

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA



Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

SEMINARIO DE MATEMÁTICA PURA Y APLICADA II

Aproximación numérica del Problema de Poisson usando el Método de Elementos Finitos

Alumno: Brian Loja Cruzado

Código : 20071199I

Nota:

Asesor: Mg. Fidel Jara H.

2012-II

LIMA-PERU

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi familia por apoyarme en este trabajo y en segundo lugar también tengo que agradecer a mi asesor por apoyarme con algunas recomendaciones en este trabajo.

Índice general

1. Generalidades	4
1.1. Espacios Banach y Hilbert	4
1.2. Funcionales Lineales y Espacios Duales	5
1.3. Formas Bilineales	6
1.4. Espacios L^p	6
1.5. Espacios de Sobolev $W^{1,p}$	7
1.6. Definiciones y/o Teoremas extras que podemos necesitar de aquí en adelante	9
2. Resolución Numérica de Problemas Variacionales usando El Método de Galerkin con Elementos Finitos	10
2.1. El método de Galerkin con Elementos Finitos	10
2.2. Estimación del Error	12
2.3. Espacios de Elementos Finitos	12
2.3.1. Construcción de bases de elementos finitos	13
2.3.2. Ejemplos de elementos finitos	15
2.3.3. Cálculo de la matriz de rigidez	16
2.4. Estimaciones del error de el método de Galerkin usando Elementos Finitos	17
2.5. Ejemplo Aplicativo del Método de Galerkin con Elementos Finitos . .	18
2.5.1. Pasos para aplicar el Método correctamente	18
2.5.2. Ejemplo de Aplicación	18
3. Resolución Numérica del problema de Poisson usando el Método de Elementos Finitos	28
3.1. Ecuación de Poisson y su Formulación variacional	28
3.2. Elementos Triangulares Lineales	30
3.2.1. Hallando elementos previos que necesitaremos posteriormente	31
3.2.2. Como hallar matriz de rigidez y el vector de cargas	32
3.3. Ejemplo Aplicativo	34
4. Conclusiones	40
Bibliografía	41

Capítulo 1

Generalidades

En este capítulo describiremos rápidamente las herramientas del Análisis Funcional que necesitaremos en los capítulos siguientes , y algunas herramientas de los Espacios de Sobolev que necesitaremos , las demostraciones se pueden ver en la bibliografía que se cita en cada demostración . Remarcamos que el trabajo sólo usará las herramientas más no hará un estudio de éstas y también recordemos que en el caso de \mathbb{R} las derivadas parciales son derivadas comunes y corrientes y en \mathbb{R}^2 para adelante las derivadas son parciales .

1.1. Espacios Banach y Hilbert

Definición 1.1.1 (Espacio normado) Sea V un espacio vectorial real, $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface para todo $u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\|u\| \geq 0$; $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2. $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Desigualdad Triangular)

Luego se define a $\|\cdot\|$ como una norma sobre V , y al par $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado.

Definición 1.1.2 (Espacio de Banach) Un espacio normado $(V, \|\cdot\|)$ es llamado Espacio de Banach si V es completo con la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$.

Definición 1.1.3 (Espacio Producto Interno) Sea V un espacio vectorial real, $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface para todo $u, v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $(u, u) \geq 0$; $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2. $(u, v) = (v, u)$

$$3. (u + v, w) = (u, w) + (v, w)$$

$$4. (\alpha u, v) = \alpha(u, v)$$

Luego se define a $(.,.)$ como un producto interno sobre V , y al par $(V, (.,.))$ un espacio producto interno.

Observación:

Un producto interno sobre V , define una norma mediante la fórmula:

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}, \quad u \in V$$

A esta norma se le llama norma inducida (por el producto interno).

Definición 1.1.4 (Espacio de Hilbert) *Un espacio producto interno $(V, (.,.))$ es llamado Espacio de Hilbert si para la norma inducida por el producto interno se cumple que $(V, \|\cdot\|)$ es un Espacio de Banach.*

1.2. Funcionales Lineales y Espacios Duales

Aqui damos los conceptos y propiedades de las funcionales lineales y espacios duales, tomando como referencia [1].

Definición 1.2.1 (Funcional lineal) *Sea V un espacio vectorial real, una función $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada una funcional lineal si para todo $u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$L(u + \alpha v) = L(u) + \alpha L(v)$$

Definición 1.2.2 (Funcional lineal acotada) *Sea V un espacio normado, $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ una funcional lineal es llamada acotada si existe un $C > 0$ tal que $|L(u)| \leq C\|u\|$ para todo $u \in V$*

Observación:

Es equivalente decir funcional lineal acotada o funcional lineal continua.

Definición 1.2.3 (Espacio Dual) *Sea V un espacio normado, el espacio dual de V se define como el conjunto de las funcionales lineales continuas, y se denota por V' .*

Proposición 1.2.1 *Si para $L \in V'$ consideramos $\|L\|_{V'} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{|Lv|}{\|v\|_V}$ entonces $(V', \|\cdot\|_{V'})$ es un espacio de Banach.*

Corolario 1.2.1 *Si $L \in V'$ entonces $|Lv| \leq \|L\|_{V'}\|v\|$ para todo $v \in V$.*

1.3. Formas Bilineales

Definición 1.3.1 (Forma bilineal) Sea V un espacio vectorial, una función $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ se le llama forma bilineal si cumple para todo $u, v, w \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $b(\alpha u + \beta v, w) = \alpha b(u, w) + \beta b(v, w)$
2. $b(u, \alpha v + \beta w) = \alpha b(u, v) + \beta b(u, w)$

Si además cumple que $\forall u, v \in V : b(u, v) = b(v, u)$ se dice que es simétrica.

Definición 1.3.2 Una forma bilineal $b(.,.)$ en un espacio vectorial normado V , se dice que es acotada (o continua); si $\exists C > 0$ tal que:

$$|b(v, w)| \leq C \|v\|_V \|w\|_V \quad ; \quad \forall v, w \in V$$

Definición 1.3.3 Una forma bilineal $b(.,.)$ en un espacio normado lineal H es llamada coerciva en $V \subset H$ si $\exists \alpha > 0$ tal que:

$$|b(v, v)| \geq \alpha \|v\|_H \quad \forall v \in H$$

Teorema 1.3.1 (Teorema de Lax Milgram) Siendo V un espacio de Hilbert V dotado de un producto interno , y $b(.,.)$ una bilineal contiuna y Coerciva . Tambien tenemos una funcional $F \in V'$ que es continua y lineal. Entonces existe un único $u \in V$ tal que:

$$b(u, v) = F(v) \quad \forall u \in V$$

Demostración : Ver [5].

1.4. Espacios L^p

Definición 1.4.1 (Espacios L^p) Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$ se define L^p como:

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ medible y } \|f\|_{L^p} < \infty\}$$

Donde $\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p}$.

Definición 1.4.2 (Espacios L^∞) Cuando $p = \infty$ se define L^∞ como :

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \|f\|_{L^\infty} < \infty\}$$

Donde $\|f\|_{L^\infty} = \sup\{|f(x)|, x \in \Omega\}$

Teorema 1.4.1 (Desigualdad de Holder) Sean $f, g \in L^p$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $f \cdot g \in L^1$ y tenemos que:

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^p}$$

Demostración : Ver [2].

Teorema 1.4.2 (Desigualdad de Cauchy) Si $f, g \in L^2$ Entonces fg es integrable y :

$$|\int fg| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

Demostración : Ver [3].

Teorema 1.4.3 (Desigualdad de Minkowski) Si $f, h \in L^p$, $p \geq 1$ entonces $f + h \in L^p$ y:

$$\|f + h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p$$

Demostración : Ver [2].

Teorema 1.4.4 Un espacio L^p es un espacio de Banach $\forall 1 \leq p \leq \infty$

Demostración : Ver [2].

1.5. Espacios de Sobolev $W^{1,p}$

Definición 1.5.1 Se define a $C(\Omega)$ como el espacio de las funciones continuas en Ω es decir:

$$C(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua}\}$$

Definición 1.5.2 Se define a $C^k(\Omega)$ como el espacio de las funciones k veces continuamente diferenciables en Ω .

Definición 1.5.3 Se define a $C^\infty(\Omega)$ como el espacio de las funciones infinitamente diferenciables en Ω .

Definición 1.5.4 Se define a $C_c(\Omega)$ o $\mathcal{D}(\Omega)$ llamado también el espacio de las funciones continuas en Ω y con soporte compacto como:

$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega), f(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus K \text{ donde } K \subset \Omega \text{ es un compacto}\}$$

Definición 1.5.5 Se define $C_c^\infty(\Omega)$ como:

$$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$$

Ahora definamos que es un Espacio de Sobolev

Definición 1.5.6 Sea Ω un conjunto acotado y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}$ se define por:

$$W^{1,p} = \{u \in L^p(\Omega), \exists g_i, i = 1, 2, \dots, n \in L^p(\Omega) \setminus \int u \varphi' = - \int g_i \varphi\} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Donde $\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ y se denota a g_i como $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, y recordemos que lo de g_i es solo notación mas no es la derivada (parcial o normal) de u

Teorema 1.5.1 El espacio $W^{1,p}$ es un Espacio de Hilbert

Demostración : Ver [2].

Definición 1.5.7 Se define el espacio $H^1(\Omega)$ como lo que sigue:

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

De aquí se puede ver que se puede definir el Espacio de Sobolev de Orden 1 ($H^1(\Omega)$) de la siguiente manera:

Definición 1.5.8 Se define al espacio Sobolev de orden 1 como:

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad i = 1, 2\}$$

También de la misma manera que se define el Espacio de Sobolev de Orden 1 se puede definir el Espacio de Sobolev de Orden 2 como lo siguiente:

Definición 1.5.9 Se define el espacio Sobolev de orden 2 como:

$$H^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) / \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \in L^2(\Omega)\}$$

Observación: A la función g de la definición 1.2.4 se le llama la derivada en el sentido distribucional de la función u .

