ETI

Questo file, a differenza degli altri, vuole essere un luogo dove raccolgo tutti i trucchetti vari di Teoria Degli Insiemi. Ciò viene reso necessario dal fatto che al corso si definiscono solo delle cose, e gli esercizi c'entrano poco con tutto quanto.

Assiomi

- (**Estensionalità**) Due classi sono uguali se hanno gli stessi elementi
- (**Di Astrazione**) Data una proprietà ben definita P, esiste una classe i cui elementi sono gli oggetti che verificano P.
- (**Di Comprensione**) Una sottoclasse di un insieme è un insieme
- (**Insieme Vuoto**) La classe vuota è un insieme
- (**Coppia**) Dati due insiemi a, b la coppia $\{a, b\}$ è un insieme
- (**Unione**) Se X è un insieme, allora $\cup X = \{z \mid z \in y \in X\}$ è un insieme
- (**Dell'Infinito**) $\exists X$ insieme tale che $\emptyset \in X$ e $a \in X \implies a \cup a \in X$
- (**Potenza**) Se X è un insieme, allora $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$ è un insieme
- (**Di Rimpiazzamento**) Se $F : X \to Y$ è una funzione tra classi ed il suo dominio X è un insieme, allora la sua immagine Im F è un insieme.
- (**Scelta**) Ne diamo un po' di formulazioni equivalenti:
  1. Dato un insieme X i cui elementi sono insiemi non vuoti a due a due disgiunti, esiste un insieme S che interseca ciascuno degli elementi di X in un singolo elemento.
  2. Data una famiglia $(X_i : i \in I)$ di insiemi non vuoti X_i, esiste una funzione f che associa a ciascun $i \in I$ un elemento $f(i) \in X_i$.
  3. Data una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi non vuoti, esiste una funzione g che associa a ciascun $X \in \mathcal{F}$ un elemento $g(X) \in X$. In particolare, fissato un insieme non vuoto A, possiamo considerare la famiglia $\mathcal{F} = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ di tutti i sottoinsiemi non vuoti di X ottenendo una funzione $g : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ che associa a ciascun sottoinsieme non vuoto $X \subseteq A$ un elemento $g(A) \in A$
  4. Siano X, Y due insiemi e sia $R \subseteq X \times Y$ una relazione tra X ed Y. Supponiamo che $(\forall x \in X)(\exists y \in Y) \quad R(x, y)$. Allora esiste $f : X \to Y$ tale che $(\forall x \in X) \quad R(x, f(x))$
  5. Per ogni famiglia $(X_i : i \in I)$ non vuota di insiemi non vuoti, il prodotto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$ è non vuoto.
  6. Data una funzione surgettiva $f : X \to Y$ tra due insiemi, esiste una funzione iniettiva $g : Y \to X$ tale che $f(g(y)) = y \quad \forall y \in Y$

Teoremi Importanti

Scrittura in base di ordinali

Dato un ordinale $\gamma \neq 0$ possiamo rappresentare ogni ordinale $\alpha \neq 0$ in modo unico nella forma $\alpha = \gamma^{\alpha_1} t_1 + \ldots + \gamma^{\alpha_k} t_k$ con $k \in \omega$, $t_1, \ldots, t_k < \gamma$ e $\alpha_1 > \ldots > \alpha_k$.

Ordinali fissi

Sia f : ON $\to$ ON una funzione crescente e continua, ovvero tale che $f(\lambda) = \sup_{\alpha < \lambda} f(\alpha)$ per ogni ordinale limite λ. Allora esistono ordinali x arbitrariamente grandi tali che $f(x) = x$.

