Semantica e Teoria dei Tipi

Teoria dei Domini

Per introdurre la semantica operazionale abbiamo bisogno di un po' di questa teoria.

Definizioni di domini e cpo

- (**Poset**) Dato un insieme D, una relazione $\sqsubseteq$ su di esso si dice un ordine parziale se valgono:
  1. (**Riflessiva**) $\forall d \in D \quad d \sqsubseteq d$
  2. (**Transitiva**) $\forall d, e, f \in D \quad d \sqsubseteq e \sqsubseteq f \implies d \sqsubseteq f$
  3. (**Antisimmetrica**) $\forall d, e \in D \quad d \sqsubseteq e, e \sqsubseteq d \implies d = e$
- (**Minimo di un sottoinsieme**) Dato un sottoinsieme $S \subseteq D$ di un poset, si dice che $s \in S$ è un elemento minimo se $\forall d \in D \quad s \sqsubseteq d$. Un elemento minimo, se esiste, è unico per l'assioma di antisimmetria, e lo denotiamo con il simbolo $\perp$
- (**Estremo superiore di una catena**) Una catena numerabile crescente (CIC - Countable Increasing Chain) è una sequenza $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di un poset D tale che

  $$d_0 \sqsubseteq d_1 \sqsubseteq d_2 \sqsubseteq \dots$$

  Un maggiorante per la catena è un qualunque $d \in D$ tale che $\forall n \in \mathbb{N} \quad d_n \sqsubseteq d$.

  Se esiste il minimo degli elementi maggioranti, esso viene chiamato sup, e verrà indicato con $\sqcup_{n\geq 0} d_n$, o anche con $\sup_n d_n$. Per definizione vale quindi che un elemento $d \in D$ è il sup della catena se:
  1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad d_n \sqsubseteq \sup_n d_n$
  2. $\forall d \in D \quad (\forall m \in \mathbb{N} \quad d_m \sqsubseteq d) \implies \sup_n d_n \sqsubseteq d$

  Notiamo inoltre che togliendo un numero finito di elementi alla catena, non alteriamo l'insieme dei suoi maggioranti, e quindi non cambia nemmeno il suo sup.
- (**cpo - Chain Complete Poset**) Un cpo è un poset D in cui tutte le CIC hanno un sup.
- (**Dominio**) Un dominio è un cpo con un elemento minimo $\perp$
- (**Dominio delle funzioni parziali**) L'insieme delle funzioni parziali $X \to Y$ può essere dotato della struttura di dominio:
  1. $f \sqsubseteq g$ sse dom$f \subseteq$ dom$g$ e vale $\forall x \in \text{dom} f \quad f(x) = g(x)$
  2. Data una CIC $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq \dots$ il suo sup è la funzione f con dom$f = \cup_{n\geq 0}\text{dom}(f_n)$ definita da:

  $$f(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{se } x \in \text{dom}(f_n) \text{ per qualche } n \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{cases} \quad cc$$

  3. $\perp$ è la funzione totalmente non definita, ovvero dom$f = \emptyset$

Funzioni continue e monotone

- (**Funzioni monotone**) Una funzione $f : D \to E$ tra poset è monotona sse $\forall x, y \in D \quad x \sqsubseteq y \implies f(x) \sqsubseteq f(y)$
- (**Funzioni continue**) Se entrambi i poset sono cpo ha senso parlare di funzioni continue: $f : D \to E$ si dice continua sse è monotona e preserva i sup delle CIC, ovvero se $\forall \text{catena} d_0 \sqsubseteq d_1 \sqsubseteq \dots$ in D si ha che $f(\sup_n d_n) = sup_n f(d_n)$ dentro ad E.
- (**Funzioni rigide**) Se D ed E hanno un minimo, si dice che f è rigida se $f(\perp_D) = \perp_E$

- (**Criterio per la continuità**) Notiamo che, data una cic in D: $d_0 \sqsubseteq d_1 \sqsubseteq \ldots$ ed f monotona, si ha sempre che $f(d_0) \sqsubseteq f(d_1) \sqsubseteq \ldots$, ovvero $f(d_n)$ è una catena in E. Inoltre se d è un maggiorante della catena in D deve essere che $f(d)$ è un maggiorante della catena in E: ovvero se f è monotona tra cpo si ha sempre che:
$$\sup_n f(d_n) \sqsubseteq f(\sup_n d_n)$$
Quindi per controllare se una funzione è continua tra cpo basterà controllare solo l'inclusione opposta.

- (**Funzioni costanti**) Dati due cpo D ed E ed $e \in E$, la funzione costante $c_e : D \to E$ data da $c_e(d) = e$ $\forall d \in D$ è continua