UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

SEMINARIO DE MATEMÁTICA PURA Y APLICADA I

Formulación variacional, Existencia y Unicidad del Problema de Stokes en Espacios Sobolev

LIMA-PERU

Resumen

El propósito del presente trabajo es realizar un análisis cualitativo del problema de Stokes, con la finalidad de predecir las condiciones que hacen que el problema tenga solución única.
El trabajo consiste en dar los conceptos del análisis funcional para definir el espacio sobolev $H_0^1(\Omega)$ y sus dar sus propoiedades, luego hacer la formulación variacional del problema usando las identidades de Green y el teorema de Poincare, para finalmente aplicando el teorema de Lax-Milgram se determina la existencia y unicidad de solucion del problema en los espacios Sobolev.

Índice general

Introducción

Sir George Gabriel Stokes (1819-1903) fue un matemático y físico irlandes que realizo contribuciones importantes a la dinámica de fluidos, estudiando el movimiento uniforme de fluidos incomprensibles.
El problema de Stokes es una ecuación que describe el movimiento de un fluido incompresible muy viscoso, este es un caso particular de las ecuaciones de Navier-Stokes que son las que describen el movimiento de fluidos en general.
Resolver el problema (ecuación) seria importante ya que este tipo de fluidos ocurre en diversos campos, en la naturaleza se aprecia en el movimiento de microorganismos, esperma y flujo de lava, en el campo tecnológico en las pinturas y dispositivos microelectromecánicos (MEMS) y en el flujo de polímeros viscosos, además permite entender la lubricación.
El problema consiste en encontrar la velocidad $\mathbf{u}$ y la presión p del fluido que ocupa una región del plano, definido por un dominio Ω, las cuales pueden ser conocidas si se resuelve el sistema

$$\begin{cases} a_0\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & en\ \Omega \\ div\ \mathbf{u} = 0 & en\ \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & sobre\ \partial\Omega \end{cases} \qquad \ldots (I)$$

donde ν es la viscosidad del fluido y $\mathbf{f}$ representa la fuerza externa.
En este trabajo, solo veremos bajo que condiciones y en que espacios presenta solución (unica), para eso desarrollaremos asi:

- En el primer Capítulo se dan las definiciones y propiedades necesarias del análisis funcional como espacios de Hilbert y Espacios duales para poder definir el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ y su subespacio $H_0^1(\Omega)$ los cuales son donde se trabajará la formulación y donde se dá la solución, tambien veremos formas bilineales, complemento ortogonal y proyección que son necesarios para enunciar el Teorema de Lax Milgram.

- En Capítulo 2 realizaremos la llamada formulación variacional o formulación débil del problema, para lo cual es necesario hacer uso de las identidaes de Green y la Desigualdad de Poincaré las que seran enunciadas al inicio del capítulo.

- Para el capítulo 3, partiendo de la formulación variacional probaremos la existencia y unicidad de solución, utilizando el Teorema de Lax-Milgram para la velocidad y para la presión usaremos un resultado del Girault Raviart [5].

- Finalmente daremos las conclusiones del trabajo, asi como ciertas observaciones, para finalmente dar las referencias bibliográficas.

Capítulo 1

Marco Teórico para el estudio del problema

Para empezar es necesario mostrar las herramientas que se utilizaran que son conceptos conocidos del análisis funcional, a excepción de los espacio Sobolev, ahi que hacer notar que sólo se trabajará el de primer orden $H^1(\Omega)$ y algunas de sus propiedades, no es propósito de este trabajo hacer un estudio de los espacios Sobolev.

1.1. Espacios Banach y Hilbert

Definición 1.1.1 (Espacio normado) *Sea V un espacio vectorial real, $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ una función que satisface para todo $u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:*

1. $\|u\| \geq 0$; $\|u\| = 0 \iff v = 0$
2. $\|\alpha u\| = |\alpha|.\|u\|$
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(Desigualdad Triangular)*

Luego se define a $\|.\|$ como una norma sobre V, y al par $(V, \|.\|)$ un espacio normado.

Definición 1.1.2 (Espacio de Banach) *Un espacio normado $(V, \|.\|)$ es llamado Espacio de Banach si V es completo con la métrica inducida por la norma $\|.\|$.*

Definición 1.1.3 (Espacio Producto Interno) *Sea V un espacio vectorial real, $(.,.) : V \times V \to \mathbb{R}$ una función que satisface para todo $u, v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:*

1. $(u, u) \geq 0$; $(u, u) = 0 \iff u = 0$
2. $(u, v) = (v, u)$
3. $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$

4. $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$

Luego se define a $(.,.)$ como un producto interno sobre V, y al par $(V, (.,.))$ un espacio producto interno.

Observación
Un producto interno sobre V, define una norma mediante la fórmula:

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}, \quad u \in V$$

A esta norma se le llama norma inducida (por el producto interno).

Definición 1.1.4 (Espacio de Hilbert) *Un espacio producto interno $(V, (.,.))$ es llamado Espacio de Hilbert si para la norma inducida por el producto interno se cumple que $(V, \|.\|)$ es un Espacio de Banach.*

1.2. Funcionales Lineales y Espacios Duales

Definición 1.2.1 (Funcional lineal) *Sea V un espacio vectorial real, una función $L : V \to \mathbb{R}$ es llamada una funcional lineal si para todo $u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$L(u + \alpha v) = L(u) + \alpha L(v)$$

Proposición 1.2.1 *Sea V un espacio normado $L : V \to \mathbb{R}$ una funcional lineal, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *L es uniformemente continua.*
2. *L es continua.*
3. *L es es continua en 0.*
4. *Existe un $C > 0$ tal que $|L(u)| \leq C\|u\|$ para todo $u \in V$.*

Demostración. Ver [8].

