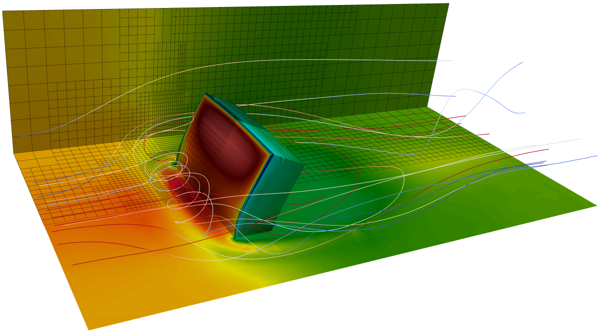

Proyección L^2

Mg. Dandy Rueda Castillo

Diciembre 11, 2018

Objetivos

1. Introducir los espacios de funciones lineales por tramos.
2. Calcular la proyección L^2 de una función.

Sean x_1 y x_2 puntos distintos tales que $x_1 < x_2$ y a los cuales nos referiremos como **nodos.** Considerando el intervalo $I = [x_1, x_2]$, definimos el espacio vectorial

$$P_1(I) = \{v : v(x) = c_1 + c_1 x,\ x \in I,\ c_2, c_1 \in \mathbb{R}\}$$

- v queda determinado conociendo c_1 y c_2, puesto que el conjunto $\{1, x\}$ es una base para $P_1(I)$. Además, diremos que v tiene dos *grados de libertad*.

- v queda determinado conociendo c_1 y c_2, puesto que el conjunto $\{1, x\}$ es una base para $P_1\left(I\right)$. Además, diremos que v tiene dos *grados de libertad*.
- Si $v \in P_1(I)$, dados los valores $\alpha_1 = v(x_1)$ y $\alpha_2 = v(x_2)$, que llamaremos **valores nodales**, hay **una** única función v en $P_1(I)$ que cumple con las condiciones dadas.

En efecto, el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix},$$

tiene solución única.

Introducimos una nueva base $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ para $P_1(I)$. Esta nueva base llamada **base nodal** se define por

$$\lambda_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2$$

y puesto $\lambda_1, \lambda_2 \in P_1(I)$ se tiene explícitamente que

$$\lambda_1(x) = \frac{x_1 - x}{x_2 - x_1}, \quad \lambda_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

de esta manera cada función λ_j, $j = 1, 2$ es lineal y toma valores 0 y 1. Luego, v se puede escribir como sigue

$$v(x) = \alpha_1 \lambda_1(x) + \alpha_2 \lambda_2(x).$$

El espacio de funciones polinomiales lineales por tramos

Sea $I = [a, b]$ y los puntos $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ que definen una partición de I tales que

$$a = x_1 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$$

(nos referiremos a esto como una malla o mesh.). Teniendo en cuenta los subintervalos $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ de longitud $h_i = x_{i+1} - x_i$, definimos

$$V_h = \{v \in C^0(I) : v|_{I_i} \in P_1(I_i)\}$$

donde $C^0(I)$ es el espacio de funciones continuas definidas sobre I.

- Toda función v en V_h está **únicamente** determinado por sus valores nodales e inversamente para cualquier conjunto de valores nodales existe una función en V_h con estos valores nodales.

Introducimos la base $\{\phi_j\}_{j=1}^{n+1}$ para V_h tal que

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

las funciones φ_i las llamamos funciones sombrero o “hat”.

Por construcción para una función v en V_h con valores nodales $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n+1}$ se tiene

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \varphi_i(x)$$

Además, explícitamente tenemos

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, & x \in I_1 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n}, & x \in I_n \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, & x \in I_i, \\ \dfrac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}}, & x \in I_{i+1}, \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \qquad i = 2, \ldots, n.$$

- Teniendo en cuenta $I = [x_1, x_2]$ y dada una función continua f en I, definimos:

$$\pi f(x) = f(x_1)\varphi_1(x) + f(x_2)\varphi_2(x)$$

es claro que $\pi f \in P_1(I)$.

