APUNTES DE CLASE | UNALM

Curso de Análisis numérico de elementos finitos

Profesor: Dr. Stefan Frei
Email: s.frei@ucl.ac.uk
Department of Mathematics, University College of London

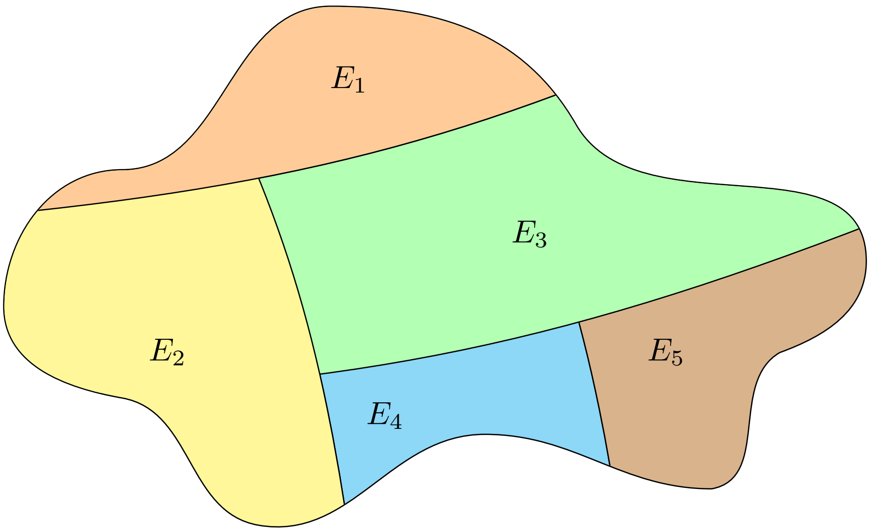
¡Hola! Toda la información concerniente a este curso lo puedes encontrar en
https://goo.gl/aKzhif

Estudio previo

Le agradezco mucho al matemático Luis Felipe Villavicencio lvillavicenciol@uni.pe y a mi estimado profesor Fidel Jara Huanca fideljarahuanca@gmail.com por sus valiosos aportes.

Métodos de elementos finitos (MEF)

Resolver numéricamente ecuaciones en derivadas parciales (EDP) y ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).



Partición de una región

Remark 0.1. Muestro una partición de un conjunto cualquiera porque me gusta recordar cálculo vectorial 1, de mi primer ciclo en la universidad, pero esa región es conjunto de puntos, que pueden ser rectas, rectángulos, etc.

Ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{y'} = \frac{y\left(x_{i+1} - y_{i-1}\right)}{2h} \Longrightarrow H(x_{i+1}) = G(x_{i-1}) \text{ con condición inicial } y_0 = x_0.$$

donde x es el paso de los x_i y es el paso de los y_i.

Ecuaciones en derivadas parciales

0.0.1. Ley de Fourier

$$\phi = -K_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \text{ (Ley de conducción de calor)}$$

donde K_0 es la conductividad térmica.
La temperatura $u(x,t)$ tienes dos incógnitas y $\phi(x,t)$ es el flujo de calor por unidad de superficie y por unidad de tiempo.
Características:

- Si la temperatura es constante en una región, la energía térmica no fluye.
- Si hay diferencia de temperatura, la energía térmica fluye de la región más caliente a la más fría.
- A mayor diferencia de temperatura (para el mismo material) mayor es el flujo de energía térmica.
- El flujo de energía térmica es diferente para distintos materiales, incluso con la misma diferencia de temperatura.

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x}\right) + Q$$

0.1. Condiciones de contorno

Temperatura prescrita: $u(0,t) = u_B(t)$
temperatura en $x = 0$
Si una ecuación diferencial ordinaria es de segundo orden, entonces para resolverlo se necesitará de valores iniciales de $x, x\prime$.
Frontera aislada