Definición 1.2.2 (Funcional lineal acotada) *Sea V un espacio normado, $L : V \to \mathbb{R}$ una funcional lineal es llamada acotada si existe un $C > 0$ tal que $|L(u)| \leq C\|u\|$ para todo $u \in V$*

Observación
De la proposición anterior es equivalente decir funcional lineal acotada o funcional lineal continua.

Definición 1.2.3 (Espacio Dual) *Sea V un espacio normado, el espacio dual de V se define como el conjunto de las funcionales lineales continuas, y se denota por V'.*

Proposición 1.2.2 *Si para $L \in V'$ consideramos $\|L\|_{V'} = \sup\limits_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{|Lv|}{\|v\|_V}$ entonces $(V', \|.\|_{V'})$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Ver [8].

Corolario 1.2.1 *Si $L \in V'$ entonces $|Lv| \leq \|L\|_{V'} \|v\|$ para todo $v \in V$.*

1.3. Formas Bilineales

Definición 1.3.1 (Forma bilineal) *Sea V un espacio vectorial, una función $b : V \times V \to \mathbb{R}$ se le llama forma bilineal si cumple para todo $u, v, w \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:*

1. $b(\alpha u + \beta v, w) = \alpha b(u, w) + \beta b(v, w)$
2. $b(u, \alpha v + \beta w) = \alpha b(u, v) + \beta b(u, w)$

Si además cumple que $\forall u, v \in V : \; b(u, v) = b(v, u)$ se dice que es simétrica.

Definición 1.3.2 *Una forma bilineal $b(.,.)$ en un espacio vectorial normado V, se dice que es acotada (o continua); si $\exists\, C > 0$ tal que:*

$$|b(v, w)| \leq C \|v\|_V \|w\|_V \quad ; \forall\, v, w \in V$$

Y se dice que es coerciva en $U \subset V$ si $\exists\, \alpha > 0$ tal que:

$$b(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad ; \forall\, v \in U$$

1.4. Espacios Sobolev: $H^1(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$

Considerando a $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto.

Definición 1.4.1 (Espacios $L^2(\Omega)$)

$$L^2(\Omega) := \{[v]/v : \Omega \to \mathbb{R}\; es\, una\, funcion\, medible\; y\; \int_\Omega |v(x)|^2 dx < \infty\}$$

donde: $[v] = \{u : \Omega \to \mathbb{R}/u(x) = v(x)\, excepto\, en\, un\, conjunto\, de\, medida\, nula\}$

Observación:
Asumiremos que $v \in L^2(\Omega) \equiv [v] \in L^2(\Omega)$

Proposición 1.4.1 *Para* $\|v\|_{L^2(\Omega)} := (\int_\Omega |v(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ *se cumple:*

1. $\int_\Omega |u(x)v(x)dx| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$ (Desigualdad de Schwarz)
2. $\|u + v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}$ (Desigualdad Triangular)
3. $(L^2(\Omega), \|.\|_{L^2(\Omega)})$ es un espacio de Banach.

Demostración. Ver [2].

Observación
La norma mencionada es inducida por el producto interno $(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)$ asi $L^2(\Omega)$ es tambien un espacio de Hilbert.

Definición 1.4.2 *Sea* $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ *el soporte de* φ *esta definido por:*

$$sop(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$$

Definición 1.4.3 *Se define por* $\mathcal{D}(\Omega)$ *o* $C_0^\infty(\Omega)$ *al conjunto de funciones* $C^\infty(\Omega)$ *con soporte compacto en* Ω

Definición 1.4.4 *Dada* $v \in L^2(\Omega)$, *se dice que* $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ *en el sentido distribucional si existe un* $z_i \in L^2(\Omega)$ *tal que*

$$-\int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_\Omega z_i \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

NOTACIÓN: $\frac{\partial v}{\partial x_i} = z_i$

Definición 1.4.5 *Se define al espacio Sobolev de orden 1 como:*

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad i = 1, 2\}$$

Teorema 1.4.1 *Si definimos*

$$(v, w)_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega [\nabla v \cdot \nabla w + vw] dx$$

entonces $(H^1(\Omega), (.,.)_{H^1(\Omega)})$ *es un espacio de Hilbert*

Demostración. Ver [7].

Observación
La norma para $H^1(\Omega)$ seria $\|v\|_{H^1(\Omega)} = \{\int_\Omega ((\frac{\partial v}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x_2})^2 + v^2) dx\}^{\frac{1}{2}}$

Definición 1.4.6 *Definimos el conjunto* $H_0^1(\Omega)$ *como la cerradura de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *en* $H^1(\Omega)$, *es decir:*

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$$

Observación
$H_0^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$, asi que tambien es un espacio de Hilbert.

Teorema 1.4.2

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \ en \ \partial\Omega\}$$

Demostración. Ver [7].

Teorema 1.4.3 (Desiguadad de Poincaré) *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *un conjunto abierto y acotado. Entonces existe* $C = C(\Omega) > 0$ *tal que*

$$\int_\Omega v^2(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \leq C \int_\Omega \{(\frac{\partial v}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x_2})^2\} d\boldsymbol{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Demostración. Ver [7].

Definición 1.4.7 *Se define el espacio Sobolev de orden 2 como:*

$$H^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) / \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \in L^2(\Omega)\}$$

Capítulo 2

Formulación Variacional Velocidad-Presión del Problema de Stokes

Una de las formas mas utilizadas actualmente para resolver ecuaciones diferenciales parciales, es encontrando su formulación variacional o tambien llamada formulación débil, para luego poder utilizar el método numerico mas apropiado.

