Análisis numérico de elementos finitos

Dr. Stefan Frei
Department of Mathematics
University College London

Curso compacto
Universidad Nacional Agraria La Molina
Agosto 2-8, 2017

Overview

Vita en breve

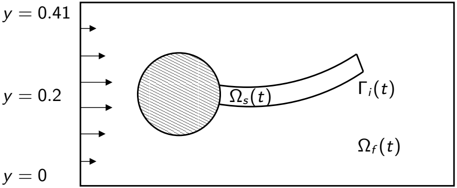
- 2004 - 2010: Estudios “Diplom” en matemáticas con mención en Calculo Científico
- Universidad de Heidelberg, Alemania
- Tesis en el grupo de análisis numerico (Prof. Dr. Dr. hc. Rolf Rannacher)
  Tema: Optimización con EDP

Fraunhofer ITWM

- 01/2011 - 07/2011: Proyecto de investigación en el instituto Fraunhofer de matemática industrial en Kaiserslautern, Alemania
- Alrededor de 200 matemáticos, físicos y ingenieros
- La prueba que se puede "hacer dinero" con la matemática aplicada
- Investigación sobre métodos numéricos para problemas multi-escalas

Doctorado

- 09/2011 - 03/2017: Proyectos y estudios de doctorado en la universidad de Heidelberg
- Doctorado sobre metodos numéricos para problemas de interacción fluido-estructura
- Asesor: Prof. Dr. Thomas Richter



University College London

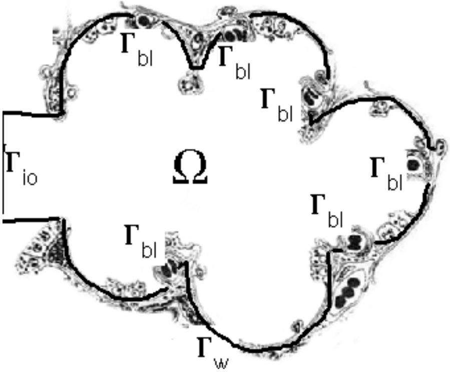
- Proyecto de investigación financiado por el German Research Foundation (DFG) por 2 años
- Problemas de contacto con interacción fluido-estructura
- En collaboración con Prof. Dr. Erik Burman (UCL)

Peru

- 2006/07: Ciclo de intercambio en la Universidad Nacional de Trujillo (UNT)
- 2014: Escuela de verano en la UNT financiado por el DAAD (Servicio de intercambio académico alemán)
- 2015: Escuela de invierno en la PUCP Lima
- 2016: Escuela de verano en la UFRGS, Porto Alegre, Brazil

Proyecto FINCyT

- 2015/16: Proyecto de investigación *Dinámica bidimensional del flujo de gases (O_2 y CO_2) en los sacos alveolares del pulmón humano mediante el método de elementos finitos*
- Con Luis J. Caucha (Tumbes, UNT), Dr. Obidio Rubio Mercedes (UNT), Dr. Julio C. Cruz (Piura)
- Publicaciones en preparación



Lineas de investigación

Analisis y desarrollo de metodos numéricos en las areas de

- **Problemas con interfaces**
  - S.F., Thomas Richter: *A locally modified parametric finite element method for* ***(elliptic) interface problems***, SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 52(5), 2315–2334 (2014)
  - S.F., Thomas Richter: *A second-order time-stepping scheme for* ***parabolic interface problems*** *with moving interfaces*, accepted for publication at ESAIM: M2AN (2016)
  - S.F., Thomas Richter: *Discretization of parabolic problems on moving domains with moving interfaces*, Oberwolfach Reports, vol. 55 (2015)
- **Interacción fluido estructura**
  - S.F., Thomas Richter: *An accurate* ***Eulerian approach*** *for fluid-structure interactions*, Fluid-Structure Interaction: Modeling, Adaptive Discretization and Solvers, Radon Series on Computational and Applied Mathematics (to appear, 2017)
  - S.F., Thomas Richter, Thomas Wick: *Long-term simulation of* ***large deformation****,* ***mechano-chemical*** *fluid-structure interactions in ALE and fully Eulerian coordinates*, Journal of Comput. Physics 321, 874-891 (2016)
  - S.F., Thomas Richter, Thomas Wick: ***Eulerian techniques*** *for fluid-structure interactions - Part I: Modeling and simulation, Part II: Applications*, Lecture Notes in Science and Engineering, Proceedings of ENUMATH 2013
  - Stefan Knauf, S.F., Thomas Richter, Rolf Rannacher: *Towards a complete numerical description of* ***lubricant film dynamics in ball bearings***, Computational Mechanics 53(2), 239-255 (2014)

Lineas de investigación II

Analisis y desarrollo de metodos numéricos en las areas de

- **Mecánica de fluidos**
  - S.F.: *An edge-based **pressure stabilisation** technique for anisotropic finite element grids*, submitted (2017)
  - Luis J. Caucha, S.F., Obidio R. Mercedes, *Finite element simulation of fluid dynamics and CO2 gas exchange in the alveolar sacs of the **human lung***, in preparation

- **Optimización con EDP**
  - Thomas Carraro, Simon Dörsam, S.F., Daniel Schwarz, *An adaptive Newton algorithm for optimal control problems with application to **optimal electrode design***, submitted (2017)
  - S.F., Heiko Andrä, Rene Pinnau, Oliver Tse: *Optimizing fiber orientation in **fiber-reinforced composites** using efficient upscaling*, Computational Optimization and Applications 62 (1), 111-129 (2015)
  - S.F., Rolf Rannacher, Winnifried Wollner: *A priori error estimates for the finite element discretization of **optimal distributed control problems** governed by the biharmonic operator*, Calcolo 50(3), 165-193 (2013)

Overview

Overview

Contenidos del curso

Teoría de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP)

- Problema bien-propuesto en el sentido de Hadamard
- Formulación variacional
- Derivadas débiles y espacios de Sobolev
- Lema de Lax-Milgram
- Desigualdad de Poincaré
- Condiciones de frontera
- Ecuación de Laplace

Método de elementos finitos

- Método de Galerkin: $V_h \subset V$
- Triangulación del dominio y discretización
- Derivación del sistema lineal
- Ejemplos de elementos finitos

Contenido II

Análisis del error para problemas elípticas

- Ortogonalidad de Galerkin
- Propiedad de la mejor aproximación
- Estimación en le norma de energía
- Lema de Bramble-Hilbert
- Estimación en la norma de L^2 por un argumento dual