TEOREMA DI KÖNIG

Per $i \in I$ sia α_i un cardinale. Definiamo la somma $\sum_{i\in I} \alpha_i$ come la cardinalità di $\cup_{i\in I} A_i$ dove gli A_i sono insiemi disgiunti tali che card $(A_i) = \alpha_i$.
König: Per ogni $i \in I$ siano α_i e β_i cardinali tali che $\alpha_i < \beta_i$. Allora $\sum_{i\in I} \alpha_i < \prod_{i\in I} \beta_i$.
Da notare che è praticamente l'unico teorema sui cardinali che prende disuguaglianze strette e ci dà una disuguaglianza stretta. Può quindi essere molto utile nei ragionamenti per assurdo

DEFINIZIONI VUOTE

- (**Rango di un insieme**) Assumendo BF definiamo il concetto di rango di un insieme per ricorsione sulla relazione ben fondata $\in$:
$$\rho(X) = \sup\{\rho(y) + 1 \mid y \in X\}$$
. Notiamo che il rango è una funzione ρ : Set $\to$ ON
- ($^+$) Per ogni cardinale α esiste un cardinale α^+ con la proprietà che: α^+ è più grande di α e non esiste nessun cardinale tra α ed α^+.
- (**Aleph**) $\aleph_0 =$ card $(\mathbb{N})$, $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$, $\aleph_\lambda = \sup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$ se λ è ordinale limite.
- (**Beth**) $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$, $\beth_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} \beth_\alpha$ per λ limite.
- (**Funzione di Hartogs**) Dato un insieme X sia $H(X)$ la classe degli ordinali α di cardinalità $\leq$ card (X)

CARDINALI, ALEPH, BETH

- (**Sup di Cardinali**) Se X è un insieme di ordinali iniziali (cardinali) allora $\sup X$ è un ordinale iniziale (cardinale)
- (**Crescenza degli Aleph**) $\alpha < \beta \implies \aleph_\alpha < \aleph_\beta$
- (**Biggezione Ordinali-Cardinali**) La funzione $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ è una biggezione dalla classe ON degli ordinali verso la classe dei cardinali infiniti
- (**Operazioni tra cardinali**) Dati due cardinali infiniti α, β vale che
$$\alpha + \beta = \alpha \cdot \beta = \max\{\alpha, \beta\}$$
dove le operazioni sono tra cardinali.

FUNZIONE DI HARTOGS

- $H(X)$ è un ordinale.
- card $(H(X)) \not\leq$ card (X)

GERARCHIA DI VON NEUMANN

Viene definita per ricorsione transfinita la seguente famiglia di (? insiemi) indicizzata da ordinali:

- $V_0 = \emptyset$
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$
- $V_\lambda = \cup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ per λ ordinale limite.

Valgono i seguenti fatti:

- Ogni V_α è transitivo
- $\beta < \alpha \implies V_\beta \subseteq V_\alpha$
- $x \in V_\alpha \Leftrightarrow \rho(x) < \alpha$
- BF equivale all'affermazione che $\forall X \quad \exists \alpha \quad x \in V_\alpha$, ovvero che $V = \cup_{\alpha \in \mathrm{ON}} V_\alpha$ (V è l'universo degli insiemi)
- $x \subseteq y \in V_\alpha \implies x \in V_\alpha$
- (Assumendo BF) Una classe $X \subseteq V$ è un insieme $\Leftrightarrow \exists \alpha \in$ ON t.c. $X \in V_\alpha$
- $\forall \alpha$ si ha card $(V_{\omega+\alpha}) = \beth_\alpha \geq \aleph_\alpha$

Cofinalità

Una funzione $f : A \to B$ tra due insiemi ordinati si dice cofinale o illimitata se l'immagine di f non ha maggioranti stretti in B. La cofinalità di B è il minimo ordinale α tale che esiste una funzione cofinale $f : \alpha \to B$

- Se β è un ordinale successore si ha cof$(\beta) = 1$
- cof$(\alpha + \beta) =$ cof(β)
- $\beta \geq$ cof$(\alpha) \Leftrightarrow \exists f : \beta \to \alpha$ cofinale.
- Per ogni ordinale α vale cof$(\alpha) \leq$ card $(\alpha) \leq \alpha$
- cof$(\beta) = \beta \implies \beta$ è un cardinale (ordinale iniziale)
- Ogni cardinale successore κ^+ (ovvero il minimo cardinale maggiore di κ) è tale che cof$(\kappa^+) = \kappa^+$
- Vale cof$(\kappa) = \kappa \Leftrightarrow$ per ogni famiglia $(A_i : i \in I)$ di insiemi A_i tali che card $(A_i) < \kappa$ e card $(I) < \kappa$ si ha card $(\cup_{i \in I} A_i) < \kappa$
- Per ogni ordinale α si ha cof$(2^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha$
- Se un ordinale limite α NON è un cardinale si ha cof$(\alpha) < \alpha$
- Per ogni ordinale limite cof(cof(α)) = cof(α)

