UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

SEMINARIO DE MATEMÁTICA PURA Y APLICADA I

Formulación Variacional de Problemas de Valor de Frontera Elípticos en Espacios de Sobolev

Alumno: Brian Loja Cruzado

Código : 20071199I **Nota:**

Asesor: Mg. Fidel Jara H.

2012-II

LIMA-PERU

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi familia por apoyarme en este trabajo y en segundo lugar también tengo que agradecer a mi asesor por apoyarme con algunas recomendaciones en este trabajo.

Índice general

Capítulo 1

Generalidades

En este capítulo mencionaremos algunas definiciones generales que necesitamos en los capítulos posteriores y los cuales son vitales para el desarrollo del tema principal de este seminario , y también mientras no se diga lo contrario en este capítulo consideraremos que todos los conjuntos que usaremos estarán incluidos en $\mathbb{R}^n$, es decir si usamos un conjunto Ω , este conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

1.1. Espacios L^p

Definición 1.1.1 (Espacios L^p) *Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$ se define L^p como:*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \quad \textit{medible} \quad y \ \|f\|_{L^p} < \infty\}$$

Donde $\|f\|_{L^p} = \int_\Omega |f|^p$.

Definición 1.1.2 (Espacios L^∞) *Cuando $p = \infty$ se define L^∞ como :*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \|f\|_{L^\infty} < \infty\}$$

Donde $\|f\|_{L^\infty} = \sup\{|f(x)|, x \in \Omega\}$

Teorema 1.1.1 (Desigualdad de Holder) *Sean $f, g \in L^p$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $fg \in L^1$ y tenemos que:*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^p}$$

Demostración : Ver [5].

Teorema 1.1.2 (Desigualdad de Cauchy) *Si $f, g \in L^2$ Entonces fg es integrable y :*

$$|\int fg| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

Demostración : Ver [1].

Teorema 1.1.3 (Desigualdad de Minkowski) *Si* $f, h \in L^p$, $p \geq 1$ *entonces* $f + h \in L^p$ *y:*

$$\|f + h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p$$

Demostración : Ver [6].

Teorema 1.1.4 *Un espacio* L^p *es un espacio de Banach* $\forall 1 \leq p \leq \infty$

Demostración : Ver [5].

1.2. Espacios de Sobolev $W^{1,p}$

Definición 1.2.1 *Se define a* $C(\Omega)$ *como el espacio de las funciones continuas en* Ω *es decir:*

$$C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ continua}\}$$

Definición 1.2.2 *Se define a* $C^k(\Omega)$ *como el espacio de las funciones k veces continuamente diferenciables en* Ω *.*

Definición 1.2.3 *Se define a* $C^\infty(\Omega)$ *como el espacio de las funciones infinitamente diferenciables en* Ω *.*

Definición 1.2.4 *Se define a* $C_c(\Omega)$ *o* $\mathcal{D}(\Omega)$ *llamado también el espacio de las funciones continuas en* Ω *y con soporte compacto como:*

$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega), f(x) = 0 \ \ \forall\ x \ \ \in \Omega \setminus K \ \ \forall\ K \subset \Omega \quad y \quad K \ \text{ es un compacto}\}$$

Definición 1.2.5 *Se define* $C_c^\infty(\Omega)$ *como:*

$$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$$

Así como se definen los anteriores espacios para Ω para la cerradura es decir para $\overline{\Omega}$ también se hace lo mismo , en este caso si hay una función f que va desde Ω hacia $\mathbb{R}$ entonces a la función que va desde $\overline{\Omega}$ a $\mathbb{R}$ es tal que $F|_\Omega = f$ se le denomina la extensión de f y se denota como F , sabiendo eso podemos definir lo mismo que se definió usando Ω para su cerradura y así tenemos las siguientes definiciones:

Definición 1.2.6 *Se define a* $C(\overline{\Omega})$ *como el espacio de las funciones continuas en* Ω *es decir:*

$$C(\overline{\Omega}) = \{F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, F \text{ continua}\}$$

Definición 1.2.7 *Se define a $C^k(\overline{\Omega})$ como el espacio de las funciones con extension k veces continuamente diferenciable.*

Definición 1.2.8 *Se define a $C^\infty(\overline{\Omega})$ como el espacio de las funciones sobre Ω con extension la cual sus infinitas derivadas son no nulas (es decir regulares) .*

Definición 1.2.9 *Se define a $C_0^k(\overline{\Omega})$ como el espacio de las funciones sobre Ω con extension k veces continuamente diferenciable y con soporte compacto*

Definición 1.2.10 *Se define a $C_c(\overline{\Omega})$ o $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ como el espacio de las funciones con extension regular (es decir su derivada siempre es diferente de cero) de todos los órdenes y con soporte compacto*

Ahora definamos que es un Espacio de Sobolev

Definición 1.2.11 *Sea Ω un conjunto acotado y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}$ se define por:*

$$W^{1,p} = \{u \in L^p(\Omega), \exists g_i \in L^p(\Omega) \;\; i = 1, 2, ..., n \;\; \in L^p(\Omega) \backslash \int u\varphi' = -\int g_i \varphi\} \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Donde $\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ y se denota a g_i como $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ (esto ultimo es solo notacion)

Teorema 1.2.1 *El espacio $W^{1,p}$ es un Espacio de Hilbert*

Demostración : Ver [5].

Definición 1.2.12 *Se define el espacio $H^1(\Omega)$ como lo que sigue:*

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

De aquí se puede ver que se puede definir el Espacio de Sobolev de Orden 1 ($H^1(\Omega)$) de la siguiente manera:

Definición 1.2.13 *Se define al espacio Sobolev de orden 1 como:*

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad i = 1, 2\}$$

También de la misma manera que se define el Espacio de Sobolev de Orden 1 se puede definir el Espacio de Sobolev de Orden 2 como lo siguiente:

Definición 1.2.14 *Se define el espacio Sobolev de orden 2 como:*

$$H^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) / \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \in L^2(\Omega)\}$$

Observación: A la función g de la definición 1.2.4 se le llama la derivada en el sentido distribucional de la función u .

Ejemplo

Sea $\Omega = I = [-1, 1]$, veamos que la función $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ pertenece a $W^{1,p}$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ y que $u^{'} = H$ donde:

$$H(x) = \begin{cases} 1 \quad si \quad 0 < x < 1 \\ 0 \quad si \quad -1 < x < 0 \end{cases}$$

Solución

Para ver esto sólo tenemos que verificar que efectivamente u(x) cumplen la definición de espacio de Sobolev y por lo tanto H sera su derivada en el sentido distribucional , entonces veamos :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(|x| + x)\varphi^{'} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}(|x| + x)\varphi^{'} dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}(|x| + x)\varphi^{'} dx$$
$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}(-x + x)\varphi^{'} dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}(x + x)\varphi^{'} dx$$

El primer término de esta ultima expresión (es decir $\int_{-1}^{0} \frac{1}{2}(-x + x)\varphi^{'} dx$) es cero y solo nos queda:

$$= \int_{0}^{1} \frac{1}{2}(x + x)\varphi^{'} dx$$

Luego operando tenemos que:

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{2}(x + x)\varphi^{'} dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{2}(2x)\varphi^{'} dx = \int_{0}^{1} x\varphi^{'} dx$$

Y aplicando finalmente el conocido método de integración por partes tenemos que:

$$\int_{0}^{1} x\varphi^{'} dx = x\varphi|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \varphi dx$$

