

# ETI

Questo file, a differenza degli altri, vuole essere un luogo dove raccolgo tutti i trucchetti vari di Teoria Degli Insiemi. Ciò viene reso necessario dal fatto che al corso si definiscono solo delle cose, e gli esercizi c'entrano poco con tutto quanto.

## ASSIOMI

---

- **(Estensionalità)** Due classi sono uguali se hanno gli stessi elementi
- **(Di Astrazione)** Data una proprietà ben definita  $P$ , esiste una classe i cui elementi sono gli oggetti che verificano  $P$ .
- **(Di Comprensione)** Una sottoclasse di un insieme è un insieme
- **(Insieme Vuoto)** La classe vuota è un insieme
- **(Coppia)** Dati due insiemi  $a, b$  la coppia  $\{a, b\}$  è un insieme
- **(Unione)** Se  $X$  è un insieme, allora  $\cup X = \{z \mid z \in y \in X\}$  è un insieme
- **(Dell'Infinito)**  $\exists X$  insieme tale che  $\emptyset \in X$  e  $a \in X \implies a \cup a \in X$
- **(Potenza)** Se  $X$  è un insieme, allora  $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$  è un insieme
- **(Di Rimpiazzamento)** Se  $F : X \rightarrow Y$  è una funzione tra classi ed il suo dominio  $X$  è un insieme, allora la sua immagine  $\text{Im } F$  è un insieme.
- **(Scelta)** Ne diamo un po' di formulazioni equivalenti:
  1. Dato un insieme  $X$  i cui elementi sono insiemi non vuoti a due a due disgiunti, esiste un insieme  $S$  che interseca ciascuno degli elementi di  $X$  in un singolo elemento.
  2. Data una famiglia  $(X_i : i \in I)$  di insiemi non vuoti  $X_i$ , esiste una funzione  $f$  che associa a ciascun  $i \in I$  un elemento  $f(i) \in X_i$ .
  3. Data una famiglia  $\mathcal{F}$  di insiemi non vuoti, esiste una funzione  $g$  che associa a ciascun  $X \in \mathcal{F}$  un elemento  $g(X) \in X$ . In particolare, fissato un insieme non vuoto  $A$ , possiamo considerare la famiglia  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$  di tutti i sottoinsiemi non vuoti di  $X$  ottenendo una funzione  $g : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A$  che associa a ciascun sottoinsieme non vuoto  $X \subseteq A$  un elemento  $g(A) \in A$
  4. Siano  $X, Y$  due insiemi e sia  $R \subseteq X \times Y$  una relazione tra  $X$  ed  $Y$ . Supponiamo che  $(\forall x \in X)(\exists y \in Y) R(x, y)$ . Allora esiste  $f : X \rightarrow Y$  tale che  $(\forall x \in X) R(x, f(x))$
  5. Per ogni famiglia  $(X_i : i \in I)$  non vuota di insiemi non vuoti, il prodotto cartesiano  $\prod_{i \in I} X_i$  è non vuoto.
  6. Data una funzione surgettiva  $f : X \rightarrow Y$  tra due insiemi, esiste una funzione iniettiva  $g : Y \rightarrow X$  tale che  $f(g(y)) = y \quad \forall y \in Y$

## TEOREMI IMPORTANTI

---

### SCRITTURA IN BASE DI ORDINALI

Dato un ordinale  $\gamma \neq 0$  possiamo rappresentare ogni ordinale  $\alpha \neq 0$  in modo unico nella forma  $\alpha = \gamma^{\alpha_1} t_1 + \dots + \gamma^{\alpha_k} t_k$  con  $k \in \omega, t_1, \dots, t_k < \gamma$  e  $\alpha_1 > \dots > \alpha_k$ .

### ORDINALI FISSI

Sia  $f : \text{ON} \rightarrow \text{ON}$  una funzione crescente e continua, ovvero tale che  $f(\lambda) = \sup_{\alpha < \lambda} f(\alpha)$  per ogni ordinale limite  $\lambda$ . Allora esistono ordinali  $x$  arbitrariamente grandi tali che  $f(x) = x$ .

