Análisis numérico de elementos finitos

Dr. Stefan Frei
Department of Mathematics
University College London

Curso compacto, Parte V
Universidad Nacional Agraria La Molina
Agosto 2-8, 2017

Ecuaciones de Stokes

$$\begin{aligned} -\nu \Delta v + \nabla p &= f \text{ in } \Omega, \\ \operatorname{div} v &= 0 \text{ in } \Omega. \end{aligned}$$

Formulación variacional:

Hallar $v \in \mathcal{V}, p \in \mathcal{L}$ *tal que*

$$\begin{aligned} \nu(\nabla v, \nabla \phi)_\Omega - (p, \operatorname{div} \phi)_\Omega &= (f, \phi)_\Omega \quad \forall \phi \in \mathcal{V}, \\ (\operatorname{div} v, \xi)_\Omega &= 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Sistemas de puntos de silla

Consideramos el problema general con espacios Hilbert $\mathcal{V}$ y $\mathcal{L}$:
Hallar $v \in \mathcal{V}, p \in \mathcal{L}$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(v,\phi) + b(p,\phi) &= (f,\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{V}, \\ b(v,\xi) &= (g,\xi) \quad \forall \xi \in \mathcal{L}. \end{aligned} \tag{1}$$

Condiciones:

- $a(\cdot,\cdot)$ es $\mathcal{V}$-coercivo: Existe $\alpha > 0$ tal que
$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$
- La forma $b(\cdot,\cdot)$ cumple una condición inf-sup (Babuška-Brezzi): Existe $\beta > 0$ tal que
$$\sup_{\phi \in \mathcal{V}} \frac{b(p,\phi)}{\|\phi\|_{\mathcal{V}}} \geq \beta \|p\|_{\mathcal{L}} \quad \forall \phi \in \mathcal{L}.$$

Teorema (Babuška,Brezzi)

Bajo estas dos condiciones existe una solución única (v,p) de (1) para cada $f \in \mathcal{V}^*, g \in \mathcal{L}^*$ y se cumple

$$\|v\|_{\mathcal{V}} + \|p\|_{\mathcal{L}} \leq C\{\|f\|_{\mathcal{V}^*} + \|g\|_{\mathcal{L}^*}\}.$$

Overview

Espacios conformes $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$, $\mathcal{L}_h \subset \mathcal{L}$:

- La **coercividad** de $a(\cdot,\cdot)$ se hereda automaticamente para $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$
- La **condición inf-sup** es una relación entre los espacios $\mathcal{V}_h, \mathcal{L}_h$ que tiene que ser probado

Si se cumple la condición inf-sup

$$\sup_{\phi_h \in \mathcal{V}_h} \frac{(p_h, \mathrm{div}\phi_h)}{\|\phi_h\|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta \|p_h\|_\Omega \quad \forall \phi_h \in \mathcal{L}_h$$

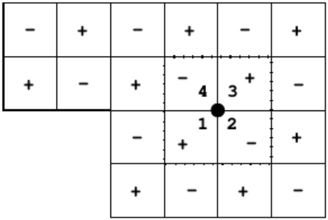
el teorema de Babuška-Brezzi implica **existencia y unicidad** para la formulación variacional

Los elementos conformes más simples no son *inf-sup* estables ($\mathcal{V}_h - \mathcal{L}_h$)

- Elementos $P_1 - P_0$ sobre triángulos y $Q_1 - Q_0$ sobre quadriláteros
  Pruebe en triangulaciones en quadriláteros uniformes:

$$\sup_{\phi_h \in \mathcal{V}_h} \frac{(\xi_h, \mathrm{div}\phi_h)}{\|\phi_h\|_{H^1(\Omega)}} = 0$$

para la función $\xi \in \mathcal{L}_h$ definido por $\xi_h = \pm 1$ alternantamente ("checkerboard instability")



- Elementos $P_k - P_k$ en triángulos y $Q_k - Q_k$ en quadriláteros

Teorema (Fortin)

Sea $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ y $\mathcal{L}_h \subset \mathcal{L}$. Si existe una proyección $\pi_h : \mathcal{V} \to \mathcal{V}_h$ con las siguentes propiedades:

$$\begin{aligned} &\|\nabla \pi_h \phi\| \leq c_\pi \|\nabla \phi\| \quad \forall \phi \in \mathcal{V} && \text{estabilidad } H^1 \\ &(\mathrm{div}(\phi - \pi_h \phi), \xi_h) = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{V},\, \xi_h \in \mathcal{L}_h && \text{ortogonalidad discreta} \end{aligned}$$

