Análisis numérico de elementos finitos

Dr. Stefan Frei
Department of Mathematics
University College London

Curso compacto, Parte IV
Universidad Nacional Agraria La Molina
Agosto 2-8, 2017

Norma de energía

Problema de Poisson

$$(\nabla u, \nabla \phi)_\Omega = (f, \phi)_\Omega \quad \forall \phi \in V$$

Error en la norma de energía

- Elementos P_1

$$\|\nabla(u - u_h)\|_\Omega \leq \|\nabla(u - I_h u)\|_\Omega \leq Ch\|u\|_{H^2(\Omega)}$$

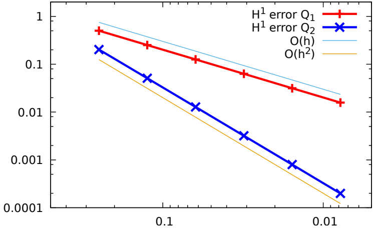
- Elementos P_2

$$\|\nabla(u - u_h)\|_\Omega \leq \|\nabla(u - I_h u)\|_\Omega \leq Ch^2\|u\|_{H^3(\Omega)}$$

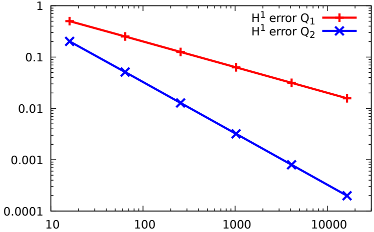
Comparación de convergencia en la norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ para elementos P_1 y P_2

Elegimos el lado derecho f de tal manera que la solución u está conocida:

$$u = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$



Error $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ sobre h



Error $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ sobre N

Overview

Estimación del error L^2

Problema de Poisson: Hallar $u \in V$ tal que

$$a(u, \phi) = (f, \phi) \quad \forall \phi \in V.$$

- "Convergencia de las derivadas" para elementos P_m

$$\|\nabla(u - u_h)\|_\Omega \leq Ch^{m-1} \|u\|_{H^m(\Omega)}$$

- Convergencia de la función u en la norma $L^2(\Omega)$

$$\|u - u_h\|_\Omega \leq Ch^{?} \|u\|_{H^m(\Omega)}$$

Método de Aubin-Nitsche

Introducimos el **problema dual**: Hallar $z \in V$ tal que

$$a(\phi, z) = \left(\frac{u - u_h}{\|u - u_h\|_\Omega}, \phi \right)_\Omega \quad \forall \phi \in V$$

- El problema está bien-definido por el lema de Lax-Milgram
- En un dominio convexo la solución tiene regularidad $z \in H^2(\Omega)$ y

$$\|z\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left\| \frac{u - u_h}{\|u - u_h\|_\Omega} \right\| = C.$$

Con $\phi = u - u_h$ tenemos

$$\|u - u_h\|_\Omega = a(u - u_h, z)$$

Utilizando la ortogonalidad de Galerkin

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_\Omega = a(u - u_h, z - I_h z) &\leq \|\nabla(u - u_h)\|_\Omega \|\nabla(z - I_h z)\|_\Omega \\ &\leq ch^{m-1}\|u\|_{H^m(\Omega)} ch\|z\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq ch^m\|u\|_{H^m(\Omega)}. \end{aligned}$$

Método de Aubin-Nitsche

Introducimos el **problema dual**: Hallar $z \in V$ tal que

$$a(\phi, z) = \left(\frac{u - u_h}{\|u - u_h\|_\Omega}, \phi \right)_\Omega \quad \forall \phi \in V$$

- El problema está bien-definido por el lema de Lax-Milgram
- En un dominio convexo la solución tiene regularidad $z \in H^2(\Omega)$ y

$$\|z\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left\| \frac{u - u_h}{\|u - u_h\|_\Omega} \right\| = C.$$

Con $\phi = u - u_h$ tenemos

$$\|u - u_h\|_\Omega = a(u - u_h, z)$$

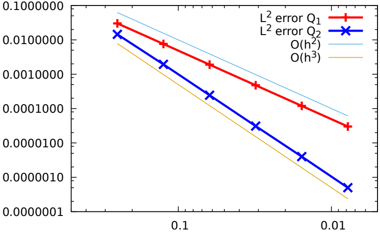
Utilizando la ortogonalidad de Galerkin

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_\Omega = a(u - u_h, z - I_h z) &\leq \|\nabla(u - u_h)\|_\Omega \|\nabla(z - I_h z)\|_\Omega \\ &\leq ch^{m-1}\|u\|_{H^m(\Omega)} ch\|z\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq ch^m\|u\|_{H^m(\Omega)}. \end{aligned}$$

