Istituzioni di Algebra

Estensioni Intere

- (**Equivalenze di Intero**) Sia $A \subseteq B$ un'estensione di anelli e sia $b \in B$. Allora le seguenti sono equivalenti:
  1. b è intero su A
  2. $A[b]$ (come sottoanello) è un A-modulo finito
  3. $\exists C \subseteq B$ sottoanello tale che $A[b] \subseteq C$ e C è un A-modulo finito
  4. $\exists M$, $A[b]$-modulo fedele (ovvero $\mathrm{Ann}\,(M) = 0$) che sia finito come A-modulo.
- (**Hamilton-Cayley**) Se M è un A-modulo finito e $I \subseteq A$ ideale, $\phi : M \to M$ mappa di A-moduli tale che $\phi(M) \subseteq IM$, allora $\exists a_1, \dots, a_n \in I$ tali che $\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \ldots + a_n\mathrm{id} = 0$ (in $\mathrm{Hom}_A(M, M)$)
- Valgono quindi le seguenti cose:
  1. Se $b_1, \dots, b_n$ sono interi su A, allora $A[b_1, \dots, b_n]$ è un A-modulo finito
  2. $\overline{A}^B = \{b \in B \mid b \text{ intero su } A\}$ è un sottoanello di B.
  3. (**Transitività Integrale**) Se B è intero su A e C è intero su B, allora C è intero su A
  4. (**Transitività Finita**) Se B è finito su A e C è finito su B, allora C è finito su A
  5. (**Idempotenza della Chiusura Integrale**) Sia $A \subseteq B$ e $C = \overline{A}^B$. Allora $\overline{C}^B = C$
- (**Stabilità per Localizzazione e Quoziente**) Sia $A \subseteq B$ intera, S parte moltiplicativa di A e $I \subseteq B$ ideale. Allora si ha che:
  1. $S^{-1}A \to S^{-1}B$ è intera
  2. ${}^{A}/_{I^c} \to {}^{B}/_{I}$ è intera
- (**Relazioni con estensioni di campi**) Supponiamo A dominio e $K = \mathrm{Frac}\,(A)$ suo campo delle frazioni e consideriamo $A \subseteq K \subseteq L$ dove ${}^{L}/_{K}$ è algebrica. Definiamo $B = \overline{A}^L$.
  1. Sia $x \in L$ e μ_x suo polinomio minimo su K. Se $\mu_x \in A[t]$ allora x è intero su A.
  2. Se A è normale vale anche il viceversa, ovvero si ha x è intero su $A \Leftrightarrow \mu_x \in A[t]$.
- (**UFD $\implies$ normale**) Se A è un UFD allora è normale.
- (**estensioni intere di campi**) Sia $A \subseteq B$ un'estensione intera di domini. Allora A è un campo $\Leftrightarrow B$ è un campo. Ne segue che:
  1. Sia $\mathfrak{q} \subseteq B$ un ideale. Allora $\mathfrak{q}$ è massimale $\Leftrightarrow \mathfrak{q}^c$ è massimale
  2. Se prendo $\mathfrak{p}$ primo di A e $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \mathrm{Spec}\, B$ tali che $\mathfrak{q}_1^c = \mathfrak{q}_2^c = \mathfrak{q}$ e $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$ allora vale che $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$.
- (**Lying Over**) Se $A \subseteq B$ è intera, allora $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A \quad \exists \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\, B$ tale che $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$, ovvero $f^* : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ è surgettiva.
- (**Going Up**) Se $A \subseteq B$ è intera, allora ha la proprietà del going up, ovvero se $\forall \mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq A$ primi e $\forall \mathfrak{q}_1 \subseteq B$ primo tale che $\mathfrak{q}_1^c = \mathfrak{p}_1$ allora $\exists \mathfrak{q}_2 \supseteq \mathfrak{q}_1$ primo tale che $\mathfrak{q}_2^c = \mathfrak{p}_2$
- (**Going Down**) $A \subseteq B$ estensione intera di domini, con A normale allora vale la proprietà del going down, ovvero $\forall \mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq A$ primi e $\forall \mathfrak{q}_2 \subseteq B$ primo tale che $\mathfrak{q}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$ si ha che $\exists \mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$ primo tale che $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$.
  Da notare che serve sia la condizione di dominio che la normalità di A per far funzionare tutto ciò.
- Se A è un dominio normale, $K = \mathrm{Frac}\, A$ ed ${}^{L}/_{K}$ è un'estensione algebrica di campi, $B = \overline{A}^L$, $I \subseteq A$ ideale, ed $x \in L$ allora x è intero su $I \Leftrightarrow \mu_{L/K, x} \in \sqrt{I}[t]$

