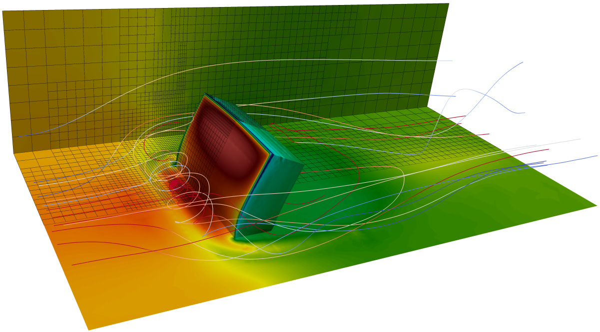

Revisión de Álgebra lineal

Mg. Dandy Rueda Castillo

Diciembre 10, 2018

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Un conjunto V es llamado un *espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ o simplemente un *espacio vectorial real* V si en este conjunto se han definido dos operaciones:

1. $u + v$
2. $\alpha u \ , \ \alpha \in \mathbb{R}$

tal que $u + v \in V$ y $\alpha u \in V$; y, que verifican las siguientes propiedades:

Espacio vectorial real

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. Existe un único "*vector cero*" tal que $x + 0 = x$
4. Para todo x, existe un único vector $-x$ tal que $x + (-x) = 0$
5. $1x = x$
6. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
8. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Espacio vectorial

Ejemplos:

1. $\mathbb{R}^n$
2. $\mathbb{R}^\infty$ (?) (espacio de sucesiones)
3. P (polinomios)
4. P_n (polinomios de grado $\leq n$)
5. $P_1(I) = \{v : [a,b] \to \mathbb{R} : v(x) = c_1 + c_2 x,\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}\}$, $I = [a,b]$.
6. $C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$

Independencia lineal

Dados los vectores $v_1,\ v_2, \ldots,\ v_k$ sus combinaciones lineales son

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k$$

La combinación lineal trivial ocurre cuando $\alpha_i = 0$, para todo i por lo que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$$

¿Es la única manera de producir el cero?

Independencia lineal

Si

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$$

ocurre sólo cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, entonces se dice que los vectores v_1, $v_2, \ldots,$ v_k son **linealmente independientes**. Si al menos un α_i es diferente de cero, entonces decimos que los vectores v_1, $v_2, \ldots,$ v_k son linealmente dependientes.

Definición

Sea V un espacio vectorial, un subconjunto W de V es llamado subespacio o subespacio lineal, si W es un espacio vectorial con las operaciones de V.

Ejemplo :

- $V = C([a,b]) = \{u : [a,b] \to \mathbb{R} : u \text{ es continua}\}$
- $W = \{u \in V : u(a) = u(b) = 0\}$
- Sea $I = [a,b]$ y los puntos $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ tal que
$$a = x_1 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$$
definimos
$$V_h = \{v \in V : v|_{I_i} \in P_1(I_i)\}$$
donde $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- $W_h = \{u \in V_h : u(a) = u(b) = 0\}$

Proposición

Un subconjunto W de un espacio vectorial V es un subespacio si y sólo si cualquier combinación lineal de elementos de W está en W.

Espacio generado

Si un espacio V consiste de todas las combinaciones lineales de los vectores w_1, $w_2, \ldots,$ w_r , entonces estos vectores generan V. Cada vector v de V es la combinación lineal de los $w's$, es decir

$$v = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_r w_r$$

para ciertos coeficientes β_j.

Por una base para el espacio vectorial V nos referiremos a una sucesión de vectores en V con las siguientes propiedades:

1. Los vectores son linealmente independientes.
2. Generan el espacio V.

Un espacio tiene infinitas bases!
Cualquier par de bases de un espacio vectorial V tiene el mismo número de vectores. Este número es llamado dimensión del espacio y expresa los "**grados de libertad**" del espacio.

Ejemplos de bases

- Los vectores $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$,..., $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ forman la llamada base canónica para $\mathbb{R}^n$.
- Las funciones 1, x, x^2,...,x^n forman una base para el espacio de polinomios de grado menor o igual que n.
- Una base para $P_1(I)$, $I = [a, b]$ la forman los vectores $v_1 = 1$ y $v_2 = x$.