$$-K_0 \frac{}{\partial x}$$

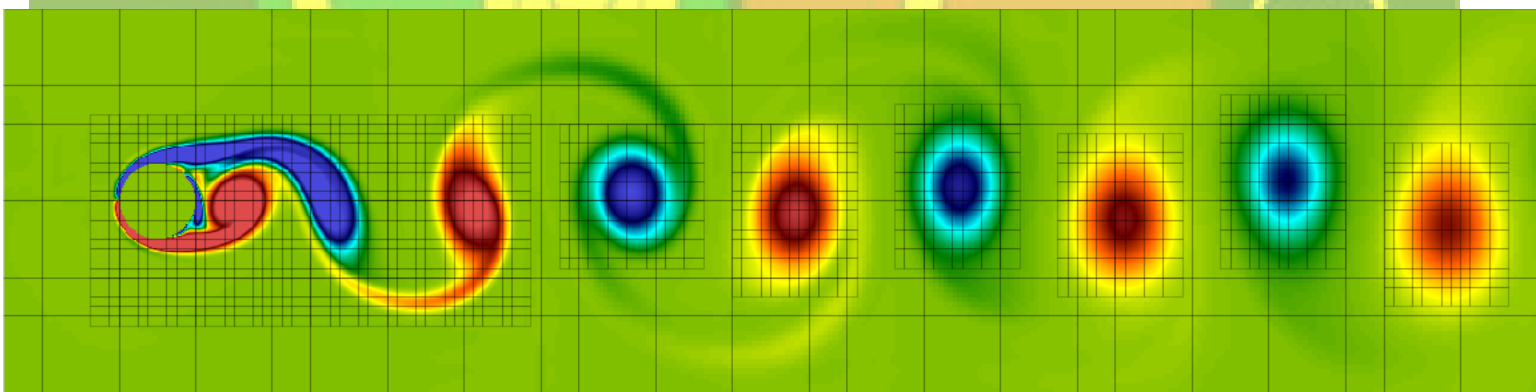
Presentación

0.2. Palabras de honor del decano Dr. Víctor Meza Contreras

Nos interesa propiciar investigación, tenemos once carreras profesionales, incluyendo agronomía, zootecnia, ingeniería ambiental, economía, agrícola, son carreras que desarrollan investigación, le gustaría que las matemáticas estuvieran muy involucradas en el desarrollo de , el departamento de matemática pudiera desarrollar un área en la cual sean lideres, desarrollar investigaciones que apliquen a estas áreas.

0.3. Profesor Stefan Frei

* Se disculpa por su español, no lo practica mucho.
* Estudió la carrera de Matemática con mención en cálculo científico en la universidad de Heidelberg en Alemania. https://www.mathi.uni-heidelberg.de/
* Su tesis fue en el Grupo de Análisis numérico con Rolf Rannacher http://ganymed.math.uni-heidelberg.de/~rannache/, allí estudió análisis de error.
* Hizo dinero cuando trabajaba en https://www.itwm.fraunhofer.de/en.html
* Su doctorado lo hizo en su universidad de pregrado con el Dr. Thomas Richter. https://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=216444



Von Karman Street de algún fluido incompresible

1. Primera clase

1. Teoría de Ecuaciones en derivadas parciales
   - Problema bien propuesto, existencia y unicidad de Hadamard
   - Fórmula variacional (un ejemplo de ellos son las diferencias finitas)
   - Derivadas débiles y espacios de Sobolev
   - Lema de Lax.Milgram
   - Desigualdad de Poincaré
   - Condiciones de frontera
   - Ecuación de Laplace
2. Método de elementos finitos
   - Método de Galerkin (se pronuncia Gayorkin)

   Espacio de Sobolev de dimensión in

   $$V_h \subset V$$

   Espacio de elementos finitos
3. Análisis de error para problemas elípticos

La computación nunca contradice el modelo matemático.
El experimento no depende del modelo.
C++, Gascoigne 3D ¿Por qué realizamos simulaciones?
Costos, diferentes materiales.
Experimentos peligrosos, escala micro nano
Fluido, influencia de viscosidad diferente
Controlar el error, error de medida.
El experimento no depende del modelo, la simulación sí.
Veamos la clasificación de las ecuaciones diferenciales para que estén bien puestas.

- La ecuación de *Poisson* es del tipo elíptica, necesita de condiciones de contorno.
- La ecuación de *calor* es del tipo parabólica, necesita de condiciones de contorno con respecto al espacio más condiciones iniciales con respecto al tiempo.
- La ecuación de *onda* es del tipo hiperbólica, necesita de condiciones de contorno con respecto al espacio más dos condiciones iniciales con respecto al tiempo.

