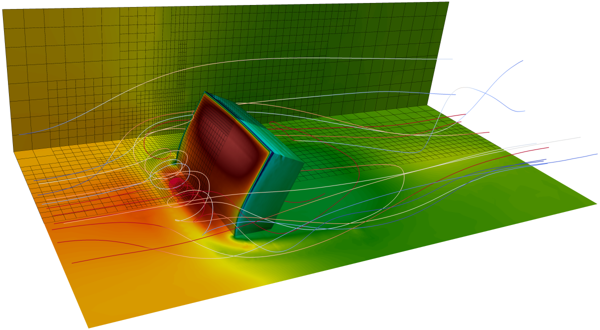

Elementos finitos 1D

Mg. Dandy Rueda Castillo

Diciembre 11, 2018

Objetivos

1. Efectuar la formulación variacional de un PVF.
2. Introducir el método del elemento finito.
3. Implementar un programa computacional para resolver la ecuación de Poisson en 1D con valores de frontera de Dirichlet.

Método del elemento finito

Consideremos el problema de valor de frontera

$$\begin{cases} -u'' = f, \quad x \in I = [0, L] \\ \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

Formulación variacional

Multiplicamos la ecuación por una función de prueba v, la cual se anula en los extremos del intervalo, e integramos por partes

$$\begin{aligned}
\int_0^L fvdx &= -\int_0^L u'' vdx \\
&= \int_0^L u' v' dx - u'(L)\, v(L) + u'(0)\, v(0) \\
&= \int_0^L u' v' dx
\end{aligned}$$

Consideremos el espacio:

$$V = \left\{ v : ||v||^2_{L^2(I)} < \infty,\ ||v'||^2_{L^2(I)} < \infty \right\}$$

La más grande colección de funciones v tal que $v(0) = v(L) = 0$ está dada por el espacio

$$V_0 = \left\{ v : ||v||^2_{L^2(I)} < \infty,\ ||v'||^2_{L^2(I)} < \infty,\ v(0) = v(L) = 0 \right\}$$

Notemos que u pertenece a esta clase de funciones.

Problema variacional

Encontrar $u \in V$ tal que

$$\int_0^L u' v' dx = \int_0^L fv dx, \ \ \forall v \in V_0$$

Introducimos el espacio

$$V_{h,0} = \{v \in V_h : v(0) = v(L) = 0\}$$

donde una base es el conjunto de funciones sombrero $\{\varphi_i\}_{i=2}^{n}$. Como $V_{h,0} \subset V_0$ y $V_h \subset V$, en la formulación variacional remplazamos V_0 por $V_{h,0}$, V por V_h y el problema se convierte en el método de elemento finito:

Encontrar $u_h \in V_h$ tal que

$$\int_0^L u_h' v' dx = \int_0^L fvdx, \ \ \forall v \in V_{h,0}$$

y lo llamaremos el método de Galerkin.

Para hallar u_h notemos que

$$\int_I u_h' \varphi_i' dx = \int_I f \varphi_i dx, \, i = 2, \, 3, \ldots, n$$

y puesto que $u_h \in V_h$ se tiene

$$u_h = \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j \varphi_j$$

donde los coeficientes se deben determinarse.

En efecto, para $i = 2,\ 3, \ldots, n$ se tiene

$$\int_I f\varphi_i dx = \int_I u_h' \varphi_i' dx = \int_I \left(\sum_{j=1}^{n+1} \xi_j \varphi_j' \right) \varphi_i' dx = \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j \int_I \varphi_j' \varphi_i' dx$$

Introduciendo la notación

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_I \varphi_j' \varphi_i' dx \\ b_i &= \int_I f \varphi_i dx \end{aligned}$$

¿incompleta la idea?
Tenemos el sistema

$$A\xi = b$$

Nos referiremos a A como la matriz de rigidez y a b como el vector de carga.

Teorema 1.

La aproximación u_h satisface la condición de ortogonalidad

$$\int_I (u - u_h)' \, v' \, dx = 0, \ \forall v \in V_{h,0}$$

Teorema 1.

La aproximación u_h satisface la condición de ortogonalidad

$$\int_I (u-u_h)'\, v'\, dx = 0, \ \forall v \in V_{h,0}$$

Teorema 2.

La solución u_h satisface el mejor resultado de aproximación

$$\left\| (u-u_h)' \right\|_{L^2(I)} \leq \left\| (u-v)' \right\|_{L^2(I)}, \quad \forall v \in V_{h,0}$$

Teorema 1.

La aproximación u_h satisface la condición de ortogonalidad

$$\int_I (u - u_h)' \, v' \, dx = 0, \; \forall v \in V_{h,0}$$

Teorema 2.

La solución u_h satisface el mejor resultado de aproximación

$$\left\|(u - u_h)'\right\|_{L^2(I)} \leq \left\|(u - v)'\right\|_{L^2(I)}, \quad \forall v \in V_{h,0}$$

Teorema 3.

La solución u_h satisface el estimado

$$\left\|(u - u_h)'\right\|_{L^2(I)} \leq C \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \left\|u''\right\|_{L^2(I)}$$

Referencias I

- Mats. G. Larson - Fredrik Bengzon. *The Finite Element Method Theory, Implementation and Applications*. 2013