Entonces, se cumple la *condición inf-sup* discreta

$$\frac{\gamma}{c_\pi}\|p_h\| \leq \sup_{\phi_h \in \mathcal{V}_h} \frac{(p_h, \mathrm{div}\phi_h)}{\|\nabla \phi_h\|}$$

Prueba: Utilizamos la *condición inf-sup* continuo ($p_h \in \mathcal{L}_h \subset \mathcal{L}$)

$$\gamma \|p_h\| \leq \sup_{\phi \in V} \frac{(p_h, \mathrm{div}\phi)}{\|\nabla \phi\|}$$

Introducimos $\pm \pi_h \phi \in V_h$ y utilizamos las dos condiciones:

$$\begin{aligned}
\gamma \|p_h\| &\leq \sup_{\phi \in V} \left(\frac{\overbrace{(p_h, \mathrm{div}(\phi - \pi_h \phi))}^{=0}}{\|\nabla \phi\|} + \frac{(p_h, \mathrm{div}(\pi_h \phi))}{\|\nabla \phi\|} \right) \\
&= \sup_{\phi \in V} \frac{(p_h, \mathrm{div}(\pi_h \phi) \|\nabla \pi_h \phi\|}{\|\nabla \pi_h \phi\| \, \|\nabla \phi\|} \\
&\leq c_\pi \sup_{\phi \in V} \frac{(p_h, \mathrm{div}(\pi_h \phi))}{\|\nabla \pi_h \phi\|} \leq c_\pi \sup_{\phi_h \in V_h} \frac{(p_h, \mathrm{div}(\phi_h))}{\|\nabla \phi_h\|}
\end{aligned}$$

Criterio de Fortin (Prueba)

Prueba: Utilizamos la *condición inf-sup* continuo ($p_h \in \mathcal{L}_h \subset \mathcal{L}$)

$$\gamma \|p_h\| \leq \sup_{\phi \in V} \frac{(p_h, \mathrm{div}\phi)}{\|\nabla \phi\|}$$

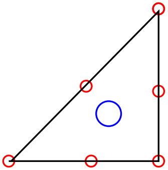
Introducimos $\pm \pi_h \phi \in V_h$ y utilizamos las dos condiciones:

$$\begin{aligned}
\gamma \|p_h\| &\leq \sup_{\phi \in V} \left(\frac{\overbrace{(p_h, \mathrm{div}(\phi - \pi_h \phi))}^{=0}}{\|\nabla \phi\|} + \frac{(p_h, \mathrm{div}(\pi_h \phi))}{\|\nabla \phi\|} \right) \\
&= \sup_{\phi \in V} \frac{(p_h, \mathrm{div}(\pi_h \phi)\|\nabla \pi_h \phi\|}{\|\nabla \pi_h \phi\| \, \|\nabla \phi\|} \\
&\leq c_\pi \sup_{\phi \in V} \frac{(p_h, \mathrm{div}(\pi_h \phi))}{\|\nabla \pi_h \phi\|} \leq c_\pi \sup_{\phi_h \in V_h} \frac{(p_h, \mathrm{div}(\phi_h))}{\|\nabla \phi_h\|}
\end{aligned}$$

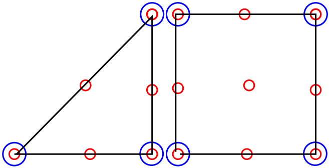
Elementos inf-sup estables

Con el criterio de Fortin podemos mostrar que los siguientes elementos son inf-sup estables

- Elemento $P_2 - P_0$ en triángulos, $Q_2 - P_0$ en quadriláteros



- Elementos **Taylor-Hood** $P_2 - P_1$ y $Q_2 - Q_1$



Más general: $Q^k - Q^{k-1}$ en quadriláteros ($k \geq 2$), pero solo $P^k - P^{k-2}$ en triángulos ($k \geq 3$)

Elementos con funciones "bulbos"