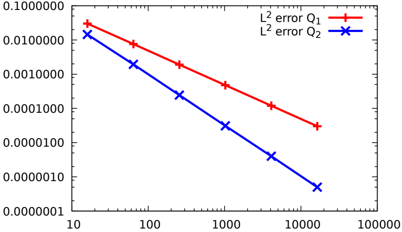
Comparación de convergencia en la norma $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ para elementos P_1 y P_2:

Elegimos el lado derecho f de tal manera que la solución u está conocida:

$$u = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$



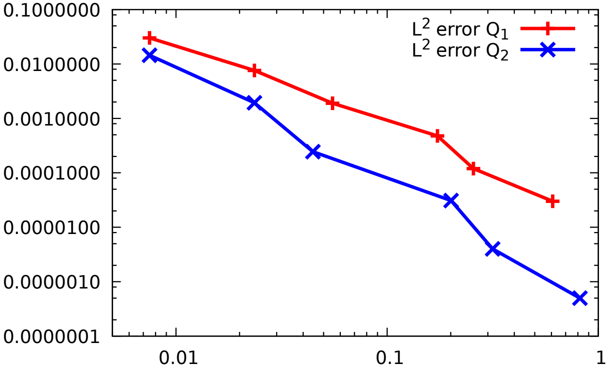
Error $\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}$ sobre h



Error $\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}$ sobre N

Error sobre tiempo computacional

Comparación de convergencia en la norma $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ para elementos P_1 y P_2:



Error $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ sobre tiempo computacional (segundos)

Gascoigne 3d

Biblioteca de elementos finitos GASCOIGNE 3D

- Desarrollada en los grupos de investigación de
  - Malte Braack (Universidad de Kiel, Alemania),
  - Thomas Richter (Universidad de Magdeburg, Alemania)
  - Boris Vexler (Technical University Munich, Alemania)
- Implementación completamente en **C/C++**
- Sistemas de **EDP arbitrarios** (bien-puestos)
- "**Black-box** character"
- "Equal-order" elementos finitos
- Métodos de solución muy eficientes (**Método multi-malla**)
- Control del error *a posteriori*
- Utilizado para problemas en la mecánica de fluidos (Navier-Stokes, combustión, simulaciones cardio-vasculares,...), y de solidos (ecuación de la placa,...), interacción fluido-estructura, optimización con EDP, simulaciones ambientales (hielo marino,...), sistemas biologicos, etc.

Biblioteca de elementos finitos GASCOIGNE 3D

- Desarrollada en los grupos de investigación de
  - Malte Braack (Universidad de Kiel, Alemania),
  - Thomas Richter (Universidad de Magdeburg, Alemania)
  - Boris Vexler (Technical University Munich, Alemania)
- Implementación completamente en **C/C++**
- Sistemas de **EDP arbitrarios** (bien-puestos)
- "**Black-box** character"
- "Equal-order" elementos finitos
- Métodos de solución muy eficientes (**Método multi-malla**)
- Control del error *a posteriori*
- Utilizado para problemas en la mecánica de fluidos (Navier-Stokes, combustión, simulaciones cardio-vasculares,...), y de solidos (ecuación de la placa,...), interacción fluido-estructura, optimización con EDP, simulaciones ambientales (hielo marino,...), sistemas biologicos, etc.

Overview

Ecuaciones de Navier-Stokes

Ecuaciones non-estacionales de **Navier-Stokes**:

$$\begin{aligned} \partial_t v + v \cdot \nabla v - \nu \Delta v - \nabla p = f \text{ en } \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0 \text{ en } \Omega. \end{aligned}$$

- Velocidad $v : \Omega \to \mathbb{R}^d$, presión $p : \Omega \to \mathbb{R}$
- Buen modelo para una gran clase de fluidos y gases
- Teoría es complicada, parcialmente non-resuelto (“Problema del milenio“)
- **Incompresibilidad**: Teorema de Stokes

$$\int_\Omega \operatorname{div} v \, dx = \int_{\partial\Omega} v \cdot n \, ds = 0$$

Lo que entra, tiene que salir!

