

Análisis numérico de elementos finitos

Dr. Stefan Frei
Department of Mathematics
University College London

Curso compacto, Parte III
Universidad Nacional Agraria La Molina
Agosto 2-8, 2017

Método de Galerkin:

- Sea $V_h \subset V$ un espacio finito (discretización **conforme**)
- Problema discreto: *Hallar $u_h \in V_h$ tal que*

$$a(u_h, \phi_h) = (f, \phi_h)_\Omega \quad \forall \phi_h \in V_h$$

- Elementos finitos

$$V_h := \left\{ v \in C(\Omega) \mid v|_T \in P(T) \forall T \in \mathcal{T}_h, v = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\}$$

Overview

1 Elementos finitos generales

2 Propiedades de aproximación

Definición de elementos finitos por funcionales

Nota: En la implementación solo entra la base del espacio finito V_h . Un espacio donde la base no es conocida no es útil.

Una manera común para construir elementos finitos es por

- Una **triangulación** \mathcal{T}_h del dominio Ω
- Un **espacio polinomial** (local) $P(T)$
- Un conjunto de **funcionales lineales** $\{\chi_i : v \rightarrow \mathbb{R}, i = 1 \dots N\}$

El espacio finito V_h está definido por

$$V_h = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v|_T \in P(T) \forall T \in \mathcal{T}_h, \chi_i(v) \text{ es continua } \forall i = 1 \dots N \right\}$$

Una **base** $\{\phi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \phi_i|_T \in P(T), i = 1 \dots N\}$ del espacio se obtiene por las relaciones

$$\chi_i(\phi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Definición de elementos finitos por funcionales

Nota: En la implementación solo entra la base del espacio finito V_h . Un espacio donde la base no es conocida no es útil.

Una manera común para construir elementos finitos es por

- Una **triangulación** \mathcal{T}_h del dominio Ω
- Un **espacio polinomial** (local) $P(T)$
- Un conjunto de **funcionales lineales** $\{\chi_i : v \rightarrow \mathbb{R}, i = 1 \dots N\}$

El espacio finito V_h está definido por

$$V_h = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v|_T \in P(T) \forall T \in \mathcal{T}_h, \chi_i(v) \text{ es continua } \forall i = 1 \dots N \right\}$$

Una **base** $\{\phi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \phi_i|_T \in P(T), i = 1 \dots N\}$ del espacio se obtiene por las relaciones

$$\chi_i(\phi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Unisolvencia

Ejemplo de **funcionales lineales** χ_i

- Valores en nodos, puntos en arista o en el punto medio:
 $\chi_i(v) = v(x_i), v(e_i), v(m_i)$
- Valores de derivadas: $\chi_i(v) = \partial_x v(x_i), \partial_y v(x_i), \nabla v(x_i), \nabla^2 v(x_i), \partial_n v(e_i)$

Una **base** $\{\phi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \phi_i|_T \in P(T), i = 1 \dots N\}$ del espacio se obtiene por las relaciones

$$\chi_i(\phi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Nota: Esta relación no es necesariamente bien-definida

- Sea \mathcal{X}^{loc} el conjunto de los funcionales χ_i definidos en T
- Condición necesaria: $\dim(P(T)) = \#\mathcal{X}^{\text{loc}}$
- Condición suficiente:

$$\chi(p) = 0 \forall \chi \in \mathcal{X}^{\text{loc}}, p \in P(T) \Rightarrow p = 0 \quad (\text{Unisolvencia})$$

Unisolvencia

Ejemplo de **funcionales lineales** χ_i

- Valores en nodos, puntos en arista o en el punto medio:
 $\chi_i(v) = v(x_i), v(e_i), v(m_i)$
- Valores de derivadas: $\chi_i(v) = \partial_x v(x_i), \partial_y v(x_i), \nabla v(x_i), \nabla^2 v(x_i), \partial_n v(e_i)$

Una **base** $\{\phi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \phi_i|_T \in P(T), i = 1 \dots N\}$ del espacio se obtiene por las relaciones

$$\chi_i(\phi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Nota: Esta relación no es necesariamente bien-definida

- Sea \mathcal{X}^{loc} el conjunto de los funcionales χ_i definidos en T
- Condición necesaria: $\dim(P(T)) = \#\mathcal{X}^{\text{loc}}$
- Condición suficiente:

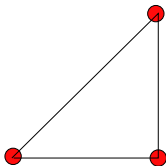
$$\chi(p) = 0 \forall \chi \in \mathcal{X}^{\text{loc}}, p \in P(T) \Rightarrow p = 0 \quad (\text{Unisolvencia})$$

Ejemplo: Elementos finitos P_1

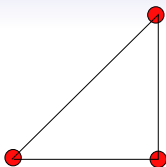
En el caso de elementos P_1 elegimos una triangulación en triángulos, el espacio polinomial $P(T) = P_1(T)$ y los funcionales

$$\chi_i(v) = v(x_i), \quad i = 1 \dots N$$

donde x_i son los nodos de la triangulación.



Ejemplo: Elementos finitos P_1 (cont)



La base está definido por las relaciones

$$\phi_j|_T \in P_1(T), \phi_j(x_i) = \delta_{ij}$$

Por definición el espacio está dado por

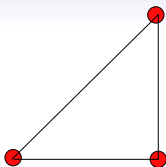
$$V_h = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v|_T \in P(T) \forall T \in \mathcal{T}_h, v(x_i) \text{ es continua } \forall i = 1 \dots N\}$$

Unisolvencia: $\chi_i(p) = 0 \forall \chi_i \in \mathcal{X}^{\text{loc}} \Rightarrow p = 0$

Continuidad: Cómo $v \in P_1(\Gamma)$ para la arista Γ entre dos elementos T_1 y T_2 , la continuidad en los dos nodos x_1 y x_2 implica la continuidad sobre Γ

$$V_h = \{v \in C(\Omega) \mid v|_T \in P(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

Ejemplo: Elementos finitos P_1 (cont)



La base está definido por las relaciones

$$\phi_j|_T \in P_1(T), \phi_j(x_i) = \delta_{ij}$$

Por definición el espacio está dado por

$$V_h = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v|_T \in P(T) \forall T \in \mathcal{T}_h, v(x_i) \text{ es continua } \forall i = 1 \dots N\}$$

Unisolvencia: $\chi_i(p) = 0 \forall \chi_i \in \mathcal{X}^{\text{loc}} \Rightarrow p = 0$

Continuidad: Cómo $v \in P_1(\Gamma)$ para la arista Γ entre dos elementos T_1 y T_2 , la continuidad en los dos nodos x_1 y x_2 implica la continuidad sobre Γ

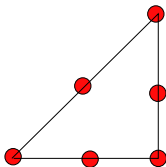
$$V_h = \{v \in C(\Omega) \mid v|_T \in P(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

Elementos finito P_2

Elegimos el espacio $P(T) = P_2(T)$ y los funcionales

$$\chi_i(v) = v(x_i), \quad i = 1 \dots N$$

donde $\{x_i, i = 1 \dots N\}$ es el conjunto de todos los nodos de la triangulación y los puntos medios de las aristas.