Mecánica de fluidos y aplicaciones

- Elementos finitos en la mecánica de fluidos
- Ecuaciones de Stokes y de Navier-Stokes
- Condición inf-sup (Babuška-Brezzi)
- Aplicaciones en la biología y otras ciéncias

Computación

- Demonstración de la bibliotéca de elementos finitos *Gascoigne 3D*
- Investigación de resultados computacionales y comparación con la teoría

Literatura

Literatura en inglés

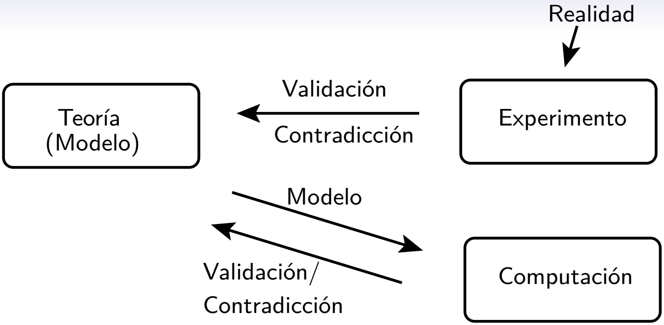
- **Endre Süli** (University of Oxford), *Lecture Notes on Finite Element Methods for Partial Differential Equations*, https://people.maths.ox.ac.uk/suli/fem.pdf
- **Christian Grossmann, Hans-G. Roos, Martin Stynes**, *Numerical Treatment of Partial Differential Equations*
- **Dietrich Braess**, *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*
- **Susanne Brenner, Ridgeway Scott**, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*
- **Alfio Quarteroni**: *Numerical Models for Differential Problems*
- **Roger Temam**: *Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*

Literatura (cont.)

Manuscritos en alemán:

- **Rolf Rannacher**: *Numerische Mathematik 2: Numerik partieller Differentialgleichungen* y *Numerische Mathematik 3: Numerische Methoden für Probleme der Kontinuumsmechanik*, Universität Heidelberg
- **Thomas Richter**: *Numerische Methoden für partielle Differentialgleichungen* y *Numerische Methoden der Strömungsmechanik*, Universität Heidelberg/Magdeburg
- **Malte Braack**: *Finite Elemente 1+2*, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

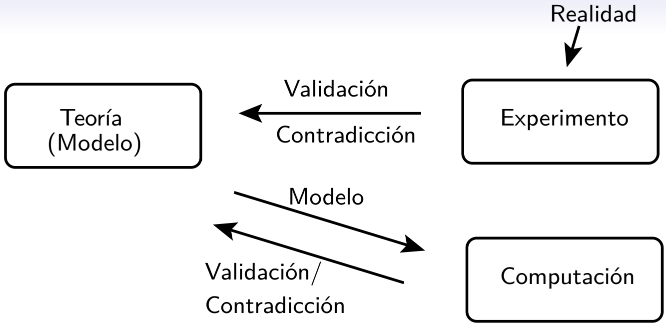
Los tres pilares de la ciéncia moderna



Computación vs experimentos

- **Costos** de los experimentos
- Experimentos pueden ser peligrosos (por ejemplo dentro del cuerpo humano) o imposibles (por ejemplo escalas muy pequeñas)
- Posibilidad de obtener un "**imagen completo**" en la simulación
- Estudios de **diferentes modelos/parametros** y **optimización**
- Control del error (de discretización) con análisis matemático vs control de **errores de medida**?
- La simulación solo puede producir lo que está **en el modelo**, mientras que el experimento no depende del modelo, sino de la **realidad**

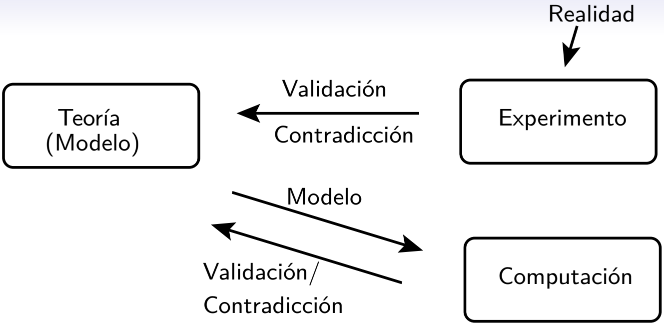
Los tres pilares de la ciéncia moderna



Computación vs experimentos

- **Costos** de los experimentos
- Experimentos pueden ser peligrosos (por ejemplo dentro del cuerpo humano) o imposibles (por ejemplo escalas muy pequeñas)
- Posibilidad de obtener un "**imagen completo**" en la simulación
- Estudios de **diferentes modelos/parametros** y **optimización**
- Control del error (de discretización) con análisis matemático vs control de **errores de medida**?
- La simulación solo puede producir lo que está **en el modelo**, mientras que el experimento no depende del modelo, sino de la **realidad**

Los tres pilares de la ciéncia moderna



Computación vs experimentos

- **Costos** de los experimentos
- Experimentos pueden ser peligrosos (por ejemplo dentro del cuerpo humano) o imposibles (por ejemplo escalas muy pequeñas)
- Posibilidad de obtener un "**imagen completo**" en la simulación
- Estudios de **diferentes modelos/parametros** y **optimización**
- Control del error (de discretización) con análisis matemático vs control de **errores de medida**?
- La simulación solo puede producir lo que está **en el modelo**, mientras que el experimento no depende del modelo, sino de la **realidad**

Overview

Ecuación del calor

Imaginen una fuente de calor en el mitad de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

- Temperatura: $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$
- Temperatura inicial: $u(x, 0) = u^0(x)$
- Difusión del calor: $\lambda \Delta u = \lambda \sum_{i=1}^{d} \partial_i^2 u$
- Fuente: Lado derecho $f(x, t)$
- Si el dominio es isolado: $\partial_n u = 0$ en $\partial\Omega$ (zero flujo)

$$\begin{aligned} \partial_t u - \lambda \Delta u &= f \text{ en } \Omega, \\ \partial_n u &= 0 \text{ en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ecuación del calor (cont.)

- Si el calor es transportado también por un campo de velocidad v (por ejemplo viento)

$$\partial_t u + \beta \cdot \nabla u - \lambda \Delta u = f \text{ en } \Omega$$

- Si flue calor por la frontera (condición de Neumann)

$$\partial_n u = g \text{ en } \partial\Omega$$

- Temperatura fija en la frontera (condición de Dirichlet)

$$u = g \text{ en } \partial\Omega.$$

EDP parabólicas

La ecuación del calor

$$\partial_t u + \beta \cdot \nabla u - \lambda \Delta u = f \text{ en } \Omega$$

es de tipo **parabólico** en el dominio $\Omega \times (0, T)$.