Ecuaciones de Navier-Stokes

Ecuaciones non-estacionales de **Navier-Stokes**:

$$\begin{aligned} \partial_t v + v \cdot \nabla v - \nu \Delta v - \nabla p = f \text{ en } \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0 \text{ en } \Omega. \end{aligned}$$

- Velocidad $v : \Omega \to \mathbb{R}^d$, presión $p : \Omega \to \mathbb{R}$
- Buen modelo para una gran clase de fluidos y gases
- Teoría es complicada, parcialmente non-resuelto (“Problema del milenio“)
- **Incompresibilidad**: Teorema de Stokes

$$\int_\Omega \operatorname{div} v \, dx = \int_{\partial\Omega} v \cdot n \, ds = 0$$

Lo que entra, tiene que salir!

Ecuaciones de Stokes

Aproximación en el caso de **fluidos muy viscosos** (por ejemplo miel):
Ecuaciones non-estacionales de **Stokes**

$$\begin{aligned} \partial_t v - \nu \Delta v + \nabla p &= f \text{ in } \Omega, \\ \operatorname{div} v &= 0 \text{ in } \Omega. \end{aligned}$$

Si converge a un **limite estacional**

$$\begin{aligned} -\nu \Delta v - \nabla p &= f \text{ in } \Omega, \\ \operatorname{div} v &= 0 \text{ in } \Omega. \end{aligned}$$

Hallar $v \in \mathcal{V}, p \in \mathcal{L}$ *tal que*

$$\nu(\nabla v, \nabla\phi)_\Omega - (p, \mathrm{div}\phi)_\Omega = (f, \phi)_\Omega \quad \forall \phi \in \mathcal{V},$$
$$(\mathrm{div}\, v, \xi)_\Omega = 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{L}.$$

Existencia de una velocidad

Formulación reducida: Espacio de la funciones de divergencia zero:

$$\mathcal{V}^0 = \{v \in \mathcal{V}, (\mathrm{div}\, v, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{L}\}$$

Hallar $v \in \mathcal{V}^0$ *tal que*

$$\nu(\nabla v, \nabla\phi)_\Omega = (f, \phi)_\Omega \quad \forall \phi \in \mathcal{V}^0.$$

Formulación variacional

Hallar $v \in \mathcal{V}, p \in \mathcal{L}$ *tal que*

$$\begin{aligned} \nu(\nabla v, \nabla\phi)_\Omega - (p, \mathrm{div}\phi)_\Omega = (f, \phi)_\Omega \quad \forall\phi \in \mathcal{V}, \\ (\mathrm{div}\, v, \xi)_\Omega = 0 \quad \forall\xi \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Existencia de una velocidad
Formulación reducida: Espacio de la funciones de divergencia zero:

$$\mathcal{V}^0 = \{v \in \mathcal{V}, (\mathrm{div}\, v, \xi) = 0 \quad \forall\xi \in \mathcal{L}\}$$

Hallar $v \in \mathcal{V}^0$ *tal que*

$$\nu(\nabla v, \nabla\phi)_\Omega = (f, \phi)_\Omega \quad \forall\phi \in \mathcal{V}^0.$$

Existencia de una velocidad v

Formulación reducida: *Hallar $v \in \mathcal{V}^0$ tal que*

$$\nu(\nabla v, \nabla \phi)_\Omega = (f, \phi)_\Omega \quad \forall \phi \in \mathcal{V}^0.$$

Sea $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$. El espacio

$$\mathcal{V}^0 = \{v \in H_0^1(\Omega)^2, (\mathrm{div} v, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{L}\}$$

es un sub-espacio de $H_0^1(\Omega)$, por eso un espacio Hilbert.

El lema de Lax-Milgram asegura la **existencia y unicidad** de una solución $v \in \mathcal{V}^0$.

Existencia de una presión p

La **existencia de una presión** p es más complicada: *Hallar* $p \in \mathcal{L}$ *tal que*

$$(p, \mathrm{div}\phi)_\Omega = \nu(\nabla v, \nabla\phi)_\Omega - (f, \phi)_\Omega \quad \forall \phi \in \mathcal{V}.$$

- Espacio natural: $\mathcal{L} \subset L^2(\Omega)$, cómo $v \in \mathcal{V} \subset H_0^1(\Omega)^2$
- p **no es única** en $L^2(\Omega)$: Integración por partes

$$(\nabla p, \phi)_\Omega = \nu(\nabla v, \nabla\phi)_\Omega - (f, \phi)_\Omega \quad \forall \phi \in \mathcal{V}.$$

  Si p es solución, p+const es otra.