- $\dim(P_2(T)) = 6 = \#\mathcal{X}^{\text{loc}}$

De nuevo el espacio es continuo porque $v \in P_2(\Gamma)$ y $v(x_i)$ continuo en 3 puntos en la arista

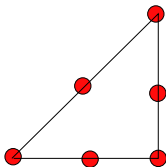
- Mejores propiedades de aproximación por el grado polinomial superior
- Más elementos non-zero en la matriz

Elementos finito P_2

Elegimos el espacio $P(T) = P_2(T)$ y los funcionales

$$\chi_i(v) = v(x_i), \quad i = 1 \dots N$$

donde $\{x_i, i = 1 \dots N\}$ es el conjunto de todos los nodos de la triangulación y los puntos medios de las aristas.



- $\dim(P_2(T)) = 6 = \#\mathcal{X}^{\text{loc}}$

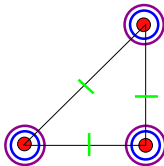
De nuevo el espacio es continuo porque $v \in P_2(\Gamma)$ y $v(x_i)$ continuo en 3 puntos en la arista

- Mejores propiedades de aproximación por el grado polinomial superior
- Más elementos non-zero en la matriz

Elemento de Argyris

- Elemento Argyris para la ecuación biarmónica $P(T) = P_5(T)$

$$v_h(x, y) = \sum_{i+j \leq 5} c_{ij} x^i y^j$$



21 grados de libertad por elemento

$$v_h(x_i), \nabla v_h(x_i), \nabla^2 v_h(x_i), \partial_n v_h(m_i)$$

Las funciones y las derivadas son continuas sobre aristas

$$V_h \subset C^1(\Omega), \quad V_h \subset H^2(\Omega)$$

Desventajas:

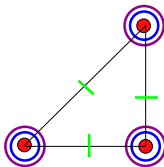
- Muchos grados de libertad por elemento \Rightarrow Muchos elementos non-zero en la matriz
- Complicado para implementar por la base complicada

Para la ecuación biarmónica se utilizan frecuentemente elementos non-conformes

Elemento de Argyris

- Elemento Argyris para la ecuación biarmónica $P(T) = P_5(T)$

$$v_h(x, y) = \sum_{i+j \leq 5} c_{ij} x^i y^j$$



21 grados de libertad por elemento

$$v_h(x_i), \nabla v_h(x_i), \nabla^2 v_h(x_i), \partial_n v_h(m_i)$$

Las funciones y las derivadas son continuas sobre aristas

$$V_h \subset C^1(\Omega), \quad V_h \subset H^2(\Omega)$$

Desventajas:

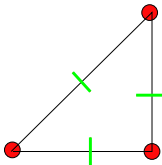
- Muchos grados de libertad por elemento \Rightarrow Muchos elementos non-zero en la matriz
- Complicado para implementar por la base complicada

Para la ecuación biarmónica se utilizan frecuentemente elementos non-conformes

Elemento non-conforme de Morley

Elemento de Morley para la ecuación biarmónica

- $P(T) = P_2(T)$
- Funcionales $\chi_{i,1}(v) = v(x_i)$, $\chi_{i,2}(v) = \partial_n v(e_i)$



- Espacio finito

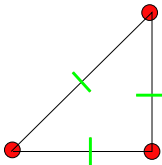
$$V_h := \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : v|_T \in P_2(T) \forall T \in \mathcal{T}_h, v \text{ continuo en nodos y } \partial_n v \text{ continuo en puntos medios de aristas} \right\}$$

- Ni siquiera continuo sobre aristas, $V_h \not\subset H^1(\Omega)$, $V_h \not\subset H^2(\Omega)$ es un espacio non-conforme
- Análisis del error más complicado. Error adicional por la non-conformidad

Elemento non-conforme de Morley

Elemento de Morley para la ecuación biarmónica

- $P(T) = P_2(T)$
- Funcionales $\chi_{i,1}(v) = v(x_i)$, $\chi_{i,2}(v) = \partial_n v(e_i)$



- Espacio finito

$$V_h := \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : v|_T \in P_2(T) \forall T \in \mathcal{T}_h, v \text{ continuo en nodos y} \right. \\ \left. \partial_n v \text{ continuo en puntos medios de aristas} \right\}$$

- Ni siquiera continuo sobre aristas, $V_h \not\subset H^1(\Omega)$, $V_h \not\subset H^2(\Omega)$ es un espacio non-conforme
- Análisis del error más complicado. Error adicional por la non-conformidad

Elementos finitos en cuadrilaterales

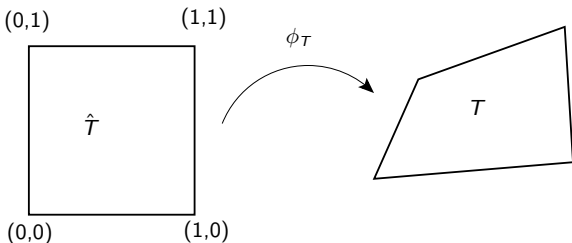
En cuadrilaterales, se utilizan normalmente los espacios polinomiales

$$Q_r := \left\{ u(x, y) = \sum_{0 \leq i, j \leq r} \alpha_{ij} x^i y^j \right\}$$

El espacio finito se define cómo

$$V_h^r(\mathcal{T}_h) := \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid (v \circ \Phi_T)|_{\hat{T}} \in Q_r \forall T \in \mathcal{T}_h, \chi_i(v) \text{ es continua } \forall i = 1 \dots N \right\}$$

donde $\Phi_T : \hat{T} \rightarrow T$ es la transformación del elemento de referencia \hat{K} a K .