Interpolación lineal

- Teniendo en cuenta $I = [x_1, x_2]$ y dada una función continua f en I, definimos:

$$\pi f(x) = f(x_1)\varphi_1(x) + f(x_2)\varphi_2(x)$$

  es claro que $\pi f \in P_1(I)$.

- Error de interpolación: $f - \pi f$

Interpolación lineal

- Teniendo en cuenta $I = [x_1, x_2]$ y dada una función continua f en I, definimos:

$$\pi f(x) = f(x_1)\varphi_1(x) + f(x_2)\varphi_2(x)$$

  es claro que $\pi f \in P_1(I)$.
- Error de interpolación: $f - \pi f$
- Usamos la $L^2(I)$-norma definida para cualquier función cuadrado integrable

$$||v||_{L^2(I)} = \left(\int_I v^2 dx\right)^{1/2}$$

Teorema 1.

πf satisface

$$\begin{aligned} \|f-\pi f\|_{L^2(I)} &\leq ch^2\|f''\|_{L^2(I)} \\ \|(f-\pi f)'\|_{L^2(I)} &\leq ch\|f''\|_{L^2(I)} \end{aligned}$$

c es una constante y $h = x_2 - x_1$.

Interpolación lineal continua por tramos

Dada una función continua f definida en $I = [a, b]$ y una partición $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ de I tal que

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = b$$

definimos

$$\pi f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\varphi_i(x)$$

Teorema 2.

πf satisface

$$\begin{aligned}
\left\|f-\pi f\right\|_{L^2(I)}^2 &\leq C\sum_{i=1}^{n} h_i^4 \left\|f''\right\|_{L^2(I_i)}^2 \\
\left\|(f-\pi f)'\right\|_{L^2(I)}^2 &\leq C\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \left\|f''\right\|_{L^2(I_i)}^2
\end{aligned}$$

L^2-proyección

Dada $f \in L^2(I)$, la L^2-proyección $P_h f \in V_h$ de f es definida por

$$\int_I (f - P_h f) v dx = 0, \ \forall v \in V_h.$$

Cálculo de $P_h f$

Para calcular $P_h f$ observar que la definición es equivalente a

$$\int_I (f - P_h f)\varphi_i dx = 0, \; i = 1, \ldots, n+1$$

y puesto que $P_h f \in V_h$ se tiene

$$P_h f = \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j \varphi_j, \; j = 1, 2, 3, \ldots, n+1$$

donde ξ_j deben determinarse. Notemos que para $i = 1, 2, \ldots, n+1$ se tiene

$$\int_I (f - P_h f)\varphi_i dx = 0 \Leftrightarrow \int_I f\varphi_i dx = \int P_h f \varphi_i dx$$

Trabajamos el lado derecho

$$\begin{aligned} \int_I P_h f \varphi_i dx &= \int_I \left(\sum_{j=1}^{n+1} \xi_j \varphi_j \right) \varphi_i dx \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j \int_I \varphi_i \varphi_j dx \end{aligned}$$

Introducimos

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_I \varphi_i \varphi_j dx, \ i,j = 1,2,\ldots,n+1 \\ b_i &= \int_I f \varphi_i dx, \ i = 1,2,\ldots,n+1 \end{aligned}$$

y tenemos el sistema

$$M\xi = b$$

donde nos referiremos a M como matriz de MASA y b vector de CARGA.

Fórmula de Simpson:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a)+4f(m)+f(b)}{6}h$$

donde $m = \frac{a+b}{2}$ y $h = b - a$.

