2

Vectores

Contenido

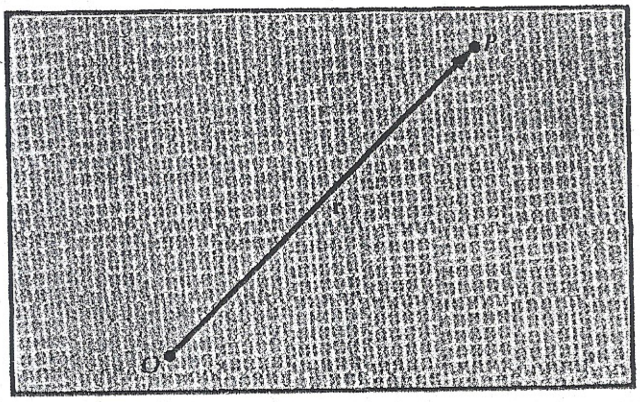


FIG. 2.1 El vector **r** representa la posición de un punto P respecto a otro O considerado como origen.

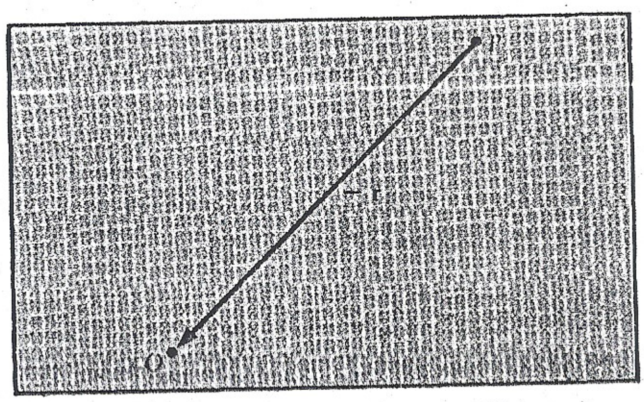


FIG. 2.2 El vector −**r** tiene el mismo módulo y dirección, pero sentido opuesto que **r**.

TERMINOLOGÍA Y CONCEPTOS

La terminología es un ingrediente esencial del pensamiento abstracto. Es difícil pensar fácil y claramente sobre conceptos abstractos y complejos en un lenguaje que no posee las palabras adecuadas para tales conceptos. Para expresar nuevos conceptos científicos se inventan nuevas palabras que se añaden a los idiomas; muchas de estas palabras proceden de raíces clásicas griegas o latinas. Si satisface las necesidades de la comunidad científica, una palabra nueva puede ser adoptada en muchos idiomas modernos. Así, por ejemplo, *vector* en español es *vector* en inglés, *vecteur* en francés, *Vektor* en alemán вектор (pronúnciese «vector»), en ruso.

Un vector es una magnitud que tiene módulo, dirección y sentido y se combina con otros vectores de acuerdo con reglas específicas *. En el estudio de la mecánica (y otras ramas de la física) encontraremos magnitudes (velocidad, fuerza, campo eléctrico, momento dipolar magnético) que tienen magnitud, dirección y sentido y, en consecuencia, es importante desarrollar el lenguaje y las técnicas necesarias para el manejo de estas magnitudes. Aunque el análisis vectorial suele considerarse como una rama de las matemáticas, su valor en física es tan grande que merece la inclusión aquí de una introducción.

Notación vectorial. Como los símbolos forman el lenguaje de las matemáticas, una parte importante del arte del análisis matemático es la técnica de utilizar bien la notación. La notación vectorial tiene dos grandes propiedades:

1. La formulación de una ley física en función de los vectores es independiente de los ejes coordenados que se escojan. La notación vectorial ofrece una terminología en la que los enunciados tienen un significado físico sin introducir en ningún caso un sistema coordenado.

2. La notación vectorial es concisa. Muchas leyes físicas tienen formulaciones sencillas y diáfanas que se desfiguran cuando se escriben referidas a un sistema coordenado particular.

Aunque al resolver un problema físico puede convenir la utilización de sistemas coordenados especiales, deberemos establecer leyes de la física en forma vecto-

(*) Este significado de la palabra vector es una ampliación natural de su utilización inicial en astronomía, ahora en desuso: recta imaginaria que une a un planeta, moviéndose alrededor del foco de una elipse, con dicho punto. La regla específica se da en la página 35.

rial siempre que sea posible. Algunas de las leyes complicadas que no pueden expresarse en forma vectorial, pueden serlo en forma tensorial. Un *tensor* es una generalización de un vector, que incluye a la magnitud vectorial como caso especial. El análisis vectorial tal y como lo conocemos hoy es fundamentalmente el resultado del trabajo realizado hacia finales del siglo diecinueve por Josiah Willard Gibbs y Oliver Heaviside.