  Solución: $\mathcal{L} = L_0^2(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega),\ \int_\Omega v\, dx = 0\}$

- La forma bilineal $b(p, \phi) := (p, \mathrm{div}\phi)_\Omega$ no es coerciva

La **existencia de una presión** p es más complicada: *Hallar* $p \in \mathcal{L}$ *tal que*

$$(p, \mathrm{div}\phi)_\Omega = \nu(\nabla v, \nabla\phi)_\Omega - (f, \phi)_\Omega \quad \forall\phi \in \mathcal{V}.$$

- Espacio natural: $\mathcal{L} \subset L^2(\Omega)$, cómo $v \in \mathcal{V} \subset H_0^1(\Omega)^2$
- p **no es única** en $L^2(\Omega)$: Integración por partes

$$(\nabla p, \phi)_\Omega = \nu(\nabla v, \nabla\phi)_\Omega - (f, \phi)_\Omega \quad \forall\phi \in \mathcal{V}.$$

  Si p es solución, $p+$const es otra.

  Solución: $\mathcal{L} = L_0^2(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega),\ \int_\Omega v\,dx = 0\}$

- La forma bilineal $b(p, \phi) := (p, \mathrm{div}\phi)_\Omega$ no es coerciva

Existencia de una presión p

La **existencia de una presión** p es más complicada: *Hallar* $p \in \mathcal{L}$ *tal que*

$$(p, \operatorname{div}\phi)_\Omega = \nu(\nabla v, \nabla\phi)_\Omega - (f, \phi)_\Omega \quad \forall \phi \in \mathcal{V}.$$

- Espacio natural: $\mathcal{L} \subset L^2(\Omega)$, cómo $v \in \mathcal{V} \subset H_0^1(\Omega)^2$
- p **no es única** en $L^2(\Omega)$: Integración por partes

  $$(\nabla p, \phi)_\Omega = \nu(\nabla v, \nabla\phi)_\Omega - (f, \phi)_\Omega \quad \forall \phi \in \mathcal{V}.$$

  Si p es solución, $p+$const es otra.

  Solución: $\mathcal{L} = L_0^2(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega), \int_\Omega v\, dx = 0\}$
- La forma bilineal $b(p, \phi) := (p, \operatorname{div}\phi)_\Omega$ no es coerciva

Sistemas de puntos de silla

Consideramos el problema general con espacios Hilbert $\mathcal{V}$ y $\mathcal{L}$:
Hallar $v \in \mathcal{V}, p \in \mathcal{L}$ tal que

$$\begin{aligned} a(v,\phi) + b(p,\phi) &= (f,\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{V}, \\ b(v,\xi) &= (g,\xi) \quad \forall \xi \in \mathcal{L}. \end{aligned} \tag{1}$$

Condiciones:

- $a(\cdot,\cdot)$ es $\mathcal{V}$-coercivo: Existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

- La forma $b(\cdot,\cdot)$ cumple una condición inf-sup (Babuška-Brezzi): Existe $\beta > 0$ tal que

$$\sup_{\phi \in \mathcal{V}} \frac{b(p,\phi)}{\|\phi\|_{\mathcal{V}}} \geq \beta \|p\|_{\mathcal{L}} \quad \forall \phi \in \mathcal{L}.$$

Teorema (Babuška,Brezzi)

Bajo estas dos condiciones existe una solución única (v,p) de (1) para cada $f \in \mathcal{V}^*, g \in \mathcal{L}^*$ y se cumple

$$\|v\|_{\mathcal{V}} + \|p\|_{\mathcal{L}} \leq C\{\|f\|_{\mathcal{V}^*} + \|g\|_{\mathcal{L}^*}\}.$$

Condición inf-sup

- Coercividad

$$a(v,v) = \nu(\nabla v, \nabla v) = \nu\|\nabla v\|_\Omega^2 \geq \frac{\nu}{1+c_P^2}\|v\|_{H^1(\Omega)}^2$$

- Para los espacios $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)^2, \mathcal{L} = L_0^2(\Omega)$ se cumple la condición

$$\sup_{\phi\in\mathcal{V}} \frac{(p, \mathrm{div}\phi)}{\|\phi\|_{\mathcal{V}}} \geq \beta\|p\|_{\mathcal{L}}$$