Propiedades (de ecuaciónes parabólicas)

- Un cambio de los valores inciales $u^0(y)$ en alguna región afecta los valores $u(x, \epsilon)$ para $\epsilon > 0$ en todo $x \in \Omega$
  ("velocidad de propagación" infinita)
- Solución única con condiciones iniciales $(u(x, 0) = u^0(x))$ y de frontera $(u = g, \partial_n u = g)$
- Metodo numérico debe considerar las propiedades de la EDP

Ecuación de Laplace

- En muchos casos solo nos interesa el límite estacional u_∞ $(t \to \infty)$
- Si el límite existe, cumple la ecuación

$$\beta \cdot \nabla u - \lambda \Delta u = f \text{ en } \Omega$$

- En el caso más simple (sin transporte)

$$-\lambda \Delta u = f \text{ en } \Omega$$

La ecuación de Laplace es una ecuación **elíptica** en el dominio Ω. Propiedades:

- Un cambio $u(x)$ en algún punto $x \in \Omega$ afecta todo el dominio
- Valores de frontera en todo el dominio necesario, e.g. $\partial_n u = g$, $u = g$ en $\partial\Omega$
- Regularidad de la solución

Ecuación de Laplace

- En muchos casos solo nos interesa el límite estacional u_∞ $(t \to \infty)$
- Si el límite existe, cumple la ecuación

$$\beta \cdot \nabla u - \lambda \Delta u = f \text{ en } \Omega$$

- En el caso más simple (sin transporte)

$$-\lambda \Delta u = f \text{ en } \Omega$$

La ecuación de Laplace es una ecuación **elíptica** en el dominio Ω.
Propiedades:

- Un cambio $u(x)$ en algún punto $x \in \Omega$ afecta todo el dominio
- Valores de frontera en todo el dominio necesario,
  e.g. $\partial_n u = g$, $u = g$ en $\partial\Omega$
- Regularidad de la solución

Ecuación de la onda

$$\partial_t^2 u - c\Delta u = f \text{ en } \Omega$$

- Ecuación **hiperbólica** en $\Omega \times [0, T]$
- Velocidad de propagación finita
- Solución para $\Omega \subset \mathbb{R}$ con datos iniciales $u(x,0) = u^0(x), \partial_t u(x,0) = u^1(x)$ es

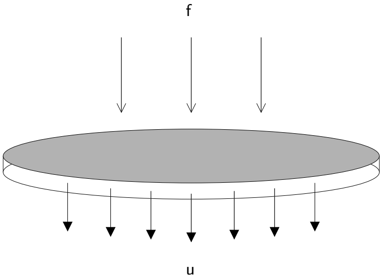
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u^0(x+ct) - u^0(x-ct) + \int_{x-ct}^{x+ct} u^1(s)\,ds\right)$$

  Irregularidades (por ejemplo en el tiempo inicial) serán transportadas con el tiempo
- Método numérico tiene que considerar (posibles) irregularidades

Ecuación de la placa

Suponemos una placa cuya espesor es infinitesimal pequeño. Suya deflección vertical bajo una fuerza f sea u:

$$\Delta^2 u = \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i^2 \partial_j^2 u = f.$$



- Ecuación elíptica de orden 4
- Dos condiciones de frontera, por ejemplo $u = g_1$ y $\partial_n u = g_2$ en $\partial\Omega$ necesário

- Fluidos incompresibles
- Campo de velocidad $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$, presión $p : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \rho(\partial_t u + u \cdot \nabla u) - \nu \Delta u - \nabla p = f, \\ \operatorname{div} \, u = 0. \end{aligned}$$

- Buena aproximación para una gran clase de fluidos y gases
- Tipo parabólico?

Van-Karman vortex street:

(Movie)

Overview

Bien-definido en el sentido de Hadamard

Un problema: Hallar $u \in V$ tal que

$$Au = f \text{ en } \Omega, \quad Bu = g \text{ en } \partial\Omega$$

se llama **bien-definido** en el sentido de Hadamard, si

- **Existencia**: El problema tiene una solución u
- **Unicidad**: La solución u es única
- **Estabilidad**: La solución dependende contínuamente de los datos f, g

Notas

- La validez de las condiciones puede depender del espacio V
- **Estas condiciones son esenciales antes de diseñar un método numérico!**

Bien-definido en el sentido de Hadamard

Un problema: Hallar $u \in V$ tal que

$$Au = f \text{ en } \Omega, \quad Bu = g \text{ en } \partial\Omega$$

se llama **bien-definido** en el sentido de Hadamard, si

- **Existencia**: El problema tiene una solución u
- **Unicidad**: La solución u es única
- **Estabilidad**: La solución dependende contínuamente de los datos f, g

Notas

- La validez de las condiciones puede depender del espacio V
- **Estas condiciones son esenciales antes de diseñar un método numérico!**

Ecuación de Laplace: Formulación variacional

Consideramos el primer problema de Poisson: Hallar $u \in V$ tal que

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

- En general, **existencia** de una solución fuerte (con segundas derivadas parciales) solo en ciertos dominios (etc. frontera suave, etc.)
- Formulación debil/variacional: Hallar $u \in V^0 = \left\{ v \in V \,\middle|\, v = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\}$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx \quad \forall v \in V^0.$$

- **Unicidad** es trivial: Sean u_1, u_2 dos soluciones y $w = u_1 - u_2$. Tenemos

$$\int_\Omega (\nabla w)^2 \, dx = 0 \quad \text{y} \quad w = 0 \text{ en } \partial\Omega \quad \Rightarrow w = 0.$$

- Cual espacio V debemos elegir para asegurar la existencia de soluciones?

Ecuación de Laplace: Formulación variacional

Consideramos el primer problema de Poisson: Hallar $u \in V$ tal que

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

- En general, **existencia** de una solución fuerte (con segundas derivadas parciales) solo en ciertos dominios (etc. frontera suave, etc.)
- Formulación debil/variacional: Hallar $u \in V^0 = \left\{ v \in V \,\middle|\, v = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\}$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx \quad \forall v \in V^0.$$

- **Unicidad** es trivial: Sean u_1, u_2 dos soluciones y $w = u_1 - u_2$. Tenemos

$$\int_\Omega (\nabla w)^2 \, dx = 0 \quad \text{y} \quad w = 0 \text{ en } \partial\Omega \quad \Rightarrow w = 0.$$

- Cual espacio V debemos elegir para asegurar la existencia de soluciones?

