(x) + Q(x)$
  - $\langle P(x), Q(x) \mid = \rangle 0$
  - $\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2$

ESISTENZA

Ad x fissato si prenda una successione di $y_n \in K$ che tendono all'$\inf_{y\in K} \|y - x\|$. Vogliamo mostrare che è una successione di Cauchy: in questo modo, per completezza dell'Hilbert, avremmo che $y_n \to y_\infty \in H$ e per chiusura di K si ha $y_\infty \in K$, da cui potremmo definire $P(x) = y_\infty$.
Chiamiamo ora $d_n = \|x - y_n\|$ ed abbiamo che $d_n \to d = \inf_n \|x - y_n\|$. Utilizzando l'identità del parallelogramma si ha, se $n, m > N$ che vale:

$$\|\frac{(x-y_n) + (x-y_m)}{2}\|^2 + \|\frac{(x-y_n) - (x-y_m)}{2}\|^2 = \frac{1}{2}(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2)$$

ovvero, riscrivendo che:

$$\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\|^2 + \|\frac{y_n - y_m}{2}\|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2)$$

Ma sappiamo che per convessità si ha $\frac{y_n+y_m}{2} \in K$ e quindi, per definizione di estremo inferiore si ha $\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\|^2 \geq d^2$ e quindi $\|\frac{y_n-y_m}{2}\| \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 - d^2) + \frac{1}{2}(d_m^2 - d^2) \leq \varepsilon$
Ciò significa che la successione y_n è di cauchy in H da cui segue la tesi.

Unicità

Supponiamo per assurdo che esistano due punti che realizzano il minimo, e li denotiamo con p e q. (ovviamente dipendono da x, ma qui li stiamo pensando ad x fissato). Allora dall'identità del parallelogramma si ha

$$\|x - \frac{p+q}{2}\|^2 + \|\frac{p-q}{2}\|^2 = \frac{1}{2}(\|x-p\|^2 + \|x-q\|^2) = d^2$$

Allora siccome, come prima, $\frac{p+q}{2} \in K$ per convessità, si ha che $\|\frac{p-q}{2}\|^2 \leq d^2 - d^2 = 0$, da cui segue $p = q$.

Proiettato sul Bordo

Diciamo che il proiettato sta "sul bordo" (non in maniera propria) del convesso (come è abbastanza intuitivo che sia facendo un disegno in $\mathbb{R}^2$) e lo esprimiamo dicendo che il segmento che congiunge x a $P_K x$ è "dalla parte opposta" (ovvero ha prodotto scalare negativo) rispetto ad ogni segmento che congiunge un qualunque punto w del compatto a $P_K x$.
Lemma preliminare: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile e supponiamo che in a vi sia un minimo. Allora $f'(a) \geq 0$ (Dove il limite è inteso sulla parte che sta dentro al dominio di definizione). Dunque, se $f : K \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{C}^1$ e definiamo $\phi(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$ per $t \in [0,1]$, allora si ha che $\phi'(0) = \langle \nabla f(x_0) \mid x - x_0 \rangle \geq 0$.
Definiamo ora $\Psi(t) = \|x - ((1-t)P_K(x) + tw)\|^2$. Per il lemma precedente si ha $\Psi'(0) \geq 0 \quad \forall w \in K$. Ma sappiamo che $\Psi(t) = \|x - P_K(x) + t(P_K(x) - w)\|^2 = \|x - P_K(x)\|^2 + 2t\langle x - P_K(x) \mid P_K(x) - w \rangle + t^2\|P_K(x) - w\|^2$ e quindi $\Psi'(0) = 2\langle x - P_K(x) \mid P_K(x) - w \rangle \leq 0 \quad \forall w \in K$
(In realtà, ma non lo dimostriamo, vale anche il viceversa: se il punto $P_K(x)$ gode della proprietà precedente, allora è il punto di proiezione)

Lipschitzianità

Sappiamo che $\langle x - P_K(x) \mid w - P_K(x) \rangle \leq 0$ e ci giochiamo la disuguaglianza con $(x,w) = (f, P_K(g)) = (g, P_K(f))$, ovvero si ottiene:

$$0 \geq \langle f - P_K(f) \mid P_K(g) - P_K(f) \rangle + \langle g - P_K(g) \mid P_K(f) - P_K(g) \rangle = \langle f - P_K(f) \mid P_K(g) - P_K(f) \rangle - \langle g - P_K(g) \mid P_K(g) - P_K(f) \rangle =$$

Allora si ha

$$\|P_K(g) - P_K(f)\|^2 = \langle P_K(g) - P_K(f) \mid P_K(g) - P_K(f) \rangle \leq \langle g - f \mid P_K(g) - P_K(f) \rangle \leq \|g - f\| \|P_K(g) - P_K(f)\|$$