Aritmetica Cardinale

Nel seguito diamo qualche risultato sull'esponenziazione di cardinali

- $2 \leq \kappa \leq \lambda$ e λ infinito $\implies \kappa^\lambda = 2^\lambda$
- Inoltre si ha $2^\lambda \geq \kappa \implies \kappa^\lambda = 2^\lambda$
- $\lambda \geq$ cof$(\kappa) \implies \kappa < \kappa^\lambda$
- Definiamo ora detto λ cardinale e card $(A) \geq \lambda$ l'insieme $[A]^\lambda = \{X \subseteq A : \text{card } (X) = \lambda\}$.
- card $(A) = \kappa \geq \lambda$ implica che $[A]^\lambda$ ha cardinalità κ^λ
- λ cardinale infinito e $\kappa_i > 0 \quad \forall i < \lambda$, allora

$$\sum_{i<\lambda} \kappa_i = \lambda \cdot \sup_{i<\lambda} \kappa_i$$

TRUCCHI PER GLI ESERCIZI

CALCOLI CON LE FORME NORMALI DI CANTOR

Diamo ora delle regole di calcolo per fare conti con prodotti di cose in forma normale di Cantor

- Se $\alpha > \beta$ si ha $\omega^\beta b + \omega^\alpha a = \omega^\alpha a$
  Dim: Visto che $\alpha > \beta$ si ha $\exists \gamma \neq 0 \quad \alpha = \beta + \gamma$. Allora $\omega^\beta b + \omega^\alpha a = \omega^\beta (b + \omega^\gamma a)$ Mostrando che $b + \omega^\gamma a = \omega^\gamma a \quad \forall \gamma \neq 0$ si avrebbe la tesi. Siccome $b \in \omega$ si può definire in maniera piuttosto semplice la biggezione di ordinamenti in questione: mandiamo un elemento $n \in b$ nella γ-upla $(n, 0, 0, \dots)$ e data una γ-upla $(U_i)_{i \in \gamma}$ la si può mandare in $(U_0 + b, U_i)$.

- Se $0 < \alpha = \omega^{\alpha_1} c_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k} c_k$ in CNF e $0 < \beta$ allora si ha

  $$\alpha \omega^\beta = \omega^{\alpha_1 + \beta}$$

  ed anche, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

  $$\alpha n = \omega^{\alpha_1} c_1 n + \omega^{\alpha_2} c_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} c_k$$

FATTI DA TENERE A MENTE

- $A \subseteq \mathbb{R}$ bene ordinato $\implies$ card $(A) \leq \aleph_0$ (Infatti dato un insieme bene ordinato dentro $\mathbb{R}$ riesco a trovarne un'immersione che preserva l'ordine di A in $\mathbb{Q}$ e quindi si ha la tesi) (Basta mandare α in un razionale tra $f(\alpha)$ e $f(\alpha+1)$)

- Dato $\alpha > 0$ sono proprietà equivalenti:
  1. $\forall \beta < \alpha \quad \beta + \alpha = \alpha$
  2. $\forall \beta, \gamma < \alpha \quad \beta + \gamma < \alpha$
  3. $\alpha = \omega^\delta$ per un qualche δ

- Dato $\alpha > 0$ sono proprietà equivalenti:
  1. $\forall \beta < \alpha \quad \beta\alpha = \alpha$
  2. $\forall \beta, \gamma < \alpha \quad \beta\gamma < \alpha$
  3. $\exists \delta \quad \alpha = \omega^{\omega^\delta}$

- Dato $\alpha > 0$ sono proprietà equivalenti:
  1. $\forall \beta < \alpha \quad \beta^\alpha = \alpha$
  2. $\forall \beta, \gamma < \alpha \quad \beta^\gamma < \alpha$

- λ è limite $\Leftrightarrow \lambda = \cup_{\gamma < \lambda} \gamma \Leftrightarrow$ è della forma $\lambda = \omega\gamma$ per un qualche γ