La notación vectorial que adoptamos aquí es la siguiente. En la pizarra, una magnitud vectorial se representa colocando una línea ondulada bajo la letra A, o poniéndole encima una flechita; los vectores en los libros impresos siempre aparecen en negritas. El módulo de un vector se imprime en cursiva; A es el módulo de **A**; también se escribe $|\mathbf{A}|$. Un vector unitario es un vector de longitud unidad; un vector unitario en la dirección de **A** se escribe con un signo circunflejo encima, tal como $\hat{\mathbf{A}}$. Resumiremos esta notación mediante la identidad

$$\mathbf{A} \equiv \hat{\mathbf{A}}A \equiv A\hat{\mathbf{A}}$$

En las figuras 2.1 a 2.4 se muestra un vector, el negativo del mismo vector, la multiplicación por un escalar y un vector unitario.

La utilidad y aplicación de los vectores a los problemas físicos está basada esencialmente en la geometría euclidiana. La enunciación de una ley en términos vectoriales normalmente lleva consigo la hipótesis de la validez de esta geometría. Si la geometría no es euclidiana, no es posible sumar dos vectores de un modo sencillo y sin ambigüedad. Para el espacio curvo existe una formulación mucho más general, la geometría métrica diferencial, que es el lenguaje de la relatividad generalizada, dominio de la física en el que la geometría euclidiana no es ya suficientemente precisa.

Hemos considerado que un vector es una magnitud que tiene dirección además de módulo. Esta propiedad no se refiere en absoluto a ningún sistema coordenado, aunque suponemos que puede definirse, por ejemplo, con referencia a la sala del laboratorio, estrellas fijas, etcétera. Veremos, sin embargo, que no todas las magnitudes que tienen módulo y dirección son necesariamente vectores, tales como las rotaciones finitas (véase más adelante en esta sección). Una magnitud que tiene módulo pero *no* dirección es un *escalar*. El módulo de un vector es un escalar. La temperatura y la masa

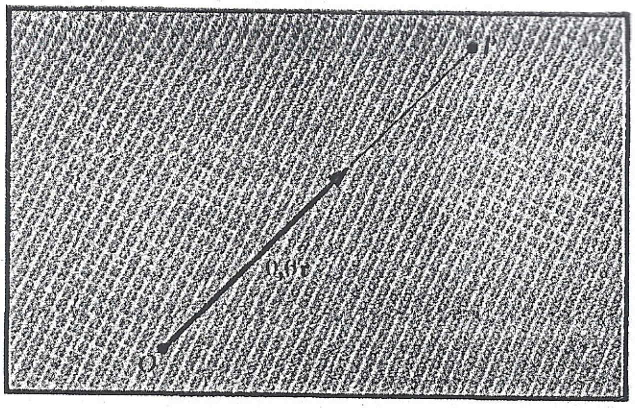


FIG. 2.3 El vector $0{,}6\mathbf{r}$ tiene la misma dirección y sentido que **r**, pero su módulo es $0{,}6r$.

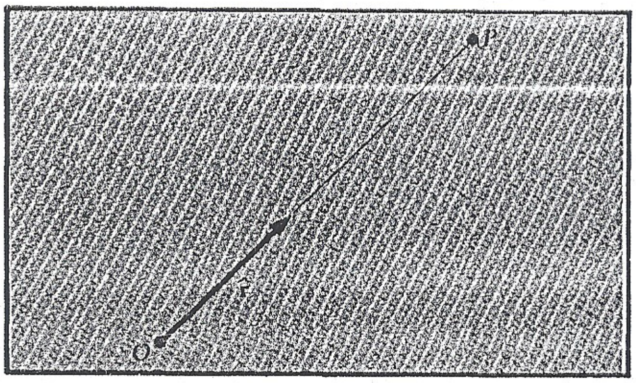


FIG. 2.4 El vector $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario en la dirección de **r**. Obsérvese que $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}r$.

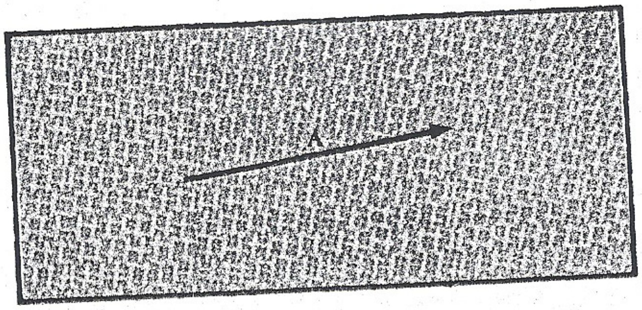
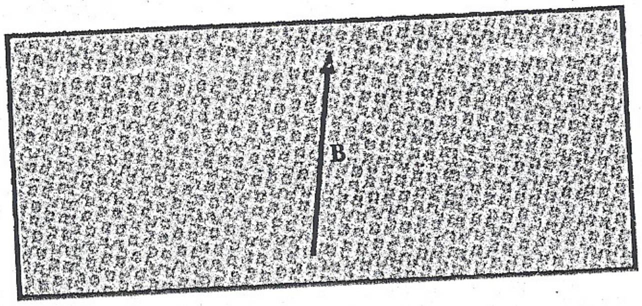
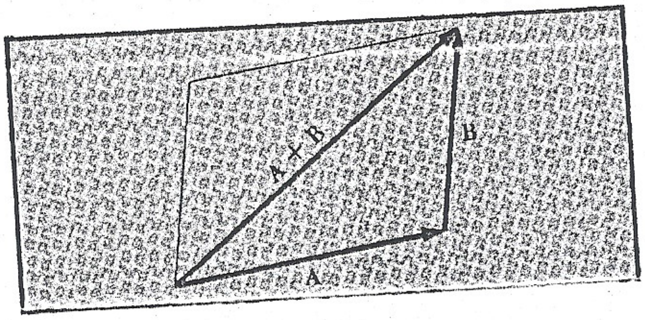