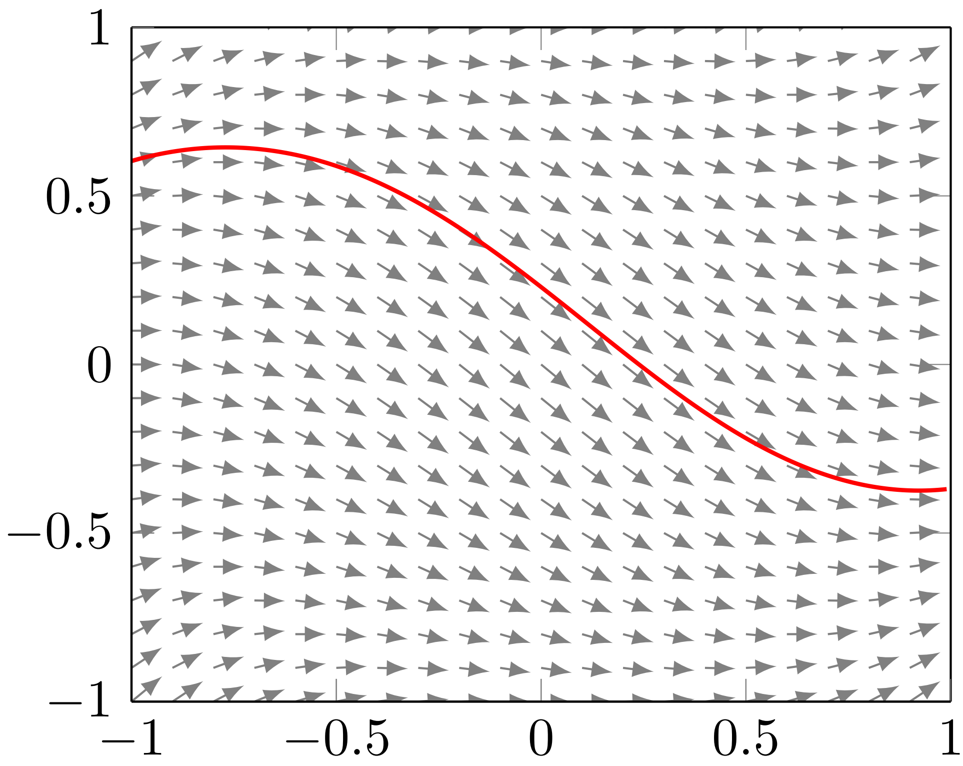
¿Por qué es importante conocer esta clasificación? $u|_{\partial\Omega}$

Ecuación de calor (Heat Equation)

$$\partial_t u + v \cdot \nabla u - \lambda \Delta u = f \text{ en } \Omega$$

[0]Por favor, esta es una corrección del PDF `unalm1` página 22

Esta es una ecuación en derivadas parciales (nótese el gradiente) del tipo parabólica. ¿Cómo se pueden clasificar las ecuaciones en derivadas parciales si es que se puede? Ver [1]



Ecuación diferencial

Ecuación de onda (Wave Equation)

$$\partial_t^2 u - c\nabla u = f \text{ en } \Omega$$

Características
Ecuación hiperbólica en $\Omega \times [0, T]$
Velocidad de propagación finita (propiedad de la ecuación hiperbólica)
Solución para $\Omega \subset \mathbb{R}$ con datos iniciales.

$$u(x,0) = u^0(x), \partial_t u(x,0) = u^1(x)$$
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u^0(x+ct) - u^0(x-ct) + \int_{x-ct}^{x+ct} u^1(s)\, ds\right)$$

A

Ecuación de la placa (Plaque Equation)

$$\Delta^2 u = \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i^2 \partial_j^2 u = f$$

Ecuación de Navier – Stokes (Navier – Stokes E

$$\Delta$$

1.1. Condición de Hadamard

1.2. Espacio de funciones L^2

Recordemos la función de Heavside que existe en casi todas las partes.

2. Segunda clase

2.1. Teorema fundamental del cálculo de variaciones

Sea H_0^1 es el espacio de Sobolev y si f tiene *soporte compacto*, entonces

$$\int_\Omega \nabla\psi \, dx = 0$$

, entonces f es la función nula, ¿o constante?

Recordemos que un espacio de Banach es un espacio normado, el espacio de Hilbert es un espacio de Banach, ahora veremos espacios L^2 y espacios de Sobolev.

2.2. Derivada normal o direccional

2.3. Identidades de Green

2.3.1. Primera identidad

Integración por partes Si ϕ es de clase $\boldsymbol{C}^2$ y φ es otra función continuamente diferenciable, pero de clase $\boldsymbol{C}^1$ en una región U, entonces

$$\int_U \psi\Delta\varphi \, dV = \oint_{\partial U} \psi \left(\nabla\varphi \cdot n\right) dS - \int_U \left(\nabla\varphi \cdot \nabla\psi\right) dV,$$

donde $\Delta = \nabla^2$ es el operador laplaciano.

2.3.2. Segunda identidad

Si φ y ψ son funciones continuamente diferenciables de clase $\boldsymbol{C}^2$ las dos en U, entonces:

$$\int_U (\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi)\, dV = \oint_{\partial U} \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) dS.$$

2.3.3. Tercera identidad

La tercera identidad de Green se obtiene a partir de la segunda particularizando la función $\phi(y)$ a:

$\varphi(y) = \dfrac{1}{|\mathbf{x} - y|}$.