Para poder obtener arbitrarios cuadrilaterales, ϕ_T tiene que ser bilineal

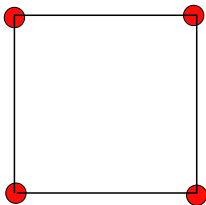
$$\phi_T(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy \in Q_1(\hat{T})$$

Elementos bilineales (Q_1)

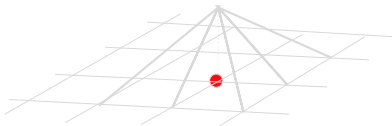
- Elementos bilineales con 4 grados de libertad por elemento

$$\varphi(x, y)|_T := \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy$$

- Funcionales: $\chi_i(v) = v(x_i)$ en todos los nodes



- Unisolvente y continuo (conforme en $H^1(\Omega)$)
- Base

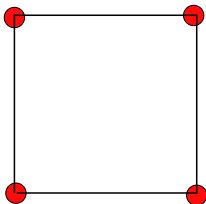


Elementos bilineales (Q_1)

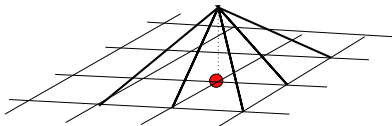
- Elementos bilineales con 4 grados de libertad por elemento

$$\varphi(x, y)|_T := \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy$$

- Funcionales: $\chi_i(v) = v(x_i)$ en todos los nodes



- Unisolvente y continuo (conforme en $H^1(\Omega)$)
- Base



Elementos finitos Q_2

- $\dim(Q_2(T)) = 9$

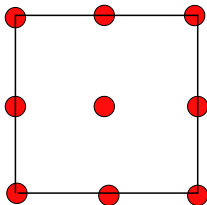
$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j=0}^2 \alpha_{ij} x^i y^j$$

- Funcionales: Valores en nodos, puntos medios de aristas y en el punto medio de un elemento

$$\chi_{i,1}(v) = v(x_i), i = 1, \dots, M_1,$$

$$\chi_{i,2}(v) = v(e_i), i = 1, \dots, M_2,$$

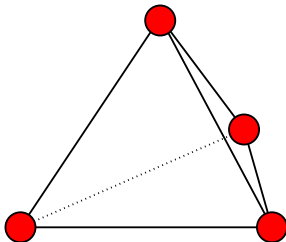
$$\chi_{i,3}(v) = v(m_i), i = 1, \dots, M_3$$



- Unisolvente y continuo (conforme en $H^1(\Omega)$)

P_1 en 3d

- $P(T) = P_1(T)$
- $\chi_i(v) = v(x_i)$, $i = 1 \dots N$, donde x_i son los nodos de la triangulación



Overview

- 1 Elementos finitos generales
- 2 Propiedades de aproximación

Método de Galerkin

- Problema continuo: Hallar $u \in V$ tal que

$$a(u, \phi) = (f, \phi) \quad \forall \phi \in V.$$

- Método de Galerkin: Hallar $u_h \in V_h \subset V$ tal que

$$a(u_h, \phi_h) = (f, \phi_h) \quad \forall \phi_h \in V_h$$

- Ortogonalidad de Galerkin

$$a(u - u_h, \phi_h) = 0 \quad \forall \phi_h \in V_h$$

- Propiedad de la mejor aproximación

$$\|u - u_h\|_a = \min_{\phi_h \in V_h} \|u - \phi_h\|_a, \quad \|u - u_h\|_V \leq C \min_{\phi_h \in V_h} \|u - \phi_h\|_V$$

- Lo que viene: Estimación de las propiedades de aproximación de los espacios $V_h \subset V$ dependiendo de h

$$\min_{\phi_h \in V_h} \|u - \phi_h\|_V \leq Ch^? \|u\|_?$$

Error de discretización

Estrategía: Construcción de una **interpolante** $I_h : V \rightarrow V_h$ para una función $u \in V$

$$\min_{\phi_h \in V_h} \|u - \phi_h\|_V \leq \|u - I_h u\|_V \leq Ch^? \|u\|_?$$

Utilizamos la base $\{\phi_i, i = 1, \dots, N\}$ de V_h construida por las relaciones

$$\chi_i(\phi_j) = \delta_{ij}, \quad i = 1, \dots, N$$

Definimos

$$I_h u = \sum_{i=1}^N \chi_i(u) \phi_i$$

Ejemplo: Elementos finitos P_1

$$I_h u = \sum_{i=1}^N u(x_i) \phi_i$$

Error de discretización

Estrategía: Construcción de una **interpolante** $I_h : V \rightarrow V_h$ para una función $u \in V$

$$\min_{\phi_h \in V_h} \|u - \phi_h\|_V \leq \|u - I_h u\|_V \leq Ch^? \|u\|_?$$

Utilizamos la base $\{\phi_i, i = 1, \dots, N\}$ de V_h construida por las relaciones

$$\chi_i(\phi_j) = \delta_{ij}, \quad i = 1, \dots, N$$

Definimos

$$I_h u = \sum_{i=1}^N \chi_i(u) \phi_i$$

Ejemplo: Elementos finitos P_1

$$I_h u = \sum_{i=1}^N u(x_i) \phi_i$$

Error de discretización

Estrategía: Construcción de una **interpolante** $I_h : V \rightarrow V_h$ para una función $u \in V$

$$\min_{\phi_h \in V_h} \|u - \phi_h\|_V \leq \|u - I_h u\|_V \leq Ch^? \|u\|_?$$

Utilizamos la base $\{\phi_i, i = 1, \dots, N\}$ de V_h construida por las relaciones

$$\chi_i(\phi_j) = \delta_{ij}, \quad i = 1, \dots, N$$

Definimos

$$I_h u = \sum_{i=1}^N \chi_i(u) \phi_i$$

Ejemplo: Elementos finitos P_1

$$I_h u = \sum_{i=1}^N u(x_i) \phi_i$$

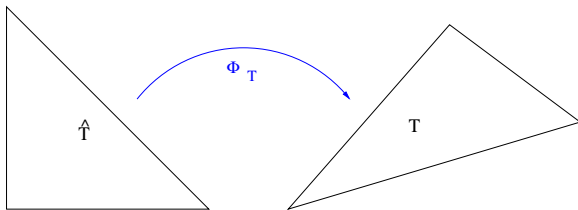
Transformación

Espacio finito

$$V_h = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v \circ \phi_T \in P(\hat{T}) \forall T \in \mathcal{T}_h, v(x_i) \text{ es continua } \forall i = 1 \dots N\}$$

- Triángulos (Teatraedros): Transformación $\phi_T : \hat{T} \rightarrow T$ es lineal

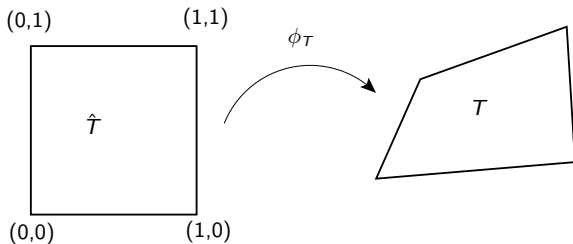
$$\phi_T(s, t) = x^0 + s(x^1 - x^0) + t(x^2 - x^0)$$



Las condiciones $v \circ \phi_T \in P(\hat{T}) \Leftrightarrow v \in P(T)$ son equivalentes