Ecuación de Laplace: Formulación variacional

Consideramos el primer problema de Poisson: Hallar $u \in V$ tal que

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

- En general, **existencia** de una solución fuerte (con segundas derivadas parciales) solo en ciertos dominios (etc. frontera suave, etc.)
- Formulación debil/variacional: Hallar $u \in V^0 = \left\{ v \in V \,\middle|\, v = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\}$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx \quad \forall v \in V^0.$$

- **Unicidad** es trivial: Sean u_1, u_2 dos soluciones y $w = u_1 - u_2$. Tenemos

$$\int_\Omega (\nabla w)^2 \, dx = 0 \quad \text{y} \quad w = 0 \text{ en } \partial\Omega \quad \Rightarrow \; w = 0.$$

- Cual espacio V debemos elegir para asegurar la existencia de soluciones?

Overview

Espacios Banach y Hilbert

- **Espacio de Banach**: Espacio lineal con norma $(X, \|\cdot\|_X)$ que es completo, i.e. cada secuencia de Cauchy $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge hacia un elemento $x \in X$
- **Espacio de Hilbert**: Espacio de Banach $(X, (\cdot,\cdot)_X, \|\cdot\|_X)$, donde la norma esta inducido por un producto escalar

$$\|x\|_X = (x, x)_X^{1/2}.$$

Ejemplos:

$$C(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R},\ v \text{ continuo en } \Omega\}$$

- $C(\overline{\Omega})$ es un espacio de Banach con la norma $\|v\|_\infty := \sup_{x\in\Omega} |v(x)|$, pero no un espacio de Hilbert.
- Con la norma $\|v\|_{L^2(\Omega)} = (\int_\Omega v^2\,dx)^{1/2}$, el espacio no es completo
- El mismo problema existe con los espacios de funciones diferenciables

$$C^k(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ las derivadas hasta el orden k existen y son continuos en } \Omega\}$$

- **Espacio de Banach**: Espacio lineal con norma $(X, \|\cdot\|_X)$ que es completo, i.e. cada secuencia de Cauchy $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge hacia un elemento $x \in X$
- **Espacio de Hilbert**: Espacio de Banach $(X, (\cdot,\cdot)_X, \|\cdot\|_X)$, donde la norma esta inducido por un producto escalar

$$\|x\|_X = (x,x)_X^{1/2}.$$

Ejemplos:

$$C(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R},\ v \text{ continuo en } \Omega\}$$

- $C(\overline{\Omega})$ es un espacio de Banach con la norma $\|v\|_\infty := \sup_{x\in\Omega} |v(x)|$, pero no un espacio de Hilbert.
- Con la norma $\|v\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega v^2\, dx\right)^{1/2}$, el espacio no es completo
- El mismo problema existe con los espacios de funciones diferenciables

$$C^k(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ las derivadas hasta el orden k existen y son continuos en } \Omega\}$$

Espacios Banach y Hilbert

- **Espacio de Banach**: Espacio lineal con norma $(X, \|\cdot\|_X)$ que es completo, i.e. cada secuencia de Cauchy $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge hacia un elemento $x \in X$
- **Espacio de Hilbert**: Espacio de Banach $(X, (\cdot,\cdot)_X, \|\cdot\|_X)$, donde la norma esta inducido por un producto escalar

$$\|x\|_X = (x, x)_X^{1/2}.$$

Ejemplos:

$$C(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R},\ v \text{ continuo en } \Omega\}$$

- $C(\overline{\Omega})$ es un espacio de Banach con la norma $\|v\|_\infty := \sup_{x\in\Omega} |v(x)|$, pero no un espacio de Hilbert.
- Con la norma $\|v\|_{L^2(\Omega)} = (\int_\Omega v^2\,dx)^{1/2}$, el espacio no es completo
- El mismo problema existe con los espacios de funciones diferenciables

$$C^k(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ las derivadas hasta el orden k existen y son continuos en } \Omega\}$$

Espacios Banach y Hilbert

- **Espacio de Banach**: Espacio lineal con norma $(X, \|\cdot\|_X)$ que es completo, i.e. cada secuencia de Cauchy $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge hacia un elemento $x \in X$
- **Espacio de Hilbert**: Espacio de Banach $(X, (\cdot,\cdot)_X, \|\cdot\|_X)$, donde la norma esta inducido por un producto escalar

$$\|x\|_X = (x,x)_X^{1/2}.$$

Ejemplos:

$$C(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R},\ v \text{ continuo en } \Omega\}$$

- $C(\overline{\Omega})$ es un espacio de Banach con la norma $\|v\|_\infty := \sup_{x\in\Omega} |v(x)|$, pero no un espacio de Hilbert.
- Con la norma $\|v\|_{L^2(\Omega)} = (\int_\Omega v^2\, dx)^{1/2}$, el espacio no es completo
- El mismo problema existe con los espacios de funciones diferenciables

$$C^k(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ las derivadas hasta el orden k existen y son continuos en } \Omega\}$$

El espacio de funciones L^2

Espacio de funciones "de cuadrado" integrables

$$L^2(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^d \ : \ \int_\Omega f(x)^2 dx < \infty \right\}$$

- Producto escalar

$$(f, g)_\Omega := \int_\Omega f(x) g(x)\, dx$$

- Norma inducida:

$$\|f\|_\Omega := \left(\int_\Omega f(x)^2 dx \right)^{1/2}$$

Notas

- Para que $\| \cdots \|_X$ sea una norma

$$f = g :\Leftrightarrow \exists \text{ un conjunto de medida zero } N \subset \Omega : \quad f(x) = g(x) \quad \forall x \in \Omega \setminus N \tag{1}$$

  f y g coinciden **"casi en todas partes"** (c.t.p.)
- Una función f no es necesariamente definido (unicamente) en un punto $x \in \Omega$
- Definición precisa: Clases de equivalencia con la relación (1)

El espacio de funciones L^2

Espacio de funciones "de cuadrado" integrables

$$L^2(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^d \ : \ \int_\Omega f(x)^2 dx < \infty \right\}$$

- Producto escalar

$$(f, g)_\Omega := \int_\Omega f(x)g(x)\, dx$$

- Norma inducida:

$$\|f\|_\Omega := \left(\int_\Omega f(x)^2 dx \right)^{1/2}$$

Notas

- Para que $\| \cdots \|_X$ sea una norma

$$\begin{aligned} f = g :\Leftrightarrow \exists \text{ un conjunto de medida zero } N \subset \Omega : \\ f(x) = g(x) \quad \forall x \in \Omega \setminus N \end{aligned} \tag{1}$$

  f y g coinciden **"casi en todas partes"** (c.t.p.)
- Una función f no es necesariamente definido (unicamente) en un punto $x \in \Omega$
- Definición precisa: Clases de equivalencia con la relación (1)

$L^2(\Omega)$

Espacio de funciones "de cuadrado" integrables

$$L^2(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^d \; : \; \int_\Omega f(x)^2 dx < \infty \right\}$$

- Producto escalar

$$(f, g)_\Omega := \int_\Omega f(x) g(x) \, dx$$

- Norma inducida:

$$\|f\|_\Omega := \left(\int_\Omega f(x)^2 dx \right)^{1/2}$$

- $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ es completo, i.e. un **espacio de Hilbert**
- Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es acotada, tenemos $C(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$.