- Se β è un successore allora $\exists \lambda$ limite oppure $\lambda = 0$ ed $\exists k \in \omega$ tali che $\beta = \lambda + k$ (Si dimostra poiché non esistono catene discendenti infinite di ordinali, e sapendo che β è successore si può scrivere $\beta = \alpha + 1$ e per induzione su α)

- Gli ordinali α con la proprietà che $\forall X \subseteq \alpha$ si ha X ha il tipo d'ordine di α oppure $\alpha \setminus X$ ha il tipo d'ordine di α dovrebbero essere soltanto $\alpha = 0$ e tutti gli ordinali limite. [Ancora da controllare]

PUNTI FISSI DI FUNZIONI

- Data $f : \mathrm{ON} \to \mathrm{ON}$ strettamente crescente e continua ai limiti, esistono punti fissi arbitrariamente grandi

- Supponiamo che κ sia [Qualche ipotesi ancora da determinare per bene] allora si ha che, data una qualunque famiglia $\mathcal{F}$ [massima cardinalità da esplicitare] di funzioni $f_i : \kappa \to \kappa$ esistono punti fissi comuni a tutte le f_i arbitrariamente grandi.
  Diamo un'idea della dimostrazione: Sia λ un ordinale iniziale tale che $\lambda = \text{card}\,(\mathcal{F})$. Allora definiamo per ricorsione ordinale le seguenti funzioni: $\Phi_0 = f_0$, $\Phi_{\alpha+1} = f_{\alpha+1} \circ \text{Fix}\,(\Phi_\alpha)$, $\Phi_\lambda(\delta) = \sup_{\gamma<\lambda} \Phi_\gamma(\delta)$ se λ è limite, dove Fix è la funzione che enumera i punti fissi.
  Controllando bene quando esistono punti fissi e quando si possono unire tutti per gli ordinali limite si ottengono le ipotesi, che prima o poi scriverò.
  Ci chiediamo inoltre quanti sono i punti fissi della funzione... E claimiamo che siano come κ

Gerarchia di Von Neumann

- $X \subseteq V_\alpha \Leftrightarrow X \in V_{\alpha+1}$
- Sia $A \subseteq V_\lambda$, con A finito e λ limite. Allora $A \in V_\lambda$ (Infatti $X \in A \implies X \in V_\lambda \implies \exists \alpha < \lambda \quad X \in V_\alpha$. Sfruttando il fatti che gli X sono in numero finito allora si ha che, chiamato γ il massimo degli α così ottenuti si ha $\gamma < \lambda$ e $\forall X \in A \quad X \in V_\gamma$, ovvero $A \in V_{\gamma+1} \subseteq V_\lambda$, tesi)
- Se α NON è limite, allora si ha $\exists A \subseteq V_\alpha$ finito e non vuoto tale che $V_\alpha \setminus A$ è ancora transitivo. Infatti $\alpha = \lambda + k$ con λ limite (oppure zero) e $k \in \omega$. Allora si prenda $A = \{V_\lambda, V_{\lambda+1}, V_{\lambda+2}, \ldots, V_{\lambda+(k-1)}\}$ e si verifichi la transitività

Aleph

- $X \subseteq \aleph_{\alpha+1}$ è illimitato se e solo se $\text{card}\,(X) = \aleph_{\alpha+1}$