Transformación, cuadrilaterales

Quadrilaterales (Hexaedros): Transformación $\phi_T : \hat{T} \rightarrow T$ es bilineal



$$\phi_T(s, t) = x^0 + s(x^1 - x^0) + t(x^2 - x^0) + st(x^3 + x^0 - x^1 - x^2)$$

La función v es racional

$$v(x) = \underbrace{v \circ \phi_T}_{\in P(\hat{T})} \circ \phi_T^{-1}$$

Condiciones a la triangulación

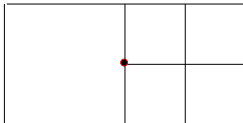
Suponemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un polígono tal que puede ser resuelto exacto por una triangulación $\mathcal{T}_h = \{T_1, \dots, T_N\}$:

$$\overline{\Omega} = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} \overline{T}.$$

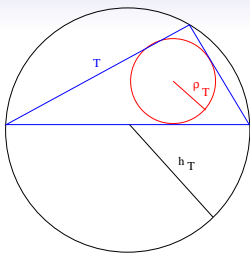
Una triangulación en triángulos o cuadrilaterales se llama **regular**, si para cada $1 \leq i < j \leq N$,

$$T_i \cap T_j$$

- es vacío
- consiste de un solo nodo
- consiste de una arista entera



Condiciones a la triangulación (cont.)



h_T = radius exterior

ρ_T = radius interior

Una familia de triangulaciones $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots$ se llama **regular de forma** si existe una constante κ tal que

$$\max_i \max_{T \in \mathcal{T}_i} \frac{h_T}{\rho_T} \leq \kappa$$

Se llama **quasi-uniforme** si además

$$\frac{\max_{T \in \mathcal{T}_i} h_T}{\min_{T \in \mathcal{T}_i} \rho_T} \leq \kappa \quad \forall i$$

Definimos $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$

Resultado

Condiciones

- La triangulación \mathcal{T}_h es **quasi-uniforme**
- $P_{m-1}(\hat{T}) \subset P(\hat{T})$
- Las funcionales $\chi_i \in \mathcal{X}^{\text{loc}}, i = 1, \dots, M$ son **unisolventes** con $P(\hat{T})$ y **H^m -estable**: Existe $C > 0$ tal que

$$|\chi_i(v)| \leq C \|v\|_{H^m(\hat{T})} \quad \forall v \in H^m(\hat{T})$$

Bajo estas condiciones, la **interpolante** $I_h : V \rightarrow V_h$ definido por

$$I_h u = \sum_{i=1}^N \chi_i(u) \phi_i$$

cumple las estimaciones

$$\|u - I_h u\|_{H^k(\Omega)} \leq Ch^{m-k} \|u\|_{H^m(\Omega)}$$

para $u \in H^m(\Omega)$ y $0 \leq k \leq m$.

Por $H^2(\Omega) \subset C(\Omega)$ tenemos

$$|v(x_i)| \leq \|v\|_{\infty, \Omega} \leq C \|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

Los funcionales de los elementos P_1, P_2 son H^2 -estable.
Analogamente

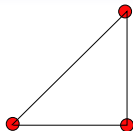
$$|\partial_j v(x_i)| \leq \|\nabla v\|_{\infty, \Omega} \leq C \|v\|_{H^3(\Omega)}$$

$$|\partial_n v(x_i)| \leq \|\nabla v\|_{\infty, \Omega} \leq C \|v\|_{H^3(\Omega)}$$

$$|\partial_{jk} v(x_i)| \leq \|\nabla^2 v\|_{\infty, \Omega} \leq C \|v\|_{H^4(\Omega)}$$

Ejemplos: P_1

Elementos P_1 :



- $P_{m-1}(\hat{T}) \subset P(\hat{T}) = P_1(\hat{T})$ para $m \leq 2$
- $|\chi_i(v)| = |v(x_i)| \leq C\|v\|_{H^m(\hat{T})}$ para $m \geq 2$

Tenemos

$$\|v - I_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|v\|_{H^2(\Omega)},$$

$$\|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|v\|_{H^2(\Omega)},$$

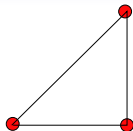
$$\|v - I_h v\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

Problema de Poisson:

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{\Omega} \leq \min_{\phi_h \in V_h} \|\nabla(u - \phi_h)\|_{\Omega} \leq \|\nabla(u - I_h u)\|_{\Omega} \leq Ch \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

Ejemplos: P_1

Elementos P_1 :



- $P_{m-1}(\hat{T}) \subset P(\hat{T}) = P_1(\hat{T})$ para $m \leq 2$
- $|\chi_i(v)| = |v(x_i)| \leq C\|v\|_{H^m(\hat{T})}$ para $m \geq 2$

Tenemos

$$\|v - I_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|v\|_{H^2(\Omega)},$$

$$\|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|v\|_{H^2(\Omega)},$$

$$\|v - I_h v\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

Problema de Poisson:

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{\Omega} \leq \min_{\phi_h \in V_h} \|\nabla(u - \phi_h)\|_{\Omega} \leq \|\nabla(u - I_h u)\|_{\Omega} \leq Ch \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

Estrategía de la prueba

Definimos $\hat{v}(\hat{x}) := v(\phi_T(\hat{x}))$ y mostramos el resultado en el elemento de referencia \hat{T} .

- Transformación a \hat{T} , $0 \leq l \leq k$

$$\|\nabla^l(u - I_h u)\|_T \leq Ch^{-l} |\det(\nabla \phi_T)| \|\hat{\nabla}^l(\hat{u} - I_h \hat{u})\|_{\hat{T}}.$$

- Lema de Bramble-Hilbert en el elemento de referencia

$$\|\hat{\nabla}^k(\hat{u} - I_h \hat{u})\|_{\hat{T}} \leq C \|\hat{\nabla}^m \hat{u}\|_{\hat{T}}.$$

- Transformación al elemento físico T

$$\|\hat{\nabla}^m \hat{u}\|_{\hat{T}} \leq Ch^m |\det(\nabla \phi_T)|^{-1} \|\nabla^m u\|_T.$$

- Juntos

$$\begin{aligned} \|\nabla^l(u - I_h u)\|_T &\leq Ch^{m-l} \|\nabla^m u\|_T \quad 0 \leq l \leq k \\ \Rightarrow \|u - I_h u\|_{H^k(T)} &\leq Ch^{m-k} \|\nabla^m u\|_T \end{aligned}$$

El resultado sigue por elevación al cuadrado y sumación sobre $T \in \mathcal{T}_h$.

Nota: Todas las constantes C son independientes de h y de u

Estrategía de la prueba

Definimos $\hat{v}(\hat{x}) := v(\phi_T(\hat{x}))$ y mostramos el resultado en el elemento de referencia \hat{T} .