- (**Simil-Galois**) Sia A normale e $K = \text{Frac } A \subseteq L$ con L/K estensione di Galois finita e $B = \overline{A}^L$ e sia $G = \text{Gal } L/K$. Allora si ha che:
  1. $g(B) \subseteq B \quad \forall g \in G$
  2. Fissato un primo $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ si ha $\mathcal{F}_\mathfrak{p} = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B \mid \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}\}$ Allora G agisce transitivamente su $\mathcal{F}_\mathfrak{p}$
- (**Chiusura integrale di** $A[x]$) Sia $A \subseteq B$ e sia $C = \overline{A}^B$. Allora la chiusura integrale di $A[x]$ in $B[x]$ è $C[x]$.
- (**Interezza e Nötherianità**) $A \subseteq B$ con A Nötheriano e B finito su A. Allora B è Nötheriano come anello.
  Attenzione che $A \subseteq B$ con A Nötheriano ed estensione intera NON implica che B sia Nötheriano.
- Sia A dominio, $K = \text{Frac } A$, L/K un'estensione finita di campi e sia $B = \overline{A}^L$. Allora si ha:
  1. È FALSO che se A è Nötheriano allora B lo sia.
  2. Se A è normale ed L/K è un'estensione separabile allora si ha che se A è Nötheriano allora B diventa un A-modulo finito e quindi è Nötheriano.
- A noetheriano e dominio, con $K = \text{Frac } A \subseteq L$ campi e vorremmo poter dire qualcosa anche se A non è normale. Ci sono due casi significativi nei quali si ha che in queste ipotesi $\overline{A}^K$ (la normalizzazione di A) è Nötheriana:
  1. $\dim A = 1$
  2. A è una K-algebra finitamente generata
- (**Normalizzazione di Nöther**) A K-algebra f.g. allora $\exists x_1, \dots, x_n \in A$ algebricamente indipendenti tali che A è finita (come modulo) su $K[x_1, \dots, x_n]$
- (**Lemmi generici e fatti vari**) Le seguenti cose valgono:
  1. E campo e sia A una E-algebra finitamente generata. Allora $\forall I \subseteq A$ si ha che
  $$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{m} \text{ massimali} \quad \mathfrak{m} \supseteq I} \mathfrak{m}$$
  2. A e B due K-algebre finitamente generate con K campo algebricamente chiuso ed A dominio. Se $f^* : \text{Max } B \to \text{Max } A$ è suriettiva allora f è iniettiva.
  3. Per un modulo sono proprietà locali (e massimali) essere piatto, essere normale, essere nullo.
  4. Per un modulo NON sono proprietà locali essere Noetheriano, essere dominio.
  5. Per una sequenza di moduli essere esatta in un punto è una proprietà locale (e massimale)

TEORIA DELLA DIMENSIONE E GRADO DI TRASCENDENZA

- (**Dimensione in estensioni intere**) Se $A \subseteq B$ è intera allora $\dim A = \dim B$ (è compreso il caso in cui entrambe le dimensione siano infinite)
- (**Dimensione delle** K**-algebre f.g.**) Sia K un campo e $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ con $f \neq 0$. Allora si ha $\dim K[x_1, \dots, x_n]_f = n$
- (**Relazione con il grado di trascendenza**) Sia A K-algebra f.g. e A dominio. Allora $\dim A = \text{trdeg}_K A$
- (**Cardinalità di una base di trascendenza**) A dominio e K-algebra f.g. Allora tutte le basi di trascendenza hanno la stessa cardinalità.
  Inoltre, se A è un dominio, E una K-algebra e sia $L = \text{Frac } A$
  1. $x_i \in A$ è una base di trascendenza di $A \Leftrightarrow$ lo è di L

2. Se $y_1, \dots, y_n$ è base di trascendenza di L su K allora $\exists b \in A$ tali che $by_1, \dots, by_n$ è una base di trascendenza di A.

