Istituzioni di Algebra

Estensioni Intere

- (**Equivalenze di Intero**) Sia $A \subseteq B$ un'estensione di anelli e sia $b \in B$. Allora le seguenti sono equivalenti:
  1. b è intero su A
  2. $A[b]$ (come sottoanello) è un A-modulo finito
  3. $\exists C \subseteq B$ sottoanello tale che $A[b] \subseteq C$ e C è un A-modulo finito
  4. $\exists M$, $A[b]$-modulo fedele (ovvero $\operatorname{Ann}(M) = 0$) che sia finito come A-modulo.
- (**Hamilton-Cayley**) Se M è un A-modulo finito e $I \subseteq A$ ideale, $\phi : M \to M$ mappa di A-moduli tale che $\phi(M) \subseteq IM$, allora $\exists a_1, \ldots, a_n \in I$ tali che $\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \ldots + a_n \mathrm{id} = 0$ (in $\operatorname{Hom}_A(M, M)$)
- Valgono quindi le seguenti cose:
  1. Se $b_1, \ldots, b_n$ sono interi su A, allora $A[b_1, \ldots, b_n]$ è un A-modulo finito
  2. $\overline{A}^B = \{b \in B \mid b \text{ intero su } A\}$ è un sottoanello di B.
  3. (**Transitività Integrale**) Se B è intero su A e C è intero su B, allora C è intero su A
  4. (**Transitività Finita**) Se B è finito su A e C è finito su B, allora C è finito su A
  5. (**Idempotenza della Chiusura Integrale**) Sia $A \subseteq B$ e $C = \overline{A}^B$. Allora $\overline{C}^B = C$
- (**Stabilità per Localizzazione e Quoziente**) Sia $A \subseteq B$ intera, S parte moltiplicativa di A e $I \subseteq B$ ideale. Allora si ha che:
  1. $S^{-1}A \to S^{-1}B$ è intera
  2. ${}^{A}/_{I^c} \to {}^{B}/_{I}$ è intera
- (**Relazioni con estensioni di campi**) Supponiamo A dominio e $K = \operatorname{Frac}(A)$ suo campo delle frazioni e consideriamo $A \subseteq K \subseteq L$ dove ${}^{L}/_{K}$ è algebrica. Definiamo $B = \overline{A}^L$.
  1. Sia $x \in L$ e μ_x suo polinomio minimo su K. Se $\mu_x \in A[t]$ allora x è intero su A.
  2. Se A è normale vale anche il viceversa, ovvero si ha x è intero su $A \Leftrightarrow \mu_x \in A[t]$.
- (**UFD $\implies$ normale**) Se A è un UFD allora è normale.
- (**estensioni intere di campi**) Sia $A \subseteq B$ un'estensione intera di domini. Allora A è un campo $\Leftrightarrow$ B è un campo. Ne segue che:
  1. Sia $\mathfrak{q} \subseteq B$ un ideale. Allora $\mathfrak{q}$ è massimale $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{q}^c$ è massimale
  2. Se prendo $\mathfrak{p}$ primo di A e $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \operatorname{Spec} B$ tali che $\mathfrak{q}_1^c = \mathfrak{q}_2^c = \mathfrak{q}$ e $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$ allora vale che $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$.
- (**Lying Over**) Se $A \subseteq B$ è intera, allora $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \quad \exists \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ tale che $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$, ovvero $f^* : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ è surgettiva.
- (**Going Up**) Se $A \subseteq B$ è intera, allora ha la proprietà del going up, ovvero se $\forall \mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq A$ primi e $\forall \mathfrak{q}_1 \subseteq B$ primo tale che $\mathfrak{q}_1^c = \mathfrak{p}_1$ allora $\exists \mathfrak{q}_2 \supseteq \mathfrak{q}_1$ primo tale che $\mathfrak{q}_2^c = \mathfrak{p}_2$
- (**Going Down**) $A \subseteq B$ estensione intera di domini, con A normale allora vale la proprietà del going down, ovvero $\forall \mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq A$ primi e $\forall \mathfrak{q}_2 \subseteq B$ primo tale che $\mathfrak{q}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$ si ha che $\exists \mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$ primo tale che $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$.
  Da notare che serve sia la condizione di dominio che la normalità di A per far funzionare tutto ciò.
- Se A è un dominio normale, $K = \operatorname{Frac} A$ ed ${}^{L}/_{K}$ è un'estensione algebrica di campi, $B = \overline{A}^L$, $I \subseteq A$ ideale, ed $x \in L$ allora x è intero su $I \Leftrightarrow \mu_{L/K,x} \in \sqrt{I}[t]$

- (**Simil-Galois**) Sia A normale e $K = \text{Frac } A \subseteq L$ con L/K estensione di Galois finita e $B = \overline{A}^L$ e sia $G = \text{Gal } L/K$. Allora si ha che:
    1. $g(B) \subseteq B \quad \forall g \in G$
    2. Fissato un primo $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ si ha $\mathcal{F}_\mathfrak{p} = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B \mid \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}\}$ Allora G agisce transitivamente su $\mathcal{F}_\mathfrak{p}$

- (**Chiusura integrale di** $A[x]$) Sia $A \subseteq B$ e sia $C = \overline{A}^B$. Allora la chiusura integrale di $A[x]$ in $B[x]$ è $C[x]$.