E si ottiene la disuguaglianza cercata dividendo per $\|P_K(g) - P_K(f)\|$

Ortogonalità della congiungente

Supponendo ora che K sia un sottospazio vettoriale chiuso possiamo sostituire nella disuguaglianza precedente $w = 0$ e $w = 2P_K(x)$ ottenendo che $\langle x - P_K(x) \mid P_K(x) \rangle \geq 0$ e $\langle x - P_K(x) \mid P_K(x) \rangle \leq 0$, ovvero $\langle x - P_K(x) \mid P_K(x) \rangle = 0$, ma allora otteniamo $\langle x - P_K(x) \mid w \rangle = \langle x - P_K(x) \mid w - P_K(x) \rangle \leq 0$.
Inoltre, valendo la disuguaglianza sia per w che per $-w$, si ottiene facilmente che $\langle x - P_K(x) \mid w \rangle = 0$, che è la tesi.

Decomposizione in somma diretta

Dato $x \in H$, si ha $x = x - P_K(x) + P_K(x)$. Notiamo ora che $P_K(x) \in K$ e che, per quanto detto prima, $x - P_K(x) \in K^{\perp}$

La proiezione è lineare e di norma unitaria

Per vedere che è lineare, basta osservare che:

$$\begin{cases} \langle \alpha x + \beta y - P_K(\alpha x + \beta y), w \mid = \rangle 0 & \forall w \in K \\ \langle \alpha x + \beta y - \alpha P_K(x) - \beta P_K(y) \mid w \rangle = 0 & \forall w \in K \end{cases}$$

Allora $\langle P_K(\alpha x + \beta y) - \alpha P_K(x) - \beta P_K(y) \mid w \rangle = 0 \quad \forall w \in K$ ma poiché $P_K(\alpha x + \beta y) - \alpha P_K(x) - \beta P_K(y) \in K$ si ha $\|P_K(\alpha x + \beta y) - \alpha P_K(x) - \beta P_K(y)\| = 0$ e quindi $P_K(\alpha x + \beta y) = \alpha P_K(x) + \beta P_K(y)$.
Si ha inoltre che $\|x\| \|P_K(x)\| \geq \langle x \mid P_K(x) \rangle = \langle P_K(x) \mid P_K(x) \rangle = \|P_K(x)\|^2$ e quindi $\|P\| \leq 1$, ma preso $k \in K$ si ha che $P_K(k) = k$ e quindi $\|P\| \geq 1$, ovvero $\|P\| = 1$.

Riesz-Fisher

Sia $f \in \text{Lincont}(H, \mathbb{R})$ continuo e limitato e lineare, con H spazio di Hilbert. Allora $\exists! y \in H$ tale che $f(x) = \langle x, y \mid \quad \rangle \forall x \in H$

Lemma della codimensione

Dato H spazio di Hilbert e $f \in \text{Lincont}(H, \mathbb{R})$ continuo e limitato e lineare non nullo si ha che $\text{codim Ker } f = 1$

Sia $y \in H$ tale che $f(y) \neq 0$. Allora definiamo $\lambda = \frac{1}{f(y)}$ in modo che $f(\lambda y) = 1$. Sia ora $y_0 = \lambda y$. Dato un qualunque $x \in H$ si ha $x = x - f(x)y_0 + f(x)y_0$, con $x - f(x)y_0 \in \text{Ker } f$. Inoltre tale decomposizione è unica, in quanto se $x = x' + \alpha y_0 = x'' + \beta y_0$ con $x', x'' \in \text{Ker } f$ allora si ha $f(x) = \alpha = \beta$ e dunque $x' = x''$. Concludiamo quindi che $H = \text{Ker } f \oplus \text{Span}(y_0)$, che è la tesi.

Esistenza

Supponiamo $f \neq 0$ e chiamiamo $K = \text{Ker } f$. Allora K è un sottospazio lineare chiuso di codimensione 1. Chiamiamo quindi P la proiezione su K. Visto che $H = K \oplus K^{\perp}$ e $K^{\perp} = Span(y_0)$ con $f(y_0) = 1$, allora dato $h \in H$ si può scomporre come $x = \lambda y_0 + z$ con $z \in \text{Ker } f = K$.
Allora $f(x) = \lambda f(y_0) = \lambda$ e si ha $\langle x \mid y_0 \rangle = \lambda \langle y_0 \mid y_0 \rangle = \lambda \|y_0\|^2$ dunque ponendo $y = \frac{y_0}{\|y_0\|^2}$ si ha l'esistenza.

Unicità

Supponiamo ora che esistano due elementi y, w che rappresentano f. Allora $\langle x, y - w \mid = \rangle 0 \quad \forall x \in H$ e quindi in particolare $\|y - w\|^2 = 0 \implies y = w$

Funzioni Armoniche

Serie e Trasformata di Fourier

Definizioni e Proprietà

Approssimanti

Riemann-Lebesgue