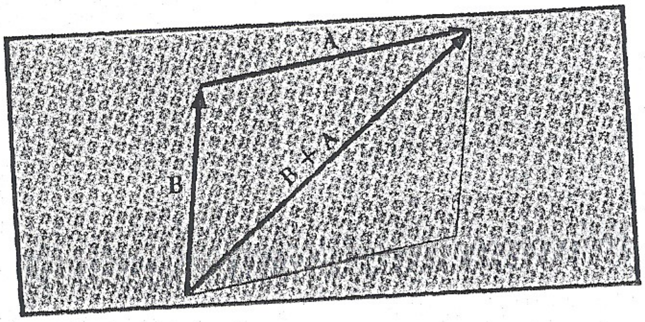
FIG. 2.5 *a*) Vector **A**.



b) Vector **B**.



c) Vector suma **A** + **B**.



d) El vector suma **B** + **A** es igual a **A** + **B**.

son escalares. En cambio, la velocidad **v** y la fuerza **F** son vectores.

Igualdad de vectores. Una vez desarrollada la notación procederemos a realizar algunas operaciones vectoriales: suma, resta y multiplicación. Dos vectores, **A** y **B** que representen magnitudes físicas similares (por ejemplo, fuerzas) se dice que son iguales cuando poseen el mismo módulo, dirección y sentido; se escribe así, **A** = **B**. Un vector no tiene necesariamente que estar ligado a una posición determinada, aunque puede referirse a una magnitud definida en un punto particular. Dos vectores pueden compararse aunque midan magnitudes físicas definidas en distintos puntos del espacio y diferentes instantes. Si no tuviéramos confianza, basada en la experimentación, que podemos considerar plano el espacio, es decir, euclidiano —excepto quizás a distancias enormes— no podríamos entonces comparar sin ambigüedad dos vectores en puntos diferentes (véase la Nota Matemática 1 al final del Cap. 2).

SUMA VECTORIAL

Un vector se representa geométricamente por un segmento lineal dirigido, o flecha, cuya longitud en unidades a una escala definida es igual a la magnitud del vector. La suma de dos vectores **A** y **B** se define por la construcción geométrica indicada en las figuras 2.5 *a* a *c*. Esta construcción se llama con frecuencia *ley del paralelogramo de la adición vectorial.* La suma **A** + **B** se define trasladando **B** paralelamente a sí mismo hasta que el origen de **B** coincida con el extremo de **A**. El vector dibujado desde el origen de **A** al extremo de **B** es la suma **A** + **B**. De la figura se deduce que **A**+**B**=**B**+**A**, es decir, la suma vectorial tiene la propiedad conmutativa, como indica la fig. 2.5 *d*. La substracción de vectores se define mediante las figuras 2.6 *a* y *b* con **B**+(—**B**) = = 0, que define el vector negativo.

La suma vectorial satisface la relación **A** + (**B** + **C**) = = (**A** + **B**) + **C**, es decir, satisface la propiedad asociativa (fig. 2.7). La suma de un número finito de vectores es independiente del orden en que se sumen. Si **A** — **B** = = **C**, entonces sumando **B** en ambos miembros obtendremos **A** = **B** + **C**. Si k es un escalar

$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B} \tag{2.1}$$

de modo que la multiplicación de un vector por un escalar satisface la propiedad distributiva.

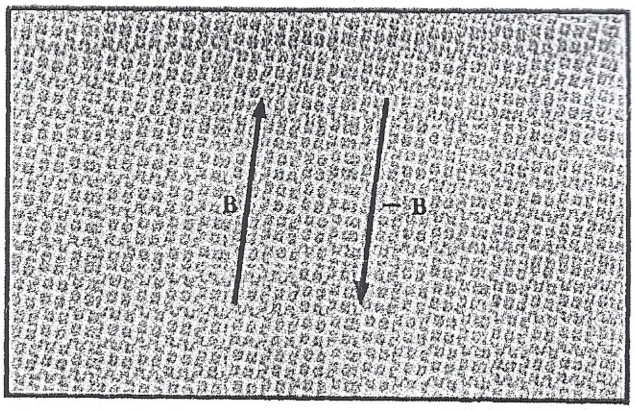
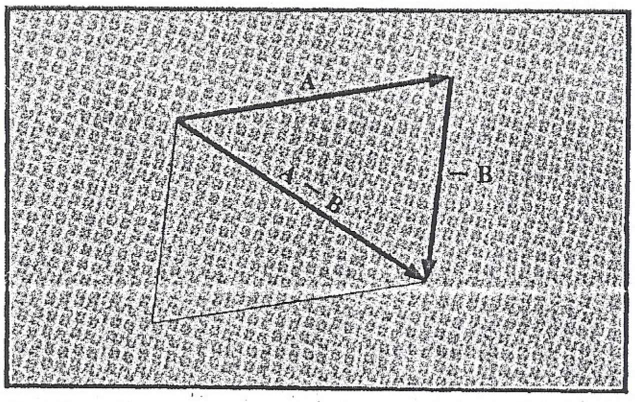