2.1. Identidades de Green

NOTACIONES
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
Para $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$ se tiene:

$$u(x) = u(x_1, x_2)$$
$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2})$$
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

Cuando es una función vectorial $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2) \; donde \; u_1, u_2 : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$div\mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$
$$\Delta \mathbf{u} = (\Delta u_1, \Delta u_2)$$

Sea $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ otra función vectorial, osea $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$

$$\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2$$

Definición 2.1.1 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *un conjunto abierto acotado,una función* $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$,$\eta = (\eta_1, \eta_2)$ *el vector exterior normal unitario a* Ω.

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} := \nabla u \cdot \eta = \frac{\partial u}{\partial x_1}\eta_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\eta_2$$

Proposición 2.1.1 (Primera Identidad de Green) *Sea* $u, v \in H^1(\Omega)$. *Entonces para i=1,2 se tiene:*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv\eta_i d\gamma$$

Demostración. Ver [1].

Proposición 2.1.2 (Segunda Identidad de Green) *Sea* $u \in H^2(\Omega)$ *y* $v \in H^1(\Omega)$. *Entonces*

$$-\int_\Omega \Delta uv dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\gamma$$

Demostración. Ver [1].

2.2. Formulación Velocidad-Presión

Dado $a_0 \geq 0, \nu > 0$ constantes, $\Omega \in \mathbb{R}^2, f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ una función dada. El problema de Stokes consiste en encontrar funciones $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ y $p : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que se cumpla el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_0\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & en\ \Omega \\ div\ \mathbf{u} = 0 & en\ \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & sobre\ \partial\Omega \end{cases} \quad \ldots (I)$$

Considerando $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto acotado, $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. Multiplicamos en producto interno la primera ecuación de (I) por un $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ fijo pero arbitrario

$$a_0\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nabla p \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

Integrando sobre Ω

$$a_0 \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} - \nu \int_\Omega \Delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \quad \ldots (II)$$

Trabajando por separado con $\int_\Omega \Delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} &= \int_\Omega (\Delta u_1, \Delta u_2) \cdot (v_1, v_2) d\mathbf{x} \\ &= \int_\Omega \Delta u_1 v_1 d\mathbf{x} + \int_\Omega \Delta u_2 v_2 d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Para $u \in [H_0^1(\Omega)]^2$ tendriamos $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, tambien como $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ se tendra $v_1, v_2 \in H^1(\Omega)$. Podemos aplicar la propiedad

$$-\int_\Omega \Delta u_1 v_1 d\mathbf{x} = \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} v_1 d\gamma$$

$$-\int_\Omega \Delta u_2 v_2 d\mathbf{x} = \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_2}{\partial \eta} v_2 d\gamma$$

Como $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = \mathbf{0}$ sobre $\partial\Omega$ se reduce a

$$\int_\Omega \Delta u_1 v_1 d\mathbf{x} = -\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 d\mathbf{x}$$

$$\int_\Omega \Delta u_2 v_2 d\mathbf{x} = -\int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 d\mathbf{x}$$

Sumando miembro a miembro, obtendriamos

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\Delta u_1 v_1 + \Delta u_2 v_2) d\mathbf{x} &= -\int_\Omega (\nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2) d\mathbf{x} \\ \int_\Omega \Delta \mathbf{u} \mathbf{v} d\mathbf{x} &= -\int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} \quad \ldots (III) \end{aligned}$$

Ahora para $\int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} &= \int_\Omega (\frac{\partial p}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} v_2) d\mathbf{x} \\ &= \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_1} v_1 d\mathbf{x} + \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_2} v_2 d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Considerando $p \in L^2(\Omega)$ usando la proposición 2.1.1 obtenemos

$$\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_1} v_1 d\mathbf{x} = -\int_\Omega p \frac{\partial v_1}{\partial x_1} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} p v_1 \eta_1 d\gamma$$

$$\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_2} v_2 d\mathbf{x} = -\int_\Omega p \frac{\partial v_2}{\partial x_2} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} p v_2 \eta_2 d\gamma$$

Como $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$ del Teorema 1.4.2 entonces

$$\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_1} v_1 d\mathbf{x} = -\int_\Omega p \frac{\partial v_1}{\partial x_1} d\mathbf{x}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_2} v_2 d\mathbf{x} = -\int_\Omega p \frac{\partial v_2}{\partial x_2} d\mathbf{x}$$

Sumando mienbro a miembro

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\frac{\partial p}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} v_2) d\mathbf{x} &= -\int_\Omega p(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}) d\mathbf{x} \\ \int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} &= -\int_\Omega p\, div \mathbf{v} d\mathbf{x} \quad \ldots (IV)\end{aligned}$$

Reemplazando (III) y (IV) en (III) tendremos

$$a_0 \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \nu \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} - \int_\Omega p\, div \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2 \quad \ldots (V)$$

Definimos a continuación las formas bilineales $a(.,.), b(.,.)$ y la funcional F

- $\begin{array}{rcl} a : [H_0^1(\Omega)]^2 \times [H_0^1(\Omega)]^2 & \to & \mathbb{R} \\ a(u, v) & = & a_0 \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \nu \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} \end{array}$
- $L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) / \int_\Omega q d\mathbf{x} = 0\}$
- $\begin{array}{rcl} b : [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ b(\mathbf{u}, q) & = & -\int_\Omega q\ div(\mathbf{u}) d\mathbf{x} \end{array}$
- $\begin{array}{rcl} F : V & \to & \mathbb{R} \\ F(v) & = & \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \end{array}$

Reemplazando en (V) y como $div(\mathbf{u}) = 0$ en Ω, el problema se reformularía como:

(FV)

$$\left\{ \begin{array}{ll} Encontrar\ \mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^2\ , p \in L_0^2(\Omega) : & \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p) = F(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2 \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{array} \right.$$

De ahora en adelante, nos referiremos a (FV) como la formulación debil del problema del problema de Stokes.