  Prueba: Complicada, literatura: *Temam, The Navier-Stokes equations*

Las ecuaciones de Stokes tienen **una solución** (v,p) **única** que cumple

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|p\|_\Omega \leq C\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

(Dependencia continua de los datos f)

En vez de $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)^2$, podemos poner condiciones de Dirichlet solo en partes $\Gamma \subset \partial\Omega$

$$\mathcal{V} = H_0^1(\Omega;\Gamma)^2$$

- Necesitamos $|\Gamma| > 0$ para la $\mathcal{V}$-coercividad de $a(\cdot,\cdot)$
- En $\Gamma_N := \partial\Omega \setminus \Gamma$, la ecuación

$$\nu(\nabla v, \nabla\phi)_\Omega - (p, \operatorname{div}\phi)_\Omega = (f,\phi)_\Omega$$

  contiene la condición implicita (**do-nothing condition**)

$$\nu\partial_n v - pn = 0 \quad \text{en } \Gamma_N.$$

  Esta condición se utiliza frecuentemente cuando el dominio **continua** depues de Γ_N
- Si $|\Gamma_N| > 0$, podemos elegir $\mathcal{L} = L^2(\Omega)$

Condiciones de frontera

En vez de $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)^2$, podemos poner condiciones de Dirichlet solo en partes $\Gamma \subset \partial\Omega$

$$\mathcal{V} = H_0^1(\Omega; \Gamma)^2$$

- Necesitamos $|\Gamma| > 0$ para la $\mathcal{V}$-coercividad de $a(\cdot, \cdot)$
- En $\Gamma_N := \partial\Omega \setminus \Gamma$, la ecuación

$$\nu(\nabla v, \nabla\phi)_\Omega - (p, \mathrm{div}\phi)_\Omega = (f, \phi)_\Omega$$

  contiene la condición implicita (**do-nothing condition**)

$$\nu\partial_n v - pn = 0 \quad \text{en } \Gamma_N.$$

  Esta condición se utiliza frecuentemente cuando el dominio **continua** depues de Γ_N
- Si $|\Gamma_N| > 0$, podemos elegir $\mathcal{L} = L^2(\Omega)$

La condición

$$\nu(\nabla v + \nabla v^T)n - pn = 0 \text{ en } \Gamma_N$$

tiene significado físico cuando el dominio **termina** después de Γ_N (Ejemplo: agua saliendo del caño)

Formulación variacional

$$\nu(\nabla v, \nabla\phi)_\Omega - (p, \mathrm{div}\phi)_\Omega + \nu\left((\nabla v^T)n, \phi\right)_{\Gamma_N} = (f, \phi)_\Omega \quad \forall\phi \in \mathcal{V},$$

$$(\mathrm{div}\, v, \xi)_\Omega = 0 \quad \forall\xi \in \mathcal{L}.$$

La condición

$$\nu(\nabla v + \nabla v^T)n - pn = 0 \text{ en } \Gamma_N$$

tiene significado físico cuando el dominio **termina** después de Γ_N (Ejemplo: agua saliendo del caño)

Formulación variacional

$$\begin{aligned} \nu(\nabla v, \nabla\phi)_\Omega - (p, \mathrm{div}\phi)_\Omega + \nu\left((\nabla v^T)n, \phi\right)_{\Gamma_N} &= (f, \phi)_\Omega \quad \forall\phi \in \mathcal{V}, \\ (\mathrm{div}\, v, \xi)_\Omega &= 0 \quad \forall\xi \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Overview

Espacios conformes $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$, $\mathcal{L}_h \subset \mathcal{L}$:

- La **coercividad** de $a(\cdot, \cdot)$ se hereda automaticamente para $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$
- La **condición inf-sup** es una relación entre los espacios $\mathcal{V}_h, \mathcal{L}_h$ que tiene que ser probado

Si se cumple la condición inf-sup

$$\sup_{\phi_h \in \mathcal{V}_h} \frac{(p_h, \mathrm{div}\phi_h)}{\|\phi_h\|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta \|p_h\|_\Omega \quad \forall \phi_h \in \mathcal{L}_h$$

el teorema de Babuška-Brezzi implica **existencia y unicidad** para la formulación variacional