FIG. 2.6 *a*) Vectores **B** y —**B**.



b) Obtención de **A** — **B**; vector diferencia.

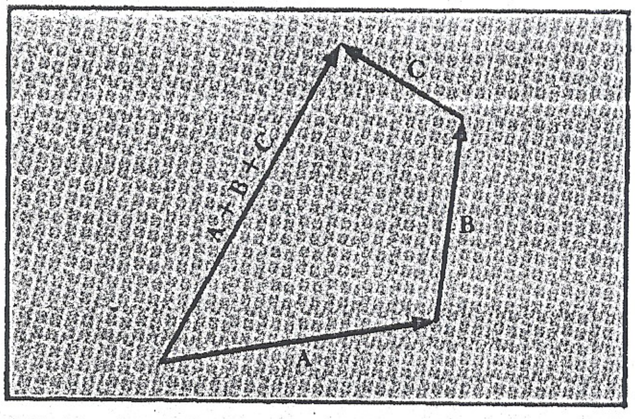


FIG. 2.7 Suma de tres vectores: **A** + **B** + **C**. Compruébese que esta suma es igual a **B**+ **A** + **C**.

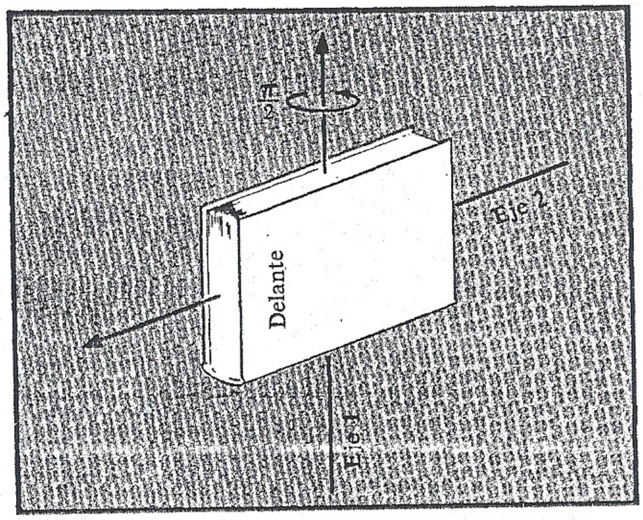
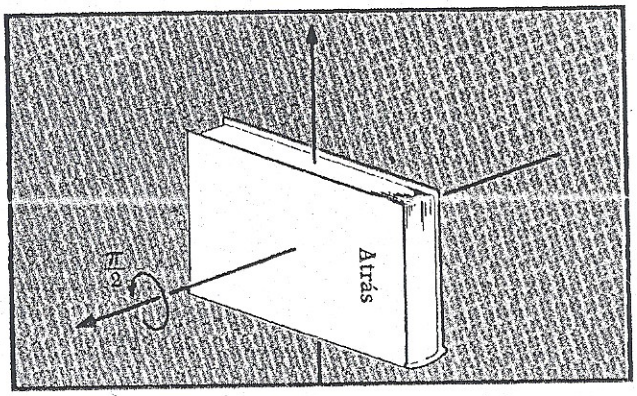
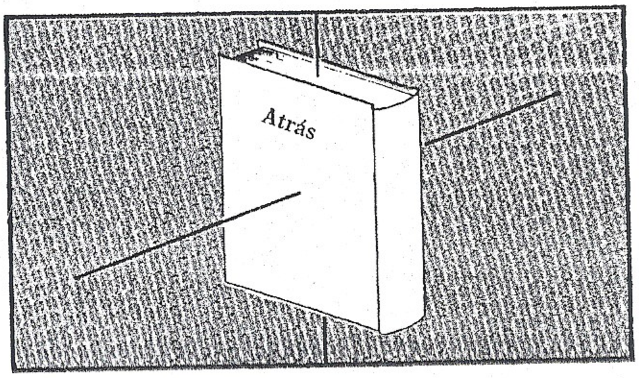