- Transformación a \hat{T} , $0 \leq l \leq k$

$$\|\nabla^l(u - I_h u)\|_T \leq Ch^{-l} |\det(\nabla \phi_T)| \|\hat{\nabla}^l(\hat{u} - I_h \hat{u})\|_{\hat{T}}.$$

- Lema de Bramble-Hilbert en el elemento de referencia

$$\|\hat{\nabla}^k(\hat{u} - I_h \hat{u})\|_{\hat{T}} \leq C \|\hat{\nabla}^m \hat{u}\|_{\hat{T}}.$$

- Transformación al elemento físico T

$$\|\hat{\nabla}^m \hat{u}\|_{\hat{T}} \leq Ch^m |\det(\nabla \phi_T)|^{-1} \|\nabla^m u\|_T.$$

- Juntos

$$\begin{aligned} \|\nabla^l(u - I_h u)\|_T &\leq Ch^{m-l} \|\nabla^m u\|_T \quad 0 \leq l \leq k \\ \Rightarrow \|u - I_h u\|_{H^k(T)} &\leq Ch^{m-k} \|\nabla^m u\|_T \end{aligned}$$

El resultado sigue por elevación al cuadrado y sumación sobre $T \in \mathcal{T}_h$.

Nota: Todas las constantes C son independientes de h y de u

Prueba, parte I: Transformación

Sea $\hat{f}(\hat{x}) := f(\phi_T(\hat{x}))$. Consideramos un espacio finito en triángulos. La transformación está dado por

$$\phi_T(s, t) = x^0 + s(x^1 - x^0) + t(x^2 - x^0)$$

Su derivada es

$$F = \nabla \phi_T = (x^1 - x^0, \quad x^2 - x^0)$$

Teorema de transformaciones

$$\int_T f \, dx = \int_{\hat{T}} |\det(F)| \hat{f} \, d\hat{x}$$

Aplicando para $f = 1$, obtenemos que la determinante es el cambio de área

$$|\det(F)| = \frac{\int_T 1 \, dx}{\int_{\hat{T}} 1 \, d\hat{x}} = \frac{|T|}{|\hat{T}|} = 2|T|.$$

Por las condiciones a la triangulación, tenemos

$$\begin{aligned} 2\pi\rho_T^2 &\leq |T| \leq 2\pi h_T^2 \\ \Rightarrow c_1 h^2 &\leq |\det(F)| \leq c_2 h^2. \end{aligned}$$

Prueba, parte I: Transformación

Sea $\hat{f}(\hat{x}) := f(\phi_T(\hat{x}))$. Consideramos un espacio finito en triángulos. La transformación está dado por

$$\phi_T(s, t) = x^0 + s(x^1 - x^0) + t(x^2 - x^0)$$

Su derivada es

$$F = \nabla \phi_T = (x^1 - x^0, \quad x^2 - x^0)$$

Teorema de transformaciones

$$\int_T f \, dx = \int_{\hat{T}} |\det(F)| \hat{f} \, d\hat{x}$$

Aplicando para $f = 1$, obtenemos que la determinante es el cambio de área

$$|\det(F)| = \frac{\int_T 1 \, dx}{\int_{\hat{T}} 1 \, d\hat{x}} = \frac{|T|}{|\hat{T}|} = 2|T|.$$

Por las condiciones a la triangulación, tenemos

$$\begin{aligned} 2\pi\rho_T^2 &\leq |T| \leq 2\pi h_T^2 \\ \Rightarrow c_1 h^2 &\leq |\det(F)| \leq c_2 h^2. \end{aligned}$$

Prueba, parte I: Transformación (cont.)

Por las condiciones a la triangulación, tenemos

$$|(x^1 - x^0)_i| \leq Ch, \quad |(x^1 - x^0)_i| \leq Ch, \quad i = 1, 2$$

y por eso $\max_{i,j=1,2} |f_{ij}| \leq Ch$.

Por la regla de Cramer, la matriz inversa está dado por

$$F^{-1} = |\det(F)|^{-1} \begin{pmatrix} f_{22} & -f_{12} \\ -f_{21} & f_{11} \end{pmatrix}$$

y con el cálculo previo

$$\max_{ij=1,2} |f_{ij}^{-1}| \leq c_1 h^{-2} ch \leq Ch^{-1}$$

Prueba, parte I: Transformación (cont.)

Cambio de derivadas (regla de la cadena)

$$\hat{\partial}_i \hat{v}(\hat{x}) = \hat{\partial}_i v(\phi_T(\hat{x})) = \sum_{j=1}^2 \partial_j v(x) \underbrace{\partial_i(\phi_T(\hat{x}))}_{F_{ji}},$$

en notación vectorial $\hat{\nabla} v = F^T \nabla v$, $\nabla v = F^{-T} \hat{\nabla} v$.

Con el teorema de transformaciones

$$\begin{aligned} \int_T (\nabla(v - I_h v))^2 dx &= \int_{\hat{T}} |\det(F)| (F^{-T} \hat{\nabla}(\hat{v} - I_h \hat{v}))^2 d\hat{x} \\ &\leq |\det(F)| \left(\max_{i,j=1,2} |f_{ij}^{-1}| \right)^2 \int_{\hat{T}} (\hat{\nabla}(\hat{v} - I_h \hat{v}))^2 d\hat{x} \\ &\leq Ch^{-2} |\det(F)| \|\hat{\nabla}(\hat{v} - I_h \hat{v})\|_{\hat{T}}^2. \end{aligned}$$

Por inducción

$$\|\nabla'(v - I_h v)\|_T \leq Ch^{-l} |\det(F)| \|\hat{\nabla}'(\hat{v} - I_h \hat{v})\|_{\hat{T}}$$

Prueba, parte I: Transformación (cont.)

Cambio de derivadas (regla de la cadena)

$$\hat{\partial}_i \hat{v}(\hat{x}) = \hat{\partial}_i v(\phi_T(\hat{x})) = \sum_{j=1}^2 \partial_j v(x) \underbrace{\partial_i(\phi_T(\hat{x}))}_{F_{ji}},$$

en notación vectorial $\hat{\nabla} v = F^T \nabla v$, $\nabla v = F^{-T} \hat{\nabla} v$.