- (**Interezza e Nötherianità**) $A \subseteq B$ con A Nötheriano e B finito su A. Allora B è Nötheriano come anello.
  Attenzione che $A \subseteq B$ con A Nötheriano ed estensione intera NON implica che B sia Nötheriano.

- Sia A dominio, $K = \text{Frac } A$, L/K un'estensione finita di campi e sia $B = \overline{A}^L$. Allora si ha:
    1. È FALSO che se A è Nötheriano allora B lo sia.
    2. Se A è normale ed L/K è un'estensione separabile allora si ha che se A è Nötheriano allora B diventa un A-modulo finito e quindi è Nötheriano.

- A noetheriano e dominio, con $K = \text{Frac } A \subseteq L$ campi e vorremmo poter dire qualcosa anche se A non è normale. Ci sono due casi significativi nei quali si ha che in queste ipotesi $\overline{A}^K$ (la normalizzazione di A) è Nötheriana:
    1. $\dim A = 1$
    2. A è una K-algebra finitamente generata

- (**Normalizzazione di Nöther**) A K-algebra f.g. allora $\exists x_1, \ldots, x_n \in A$ algebricamente indipendenti tali che A è finita (come modulo) su $K[x_1, \ldots, x_n]$

- (**Lemmi generici e fatti vari**) Le seguenti cose valgono:
    1. E campo e sia A una E-algebra finitamente generata. Allora $\forall I \subseteq A$ si ha che
    $$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{m} \text{ massimali} \quad \mathfrak{m} \supseteq I} \mathfrak{m}$$
    2. A e B due K-algebre finitamente generate con K campo algebricamente chiuso ed A dominio. Se $f^* : \text{Max } B \to \text{Max } A$ è suriettiva allora f è iniettiva.
    3. Per un modulo sono proprietà locali (e massimali) essere piatto, essere normale, essere nullo.
    4. Per un modulo NON sono proprietà locali essere Noetheriano, essere dominio.
    5. Per una sequenza di moduli essere esatta in un punto è una proprietà locale (e massimale)

Teoria della Dimensione e Grado di Trascendenza

- (**Dimensione in estensioni intere**) Se $A \subseteq B$ è intera allora $\dim A = \dim B$ (è compreso il caso in cui entrambe le dimensione siano infinite)

- (**Dimensione delle** K**-algebre f.g.**) Sia K un campo e $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ con $f \neq 0$. Allora si ha $\dim K[x_1, \ldots, x_n]_f = n$

- (**Relazione con il grado di trascendenza**) Sia A K-algebra f.g. e A dominio. Allora $\dim A = \text{trdeg}_K A$

- (**Cardinalità di una base di trascendenza**) A dominio e K-algebra f.g. Allora tutte le basi di trascendenza hanno la stessa cardinalità.
  Inoltre, se A è un dominio, E una K-algebra e sia $L = \text{Frac } A$
    1. $x_i \in A$ è una base di trascendenza di $A \Leftrightarrow$ lo è di L

2. Se $y_1, \ldots, y_n$ è base di trascendenza di L su K allora $\exists b \in A$ tali che $by_1, \ldots, by_n$ è una base di trascendenza di A.

- (**Particolarità delle K-algebre**) Per le K-algebre f.g. valgono le seguenti cose:
  1. Sono anelli catenari.
  2. Se A è dominio, preso un primo $\mathfrak{p}$ di altezza uno si ha $\dim {}^{A}/_{\mathfrak{p}} = \dim A - 1$
  3. $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \implies \text{ht } \mathfrak{p}, \text{coht } p < +\infty$
  4. Se A è dominio si ha $\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ vale che $\dim A = \text{ht } \mathfrak{p} + \text{coht } \mathfrak{p}$

- (**Artinianità e Nötherianità**) A artiniano se e solo se A Nötheriano e di dimensione zero.