## TEOREMA DI KÖNIG

Per  $i \in I$  sia  $\alpha_i$  un cardinale. Definiamo la somma  $\sum_{i \in I} \alpha_i$  come la cardinalità di  $\cup_{i \in I} A_i$  dove gli  $A_i$  sono insiemi disgiunti tali che  $\text{card}(A_i) = \alpha_i$ .

**König:** Per ogni  $i \in I$  siano  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  cardinali tali che  $\alpha_i < \beta_i$ . Allora  $\sum_{i \in I} \alpha_i < \prod_{i \in I} \beta_i$ .

*Da notare che è praticamente l'unico teorema sui cardinali che prende disuguaglianze strette e ci dà una disuguaglianza stretta. Può quindi essere molto utile nei ragionamenti per assurdo*

## DEFINIZIONI VUOTE

---

- **(Rango di un insieme)** Assumendo BF definiamo il concetto di rango di un insieme per ricorsione sulla relazione ben fondata  $\in$ :

$$\rho(X) = \sup\{\rho(y) + 1 \mid y \in X\}$$

. Notiamo che il rango è una funzione  $\rho : \text{Set} \rightarrow \text{ON}$

- **( $^+$ )** Per ogni cardinale  $\alpha$  esiste un cardinale  $\alpha^+$  con la proprietà che:  $\alpha^+$  è più grande di  $\alpha$  e non esiste nessun cardinale tra  $\alpha$  ed  $\alpha^+$ .
- **(Aleph)**  $\aleph_0 = \text{card}(\mathbb{N})$ ,  $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$ ,  $\aleph_\lambda = \sup_{\beta < \lambda} \aleph_\beta$  se  $\lambda$  è ordinale limite.
- **(Beth)**  $\beth_0 = \aleph_0$ ,  $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$ ,  $\beth_\lambda = \sup_{\alpha < \lambda} \beth_\alpha$  per  $\lambda$  limite.
- **(Funzione di Hartogs)** Dato un insieme  $X$  sia  $H(X)$  la classe degli ordinali  $\alpha$  di cardinalità  $\leq \text{card}(X)$

## CARDINALI, ALEPH, BETH

---

- **(Sup di Cardinali)** Se  $X$  è un insieme di ordinali iniziali (cardinali) allora  $\sup X$  è un ordinale iniziale (cardinale)
- **(Crescenza degli Aleph)**  $\alpha < \beta \implies \aleph_\alpha < \aleph_\beta$
- **(Biggezione Ordinali-Cardinali)** La funzione  $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$  è una biggezione dalla classe ON degli ordinali verso la classe dei cardinali infiniti
- **(Operazioni tra cardinali)** Dati due cardinali infiniti  $\alpha, \beta$  vale che

$$\alpha + \beta = \alpha \cdot \beta = \max\{\alpha, \beta\}$$

dove le operazioni sono tra cardinali.

## FUNZIONE DI HARTOGS

---

- $H(X)$  è un ordinale.
- $\text{card}(H(X)) \not\leq \text{card}(X)$

## GERARCHIA DI VON NEUMANN

---

Viene definita per ricorsione transfinita la seguente famiglia di (?) insiemi indicizzata da ordinali:

- $V_0 = \emptyset$
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$
- $V_\lambda = \cup_{\alpha < \lambda} V_\alpha$  per  $\lambda$  ordinale limite.