Donde $u = x$, $du = dx$, $dv = \varphi^{'} dx$ y $v = \varphi$ y luego obtenemos que:

$$= \varphi(1) - \int_{0}^{1} \varphi dx$$

Pero como $\varphi(1) = 0$ pues como $\varphi \in C_c^1(I)$ entonces también pertenece por definición a $C_c(I)$ y por lo tanto para un compacto K que no contiene a el 0 ni al 1 tenemos que $\varphi(1) = 0$, y por lo tanto obtenemos que:

$$= -\int_{0}^{1} \varphi dx \qquad (1)$$

Ahora subdividiendo la integral tenemos que:

$$-\int_{-1}^{1} H\varphi dx = -(\int_{-1}^{0} H\varphi dx + \int_{0}^{1} H\varphi dx)$$

Entonces por la definición de H obtenemos que:

$$= -(\int_{-1}^{0} 0.\varphi dx + \int_{0}^{1} 1.\varphi dx) = -\int_{0}^{1} 1.\varphi dx = -\int_{0}^{1} \varphi dx \qquad (2)$$

Y por lo tanto por igualdad de (1) y (2) obtenemos que:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(|x| + x)\varphi' dx = -\int_{-1}^{1} H\varphi dx$$

Y por lo tanto de acá obtenemos que por definición $u \in W^{1,p}(I)$ y que H es la derivada en el sentido distribucional de u.

Observación: El espacio $W^{1,p}$ está dotado por la norma:

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

Y el espacio H^1 esta dotado de la norma siguiente:

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

1.3. Definiciones y Teoremas extras que podemos necesitar de aquí en adelante

Definición 1.3.1 (Espacio de Banach) *Un espacio normado $(V, \|.\|)$ es llamado Espacio de Banach si V es completo con la métrica inducida por la norma $\|.\|$.*

Teorema 1.3.1 *El espacio L^p es un Espacio de Banach $\forall\ 1 \leq p \leq \infty$*

Demostración : Ver [5].

Definición 1.3.2 *Sea $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ el soporte de φ esta definido por:*

$$sop(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$$

Definición 1.3.3 *Definimos el conjunto $H_0^1(\Omega)$ como la cerradura de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$, es decir:*

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$$

Observación: $H_0^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$, así que también es un espacio de Hilbert.

Teorema 1.3.2

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \ en \ \partial\Omega\}$$

Demostración. Ver [7].

Teorema 1.3.3 (Desiguadad de Young)

$$\forall \ a, b \in \mathbb{R} \quad , \ \forall \ \epsilon \geq 0 : ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2$$

Demostración. Ver [5].

Teorema 1.3.4 (Desiguadad de Poincaré) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y acotado. Entonces existe $C = C(\Omega) > 0$ tal que*

$$\int_\Omega v^2(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \leq C \int_\Omega \{(\frac{\partial v}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x_2})^2\} d\boldsymbol{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Demostración. Ver [7].

Capítulo 2

Formulación de Problemas Variacionales en Espacios de Hilbert

Este capítulo requiere herramientas de Análisis funcional para desarrollar la formulación variacional de las ecuaciones diferenciales. Aquí introducimos lo que son los espacios Hilbert , y también incluyendo algunos resultados que son esenciales para un desarrollo más profundo de la formulación variacional de las ecuaciones diferenciales. El objetivo de este capítulo es proporcionar una estructura en el cual la existencia y la unicidad de las soluciones de los problemas variacionales pueden ser establecidas sin problemas.

2.1. Espacios Producto Interno

Definición 2.1.1 (Forma Bilineal) *Una forma bilineal $b(\cdot,\cdot)$ en un espacio lineal V es un mapeo b: $V \times V \to \mathbb{R}$ tal que cada uno de las funciones $v \mapsto b(v,w)$ y $w \mapsto b(v,w)$ es una forma lineal en V .*

Definición 2.1.2 (Forma Bilineal Simétrica) *Una forma bilineal es Simétrica si $b(v,w) = b(w,v)$ $\forall v, w \in V$.*

Definición 2.1.3 (Espacio Producto Interno Real) *Un espacio producto interno real , denotado por $(\cdot,\cdot)$, es una forma bilineal simétrica en un espacio lineal V tal que satisface :*

1. $(v,v) \geq 0 \quad \forall v \in V$
2. $(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Definición 2.1.4 (Espacio Producto Interno) *Un espacio lineal V junto con un producto interno definido en V , es llamado un espacio producto interno , y esto es denotado por $(V,(\cdot,\cdot))$.*

Teorema 2.1.1 (La desigualdad de Schwarz) *Si* $(V,(\cdot,\cdot))$ *es un espacio producto interno , entonces se cumple que:*

$$|\ (u,v)\ | \leq (u,u)^{\frac{1}{2}}.(v,v)^{\frac{1}{2}}$$

La igualdad se tiene si y solo si u y v son linealmente independientes.

Demostración. Ver [1].

Proposición 2.1.1 $\|v\| = \sqrt{(v,v)}$ *define una norma en el espacio producto interno* $(V,(\cdot,\cdot))$.

Demostración. Ver [1].

2.2. Espacios de Hilbert

Definición 2.2.1 (Funcional lineal) *Sea V un espacio vectorial real, una función* $L : V \to \mathbb{R}$ *es llamada una funcional lineal si para todo* $u, v \in V$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$L(u+\alpha v) = L(u) + \alpha L(v)$$

Definición 2.2.2 (Funcional lineal acotada) *Sea V un espacio normado,* $L : V \to \mathbb{R}$ *una funcional lineal es llamada acotada si existe un* $C > 0$ *tal que* $|L(u)| \leq C\|u\|$ *para todo* $u \in V$

Observación:

De la proposición anterior es equivalente decir funcional lineal acotada o funcional lineal continua.

Definición 2.2.3 (Espacio Dual) *Sea V un espacio normado, el espacio dual de V se define como el conjunto de las funcionales lineales continuas, y se denota por* V'.

Definición 2.2.4 *Sea* $(V,(\cdot,\cdot))$ *un espacio producto interno . Si el espacio normado bilineal asociado a este espacio producto interno* $(V,\|\cdot\|)$*es completo, entonces* $(V,(\cdot,\cdot))$ *es llamado un espacio de Hilbert*

Definición 2.2.5 *Sea H un espacio de Hilbert y* $S \subset H$ *es un subconjunto que es cerrado en H . Entonces S es llamado un subespacio de H.*

Definición 2.2.6 (Complemento ortogonal) *Sea H un espacio de Hilbert y* $S \subset H$ *un subconjunto, se define*

$$M^{\perp} = \{v \in H\ :\ \langle v, x\rangle = 0 \quad \forall\, x \in M\}$$

Proposición 2.2.1 *Si S es un subespacio de H entonces $(S, (\cdot, \cdot))$ es también un espacio de Hilbert.*

Demostración. Ver [1].

Proposición 2.2.2 *Sea H un espacio de Hilbert , entonces se cumple lo siguiente:*

- *Para todo par de subconjuntos $M, N \subset H$ tal que $M \subset N \Rightarrow N^{\perp} \subset M^{\perp}$.*
- *Para algún subconjunto M de H que contiene el cero se cumple que $M \cap M^{\perp} = 0$*
- $\{0\}^{\perp} = H$
- $H^{\perp} = \{0\}$

Prueba.