Capítulo 3

Existencia y unicidad de la formulación velocidad-presión

Se trabajara con la formulación variacional velocidad-presión, primero probaremos para la velocidad $\mathbf{u}$ usando el teorema de Lax-Milgram, luego al reemplazar en la ecuación haciendo uso de un resultado de un teorema, se probará para la presión p.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sea $a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = a_0 \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x} + \nu \int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}d\mathbf{x}$,
$b(\mathbf{u},q) = -\int_\Omega q\, div(\mathbf{u})d\mathbf{x}$ y $F(v) = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x}$
entonces existe un único par $(\mathbf{u},p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},p) = F(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2 \\ b(\mathbf{u},q) = 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases}$$

3.1. Existencia y unicidad de la Velocidad

Definición 3.1.1 (Subespacio) *Sea H un espacio de Hilbert y $S \subseteq H$ un subconjunto tal que para todo $u,v \in S$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene $u+\alpha v \in S$, entonces S es llamado Subespacio de H.*

Definición 3.1.2 (Complemento ortogonal) *Sea H un espacio de Hilbert y $S \subset H$ un subconjunto, se define*

$$M^\perp = \{v \in H \,:\, \langle v,x\rangle = 0 \quad \forall\, x \in M\}$$

Proposición 3.1.1 *Sea H un espacio de Hilbert, dado un subespacio M de H entonces*

$$H = M \oplus M^\perp$$

es decir $H = M + M^\perp$ y $M \cap M^\perp = \{0\}$

Demostración. Ver [1].

En H espacio de Hilbert, veamos que dado un $u \in H$, podemos definir la funcional lineal L_u definida en H como:

$$L_u(v) = \langle u, v \rangle$$

Veamos ahora en el siguiente teorema que el recíproco también es verdadero.

Teorema 3.1.1 (Representación de Riesz) *Toda funcional lineal acotada $L : H \to \mathbb{R}$, con H espacio de Hilbert puede ser representada en términos de un producto interno:*

$$\forall\, v \in H \quad : \quad L(v) = \langle u, v \rangle$$

Donde $u \in H$ es determinado únicamente por L; además se cumple que:

$$\|L\|_{H'} = \|u\|_H$$

Prueba.

- **Existencia.**

Sea $\mathcal{N}(L) = M = \{v \in H \ : \ L(v) = 0\}$; como se sabe M es un subespacio de H,además por ser una funcional lineal acotada $\mathcal{N}(L)$ es cerrado; entonces por la proposición 3.1.1 tenemos que: $H = M \oplus M^{\perp}$

<u>(1) Caso:</u> Si $M^{\perp} = \{0\}$
Esto implica que $M = H$; por lo tanto $L \equiv 0$; entonces basta tomar $u = 0$ y el teorema queda demostrado. $\forall\, v \in H \quad : \quad L(v) = \langle u, v \rangle$

<u>(2) Caso:</u> Si $M^{\perp} \neq \{0\}$
Entonces sea $z \in M^{\perp}$, $z \neq 0$, luego $z \notin M$ por lo tanto $L(z) \neq 0$.
Para cualquier $v \in H$ consideremos: $x = L(v)z - L(z)v$
aplicando L obtenemos:

$$L(x) = L(v)L(z) - L(z)L(v) = 0$$

Esto muestra que $x \in \mathcal{N}(L) = M$ y ya que $z \in M^{\perp}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 \ = \ \langle z, x \rangle \ &= \ \langle z, L(v)z - L(z)v \rangle \\ &= \ L(v)\langle z, z \rangle - L(z)\langle z, v \rangle \end{aligned}$$

Notando que $\langle z, z \rangle = \|z\|^2 \neq 0$, resulta que:

$$L(v) = \frac{L(z)}{\|z\|^2}\langle z, v \rangle$$

Entonces escribiendo $u = \frac{L(z)}{\|z\|^2} z$ tenemos demostrado el teorema:

$$\forall\, v \in H \quad : \quad L(v) = \langle u, v \rangle \ \square$$

- **Unicidad.**

Supongamos que existen $u_1, u_2 \in H$ tales que:

$$\forall\, v \in H \quad : \quad L(v) = \langle u_1, v\rangle = \langle u_2, v\rangle$$

Entonces $\forall\, v \in H \,:\, \langle u_1 - u_2, v\rangle = 0$; tomando entonces en particular: $v = u_1 - u_2$, se tiene que:

$$\langle u_1 - u_2, v\rangle = \langle u_1 - u_2, u_1 - u_2\rangle = \|u_1 - u_2\|^2 = 0$$

Por lo tanto $u_1 - u_2 = 0$, esto es $u_1 = u_2$, que prueba la unicidad. $\square$

- **Igualdad de normas.**

De la definición de $u = \frac{L(z)}{\|z\|^2} z$, tomando norma tenemos:

$$\|u\|_H \;=\; \frac{|L(z)|}{\|z\|} \;\leq\; \sup_{\substack{x\in H\\ x\neq 0}} \left\{ \frac{|L(x)|}{\|x\|} \right\} = \|L\|_{H'}$$

También se tiene que:

$$\|L\|_{H'} = \sup_{\substack{x\in H\\ x\neq 0}} \left\{ \frac{|L(x)|}{\|x\|} \right\} \leq \sup_{\substack{x\in H\\ x\neq 0}} \left\{ \frac{|\langle u, x\rangle|}{\|x\|} \right\} \leq \|u\|_H$$

Por lo tanto tenemos:

$$\|L\|_{H'} = \|u\|_H$$

Con esto queda demostrado el teorema. $\square$

Definición 3.1.3 (Contracción) *Sea V un espacio de Banach. Una aplicación $T : V \to V$ es llamada una **contracción** en V, si existe un real $M < 1$ tal que:*

$$\forall\, v_1, v_2 \in V \,:\, \|Tv_1 - Tv_2\| \leq M\|v_1 - v_2\|$$

Lema 3.1.1 (La aplicación contractiva) *Dado un espacio de Banach V y una contracción $T : V \to V$; entonces existe un único $v \in V$ tal que: $Tv = v$* (Punto fijo)

Prueba.