- (**Particolarità delle K-algebre**) Per le K-algebre f.g. valgono le seguenti cose:
  1. Sono anelli catenari.
  2. Se A è dominio, preso un primo $\mathfrak{p}$ di altezza uno si ha $\dim {}^{A}/_{\mathfrak{p}} = \dim A - 1$
  3. $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \implies \text{ht } \mathfrak{p}, \text{coht } p < +\infty$
  4. Se A è dominio si ha $\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ vale che $\dim A = \text{ht } \mathfrak{p} + \text{coht } \mathfrak{p}$

- (**Artinianità e Nötherianità**) A artiniano se e solo se A Nötheriano e di dimensione zero.

- (**Richiami di Decomposizione Primaria**) Sia $I \subsetneq A$ un ideale. Una decomposizione primaria di I è una scrittura $I = \cap_i Q_i$ dove i Q_i sono un numero finito di ideali primari. Se A è Nötheriano valgono:
  1. Primi associati ad I: $\text{Ass } I = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \,|\, \exists x \in A \text{ t.c. } \mathfrak{p} = (I : x)\}$
  2. Gli zero divisori di A sono l'unione dei primi associati a zero:
  $$\mathcal{D}(A) = \cup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass } 0} \mathfrak{p}$$
  3. $\text{Ass }_{S^{-1}A} S^{-1} I = \text{Ass }_A I \cap \text{Spec } S^{-1} A$
  4. $\text{Ass } I$ è finito
  5. Se $\mathfrak{p}$ è minimale sopra I, allora $\mathfrak{p}$ è associato ad I.

- (**Esercizi e Lemmi vari**) Valgono le seguenti cose:
  1. $\prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z}$ NON è uno $\mathbb{Z}$-modulo libero
  2. $\prod_{n=0}^{\infty} \to^{f} \mathbb{Z}$ tale che $f(e_i) = 0 \quad \forall i$ allora deve essere che $f = 0$
  3. $X = \text{Spec } A$ e $X_f := \{\mathfrak{p} \subseteq A \,|\, f \notin \mathfrak{p}\} = X \setminus V(f)$ è un aperto di X. Questi sono un sistema fondamentale di aperti di X e si ha $X_f \cong \text{Spec } A_f$
  4. $K((t))$ NON è algebrico su $K(t)$
  5. $X = \text{Spec } A$ è compatto, qualunque sia A.
  6. $A \subseteq B$ intera $\implies f^*$ chiusa
  7. f^* chiusa $\implies$ vale il Going Up.

Dimensione e Anelli Graduati

- (**Serie di Jordan-Hölder**) A anello c.u., M un A-modulo. Una serie di Jordan-Hölder per M è una successione crescente di sottomoduli $0 = M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M$ tali che ${}^{M_i}/_{M_{i-1}}$ è un A-modulo semplice (ovvero è diverso dal modulo nullo e non ha sottomoduli propri)

- (**Lunghezza di un Modulo**) Se M ha una serie di JH, diciamo che la lunghezza di M è finita e definiamo $\ell(M) = \min\{n \,|\, \exists \text{ serie di JH con } n+1 \text{ termini } \}$

- (**Lunghezza delle serie di JH**) Tutte le serie di JH di uno stesso modulo hanno la stessa lunghezza ed inoltre i fattori ${}^{M_i}/_{M_{i-1}}$ sono uguali per ogni serie, a meno di permutazioni.

- (**Comportamento per sequenze esatte**) Sia data una sequenza esatta corta di A-moduli $0 \to X \to Y \to Z \to 0$. Allora vale che:
  1. $\ell(X), \ell(Z) < +\infty \Leftrightarrow \ell(Y) < +\infty$
  2. $\ell(Y) = \ell(X) + \ell(Z)$

  Inoltre si ha che per un generico modulo M vale $\ell(M) < \infty \Leftrightarrow M$ è artiniano e Nötheriano.

- (**Anelli graduati noetheriani**) A anello graduato, allora A è noetheriano se e solo se A_0 è noetheriano ed A è f.g. come A_0-algebra.