- Sea $a \in N^{\perp}$ por definición

$$\forall \; x \in N/(a, x) = 0$$

Sea $m \in M \subset X$ cualquiera entonces de lo anterior tenemos que $(a, m) = 0$ pues $m \in X$ entonces tenemos que:

$$a \in M^{\perp}$$

Entonces finalmente tenemos que $N^{\perp} \subset M^{\perp}$

- Sea $x \in N^{\perp} \subset M^{\perp}$. Entonces $x \in M$ entonces tenemos que $M^{\perp} \subset x^{\perp}$ y también $x \in M^{\perp} \Rightarrow x \in x^{\perp} \Leftrightarrow (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $(\subseteq)$
Sea $a \in H$ entonces (a,0)=0 y de allí tenemos que se cumple que $a \in 0^{\perp}$.
$(\supseteq)$
Como $0^{\perp} \subseteq H$ pues $0^{\perp}$ es un subconjunto de H.
Y de los 2 tenemos la igualdad pedida
- De $H^{\perp} \subset H$, el item (2) implica que: $H^{\perp} = H \cap H^{\perp} = 0$

Teorema 2.2.1 (Regla del Paralelogramo) *Sea $\| \cdot \|$ la norma asociada con el producto interno $(\cdot, \cdot)$ en H , entonces nosotros tenemos :*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$$

Demostración. Ver [2].

2.3. Proyecciones sobre Subespacios

El siguiente resultado establece un hecho escencial sobre los Espacios de Hilbert.

Proposición 2.3.1 *Sea M un subespacio de el espacio de Hilbert H . Sea $v \in H \backslash M$ y definimos $\delta = \inf\{\|v - w\| : w \in M\}$ (Note que $\delta > 0$ ya que M es cerrado en H). Entonces hay un $w_0 \in M$ tal que :*

1. $\|v - w_0\| = \delta$ *es decir existen un punto más cercano $w_0 \in M$ a un v y*
2. $v - w_0 \in M^{\perp}$

Demostración. Ver [1].

Proposición 2.3.2 *Dado un subespacio M de H y $v \in H$, esto es hay una única descomposición:*

$$v = P_M v + P_{M^{\perp}} v$$

Donde $P_M : H \to M$ y $P_{M^{\perp}} : H \to M^{\perp}$. Es decir en otras palabras:

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

Demostración. Ver [4] .

Definición 2.3.1 *Un operador P dentro de un espacio Lineal V es una proyección $\Leftrightarrow P^2 = P$ es decir $Pz = z \ \ \forall \ z \in Ker(P)$.*

2.4. Teorema de Representación de Riesz

En lo que sigue se trabajará en un espacio de Hilbert H (el cual toda sucesión en ese espacio que sea de Cauchy es convergente y previamente es un espacio producto interno E.P.I). Dado un elemento u $\in$ H , espacio de Hilbert recordemos que la siguiente funcional L

$$L_u(v) =< u, v >$$

es continua y lineal que puede ser definida en H , espacio de Hilbert. Ahora probaremos que cualquier función lineal continua puede ser expresada de esa manera , esto último es lo que se llama el Teorema de Riesz.

Teorema 2.4.1 *Alguna funcional L continua lineal dentro del espacio H de Hilbert puede ser representada unicamente por*

$$L(v) =< u, v >$$

para algún $u \in H$. Es más también se cumple :

$$\|L\|_{H'} = \|u\|_H$$

Demostración. Ver [1].

Observación:

Del Teorema de Riesz se deduce que existe una Isometría Natural entre H y $H^{'}$(u$\in H \Longleftrightarrow L_u \in H^{'}$). Por esta razón H y $H^{'}$ son a menudo identificados. Nosotros usaremos τ para representar la isometría entre H y $H^{'}$.

2.5. Formulación del Problema Variacional Simétrico

El propósito de el resto de este capítulo es aplicar la teoría de los espacios de Hilbert de las secciones previas para obtener resultados de existencia y unicidad para las formulaciones variacionales de los problemas de valor de frontera.

Definición 2.5.1 *Una forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ en un espacio normado lineal H es llamado acotado (o continuo) si $\exists\ C < \infty$ tal que:*

$$|a(u,w)| \leq C\|v\|_H.\|w\|_H \qquad \forall\ v,w \in H$$

Definición 2.5.2 *Una forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ en un espacio normado lineal H es llamada coerciva en $V \subset H$ si $\exists\ \alpha > 0$ tal que:*

$$|a(v,v)| \geq \alpha\|v\|_H \qquad \forall\ v \in H$$

Proposición 2.5.1 *Sea H un espacio de Hilbert , y suponga que $a(\cdot,\cdot)$ es una forma bilineal simétrica que es continua en H y coerciva en un subespacio V de H . Entonces tenemos que $(V, a(\cdot,\cdot))$ es un espacio de Hilbert*

Demostración. Ver [1].

En general un problema simétrico variacional es planteado como sigue . Suponga que los siguientes 3 condiciones son válidos , los cuales son:

$$(1\cdot 5\cdot 1) \quad \begin{cases} (1) & (H,(\cdot,\cdot)) \text{ es un espacio de Hilbert;} \\ (2) & \text{V es un subespacio cerrado de H;} \\ (3) & a(\cdot,\cdot) \text{ es una forma bilineal simetrica que es coerciva en V.} \end{cases}$$

Entonces el problema variacional simétrico es la siguiente:

Dado un $F \in V^{'}$, encontrar un $u \in V$ tal que $a(u,v) = F(v)\ \ \forall\, v \in V$ $\quad (1{\cdot}5{\cdot}2)$

Teorema 2.5.1 *Suponga que las condiciones (1)-(3) de $(1\cdot 5\cdot 1)$ se mantienen . Entonces con esas condiciones existe un único $u \in V$ que soluciona $(1\cdot 5\cdot 2)$*

Demostración. Ver [1].

Ahora definiremos el problema de Aproximación de Ritz - Galerkin el cual nos servirá mucho mas adelante .

Definición 2.5.3 (Problema de Aproximación de Ritz-Galerkin) *Dado un subespacio finito dimensional* $V_h \subset V$ *y* $F \in V'$ *. Nosotros encontramos un* $u_h \in V_h$ *tal que:*

$$a(u_h, v) = F(v) \qquad \forall \quad v \in V_h \qquad (1 \cdot 5 \cdot 3)$$

Teorema 2.5.2 *Con las condiciones de* $(1 \cdot 5 \cdot 1)$ *, Nosotros tenemos que existe un único* u_h *tal que soluciona* $(1 \cdot 5 \cdot 3)$

Demostración. Ver [1].

Antes de Continuar con el error estimado para $u - u_h$ daremos una definicíon y un Teorema el cual lo usaremos mas adelante en este misma sección

Definición 2.5.4 (Funcional Energía) *Teninendo el problema variacional que se indica en* $(1 \cdot 5 \cdot 2)$ *, definimos la funcional Energía como la siguiente expresión*

$$I(v) = \frac{1}{2}(a(v, v)) - l(v)$$

Teorema 2.5.3 *Asumiendo que* $K \neq 0$ *, cerrado , convexo y también es un subconjunto de un espacio de Hilbert* V *,* $a(.,.)$*:*$V \times V \to \mathbb{R}$ *bilineal , simétrica , acotada y coerciva ,* $l \in V'$ *. Sea:*

$$I(v) = \frac{1}{2}(a(v, v)) - l(v)$$

Entonces Aquí existe un único $u \in K$ *tal que:*

$$I(u) = \inf_{v \in K} I(v)$$

Que es También la única solución de la desigualdad varacional

$$u \ \in K \ , \quad a(u, v - u) \geq l(v - u) \quad \forall \ v \in K$$

o

$$u \ \in K \ , \quad a(u, v) = l(v) \quad \forall \ v \in K$$

En el caso especial de que K *sea subespacio.*

Demostración. Ver [3].