Espacios importantes!

Dada una matriz A de orden m por n se tiene:

1. $C(A)$: Espacio columna con dimensión r.
2. $C\left(A^T\right)$: Espacio fila con dimensión r.
3. $N(A)$: Espacio nulo de A con dimensión $n-r$.
4. $N\left(A^T\right)$: Espacio nulo de A^T con dimensión $m-r$.

Producto interno

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, un producto interno es una función $<,>$: $V \times V \to \mathbb{R}$ tal que se cumple:

1. $\langle u, u \rangle \geq 0$, $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
3. $\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

Producto interno

- Ortogonalidad: $\langle u, v \rangle = 0$
- Mejor aproximación: Si M es un subespacio no trivial de $\mathbb{R}^n$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ la *proyección ortogonal* $P_M x \in M$ es determinada por la relación

$$\langle x - P_M x, y \rangle = 0, \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Espacio normado

Dado un espacio vectorial V, una norma en V es una función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\|u\| \geq 0$ para todo $u \in V$ y $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2. $\|ru\| = |r| \, \|u\|$
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Un espacio vectorial V con una norma es llamado espacio normado.

Distancia

Dado un conjunto no vacío M y la función $d : M \times M \to \mathbb{R}$ tal que:

1. $d(x,y) \geq 0$ y $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

M es llamado espacio métrico y d es llamada una métrica sobre M.

Convergencia

Una sucesión x_n converge a x en un espacio métrico si

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x) = 0$$

Una sucesión x_n en un espacio métrico es de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que para todo $n, m > N$ se cumple

$$d(x_n, x_m) < \epsilon$$

Un espacio métrico M es completo si toda sucesión de Cauchy en M es convergente.

Norma en espacios con producto interno

Si V es un espacio con poducto interno, la norma o longitud de $u \in V$ se define por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

Propiedades

1. $\|u\| \geq 0$ y $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2. $\|ru\| = |r| \, \|u\|$
3. $\langle u, v\rangle \leq \|u\| \, \|v\|$ (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$
5. $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\,\|u\|^2 + 2\,\|u\|^2$

Distancia en espacios con producto interno

Si V es un espacio con poducto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y con norma o longitud de $u \in V$ definida por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

se define la distancia entre dos elementos u y v de V como

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

Transformación lineal

Dados dos espacios vectoriales V y W, la aplicación $T : V \to W$ es una transformación lineal si cumple:

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

Si un espacio vectorial con una métrica asociada a una norma es completo, entonces V es llamado espacio de Banach.

Espacios de Banach

El conjunto $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Banach con cada una de las p-normas:

$$\|(x_1, x_2, .., x_n)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

donde $1 \leq p < \infty$ y para $p = \infty$

$$\|(x_1, x_2, .., x_n)\|_\infty = \max\{|x_k| : k = 1, 2, ..., n\}.$$

Los espacios ℓ^p :

$$\ell^p = \left\{ (x_1, x_2, ..) \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

donde $1 \leq p < \infty$ con la norma

$$\|(x_1, x_2, ..)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

y el espacio ℓ^∞ :

$$\ell^\infty = \{(x_1, x_2, ..) \in \mathbb{R}^\infty : \sup\{|x_k| : k = 1, 2, ...\} < \infty\}$$

con la norma

$$\|(x_1, x_2, ..)\|_\infty = \sup\{|x_k| : k = 1, 2, ...\}.$$

son espacios de Banach.

Qué es un espacio de Hilbert?

Espacio de Banach con norma inducida por un producto interno

Espacios de Hilbert

El espacio $L^2([a,b])$:

$$L^2([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : \int_a^b f^2(x)\, dx < +\infty \right\}$$

donde $f = g$ si $f(x) = g(x)$ c.t.p con la norma

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x)\, dx \right)^{1/2}$$

es un espacio de Hilbert.

- Rolf Rannacher, *Numerical Linear Algebra* . Lecture Notes WS 2013/2014 - Heildelberg University.
- Thomas Richter & Thomas Wick, *Einführung in die Numerische Mathematik. Begriffe, Konzepte und zahlreiche Anwendungsbeispiele.*