- (**Richiami di Decomposizione Primaria**) Sia $I \subsetneq A$ un ideale. Una decomposizione primaria di I è una scrittura $I = \cap_i Q_i$ dove i Q_i sono un numero finito di ideali primari. Se A è Nötheriano valgono:
  1. Primi associati ad I: $\text{Ass } I = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \,|\, \exists x \in A \text{ t.c. } \mathfrak{p} = (I : x)\}$
  2. Gli zero divisori di A sono l'unione dei primi associati a zero:
  $$\mathcal{D}(A) = \cup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass } 0} \mathfrak{p}$$
  3. $\text{Ass }_{S^{-1}A} S^{-1} I = \text{Ass }_A I \cap \text{Spec } S^{-1} A$
  4. $\text{Ass } I$ è finito
  5. Se $\mathfrak{p}$ è minimale sopra I, allora $\mathfrak{p}$ è associato ad I.

- (**Esercizi e Lemmi vari**) Valgono le seguenti cose:
  1. $\prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z}$ NON è uno $\mathbb{Z}$-modulo libero
  2. $\prod_{n=0}^{\infty} \to^f \mathbb{Z}$ tale che $f(e_i) = 0 \quad \forall i$ allora deve essere che $f = 0$
  3. $X = \text{Spec } A$ e $X_f := \{\mathfrak{p} \subseteq A \,|\, f \notin \mathfrak{p}\} = X \setminus V(f)$ è un aperto di X. Questi sono un sistema fondamentale di aperti di X e si ha $X_f \cong \text{Spec } A_f$
  4. $K((t))$ NON è algebrico su $K(t)$
  5. $X = \text{Spec } A$ è compatto, qualunque sia A.
  6. $A \subseteq B$ intera $\implies f^*$ chiusa
  7. f^* chiusa $\implies$ vale il Going Up.

Dimensione e Anelli Graduati

- (**Serie di Jordan-Hölder**) A anello c.u., M un A-modulo. Una serie di Jordan-Hölder per M è una successione crescente di sottomoduli $0 = M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n = M$ tali che ${}^{M_i}/_{M_{i-1}}$ è un A-modulo semplice (ovvero è diverso dal modulo nullo e non ha sottomoduli propri)

- (**Lunghezza di un Modulo**) Se M ha una serie di JH, diciamo che la lunghezza di M è finita e definiamo $\ell(M) = \min\{n \,|\, \exists \text{ serie di JH con } n+1 \text{ termini }\}$

- (**Lunghezza delle serie di JH**) Tutte le serie di JH di uno stesso modulo hanno la stessa lunghezza ed inoltre i fattori ${}^{M_i}/_{M_{i-1}}$ sono uguali per ogni serie, a meno di permutazioni.

- (**Comportamento per sequenze esatte**) Sia data una sequenza esatta corta di A-moduli $0 \to X \to Y \to Z \to 0$. Allora vale che:
  1. $\ell(X), \ell(Z) < +\infty \Leftrightarrow \ell(Y) < +\infty$
  2. $\ell(Y) = \ell(X) + \ell(Z)$

  Inoltre si ha che per un generico modulo M vale $\ell(M) < \infty \Leftrightarrow M$ è artiniano e Nötheriano.

- (**Anelli graduati noetheriani**) A anello graduato, allora A è noetheriano se e solo se A_0 è noetheriano ed A è f.g. come A_0-algebra.

- (**Funzione e Serie di Hilbert**) Preso A graduato, A_0 artiniato, A noetheriano, M graduato e f.g. (ovvero M noetheriano) definiamo:

  1. $n \mapsto \ell_{A_0}(M_n)$ funzione di Hilbert
  2. $P_M(t) := \sum_n t^n \ell_{A_0}(M_n)$ serie di Hilbert

  Inoltre in queste ipotesi se si ha una sequenza esatta corta con morfismi graduati di grado zero: $0 \to X \to^{\phi} Y \to^{\psi} Z \to 0$ allora sono definiti i polinomi di hilbert e vale che $P_Y = P_X + P_Z$

- (**Teorema di Hilbert**) A graduato, M graduato, A_0 artiniano e A noetheriano, M f.g. e si chiamino $a_1, \dots, a_k$ i generatori omogenei di A come A_0-algebra e $d_i :=$ deg a_i. Allora $\exists f \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ polinomio di Laurent tale che
$$P_M(t) = \frac{f(t)}{\prod_{i=1}^k (1 - t^{d_i})}$$

- (**funzione di Hilbert e grado**) Se A è generato in grado 1 allora la funzione di Hilbert (nelle ipotesi precedenti) per n grandi coincide con i valori assundi da un polinomio di grado $d(M) - 1$ (dove $d(M)$ è l'ordine di polo in 1 della funzione razionale P_M)

- (**Analogo di Nakyama**) A graduato, M graduato f.g. e supponiamo che $A_+ M = M$ allora $M = 0$