Derivada débil: Definiciones

- Soporte

$$\textit{supp}\, \varphi := \overline{\{x \in \Omega \,:\, \varphi(x) \neq 0\}}\,.$$

- Funciones suaves con soporte compacto

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \,:\, \textit{supp}\, u \text{ compacto}\}$$

- Para un multi-index $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ definimos

$$\partial^\alpha u := \frac{\partial^{\alpha_1} \ldots \partial^{\alpha_n} u}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$$

Idea (Existencia): Integración por partes para no necesitar la derivada fuerte

Derivada débil

Una función $w_\alpha \in L^1(\Omega)$ se llama **derivada débil** de grado α de u, si

$$\int_\Omega w_\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \, \partial^\alpha \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Escribimos $D^\alpha u := w_\alpha$.

Notas

- Si existe la derivada $\partial^\alpha u$ fuerte, es **igual a la débil**: $\partial^\alpha u = D^\alpha u$.
- Escribimos ∇u también para el vector de derivadas débiles de orden 1.

Espacio Sobolev

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \,\middle|\, D^\alpha u \in L^2(\Omega)\ \forall \alpha, |\alpha| \leq 1 \right\}$$

Notas:

- $H^1(\Omega)$ contiene los funciones en $L^2(\Omega)$, cuyas derivadas débiles son "de cuadrado" integrables:

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx < \infty$$

- Producto escalar y norma en $H^1(\Omega)$:

$$(u, v)_{H^1} := (u, v)_\Omega + (\nabla u, \nabla v)_\Omega$$
$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := (\|u\|_\Omega^2 + \|\nabla u\|_\Omega^2)^{1/2}$$

- $H^1(\Omega)$ es un **espacio de Hilbert**

Espacio Sobolev

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \,\middle|\, D^\alpha u \in L^2(\Omega) \; \forall \alpha, |\alpha| \leq 1 \right\}$$

Notas:

- $H^1(\Omega)$ contiene los funciones en $L^2(\Omega)$, cuyas derivadas débiles son "de cuadrado" integrables:

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx < \infty$$

- Producto escalar y norma en $H^1(\Omega)$:

$$(u, v)_{H^1} := (u, v)_\Omega + (\nabla u, \nabla v)_\Omega$$
$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := (\|u\|_\Omega^2 + \|\nabla u\|_\Omega^2)^{1/2}$$

- $H^1(\Omega)$ es un **espacio de Hilbert**

$H^m(\Omega)$

- En general para $m \geq 1$

$$H^m(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \,\middle|\, D^\alpha u \in L^2(\Omega)\ \forall \alpha, |\alpha| \leq m \right\}$$

- Si Ω es acotada, $C^m(\Omega) \subseteq H^m(\Omega)$.
- Por otro lado

$$\begin{aligned} &H^1(\Omega) \subset C(\Omega) \ \text{ solo en 1 dimensión } \Omega \subset \mathbb{R} \\ &H^2(\Omega) \subset C(\Omega) \ \text{ for } 1 \leq d \leq 3 \end{aligned}$$

Para ser preciso eso significa: Cada clase de equivalencia en $H^2(\Omega)$ tiene un representante continuo

Son los siguientes funciones en $H^1(\Omega)$ para $\Omega = [-1, 1]^2$?

- Función “max” $u(x, y) = \max\{x, 0\}$
- Función de Heaviside

$$u(x, y) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

- En general: Si

$$u|_{\Omega_i} \in C^1(\Omega_i)\,, \;\; i = 1, 2.$$

y u es continuo en $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}$, entonces $u \in H^1(\Omega)$.

Son los siguientes funciones en $H^1(\Omega)$ para $\Omega = [-1,1]^2$?

- Función "max" $u(x,y) = \max\{x, 0\}$
- Función de Heaviside

$$u(x,y) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

- En general: Si

$$u|_{\Omega_i} \in C^1(\Omega_i)\,, \;\; i = 1, 2.$$

y u es continuo en $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}$, entonces $u \in H^1(\Omega)$.

Espacios duales

- Sea V un espacio con norma $\|\cdot\|_V$
- Definimos el **espacio dual** V^* como espacio de los funcionales lineales y continuos $f: V \to \mathbb{R}$
  - **Lineal**: $f(\alpha u) + f(\beta v) = f(\alpha u + \beta v) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ u, v \in V$
  - **Continuo**: $f(u) \leq C\|u\|_V \quad \forall u \in V.$

- V^* siempre es un espacio de Banach con norma

$$\|f\|_{V^*} := \sup_{u \in V \setminus \{0\}} \frac{f(u)}{\|u\|_V}$$

- Escribimos $H^{-m}(\Omega)$ para el espacio dual de $H^m(\Omega)$. Tenemos

$$\cdots \subset H^{-2}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset H^2(\Omega) \subset \ldots$$

- Sea V un espacio con norma $\|\cdot\|_V$
- Definimos el **espacio dual** V^* como espacio de los funcionales lineales y continuos $f : V \to \mathbb{R}$
  - **Lineal**: $f(\alpha u) + f(\beta v) = f(\alpha u + \beta v) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ u, v \in V$
  - **Continuo**: $f(u) \leq C\|u\|_V \quad \forall u \in V.$
- V^* siempre es un espacio de Banach con norma

$$\|f\|_{V^*} := \sup_{u \in V\setminus\{0\}} \frac{f(u)}{\|u\|_V}$$

- Escribimos $H^{-m}(\Omega)$ para el espacio dual de $H^m(\Omega)$. Tenemos

$$\cdots \subset H^{-2}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset H^2(\Omega) \subset \ldots$$

Overview

Teorema de Lax-Milgram

Sea V un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y $a : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal.