Observación: El espacio $W^{1,p}$ está dotado por la norma:

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

Y el espacio H^1 está dotado de la norma siguiente:

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

1.6. Definiciones y Teoremas extras que podemos necesitar de aquí en adelante

Definición 1.6.1 Sea $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ el soporte de φ esta definido por:

$$\text{sop}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$$

Definición 1.6.2 Definimos el conjunto $H_0^1(\Omega)$ como la cerradura de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$, es decir:

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$$

Observación: $H_0^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$, así que también es un espacio de Hilbert.

Teorema 1.6.1

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$$

Demostración. Ver [4].

Teorema 1.6.2 (Desigualdad de Poincaré) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y acotado. Entonces existe $C = C(\Omega) > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} v^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq C \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 \right\} d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Demostración. Ver [4].

Aca exponemos las identidades pero en el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$, las cuales son derivadas del Teorema de Divergencia de Gauss, cuya demostración se puede ver en [4] y que las necesitaremos mas adelante, mas explicitamente en el capitulo 3.

Definición 1.6.3 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto acotado, $u \in H_0^1(\Omega)$ y $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ el vector exterior normal unitario a Ω .

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} := \nabla u \cdot \eta = \frac{\partial u}{\partial x_1} \eta_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \eta_2$$

Proposición 1.6.1 (Primera Identidad de Green) Sea $u, v \in H^1(\Omega)$. Entonces para $i=1,2$ se tiene:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv \eta_i d\gamma$$

Proposición 1.6.2 (Segunda Identidad de Green) Sea $u \in H^2(\Omega)$ y $v \in H^1(\Omega)$. Entonces

$$- \int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\gamma$$

Capítulo 2

Resolución Numérica de Problemas Variacionales usando El Método de Galerkin con Elementos Finitos

En este capítulo resolveremos numericamente un problema variacional usando el Método de Elementos finitos el cual consiste en hacer una partición en elementos finitos del dominio de definición de la función para luego mediante un método variacional podamos obtener la solución en cada uno de los elementos , en este caso usaremos el Método de Galerkin por comodidad pero en general puede usarse cualquier método variacional pero no es el objetivo de este texto ahondar en otros métodos.

2.1. El método de Galerkin con Elementos Finitos

El método de Galerkin consiste en buscar una solución aproximada de el siguiente problema :

$$\text{Hallar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V \quad (2.1.1)$$

Donde a es una forma bilineal , continua , coerciva , l una funcional continua lineal , V es un espacio de Hilbert (en general de dimensión Infinita) y $l \in V'$.

En un espacio de dimensión finita V_h del espacio H_0^1 de funciones admisibles en vez de todo el espacio H_0^1 . Así, en lugar de abordar el problema de dimensión infinita (en general no podemos encontrar una función de forma explicita que represente a la solución exacta del problema (2.1.1) puesto que V es de dimensión infinita) , buscamos una solución aproximada u_N en V_h de la forma:

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^N \xi_i \phi_i(x) \quad (2.1.2)$$

que pueda satisfacer (2.1.1) . Las funciones $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ forman una base que define (y genera) el subespacio de dimension N V_h de H_0^1 . Desde que los ϕ_i son conocidos u_N quedará completamente determinada una vez que los N coeficientes ξ_i sean determinados . Los ξ_i son referidos como los **grados de libertad** de la aproximación.

Así , sea $V_N \subseteq V$ un subespacio de dimensión N . Proyectamos el problema (2.1.1) sobre V_N y obtenemos:

$$u_N \in V_N, \quad a(u_N, v) = l(v) \quad \forall \quad v \in V_N \quad (2.1.3)$$

Bajo las suposiciones de que la forma bilineal $a(.,.)$ es acotada y coerciva y $l \in V'$ podemos aplicar el teorema 1.3.1 y concluir de que el problema (2.1.3) tiene una única solución u_N . Para hallar explícitamente esta solución asumimos que la combinación lineal (2.1.2) esta determinada por $\phi_{i=1}^N$ base de V_N y que $\xi_{i=1}^N$ es el conjunto de componentes que definen la solución aproximada en cada nodo siendo ambos términos desconocidos hasta ahora.

Al reemplazar (2.1.2) en (2.1.3) se obtiene lo siguiente:

$$a\left(\sum_{i=1}^N \xi_i \phi_i, v\right) = l(v) \quad \forall \quad v \in V_N$$

De acuerdo con el método de Galerkin si se toma ϕ_j de la misma base de V_N se genera un problema discreto equivalente a (2.1.1) a saber:

Hallar el conjunto $\{\xi_{i=1}\}_{i=1}^N$ que satisfagan el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^N \xi_i a(\phi_i, \phi_j) = l(\phi_j) \quad j=1, \dots, N \quad (2.1.4)$$

Como resultado de utilizar el método de Galerkin la ecuación variacional (2.1.1) es equivalente al sistema lineal de ecuaciones algebraicas (2.1.4) que podemos escribirlo en forma compacta como:

$$A\xi = b \quad (2.1.5)$$

Aquí $\xi = (\xi_i)_{i=1, \dots, N}$ es el vector de incógnitas , $A = (a(\phi_i, \phi_j)) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es llamada Matriz de Rigidez (debido a que sus coeficientes representan la rigidez de la estructura asociada a un desplazamiento generalizado unitario . Ver [6]) y $b = l(\phi_j)$ es el vector de cargas (llamado así ya que en el cálculo de estructuras , sus componentes representan las fuerzas externas que actúan sobre la estructura).

O equivalentemente en su forma matricial desarrollada:

$$A = \begin{bmatrix} a(\phi_1, \phi_1) & \dots & a(\phi_1, \phi_N) \\ \vdots & & \vdots \\ a(\phi_N, \phi_1) & \dots & a(\phi_N, \phi_N) \end{bmatrix}$$

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_N \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} l(\phi_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ l(\phi_N) \end{bmatrix}$$

Luego al resolver este sistema lineal se encuentra la solución aproximada al problema (2.1.1).

La solución aproximada u_N es, en general, diferente de la solución exacta u . Para mejorar la precisión, es natural buscar la solución aproximada u_N en un subespacio V_N mayor, a lo que equivale a hacer un refinamiento Ω . Así, para una sucesión de subespacios $V_{N_1} \subseteq V_{N_2} \subseteq \dots \subseteq V$, obtenemos una sucesión correspondiente de soluciones aproximadas $u_{N_i}, i = 1, 2, \dots, N$ (ver [6]).

2.2. Estimación del Error

Teorema 2.2.1 (Desigualdad de Céa) *Supongamos que V es un espacio de Hilbert, $V_N \subseteq V$ es un subespacio, $a(.,.)$ es una forma bilineal acotada, coerciva en V y $l \in V'$. Sea $u \in V$ la solución del problema (2.1.1) y $u_N \in V_N$ la aproximación de Galerkin definida en (2.1.3). Entonces hay una constante c tal que:*

$$\|u - u_N\| \leq c \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V$$

Demostración: Como el método de Galerkin es un método Variacional se cumple el Teorema 2.8.1 de [5].

La desigualdad de Céa establece que para estimar el error de la solución Galerkin es suficiente estimar el error de aproximación $\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V$.

2.3. Espacios de Elementos Finitos

El MEF consiste en la aplicación del método de Galerkin usando como base de los espacios V_h funciones continuas, polinomiales a trozos y con soporte 'pequeño'. Para poder obtener estas funciones será preciso en primer lugar elegir un mallado o triangulación del dominio Ω . De forma general, podemos dividir un dominio

del plano en triángulos o rectángulos , y los dominios del espacio en tetraedros o paralelepípedos . Cada uno de estos polígonos o poliedros se denomina elemento (véase la Figura 2.1).

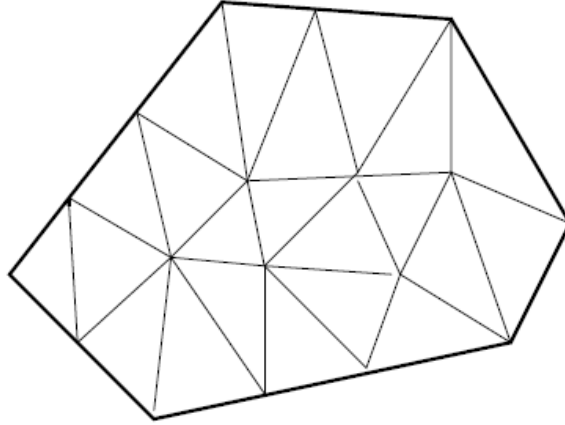


Figura 2.1: Ejemplo de mallado sobre dominio poligonal

Sobre el mallado seleccionado escogemos un conjunto de puntos o nodos asociados con los elementos , que pueden ser vértices de los mismos , estar sobre las aristas o caras o incluso en el interior de los mismos. El concepto de mallado equivale a seleccionar elementos y nodos , y supone la parte más delicada del proceso , pues la construcción de la matriz de rigidez y el segundo miembro dependen de gran medida del mallado escogido . Como normas generales podemos destacar:

1. El aspecto de los elementos debe ser regular , es decir , no tomar elementos que tengan ángulos muy pequeños . Veremos su influencia en el estudio del error
2. El mallado debe ser más fino en las zonas en la que puede haber un cambio súbito del valor de la solución o su derivada.
3. Cuanto más fino sea el mallado , mayor debería ser la precisión obtenida , aunque habrá que tener en cuenta la regularidad de la solución .
4. La reordenación de los nodos pueden tener consecuencias importantes en la resolución de (2.1.5)

2.3.1. Construcción de bases de elementos finitos

Dado el mallado , esto es , $\tau_h = \{T_j\}_j$, tal que se cumplen las 2 siguientes proposiciones:

- $\bigcup_j T_j = \bar{\Omega}$

- $int(T_i) \neq \emptyset, \forall i$ y $int(T_i) \cap int(T_j) = \emptyset, i \neq j$

y consideramos un espacio de funciones:

$$X_h = \{v \in C^m(\overline{\Omega}) : v|_{T_i} \in \mathbb{P}_k\}$$

Donde \mathbb{P}_k son polinomios de grado k . Se trata de escoger m y k tal que $X_h \subseteq H^1(\Omega)$. Este tipo de espacios X_h tiene dimensión finita y se trata de que el mallado (dependiente de un parámetro h) haga que $\lim_{h \rightarrow 0} dim(X_h) = +\infty$.