- (**Funzione e Serie di Hilbert**) Preso A graduato, A_0 artiniato, A noetheriano, M graduato e f.g. (ovvero M noetheriano) definiamo:

  1. $n \mapsto \ell_{A_0}(M_n)$ funzione di Hilbert
  2. $P_M(t) := \sum_n t^n \ell_{A_0}(M_n)$ serie di Hilbert

  Inoltre in queste ipotesi se si ha una sequenza esatta corta con morfismi graduati di grado zero: $0 \to X \to^{\phi} Y \to^{\psi} Z \to 0$ allora sono definiti i polinomi di hilbert e vale che $P_Y = P_X + P_Z$

- (**Teorema di Hilbert**) A graduato, M graduato, A_0 artiniano e A noetheriano, M f.g. e si chiamino $a_1, \dots, a_k$ i generatori omogenei di A come A_0-algebra e $d_i :=$ deg a_i. Allora $\exists f \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ polinomio di Laurent tale che
$$P_M(t) = \frac{f(t)}{\prod_{i=1}^k (1 - t^{d_i})}$$

- (**funzione di Hilbert e grado**) Se A è generato in grado 1 allora la funzione di Hilbert (nelle ipotesi precedenti) per n grandi coincide con i valori assundi da un polinomio di grado $d(M) - 1$ (dove $d(M)$ è l'ordine di polo in 1 della funzione razionale P_M)

- (**Analogo di Nakyama**) A graduato, M graduato f.g. e supponiamo che $A_+ M = M$ allora $M = 0$

Filtrazioni, Graduato Associato e Scoppiamento

- (**Filtrazione**) Sia A un anello e supponiamo di avere $A = I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$ (che viene detta una filtrazione $\mathcal{F}$) con $I_k I_h \subseteq I_{h+k}$. Il graduato associato allora è $\tilde{A} = \text{Gr}_{\mathcal{F}}(A) = \oplus_{k=0}^{\infty} I_k / I_{k+1} = \oplus \tilde{A}_k$ e viene indotto un prodotto.

  Se I è un ideale di A possiamo considerare $I_h = I^h$, dove la potenza è intesa come moltiplicazione di ideali. Allora si ha $\text{Gr}_I(A) = \oplus_{k \geq 0} I^k / I^{k+1}$ e lo scoppiamento di A in I è $\text{Bl}_I(A) = A \oplus I \oplus I^2 \oplus \dots$, dove si ha $B_k = I^k$ ($B_0 = A$). Allora per definizione il prodotto verifica $B_h B_k \subseteq B_{h+k}$

- (**Noetherianità dei graduati**) Se A è Nötheriano allora $\text{Gr}_I(A)$ e $\text{Bl}_I(A)$ sono a loro volta noetheriani e sono finitamente generati in grado 1 come B_0-algebra.

- (**Esempio**) Sia $A = \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{(f)}$ con f irriducibile e sia $f = \sum_i f_i$ con f_i omogenei. Sia $k = \min\{i \mid f_i \neq 0\}$. Allora considerando $\mathfrak{m} = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{(f)}$ che è un massimale di A si ha che $\text{Gr}_{\mathfrak{m}}(A) = \frac{\mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]}{(f_k)}$

- (**Filtrazioni di Moduli**) Sia A un anello ed I un ideale di A, M un A-modulo. Allora una I-filtrazione $\mathcal{F}$ di M è
$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$$
  tale che si abbia $I^k M_h \subseteq M_{h+k}$.

  Ad essa posso allora associare un graduato $\text{Gr}_{\mathcal{F}}(M) = \oplus_i M_i / M_{i+1}$ ed uno scoppiamento $\text{Bl}_{\mathcal{F}}(M) = \oplus_{i \geq 0} M_i$ e di M_i si dice che è "di grado i"

  Si nota inoltre che $\text{Gr}_{\mathcal{F}} M$ è un $\text{Gr}_I A$-modulo e che $\text{Bl}_{\mathcal{F}} M$ è un $\text{Bl}_I A$-modulo.

- (**I-stabilità**) Diciamo che una filtrazione $\mathcal{F}$ $M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots$ è I-stabile se $\exists k$ tale che $M_{n+k} = I^n M_k$.