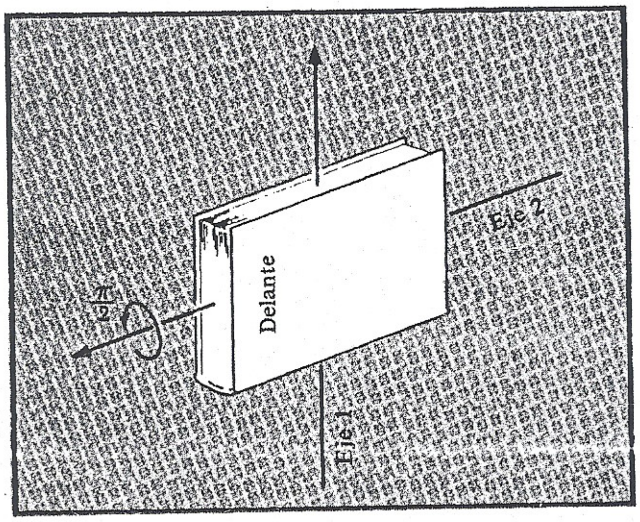
FIG. 2.8 *a*) Orientación original del libro. Se le hace girar $\pi/2$ radianes alrededor del eje 1.



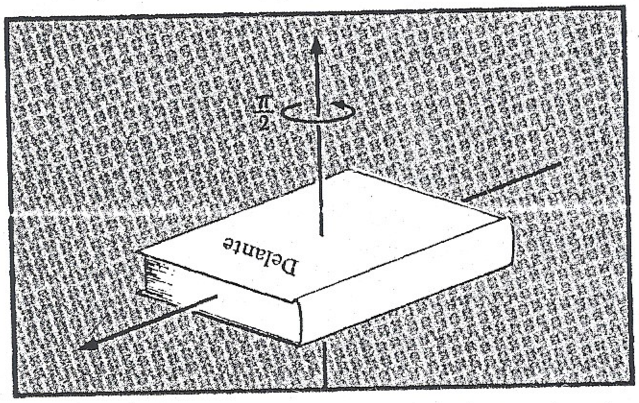
b) Orientación después de una rotación de $\pi/2$ radianes alrededor del eje 1.



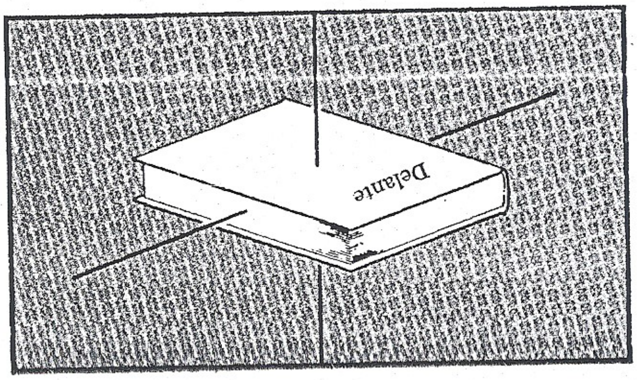
c) Orientación después de una rotación posterior de $\pi/2$ radianes alrededor del eje 2.



d) Orientación original del libro.



e) Orientación después de una rotación de $\pi/2$ radianes alrededor del eje 2.



f) Orientación después de una rotación posterior de $\pi/2$ radianes alrededor del eje 1.

¿Cuándo es representable una magnitud física por un vector? Un desplazamiento es un vector, ya que describe tanto la dirección de la línea desde la posición inicial a la final como la longitud de la línea; el ejemplo de adición dado anteriormente se reconoce fácilmente aplicándolo a los desplazamientos en el espacio euclidiano. Además de los desplazamientos existen otras magnitudes físicas que tienen las mismas leyes de combinación y las mismas propiedades de invariancia que los desplazamientos. Estas magnitudes pueden representarse también por vectores. Para que una magnitud sea vectorial debe satisfacer dos condiciones:

1. Debe cumplir la ley de adición del paralelogramo.
2. Debe tener un módulo y una dirección y sentido independientes de la elección del sistema de coordenadas.

Las rotaciones finitas no son vectores. No todas las magnitudes que tienen módulo y dirección son necesariamente vectores. Por ejemplo, la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje particular fijo en el espacio tiene módulo (el ángulo de rotación) y dirección (la dirección del eje). Pero dos rotaciones como éstas no se combinan de acuerdo con la ley vectorial de la adición, a no ser que los ángulos de rotación sean infinitamente pequeños *. Esto se comprueba fácilmente si los dos ejes son perpendiculares entre sí y las rotaciones son de $\pi/2$ radianes (90 grados). Considérese el objeto (un libro) de la fig. 2.8 *a*. La rotación (1) lo lleva a la posición de la fig. 2.8 *b* y otra rotación (2) a continuación sobre otro eje, deja el objeto como en la fig. 2.8 *c*. Pero si aplicamos al objeto, orientado como al principio (fig. 2.8 *d*), primero la rotación (2) (fig. 2.8 *e*) y luego la (1), el objeto termina como indica la fig. 2.8 *f*. La orientación en la sexta figura *no* es la misma que la existente en la tercera. Evidentemente, estas rotaciones no cumplen la propiedad conmutativa de la suma. A pesar del hecho de que tienen módulo y dirección, las rotaciones finitas no pueden representarse como vectores.

