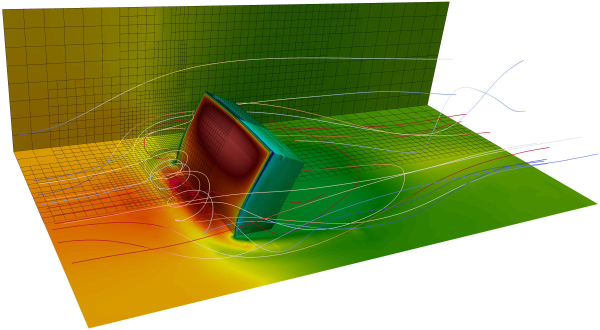

Teoría de elementos finitos

Mg. Dandy Rueda Castillo

Diciembre 13, 2018

Objetivos

1. Introducir la teoría de los espacios de Sobolev para resolver problemas variacionales.

Espacios duales

Sea $(E, \|.\|)$ un espacio normado sobre $\mathbb{R}$.

- Una aplicación

$$\begin{aligned} \phi : & E \to \mathbb{R} \\ & u \longmapsto \langle \phi, u \rangle \end{aligned}$$

  es un funcional lineal si

$$\langle \phi, \alpha u + \beta v \rangle = \alpha \langle \phi, u \rangle + \beta \langle \phi, v \rangle$$

  y es continua si

$$\exists c > 0 : \langle \phi, u \rangle \leq C \|u\|, \quad \forall u \in E$$

- El espacio dual de E está definido como el espacio de todos los funcionales lineales y continuos $\phi : E \to \mathbb{R}$.
- E' siempre es un espacio de Banach con norma

$$\|\phi\|_{E^{prime}} = \sup_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\langle \phi, u \rangle}{\|u\|}$$

Dual de un espacio de Hilbert

- Si H es un espacio de Hilbert: $H' = H$
- Definimos el isomorfismo

$$\mathscr{R} : H' \to H$$

para cada $f \in H'$ por

$$\langle f, v \rangle := \langle \mathscr{R} f, v \rangle_H$$

Espacios de Lebesgue

Dado un conjunto Ω medible de Lebesgue, podemos restringir el trabajo a funciones reales f con dominio Ω que son medibles según Lebesgue. La expresión denota

$$\int_\Omega f(x)\,dx$$

la integral de Lebesgue de f.

Para $1 \leq p < \infty$ sea

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

y para $p = \infty$ definimos

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := ess\ \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$$

Los espacios de Lebesgue se definen como

$$L^p(\Omega) := \left\{f : \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\right\}$$

Teorema

Para $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Teorema

Para $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach.

¿Porqué preferir la integral de Lebesgue a la de Riemann?

Funciones test y distribuciones

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definimos:

- El conjunto de funciones localmente integrables:

$$L^1_{loc}(\Omega) := \left\{ f : f \in L^1(K), \ \forall K \,\text{compacto} \subset \text{interior } \Omega \right\}$$

- El espacio $\mathscr{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ al conjunto de funciones $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto en Ω.
- El espacio $\mathscr{D}(\Omega)$ es llamado espacio de funciones *test*.
- El espacio $\mathscr{D}'(\Omega)$ es llamado espacio de distribuciones.
- $L^1_{loc}(\Omega) \subsetneq \mathscr{D}'(\Omega)$.

Delta de Dirac

Sea $a \in \Omega$ un punto arbitrario, la aplicación

$$\delta_a : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R},\ \varphi \to \varphi(a)$$

es una distribución, es decir $\delta_a \in \mathscr{D}'(\Omega)$, llamada *delta de Dirac.* Además, $\delta_a \notin L^1_{loc}(\Omega)$.

Ejemplo

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{1/\left(|x|^2-1\right)} & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

Se puede probar que

$$\varphi \in \mathscr{D}$$

Derivadas débiles

Decimos que una función $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tiene derivada débil $D^\alpha_w f$ siempre que exista una función $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega g(x)\,\phi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)\,\phi^{(\alpha)}(x)\,dx, \;\; \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

Si tal g existe, definimos

$$D^\alpha_w f = g$$

Ejemplo

Considere $\Omega = [-1, 1]$ y $f(x) = 1 - |x|$. Luego $D_w^1 f$ es

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}$$

Sea k un entero no negativo y sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Supóngase que la derivada débil $D^\alpha_w f$ existe para todo $|\alpha| \leq k$. Se define la norma Sobolev como

$$\|f\|_{W^k_p(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha_w f\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}$$

para $1 \leq p < \infty$ y el caso $p = \infty$:

$$\|f\|_{W^k_\infty(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha_w f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Para $1 \leq p \leq \infty$ se define el espacio de Sobolev

$$W^k_p(\Omega) := \left\{ f \in L^1_{loc}(\Omega) : \|f\|_{W^k_p(\Omega)} < \infty \right\}$$

- Los espacios de Sobolev $W_p^k(\Omega)$ son espacios de Banach.
- Si Ω es cualquier dominio, $0 \leq k \leq m$ (enteros) y $1 \leq p \leq \infty$ (p real) entonces
$$W_p^m(\Omega) \subset W_p^k(\Omega)$$
- Si Ω es acotado, k entero no negativo, p y q reales tal que $1 \leq p \leq q \leq \infty$, entonces
$$W_q^k(\Omega) \subset W_p^k(\Omega)$$

- $V = \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
- $V = L^2(\Omega)$, $\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} := \left(\int_\Omega u(x) v(x) \, dx \right)^{1/2}$
- $V = W_2^k(\Omega)$, $\langle u, v \rangle := \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}$

Notación:

$$H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$$

Teorema de representación de Riesz

Cualquier funcional lineal cualquiera L definido sobre un espacio de Hilbert H puede ser representado de modo único como

$$L(v) = \langle u, v \rangle$$

para algún $u \in H$. Además se tiene

$$\|L\|_{H'} = \|u\|_H$$

Qué buscamos?

Sea V un espacio real de Hilbert con norma asociada $\|\cdot\|_V$ y $A : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal.
Para $f \in V'$ buscamos una solución $u \in V$ del problema variacional

$$A(u,v) = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in V.$$

Propiedades

- $A : V \times V \to \mathbb{R}$ es continua, si existe $\alpha_1 \geq 0$ tal que

$$|A(u,v)| \leq \alpha_1 \|u\|_V \|v\|_V$$

- A es $V-$*coercitiva*, si existe $\alpha_2 > 0$ tal que

$$A(u,u) \geq \alpha_2 \|u\|_V^2 \qquad \forall u \in V$$

Sea V un espacio real de Hilbert y $A : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y $V-$*coercitiva*. Para $f \in V'$ consideremos el problema variacional

$$u \in V : A(u,v) = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in V.$$

Este problema tiene solución única $u \in V$. Además, se cumple

$$\frac{1}{\alpha_1} \|f\|_{V'} \leq \|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha_2} \|f\|_{V'}$$

- Malte Braack. *Elemente Finite*. Vorlesungsskript, 25.5.2012
- Susanne Brenner, Ridgeway Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*