- (**Esistenza di una filtrazione I-stabile**) Una filtrazione I-stabile esiste sempre:
$$M \supseteq IM \supseteq I^2 M \supseteq \dots$$
  Ed è inoltre la più piccola I-filtrazione.

- (**Lemma delle filtrazioni I-stabili**) Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ sono due I-filtrazioni I-stabili di M, date da:
$$\mathcal{F} : M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots \mathcal{F}' : M'_0 \supseteq M'_1 \supseteq \dots$$
  allora $\exists k > 0$ tale che $M_n \supseteq M'_{n-k}$ e $M'_n \supseteq M_{n-k}$ $\forall n >> 0$ (abbastanza grandi)

- (**Delle I-filtrazioni sui Noetheriani**) Sia A noetheriano, M un A-modulo f.g., $\mathcal{F}$ una I-filtrazione. Allora valgono i seguenti:

  1. Se $\mathcal{F}$ è I-stabile si ha Gr $_{\mathcal{F}}M$ è Noetheriano, anzi è f.g. come Gr $_I A$-modulo
  2. $\mathcal{F}$ è I-stabile se e solo se Bl $_{\mathcal{F}}M$ è f.g. come Bl $_I A$-modulo.

- (**Lemma di Artin-Rees**) A noetheriano, I ideale di A, M un A-modulo f.g., $\mathcal{F}$ una I-filtrazione I-stabile

$$\mathcal{F} : M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots$$

  e sia $N \subseteq M$ sottomodulo.

  Allora $\mathcal{F} \cap N$ è ancora una filtrazione I-stabile.

- (**"Limite" della filtrazione**) Sia M un A-modulo f.g., con A noetheriano ed I un ideale di A. Allora si ha

$$\cap_n I^n M = \{x \in M \mid \exists y \in I \text{ t.c. } (1-y)x = 0\}$$

  Come corollari otteniamo immediatamente che se A è locale e noetheriano allora si ha $\cap_n \mathfrak{m}^n = 0$.

  Se invece A è un dominio noetheriano ed I è un suo qualunque ideale allora $\cap_n I^n = 0$.

- (**Passaggio di dominio**) Sia A noetheriano. Se Gr $_{\mathfrak{m}}A$ è un dominio allora A è un dominio.

- (**Rapporto tra un po' di cose**) Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale e noetheriano, I un ideale $\mathfrak{m}$-primario e M un A-modulo f.g. e $\mathcal{F}$ una I-filtrazione stabile di M.

  Siano $\tilde{A} = \text{Gr}_I A$ e $\tilde{M} = \text{Gr}_{\mathcal{F}} M$. Risulta allora definita una serie di Hilbert, ed un polinomio di Hilbert:

$$P(\tilde{M}, t) = \sum_n t^n \ell_{A_0}(\tilde{M}_n) = \frac{f(t)}{(1-t)^d}$$

  e si ha $\phi_{\tilde{M}}(n) = \ell_{A_0}(\tilde{M}_n)$ ha grado $d-1$.

  Infine indichiamo con S_I il minimo numero di generatori di I. In particolare $\tilde{A}$ come $\tilde{A}_0$-algebra è generata da al più S_I generatori. Vale allora il seguente lemma:

  1. $d \leq S_I$
  2. $\ell_A({}^{M}/{}_{M_n}) < \infty$
  3. Per $n >> 0$ vale che $\ell_A({}^{M}/{}_{M_n})$ è un polinomio di grado d
  4. Il grado ed il coefficiente direttivo del polinomio NON dipendono dalla filtrazione scelta
  5. Inoltre anche il grado di $n \mapsto \ell_A({}^{M}/{}_{I^n M})$ non dipende da I.

- (**Equivalenza tra le dimensioni**) Sia $(A, \mathfrak{m})$ noetheriano locale e consideriamo $M = A$. Allora abbiamo che la dimensione di Krull di A, il minimo numero di generatori di un ideale $\mathfrak{m}$-primario ed il grado del polinomio di Hilbert di A come A-modulo coincidono.