Asociado a este mallado, escogemos un conjunto de nodos $\{N_i\}_i$ que permita la unisolvencia, esto es, que las funciones base estén unívocamente determinadas por sus valores (y los de sus derivadas, si es preciso) en los nodos. Así se define el grado de libertad del elemento finito como el número de datos que hay que suministrar para definir de forma única a las funciones base sobre un elemento.

Por ejemplo, si no hacemos uso de las derivadas, se definirían las funciones base $\phi_i \in X_h$ por $\phi_i(N_j) = \delta_{ij}$, esto es:

$$\phi_i(N_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Nótese que para este tipo de funciones, la matriz de rigidez tiene muchos ceros pues las funciones ϕ_i se anulan sobre todos los elementos que no tengan contacto con el nodo N_i (de ahí el soporte pequeño) véase la siguiente figura (figura 2.2).

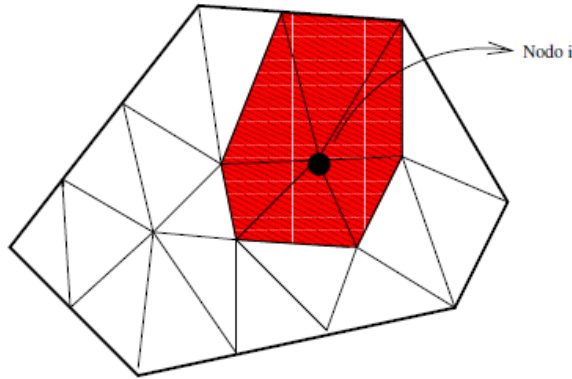


Figura 2.2: Soporte de la función base ϕ_i

2.3.2. Ejemplos de elementos finitos

En función de si tenemos en cuenta o no los valores de las derivadas en los nodos podemos dividir los elementos finitos en 2 tipos:

- **Elementos Finitos de Lagrange**

Este tipo de elementos escoge como grados de libertad los valores de la función en los nodos, de modo que la dimensión del espacio X_h coincide con el número de nodos.

Los elementos del mallado pueden ser triángulos o rectángulos en el plano y tetraedros o paralelepípedos en el espacio, siendo los primeros más versátiles pues permiten su adaptación a regiones mas generales, mientras los segundos necesitan algún tipo de paralelismo en el dominio Ω .

Para los triángulos, denominados comúnmente elementos P_l Lagrange, el grado de los polinomios que escojamos estará en función del número de nodos tomados sobre éstos. La figura 2.3 muestra los nodos asociados a los elementos P_1 y P_2 que corresponden a una elección de polinomios en el plano de grados 1 y 2 con 3 y 6 grados de libertad respectivamente (esto quiere decir polinomios de la forma $a_1 + a_2x + a_3y$ en el primer caso, y $a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2$ en el segundo).

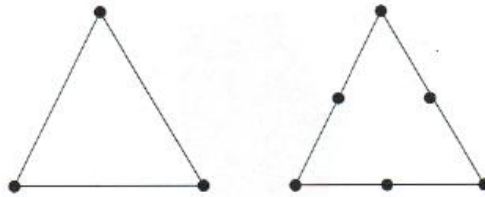


Figura 2.3: Elementos P_1 y P_2

En general, el elemento P_l en el plano está generado por la familia $\{x^{\alpha_1}, y^{\alpha_2}\}_{0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq l}$. Algo similar ocurre en \mathbb{R}^3 ; si tomamos como nodos los vértices de un tetraedro debemos usar polinomios del espacio de grado uno (cuatro grados de libertad), mientras que si añadimos a los nodos los puntos medios de cada arista debemos escoger polinomios de grado dos (8 grados de libertad).

Por su parte, si escogemos como elementos de la triangulación rectángulos (los denominados elementos Q_l), nuevamente el número de nodos que consideremos determinará el tipo de funciones base (la figura 2.4 muestra algunas posibilidades).

Por ejemplo, para el elemento Q_1 (4 grados de libertad) debemos considerar funciones bilineales de la forma $a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy$; para Q_2 los polinomios

a escoger serian:

$$a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9x^2y^2$$

(9 grados de libertad) . En general , para un Q_l en el plano , los polinomios pertenecen a la familia generada por $\{x^{\alpha_1}, y^{\alpha_2}\}_{0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq l}$.

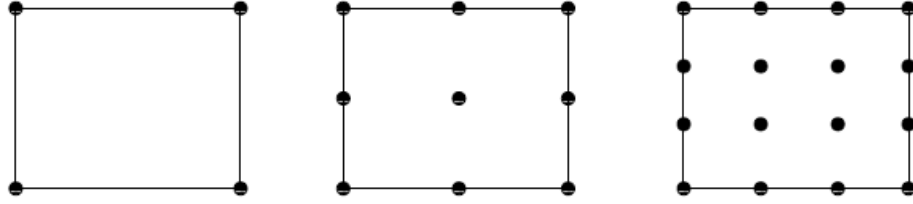


Figura 2.4: Elementos Q_1, Q_2 y Q_3

■ Elementos Finitos de Hermite

En este tipo de elementos el número de grados de libertad tiene en cuenta además del valor de las funciones sobre los nodos, el valor de algunas de sus derivadas , con lo cual el número de grados de libertad es superior al número de nodos considerados. El más representativo es el *triángulo de Argyris modificado*, que considera como elementos del mallado triángulos, como nodos los vértices a_1, a_2, a_3 y los puntos medios a_{12}, a_{13}, a_{23} , y como valores para definir las funciones base:

$$p(a_i), \partial_1 p(a_i), \partial_2 p(a_i), \partial_{11} p(a_i), \partial_{12} p(a_i), \partial_{22} p(a_i), \partial_n p(a_{ij})$$

lo que da lugar a polinomios bidimensionales de grado 5 (21 grados de libertad), resultando que las funciones de X_h son $C^1(\overline{\Omega})$.

2.3.3. Cálculo de la matriz de rigidez

Una vez elegido el mallado y el tipo de elemento que se va a utilizar, el paso siguiente corresponde al cálculo de la matriz de rigidez y del segundo miembro del sistema (2.1.5) como se dijo en esa sección , cuya solución va a proporcionar los valores en los nodos de la solución aproximada.

2.4. Estimaciones del error de el método de Galerkin usando Elementos Finitos

Dado un problema variacional abstracto (PV), y su correspondiente aproximación (PV_h) , si denotamos por u y u_h sus soluciones respectivas, por el teorema 2.2.1 tenemos que:

$$\|u - u_N\| \leq c \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V$$

Donde la constante c sólo depende de las constantes de coercividad y continuidad de a .

A continuación definimos el interpolante Π_h de tal forma que a cada función $v \in V$ le asigna una función $\Pi_h v \in V_h$ de manera que tienen el mismo valor sobre los grados de libertad del espacio V_h . Por ejemplo en el caso de los elementos finitos de Lagrange, $\Pi_h v(N_i) = v(N_i)$ para cada nodo N_i . Está claro de que:

$$\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V \leq \|u - \Pi_h u\|_V$$

($\|u - \Pi_h u\|_V$ se conoce como el error de interpolación.

El estudio del error cometido en la aproximación por elementos finitos comprende dos pasos. En primer lugar se estudia el error cometido en cada elemento, en la seminorma de $H^m(T)$; así:

$$|v - \Pi_h v|_{m,T} \leq C \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^m} |v|_{k+1,T}, \quad 0 \leq m \leq k+1$$

siempre que k y m sean tales de que: $\mathbb{P}_k \subset V_h \subset C^{m-1}$ donde h_T es el diámetro de T y ρ_T la redondez de T , definida como el supremo de los diámetros de las bolas que quedan completamente contenidas en T . Finalmente damos un resultado de acotación del error en todo Ω . Supongamos que τ_h es una triangulación regular de Ω esto significa que:

- $\exists \sigma > 0$ tal que $\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma, \forall T \in \tau_h$
- $\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{T \in \tau_h} h_T) = 0$

Escencialmente significa que la forma de los triángulos no degenera (la redondez no se hace demasiado pequeña) y que a medida que refinamos el mallado, todos los elementos se hacen más pequeños. En esta situación se prueba que:

$$\|v - \Pi_h v\|_m \leq C h^{k+1-m} |v|_{k+1} \quad 0 \leq m \leq k+1$$

La demostración de esto se puede ver en [6].

Es interesante observar que el error de aproximación del MEF depende del error cometido en el método de Galerkin , el cual puede ser estudiado de forma independiente a la aproximación usada , y de la interpolación a la que da lugar el espacio de elementos finitos escogido que es independiente al problema en cuestión . No obstante es necesario tener en cuenta la regularidad de las funciones involucradas . Las acotaciones del error también nos dicen que si no esperamos regularidad en la solución , no tiene sentido tratar de usar elementos finitos con un mayor número de grados de libertad , pues no alcanzaremos una mejor cota del error.