Con el teorema de transformaciones

$$\begin{aligned} \int_T (\nabla(v - I_h v))^2 dx &= \int_{\hat{T}} |\det(F)| (F^{-T} \hat{\nabla}(\hat{v} - I_h \hat{v}))^2 d\hat{x} \\ &\leq |\det(F)| \left(\max_{i,j=1,2} |f_{ij}^{-1}| \right)^2 \int_{\hat{T}} (\hat{\nabla}(\hat{v} - I_h \hat{v}))^2 d\hat{x} \\ &\leq Ch^{-2} |\det(F)| \|\hat{\nabla}(\hat{v} - I_h \hat{v})\|_{\hat{T}}^2. \end{aligned}$$

Por inducción

$$\|\nabla^l(v - I_h v)\|_T \leq Ch^{-l} |\det(F)| \|\hat{\nabla}^l(\hat{v} - I_h \hat{v})\|_{\hat{T}}$$

Prueba, parte I: Segunda transformación

Transformación del elemento de referencia \hat{T} al elemento físico T

$$\begin{aligned}\int_{\hat{T}} (\hat{\nabla}(\hat{v}))^2 dx &= \int_T |\det(F)|^{-1} (F^T \nabla v)^2 dx \\ &\leq |\det(F)|^{-1} \left(\max_{i,j=1,2} |f_{ij}| \right)^2 \int_T (\nabla v)^2 dx \\ &\leq Ch^2 |\det(F)|^{-1} \|\nabla v\|_T^2.\end{aligned}$$

Por inducción

$$\|\hat{\nabla}' \hat{v}\|_{\hat{T}} \leq Ch' |\det(F)|^{-1} \|\nabla' v\|_T$$

Prueba, parte II: Estimación el elemento de referencia

Lo que falta es la estimación en el elemento de referencia \hat{T}

$$\|\hat{\nabla}^k(\hat{u} - I_h \hat{u})\|_{\hat{T}} \leq C \|\hat{\nabla}^m \hat{u}\|_{\hat{T}}.$$

Definimos la parte al lado izquierdo cómo funcional $F : H^m(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(u) := \|\hat{\nabla}^k(\hat{u} - I_h \hat{u})\|_{\hat{T}}$$

Lema de Bramble-Hilbert

Sea $F : H^m(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional que cumple las siguientes condiciones

- **Sublineal:** $|F(u + v)| \leq c(|F(u)| + |F(v)|)$
- $F(p) = 0$ para polinomios $p \in P_{m-1}(\Omega)$
- H^m -estable: $|F(u)| \leq c\|u\|_{H^m(\Omega)}$

Bajo estas condiciones existe una constante $C > 0$ tal que

$$|F(u)| \leq C \|\nabla^m u\|_{\Omega}$$

Condiciones de Bramble-Hilbert

Aplicación para el funcional

$$F(u) := \|\hat{\nabla}^k(\hat{u} - I_h \hat{u})\|_{\hat{\tau}}$$

- $|F(u + v)| \leq |F(u)| + |F(v)|$ por la desigualdad triangular
- $F(p) = 0$ para polinomios $p \in P_{m-1}(\Omega)$:
Por definición de la interpolante: $\chi_i(p) = \chi_i(I_h p)$
Por la unisolvencia tenemos $\chi_i(p - I_h p) = 0 \forall i \in \mathcal{X}^{\text{loc}} \Rightarrow p - I_h p = 0$
- H^m -estable:

$$\begin{aligned} |F(u)| &= \|\hat{\nabla}^k(\hat{u} - I_h \hat{u})\|_{\hat{\tau}} \leq \|\hat{\nabla}^k \hat{u}\|_{\hat{\tau}} + \sum_i \|\chi_i(\hat{u}) \hat{\nabla}^k \phi_i\|_{\hat{\tau}} \\ &\leq \|\hat{u}\|_{H^k(\hat{\tau})} + \sum_i |\chi_i(\hat{u})| \|\hat{\nabla}^k \phi_i\|_{\hat{\tau}}. \end{aligned}$$

$\|\hat{\nabla}^k \phi_i\|_{\hat{\tau}} \leq C$, los funcionales χ_i son H^m -estable por suposición,.

Condiciones de Bramble-Hilbert

Aplicación para el funcional

$$F(u) := \|\hat{\nabla}^k(\hat{u} - I_h \hat{u})\|_{\hat{T}}$$

- $|F(u + v)| \leq |F(u)| + |F(v)|$ por la desigualdad triangular
- $F(p) = 0$ para polinomios $p \in P_{m-1}(\Omega)$:
Por definición de la interpolante: $\chi_i(p) = \chi_i(I_h p)$
Por la unisolvencia tenemos $\chi_i(p - I_h p) = 0 \forall i \in \mathcal{X}^{\text{loc}} \Rightarrow p - I_h p = 0$
- H^m -estable:

$$\begin{aligned} |F(u)| &= \|\hat{\nabla}^k(\hat{u} - I_h \hat{u})\|_{\hat{T}} \leq \|\hat{\nabla}^k \hat{u}\|_{\hat{T}} + \sum_i \|\chi_i(\hat{u}) \hat{\nabla}^k \phi_i\|_{\hat{T}} \\ &\leq \|\hat{u}\|_{H^k(\hat{T})} + \sum_i |\chi_i(\hat{u})| \|\hat{\nabla}^k \phi_i\|_{\hat{T}}. \end{aligned}$$

$\|\hat{\nabla}^k \phi_i\|_{\hat{T}} \leq C$, los funcionales χ_i son H^m -estable por suposición,.

Condiciones de Bramble-Hilbert

Aplicación para el funcional

$$F(u) := \|\hat{\nabla}^k(\hat{u} - I_h \hat{u})\|_{\hat{\tau}}$$

- $|F(u + v)| \leq |F(u)| + |F(v)|$ por la desigualdad triangular
- $F(p) = 0$ para polinomios $p \in P_{m-1}(\Omega)$:
Por definición de la interpolante: $\chi_i(p) = \chi_i(I_h p)$
Por la unisolvencia tenemos $\chi_i(p - I_h p) = 0 \forall i \in \mathcal{X}^{\text{loc}} \Rightarrow p - I_h p = 0$
- H^m -estable:

$$\begin{aligned} |F(u)| &= \|\hat{\nabla}^k(\hat{u} - I_h \hat{u})\|_{\hat{\tau}} \leq \|\hat{\nabla}^k \hat{u}\|_{\hat{\tau}} + \sum_i \|\chi_i(\hat{u}) \hat{\nabla}^k \phi_i\|_{\hat{\tau}} \\ &\leq \|\hat{u}\|_{H^k(\hat{\tau})} + \sum_i |\chi_i(\hat{u})| \|\hat{\nabla}^k \phi_i\|_{\hat{\tau}}. \end{aligned}$$

$\|\hat{\nabla}^k \phi_i\|_{\hat{\tau}} \leq C$, los funcionales χ_i son H^m -estable por suposición,.