- **Existencia.**

Elegimos $v_0 \in V$ y definimos:

$$v_1 = Tv_0,\ v_2 = Tv_1, \ldots, v_{k+1} = Tv_k, \ldots$$

Notemos que $\forall\, k \in \mathbb{N} : \|v_{k+1} - v_k\| = \|Tv_k - Tv_{k-1}\| \leq M\|v_k - v_{k-1}\|$. Entonces por inducción podemos afirmar que:

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad : \quad \|v_k - v_{k-1}\| \leq M^{k-1}\|v_1 - v_0\|$$

Por lo tanto, para $\forall\, m, n \in \mathbb{N}\ :\ m > n$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\|v_m - v_n\| &= \left\| \sum_{k=n+1}^{m} v_k - v_{k-1} \right\| \\
&\leq \|v_1 - v_0\| \sum_{k=n+1}^{m} M^{k-1} \\
&\leq \frac{M^n}{1-M}\|v_1 - v_0\|
\end{aligned}$$

Dado que $0 < M < 1$ y que el término $\|v_1 - v_0\|$ es fijo, el lado derecho de la desigualdad puede hacerse tan pequeño como se desee, tomando a m suficientemente grande. Esto demuestra que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Dado que V es un espacio completo (por ser de Banach), la sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y sea $v_n \to v$, con $v \in V$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\|v - Tv\| &\leq \|v - v_n\| + \|v_n - Tv\| \\
&= \|v - v_n\| + \|Tv_{n-1} - Tv\| \\
&\leq \|v - v_n\| + M\|v_{n-1} - v\|
\end{aligned}$$

Tomando $n \to \infty$ tenemos que:

$$\|v - Tv\| = 0 \Rightarrow v = Tv$$

Esto demuestra la existencia de un punto fijo $v \in V$. $\square$

- **Unicidad.**

Supongamos que tenemos $Tv_1 = v_1$ y $Tv_2 = v_2$ entonces:

$$\|v_1 - v_2\| = \|Tv_1 - Tv_2\| \leq M\|v_1 - v_2\|$$

Entonces $\|v_1 - v_2\| = 0$ ya que en otro caso se tendria que $1 \leq M$ que es una contradicción.
Por lo tanto $v_1 = v_2$, el punto fijo es único. $\square$

Teorema 3.1.2 (Teorema de Lax-Milgram) *Dado un espacio de Hilbert $(V, \langle , \rangle)$; una forma bilineal continua, coerciva $a\langle ., . \rangle$ y una funcional lineal continua $F \in V'$; entonces existe una única $u \in V$ tal que:*

$$\forall\, v \in V \quad : \quad a(u, v) = F(v)$$

Prueba.
Para cualquier $u \in V$ definimos la funcional $Au \in V'$ por $\forall\, v \in V \,:\, Au(v) = a(u, v)$.
Veamos que Au es lineal:

$$\begin{aligned} Au(\alpha v_1 + \beta v_2) &= a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) \\ &= \alpha a(u, v_1) + \beta a(u, v_2) \\ &= \alpha Au(v_1) + \beta Au(v_2) \quad \forall\, v_1, v_2 \in V;\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Veamos además que Au es continua:

$$\forall\, v \in V \quad : \quad |Au(v)| = |a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|$$

Donde C es una constante por la definición de continuidad de $a(., .)$, por lo tanto tenemos que:

$$\|Au\|_{V'} = \sup_{v \neq 0} \left\{ \frac{|Au(v)|}{\|v\|} \right\} \leq C\|u\| < \infty$$

Esto muestra que $Au \in V'$.
Además sabemos que: $\forall\, \phi \in V'$ por el teorema de Representación de Riesz: $\exists \tau_\phi \in V$ único, tal que $\phi(v) = \langle \tau_\phi, v \rangle \quad \forall\, v \in V$
Luego definimos $\tau : V' \to V$ como: $\forall\, \phi \in V' \,:\, \tau(\phi) = \tau_\phi$.
Veamos que τ es un operador lineal:

$$\forall\, L, T \in V' \,:\, \tau(L + T) = \tau_{L+T}$$

Sabemos que por la definición de τ: $\forall\, v \in V \qquad (L + T)(v) = \langle \tau_{L+T}, v \rangle$

$$\begin{aligned} (L + T)(v) &= \langle \tau_{L+T}, v \rangle \\ L(v) + T(v) &= \langle \tau_{L+T}, v \rangle \end{aligned}$$

Para L y T también existen τ_L y τ_T tales que: $\forall\, v \in V \ : \ L(v) = \langle \tau_L, v\rangle$ y $T(v) = \langle \tau_T, v\rangle$.
Entonces:

$$\begin{aligned}
\langle \tau_L, v\rangle + \langle \tau_T, v\rangle &= \langle \tau_{L+T}, v\rangle \\
\langle \tau_L + \tau_T, v\rangle &= \langle \tau_{L+T}, v\rangle \\
\langle (\tau_L + \tau_T - \tau_{L+T}), v\rangle &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $\tau_L + \tau_T = \tau_{L+T}$; es decir: $\tau(L) + \tau(T) = \tau(L+T)$ es Lineal.
Por la unicidad de $\tau_\phi \in V$ se tiene que τ es inyectiva.
Además el mismo teorema asegura que: $\|\phi\|_{V'} = \|\tau_\phi\|_V = \|\tau(\phi)\|_V$.