- (**Corollario**) Per anelli A noetheriani vale che:

  1. Se A è locale, dim $A < \infty$
  2. $\forall \mathfrak{p}$ primo si ha ht $\mathfrak{p} = \dim A_{\mathfrak{p}} < \infty$
  3. $\{\mathfrak{p}\}_{\mathfrak{p} \subseteq A}$ soddisfa la condizione della catena discendente
  4. Se A è locale si ha dim $A \leq \dim_{\mathbb{K}} {}^{\mathfrak{m}}/{}_{\mathfrak{m}^2}$ con $\mathbb{K} = {}^{A}/{}_{\mathfrak{m}}$

- (**Teorema dell'ideale principale di Krull**) Se A è noetheriano ed $x \in A$ un non divisore di zero e $\mathfrak{p}$ è un primo minimale tra quelli contenenti x. Allora vale che ht $\mathfrak{p} = 1$.

  Una semplice generalizzazione dice che se A è noetheriano e $x_1, \ldots, x_k \in A$ e si ha $\mathfrak{p} \supseteq (x_1, \ldots, x_k)$ minimale tra gli ideali che li contengono tutti allora vale che ht $\mathfrak{p} \leq k$

  Ancora, se A è locale e noetheriano e $x \notin \mathcal{D}(A)$ vale che dim $\frac{A}{(x)} = \dim A - 1$

- (**Anelli regolari**) Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale e noetheriano. $\mathbb{K} = \frac{A}{\mathfrak{m}}$. Allora A si dice regolare se dim $A =$ dim $_{\mathbb{K}} \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}$, ovvero se $\mathfrak{m}$ è generato come ideale da dim A elementi.

  Più in generale un anello A si dice regolare se è regolare $A_{\mathfrak{m}}$ $\forall \mathfrak{m}$ massimale (è equivalente a chiederlo $\forall \mathfrak{p}$ con $\mathfrak{p}$ primo, ma è piuttosto difficile da mostrare)

- (**Teorema dello Jacobiano**) Sia A una $\mathbb{K}$-algebra, $A = \left(\frac{\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]}{I}\right)_{\mathfrak{m}}$ con $I = (f_1, \ldots, f_k)$ e tale che $I \subseteq (x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{m}$.

  Facciamo allora la matrice Jacobiana dei polinomi in zero $J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} |_0\right)_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,n}}$ e supponiamo $d =$ dim A e $r =$ rk J.

  Allora A è regolare se e solo se $n = d + r$ e vale inoltre che $I_{\mathfrak{m}} = (f_1, \ldots, f_r)$ a meno di riordinamenti (ovvero è generato da un qualunque insieme i cui gradienti siano linearmente indipendenti)

- (**Regolarità per locali noetheriani**) Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale noetheriano e $\mathbb{K} = \frac{A}{\mathfrak{m}}$ e dim $A = d$. Allora A è regolare se e solo se Gr $_{\mathfrak{m}} A \cong \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_d]$, dove l'isomorfismo è da intendersi come anelli graduati.

  Come corollario si ottiene che un anello locale noetheriano e regolare è un dominio.

DIMENSIONI BASSE

- (**Discrete Valuation Ring**) Sia K un campo e si abbia $v : K \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ una funzione "di valutazione", ovvero che soddisfi le seguenti proprietà:

  1. $v(xy) = v(x) + v(y)$
  2. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$

  Un dominio A si dice "di valutazione discreta" se $\exists v :$ Frac $(A) \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ con $\Im v = q\mathbb{Z}$, con $q \in \mathbb{Q}^*$ e $A = A_v = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$

- (**Esempio**) Se A è UFD, p un elemento primo allora si ha $v_p(x) = \max n \mid \quad p^n | x$ ha le due proprietà di sopra e si può estendere a tutto $K =$ Frac A nel seguente modo:

  $$v_p(\frac{x}{y}) = v_p(x) - v_p(y)$$

  .

  In questo caso A è un DVR con la valutazione data da v_p.