Prueba del lema de Bramble-Hilbert

Una de las condiciones es la estabilidad en H^m

$$|F(v)| \leq C \|v\|_{H^m(\Omega)}$$

Tenemos que probar que

$$|F(v)| \leq C |v|_{H^m(\Omega)}$$

Desigualdad generalizada de Poincaré

Para una función $v \in H^m(\hat{T})$ tal que

$$\int_{\hat{T}} D^\alpha v \, dx = 0 \quad \forall |\alpha| \leq m-1,$$

se cumple

$$\|v\|_{H^m(\hat{T})} \leq C |v|_{H^m(\Omega)}$$

Proyección polinomial

Para aplicar la desigualdad generalizada de Poincaré necesitamos el siguiente lema

Lema: Proyección polinomial

Para cada función $v \in H^m(\hat{T})$ existe un polinomio $\pi_h v \in P_{m-1}(\hat{T})$ tal que

$$\int D^\alpha (v - \pi_h v) dx = 0 \quad \forall |\alpha| \leq m - 1.$$

Prueba del lema de Bramble-Hilbert

Utilizando la **sublinealidad** y $F(p) = 0 \quad \forall p \in P_{m-1}(\hat{T})$, obtenemos

$$|F(v)| \leq |F(v - \pi_h v + \pi_h v)| \leq c(|F(v - \pi_h v)| + |F(\pi_h v)|) = c|F(v - \pi_h v)|.$$

Con la **estabilidad en $H^m(\hat{T})$**

$$|F(v)| \leq C \|v - \pi_h v\|_{H^m(\Omega)}.$$

Cómo $\int_{\hat{T}} v - \pi_h v \, dx = 0$, la desigualdad generalizada de Poincaré resulta en

$$|F(v)| \leq C |v - \pi_h v|_{H^m(\Omega)} = C |v|_{H^m(\Omega)}.$$

Conclusión de la prueba

Conclusión

- **Condiciones:** \mathcal{T}_h es **quasi-uniforme**

Transformación a \hat{T} , $0 \leq l \leq k$

$$\|\nabla^l(u - I_h u)\|_T \leq Ch^{-l} |\det(\nabla \phi_T)| \|\hat{\nabla}^l(\hat{u} - I_h \hat{u})\|_{\hat{T}}.$$

Transformación al elemento físico T

$$\|\hat{\nabla}^m \hat{u}\|_{\hat{T}} \leq Ch^m |\det(\nabla \phi_T)|^{-1} \|\nabla^m u\|_T.$$

- **Condiciones:** $P_{m-1}(T) \subset P(\hat{T})$, $\chi_i \in \mathcal{X}^{\text{loc}}$ **unisolventes** con $P(\hat{T})$ y H^m -estable:

Lema de Bramble-Hilbert en el elemento de referencia

$$\|\hat{\nabla}^k(\hat{u} - I_h \hat{u})\|_{\hat{T}} \leq C \|\hat{\nabla}^m \hat{u}\|_{\hat{T}}.$$

- Juntos

$$\|\nabla^k(u - I_h u)\|_T \leq Ch^{m-k} \|\nabla^m u\|_T$$

Conclusión de la prueba

Conclusión

- **Condiciones:** \mathcal{T}_h es **quasi-uniforme**

Transformación a \hat{T} , $0 \leq l \leq k$

$$\|\nabla^l(u - I_h u)\|_T \leq Ch^{-l} |\det(\nabla \phi_T)| \|\hat{\nabla}^l(\hat{u} - I_h \hat{u})\|_{\hat{T}}.$$

Transformación al elemento físico T

$$\|\hat{\nabla}^m \hat{u}\|_{\hat{T}} \leq Ch^m |\det(\nabla \phi_T)|^{-1} \|\nabla^m u\|_T.$$

- **Condiciones:** $P_{m-1}(T) \subset P(\hat{T})$, $\chi_i \in \mathcal{X}^{\text{loc}}$ **unisolventes** con $P(\hat{T})$ y H^m -estable:

Lema de Bramble-Hilbert en el elemento de referencia

$$\|\hat{\nabla}^k(\hat{u} - I_h \hat{u})\|_{\hat{T}} \leq C \|\hat{\nabla}^m \hat{u}\|_{\hat{T}}.$$

- Juntos

$$\|\nabla^k(u - I_h u)\|_T \leq Ch^{m-k} \|\nabla^m u\|_T$$

Conclusión de la prueba

Conclusión

- **Condiciones:** \mathcal{T}_h es **quasi-uniforme**

Transformación a \hat{T} , $0 \leq l \leq k$

$$\|\nabla^l(u - I_h u)\|_T \leq Ch^{-l} |\det(\nabla \phi_T)| \|\hat{\nabla}^l(\hat{u} - I_h \hat{u})\|_{\hat{T}}.$$

Transformación al elemento físico T

$$\|\hat{\nabla}^m \hat{u}\|_{\hat{T}} \leq Ch^m |\det(\nabla \phi_T)|^{-1} \|\nabla^m u\|_T.$$

- **Condiciones:** $P_{m-1}(T) \subset P(\hat{T})$, $\chi_i \in \mathcal{X}^{\text{loc}}$ **unisolventes** con $P(\hat{T})$ y H^m -estable:

Lema de Bramble-Hilbert en el elemento de referencia

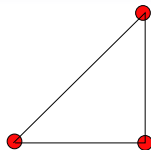
$$\|\hat{\nabla}^k(\hat{u} - I_h \hat{u})\|_{\hat{T}} \leq C \|\hat{\nabla}^m \hat{u}\|_{\hat{T}}.$$

- Juntos

$$\|\nabla^k(u - I_h u)\|_T \leq Ch^{m-k} \|\nabla^m u\|_T$$

Ejemplos: P_1

Elementos P_1 :



- $P_{m-1}(\hat{T}) \subset P(\hat{T}) = P_1(\hat{T})$ para $m \leq 2$
- $|\chi_i(v)| = |v(x_i)| \leq C\|v\|_{H^m(\hat{T})}$ para $m \geq 2$

Tenemos

$$\|v - I_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|v\|_{H^2(\Omega)},$$

$$\|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|v\|_{H^2(\Omega)},$$

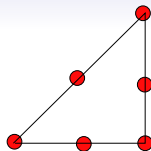
$$\|v - I_h v\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

Problema de Poisson:

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{\Omega} \leq \min_{\phi_h \in V_h} \|\nabla(u - \phi_h)\|_{\Omega} \leq \|\nabla(u - I_h u)\|_{\Omega} \leq Ch \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

Ejemplos: P_2

Elementos P_2 :



- $P_{m-1}(\hat{T}) \subset P(\hat{T}) = P_2(\hat{T})$ para $m \leq 3$
- $|\chi_i(v)| = |v(x_i)| \leq C\|v\|_{H^m(\hat{T})}$ para $m \geq 2$