En este caso, el laplaciano de $\phi(y)$ es:

$\Delta\varphi(y) = -4\pi\delta\,(\mathbf{x} - y)$

La tercera identidad de Green dice entonces que, si ψ es una función continuamente diferenciable de clase $\boldsymbol{C}^2$ en U, entonces:

$$\oint_{\partial U}\left[\frac{1}{|\mathbf{x}-y|}\frac{\partial}{\partial n}\psi(\mathbf{y}) - \psi(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{y}}}\frac{1}{|\mathbf{x}-y|}\right] dS_{\mathbf{y}} - \int_U \left[\frac{1}{|\mathbf{x}-y|}\Delta\psi(\mathbf{y})\right] dV_{\mathbf{y}} = k.$$

Donde: $k = 4\pi\psi(x)$ si $x \in Int(U)$,
$k = 2\pi\psi(x)$ si $x \in \partial U$ y tiene un plano tangente a x
$k = 0$ en el resto de casos.

2.4. Problema bien puesto

Se dice que un problema está bien puesto si

1. Existe una solución.
2. Su solución es única.
3. La solución depende continuamente de los datos como parte de una topología razonable.

2.5. Condición de Dirichlet

2.6. Condición de Neumann

2.7. Condición de Robin

Se le llama así a las condiciones de Dirichlet y de Neumann en simultáneo.

2.8. Desigualdad de la traza

Sea $T\colon H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ tal que

$$|Tu|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C|u|_{H^1}$$

La desiguladad de Poincaré NO es válida en $H^1(\Omega)$ En $H^1(\Omega)$, valores de un solo punto o en un conjunto de discontinuidades de medida cero no está definido.
H_0^1 es la condición de valores ceros en la frontera $\partial\Omega$.

3. Tarea

1. Una formulación variacional, también llamada formulación débil (*variational o weak formulation*) para los entendidos, significa ....

El teorema de *Lax-Milgram* garantiza la existencia y unicidad de la forma débil de diversas ecuaciones elípticas en derivadas parciales de segundo orden. Su enunciado dice que:

Dado un espacio de Hilbert V y una forma bilineal $b : V \times V \to \mathbb{R}$ que sea $V-$elíptica y continua, y un funcional lineal acotado $\ell : V \to \mathbb{R}$. Entonces el problema:

$$b(u, v) = \langle \ell, v \rangle, \quad \forall v \in V$$

tiene solución única $u \in V$, y existe una constante $c > 0$ que no depende de ℓ tal que: $\|u\| \leq c\|\ell\|$.

Aeiou.

Supongamos que tenemos un dominio Ω en el plano y queremos resolver la ecuación biarmónica.

$$\Delta^2 f = 0$$

sobre Ω. Debo especificar dos condiciones de contorno. Lo más sencillo sería prescribir $f = f_0$ y $\Delta f = g_0$ en $\partial\Omega$, luego podemos descomponer la ecuación biarmónica en dos ecuaciones del tipo Poisson, así

$$\Delta h = 0$$
$$\Delta f = 0$$

Ecuación de *Poisson*

$$\Delta \phi = f$$

donde Δ es el operador de Laplace y f es una función.