Ahora el error estimado para $u - u_h$ es la consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 2.5.2 (Ortogonalidad Fundamental de Galerkin) *Sea u y u_h las soluciones de* $(1 \cdot 5 \cdot 2)$ *y* $(1 \cdot 5 \cdot 3)$ *respectivamente . Entonces*

$$a(u - u_h, v) = 0 \qquad \forall \quad v \in V_h$$

Demostración. Ver [1].

Corolario 2.5.1 $\|u - u_h\|_E = \text{mín}_{v \in V_h} \|u - v\|_E$.

Demostración. Ver [1].

Corolario 2.5.2 *(El Método de Ritz) En el caso simétrico , u_h minimiza la función cuadratica*

$$Q(v) = (v, v) - 2F(v)$$

Sobre todo $v \in V_h$.

Prueba.
Para la prueba de este pequeño corolario , tendriamos que notar lo siguiente que se cumple lo siguiente

$$I(v) = \frac{1}{2}(Q(v)) \qquad (*)$$

Con esto , y usando el teorema 1.5.3 (Donde $K = V_h$ y $l(v) = F(v)$) tenemos que existe un $u_h \in V_h$ que cumple :

$$I(u) = \inf_{v \in K} I(v)$$

Entonces de esto ultimo y de (*) podemos ver qye ese u_h minimiza el Q(v) y tenemos lo que nos piden.
Observación: Notemos que los 2 últimos corolarios son válidos en el caso simetrico.

2.6. Formulación del Problema Variacional no Simétrico

Un problema variacional no simétrico es planteado como sigue. Suponga que las siguientes 5 condiciones son válidas , las cuales son:

$$(1 \cdot 6 \cdot 1) \quad \begin{cases} (1) & \text{(H,}(\cdot,\cdot)\text{) es un espacio de Hilbert;} \\ (2) & \text{V es un subespacio cerrado de H;} \\ (3) & a(\cdot,\cdot) \text{ es una forma bilineal no necesariamente simétrica} \\ (4) & a(\cdot,\cdot) \text{ es continua (acotada) en V;} \\ (5) & a(\cdot,\cdot) \text{ es coerciva en V;} \end{cases}$$

Entonces el problema variacional no simétrico es el siguiente:

Dado un $F \in V^{'}$, *encontrar un* $u \in V$ *tal que* $a(u,v) = F(v) \quad \forall\, v \in V \qquad (1{\cdot}6{\cdot}2)$

Y el problema de aproximación de Galerkin es el siguiente:
Dado un subespacio finito dimensional $V_h \subset V$ y $F \in V^{'}$. Nosotros encontramos un $u_h \in V_h$ tal que:

$$a(u_h, v) = F(v) \qquad \forall \quad v \in V_h \qquad (1 \cdot 6 \cdot 3)$$

Las siguientes preguntas surgen :

1. Tenemos en lo anterior que las soluciones u, u_h son únicas
2. Cuál es el error de estimación para $u - u_h$

Un ejemplo interesante de como formular un problema variacional no simétrico usando las condiciones que hemos nombrado al inicio de la sección , es el siguiente :

Ejemplo

Consideremos el siguiente problema de valores iniciales :

$$-u^{''} + u^{'} + u = f \quad en \quad [0,1] \qquad u^{'}(0) = u^{'}(1) = 0$$

Una formulación variacional es la siguiente , Tomando lo siguiente

$$V = H^1(0,1)$$

$$(u,v) \to \int_0^1 (u^{'}v^{'} + u^{'}v + uv)dx$$

$$F(v) = (f,v)$$

para solucionar la ecuación variacional $(1 \cdot 6 \cdot 2)$. Notar que $a(\cdot,\cdot)$ es no simétrico debido al término $u^{'}v$.

Ahora probaremos que $a(\cdot,\cdot)$ es continuo , observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq |\int_0^1 (u^{'}v^{'} + uv) + |\int_0^1 u^{'}v| \\ &\leq |< u,v >_{H'}| + \|u^{'}\|_{L^2}\|v^{'}\|_{L^2} \\ &\leq \|u\|_{H'}\|v\|_{H'} + \|u^{'}\|_{L^2}\|v^{'}\|_{L^2} \\ &\leq 2.\|u\|_{H'}\|v\|_{H'} \end{aligned}$$

Por lo tanto $a(\cdot,\cdot)$ es continuo (tomar $c_1 = 2$ en la definición).

Para probar que $a(\cdot,\cdot)$ es coerciva , observemos que: Para 3 tenemos:

$$a(v,v) = \int_0^1 ((v^{'})^2 + v^{'}v + v^2)dx$$

$$= \frac{1}{2}.\int_0^1 (v^{'}+v)^2dx + \frac{1}{2}.\int_0^1 ((v^{'})^2 + v^2)dx$$

$$\geq \frac{1}{2}\|v\|^2_{H^1}$$

Por lo tanto $a(\cdot,\cdot)$ es coerciva (tomar $c_2 = \frac{1}{2}$ en la definición).
Si el ejemplo anterior de la ecuacion diferencial , es cambiada a la siguiente:

$$-u^{''} + ku^{'} + u = f$$

Entonces el correspondiente $a(\cdot,\cdot)$ no es necesariamente coerciva pùes depende de un k .

Observación: Si $(H,(\cdot,\cdot))$ es un espacio de Hilbert , y V es un subespacio de H y a(.,.) es un producto interno en V , entonces $(V,a(\cdot,\cdot))$ no tiene que ser completo si $a(\cdot,\cdot)$ no es coerciva.

2.7. Teorema de Lax-Milgram

Antes de continuar con el objetivo de esta sección daremos una definición

Definición 2.7.1 (Contracción) *Sea V un espacio de Banach. Una aplicación* $T : V \to V$ *es llamada una* ***contracción*** *en V, si existe un real* $M < 1$ *tal que:*

$$\forall\, v_1, v_2 \in V\ :\ \|Tv_1 - Tv_2\| \leq M\|v_1 - v_2\|$$

Ahora a Nosotros nos gustaría probar la existencia y la unicidad de la solución de el siguiente problema variacional antisimétrico. Encontrar un u $\in$ V tal que:

$$a(u,v) = F(v) \qquad \forall u \in V$$

Donde V es un espacio de Hilbert ,F $\in V^{'}$ y $a(\cdot,\cdot)$ es una forma bilineal continua y coerciva , pero no necesariamente simétrica .El teorema de Lax Milgram garantiza ambos es decir: existencia y unicidad de el problema variacional descrito anteriormente.Para probarlo primero necesitaremos el siguiente lema:

Lema 2.7.1 *Siendo V un espacio de Banach y una función T que va de V a V, la cual satisface lo siguiente:*

$$\|T(v_1 - T(v_2)\| \leq M.\|v_1 - v_2\|$$

Para todo v_1 *y* v_2 *que* $\in$ *V and un M fijo ,* $0 \leq M \leq 1$*.Allí existe un único* $u \in V$ *tal que:*

$$u = T(u)$$

Es decir la contracción y función T tiene un único punto fijo u.

Demostración. Ver [1].