- (**Proprietà dei DVR**) Se A è DVR allora si ha:

  1. A è Noetheriano
  2. A è PID
  3. A è locale con $\mathfrak{m} = \{x \mid v(x) > 0\}$
  4. $\mathfrak{m} = (t)$
  5. dim $A = 1$
  6. A è regolare
  7. A è UFD ed anche Normale

- (**Lemma di equivalenze**) Sia A dominio noetheriano normale, dim $A = 1$. Allora le seguenti sono equivalenti:

  1. A è regolare
  2. A è normale
  3. A è DVR
  4. A è UFD

- (**Dominio di Dedekind**) Sia A dominio noetheriano di dimensione uno. A si dice dominio di Dedekind se è normale, ovvero se la localizzazione in tutti gli ideali massimali è normale, ovvero $A_{\mathfrak{m}}$ è DVR $\forall \mathfrak{m}$ massimale.
- Se A è un dominio Noetheriano normale, e $\mathfrak{p} \subseteq A$ è un ideale primo di altezza uno (ht $\mathfrak{p} = 1$) allora si ha che $A_{\mathfrak{p}}$ è regolare.
- (**Regolare in codimensione uno**) A dominio noetheriano si dice regolare in codimensione uno se $\forall \mathfrak{p} \subseteq A$ primo di altezza uno si ha che $A_{\mathfrak{p}}$ è regolare.
- (**Cosa non dimostrata**) Sia A una $\mathbb{K}$-algebra dominio e $A = \frac{\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]}{(f_1,\dots,f_k)}$ e sia $\mathfrak{p} = (f_1, \dots, f_k)$, $d = \dim A$, $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso e $r = n - d$. Allora vale che:
  1. Tutti i determinanti dei minori $(r+1) \times (r+1)$ della matrice Jacobiana $Jac = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ sono elementi di $\mathfrak{p}$
  2. Sia J l'ideale generato dai determinanti dei minori $r \times r$. Allora, preso $\overline{\mathfrak{q}}$ primo di A con $\overline{\mathfrak{q}} = {}^{\mathfrak{q}}/_{\mathfrak{p}}$ si ha che $A_{\overline{\mathfrak{q}}}$ NON è regolare se e solo se $\mathfrak{q} \supseteq J$
     Se pongo $\overline{J} = \frac{J+\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}} \subseteq A$ allora $\overline{\mathfrak{q}}$ NON è regolare se e solo se $\overline{\mathfrak{q}} \supseteq \overline{J}$, ovvero $\overline{\mathfrak{q}} \in V(\overline{J}) \subseteq \text{Spec } A$, o ancora $v(\overline{\mathfrak{q}}) \subseteq v(\overline{J}) \subseteq \mathbb{K}^n$
- (**Regolarità in codimensione per le K-algebre**) Se A è una $\mathbb{K}$-algebra allora essa è regolare in codimensione uno se si ha $\dim {}^{A}/_{\overline{J}} \leq \dim A - 2$ (Con le notazioni precedenti)
- (**Criterio di Serre**) Sia A dominio noetheriano. Allora A è normale se e solo se vale uno dei seguenti:
  1. $\forall x \neq 0$ e $\forall \mathfrak{p} \in \text{Ass}\,(x)$ si ha $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ è principale ovvero $A_{\mathfrak{p}}$ è regolare
  2. $\forall x \neq 0$ e $\forall \mathfrak{p} \in \text{Ass}\,(x)$ si ha ht $\mathfrak{p} = 1$. Inoltre vale che $\forall \mathfrak{p}$ tale che ht $\mathfrak{p} = 1$ si ha $A_{\mathfrak{p}}$ è regolare.
- (**Caratterizzazione di UFD**) A dominio noetheriano. Allora A è UFD se e soltanto se vale una delle seguenti:
  1. $\forall x \neq 0 \quad \forall \mathfrak{p} \in \text{Ass}\,(x)$ si ha $\mathfrak{p}$ è principale
  2. $\forall x \neq 0 \quad \forall \mathfrak{p} \supseteq (x)$ minimale tra quelli che contengono (x) vale che $\mathfrak{p}$ è principale.
- A dominio noetheriano e sia $\mathfrak{q}$ un ideale $\mathfrak{p}$-primario e $S \subseteq A$ una parte moltiplicativa tale che $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$. Allora valgono che:
  1. $S^{-1}\mathfrak{q}$ è $S^{-1}\mathfrak{p}$-primario
  2. $S^{-1}A \cap S^{-1}\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$
  3. $(S^{-1}\mathfrak{p})^n = S^{-1}\mathfrak{p}^n$
  4. $S^{-1}\mathfrak{p}^n \cap A = \mathfrak{p}^n$
- $N \subseteq M$. Allora $x \in N \Leftrightarrow x \in N_{\mathfrak{p}} \quad \forall \mathfrak{p}$ primo.
- A dominio noetheriano e $I \subseteq A$ ideale allora si ha $x \in I \Leftrightarrow x \in I_{\mathfrak{p}} = IA_{\mathfrak{p}} \quad \forall \mathfrak{p}$ primo associato ad I.
- A dominio noetheriano e $K = \text{Frac}\,(A)$. Allora dato un $x \in K$ si ha che $x \in A \Leftrightarrow x \in A_{\mathfrak{p}} \quad \forall \mathfrak{p} \in \mathcal{A}$, dove $\mathcal{A} = \{\mathfrak{p} \subseteq A \text{ primi } \mid \exists y \neq 0 \text{ t.c. } \mathfrak{p} \in \text{Ass}\,(y)\}$
- (**Teorema di Hartogs**) Sia A dominio noetheriano normale. Allora si ha $A = \cap_{\mathfrak{p} \text{ t.c. ht } \mathfrak{p}=1} A_{\mathfrak{p}}$