Hallar $v_h \in \mathcal{V}_h, p_h \in \mathcal{L}_h$ tal que

$$\begin{aligned} \nu(\nabla v_h, \nabla \phi_h)_\Omega - (p_h, \mathrm{div}\phi_h)_\Omega &= (f, \phi_h)_\Omega \quad \forall \phi_h \in \mathcal{V}_h, \\ (\mathrm{div} v_h, \xi_h)_\Omega &= 0 \quad \forall \xi_h \in \mathcal{L}_h. \end{aligned}$$

Discretización

Espacios conformes $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$, $\mathcal{L}_h \subset \mathcal{L}$:

- La **coercividad** de $a(\cdot,\cdot)$ se hereda automaticamente para $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$
- La **condición inf-sup** es una relación entre los espacios $\mathcal{V}_h, \mathcal{L}_h$ que tiene que ser probado

Si se cumple la condición inf-sup

$$\sup_{\phi_h \in \mathcal{V}_h} \frac{(p_h, \mathrm{div}\phi_h)}{\|\phi_h\|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta \|p_h\|_\Omega \quad \forall \phi_h \in \mathcal{L}_h$$

el teorema de Babuška-Brezzi implica **existencia y unicidad** para la formulación variacional

Hallar $v_h \in \mathcal{V}_h, p_h \in \mathcal{L}_h$ tal que

$$\begin{aligned} \nu(\nabla v_h, \nabla \phi_h)_\Omega - (p_h, \mathrm{div}\phi_h)_\Omega &= (f, \phi_h)_\Omega \quad \forall \phi_h \in \mathcal{V}_h, \\ (\mathrm{div} v_h, \xi_h)_\Omega &= 0 \quad \forall \xi_h \in \mathcal{L}_h. \end{aligned}$$

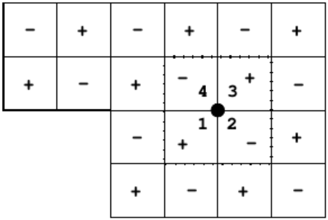
Elementos simples

Los elementos conformes más simples no son *inf-sup* estables ($\mathcal{V}_h - \mathcal{L}_h$)

- Elementos $P_1 - P_0$ sobre triángulos y $Q_1 - Q_0$ sobre quadriláteros
  Pruebe en triangulaciones en quadriláteros uniformes:

$$\sup_{\phi_h \in \mathcal{V}_h} \frac{(\xi_h, \mathrm{div}\phi_h)}{\|\phi_h\|_{H^1(\Omega)}} = 0$$

  para la función $\xi \in \mathcal{L}_h$ definido por $\xi_h = \pm 1$ alternantamente (”checkerboard instability“)



  Prueba: Mostrar con $v = (\alpha, \beta)\phi_i$

- Elementos $P_k - P_k$ en triángulos y $Q_k - Q_k$ en quadriláteros

Teorema (Fortin)

Sea $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ y $\mathcal{L}_h \subset \mathcal{L}$. Si existe una proyección $\pi_h : \mathcal{V} \to \mathcal{V}_h$ con las siguentes propiedades:

$$\begin{aligned} \|\nabla \pi_h \phi\| &\leq c_\pi \|\nabla \phi\| \quad \forall \phi \in \mathcal{V} && \text{estabilidad } H^1 \\ (\nabla \cdot (\phi - \pi_h \phi), \xi_h) &= 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{V},\, \xi_h \in \mathcal{L}_h && \text{ortogonalidad discreta} \end{aligned}$$

Entonces, se cumple la *condición inf-sup* discreta

$$\frac{\gamma}{c_\pi} \|p_h\| \leq \sup_{\phi_h \in \mathcal{V}_h} \frac{(p_h, \nabla \cdot \phi_h)}{\|\nabla \phi_h\|}$$

Criterio de Fortin (Prueba)

Prueba: Utilizamos la *condición inf-sup* continuo ($p_h \in \mathcal{L}_h \subset \mathcal{L}$)

$$\gamma \|p_h\| \leq \sup_{\phi \in V} \frac{(p_h, \nabla \cdot \phi)}{\|\nabla \phi\|}$$