Ahora enunciaremos y demostraremos el teorema mas importante de este capitulo el cual es el Teorema de Lax Milgram el cual es :

Teorema 2.7.1 (Teorema de Lax Milgram) *Siendo V un espacio de Hilbert V dotado de un producto interno , y $a(\cdot,\cdot)$ una bilineal contiuna y coerciva .Tambien tenemos una funcional $F \in V'$ que es continua y lineal. Entonces existe un único u $\in V$ tal que:*

$$a(u, v) = F(v) \qquad \forall v \in V$$

Prueba.
Para alguna u∈V , definimos la siguiente funcional Au como:

$$Au(v) = a(u, v) \qquad \forall v \in V.$$

Es fácil demostrar que es lineal esa funcional. Au es también continua ya que para todo v∈ V tenemos que:

$$\mid Au \mid = \mid a(u, v) \mid \leq C\|v\|.\|u\|$$

Donde C es la constante que proviene de la definición de $a(\cdot,\cdot)$. Allí vemos que:

$$\|Au\|_{V'} = \sup_{v \neq 0}\left(\frac{\mid Au(v) \mid}{\|v\|}\right) \leq C\|u\| < \infty$$

Así Au∈ V' . Similarmente uno puede mostrar que la función $u \to Au$ es una función lineal que va desde $V \to V'$.Aquí nosotros vemos que la función lineal A:$V \to V'$ es continua con $\|A\|_{L(V,V')} \leq C$. Ahora utilizando el teorema de Representación de Riesz tenemos que para algún $\phi \in V'$ existe un único $\tau\phi$ tal que:$\phi(v) = (\tau\phi, v)$ para algún v∈V. Ahora nosotros hallaremos un único u tal que:

$$Au(v) = F(v)$$

En otras palabras , nosotros queremos hallar un único u tal que:

$$Au = F \quad (en\ V')$$

o

$$\tau.Au = \tau F \quad (en\ V).$$

Como τ:$V' \to V$es una función inyectiva . Nosotros solucionaremos la pasada ecuación usando el lema de contracción .Nosotros buscamos una forma de hallar un ρ diferente del nulo tal que la función T:$V \to V$ es una función contractiva.Donde T es definida como:

$$Tv = v - \rho.(\tau.Av - \tau.F) \qquad \forall v \in V.$$

Si T es una función contractiva , entonces por el lema de contracción existe un u $\in$ V tal que:

$$Tu = u - \rho.(\tau.Au - \tau.F) = u.$$

Esto es $\rho.(\tau.Au - \tau.F) = 0$ o $\tau.Au = \tau.F$.Eso recuerda a mostrar que existe $\rho \neq 0$, Para algún $v_1, v_2 \in V$, Sea v=$v_1 - v_2$. Entonces:

$$\|T(v_1) - T(v_2)\|^2 = \|v_1 - v_2 - \rho.(\tau.A(v_1) - \tau.A(v_2)\|^2$$

Aplicando que τ y que A son lineales tenemos:

$$= \|v - \rho.(\tau.Av)\|^2$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que:

$$= \|v\|^2 - 2\rho(\tau Av, v) + \rho^2\|\tau Av\|^2$$

Luego por definición de τ y de A tenemos que:

$$= \|v\|^2 - 2\rho.Av(v) + \rho^2 Av(\tau Av)$$

$$= \|v\|^2 - 2\rho.a(v, v) + \rho^2 a(v, \tau Av)$$

Por la coercividad y continuidad de A tenemos:

$$\leq \|v\|^2 - 2\rho.\alpha.\|v\|^2 + \rho^2 C.\|v\|.\|\tau Av\|$$

Como A es acotada y τ es isométrica entonces:

$$\leq (1 - 2.\rho.\alpha - \rho^2 C^2).\|v\|^2$$

Por la definición de v tenemos:

$$\leq (1 - 2.\rho.\alpha - \rho^2 C^2).\|v_1 - v_2\|^2$$

Sea $M^2 = (1 - 2.\rho.\alpha - \rho^2 c^2)$ tenemos que:

$$= M^2.\|v_1 - v_2\|^2$$

Aquí α es una constante de la definición de coercividad de a(.,.).Note que $\|\tau.Av\| = \|Av\| \leq C\|v\|$ que usamos en la primera inecuación. Nosotros necesitamos que:

$$(1 - 2.\rho.\alpha - \rho^2 C^2) < 1$$

Para un ρ es decir:

$$\rho.(\rho.C^2 - 2.\alpha) < 0$$

Si nosotros escogemos $\rho \in (0, \frac{2.\alpha}{C^2})$ entonces: $M < 1$ y la demostración ha finalizado.
Observación: Notar que: $\|u\|_v \leq (\frac{1}{\alpha}).\|F\|_{V'}$,donde alfa es una constante de coercividad.

Corolario 2.7.1 *Bajo las condiciones* $(1 \cdot 6 \cdot 1)$ *, el problema variacional* $(1 \cdot 6 \cdot 2)$ *tiene una solución única*

Demostración. Ver [1].

Corolario 2.7.2 *Bajo las condiciones* $(1 \cdot 6 \cdot 1)$ *, el problema aproximado* $(1 \cdot 6 \cdot 3)$ *tiene una única solución*

Demostración. Ver [1].

Observación:
Notar que V_h no necesita ser finito dimensional para que (1.6.3) este bien planteado.

2.8. Error de aproximación del problema variacional

Sea u la solución de el problema variacional $(1 \cdot 6 \cdot 2)$ y u_h sea la solución de el problema aproximado $(1 \cdot 6 \cdot 3)$. Ahora nosotros debemos estimar el error $\|u - u_h\|_V$. Nosotros haremos esta estimación usando el siguiente teorema llamado el teorema de Céa

Teorema 2.8.1 (Teorema de Céa) *Sea u solución del problema variacional , y* u_h *solución del problema aproximado , entonces:*

$$\|u - u_h\| \leq \frac{C}{\alpha} . \min_{v \in V_h} (\|u - v\|_V)$$

Donde C *es la constante de continuidad y* α *es la constante de coercitividad de* $a(\cdot, \cdot)$ *en* V*.*

Prueba.
Como:

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall u \in V$$

y

$$a(u_h, v) = F(v) \quad \forall \ u \in V_h$$

Entonces :

$$a(u - u_h, v) = 0 \ \ \forall \ \ v \in V$$

$$a(u - u_h, u - u_h) \geq \alpha \|u - u_h\|_V^2$$

Esto último proviene de la propiedad de Coercitividad ya que: $(v - v_h) \in V_h$

$$a(u-u_h, u-v) + \underbrace{a(u-u_h, v-v_h)}_{0} \geq \alpha \|u-u_h\|_V^2$$

$$C|u-u_h\|_V.|u-u_h\|_V \geq a(u-u_h, u-v) \geq \alpha\|u-u_h\|_V^2$$

$$\frac{C}{\alpha}.|u-u_h\|_V \geq \|u-u_h\|_V \quad \forall v \in V_h$$

$$\frac{C}{\alpha} \inf_{v \in V_h} \|u-v\|_V \geq \|u-u_h\|_V$$

$$\frac{C}{\alpha} \min_{v \in V_h} \|u-v\|_V \geq \|u-u_h\|_V \quad (V_h \ \ cerrado)$$

Observaciones

1. El teorema de Céa muestra que los u_h son cuasióptimos (es decir que el error $\|u-u_h\|_V$ es proporcional a lo mejor que se puede usar el subespacio V_h).

2. En el caso simétrico , hemos probado que:

$$\|u-u_h\|_E = \min_{v \in V_h}(\|u-u_h\|_E)$$

   y por lo tanto tenemos que:

$$\|u-u_h\|_V \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\|u-u_h\|_E$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \min_{v \in V_h}(|u-u_h\|_E)$$

$$\leq \sqrt{\frac{C}{\alpha}} \min_{v \in V_h}(|u-u_h\|_E)$$

$$\leq \frac{C}{\alpha} \min_{v \in V_h}(|u-u_h\|_E)$$

Y este último resultado es el teorema de Céa . Esto es realmente la observación acerca de la relación entre las dos formulaciones es decir, que uno puede deducirse a partir de la otra.