PRODUCTOS DE VECTORES

Aunque no existe razón para preguntarse si la suma de dos vectores es un escalar o un vector, tal cuestión tiene importancia en lo que se refiere al producto de dos vectores. Existen dos modos de definir el producto de

(*) Las velocidades angulares son vectores y, en cambio, las rotaciones angulares no lo son.

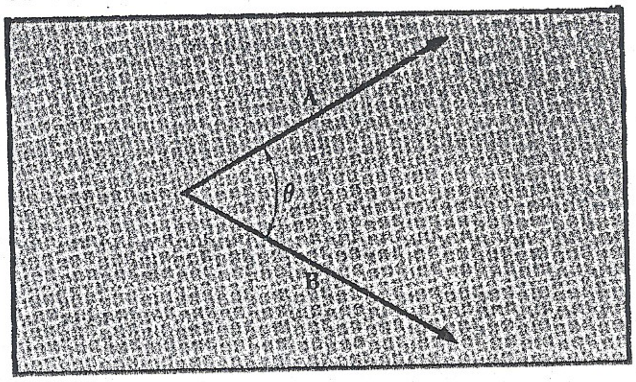
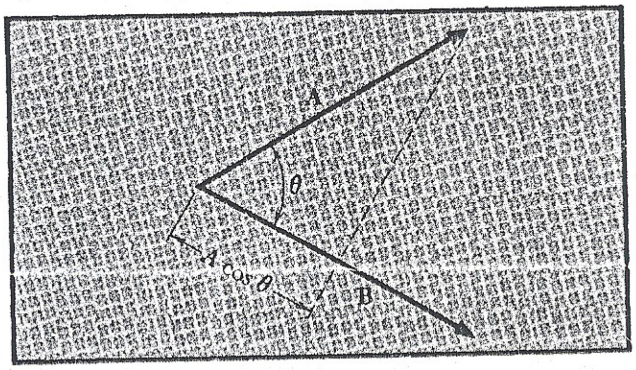
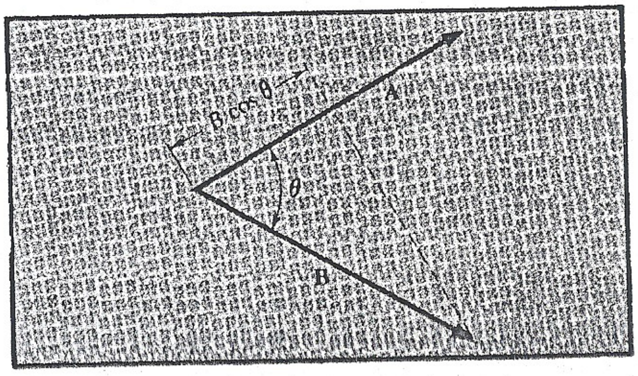


FIG. 2.9 *a*) Para obtener **A · B** llevar los vectores **A** y **B** hasta un origen común.



b) $B(A\cos\theta) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$.



c) $A(B\cos\theta) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. Aquí, la letra griega theta, θ, designa el ángulo comprendido entre **A** y **B**.

dos vectores, de gran utilidad ambos. Los dos tipos satisfacen la ley distributiva de la multiplicación: el producto de **A** por la suma de $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ es igual a la suma de los productos de **A** por **B** más **A** por **C**. Uno de los productos es un escalar y el otro se puede considerar un vector en la mayoría de las aplicaciones. Los dos son útiles en física. Otras posibles definiciones del producto de dos vectores no son de utilidad. ¿Por qué AB no es una definición útil del producto de dos vectores? Por AB queremos indicar el producto ordinario, $|\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}|$, de los módulos de **A** y **B**. Obsérvese que si $\mathbf{D} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, entonces en general $AD \neq AB + AC$. Esta carencia de la propiedad distributiva hace que AB sea inútil como definición de producto de **A** y **B**.

Producto escalar de dos vectores. Se define el producto escalar de **A** y **B** como el número que se obtiene multiplicando el módulo de **A** por el de **B** y por el coseno del ángulo que forman entre sí (figs. 2.9 *a* a *c*). El producto escalar es una magnitud escalar y se representa por el símbolo

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \equiv AB\cos(\mathbf{A},\mathbf{B})} \tag{2.2}$$

Por cos (**A**,**B**) designamos el coseno del ángulo que forman **A** y **B**. Vemos que en esta definición del producto escalar no está implicado en absoluto ningún sistema coordenado. Observemos que $\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \cos(\mathbf{B},\mathbf{A})$ de modo que el producto escalar es conmutativo:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \tag{2.3}$$

que se lee «**A** multiplicado escalarmente por **B**».