2.5. Ejemplo Aplicativo del Método de Galerkin con Elementos Finitos

2.5.1. Pasos para aplicar el Método correctamente

Para poder aplicar el método de Galerkin con Elementos Finitos correctamente se deben hacer los siguientes pasos:

1. Teniendo el problema a analizar , debemos hallar la formulación variacional.
2. Luego de eso , debemos ubicar la bilineal a y la funcional F tal que $a(u,v)=F(v)$ y que cumpla las Hipotesis del Teorema de Lax Milgram, es decir que A sea acotada y coerciva y que F es acotada; para ver si la solución del sistema anteriormente dicho es unico y su existencia.
3. Aplicar el Método de Galerkin para hallar la matriz de Rigidez A y de Cargas b .
4. Luego teniendo $Ax=b$, desarrollar ese sistema de ecuaciones con cualquier método de resolver sistemas de ecuaciones que se conozca puede ser Gauss Jordan , QR , Cholesky , etc.
5. Finalmente la solución x (que es un vector) es el valor de la función en cada uno de los puntos de la partición que se hace en el Método de Galerkin.

2.5.2. Ejemplo de Aplicación

Sea:

$$(P) : \begin{cases} -u'' + \pi^2 u = 2\pi^2 \sin(\pi x) \\ u(0) = u(1) = 0 , \quad x \in [0, 1] \end{cases}$$

Hallar u

Solución

Sea la función test $\varphi \in C_0^\infty([0, 1])$ tal que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Ahora multiplicando φ a (P), se tiene:

$$-u'' \varphi + \pi^2 u \varphi = 2\pi^2 \sin(\pi x) \varphi \quad (1)$$

Integrando la expresión (1) tenemos que:

$$-\int_0^1 u'' \varphi dx + \pi^2 \int_0^1 u \varphi dx = 2\pi^2 \int_0^1 \sin(\pi x) \varphi dx \quad (2)$$

Ahora la siguiente expresión $-\int_0^1 u'' \varphi dx$ vamos a dividirla por partes entonces tenemos que:

$$\int_0^1 u'' \varphi dx = u' \varphi|_0^1 - \int_0^1 u' \varphi' dx \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2) tenemos que:

$$-(u' \varphi|_0^1 - \int_0^1 u' \varphi' dx) + \pi^2 \int_0^1 u \varphi dx = 2\pi^2 \int_0^1 \sin(\pi x) \varphi dx$$

Luego tenemos que evaluando la expresión $u' \varphi|_0^1$ tenemos que:

$$-\{u'(1)\varphi(1) - u'(0)\varphi(0)\} + \int_0^1 u' \varphi' dx + \pi^2 \int_0^1 u \varphi dx = 2\pi^2 \int_0^1 \sin(\pi x) \varphi dx$$

Ahora por las condiciones de frontera tenemos que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ entonces luego tenemos que:

$$\int_0^1 u' \varphi' dx + \pi^2 \int_0^1 u \varphi dx = 2\pi^2 \int_0^1 \sin(\pi x) \varphi dx$$

Luego definiendo $V = H^1([0, 1])$ tenemos que:

$$a(u, v) = \int_0^1 u' v' dx + \pi^2 \int_0^1 u v dx$$

$$F(v) = 2\pi^2 \int_0^1 \sin(\pi x) v dx$$

Donde a es una forma bilineal acotada y coerciva, y F acotada esto es fácilmente visto pues:

1. **a es bilineal:** Veamos esto:

■

$$a(\alpha u + \beta, v) = \int_0^1 (\alpha u + \beta)' v' dx + \pi^2 \int_0^1 (\alpha u + \beta) v dx$$

Luego tenemos que:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\alpha u' + \beta') v' dx + \pi^2 \int_0^1 (\alpha u + \beta) v dx \\ &= \alpha \left(\int_0^1 u' v' dx + \pi^2 \int_0^1 u v dx \right) + \int_0^1 \beta' v' dx + \pi^2 \int_0^1 \beta v dx \end{aligned}$$

y de aca tenemos que:

$$= \alpha a(u, v) + a(\beta, v)$$

- Para lo otro es similar nada más es decir tenemos que:

$$a(u, \alpha v + \beta) = \int_0^1 u' (\alpha v + \beta)' dx + \pi^2 \int_0^1 u (\alpha v + \beta) dx$$

Luego tenemos que:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 u' (\alpha v' + \beta') dx + \pi^2 \int_0^1 u (\alpha v + \beta) dx \\ &= \alpha \left(\int_0^1 u' v' dx + \pi^2 \int_0^1 u v dx \right) + \int_0^1 u' \beta' dx + \pi^2 \int_0^1 u \beta dx \end{aligned}$$

y de aca tenemos que:

$$= \alpha a(u, v) + a(u, \beta)$$

2. **a es continua:** Como por Cauchy se cumple $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ ahora para el espacio V tenemos que se cumple tambien la desigualdad de Cauchy , entonces tenemos: $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_V \|v\|_V$ ahora por el Teorema 2.4.1 de [5] (pues u es continua ya que por la definición de la bilineal $u \in C(]0, 1[)$) tenemos que:

$$\exists u_0 \in V / a(u, v) = \langle u_0, v \rangle \quad \forall v \in H^1([0, 1])$$

Ahora tomando supremo tenemos que:

$$\sup_{u \in H^1([0, 1]) \setminus \{0\}} a(u, v) \leq \|u_0\| \|v\|$$

Ahora como $\sup_{u \in H^1([0, 1]) \setminus \{0\}} a(u, v) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|a(u, v)\|}{\|x\|}$ entonces tenemos que:

$$\frac{\|a(u, v)\|}{\|x\|} \leq \|u_0\| \|v\|$$

y finalmente tenemos que:

$$\|a(u, v)\| \leq K \|x\| \|v\|$$

Donde $K = \|u_0\|$ y por lo tanto a es acotada.

3. **a es coerciva** Esto se nota de lo siguiente

$$a(v, v) = \int_0^1 \pi^2 v^2 - v' v' dx$$

$$\pi^2 \int_0^1 v^2 dx - \int_0^1 |v'|^2 dx$$

Luego tenemos que:

$$\pi^2 \langle v, v \rangle_V - \langle v', v' \rangle_V$$

Pues $\int_0^1 v^2 dx = \langle v, v \rangle_V$ y $\langle v', v' \rangle_V = \int_0^1 |v'|^2 dx$ y luego tenemos que:

$$\pi^2 \langle v, v \rangle_V - \langle v', v' \rangle_V \geq \pi^2 \langle v, v \rangle_V = C \|v\|_V^2$$

Donde $C = \pi^2$, y por lo tanto a es coerciva.

4. **F es lineal** Para ello observemos que se cumple:

$$\begin{aligned} F(\alpha v + \beta) &= 2\pi \int_0^1 \sin(\pi x)(\alpha v + \beta) dx \\ &= \alpha(2\pi \int_0^1 \sin(\pi x)v dx) + \int_0^1 \sin(\pi x)\beta dx \\ &= \alpha F(v) + F(\beta) \end{aligned}$$

y finalmente F es lineal.

Luego por el Teorema 2.7.1 de [5] tenemos que existe u solución única tal que:

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

Ahora se debe generar $V_n \subseteq V$ tal que:

$$a(u_n, v_n) = F(v_n) \quad \forall v_n \in V_n$$

Método de Galerkin

Sea la partición del intervalo $I = [0, 1]$

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1 \quad (a')$$

e introducimos el siguiente espacio:

$$V_n \{v \in C(\bar{I}) : v(0) = v(1) = 0 \text{ y } v|_{[x_{j-1}, x_j]} \in P_1[x_{j-1}, x_j] \quad \forall j = 1, 2, \dots, n+1$$

Donde $P_1(S)$ es el espacio de Polinomios de grado menor o igual a 1 sobre cualquier subconjunto $S \subset I$. Ahora sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base de V_n donde $e_i \in V_n$ tal que:

$$e_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1)$$

Para calcular las matrices de rigidez A , elegimos $h_j = x_j - x_{j-1}, \forall j = 1, 2, \dots, n+1$ con h_j homogéneo, ahora formemos nuestras funciones bases (es decir polinomios de grado menor o igual que 1)

$$e_i(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x \leq x_{i-1} \\ \frac{x-x_{i-1}}{h_i} & , \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{h_i} & , \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & , \quad x_{i+1} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Usando para cada caso : $P_k = a_k x + b_k$ por (1) tenemos que: $P_k(x_{i+1}) = 0$ y $P_k(x_i) = 1$ y encontramos P_k y también tenemos que la derivada de la expresión $e_i(x)$ es:

$$e'_i(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < x < x_{i-1} \\ \frac{1}{h_i} & , \quad x_{i-1} < x < x_i \\ -\frac{1}{h_i} & , \quad x_i < x < x_{i+1} \\ 0 & , \quad x_{i+1} < x < 1 \end{cases}$$

$e'_i(x)$ es directamente calculable derivando $e_i(x)$. Ahora calculemos $\int_0^1 e'_i e'_j$ la cual es:

$$(4) \quad \int_0^1 e'_i e'_j = \begin{cases} 0 & , \quad |i-j| \geq 2 \\ \frac{-1}{h_{j+1}} & , \quad j = i-1 \\ \frac{-1}{h_j} & , \quad j = i+1 \\ \frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}} & , \quad j = i \end{cases}$$

Ahora necesitamos calcular $\int_0^1 e_i e_j$ entonces para calcularlo observemos que:

■ si $|i - j| \geq 2$ entonces $\int_0^1 e_i e_j = 0$

■ si $j = i - 1$ entonces tenemos que:

$$e_i e_j = \left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right) \left(\frac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}}\right) = \left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right) \left(\frac{x_i - x}{h_i}\right)$$

Luego factorizando tenemos que:

$$= \frac{1}{h_i^2} (x_i x + x_{i+1} x - x^2 - x_{i-1} x_i)$$

Luego integrando esta expresión y separando la integral por partes y eliminando las expresiones que son nulas tenemos que:

$$\int_0^1 e_i e_j = \frac{1}{h_i^2} \left\{ x_i \frac{x^2}{2} + x_{i+1} \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - x_{i-1} x_i x \right\} \Big|_{x=x_{i-1}}^{x=x_i}$$

Reemplazando , y sabiendo de que $j = i - 1$ tenemos finalmente que:

$$= \frac{1}{h_i} \left\{ \frac{1}{6} (x_i + x_{i+1})^2 - \frac{2}{3} x_{i-1} x_i \right\} = \frac{1}{h_{j+1}} \left\{ \frac{1}{6} (x_{j+1} + x_j)^2 - \frac{2}{3} x_j x_{j+1} \right\}$$

■ si $j = i + 1$ tenemos que:

$$e_i e_j = \left(\frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}\right) \left(\frac{x - x_{j-1}}{h_j}\right) = \left(\frac{x_j - x}{h_j}\right) \left(\frac{x - x_{j-1}}{h_j}\right)$$

Luego extrayendo el término comun tenemos que:

$$= \frac{1}{h_j^2} (x_j x + x_{j-1} x - x_j x_{j-1} - x^2)$$

Luego integrando esta expresión y separando la integral por partes y eliminando las expresiones que son nulas tenemos que:

$$\int_0^1 e_i e_j = \frac{1}{h_j^2} \left\{ (x_j + x_{j-1}) \frac{x^2}{2} - x_j x_{j-1} x - \frac{x^3}{3} \right\} \Big|_{x=x_{j-1}}^{x=x_j}$$

Reemplazando tenemos finalmente que:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h_j^2} \left\{ \frac{(x_j + x_{j-1})}{2} (x_j^2 - x_{j-1}^2) - x_j x_{j-1} (x_j - x_{j-1}) - \frac{1}{3} (x_j^3 - x_{j-1}^3) \right\} \\ &= \frac{1}{h_j^2} \left\{ \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2} h_j - \frac{1}{3} (x_j - x_{j-1})^2 h_j - \frac{2}{3} x_j x_{j-1} h_j \right\} \\ &= \frac{1}{h_j} \left\{ \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2} - \frac{1}{3} (x_j - x_{j-1})^2 - \frac{2}{3} x_j x_{j-1} \right\} \\ &= \frac{1}{h_j} \left\{ \frac{1}{6} (x_j - x_{j-1})^2 - \frac{2}{3} x_j x_{j-1} \right\} \end{aligned}$$

- Si $j = i$ tenemos que integrando :

$$\begin{aligned} \int_0^1 e_j e_i &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{x - x_{j-1}}{h_j} \right)^2 dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\frac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{h_j^2} \left\{ \frac{x^3}{3} - x_{j-1}x^2 + x_{j-1}^2 x \right\} \Big|_{x=x_{j-1}}^{x=x_j} + \frac{1}{h_{j+1}^2} \left\{ x_{j+1}^2 x - x_{j+1}x^2 + \frac{x^3}{3} \right\} \Big|_{x=x_j}^{x=x_{j+1}} \end{aligned}$$

Ahora reemplazando los valores correctamente tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3h_j} (x_j - x_{j-1})^2 + \frac{1}{3h_{j+1}} (x_{j+1} - x_j)^2 \\ &= \frac{1}{3}h_j + \frac{1}{3}h_{j+1} = \frac{1}{3}(h_j + h_{j+1}) \end{aligned}$$

Y finalmente tenemos que:

$$(5) \quad \int_0^1 e_i e_j = \begin{cases} 0 & , \quad |i - j| \geq 2 \\ \frac{1}{h_{j+1}} \left\{ \frac{1}{6}(x_{j+1} + x_j)^2 - \frac{2}{3}x_j x_{j+1} \right\} & , \quad j = i - 1 \\ \frac{1}{h_j} \left\{ \frac{1}{6}(x_j - x_{j-1})^2 - \frac{2}{3}x_j x_{j-1} \right\} & , \quad j = i + 1 \\ \frac{1}{3}(h_j + h_{j+1}) & , \quad j = i \end{cases}$$

Luego es posible encontrar la matriz de rigidez $a_{ij} = a(e_i, e_j)$ donde:

$$a(u, v) = \int_0^1 u' v' dx + \pi^2 \int_0^1 u v dx$$

Sumando las ecuaciones (4) y (5) tenemos que la matriz de rigidez a es:

$$a_{ij} = A(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & , \quad |i - j| \geq 2 \\ -\frac{1}{h_{j+1}} + \frac{(x_{j+1} + x_j)^2 \pi^2}{6h_{j+1}} - \frac{2}{3} \left(\frac{x_j x_{j+1} \pi^2}{h_{j+1}} \right) & , \quad j = i - 1 \\ -\frac{1}{h_j} + \frac{(x_j + x_{j-1})^2 \pi^2}{6h_j} - \frac{2}{3} \left(\frac{x_j x_{j-1} \pi^2}{h_j} \right) & , \quad j = i + 1 \\ \frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}} \frac{\pi^3}{3} h_j + \frac{\pi^2}{3} h_{j+1} & , \quad j = i \end{cases}$$

Luego hallando el vector de Cargas b el cual es $b = F(v) = 2\pi^2 \int_0^1 \sin(\pi x) v dx$, entonces para hallarlo sabemos que :

$$b_j = F(e_j) = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f e_j dx = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} 2\pi^2 \sin(\pi x) e_j dx$$

Y ahora desarrollando la integral tenemos que:

$$b_j = F(e_j) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x \leq x_{j-1} \\ \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} 2\pi^2 \sin(\pi x) \left(\frac{x - x_{j-1}}{h_j} \right) dx & , \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ \int_{x_j}^{x_{j+1}} 2\pi^2 \sin(\pi x) \left(\frac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}} \right) dx & , \quad x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ 0 & , \quad x_{j+1} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Ahora en (a') para n=10 y 25 y sabiendo que la solución verdadera es $2 \sin(\pi x)$ tenemos la siguiente solución (hallada usando MatLab 7.0):

Para n=10

mallado	solaprox	solexact	error
ans =			
0	0	0	0
0.0909	0.6203	0.5635	0.0569
0.1818	1.1506	1.0813	0.0693
0.2727	1.5583	1.5115	0.0468
0.3636	1.8203	1.8193	0.0010
0.4545	1.9242	1.9796	0.0554
0.5455	1.8700	1.9796	0.1096
0.6364	1.6699	1.8193	0.1494
0.7273	1.3470	1.5115	0.1645
0.8182	0.9341	1.0813	0.1472
0.9091	0.4707	0.5635	0.0927
1.0000	0	0.0000	0.0000

Ahora la grafica de la función solución y de la función que se ha hallado mediante el método de los elementos finitos para n=10 y el error respectivo se halla en la siguiente figura 2.5

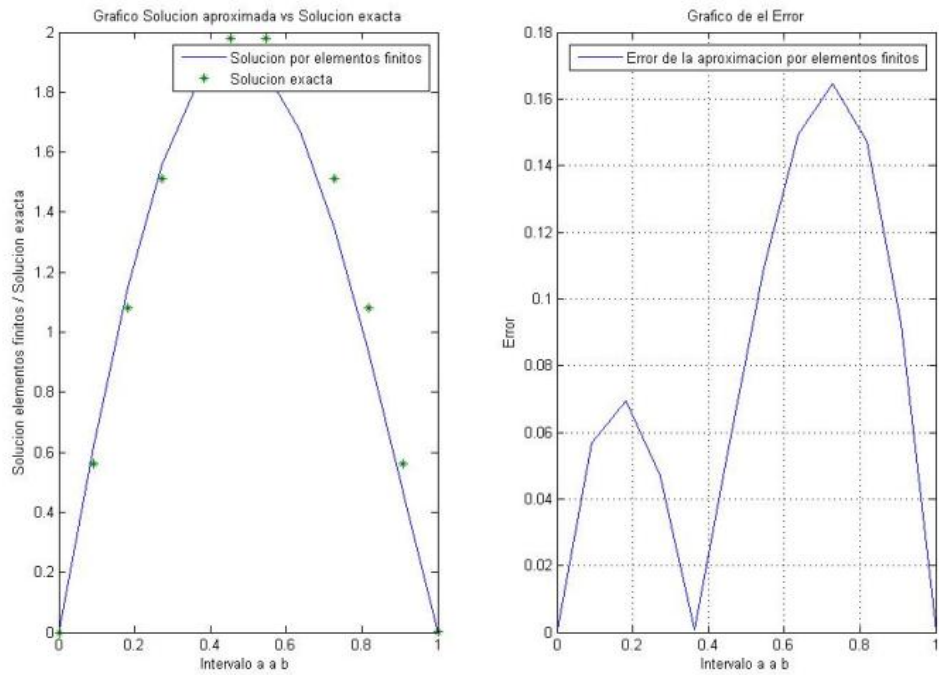


Figura 2.5: Elementos finitos para $n=10$

Ahora para $n=25$ tenemos que:

```

      mallado  solaprox  solexact  error
ans =
      0         0         0         0
0.0385    0.2564    0.2411    0.0153
0.0769    0.5056    0.4786    0.0270
0.1154    0.7443    0.7092    0.0351
0.1538    0.9694    0.9294    0.0399
0.1923    1.1778    1.1361    0.0417
0.2308    1.3668    1.3262    0.0406
0.2692    1.5340    1.4970    0.0370
0.3077    1.6773    1.6460    0.0313
0.3462    1.7947    1.7709    0.0238
0.3846    1.8850    1.8700    0.0149
0.4231    1.9470    1.9419    0.0051
0.4615    1.9801    1.9854    0.0053
0.5000    1.9842    2.0000    0.0158
0.5385    1.9594    1.9854    0.0261
0.5769    1.9063    1.9419    0.0356
0.6154    1.8260    1.8700    0.0440
0.6538    1.7200    1.7709    0.0510
0.6923    1.5899    1.6460    0.0561
0.7308    1.4380    1.4970    0.0590
0.7692    1.2668    1.3262    0.0595