Para $f \in V^*$ hallamos una solución $u \in V$ del problema variacional

$$a(u,\phi) = f(\phi) \qquad \forall \phi \in V. \tag{2}$$

Condiciones:

- $a : V \times V \to \mathbb{R}$ es continuo, i.e. existe $\alpha_1 > 0$ tal que

$$|a(u,\phi)| \leq \alpha_1 \|u\|_V \|\phi\|_V \quad \forall u, v \in V$$

- $a : V \times V \to \mathbb{R}$ es V-coercivo, i.e. existe $\alpha_2 > 0$ tal que

$$a(u,u) \geq \alpha_2 \|u\|_V^2 \qquad \forall u \in V.$$

Bajo estas condiciones **existe una solución única** de (2) para cada $f \in V^*$ y tenemos

$$\frac{1}{\alpha_1}\|f\|_{V^*} \leq \|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha_2}\|f\|_{V^*}.$$

Consideramos el problema: Hallar $u \in V$ tal que

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Sea

$$V^0 = H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ en } \partial\Omega\}.$$

Formulación débil/variacional: Hallar $u \in V^0$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx \quad \forall \phi \in V^0.$$

Para aplicar el teorema de Lax-Milgram definimos

$$a(u, \phi) := (\nabla u, \nabla \phi)_\Omega,$$
$$f(\phi) := (f, \phi)_\Omega$$

Laplace: Existencia y unicidad

Consideramos el problema: Hallar $u \in V$ tal que

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Sea

$$V^0 = H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ en } \partial\Omega\}.$$

Formulación débil/variacional: Hallar $u \in V^0$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx \quad \forall \phi \in V^0.$$

Para aplicar el teorema de Lax-Milgram definimos

$$a(u, \phi) := (\nabla u, \nabla \phi)_\Omega,$$
$$f(\phi) := (f, \phi)_\Omega$$

Laplace: Existencia y unicidad (cont.)

Condiciones de Lax-Milgram

- Continuidad

$$a(u, \phi) = (\nabla u, \nabla \phi)_\Omega \leq \|\nabla u\|_\Omega \|\nabla \phi\|_\Omega \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)}$$

- Coercividad

$$a(u, u) = (\nabla u, \nabla u)_\Omega = \|\nabla u\|_\Omega^2 \geq \frac{1}{1 + c_P^2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

En el última paso utilizamos la desigualdad de Poincaré

$$\|u\|_\Omega \leq c_P \|\nabla u\|_\Omega$$

que es válido para $u \in H_0^1(\Omega)$.

Nota: La desigualdad no es válida para $u \in H^1(\Omega)$, considera $u = const$.

Laplace: Existencia y unicidad (cont.)

Condiciones de Lax-Milgram

- Continuidad

$$a(u, \phi) = (\nabla u, \nabla \phi)_\Omega \leq \|\nabla u\|_\Omega \|\nabla \phi\|_\Omega \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)}$$

- Coercividad

$$a(u, u) = (\nabla u, \nabla u)_\Omega = \|\nabla u\|_\Omega^2 \geq \frac{1}{1 + c_P^2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

En el última paso utilizamos la desigualdad de Poincaré

$$\|u\|_\Omega \leq c_P \|\nabla u\|_\Omega$$

que es válido para $u \in H_0^1(\Omega)$.

Nota: La desigualdad no es válida para $u \in H^1(\Omega)$, considera $u = \mathit{const}$.

Desigualdad de Poincaré

Existe un constante c_P que solo depende del dominio Ω (no de u!) tal que

$$\|u\|_\Omega \leq c_P \|\nabla u\|_\Omega \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Prueba (en el dominio $\Omega = [0, L]^2$):

$$u^2(x,y) = \underbrace{u^2(x,0)}_{=0} + \int_0^y \partial_y u^2(x,\xi)\, d\xi$$

Integración sobre x, y:

$$\|u\|_\Omega^2 \leq 2L \|\partial_y u\|_\Omega \|u\|_\Omega \quad \Rightarrow \; \|u\|_\Omega \leq 2L \|\partial_y u\|_\Omega.$$

Nota: En la prueba solo utilizamos que u es zero en la linea $\Gamma = \{(x,0), 0 \leq x \leq L\} \cup \partial\Omega$.

Desigualdad de Poincaré

Existe un constante c_P que solo depende del dominio Ω (no de u!) tal que

$$\|u\|_\Omega \leq c_P \|\nabla u\|_\Omega \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Prueba (en el dominio $\Omega = [0, L]^2$):

$$u^2(x,y) = \underbrace{u^2(x,0)}_{=0} + \int_0^y \partial_y u^2(x,\xi)\, d\xi$$

Integración sobre x, y:

$$\|u\|_\Omega^2 \leq 2L \|\partial_y u\|_\Omega \|u\|_\Omega \quad \Rightarrow \quad \|u\|_\Omega \leq 2L \|\partial_y u\|_\Omega.$$

Nota: En la prueba solo utilizamos que u es zero en la linea
$\Gamma = \{(x,0), 0 \leq x \leq L\} \cup \partial\Omega$.

Desigualdad de Poincaré

Existe un constante c_P que solo depende del dominio Ω (no de u!) tal que

$$\|u\|_\Omega \leq c_P \|\nabla u\|_\Omega \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Prueba (en el dominio $\Omega = [0, L]^2$):

$$u^2(x,y) = \underbrace{u^2(x,0)}_{=0} + \int_0^y \partial_y u^2(x,\xi)\, d\xi$$

Integración sobre x, y:

$$\|u\|_\Omega^2 \leq 2L \|\partial_y u\|_\Omega \|u\|_\Omega \quad \Rightarrow \; \|u\|_\Omega \leq 2L \|\partial_y u\|_\Omega.$$

Nota: En la prueba solo utilizamos que u es zero en la linea $\Gamma = \{(x,0), 0 \leq x \leq L\} \cup \partial\Omega$.