Introducimos $\pm \pi_h \phi \in V_h$ y utilizamos las dos condiciones:

$$\begin{aligned}
\gamma \|p_h\| &\leq \sup_{\phi \in V} \left(\frac{\overbrace{(p_h, \nabla \cdot (\phi - \pi_h \phi))}^{=0}}{\|\nabla \phi\|} + \frac{(p_h, \nabla \cdot (\pi_h \phi))}{\|\nabla \phi\|} \right) \\
&= \sup_{\phi \in V} \frac{(p_h, \nabla \cdot (\pi_h \phi)) \|\nabla \pi_h \phi\|}{\|\nabla \pi_h \phi\| \, \|\nabla \phi\|} \\
&\leq c_\pi \sup_{\phi \in V} \frac{(p_h, \nabla \cdot \pi_h \phi)}{\|\nabla \pi_h \phi\|} \leq c_\pi \sup_{\phi_h \in V_h} \frac{(p_h, \nabla \cdot \phi_h)}{\|\nabla \phi_h\|}
\end{aligned}$$

Criterio de Fortin (Prueba)

Prueba: Utilizamos la *condición inf-sup* continuo ($p_h \in \mathcal{L}_h \subset \mathcal{L}$)

$$\gamma \|p_h\| \leq \sup_{\phi \in V} \frac{(p_h, \nabla \cdot \phi)}{\|\nabla \phi\|}$$

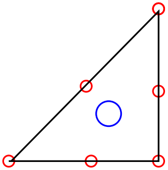
Introducimos $\pm \pi_h \phi \in V_h$ y utilizamos las dos condiciones:

$$\begin{aligned}
\gamma \|p_h\| &\leq \sup_{\phi \in V} \left(\overbrace{\frac{(p_h, \nabla \cdot (\phi - \pi_h \phi))}{\|\nabla \phi\|}}^{=0} + \frac{(p_h, \nabla \cdot (\pi_h \phi))}{\|\nabla \phi\|} \right) \\
&= \sup_{\phi \in V} \frac{(p_h, \nabla \cdot (\pi_h \phi)) \|\nabla \pi_h \phi\|}{\|\nabla \pi_h \phi\| \, \|\nabla \phi\|} \\
&\leq c_\pi \sup_{\phi \in V} \frac{(p_h, \nabla \cdot \pi_h \phi)}{\|\nabla \pi_h \phi\|} \leq c_\pi \sup_{\phi_h \in V_h} \frac{(p_h, \nabla \cdot \phi_h)}{\|\nabla \phi_h\|}
\end{aligned}$$

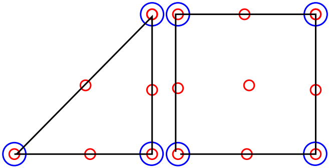
Elementos inf-sup estables

Con el criterio de Fortin podemos mostrar que los siguientes elementos son inf-sup estables

- Elemento $P_2 - P_0$ en triángulos, $Q_2 - P_0$ en quadriláteros



- Elementos **Taylor-Hood** $P_2 - P_1$ y $Q_2 - Q_1$



Más general: $Q^k - Q^{k-1}$ en quadriláteros ($k \geq 2$), pero solo $P^k - P^{k-2}$ en triángulos ($k \geq 3$)

Elementos con funciones "bulbos"

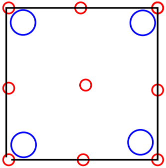
- El elemento estable con menos grados de libertad por elemento es el **elemento "MINI"** $P_1^b - P_1$, donde

$$P_1^b = P_1 \bigoplus \text{span}(xy(h-x-y))$$

- Los elementos $P_k^b - P_{k-1}$, donde

$$P_k^b = P_k \bigoplus \text{span}(xy(h-x-y))$$

- Elementos con **presión discontinua** $Q_k - P_{k-1}^{dc}$, $Q_k - Q_{k-1}^{dc}$, $P_k^b - P_{k-1}^{dc}$



Elementos con funciones "bulbos"

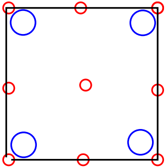
- El elemento estable con menos grados de libertad por elemento es el **elemento "MINI"** $P_1^b - P_1$, donde

$$P_1^b = P_1 \bigoplus \text{span}(xy(h-x-y))$$

- Los elementos $P_k^b - P_{k-1}$, donde

$$P_k^b = P_k \bigoplus \text{span}(xy(h-x-y))$$

- Elementos con **presión discontinua** $Q_k - P_{k-1}^{dc}$, $Q_k - Q_{k-1}^{dc}$, $P_k^b - P_{k-1}^{dc}$