Capítulo 3

Formulación Variacional de los Problemas Elípticos más conocidos

Aquí analizaremos la formulación variacional de los problemas elípticos mas conocidos y demostraremos la existencia y unicidad de ellas usando los teoremas y las definiciones de los 2 capítulos anteriores .

Empezaremos primero con una definición la cual la necesitaremos mas adelante

Definición 3.0.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado,una función $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$,$\eta = (\eta_1, \eta_2, .., \eta_n)$ el vector exterior normal unitario a Ω.*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta = \frac{\partial u}{\partial x_1}\eta_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\eta_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\eta_n$$

Luego damos la siguiente definición la cual es muy importante para clasificar las EDP.

Teorema 3.0.2 *Sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ y supóngase que existen $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $a_i \in C(\overline{\Omega})$, $\forall i, j = 1, .., n$ y $a_0 \in C(\overline{\Omega})$. El operador diferencial*

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0 \qquad (1)$$

Se denomina uniformemente elíptico sobre Ω si para todo $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\exists \theta > 0 \quad tal \quad que \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \quad c.t.p \quad x \in \Omega \qquad (2)$$

Ejemplo

Si δ_{ij} denota el delta de Kronecker , el operador

$$L = -\Delta = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j})$$

Es uniformemente elíptico sobre $\mathbb{R}^n$ pues :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}(x)\xi_i\xi_j = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_{ij} = |\xi|^2$$

Es decir se satisface (2) con $\theta = 1$

Definición 3.0.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto . Al problema siguiente: "Dada f, encontrar un u tal que $Lu = f$ en Ω ", donde L es un operador diferencial elíptico , se le llama una EDP eliptica.*

Generalmente las EDP , toman su nombre y características de acuerdo al nombre del tipo de operador que está involucrado en tal problema . Por decir , si el operador L es de segundo orden , la EDP es llamada de segundo orden , si el operador L es lineal , la EDP es llamada Linea y asi por el estilo.

Ahora para encontrar una solución unica para la EDP elíptica se le asocian condiciones de borde . Las mas comunes son tres las cuales son:

1. La condición de Dirichlet la cual es u=g sobre $\partial\Omega$
2. La condición de Neumann la cual es $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ sobre $\partial\Omega$, donde v es la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$
3. Y la condición de Robin que es una combinación de las 2 condiciones anteriores la cual es $\alpha u + \frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ sobre $\partial\Omega$ Done α es una constante adecuada.

Algunas veces las razones físicas del problema modelado motivan el considerar dos de las condiciones de borde señaladas anteriormente para el mismo problema; dichos problemas son conocidos como problemas con condiciones mixtas.

3.1. Ecuaciones del tipo Laplaciano

En esta sección se verá en detalle el método variacional aplicado a los problemas mas básicos de la teoría de EDP elípticas.

Ejemplo 1
Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de clase C^1 y $f \in L^2(\Omega)$. El problema homogéneo es encontrar u: $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & en \ \ \Omega \\ u(x) = 0 & en \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

Hallaremos primero la forma bilineal a para demostrar la existencia y unicidad usando el teorema de Lax Milgram , para ello de el problema homogéneo anterior de la primera igualdad multiplicando por $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e integrando por partes sobre Ω tenemos que:

$$\int_{\Omega} \nabla u(x).\nabla v(x)dx - \int_{\partial\Omega} u(x)\varphi(x)dS = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx$$

Usando la condición de borde de u o que $\varphi(x) = 0$ sobre $\partial\Omega$ la integral de frontera se anula y obtenemos que:

$$\int_{\Omega} \nabla u(x).\nabla v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Ahora sabiendo que el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert . La función a : $H \times H \to \mathbb{R}$ definida explicitamente por:

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

Es bilineal , continua , coerciva y simétrica. En efecto :

1. **Continuidad**: Por la desigualdad de Cauchy obtenemos que

$$|a(u,v)| = |\int_{\Omega} \nabla u.\nabla v dx| \leq \int_{\Omega} |\nabla u|.|\nabla v| dx$$

$$\leq (\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}.(\int_{\Omega} |\nabla v| dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|u\|_{H_0^1}.\|v\|_{H_0^1} \qquad \forall\ \ u,v \in H_0^1(\Omega)$$

La constante de continuidad es C=1

2. **Coercividad**

$$a(u,u) = \int_{\Omega} \nabla u.\nabla u dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall\ \ u \in H_0^1(\Omega)$$

La constante de coercividad es $\alpha = 1$

3. **Simetrica** Que a sea simétrica se ve fácilmente pues:

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx = a(u,v)$$

4. **Bilinealidad** Ahora para demostrar la bilinealidad esto es facil de ver pues :

- $$a(\alpha u + \beta, v) = \int_{\Omega} \nabla(\alpha u + \beta)\nabla v dx$$

$$= \int_{\Omega} \alpha \nabla u \nabla v dx + \nabla\beta\nabla v dx = \alpha \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} \nabla\beta\nabla v dx$$

$$= \alpha a(u,v) + a(\beta,v)$$

- $$a(u, \alpha v + \beta) = \int_\Omega \nabla u \nabla(\alpha\beta + v)dx = \int_\Omega \nabla u(\alpha\nabla\beta + \nabla v)dx$$
$$= \alpha\int_\Omega \nabla u\nabla v dx + \int_\Omega \nabla u\nabla\beta dx = \alpha a(u, v) + a(u, \beta)$$

El funcional F: $H \to \mathbb{R}$ viene dado por:

$$F =< f, v >= \int_\Omega f v dx$$

El cual esta en $H^{'}$ pues es lineal y continuo , en efecto tenemos que:

- **Continuidad**:Usando la desigualdad de Cauchy y la desigualdad de Poincare tenemos lo siguiente:

$$| < f, v > | = | \int_\Omega f v dx| \leq \int_\Omega |f||v|dx \leq (\int_\Omega |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}})(\int_\Omega |v|^2 dx)^{\frac{1}{2}})$$
$$= \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = C\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

- **Linealidad**: La linealidad se da pues:

$$< f, \alpha v + \beta >= \int_\Omega f(\alpha v + \beta)dx$$

$$= \alpha\int_\Omega f v dx + \int_\Omega f\beta dx = \alpha < f, v > + < f, \beta >$$

En consecuencia como las Hipótesis del Teorema 2.7.1 se cumplen , por este Teorema el problema variacional (4) tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$.

Ejemplo 2

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de clase C^1 y $f \in L^2(\Omega)$. El problema no homogéneo es encontrar u: $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & en \;\; \Omega \\ u(x) = g & en \;\; \partial\Omega \end{cases}$$

Donde $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Para hallar la existencia y unicidad de este problema podemos hacerlo usando el método anteriormente mostrado pero existe una forma práctica y rápida para hacerlo , y esto es haciendo un cambio de variable el cual reducira este problema al problema anterior y usar este para demostrar la existencia y unicidad.

Por el teorema de trazas (Ver [9] pag 38) se tiene que existe $\overline{g} \in H^1(\Omega)$ de tal manera que el operador de trazas y_0 es tal que $y_0(\overline{g}) = g$ entonces si se define w como:

$$w = u - \overline{g}$$

Se tiene que el problema anterior puede ser llevado a:

$$\begin{cases} -\Delta w(x) = \overline{f} & en \quad \Omega \\ \quad w = 0 \quad en & \partial\Omega \end{cases}$$

Donde $\overline{f} = f + \Delta\overline{g}$ y como este problema es el ejercicio anterior y este ya se demostró la existencia y unicidad entonces este problema tambien es único y existe su solución.