Ahora tomando $\rho \neq 0$, definimos el operador $T : V \to V$ como:

$$\forall\, v \in V \quad : \quad Tv = v - \rho(\tau(Av) - \tau(F))$$

Veamos que condiciones debe tener ρ para que el operador T sea una contracción:
Para cualquier $v_1, v_2 \in V$; sea $v = v_1 - v_2$:

$$\begin{aligned}
\|Tv_1 - Tv_2\|^2 &= \|v_1 - v_2 - \rho(\tau(Av_1) - \tau(Av_2))\|^2 \\
&= \|v - \rho(\tau(Av))\|^2 \\
&= \|v\|^2 - 2\rho\langle \rho(Av), v\rangle + \rho^2\|\tau(Av)\|^2 \\
&= \|v\|^2 - 2\rho Av(v) + \rho^2 Av(\tau(Av)) \\
&= \|v\|^2 - 2\rho a(v,v) + \rho^2 a(v, \tau(Av)) \\
&\leq \|v\|^2 - 2\rho\alpha\|v\|^2 + \rho^2 C\|v\|\|\tau(Av)\| \\
&\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2)\|v\|^2 \\
&= (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2)\|v_1 - v_2\|^2 \\
&= K^2\|v_1 - v_2\|^2
\end{aligned}$$

Entonces debemos tomar ρ de tal forma que: $K < 1$ es decir $(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2) < 1$ que es lo mismo que $\rho(\rho C^2 - 2\alpha) < 0$
Entonces basta tomar $\rho \in \langle 0, 2\alpha/C^2\rangle$
Con esta elección de ρ se asegura que el operador T es una contracción por lo tanto por el lema 3.1.1 aseguramos que T posee un único punto fijo, es decir:
Existe un único $u \in V$ tal que: $Tu = u$.
Entonces:

$$u - \rho(\tau(Au) - \tau(F)) = u$$

Por lo tanto:

$$\tau(Au) = \tau(F)$$

Y por ser τ inyectiva tenemos que:

$$Au = F \Rightarrow Au(v) = F(v)$$

Por lo tanto: Existe un único $u \in V$ tal que:

$$\forall\, v \in V \quad : \quad a(u,v) = F(v)$$

Con lo que el Teorema queda demostrado. $\square$

Utilizando el Teorema de Lax-Milgram probaremos que existe un único $\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ tal que $a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V$.
Donde $V = \{\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2 / div\mathbf{v} = 0\}$.

- Al ser V un subespacio cerrado de $[H_0^1(\Omega)]^2$ es tambien un espacio de Hilbert.

- Veamos que $a(.,.)$ es una forma bilineal.
  Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ entonces:

$$\begin{aligned}
a(\alpha\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}) &= a_0\int_\Omega (\alpha\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}d\mathbf{x} + \nu\int_\Omega \nabla(\alpha\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\nabla\mathbf{w}d\mathbf{x} \\
&= \alpha a_0\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}d\mathbf{x} + a_0\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}d\mathbf{x} \\
&\quad +\nu\int_\Omega \{\nabla(\alpha u_1+v_1)\cdot\nabla w_1 + (\alpha u_2+v_2)\cdot\nabla w_2\}d\mathbf{x} \\
&= \alpha a_0\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}d\mathbf{x} + a_0\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}d\mathbf{x} \\
&\quad +\nu\int_\Omega \{\alpha\nabla u_1\cdot\nabla w_1 + \nabla v_1\cdot\nabla w_1 + \alpha\nabla u_2\cdot\nabla w_2 + \nabla v_2\cdot\nabla w_2\}d\mathbf{x} \\
&= \alpha a_0\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}d\mathbf{x} + \nu\int_\Omega \{\alpha\nabla u_1\cdot\nabla w_1 + \alpha\nabla u_2\cdot\nabla w_2\}d\mathbf{x} \\
&\quad +a_0\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}d\mathbf{x} + \nu\int_\Omega \{\nabla v_1\cdot\nabla w_1 + \nabla v_2\cdot\nabla w_2\}d\mathbf{x} \\
&= \alpha\{a_0\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}d\mathbf{x} + \nu\int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w}d\mathbf{x}\} + \{a_0\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}d\mathbf{x} + \nu\int_\Omega \nabla\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{w}d\mathbf{x}\} \\
&= \alpha a(\mathbf{u},\mathbf{w}) + a(\mathbf{v},\mathbf{w})
\end{aligned}$$

- Ahora probemos que $a(.,.)$ es continua

$$\begin{aligned}
|a(\mathbf{u},\mathbf{v})| &= |a_0\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x}+\nu\int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}d\mathbf{x}| \\
&\leq a_0\int_\Omega |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|d\mathbf{x}+\nu\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}|d\mathbf{x} \\
&\leq a_0\int_\Omega |u_1v_1+u_2v_2|d\mathbf{x}+\nu\int_\Omega |\nabla u_1\cdot\nabla v_1+\nabla u_2\cdot\nabla v_2|d\mathbf{x} \\
&\leq a_0\{\int_\Omega |u_1v_1|d\mathbf{x}+\int_\Omega |u_2v_2|d\mathbf{x}\} \\
&\quad +\nu\int_\Omega |\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}|d\mathbf{x}\ldots(1)
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Holder, tendriamos para i=1,2

$$\int_\Omega |u_iv_i|d\mathbf{x}\leq \|u_i\|_{L^2(\Omega)}\|v_i\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\int_\Omega |\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}|d\mathbf{x}\leq \|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)}\|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)}$$