Si el espacio de la presión es discontinua

$$\mathcal{L}_h = \{v \in \mathcal{L}, v_{|T} \in P_k(T) \,\forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

tenemos **conservación de masa local** en cada elemento T

Prueba: Podemos elegir

$$\xi_h = \begin{cases} 1 \text{ en } T, \\ 0 \text{ en } \Omega \setminus T \end{cases}$$

cómo función test:

$$0 = \int_\Omega \text{div } v_h \, \xi_h \, dx = \int_T \text{div } v_h \, dx = \int_{\partial T} v_h \cdot n \, dx$$

Problema continuo: *Hallar* $v \in \mathcal{V}, p \in \mathcal{L}$ *tal que*

$$\begin{aligned} \nu(\nabla v, \nabla \phi)_\Omega - (p, \mathrm{div}\phi)_\Omega &= (f, \phi)_\Omega \quad \forall \phi \in \mathcal{V}, \\ (\mathrm{div} v, \xi)_\Omega &= 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Problema discreto: *Hallar* $v_h \in \mathcal{V}_h, p_h \in \mathcal{L}_h$ *tal que*

$$\begin{aligned} \nu(\nabla v_h, \nabla \phi_h)_\Omega - (p_h, \mathrm{div}\phi_h)_\Omega &= (f, \phi_h)_\Omega \quad \forall \phi_h \in \mathcal{V}_h, \\ (\mathrm{div} v_h, \xi_h)_\Omega &= 0 \quad \forall \xi_h \in \mathcal{L}_h. \end{aligned}$$

Ortogonalidad de Galerkin

$$\begin{aligned} \nu(\nabla(v - v_h), \nabla \phi_h)_\Omega &- ((p - p_h), \mathrm{div}\phi_h)_\Omega \\ &+ (\mathrm{div}(v - v_h), \xi_h)_\Omega = 0 \quad \forall \phi_h \in \mathcal{V}_h, \xi_h \in \mathcal{L}_h. \end{aligned}$$

Conclusión

Ecuaciones de Stokes/Navier-Stokes:

$$\begin{aligned} \partial_t v + v \cdot \nabla v - \nu \Delta v - \nabla p &= f \text{ en } \Omega, \\ \operatorname{div} v &= 0 \text{ en } \Omega. \end{aligned}$$

- Buena aproximación para la **mayoría de fluidos y gases**
- La **condición *inf-sup*** es esenciál para la teoría de las ecuaciones

$$\sup_{\phi \in \mathcal{V}} \frac{(\operatorname{div}\phi, p)}{\|\phi\|_{\mathcal{V}}} \geq \beta \|p\|_{\mathcal{L}} \quad \forall \phi \in \mathcal{L}.$$

- Condición natural para partes $\Gamma_N \subset \partial\Omega$, donde no se impone condiciones de Dirichlet (*do-nothing condition*)

$$\nu \partial_n v - pn = 0 \quad \text{ en } \Gamma_N.$$

- Dos posibilidades para obtener un sistema discreto **bien-puesto**
  1. Espacios $\mathcal{V}_h - \mathcal{L}_h$ que cumplen una **condición *inf-sup* discreta**
  2. Agregar terminos de estabilización a la formulación variacional (mañana)

Espacios $\mathcal{V}_h - \mathcal{L}_h$ que cumplen una **condición *inf-sup* discreta**

$$\sup_{\phi_h \in \mathcal{V}_h} \frac{(\mathrm{div}\phi_h, p_h)}{\|\phi_h\|_{\mathcal{V}}} \geq \beta_h \|p_h\|_{\mathcal{L}} \quad \forall \phi_h \in \mathcal{L}_h.$$

- $\mathcal{V}_h$ tiene que ser **suficientemente grande** en relación a $\mathcal{L}_h$
- **Criterio de Fortin** para probar que elementos son *inf-sup* estables
- Elementos de **Taylor-Hood** son populares: $P_2 - P_1$ y $Q_k - Q_{k-1}$
- Agregando funciones con "bulbos": $P_k^b - P_{k-1}$, MINI-element $P_1^b - P_1$
- Estimación del error (mañana)

$$\nu \|\nabla(v - v_h)\|_\Omega + \|p - p_h\|_\Omega \leq ch^{m_v} \|\nabla^{m_v+1} v\|_\Omega + ch^{m_p+1} \|\nabla^{m_p+1} p\|_\Omega$$

favorece elementos $P_m - P_{m-1}$ o $Q_m - Q_{m-1}$