En los 2 ejemplos anteriores se ha estudiado la EDP conocida como ecuación de Poisson con condiciones de frontera tipo Dirichlet . Ahora veremos como se demuestra la existencia y unicidad para un problema con una ecuación del tipo Laplaciano con condiciones de Frontera del tipo Newmann para ver la efectividad y adaptabilidad del método variacional.

Ejemplo 3

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de clase C^1 . Se pide encontrar un $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + u = \overline{f} & en \quad \Omega \\ \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad en & \partial\Omega \end{cases}$$

Donde $f \in L^2(\Omega)$ es una función dada y $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ es la derivada normal exterior de u es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u.\nu$$

Siendo ν el vector unitario normal exterior a $\partial\Omega$.

Ahora vamos a hallar la bilineal y la funcional que necesitamos para aplicar el teorema de Lax Milgram para poder encontrar ese u que nos estan pidiendo entonces de la primera igualdad tenemos que al multiplicar por $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e integrando por partes sobre Ω tenemos que:

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS + \int_{\Omega} \nabla u(x).\nabla\varphi(x)dx + \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx$$

Y usando la condición de frontera $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sobre $\partial\Omega$ tenemos que:

$$\int_{\Omega} \nabla u(x).\nabla\varphi(x)dx + \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx \qquad \forall\varphi \in H^1(\Omega)$$

Ahora para usar el teorema de Lax Milgram , necesitamos una funcional y una bilineal , las cuales son en este caso

$$H = H^1(\Omega)$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u.\nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx$$

$$F =< f, v >= \int_{\Omega} f v dx$$

Ahora tenemos que ver que a sea bilineal , continua y coerciva entonces efectivamente eso se cumple pues:

- **Continuidad**: Esto se nota pues sucede lo siguiente:

$$|a(u,v)| \leq |\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \int_\Omega uvdx| = | < u, v >_{H^1(\Omega)} | \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}.\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

  Y por lo tanto a es continua

- **Coercividad**: Esto también se nota pues sucede lo siguiente:

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla v.\nabla v dx + \int_\Omega v.vdx \geq \int_\Omega \nabla v.\nabla v dx + \int_\Omega v^2 dx = \|v\|^2_{H_1(\Omega)}$$

  Y por lo tanto a es coerciva.

- **Bilinealidad**:Esto proviene de lo siguiente:

  - $$a(u,\alpha v+\beta) = \int_\Omega \nabla u \nabla(\alpha v+\beta)dx + \int_\Omega u(\alpha v+\beta)dx$$
$$= \alpha\int_\Omega \nabla u\nabla v dx + \int_\Omega \nabla u\nabla\beta dx + \alpha\int_\Omega uvdx + \int_\Omega u\beta dx$$

    Reuniendo terminos tenemos que:

$$= \alpha(\int_\Omega \nabla u\nabla v dx + \int_\Omega uvdx) + \int_\Omega \nabla u\nabla\beta dx + \int_\Omega u\beta dx$$

    y de aquí tenemos que:

$$= \alpha a(u,v) + a(u,\beta)$$

  - $$a(\alpha u+\beta, v) = \int_\Omega \nabla(\alpha u+\beta)\nabla v dx + \int_\Omega (\alpha u+\beta)vdx$$
$$= \int_\Omega \alpha\nabla u + \nabla\beta\nabla v dx + \int_\Omega (\alpha u)vdx + \int_\Omega \beta v dx$$
$$= \alpha(\int_\Omega \nabla u dx + \int_\Omega uvdx) + \int_\Omega \nabla\beta\nabla v dx + \int_\Omega \beta v dx$$
$$= \alpha a(u,v) + a(\beta,v)$$

El funcional F: $H \to \mathbb{R}$ viene dado por:

$$F =< f, v >= \int_\Omega fvdx$$

El cual esta en $H^{'}$ pues es lineal y continuo , en efecto tenemos que:

- **Continuidad**:Usando la desigualdad de Cauchy y la desigualdad de Poincare tenemos lo siguiente:

$$|< f,v >| = |\int_{\Omega} fvdx| \leq \int_{\Omega} |f||v|dx \leq (\int_{\Omega} |f|^2dx)^{\frac{1}{2}})(\int_{\Omega} |v|^2dx)^{\frac{1}{2}})$$

$$= \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = C\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

- **Linealidad**: La linealidad se da pues:

$$< f, \alpha v + \beta >= \int_{\Omega} f(\alpha v + \beta)dx$$

$$= \alpha \int_{\Omega} fvdx + \int_{\Omega} f\beta dx = \alpha < f,v > + < f,\beta >$$

Y teniendo que a es bilineal , continua y coerciva y que la funcional F es lineal y continua , por el teorema de Lax Milgram (teorema 2.7.1) el problema tiene solución y es única y esta solución llamda $u \in H^1(\Omega)$.

3.2. EDP Elíptica lineal general de Segundo Orden

En esta sección se vera la aplicación del método variacional a una EDP elíptica general de segundo orden . Sólo trataremos el caso de condición de frontera Dirichlet puesto que el otro caso el de Newmann necesitamos mas herramientas de Análisis Funcional que no hemos definido previamente y que no se tratará aquí

Ejemplo 1

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de clase C^1 y $f \in L^2(\Omega)$. El problema es encontrar un $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ satisfaciendo :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0u = f \quad en \quad \Omega \\ u = 0 \quad en \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Donde $L = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial}{\partial x_i} + a_0$ es un operador uniformemente elíptico.

Vamos a usar el método variacional anteriormente descrito en los ejemplos anteriores para demostar la existencia y unicidad de ese u , ahora para ello se hace lo siguiente , multiplicando la primera ecuacion de el ejemplo anterior por un $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, integrar por partes y reemplazar la condición de contorno , tendríamos lo siguiente:

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}vdx + \int_\Omega a_0uvdx = \int_\Omega fvdx \qquad \forall \quad v\in H_0^1(\Omega)$$

Por analogía a los ejemplos anteriores , para demostrar la existencia y la unicidad de la solución se puede pensar en la utlización del Teorema 2.7.1 y en tal caso establecer :

$$H = H_0^1(\Omega)$$
$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}vdx + \int_\Omega a_0uvdx \qquad (3\cdot 1)$$
$$F =< f,v >= \int_\Omega fvdx$$

Ahora de acá podemos ver que a es bilineal y continua pues efectivamente:

- **Bilinealidad**: Esto se ve de lo siguiente
  - $$a(\alpha u+\beta,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha u+\beta)\frac{\partial v}{\partial x_j}dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha u+\beta)vdx$$
    $$+\int_\Omega a_0(\alpha u+\beta)vdx$$
    $$= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}[\alpha(\frac{\partial u}{\partial x_i})+\frac{\partial \beta}{\partial x_i}]\frac{\partial v}{\partial x_j}dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(\alpha\frac{\partial u}{\partial x_i}+\frac{\partial \beta}{\partial x_i})vdx$$
    $$+\int_\Omega a_0\alpha uvdx + \int_\Omega a_0\beta vdx$$
    $$= \alpha(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx) + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial \beta}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx + \alpha(\int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}vdx)$$
    $$+\int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial \beta}{\partial x_i}vdx + \alpha(\int_\Omega a_0uvdx) + \int_\Omega a_0\beta vdx$$