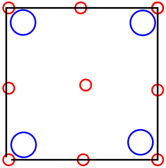
- El elemento estable con menos grados de libertad por elemento es el **elemento "MINI"** $P_1^b - P_1$, donde

$$P_1^b = P_1 \bigoplus \text{span}(xy(h-x-y))$$

- Los elementos $P_k^b - P_{k-1}$, donde

$$P_k^b = P_k \bigoplus \text{span}(xy(h-x-y))$$

- Elementos con **presión discontinua** $Q_k - P_{k-1}^{dc}$, $Q_k - Q_{k-1}^{dc}$, $P_k^b - P_{k-1}^{dc}$



Elementos con funciones "bulbos"

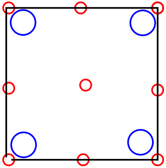
- El elemento estable con menos grados de libertad por elemento es el **elemento "MINI"** $P_1^b - P_1$, donde

$$P_1^b = P_1 \bigoplus \mathrm{span}(xy(h-x-y))$$

- Los elementos $P_k^b - P_{k-1}$, donde

$$P_k^b = P_k \bigoplus \mathrm{span}(xy(h-x-y))$$

- Elementos con **presión discontinua** $Q_k - P_{k-1}^{dc}$, $Q_k - Q_{k-1}^{dc}$, $P_k^b - P_{k-1}^{dc}$



Elementos con presión discontinua

Si el espacio de la presión es discontinua

$$\mathcal{L}_h = \{v \in \mathcal{L}, v_{|T} \in P_k(T) \,\forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

tenemos **conservación de masa local** en cada elemento T

Prueba: Podemos elegir

$$\xi_h = \begin{cases} 1 \text{ en } T, \\ 0 \text{ en } \Omega \setminus T \end{cases}$$

cómo función test:

$$0 = \int_\Omega \operatorname{div} v_h \, \xi_h \, dx = \int_T \operatorname{div} v_h \, dx = \int_{\partial T} v_h \cdot n \, dx$$

Overview

Ortogonalidad de Galerkin

Problema continuo: *Hallar* $v \in \mathcal{V}, p \in \mathcal{L}$ *tal que*

$$\nu(\nabla v, \nabla \phi)_\Omega - (p, \mathrm{div}\phi)_\Omega = (f, \phi)_\Omega \quad \forall \phi \in \mathcal{V},$$
$$(\mathrm{div} v, \xi)_\Omega = 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{L}.$$

Problema discreto: *Hallar* $v_h \in \mathcal{V}_h, p_h \in \mathcal{L}_h$ *tal que*

$$\nu(\nabla v_h, \nabla \phi_h)_\Omega - (p_h, \mathrm{div}\phi_h)_\Omega = (f, \phi_h)_\Omega \quad \forall \phi_h \in \mathcal{V}_h,$$
$$(\mathrm{div} v_h, \xi_h)_\Omega = 0 \quad \forall \xi_h \in \mathcal{L}_h.$$

Ortogonalidad de Galerkin

$$\nu(\nabla(v - v_h), \nabla \phi_h)_\Omega - ((p - p_h), \mathrm{div}\phi_h)_\Omega$$
$$+ (\mathrm{div}(v - v_h), \xi_h)_\Omega = 0 \quad \forall \phi_h \in \mathcal{V}_h, \xi_h \in \mathcal{L}_h.$$

Error en la norma de energía

Si utilizamos polinómios P_{m_v} para la velocidad y P_{m_p} para la presión:

$$\nu\|\nabla(v - v_h)\|_\Omega + \|p - p_h\|_\Omega \leq c h^{m_v}\|\nabla^{m_v+1}v\|_\Omega + c h^{m_p+1}\|\nabla^{m_p+1}p\|_\Omega$$

- Los errores de la velocidad y la presión no son separables. Un método optimal (con respeto a eficiencia) serían elementos $P_m - P_{m-1}$ $(m_v = m_p + 1)$
- Regularidad $v \in H^{m+1}(\Omega) \leftrightarrow p \in H^m(\Omega)$

Error L^2 de la velocidad

Para estimar el error de la velocidad en $L^2(\Omega)$ utilizamos un **problema dual**

Hallar $z^v \in \mathcal{V}, z^p \in \mathcal{L}$ *tal que*

$$\nu(\nabla\phi, \nabla z^v)_\Omega - (\xi, \mathrm{div} z^v)_\Omega + (\mathrm{div}\phi, z^p)_\Omega = \left(\frac{v - v_h}{\|v - v_h\|}, \phi\right)_\Omega \quad \forall\phi \in \mathcal{V}, \xi \in \mathcal{L}.$$