```

0.8077	1.0789	1.1361	0.0572
0.8462	0.8773	0.9294	0.0521
0.8846	0.6653	0.7092	0.0439
0.9231	0.4461	0.4786	0.0325
0.9615	0.2232	0.2411	0.0179
1.0000	0	0.0000	0.0000

Ahora la grafica de la función solución y de la función que se ha hallado mediante el método de los elementos finitos para $n=25$ y el error respectivo se halla en la siguiente figura 2.6:

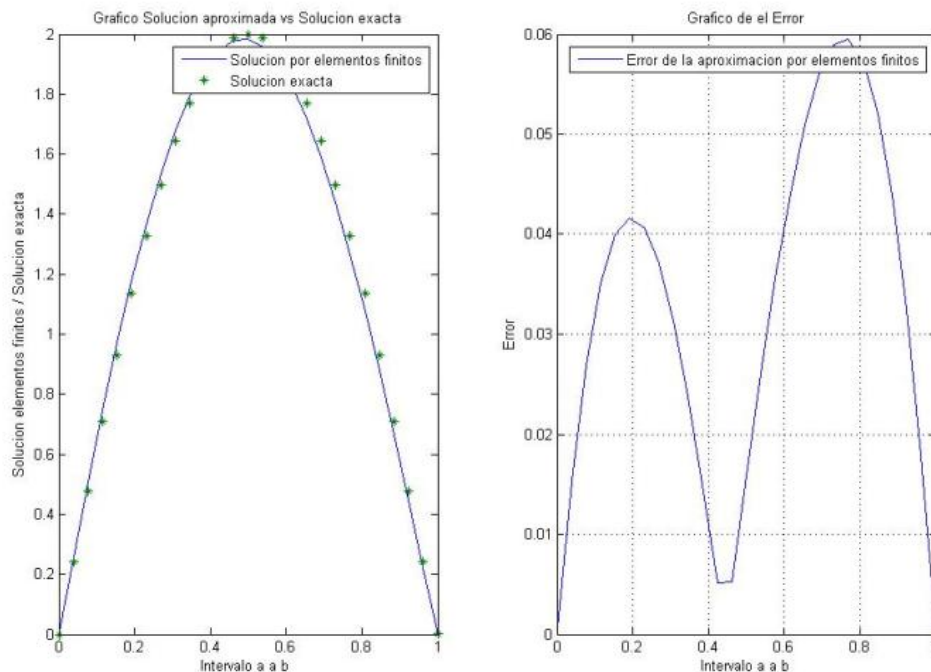


Figura 2.6: Elementos finitos para $n=25$

Tenemos que observar que en los valores hallados el mallado indica la partición que se ha tomado , solaprox es la solución hallada mediante el método de los elementos finitos , solexact es la solución exacta y el error es como lo indica su nombre el error que se produce al usar este método.

Capítulo 3

Resolución Numérica del problema de Poisson usando el Método de Elementos Finitos

En este capítulo presentaremos la formulación variacional y el método de los elementos finitos para una ecuación llamada la ecuación de Poisson y también veremos un ejemplo concreto de como se desarrolla este método y usaremos el toolbox de Matlab 7.0 para calcular la solución graficamente .

3.1. Ecuación de Poisson y su Formulación variacional

La ecuación de Poisson es una de las ecuaciones que describe varios fenómenos físicos ; por ejemplo puede representar el calor de conducción, el flujo de potencial , la torsion de elementos no circulares , etc. Por lo tanto nosotros hallaremos la formulación variacional de esta ecuación y luego procederemos a aplicar el método de los elementos finitos. Ahora la ecuación de Poisson es la siguiente:

$$\nabla^2(u) = g$$

En términos cartesianos es :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = g(x, y) \quad in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (3 \cdot 1 \cdot 1)$$

Algunas de las condiciones de frontera para formular el problema de Poisson son:

$$u = \bar{u} \quad en \quad \partial\Omega_e \quad (3 \cdot 1 \cdot 2)$$

y también puede ser:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad en \quad \partial\Omega_n \quad (3 \cdot 1 \cdot 3)$$

Donde \bar{u} y \bar{q} denotan condiciones conocidas de frontera variables y n es un vector llamado el vector externo unitario que sale de la frontera de Ω , así como también $\partial\Omega_e$ y $\partial\Omega_n$ son límites para las condiciones de contorno esenciales y naturales, tal que deben cumplir lo siguiente

$$\partial\Omega_e \cup \partial\Omega_n = \partial\Omega \quad (3 \cdot 1 \cdot 4)$$

y también

$$\partial\Omega_e \cap \partial\Omega_n = \emptyset \quad (3 \cdot 1 \cdot 5)$$

Ahora procedamos a hallar la formulación variacional de la ecuación de Poisson (3.1.1) entonces para ello como hacíamos anteriormente multiplicando por un $w \in C_0^\infty(\Omega)$ e integrando tenemos que:

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} d\Omega + \int_{\Omega} w \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} d\Omega = \int_{\Omega} g(x, y) w d\Omega \quad (3 \cdot 1 \cdot 6)$$

Por la segunda identidad de Green (Proposición 1.6.2) y sabiendo que estamos trabajando en \mathbb{R}^2 podemos decir que lo siguiente se cumple (pues es solo desarrollar el gradiente y el laplaciano para \mathbb{R}^2):

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} d\Omega + \int_{\Omega} w \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} d\Omega = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega + \oint_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \quad (3 \cdot 1 \cdot 7)$$

Usando la ecuación anterior en la ecuación (3 · 1 · 6) tenemos finalmente que:

$$- \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_n} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Omega} g(x, y) w d\Omega \quad (3 \cdot 1 \cdot 8)$$

Y de acá la primera integral de volumen junto a la integral de línea se convierte en una matriz A llamada de rigidez y la segunda integral de volumen se convierte en un vector b llamado de cargas.

3.2. Elementos Triangulares Lineales

Ahora teniendo esto procedemos a discretizar el dominio para ello dentro de la geometria , creando una malla como por ejemplo: El cual contiene elementos

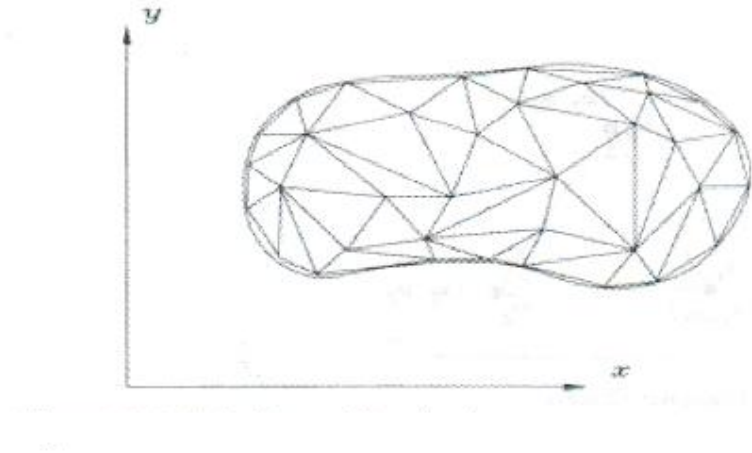


Figura 3.1: Malla dentro del dominio

triangulares , luego para cada elemento triangular tenemos lo siguiente: Para Hallar

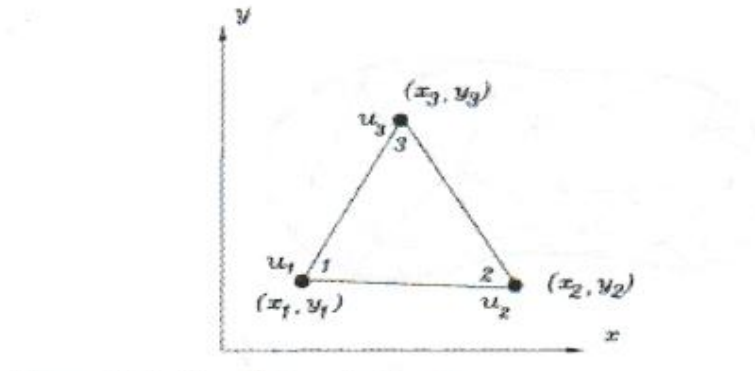


Figura 3.2: Elemento Triangular

la matriz de rigidez K tenemos que hacer lo siguiente tenemos que hallar las matrices que se generan gracias a cada elemento finito para luego unir todas las matrices usando las coordenadas globales de los puntos.