Si el ángulo entre **A** y **B** está comprendido entre $\pi/2$ y $3\pi/2$, entonces cos (**A**,**B**) y **A** · **B** serán números negativos. Si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, entonces $\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = 1$ y

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A^2 = |\mathbf{A}|^2$$

Si $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$ y $A \neq 0$, $B \neq 0$, decimos que **A** es *ortogonal* a **B** o perpendicular a **B**. Obsérvese que $\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{B}}$, de modo que el producto escalar de dos vectores unitarios es precisamente el coseno del ángulo que forman. El módulo de la proyección de **B** en la dirección de **A** es

$$B\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = B\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{A}}$$

siendo $\hat{\mathbf{A}}$ el vector unitario en la dirección de $\mathbf{A}$. La proyección de $\mathbf{A}$ en la dirección de $\mathbf{B}$ es

$$A \cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{B}}$$

La multiplicación escalar no tiene inversa: si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = b$, no hay una solución única para $\mathbf{X}$. Dividir por un vector es una operación sin definir, carente de significado.

Componentes, magnitudes y cosenos directores. Sean $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ tres vectores unitarios ortogonales * que definen un sistema cartesiano como en la fig. 2.10 *a*. Un vector arbitrario $\mathbf{A}$ puede escribirse como

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}, \tag{2.4}$$

en donde A_x, A_y y A_z se denominan *componentes* de $\mathbf{A}$, como se ilustra en la fig. 2.10 *b*. Fácilmente se ve que $A_x = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}$, ya que

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = A_x\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + A_z\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = A_x$$

y

$$\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0 = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}$$
$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 1$$

En función de estos componentes, A_x, A_y y A_z, la magnitud de $\mathbf{A}$ es

$$A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = \sqrt{(A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}) \cdot (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}})}$$
$$= \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{2.5}$$

Si deseamos escribir una expresión para el vector unitario $\hat{\mathbf{A}}$ (también indicado en la fig. 2.10 *b*), vemos que

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{x}}\frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}}{A} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{A}}{A} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{A}}{A}$$
$$= \hat{\mathbf{x}}\frac{A_x}{A} + \hat{\mathbf{y}}\frac{A_y}{A} + \hat{\mathbf{z}}\frac{A_z}{A} \tag{2.6}$$

es tal expresión. De la fig. 2.11 y la Ec. (2.6) deducimos que los ángulos que $\mathbf{A}$ forma con los ejes x, y, z tienen los cosenos A_x/A, A_y/A y A_z/A, o sea $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{A}}$ y $\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{A}}$. Se denominan *cosenos directores* y tienen la propiedad de que la suma de los cuadrados de los tres cosenos directores es igual a la unidad, como fácilmente puede verse con ayuda de la Ec. (2.5).

(*) La palabra *ortogonal* se utiliza aquí en el sentido de *mutuamente perpendicular*.

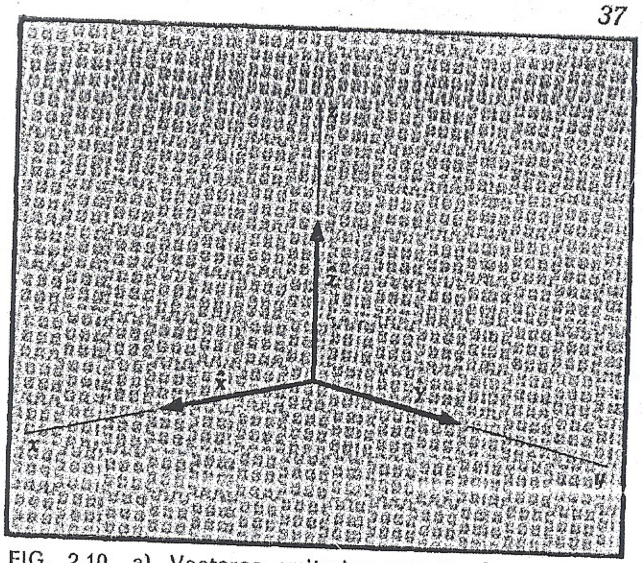
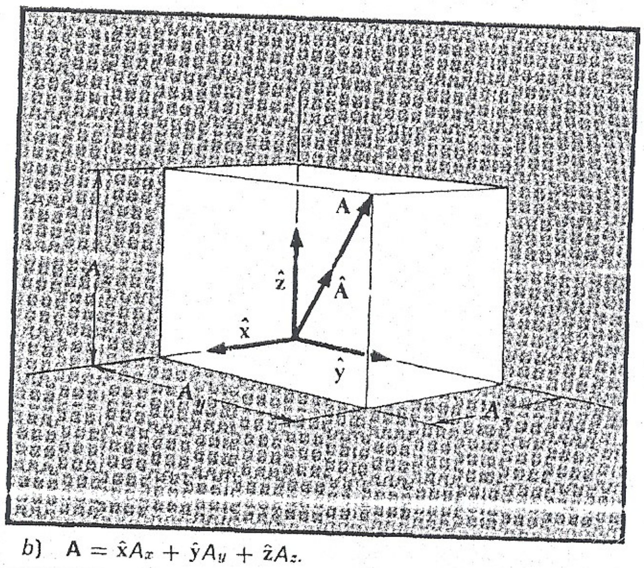


FIG. 2.10 *a*) Vectores unitarios ortogonales cartesianos $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$.



b) $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}A_x + \hat{\mathbf{y}}A_y + \hat{\mathbf{z}}A_z$.