Fibrati vettoriali e moduli localmente liberi

In questa sezione assumeremo l'ipotesi di A dominio noetheriano

- (**Modulo localmente libero**) M A-modulo f.g. si dice localmente libero se $\forall \mathfrak{p} \subseteq A$ primo $M_\mathfrak{p}$ è libero ($M_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p}^r$)
- (**Caratterizzazione**) Se M è un A-modulo f.g. allora sono equivalenti:
  1. M è localmente libero di rango r
  2. $\exists f_1, \dots, f_k \in A$ tali che $(f_1, \dots, f_k) = A$ e $M_{f_i} \cong A_{f_i}^r$
  3. M è proiettivo e $M \otimes_A K(A) \cong K(A)^r$

  Osserviamo che se M è localmente libero e si ha $M_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p}^r$ allora $M \otimes_A K = S^{-1}M = M \otimes_{A_\mathfrak{p}} K \cong A_\mathfrak{p}^r \otimes_{A_\mathfrak{p}} K \cong K^r$ e quindi se in un primo ha rango r allora è uguale per tutti poiché $r = \dim_K K^r \cong \dim_K(M \otimes_A K)$ e viene detto rango.
- (**Fibrato lineare**) Un fibrato lineare è un modulo localmente libero di rango uno.
- (**Lemma di isomorfismo**) A noetheriano, S parte moltiplicativa e M f.g. allora si ha

  $$S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

  definita da $\frac{\phi}{s} \mapsto \frac{\phi}{s}(\frac{m}{t}) = \frac{\phi(m)}{st}$ è un isomorfismo.
- M un A-modulo, $M^* = \mathrm{Hom}_A(M,A)$ ed osservo che $\mu : M^* \otimes_A M \to A$ definita da $\phi \otimes m \mapsto \phi(m)$ è una mappa. Allora si trova che M è f.g. e localmente libero di rango uno $\Leftrightarrow$ μ è un isomorfismo

  Come corollario, se M è localmente libero di rango uno allora M^* è f.g. ed è anch'esso un modulo localmente libero di rango uno.
- M, N moduli localmente liberi di rango uno. Allora si ha:
  1. $M \otimes N$ è localmente libero di rango uno e vale che $(M \otimes N)^* \cong M^* \otimes N^*$
  2. $M \otimes N \cong A \implies N \cong M^*$
  3. $\mathrm{Hom}_A(M,N) \cong M^* \otimes_A N$
- (**Ideali frazionari**) A dominio noetheriano e $K = \mathrm{Frac}\, A$. Un ideale frazionario è un A-sottomodulo f.g. di K.

  Se I è frazionario allora $I^{-1} = \{x \in K \mid xI \subseteq A\}$ e dico che I è invertibile se $I^{-1}I = A$
- (**Proprietà base**) Per gli ideali frazionari valgono le seguenti proprietà:
  1. Se I e J sono invertibili allora IJ è invertibile
  2. Se I è invertibile allora I^{-1} è invertibile