Reemplazando en (1)

$$\begin{aligned}
|a(\mathbf{u},\mathbf{v})| &\leq a_0(\|u_1\|_{L^2(\Omega)}\|v_1\|_{L^2(\Omega)}+\|u_2\|_{L^2(\Omega)}\|v_2\|_{L^2(\Omega)})+\nu(\|\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\|_{L^2(\Omega)}\|\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad +\|\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\|_{L^2(\Omega)}\|\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\|_{L^2(\Omega)}+\|\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\|_{L^2(\Omega)}\|\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\|_{L^2(\Omega)}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\|_{L^2(\Omega)}\|\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\|_{L^2(\Omega)})
\end{aligned}$$

Como

$$\|\mathbf{u}\|_V^2=\|\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Entonces para i,j=1,2

$$\|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)}\leq \|\mathbf{u}\|_V\ldots(1)$$

Análogo para $v_i \quad i,j=1,2$

$$\|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)}\leq \|\mathbf{v}\|_V\ldots(2)$$

Multiplicando (1) y (2)

$$\|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)}\|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)}\leq \|u\|_V\|v\|_V\ldots(3)$$

Utilizando la desigualdad de Poincaré para $u_i \quad i=1,2$

$$\begin{array}{rcl}
\int_\Omega u_i^2 d\mathbf{x} & \leq & C\int_\Omega\{(\frac{\partial u_i}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial u_i}{\partial x_2})^2\}d\mathbf{x} \\
\|u_i\|^2_{L^2(\Omega)} & \leq & C(\|\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\frac{\partial u_i}{\partial x_2}\|^2_{L^2(\Omega)}) \\
& \leq & C\|\mathbf{u}\|^2_V
\end{array}$$

Entonces

$$\|u_i\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{C}\|\mathbf{u}\|_V \ldots (4)$$

Análogo para $v_i \quad i=1,2$

$$\|v_i\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{C}\|\mathbf{v}\|_V \ldots (5)$$

Multiplicando (4) y (5)

$$\|u_i\|_{L^2(\Omega)}\|v_i\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\mathbf{u}\|_V\|\mathbf{v}\|_V \ldots (6)$$

Reemplazando (5) y (6) en (1)

$$\begin{array}{rcl}
|a(\mathbf{u},\mathbf{v})| & \leq & a_0(C\|\mathbf{u}\|_V\|\mathbf{v}\|_V + C\|\mathbf{u}\|_V\|\mathbf{v}\|_V) \\
& & +\nu(\|\mathbf{u}\|_V\|\mathbf{v}\|_V+\|\mathbf{u}\|_V\|\mathbf{v}\|_V+\|\mathbf{u}\|_V\|\mathbf{v}\|_V+\|\mathbf{u}\|_V\|\mathbf{v}\|_V) \\
& = & 2a_0C\|\mathbf{u}\|_V\|\mathbf{v}\|_V + 4\nu\|\mathbf{u}\|_V\|\mathbf{v}\|_V \\
& = & (2a_0C+4\nu)\|\mathbf{u}\|_V\|\mathbf{v}\|_V
\end{array}$$

Haciendo $M = 2a_0C+4\nu$, tendriamos

$$|a(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq M\|\mathbf{u}\|_V\|\mathbf{v}\|_V$$

- Veamos que sea coerciva

$$\begin{array}{rcl}
a(\mathbf{v},\mathbf{v}) & = & a_0\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x} + \nu\int_\Omega \nabla\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}d\mathbf{x} \\
& = & a_0\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x} + \nu\int_\Omega\{\nabla v_1\cdot\nabla v_1+\nabla v_2\cdot\nabla v_2\}d\mathbf{x} \\
& = & a_0\int_\Omega (v_1^2+v_2^2)d\mathbf{x} + \nu\int_\Omega\{(\frac{\partial v_1}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial v_1}{\partial x_2})^2+(\frac{\partial v_2}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial v_2}{\partial x_2})^2\}d\mathbf{x} \\
& = & a_0(\|v_1\|^2_{L^2(\Omega)}+\|v_2\|^2_{L^2(\Omega)}) + \nu(\|\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& = & a_0(\|v_1\|^2_{L^2(\Omega)}+\|v_2\|^2_{L^2(\Omega)}) + \nu\|\mathbf{v}\|^2_V \ldots (7)
\end{array}$$

De (5) para $i=1,2$

$$\|v_i\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|\mathbf{v}\|^2_V$$

Reemplazando en (7)

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v},\mathbf{v}) &\leq 2a_0C\|\mathbf{v}\|_V^2 + \nu\|\mathbf{v}\|_V^2 \\ &= (2a_0C+\nu)\|\mathbf{v}\|_V^2 \end{aligned}$$