Con $\phi = v - v_h$ y $\xi = p - p_h$ y utilizando la ortogonalidad de Galerkin obtenemos

$$\begin{aligned}\|v - v_h\|_\Omega &\leq Ch\left(\nu\|\nabla(v - v_h)\|_\Omega + \|p - p_h\|_\Omega\right)\\ &\leq ch^{m_v+1}\|\nabla^{m_v+1} v\|_\Omega + ch^{m_p+2}\|\nabla^{m_p+1} p\|_\Omega.\end{aligned}$$

Overview

Elementos "equal order"

"Equal order" elements $P_k - P_k$, $Q_k - Q_k$

- Implementación simple
- Sistema en bloques

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} \begin{pmatrix} v_i^x \\ v_i^y \\ p_i \end{pmatrix} \phi_h^i(x)$$

- Ventajoso para métodos eficientes de solución (Método multi-malla)
- Problema: No son *inf-sup* estables

Revisamos la prueba del criterio de Fortin:

$$\begin{aligned}\gamma\|p_h\| &\le \sup_{\phi\in V}\frac{(p_h,\mathrm{div}\phi)}{\|\nabla\phi\|}\\ &\le \sup_{\phi\in V}\left(\frac{\overbrace{(p_h,\mathrm{div}(\phi-\pi_h\phi))}^{\neq 0}}{\|\nabla\phi\|}+\frac{(p_h,\mathrm{div}(\pi_h\phi))}{\|\nabla\phi\|}\right)\\ &= \sup_{\phi\in V}\frac{(p_h,\mathrm{div}(\phi-\pi_h\phi))}{\|\nabla\phi\|}+c_\pi\sup_{\phi_h\in V_h}\frac{(p_h,\mathrm{div}\phi_h)}{\|\nabla\phi_h\|}\end{aligned}$$

La primera parte no es zero en general. Utilizamos integración por partes y elegimos π_h cómo interpolación de Clément

$$\begin{aligned}\frac{(p_h,\mathrm{div}(\phi-\pi_h\phi))}{\|\nabla\phi\|} &= \frac{(\nabla p_h,\phi-\pi_h\phi)}{\|\nabla\phi\|}\\ &\le ch\frac{\|\nabla p_h\|_\Omega\|\nabla\phi\|_\Omega}{\|\nabla\phi\|_\Omega}=ch\|\nabla p_h\|_\Omega.\end{aligned}$$

Condición inf-sup modificada (cont.)

Para todos los pares $\mathcal{V}_h - \mathcal{L}_h$ se cumple la condición *inf-sup* modificada

$$\gamma_h \|p_h\| \leq \sup_{\phi_h \in V_h} \frac{(p_h, \mathrm{div}\phi_h)}{\|\nabla \phi_h\|} + h\|\nabla p_h\|_\Omega.$$

Existencia y unicidad

El problema discreta *Hallar* $v_h \in \mathcal{V}_h, p_h \in \mathcal{L}_h$ *tal que*

$$\begin{aligned} \nu(\nabla v_h, \nabla \phi_h)_\Omega - (p_h, \mathrm{div}\phi_h)_\Omega &= (f, \phi_h)_\Omega \quad \forall \phi_h \in \mathcal{V}_h, \\ (\mathrm{div} v_h, \xi_h)_\Omega + \alpha h^2 (\nabla p_h, \nabla \xi_h)_\Omega &= 0 \quad \forall \xi_h \in \mathcal{L}_h. \end{aligned}$$

tiene una solución única.

Para todos los pares $\mathcal{V}_h - \mathcal{L}_h$ se cumple la condición *inf-sup* modificada

$$\gamma_h \|p_h\| \leq \sup_{\phi_h \in V_h} \frac{(p_h, \operatorname{div} \phi_h)}{\|\nabla \phi_h\|} + h \|\nabla p_h\|_\Omega.$$

Existencia y unicidad

El problema discreta *Hallar* $v_h \in \mathcal{V}_h, p_h \in \mathcal{L}_h$ *tal que*

$$\nu(\nabla v_h, \nabla \phi_h)_\Omega - (p_h, \operatorname{div} \phi_h)_\Omega = (f, \phi_h)_\Omega \quad \forall \phi_h \in \mathcal{V}_h,$$
$$(\operatorname{div} v_h, \xi_h)_\Omega + \alpha h^2 (\nabla p_h, \nabla \xi_h)_\Omega = 0 \quad \forall \xi_h \in \mathcal{L}_h.$$

tiene una solución única.