3.2.1. Hallando elementos previos que necesitaremos posteriormente

Usaremos el elemento finito de la imagen para explicar el procedimiento de como hallar la matriz generada por el elemento finito segun el mallado con elementos triangulares , entonces procedamos a explicar los pasos:

Paso 1

Hallar lo siguiente:

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

Paso 2

Luego hallar la siguiente matriz $[K^e]$

$$[K^e] = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$$

y hallando cada elemento de la siguiente forma:

1. $k_{11} = \frac{1}{4A}[(x_3 - x_2)^2 + (y_2 - y_3)^2]$
2. $k_{12} = \frac{1}{4A}[(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_2 - y_3)(y_3 - y_1)]$
3. $k_{13} = \frac{1}{4A}[(x_3 - x_2)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_3)(y_1 - y_2)]$
4. $k_{21} = k_{12}$
5. $k_{22} = \frac{1}{4A}[(x_1 - x_3)^2 + (y_3 - y_1)^2]$
6. $k_{23} = \frac{1}{4A}[(x_1 - x_3)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_1 - y_2)]$
7. $k_{31} = k_{13}$
8. $k_{32} = k_{23}$
9. $k_{33} = \frac{1}{4A}[(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2]$

3.2.2. Cómo hallar matriz de rigidez y el vector de cargas

Ahora vamos a armar la matriz de rigidez entonces para ello teniendo en consideracion la siguiente tabla donde debemos tener en consideracion lo siguiente:

1. posicion local(en cada elemento triangular)
2. posicion global(contando todos los puntos de la malla)

Ahora armando la pequeña tabla tendriamos algo parecido a lo siguiente (esto se hace para cada elemento finito:

punto	posición local	posición global
(x_1, y_1)	1	..
(x_2, y_2)	2	..
(x_3, y_3)	3	..

Paso 3

Luego cambiando la numeración local de la matriz $[K^e]$ de cada elemento finito por la numeración global , y luego colocandolo en la matriz K .

Al finalizar este proceso tenemos la matriz K y también tenemos que decir que los elementos vacios que queden en la matriz seran llenados con cero y si hay 2 elementos dentro de una misma posición se sumaran respectivamente y las dimensión de la matriz seran nxn donde n es el número de puntos de la matriz.

Ahora hallaremos el vector de cargas B para ello haremos los siguientes pasos:

Paso 1

Hallando los H_i de la siguiente manera , esto es para cada elemento finito respectivamente:

1. $H_1 = \frac{1}{2A}[(x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$
2. $H_2 = \frac{1}{2A}[(x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$
3. $H_3 = \frac{1}{2A}[(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$

Paso 2

Luego hallando por cada elemento finito triangular las siguientes expresiones:

$$B^i = \int_{\Omega} H_i g(x, y)$$

Donde Ω es la region triangular , y $i = 1, 2, 3$, es evidente que la integral sera una integral doble pues la expresión $H_i sen(xy)$ depende de el valor de x y de el valor de y.

Paso 3

Ahora vamos a armar el vector de cargas B entonces para ello teniendo en consideracion la siguiente tabla donde debemos tener en consideracion lo siguiente:

1. posicion local(en cada elemento triangular)
2. posicion global(contando todos los puntos de la malla)

Ahora armando la pequeña tabla tendriamos algo parecido a lo siguiente (esto se hace para cada elemento finito:

punto	posición local	posición global
(x_1, y_1)	1	..
(x_2, y_2)	2	..
(x_3, y_3)	3	..

Luego cambiando la numeración local de cada vector de cargas B^i que se ha generado por cada elemento finito por la numeración global de los puntos del mallado. Debemos de ver que de la misma forma que se hizo para el vector de cargas si hay 2 elementos en el misma posición, debemos sumar los elementos para generar un único elemento en esa posición y luego de esto tendriamos el vector de cargas general B y ahora teniendo K y B , armamos el sistema de ecuaciones $Ku = B$ donde u es el llamado vector incognita o vector de libertad , el cual representara en cada punto de el mallado que valor toma la solución de la E.D.P.

3.3. Ejemplo Aplicativo

Aplicar el método de los elementos finitos para el siguiente problema de Poisson

$$(P) : \begin{cases} \nabla^2 u = \text{sen}(xy) + \pi \\ u = 0, x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Donde $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$

Solución

Discretizando el dominio tenemos que:

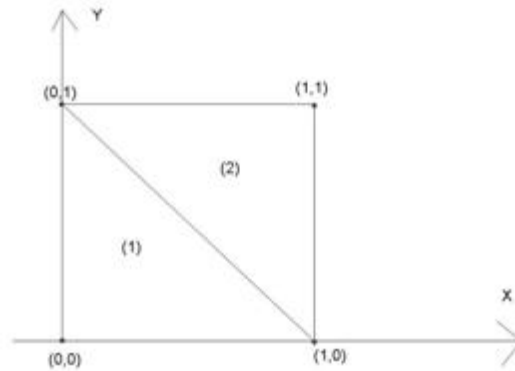


Figura 3.3: Discretización del Dominio

Ahora hallando la matriz de rigidez \bar{K} , para ello hallaremos las matrices $[K^e]_1$ y $[K^e]_2$ las cuales serán halladas analizando cada elemento triangular. Comenzando con el elemento 1 tenemos que:

Calculando A , tenemos que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} [1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}] = \frac{1}{2}$$

La posición de los nodos de este elemento 1 es el siguiente:

	Global	Local
(0,0)	1	1
(1,0)	2	2
(0,1)	4	3

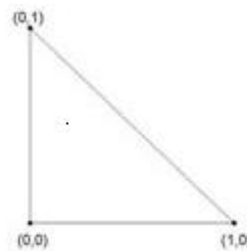


Figura 3.4: Elemento 1

Ahora hallando los k según la sección anterior tenemos que:

$$k_{11} = \frac{1}{4(\frac{1}{2})} [(0-1)^2 + (0-1)^2] = 1$$

$$k_{12} = \frac{1}{4(\frac{1}{2})}[(0-1)(0-0) + (0-1)(1-0)] = -\frac{1}{2}$$

$$k_{13} = \frac{1}{4(\frac{1}{2})}[(0-1)(1-0) + (0-1)(0-0)] = \frac{1}{2}$$

$$k_{21} = k_{12} = -\frac{1}{2}$$

$$k_{22} = \frac{1}{4(\frac{1}{2})}[(0-0)^2 + (1-0)^2] = \frac{1}{2}$$

$$k_{23} = \frac{1}{4(\frac{1}{2})}[(0-0)(0-1) + (1-0)(0-0)] = 0$$

$$k_{31} = k_{13} = \frac{1}{2}$$

$$k_{32} = k_{23} = 0$$

$$k_{33} = \frac{1}{4(\frac{1}{2})}[(1-0)^2 + (0-0)^2] = \frac{1}{2}$$

Entonces la matriz $[K^e]_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

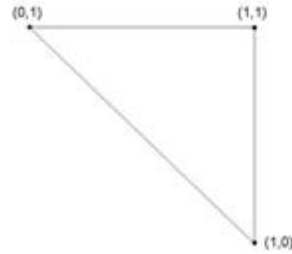
Ahora para el elemento 2 tenemos que hacer lo mismo , entonces :

Calculando A, tenemos que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}([1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}] -$$

$$1[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}]) = \frac{1}{2}(1,1 - 1,0) = \frac{1}{2}$$

La posición de los nodos de este elemento 1 es el siguiente:



	Global	Local
(1,0)	2	1
(1,1)	3	2
(0,1)	4	3

Figura 3.5: Elemento 2

Ahora calculando los k tenemos que:

$$k_{11} = \frac{1}{4(\frac{1}{2})}[(0-1)^2 + (1-1)^2] = \frac{1}{2}$$

$$k_{12} = \frac{1}{4(\frac{1}{2})}[(0-1)(1-0) + (1-1)(1-0)] = -\frac{1}{2}$$

$$k_{13} = \frac{1}{4(\frac{1}{2})}[(0-1)(1-1) + (1-1)(0-1)] = 0$$

$$k_{21} = k_{12} = -\frac{1}{2}$$

$$k_{22} = \frac{1}{4(\frac{1}{2})}[(1-1)^2 + (1-0)^2] = 1$$

$$k_{23} = \frac{1}{4(\frac{1}{2})}[(1-0)(1-1) + (1-0)(0-1)] = -\frac{1}{2}$$

$$k_{31} = k_{13} = 0$$

$$k_{32} = k_{23} = -\frac{1}{2}$$

$$k_{33} = \frac{1}{4(\frac{1}{2})}[(1-1)^2 + (0-1)^2] = \frac{1}{2}$$

Entonces la matriz $[K^e]_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Ahora fabricando la matriz de rigidez \bar{K} tenemos que usando la posición de los nodos tenemos que para el elemento 1:

$$[K^e]_{111} = \bar{K}_{11}, [K^e]_{112} = \bar{K}_{12}, [K^e]_{121} = \bar{K}_{21}, [K^e]_{122} = \bar{K}_{22}$$

$$[K^e]_{113} = \bar{K}_{14}, [K^e]_{123} = \bar{K}_{24}, [K^e]_{131} = \bar{K}_{41}, [K^e]_{132} = \bar{K}_{42}, [K^e]_{133} = \bar{K}_{44}$$

y para el elemento 2 tenemos que:

$$[K^e]_{211} = \bar{K}_2, [K^e]_{212} = \bar{K}_{23}, [K^e]_{213} = \bar{K}_{24}, [K^e]_{121} = \bar{K}_{32}$$

$$[K^e]_{122} = \bar{K}_{33}, [K^e]_{123} = \bar{K}_{34}, [K^e]_{131} = \bar{K}_{42}, [K^e]_{132} = \bar{K}_{43}, [K^e]_{133} = \bar{K}_{44}$$

Todo esto se hizo usando la posición de los nodos los cuales son:

Elemento 1	Global	Local	Elemento 2	Global	Local
(1,0)	2	1	(0,0)	1	1
(1,1)	3	2	(1,0)	2	2
(0,1)	4	3	(0,1)	4	3

Luego formando la matriz \bar{K} tenemos que:

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Y las demás posiciones de \bar{K} se rellenan con ceros.