Valgono i seguenti fatti:

- Ogni  $V_\alpha$  è transitivo
- $\beta < \alpha \implies V_\beta \subseteq V_\alpha$
- $x \in V_\alpha \Leftrightarrow \rho(x) < \alpha$
- BF equivale all'affermazione che  $\forall X \exists \alpha \ x \in V_\alpha$ , ovvero che  $V = \bigcup_{\alpha \in \text{ON}} V_\alpha$  ( $V$  è l'universo degli insiemi)
- $x \subseteq y \in V_\alpha \implies x \in V_\alpha$
- (Assumendo BF) Una classe  $X \subseteq V$  è un insieme  $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \text{ON}$  t.c.  $X \in V_\alpha$
- $\forall \alpha$  si ha  $\text{card}(V_{\omega+\alpha}) = \beth_\alpha \geq \aleph_\alpha$

## COFINALITÀ

---

Una funzione  $f : A \rightarrow B$  tra due insiemi ordinati si dice cofinale o illimitata se l'immagine di  $f$  non ha maggioranti stretti in  $B$ . La cofinalità di  $B$  è il minimo ordinale  $\alpha$  tale che esiste una funzione cofinale  $f : \alpha \rightarrow B$

- Se  $\beta$  è un ordinale successore si ha  $\text{cof}\beta = 1$
- $\beta \geq \text{cof}\alpha \Leftrightarrow \exists f : \beta \rightarrow \alpha$  cofinale.
- Per ogni ordinale  $\alpha$  vale  $\text{cof}\alpha \leq \text{card}(\alpha) \leq \alpha$
- $\text{cof}\beta = \beta \implies \beta$  è un cardinale (ordinale iniziale)
- Ogni cardinale successore  $\kappa^+$  (ovvero il minimo cardinale maggiore di  $\kappa$ ) è tale che  $\text{cof}\kappa^+ = \kappa^+$
- Vale  $\text{cof}\kappa = \kappa \Leftrightarrow$  per ogni famiglia  $(A_i : i \in I)$  di insiemi  $A_i$  tali che  $\text{card}(A_i) < \kappa$  e  $\text{card}(I) < \kappa$  si ha  $\text{card}(\bigcup_{i \in I} A_i) < \kappa$
- Per ogni ordinale  $\alpha$  si ha  $\text{cof}2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$
- Se un ordinale limite  $\alpha$  NON è un cardinale si ha  $\text{cof}\alpha < \alpha$
- Per ogni ordinale limite  $\text{cofcof}\alpha = \text{cof}\alpha$

## ARITMETICA CARDINALE

---

Nel seguito diamo qualche risultato sull'esponenziazione di cardinali

- $2 \leq \kappa \leq \lambda$  e  $\lambda$  infinito  $\implies \kappa^\lambda = 2^\lambda$
- Inoltre si ha  $2^\lambda \geq \kappa \implies \kappa^\lambda = 2^\lambda$
- $\lambda \geq \text{cof}\kappa \implies \kappa < \kappa^\lambda$
- Definiamo ora detto  $\lambda$  cardinale e  $\text{card}(A) \geq \lambda$  l'insieme  $[A]^\lambda = \{X \subseteq A : \text{card}(X) = \lambda\}$ .
- $\text{card}(A) = \kappa \geq \lambda$  implica che  $[A]^\lambda$  ha cardinalità  $\kappa^\lambda$
- $\lambda$  cardinale infinito e  $\kappa_i > 0 \ \forall i < \lambda$ , allora

$$\sum_{i < \lambda} \kappa_i = \lambda \cdot \sup_{i < \lambda} \kappa_i$$

## CALCOLI PRONTI

---

Diamo ora delle regole di calcolo per fare conti con prodotti di cose in forma normale di Cantor

- Se  $\alpha > \beta$  si ha  $\omega^\beta b + \omega^\alpha a = \omega^\alpha a$
- Se  $0 < \alpha = \omega^{\alpha_1} c_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} c_k$  in CNF e  $0 < \beta$  allora si ha

$$\alpha \omega^\beta = \omega^{\alpha_1 + \beta}$$

ed anche, per ogni  $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$

$$\alpha n = \omega^{\alpha_1} c_1 n + \omega^{\alpha_2} c_2 + \dots + \omega^{\alpha_k} c_k$$

## ASSIOMI UTILIZZATI

---

Viene di seguito riportata una tabella con i principali teoremi di Insiemi, e gli assiomi necessari per dimostrarli.