Haciendo $K = 2a_0C + \nu$

$$a(\mathbf{v},\mathbf{v}) \leq M\|\mathbf{v}\|_V^2$$

- Veamos que F sea lineal continua, sea $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}) &= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot(\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v})d\mathbf{x} \\ &= \int_\Omega \{f_1(u_1+\alpha v_1) + f_2(u_2+\alpha v_2)\}d\mathbf{x} \\ &= \int_\Omega \{f_1u_1 + f_2u_2\}d\mathbf{x} + \alpha\int_\Omega \{f_1v_1 + f_2v_2)\}d\mathbf{x} \\ &= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x} + \alpha\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x} \\ &= F(\mathbf{u}) + \alpha F(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |F(\mathbf{v})| &\leq |\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x}| \\ &= |\int_\Omega \{f_1v_1+f_2v_2\}d\mathbf{x}| \\ &\leq |\int_\Omega f_1v_1d\mathbf{x}| + |\int_\Omega f_2v_2d\mathbf{x}| \\ &\leq \|f_1\|_{L^2(\Omega)}\|v_1\|_{L^2(\Omega)} + \|f_2\|_{L^2(\Omega)}\|v_2\|_{L^2(\Omega)} \quad \textit{de la desigualdad de Holder} \\ &\leq \|f_1\|_{L^2(\Omega)}\sqrt{C}\|\mathbf{v}\|_V + \|f_2\|_{L^2(\Omega)}\sqrt{C}\|\mathbf{v}\|_V \quad \textit{de } (5) \\ &= (\sqrt{C}\|f_1\|_{L^2(\Omega)} + \|f_2\|_{L^2(\Omega)})\|\mathbf{v}\|_V \end{aligned}$$

Haciendo $M = \sqrt{C}\|f_1\|_{L^2(\Omega)} + \|f_2\|_{L^2(\Omega)}$

$$|F(\mathbf{v})| \leq M\|\mathbf{v}\|_V$$

En resumen tenemos a V un espacio de Hilbert, $a : V\times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva, $F \in V'$ entonces aplicando el Teorema de Lax-Milgram:

$$\exists!\mathbf{u} \in V/a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}), \quad \forall\mathbf{v} \in V \ldots (*)$$

3.2. Existencia y unicidad de la presión

Definición 3.2.1 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ de frontera $\partial\Omega$, se dice que Ω tiene frontera Lipschitz continua si existe un número finito de conjuntos abiertos $A_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k$ que cubre $\partial\Omega$ tal que para cada i, $\partial\Omega \cap A_i$ es la grafica de una función Lipschitz continua y $\Omega \cap A_i$ depende sobre un lado de esta gráfica.*

Lema 3.2.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto acotado con frontera continua Lipschitz, y sea $L \in ([H_0^1(\Omega)]^2)'$ con $L(\boldsymbol{v}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{v} \in V$ entonces existe una única función $p \in L_0^2(\Omega)$ tal que*

$$L(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega p\, div(\boldsymbol{v}) d\boldsymbol{x}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2$$

Demostración. Ver [4].

Teorema 3.2.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto acotado con frontera continua Lipschitz, y dado $\boldsymbol{f} \in [L_0^2(\Omega)]^2$ sea $\boldsymbol{u} \in V$ tal que*

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{v}),\ \forall \boldsymbol{v} \in V \quad \ldots (*).$$

Entonces existe una única función $p \in L^2(\Omega)$ tal que

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = F(\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2$$

Demostración

Sea $\mathbf{u} \in V$ que cumple $(*)$, definimos

$$\begin{array}{rcl} L : [H_0^1(\Omega)] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ L(\mathbf{v}) & = & a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - F(\mathbf{v}) \end{array}$$

Es claro que L sea lineal, pues $a(.,.)$ y F son lineales en la variable $\mathbf{v}$, veamos que sea lineal continua

$$\begin{array}{rcl} |L(\mathbf{v})| & \leq & |a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - F(\mathbf{v})| \\ & \leq & |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| + |F(\mathbf{v})| \\ & \leq & M_1 \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V + M_2 \|\mathbf{v}\|_V \\ & = & (M_1 \|\mathbf{u}\|_V + M_2) \|\mathbf{v}\|_V \end{array}$$

Como $\mathbf{u}_0$ es solucion de $(*)$ es claro que L se anule en V por lo tanto el lema anterior nos asegura que existe un único $p \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{array}{rcl} L(\mathbf{v}) & = & \displaystyle\int_\Omega p_0\, div(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2 \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - F(\mathbf{v}) & = & \displaystyle\int_\Omega p\, div(\mathbf{v}) d\mathbf{x} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - F(\mathbf{v}) & = & -b(\mathbf{v}, p) \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) & = & F(\mathbf{v}) \ \square \end{array}$$

Asi pues existe un único par $(\mathbf{u}, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L^2(\Omega)$ tal que

$$a(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2$$

Falta ver que $b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega)$, en efecto pues $div(\mathbf{u}) = 0$ en Ω entonces

$$b(\mathbf{u}, q) = \int_\Omega q \; div(\mathbf{u}) d\mathbf{x} = 0$$

Por lo tanto existe un único par $(\mathbf{u}, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = F(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2 \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases}$$

Capítulo 4

Conclusiones

- En este trabajo se ha realizado el estudio de la existencia y unicidad de solución del problema variacional de tipo velocidad-presión, en espacios de Sobolev.
- El Problema de Stokes presenta solución única en su formulación débil en los espacios $[H_0^1(\Omega)]^2$ y $L_0^2(\Omega)$ para la velocidad y presión respecivamente. Esto nos premite ahora hallar la solución numericamente, lo cual presentare en un proximo trabajo, utilizando para ello el método de elementos finitos.
- La formulación variacional del problema es importante ya que ademas de ser útil en la demostración de existencia y unicidad de la solución, es el que será utilizado en la aproximación numérica.

Bibliografía

[1] Brenner S., Scott R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods 2002

[2] Brezis H., Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations 2010

[3] Ciarlet P. The Finite Element Method for Elliptic Problems 2002

[4] Girault R., Raviart P. Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations 1986

[5] Mantilla I. Formulación Variacional de Problemas de Contorno en espacios Sobolev 2007

[6] Quarteroni A., Valli A. Numerical Aproximation of Partial Differential Equations 2007

[7] Raviart P., Thomas J. Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles 1983

[8] Rynne B., Youngson M. Linear Functinal Analysis 2008