Ahora construiremos el vector \bar{B} el cual es el vector de cargas la cual lo hallaremos primero hallando por cada elemento y luego lo ensamblaremos, debemos decir

Hallando H_1, H_2 y H_3 tenemos que:

$$H_1 = \frac{1}{2(\frac{1}{2})}[(1,1-0,0)+(0-1)x+(0-1)y] = 1-x-y$$

$$H_2 = \frac{1}{2(\frac{1}{2})}[(0,0-0,1)+(1-0)x+(0-0)y] = x$$

$$H_3 = \frac{1}{2(\frac{1}{2})}[(0,0-1,0)+(0-0)x+(1-0)y] = y$$

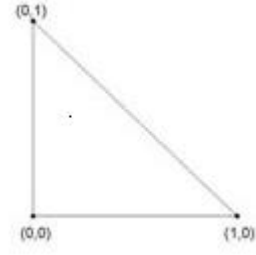


Figura 3.6: Elemento 1

también que el A que necesitamos según la sección anterior, los pasos dichos que hay que seguir es $\frac{1}{2}$ y esto se ha hallado en el paso anterior y comenzaremos con el elemento 1.

Ahora hallando: $\int_{\Omega} H_1 g(x, y) d\Omega$, $\int_{\Omega} H_2 g(x, y) d\Omega$ y $\int_{\Omega} H_3 g(x, y) d\Omega$ entonces tenemos que:

$$\int_{\Omega} H_1 g(x, y) d\Omega = \int_0^1 \int_0^1 (1-x-y)(\sin(xy) + \pi) dx dy = -1,6480$$

$$\int_{\Omega} H_2 g(x, y) d\Omega = \int_0^1 \int_0^1 (x)(\sin(xy) + \pi) dx dy = -0,9439$$

$$\int_{\Omega} H_3 g(x, y) d\Omega = \int_0^1 \int_0^1 (y)(\sin(xy) + \pi) dx dy = -1,7293$$

Estos valores fueron hallados con Wolfram Mathematica , y luego formando el vector $[B]_1$ el cual es:

$$[B]_1 = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} H_1 g(x, y) d\Omega \\ \int_{\Omega} H_2 g(x, y) d\Omega \\ \int_{\Omega} H_3 g(x, y) d\Omega \end{pmatrix}$$

y esto nos da que

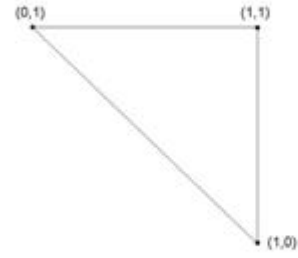
$$[B]_1 = \begin{pmatrix} -1,6480 \\ 0,9439 \\ -1,7323 \end{pmatrix}$$

Ahora para el elemento 2 tenemos que:

Ahora hallando $\int_{\Omega} H_1 g(x, y) d\Omega$, $\int_{\Omega} H_2 g(x, y) d\Omega$ y $\int_{\Omega} H_3 g(x, y) d\Omega$ entonces tenemos que:

$$\int_{\Omega} H_1 g(x, y) d\Omega = \int_0^1 \int_0^1 (1-y)(\sin(xy) + \pi) dx dy = 1,6521$$

$$\int_{\Omega} H_2 g(x, y) d\Omega = \int_0^1 \int_0^1 (x-y)(\sin(xy) + \pi) dx dy = -0,7854$$



Hallando H_1, H_2 y H_3 tenemos que:

$$H_1 = \frac{1}{2(\frac{1}{2})}[(1,1-0,1)+(1-1)x+(0-1)y] = 1-y$$

$$H_2 = \frac{1}{2(\frac{1}{2})}[(0,0-1,0)+(1-0)x+(1-0)y] = x-y$$

$$H_3 = \frac{1}{2(\frac{1}{2})}[(1,1-1,0)+(0-1)x+(1-1)y] = 1-x$$

Figura 3.7: Elemento 2

$$\int_{\Omega} H_3 g(x, y) d\Omega = \int_0^1 \int_0^1 (1-x)(\sin(xy) + \pi) dx dy = 1,6521$$

Estos valores fueron hallados con Wolfram Mathematica , y luego formando el vector $[B]_2$ el cual es:

$$[B]_2 = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} H_1 g(x, y) d\Omega \\ \int_{\Omega} H_2 g(x, y) d\Omega \\ \int_{\Omega} H_3 g(x, y) d\Omega \end{pmatrix}$$

y esto nos da que

$$[B]_2 = \begin{pmatrix} 1,6521 \\ 0,7854 \\ 1,6521 \end{pmatrix}$$

Luego ensamblando la matriz usando el siguiente patrón:

Elemento 1	Global	Local	Elemento 2	Global	Local
(1,0)	2	1	(0,0)	1	1
(1,1)	3	2	(1,0)	2	2
(0,1)	4	3	(0,1)	4	3

Entonces para el elemento 1 y 2 tenemos que:

$$[B]_{111} = \bar{B}_{11}, [B]_{121} = \bar{B}_{21}, [B]_{131} = \bar{B}_{41}$$

$$[B]_{211} = \bar{B}_{21}, [B]_{121} = \bar{B}_{31}, [B]_{131} = \bar{B}_{41}$$

Entonces:

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} -16480 \\ 0,9439 + 1,6521 \\ 0,7854 \\ 1,7293 + 1,6521 \end{pmatrix}$$

La cual al operar tenemos que:

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} -16480 \\ 2,5960 \\ 0,7854 \\ 3,3814 \end{pmatrix}$$

Ahora hallando u de $\overline{K}u = \overline{B}$ donde u es el vector incognita entonces tenemos que:

$$u = \overline{K}^{-1}\overline{B}$$

Entonces operando (usando MatLab 7.0) tenemos que:

$$u = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -16480 \\ 2,5960 \\ 0,7854 \\ 3,3814 \end{pmatrix}$$

y finalmente tenemos que:

$$u = \begin{pmatrix} 2,6414 \\ 6,4941 \\ 5,1148 \\ 2,1647 \end{pmatrix}$$

Y entonces tenemos que:

$$u(0,0) = 2,6814 ; u(1,0) = 6,4941 ; u(1,1) = 5,1148 ; u(0,1) = 2,1657$$

Usando el Toolbox de Matlab tenemos que la solución de esta EDP es:

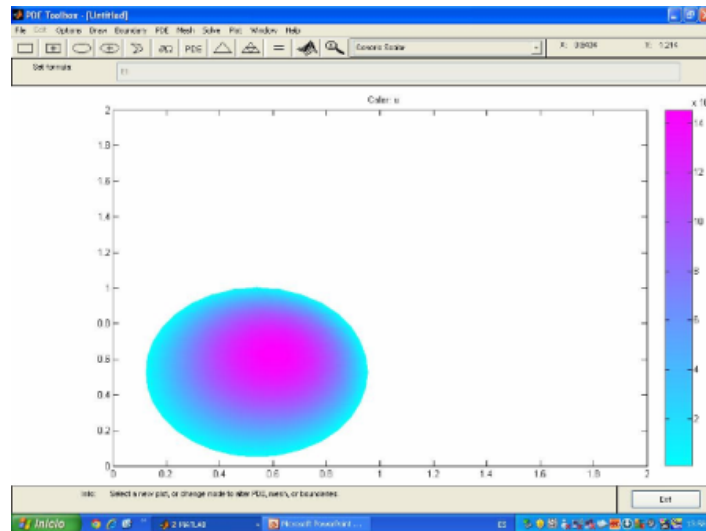


Figura 3.8: Solución de la EDP vista en el eje x-y

Capítulo 4

Conclusiones

- En este trabajo se ha realizado el estudio de la aproximación numérica del Problema de Poisson usando el método de los Elementos finitos , viendose que cuando se hace esto se necesita desarrollar integrales dobles las cuales en el contexto numérico trae dificultad pues allí existen muchos metodos , los cuales , al usar muchos puntos para discretizar el dominio , es donde hay problemas.
- También se puede ver de que las matrices que se generan , al final tendremos que resolver un sistema de ecuaciones , para la cual existen muchos métodos de resolverlo. En el caso del problema usamos la inversa de la matriz pero hay casos en donde hallar ésta es complicado allí se aplican otros métodos como Cholesky , QR,Gauss Jordan ,etc.
- También se puede notar del trabajo que el método de los elementos finitos en el caso de las E.D.O's es un buen método de aproximación ya que se aproxima a la ecuacion original (ver ejemplo aplicativo de el capitulo 2).
- Finalmente podemos decir de que hemos usado el toolbox con facilidad pero hay casos donde esto no se puede usar pues hay veces donde existe otra variable en la ecuación que es la variable tiempo y es mas todavia hay mas dificultades cuando el g no es un solo valor sino es un vector donde cada elemento es una función donde si son mas de 3 o 4 el toolbox de MatLab no lo tiene implementado y en ese caso debemos recurrir a otro programa para poder hallar su solución.

Bibliografía

- [1] Rynne B., Youngson M. Linear Functional Analysis 2008
- [2] Brézis Haim. Análisis Funcional (1983)
- [3] Brenner S., Scott R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods (2002)
- [4] Raviart P., Thomas J. Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles (1983)
- [5] Jara Huanca F. , Loja Cruzado B. . Formulación Variacional de Problemas de Valor de Frontera Elípticos en Espacios de Sobolev (2012)
- [6] Atkinson K., Han W. Theoretical Numerical Analysis - A Functional Analysis Framework (2006)
- [7] Young Kwon W., Bang H . The Finite Element Using MATLAB (2000)
- [8] Gallo R., Calderón G. Introducción a los Elementos Finitos un enfoque práctico (2011)