Tenemos

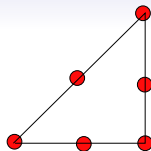
$$\begin{aligned}\|v - I_h v\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^2 \|v\|_{H^2(\Omega)}, & \|v - I_h v\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^3 \|v\|_{H^3(\Omega)}, \\ \|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} &\leq Ch \|v\|_{H^2(\Omega)}, & \|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} &\leq Ch^2 \|v\|_{H^3(\Omega)},\end{aligned}$$

Problema de Poisson:

$$\begin{aligned}\|\nabla(u - u_h)\|_{\Omega} &\leq \min_{\phi_h \in V_h} \|\nabla(u - \phi_h)\|_{\Omega} \leq \|\nabla(u - I_h u)\|_{\Omega} \leq Ch^2 \|u\|_{H^3(\Omega)}, \\ \|\nabla(u - u_h)\|_{\Omega} &\leq Ch \|u\|_{H^2(\Omega)}\end{aligned}$$

Ejemplos: P_2

Elementos P_2 :



- $P_{m-1}(\hat{T}) \subset P(\hat{T}) = P_2(\hat{T})$ para $m \leq 3$
- $|\chi_i(v)| = |v(x_i)| \leq C\|v\|_{H^m(\hat{T})}$ para $m \geq 2$

Tenemos

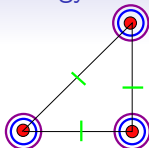
$$\begin{aligned}\|v - I_h v\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^2 \|v\|_{H^2(\Omega)}, & \|v - I_h v\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^3 \|v\|_{H^3(\Omega)}, \\ \|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} &\leq Ch \|v\|_{H^2(\Omega)}, & \|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} &\leq Ch^2 \|v\|_{H^3(\Omega)},\end{aligned}$$

Problema de Poisson:

$$\begin{aligned}\|\nabla(u - u_h)\|_{\Omega} &\leq \min_{\phi_h \in V_h} \|\nabla(u - \phi_h)\|_{\Omega} \leq \|\nabla(u - I_h u)\|_{\Omega} \leq Ch^2 \|u\|_{H^3(\Omega)}, \\ \|\nabla(u - u_h)\|_{\Omega} &\leq Ch \|u\|_{H^2(\Omega)}\end{aligned}$$

Ejemplos: Elemento de Argyris

Elemento de Argyris:



- $P_{m-1}(\hat{T}) \subset P(\hat{T}) = P_5(\hat{T})$ para $m \leq 6$
- $|\chi_i(v)| = |\partial_{jk} v(x_i)| \leq C \|v\|_{H^m(\hat{T})}$ para $m \geq 4$

Tenemos

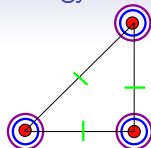
$$\begin{aligned} \|v - I_h v\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^4 \|v\|_{H^4(\Omega)}, \dots \|v - I_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^6 \|v\|_{H^6(\Omega)}, \\ \|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} &\leq Ch^3 \|v\|_{H^4(\Omega)}, \dots \|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^5 \|v\|_{H^6(\Omega)}, \\ \|v - I_h v\|_{H^2(\Omega)} &\leq Ch^2 \|v\|_{H^4(\Omega)}, \dots \|v - I_h v\|_{H^2(\Omega)} \leq Ch^4 \|v\|_{H^6(\Omega)}. \end{aligned}$$

Problema de la placa:

$$\begin{aligned} \|\nabla^2(u - u_h)\|_{\Omega} &\leq C \min_{\phi_h \in V_h} \|\nabla^2(u - \phi_h)\|_{\Omega} \leq \|\nabla^2(u - I_h u)\|_{\Omega} \leq Ch^2 \|u\|_{H^4(\Omega)}, \\ \|\nabla^2(u - u_h)\|_{\Omega} &\leq Ch^3 \|u\|_{H^5(\Omega)}, \\ \|\nabla^2(u - u_h)\|_{\Omega} &\leq Ch^4 \|u\|_{H^6(\Omega)} \end{aligned}$$

Ejemplos: Elemento de Argyris

Elemento de Argyris:



- $P_{m-1}(\hat{T}) \subset P(\hat{T}) = P_5(\hat{T})$ para $m \leq 6$
- $|\chi_i(v)| = |\partial_{jk} v(x_i)| \leq C \|v\|_{H^m(\hat{T})}$ para $m \geq 4$

Tenemos

$$\begin{aligned} \|v - I_h v\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^4 \|v\|_{H^4(\Omega)}, \dots \|v - I_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^6 \|v\|_{H^6(\Omega)}, \\ \|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} &\leq Ch^3 \|v\|_{H^4(\Omega)}, \dots \|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^5 \|v\|_{H^6(\Omega)}, \\ \|v - I_h v\|_{H^2(\Omega)} &\leq Ch^2 \|v\|_{H^4(\Omega)}, \dots \|v - I_h v\|_{H^2(\Omega)} \leq Ch^4 \|v\|_{H^6(\Omega)}. \end{aligned}$$

Problema de la placa:

$$\begin{aligned} \|\nabla^2(u - u_h)\|_{\Omega} &\leq C \min_{\phi_h \in V_h} \|\nabla^2(u - \phi_h)\|_{\Omega} \leq \|\nabla^2(u - I_h u)\|_{\Omega} \leq Ch^2 \|u\|_{H^4(\Omega)}, \\ \|\nabla^2(u - u_h)\|_{\Omega} &\leq Ch^3 \|u\|_{H^5(\Omega)}, \\ \|\nabla^2(u - u_h)\|_{\Omega} &\leq Ch^4 \|u\|_{H^6(\Omega)} \end{aligned}$$

Conclusión

- Elementos finitos pueden estar definidos por una **triangulación** \mathcal{T}_h , **espacios polinomiales** $P(\hat{T})$ locales y un conjunto \mathcal{X} de **funcionales lineales**

$$V_h = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v|_T \in P(T) \forall T \in \mathcal{T}_h, \text{chi}_i(v) \text{ es continua } \forall i = 1 \dots N \right\}$$

- Elementos conformes y unisolventes
- Orden de aproximación depende del grado polinomial
- Estimación para el **error de interpolación**

$$\|\nabla^k(u - I_h u)\|_T \leq Ch^{m-k} \|\nabla^m u\|_T$$

- Transformación al elemento de referencia y lema de Bramble-Hilbert
- Error (optimal) con elementos P_{m-1} para el problema de Poisson:

$$\|\nabla(u - u_h)\|_\Omega \leq \min_{\phi_h \in V_h} \|\nabla(u - \phi_h)\|_\Omega \leq \|\nabla(u - I_h u)\|_\Omega \leq Ch^{m-1} \|u\|_{H^m(\Omega)}$$

- *Lo que falta: Estimación en la norma de $L^2(\Omega)$*