Cálculo de las entradas $M_{i,j}$ por medio de la regla de Simpson:

$$
\begin{aligned}
M_{1,1} &= \int_a^b \varphi_i(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1^2(x)dx \\
&= \frac{\varphi_1^2(x_1) + 4\varphi_1^2(\frac{x_1+x_2}{2}) + \varphi_1^2(x)(x_2)}{6} h_1 \\
&= \frac{1+4(1/4)+0}{6} h_1 \\
&= \frac{h_1}{3}
\end{aligned}
$$

Análogamente:

$$
\begin{aligned}
M_{n+1,n+1} &= \frac{h_n}{3} \\
M_{i,i} &= \frac{h_i}{3} + \frac{h_{i+1}}{3}, \quad i = 2, 3, \ldots, n, \\
M_{i,i+1} &= \frac{h_{i+1}}{6}, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1 \\
M_{i+1,i} &= \frac{h_{i+1}}{6}, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1
\end{aligned}
$$

Matriz de masa

$$M = \begin{bmatrix} \frac{h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & 0 & \cdots & & 0 & 0 \\ \frac{h_1}{6} & \frac{h_1}{3}+\frac{h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & \cdots & & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_2}{6} & \frac{h_2}{3}+\frac{h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}}{3}+\frac{h_n}{3} & \frac{h_n}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & \frac{h_n}{6} & \frac{h_n}{3} \end{bmatrix}$$

$$M = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{h_1}{3} & \frac{h_1}{6} \\ \frac{h_1}{6} & \frac{h_1}{3} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M^{I_1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{h_2}{3} & \frac{h_2}{6} \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2}{3} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M^{I_2}} + \cdots + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{h_n}{3} & \frac{h_n}{6} \\ \frac{h_n}{6} & \frac{h_n}{3} \end{bmatrix}}_{M^{I_n}}$$

$$M = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{h_1}{3} & \frac{h_1}{6} \\ \frac{h_1}{6} & \frac{h_1}{3} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M^{I_1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{h_2}{3} & \frac{h_2}{6} \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2}{3} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M^{I_2}} + \cdots + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{h_n}{3} & \frac{h_n}{6} \\ \frac{h_n}{6} & \frac{h_n}{3} \end{bmatrix}}_{M^{I_n}}$$

Cada matriz es obtenida al restringir la integración al subintervalo I_i.

Notemos que sobre cada elemento I_i se tienen los bloques

$$M^{I_i} = \frac{h_i}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

donde h_i es la longitud del intervalo I_i. También M^{I_i} es llamado elemento de masa local y el ensamblaje es la suma de estos bloques y forman M que es la matriz de masa del global.

Algoritmo

1. Crear malla
2. Calcular M y b
3. Resolver $M\xi = b$
4. Establecer $P_h f = \sum_{j=0}^{n} \xi_j \varphi_j$.

Teorema 3.

La L^2-proyección $P_h f$ satisface el mejor resultado de aproximación

$$||f - P_h f||_{L^2(I)} \leq ||f - v||_{L^2(I)}, \ \forall v \in V_h$$

$P_h f$ es el minimizador de

$$\min_{v \in V_h} ||f - v||_{L^2(I)}$$

y se dice que $P_h f$ aproxima a f en el sentido de los mínimos cuadrados.

Estimador de error apriori

Teorema 3.

La L^2-proyección $P_h f$ satisface el mejor resultado de aproximación

$$||f - P_h f||_{L^2(I)} \leq ||f - v||_{L^2(I)}, \; \forall v \in V_h$$

$P_h f$ es el minimizador de

$$\min_{v \in V_h} ||f - v||_{L^2(I)}$$

y se dice que $P_h f$ aproxima a f en el sentido de los mínimos cuadrados.

Teorema 4.

La L^2-proyección $P_h f$ satisface el estimado

$$||f - P_h f||^2_{L^2(I)} \leq c \sum_{i=0}^{n} h_i^4 ||f''^2_{L^2(I_i)}$$

Referencias I

- Malte Braack, *Finite Elements I & parts of II.* Scriptum, 02.07.2018
- Mats. G. Larson - Fredrik Bengzon. *The Finite Element Method Theory, Implementation and Applications*. 2013
- Susanne C. Brenner, Ridgway Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. 2008