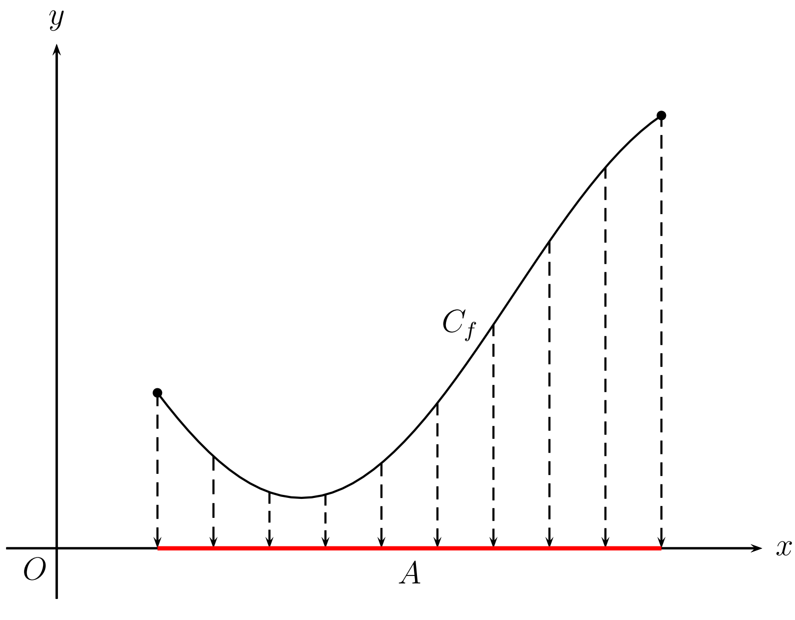


Imagen random

A

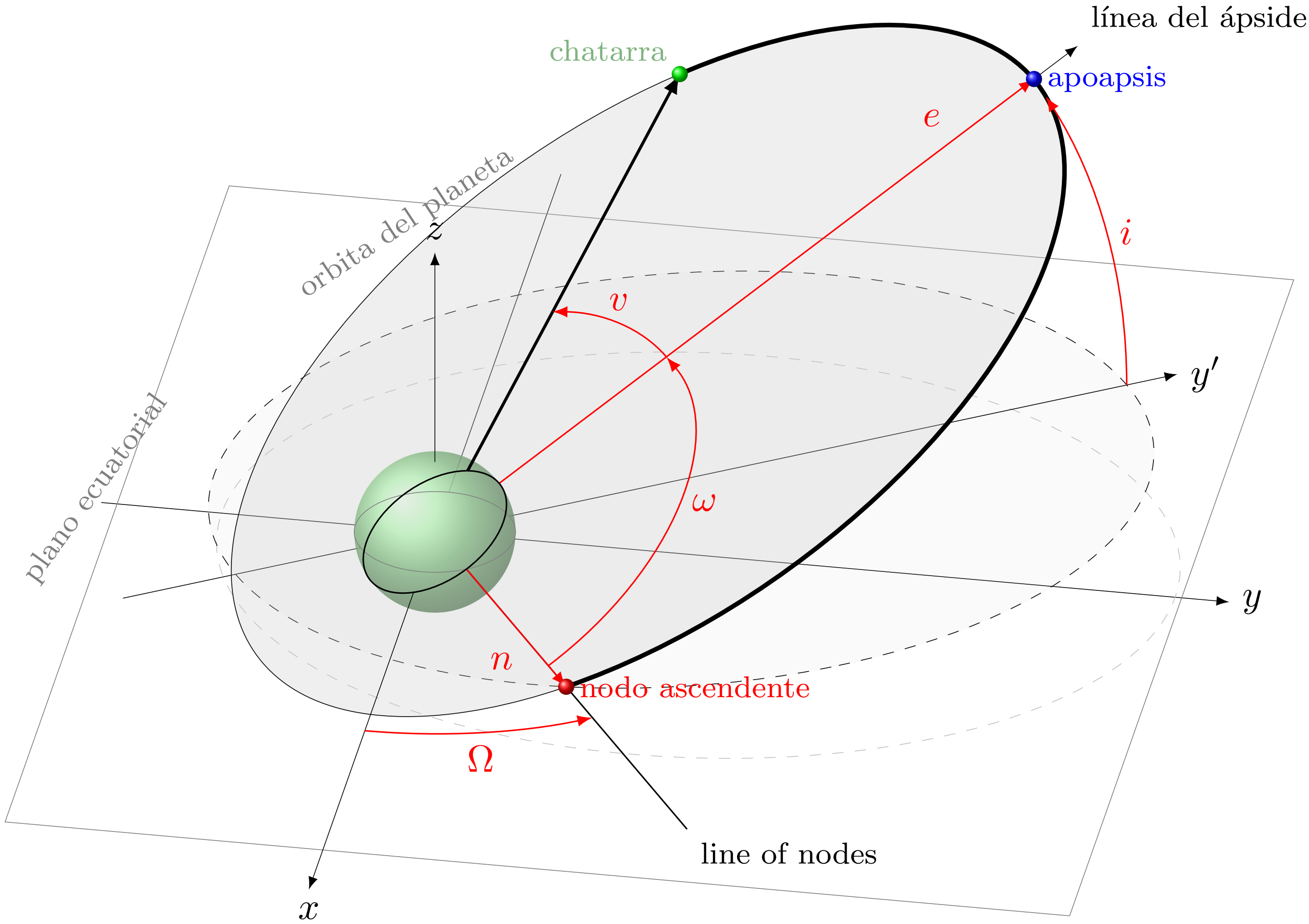


Imagen2 random

Lima, 6 de agosto de 2017.

Referencias bibliográficas

[1] Christian Grossmann, Hans-Görg Roos, and Martin Stynes. *Numerical treatment of partial differential equations*, volume 154. Springer, 2007.

[2] Richard Haberman. *Applied partial differential equations with Fourier series and boundary valve problems*. Pearson Higher Ed, 2012.