Error de discretización + estabilización

La estabilización causa un error adicional

- Ortogonalidad de Galerkin

$$\nu(\nabla(v-v_h),\nabla\phi_h)_\Omega - ((p-p_h),\mathrm{div}\phi_h)_\Omega + (\mathrm{div}(v-v_h),\xi_h)_\Omega \\ - \alpha h^2(\nabla p_h,\nabla\xi_h)_\Omega = 0 \quad \forall\phi_h\in\mathcal{V}_h,\xi_h\in\mathcal{L}_h.$$

- Error en la norma de energía, restringida a orden 1

$$\nu\|\nabla(v-v_h)\|_\Omega + \|p-p_h\|_\Omega \\ \le ch^{m_v}\|\nabla^{m_v+1}v\|_\Omega + ch^{m_p+1}\|\nabla^{m_p+1}p\|_\Omega + ch\|\nabla p\|_\Omega$$

- Error en la norma de $L^2(\Omega)$, restringida a orden 2

$$\|v-v_h\|_\Omega \le ch^{m_v+1}\|\nabla^{m_v+1}v\|_\Omega + ch^{m_p+2}\|\nabla^{m_p+1}p\|_\Omega + ch^2\|\nabla p\|_\Omega$$

- Mayor orden de convergencía para estabilizaciones más complejas (por ejemplo *Local projection stabilization* (LPS))

Conclusión

Ecuaciones de Stokes/Navier-Stokes:

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v - \nu \Delta v - \nabla p = f \text{ en } \Omega,$$
$$\mathrm{div} v = 0 \text{ en } \Omega.$$

- Buena aproximación para la **mayoría de fluidos y gases**
- La **condición *inf-sup*** es esenciál para la teoría de las ecuaciones

$$\sup_{\phi \in \mathcal{V}} \frac{(\mathrm{div}\phi, p)}{\|\phi\|_{\mathcal{V}}} \geq \beta \|p\|_{\mathcal{L}} \quad \forall \phi \in \mathcal{L}.$$

- Condición natural para partes $\Gamma_N \subset \partial\Omega$, donde no se impone condiciones de Dirichlet (*do-nothing condition*)

$$\nu \partial_n v - pn = 0 \quad \text{ en } \Gamma_N.$$

- Dos posibilidades para obtener un sistema discreto **bien-puesto**
  1. Espacios $\mathcal{V}_h - \mathcal{L}_h$ que cumplen una **condición *inf-sup* discreta**
  2. Agregar **terminos de estabilización** a la formulación variacional

Espacios $\mathcal{V}_h - \mathcal{L}_h$ que cumplen una **condición *inf-sup* discreta**

$$\sup_{\phi_h \in \mathcal{V}_h} \frac{(\mathrm{div}\phi_h, p_h)}{\|\phi_h\|_{\mathcal{V}}} \geq \beta_h \|p_h\|_{\mathcal{L}} \quad \forall \phi_h \in \mathcal{L}_h.$$

- $\mathcal{V}_h$ tiene que ser **suficientemente grande** en relación a $\mathcal{L}_h$
- **Criterio de Fortin** para probar que elementos son *inf-sup* estables
- Elementos de **Taylor-Hood** son populares: $P_2 - P_1$ y $Q_k - Q_{k-1}$
- Agregando funciones con "bulbos": $P_k^b - P_{k-1}$, MINI-element $P_1^b - P_1$
- Estimación del error

$$\nu \|\nabla(v - v_h)\|_\Omega + \|p - p_h\|_\Omega \leq ch^{m_v} \|\nabla^{m_v+1} v\|_\Omega + ch^{m_p+1} \|\nabla^{m_p+1} p\|_\Omega$$

  favorece elementos $P_m - P_{m-1}$ o $Q_m - Q_{m-1}$

Estabilización

- "Equal-order elements" facil a implementar, particularmente para métodos de solución eficientes
- Estabilización simple $S(p, \xi) = \alpha h^2 (\nabla p, \nabla \xi)$ limita el orden de convergencia