Cardinalità Note

- $\text{card}\,(\mathbb{N}) = \aleph_0$ (e sono la più piccola cardinalità infinita)
- $\text{card}\,(\mathbb{N}^\mathbb{N}) = \text{card}\,(\mathbb{R}) = \text{card}\,(\mathbb{R}^\mathbb{N}) = \mathfrak{c}$ (cardinalità del continuo)
- $\forall \alpha, \beta \geq \omega$ ordinali vale che $\text{card}\,(\alpha^\beta) = \max \text{card}\,(\alpha), \text{card}\,(\beta)$ dove l'esponenziazione è ordinale
- $X = \{A \subseteq \omega_k \mid \text{card}\,(A) = \aleph_n\}$ con $n \leq k \in \mathbb{N}$. Allora possiamo calcolare la cardinalità di X, assumendo GCH: $[\omega_k]^{\aleph_n} = \omega_k^{\aleph_n}$ con esponenziazione cardinale. $\text{card}\,(X) = \aleph_k^{\aleph_n} = \aleph_k \cdot \aleph_0^{\aleph_n} = \aleph_k \cdot 2^{\aleph_n} = \aleph_k \cdot \aleph_{n+1} = \aleph_{\max k, n+1}$
- $X = \{f : \omega_k \to \omega_n \mid f \text{ è illimitata }\}$. Allora, sempre assumendo GCH si ha: Supponiamo $k > n$. Allora $\text{card}\,(X) \leq (\aleph_n)^{\aleph_k} = \aleph_{k+1}$. Per la disuguaglianza opposta si può considerare la seguente funzione: per ogni $A \in \mathcal{P}(\omega_k \setminus \omega_n)$ sia $f_A : \omega_k \to \omega_n$ la funzione così definita:

$$f_A(\alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{se } \alpha \in \omega_n \\ \chi_A(\alpha) & \text{se } \alpha \in \omega_k \setminus \omega_n \end{cases}$$

  dove χ_A è la funzione caratteristica di A. Allora si ha che f_A è suriettiva visto che $f\,|_{\omega_n}$ è l'identità, quindi $f_A \in X$. Ponendo $\Phi(A) = f_A$ allora si ottiene una funzione iniettiva $\Phi : \mathcal{P}(\omega_k \setminus \omega_n) \to X$. Poiché $\text{card}\,(\omega_k \setminus \omega_n) = \aleph_k$ segue che $\aleph_{k+1} = \text{card}\,(\mathcal{P}(\omega_k \setminus \omega_n)) \leq \text{card}\,(X)$. Allora concludiamo che $\text{card}\,(X) = \aleph_{k+1}$
- $X = \{f : \omega_k \to \omega_n \mid f \text{ è strettamente crescente}\}$ con $k < n$. Assumiamo GCH e si ha che, visto che X è sottoinsieme di tutte le funzioni, $\text{card}\,(X) \leq (\aleph_n)^{\aleph_k} = \aleph_{\max(n,k+1)} = \aleph_n$. Notiamo ora che $\forall \alpha \in \omega_n$ e $\forall \beta \in \omega_k$ si ha che $\alpha + \beta \in \omega_n$ (per verificarlo basta notare ad esempio che la cardinalità dell'ordinale $\alpha + \beta$ è $\max \text{card}\,(\alpha), \text{card}\,(\beta) < \omega_n$.
  Dunque per ogni $\alpha \in \omega_n$ possiamo definire la funzione $f_\alpha : \omega_k \to \omega_n$ ponendo $f_\alpha(\beta) = \alpha + \beta$. È semplice verificare che f_α è strettamente crescente. Ponendo $\Phi(\alpha) = f_\alpha$ si ottiene una funzione iniettiva $\Phi : \omega_n \to X$ ed otteniamo così anche la disuguaglianza inversa $\aleph_n \leq \text{card}\,(X)$

SUCCESSORE O LIMITE?

Elenchiamo di seguito, a seconda se α e β sono limiti o successori, che cosa sono quelli ottenuti dalle operazioni elementari

α	S	S	L	L
β	S	L	S	L
$\alpha+\beta$	S	L	S	L
$\alpha\cdot\beta$	S	L	L	L
α^β		L	L	L

Inoltre α^β è successore $\Leftrightarrow$ α è successore e β è finito.

DISUGUAGLIANZE STUPIDE MA DA DIMOSTRARE

Con gli ordinali dovrebbero valere (devo ancora verificarle) le seguenti disuguaglianze stupide

- $\forall\alpha \neq 0, \beta \geq 2 \quad \alpha\beta > \alpha + 1$
- $\forall\chi > \alpha, \gamma \neq 0 \quad \gamma^\chi > \alpha$
- $\forall\alpha \geq 2, \beta \geq 2 \quad \alpha^\beta > \alpha\beta$ (con uguaglianza solo nel caso $\alpha = \beta = 2$)

ASSIOMI UTILIZZATI

Viene di seguito riportata una tabella con i principali teoremi di Insiemi, e gli assiomi necessari per dimostrarli.