Variación de los datos f_1, f_2 con soluciones u_1, u_2 respectivas:

$$
\begin{aligned}
(\nabla(u_1-u_2), \nabla(u_1-u_2))_\Omega &= (f_1-f_2, u_1-u_2)_\Omega \\
&\le \|f_1-f_2\|_\Omega \|u_1-u_2\|_\Omega
\end{aligned}
$$

Con la desigualdad de Poincaré

$$\|u_1-u_2\|_\Omega \le c_P \|\nabla(u_1-u_2)\|_\Omega$$

obtenemos

$$\|\nabla(u_1-u_2)\| \le c_P \|f_1-f_2\|_\Omega.$$

Estabilidad/Dependencia continua de los datos

Variación de los datos f_1, f_2 con soluciones u_1, u_2 respectivas:

$$
\begin{aligned}
(\nabla(u_1 - u_2), \nabla(u_1 - u_2))_\Omega &= (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_\Omega \\
&\leq \|f_1 - f_2\|_\Omega \|u_1 - u_2\|_\Omega
\end{aligned}
$$

Con la desigualdad de Poincaré

$$\|u_1 - u_2\|_\Omega \leq c_P \|\nabla(u_1 - u_2)\|_\Omega$$

obtenemos

$$\|\nabla(u_1 - u_2)\| \leq c_P \|f_1 - f_2\|_\Omega.$$

Overview

Condición de Neumann

Consideramos el segundo problema de Poisson: Hallar $u \in V$ tal que

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad \partial_n u = g \text{ en } \partial\Omega.$$

Cómo incluir la condición de Neumann en la formulación variacional?

$$\begin{aligned}(-\Delta u, \phi)_\Omega &= (\nabla u, \nabla \phi)_\Omega - (\partial_n u, \phi)_{\partial\Omega} \\ &= (\nabla u, \nabla \phi)_\Omega - (g, \phi)_{\partial\Omega}\end{aligned}$$

Si no imponemos condiciones de Dirichlet en el espacio, podemos incluir la condición de Neumann "débilmente" en la formulación variacional. Utilizamos $V = H^1(\Omega)$ y

$$(\nabla u, \nabla \phi)_\Omega = (f, \phi)_\Omega + (g, \phi)_{\partial\Omega} \quad \forall \phi \in V.$$

Condición de Neumann

Consideramos el segundo problema de Poisson: Hallar $u \in V$ tal que

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad \partial_n u = g \text{ en } \partial\Omega.$$

Cómo incluir la condición de Neumann en la formulación variacional?

$$\begin{aligned}(-\Delta u, \phi)_\Omega &= (\nabla u, \nabla \phi)_\Omega - (\partial_n u, \phi)_{\partial\Omega} \\ &= (\nabla u, \nabla \phi)_\Omega - (g, \phi)_{\partial\Omega}\end{aligned}$$

Si no imponemos condiciones de Dirichlet en el espacio, podemos incluir la condición de Neumann "débilmente" en la formulación variacional. Utilizamos $V = H^1(\Omega)$ y

$$(\nabla u, \nabla \phi)_\Omega = (f, \phi)_\Omega + (g, \phi)_{\partial\Omega} \quad \forall \phi \in V.$$

Existencia y unicidad, condiciones de Neumann

Formulación variacional: *Hallar* $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$(\nabla u, \nabla \phi)_\Omega = (g, \phi)_{\partial\Omega} + (f, \phi)_\Omega$$

Tiene el problema una solución única?

Formulación variacional: *Hallar* $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$(\nabla u, \nabla \phi)_\Omega = (g, \phi)_{\partial\Omega} + (f, \phi)_\Omega$$

Tiene el problema una solución única?

No. Si u es una solución, $u + const$ es otra.

Teoría: $a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_\Omega$ no es coercivo en $H^1(\Omega)$, porque la **desigualdad de Poincaré** no es valida

Espacios donde la desigualdad es valida:

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) \,\middle|\, v = 0 \text{ en } \Gamma \subset \partial\Omega \text{ donde } |\Gamma| \neq 0 \right\},$$

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega v = 0 \right\}.$$

Mostramos: **Una solución débil es solución fuerte, si tiene suficiente regularidad**.

Sea

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega), v = 0 \,\middle|\, \text{ en } \Gamma \subset \partial\Omega \right\}$$

Consideramos la formulación variacional: *Hallar* $u \in V$ tal que

$$(\nabla u, \nabla \phi)_\Omega = (g, \phi)_{\partial\Omega\setminus\Gamma} + (f, \phi)_\Omega$$

Si $u \in H^2(\Omega)$, integración por partes resulta en

$$(-\Delta u - f, \phi)_\Omega + (\partial_n u - g, \phi)_\Gamma = 0.$$

Mostramos: **Una solución débil es solución fuerte, si tiene suficiente regularidad**.

Sea

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega), v = 0 \Big| \text{ en } \Gamma \subset \partial\Omega \right\}$$

Consideramos la formulación variacional: *Hallar* $u \in V$ tal que

$$(\nabla u, \nabla \phi)_\Omega = (g, \phi)_{\partial\Omega \setminus \Gamma} + (f, \phi)_\Omega$$

Si $u \in H^2(\Omega)$, integración por partes resulta en

$$(-\Delta u - f, \phi)_\Omega + (\partial_n u - g, \phi)_\Gamma = 0.$$

Condiciones de frontera (cont.)

Teorema fundamental del cálculo variacional

Sea $f \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega f\phi\, dx = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Entonces, f es zero en casi todas partes en Ω.

$$C_0^\infty(\Omega) \subset V \Rightarrow \int_\Omega (-\Delta u - f)\phi\, dx = 0\ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \Rightarrow -\Delta u = f \quad \text{c.t.p.} \in \Omega.$$

Teorema fundamental con "$\Omega = \Gamma$", resulta en

$$\partial_n u = g \text{ en c.t.p. de } \partial\Omega \setminus \Gamma$$

Si $u \in H^2(\Omega)$, la solución débil cumple

$$\begin{aligned} \Delta u &= f && \text{en c.t.p. de } \Omega, \\ u &= 0 && \text{en c.t.p. de } \Gamma, \\ \partial_n u &= g && \text{en c.t.p. de } \partial\Omega \setminus \Gamma. \end{aligned}$$

Nota: **Cuidado con las condiciones de frontera que están implicitamente incluido en la formulación variacional!**

Condiciones de frontera (cont.)

Teorema fundamental del cálculo variacional

Sea $f \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega f \phi \, dx = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Entonces, f es zero en casi todas partes en Ω.

$$C_0^\infty(\Omega) \subset V \Rightarrow \int_\Omega (-\Delta u - f)\phi \, dx = 0 \; \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \Rightarrow -\Delta u = f \quad \text{c.t.p.} \in \Omega.$$

Teorema fundamental con "$\Omega = \Gamma$", resulta en

$$\partial_n u = g \text{ en c.t.p. de } \partial\Omega \setminus \Gamma$$

Si $u \in H^2(\Omega)$, la solución débil cumple

$$\begin{aligned} \Delta u &= f && \text{en c.t.p. de } \Omega, \\ u &= 0 && \text{en c.t.p. de } \Gamma, \\ \partial_n u &= g && \text{en c.t.p. de } \partial\Omega \setminus \Gamma. \end{aligned}$$

Nota: **Cuidado con las condiciones de frontera que están implicitamente incluido en la formulación variacional!**

Condiciones de frontera (cont.)