    Organizando terminos tenemos que:

    $$= \alpha(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}vdx + \int_\Omega a_0uvdx)$$
    $$+\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial \beta}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial \beta}{\partial x_i}vdx + \int_\Omega a_0\beta vdx$$
    $$= \alpha a(u,v) + a(\beta,v)$$

- Análogamente tenemos que:

$$a(u,\alpha v+\beta)=\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial(\alpha v+\beta)}{\partial x_j}dx+\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}(\alpha v+\beta)dx$$

$$+\int_\Omega a_0u(\alpha v+\beta)dx$$

$$=\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}.(\alpha(\frac{\partial v}{\partial x_j})+\frac{\partial \beta}{\partial x_j}dx)+\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\alpha vdx+\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\beta dx$$

$$+\alpha\int_\Omega a_0uvdx+\int_\Omega a_0u\beta dx$$

$$=\alpha(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx)+\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \beta}{\partial x_j}dx+\alpha(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}vdx)$$

$$+\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\beta dx+\alpha(\int_\Omega a_0uvdx)+\int_\Omega a_0u\beta dx$$

Organizando terminos tenemos que:

$$=\alpha(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx+\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}vdx+\int_\Omega a_0uvdx)$$

$$+\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \beta}{\partial x_j}dx+\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\beta dx+\int_\Omega a_0\beta\beta dx$$

$$=\alpha a(u,v)+a(u,\beta)$$

Y de los ítems anteriores se prueba la linealidad

- **Continuidad**: Probaremos que a es continua , por las desigualdad Triangular, Poincaré y de Cauchy tenemos que:

$$|a(u,v)|=|\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx+\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}vdx+\int_\Omega a_0uvdx|$$

Usando Desigualdad Triangular tenemos que:

$$\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}||\frac{\partial v}{\partial x_j}|dx+\sum_{i,j=1}^{n} \|a_i\|_{L^\infty}\int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}||v|dx+\|a_0\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |u||v|dx$$

Usando Cauchy tenemos que:

$$\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}(\int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2 dx)^{\frac{1}{2}}(\int_\Omega |\frac{\partial v}{\partial x_j}|^2 dx)^{\frac{1}{2}}+\sum_{i,j=1}^{n} \|a_i\|_{L^\infty(\Omega)}(\int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}^2 dx)^{\frac{1}{2}}(\int_\Omega |v|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\|a_0\|_{L^\infty(\Omega)}(\int_\Omega |u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}(\int_\Omega |v|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}$$

$$+\|a_0\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}$$

Usando Poincaré tenemos que:

$$\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + C_1\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

$$+C_2\|a_0\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

Y luego haciendo $C = \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} + C_1 \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_{L^\infty(\Omega)} + C_2\|a_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ tenemos que:

$$\leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

y esto es igual a :

$$= C\|\nabla u\|_{H_0^1(\Omega)}\|\nabla v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Y así demostramos que a es continua.

Pero resulta de que a no siempre es coerciva pues se cumple el siguiente Lema

Lema 3.2.1 *Sea a:*$H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *tal que a(u,v) sea definida como (3.1) una forma bilineal , se cumple que:*

$$\exists \alpha, \gamma \geq 0 : \alpha\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq a(u,u) + \gamma\|u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall \;\; u \in H_0^1(\Omega).$$

Prueba.

Por condición de elipticidad (es decir por que a es uniformemente elíptico) y en virtud de la desigualdad de Young (Teorema 1.3.3) , se tiene:

$$\theta\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx = a(u,u) - \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}u dx - \int_\Omega a_0|u|^2 dx$$

$$\leq a(u,u) + \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_{L^\infty(\Omega)}(\epsilon\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon}\int_\Omega |u|^2 dx) + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |u|^2 dx$$

Tomando ϵ tal que:

$$\epsilon \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\theta}{2}$$

Se tiene:

$$\theta \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq a(u,u) + \frac{\theta}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + (\frac{1}{4\epsilon}\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_{L^\infty(\Omega)} + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)}) \int_\Omega |u|^2 dx$$

Entonces:

$$\frac{\theta}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq a(u,u) + (\frac{1}{4\epsilon}\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_{L^\infty(\Omega)} + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)}) \int_\Omega |u|^2 dx$$

Tomando:

$$\alpha = \frac{\theta}{2} \quad y \quad \gamma = \frac{1}{4\epsilon}\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_{L^\infty(\Omega)} + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)}$$

El lema queda demostrado.

Entonces se observa que a no satisface las hipótesis del teorema 2.7.1 excepto cuando $\gamma = 0$. Asi se tiene el siguiente teorema que nos da la unicidad bajo ciertas restricciones de los coeficientes.

Teorema 3.2.1 *Existe un número $\gamma \geq 0$ tal que para cada $\mu \geq \gamma$ y cada $f \in L^2(\Omega)$ el problema:*

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u + \mu u = f \quad en \quad \Omega \\ u = 0 \quad en \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$.

Prueba.

Poniendo para cada $\mu \geq \gamma$

$$a_\mu(u,v) = a(u,v) + \mu < u,v > \qquad \forall \quad u,v \in H_0^1(\Omega)$$

Donde a(u,v) es la forma bilineal dada en el Lema (4.2) y $< u,v >$ es el producto interno canónico de $L^2(\Omega)$ y tomando γ como en el Lema 4.2 se tiene que:

- a_μ es bilineal por ser combinacion lineal de formas bilineales
- a_μ es continua por ser suma de formas continuas
- a_μ es coerciva por el lema 4.2

Asi las hipótesis del Teorema de Lax Milgram se satisfacen por lo cual se concluye de que el problema del último Teorema su solución existe y es única y que pertenece a $H_0^1(\Omega)$.

Capítulo 4

Conclusiones

- En este trabajo se ha realizado el estudio de la existencia y la unicidad de los problemas de valor de frontera Elípticos mas conocidos en Espacios de Sobolev usando el Teorema de Lax Milgram (Teorema 2.7.1).
- El problema que genera la EDP Elíptica General de Segundo Orden no necesariamente existe su solución y es única pues depende mucho de si es coerciva como se vio en la sección respectiva pues depende si existe un γ tal que cumpla las hipótesis del Teorema 3.2.1 y si es así existe su solución y es única .
- Tambien se ha visto de que los espacios de Sobolev son una herramienta de mucha utlidad para poder ver una solución de un problema eliptico que se tenga que resolver es única y aún más importante si es que existe.
- La formulación variacional de los problemas elípticos es importante ya que ademas de ser útil en la demostración de existencia y unicidad de la solución, es el que será utilizado en la aproximación numérica la cual se vera en el Segundo Seminario para un problema en particular.

Bibliografía

[1] Brenner S., Scott R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods (2002)

[2] Hasan Siddiqi Abul. Applied Functional Analysis - Numerical Methods, Wavelet Methods, And Image Processing (2004)

[3] Atkinson K., Han W. Theoretical Numerical Analysis - A Functional Analysis Framework (2006)

[4] Wawrzynczyk A. Introducción al Análisis Funcional (1993)

[5] Brézis Haim. Análisis Funcional (1983)

[6] Bartle G. Robert. The Elements of Integration and Lebesgue Measure (1995)

[7] Raviart P., Thomas J. Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles (1983)

[8] Collantes J . Luis , Coronel Anibal. Formulación Variacional de Ecuaciones Diferenciales Parciales (2010)

[9] Steinbach Olaf. Numerical Approximation Methods for Eliptic Boundary Value Problems Finite and Boundary Elements (2008)