Teorema fundamental del cálculo variacional

Sea $f \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega f\phi\,dx = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Entonces, f es zero en casi todas partes en Ω.

$$C_0^\infty(\Omega) \subset V \Rightarrow \int_\Omega (-\Delta u - f)\phi\,dx = 0\ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \Rightarrow -\Delta u = f \quad \text{c.t.p.} \in \Omega.$$

Teorema fundamental con "$\Omega = \Gamma$", resulta en

$$\partial_n u = g \text{ en c.t.p. de } \partial\Omega \setminus \Gamma$$

Si $u \in H^2(\Omega)$, la solución débil cumple

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \quad && \text{en c.t.p. de } \Omega, \\ u &= 0 \quad && \text{en c.t.p. de } \Gamma, \\ \partial_n u &= g \quad && \text{en c.t.p. de } \partial\Omega \setminus \Gamma. \end{aligned}$$

Nota: **Cuidado con las condiciones de frontera que están implicitamente incluido en la formulación variacional!**

Condiciones de Dirichlet non-homogeneas

Consideramos el problema: Hallar u tal que

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad u = u^D \text{ en } \partial\Omega.$$

Sea $\tilde{u}^d$ una extensión (regular) de u^d hacía Ω.

Definiendo $v := u - \tilde{u}^d$, el problema es equivalente a:
Hallar $v \in V^0$ tal que

$$-\Delta u = f - \Delta \tilde{u}^d \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

- Existencia y unicidad con Lax-Milgram, definiendo $\tilde{f} := f - \Delta \tilde{u}^d$.
- La formulación débil es equivalente a:
  Hallar $u \in \tilde{u}^d + V^0$ tal que

$$(\nabla u, \nabla \phi) = (f, \phi) \text{ en } \Omega.$$

Condiciones de Dirichlet non-homogeneas

Consideramos el problema: Hallar u tal que

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad u = u^D \text{ en } \partial\Omega.$$

Sea $\tilde{u}^d$ una extensión (regular) de u^d hacía Ω.

Definiendo $v := u - \tilde{u}^d$, el problema es equivalente a:
Hallar $v \in V^0$ tal que

$$-\Delta u = f - \Delta\tilde{u}^d \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

- Existencia y unicidad con Lax-Milgram, definiendo $\tilde{f} := f - \Delta\tilde{u}^d$.
- La formulación débil es equivalente a:
  Hallar $u \in \tilde{u}^d + V^0$ tal que

$$(\nabla u, \nabla\phi) = (f, \phi) \text{ en } \Omega.$$

Condición de Robin

Tercer problema de Poisson:

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad \partial_n u + \alpha u = g \text{ en } \partial\Omega.$$

Formulación variacional: *Hallar $u \in V = H^1(\Omega)$ tal que*

$$(\nabla u, \nabla \phi)_\Omega + \alpha(u, \phi)_{\partial\Omega} = (f, \phi)_\Omega \quad \forall \phi \in V.$$

Para $\alpha > 0$, la forma bilineal

$$a(u, \phi) := (\nabla u, \nabla \phi)_\Omega + \alpha(u, \phi)_{\partial\Omega}$$

es coerciva

$\Rightarrow$ Existencia y unicidad en $V = H^1(\Omega)$

Condición de Robin

Tercer problema de Poisson:

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad \partial_n u + \alpha u = g \text{ en } \partial\Omega.$$

Formulación variacional: *Hallar $u \in V = H^1(\Omega)$ tal que*

$$(\nabla u, \nabla \phi)_\Omega + \alpha(u, \phi)_{\partial\Omega} = (f, \phi)_\Omega \quad \forall \phi \in V.$$

Para $\alpha > 0$, la forma bilineal

$$a(u, \phi) := (\nabla u, \nabla \phi)_\Omega + \alpha(u, \phi)_{\partial\Omega}$$

es coerciva
$\Rightarrow$ Existencia y unicidad en $V = H^1(\Omega)$

Regularidad

Si el dominio Ω es suficientemente regular, las soluciones u del problema homogenea de Poisson tienen las regularidades

$$
\begin{aligned}
f \in H^k(\Omega) \quad &\Rightarrow \quad u \in H^{k+2}(\Omega), \\
f \in C^k(\Omega) \quad &\Rightarrow \quad u \in C^{k+2}(\Omega).
\end{aligned}
$$

Pero, en realidad el dominio tiene frecuentemente ángulos

- Si Ω es convexo (ángulos interiores $< 180^\circ$) la solución tiene regularidad $H^2(\Omega)$.

Ejercicio: Ecuación biharmónica

Una formulación variacional para el problema de la placa

$$\Delta^2 u = f, \quad u = \partial_n u = 0 \text{ en } \Omega$$

esta dado por

Hallar $u \in H_0^2(\Omega)$ *tal que*

$$(\Delta u, \Delta \phi)_\Omega = (f, \phi)_\Omega \quad \forall \phi \in H_0^2(\Omega).$$

(a) Aplica el teorema de Lax-Milgram para mostrar existencia y unicidad

(b) Qué condiciones de frontera están implicitamente contenido en la formulación variacional: *Hallar* $u \in V := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$(\Delta u, \Delta \phi) = (f, \phi)_\Omega + (g, \partial_n \phi) \quad \forall \phi \in V.$$

Conclusión

- La formulación variacional (Primer problema de Poisson):
  Hallar $u \in u^d + H_0^1(\Omega)$ *tal que*
  $$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$
  está bien-puesto en el sentido de Hadamard
- Existencia y unicidad de soluciones con el lema de Lax-Milgram
- Desigualdad de Poincaré
- Condiciones de frontera *naturales* pueden ser implicitamente contenido en la formulación variacional
- Si la solución débil tiene suficiente regularidad, es solución fuerte también

Perspectiva: Método numérico

Problema: Todos los espacios V tienen dimensión infinito, pero la computadora es finita!

Tenemos que definir un problema finito (discretización) y analizar el error de la aproximación

Idea de **elementos finitos:** Definir espacios finitos V_h con dimensión $N = \frac{1}{h^d}$ tal que

$$V_{2h} \subset V_h \subset ... \subset V.$$