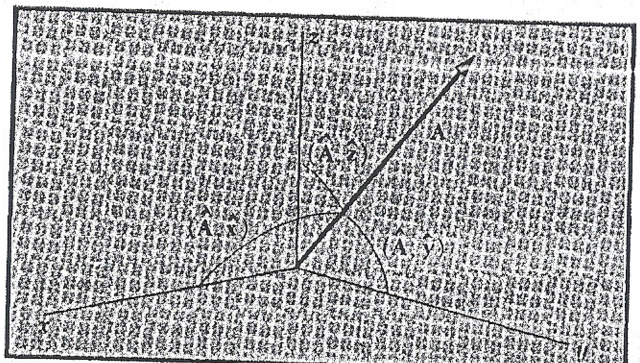


FIG. 2.11 Los cosenos directores se refieren a los ángulos indicados.

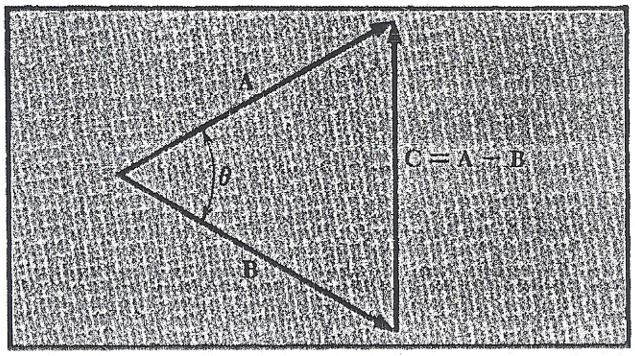
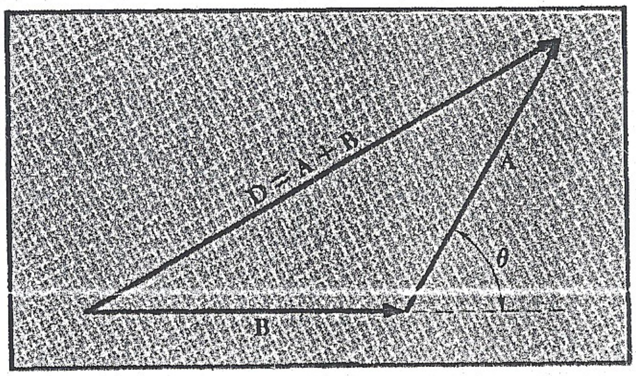


FIG. 2.12 *a*) $\mathbf{C}\cdot\mathbf{C} = C^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B})\cdot(\mathbf{A} - \mathbf{B})$
$= A^2 + B^2 - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$
$= A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta.$



b) $\mathbf{D}\cdot\mathbf{D} = D^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\cdot(\mathbf{A} + \mathbf{B})$
$= A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta.$

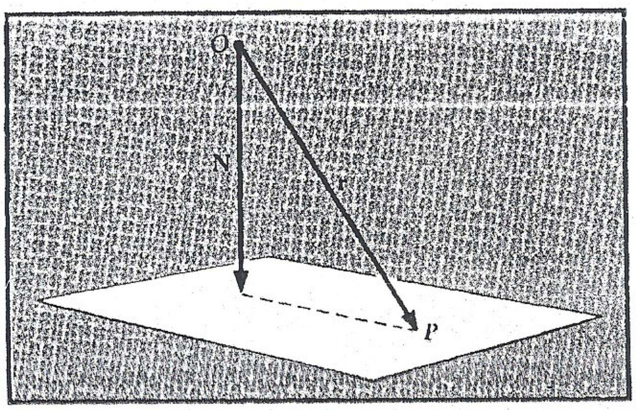


FIG. 2.13 Ecuación de un plano; $\mathbf{N}$ es la normal al plano desde el origen O. La ecuación del plano es $\mathbf{N}\cdot\mathbf{r} = N^2$.

El producto escalar de dos vectores **A** y **B** se recuerda fácilmente en función de los componentes

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z} \tag{2.7}$$

Aplicaciones del producto escalar. Veamos varias aplicaciones de los productos escalares:

1. *Ley de los cosenos.* Sea $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{C}$; realizando el producto escalar de cada miembro de esta expresión por sí mismo, tendremos

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})\cdot(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C}$$

o

$$A^2 + B^2 - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = C^2$$

que es exactamente la conocida relación trigonométrica

$$A^2 + B^2 - 2AB\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = C^2 \tag{2.8}$$

El coseno del ángulo comprendido entre las direcciones de los dos vectores es

$$\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \cos\theta_{AB} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}$$

como se deduce de la Ec. (2.2) (véase figs. 2.12 *a* y *b*).

2. *Ecuación de un plano* (fig. 2.13). Sea **N** una normal al plano considerado que se dibuja desde un origen O que no pertenece al plano. Sea **r** un vector arbitrario que va del origen O a un punto cualquiera P del plano. La proyección de **r** sobre **N** debe ser igual en módulo a N. Así, pues, el plano se define por la ecuación

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{N} = N^2 \tag{2.9}$$

Para comprobar la identidad de esta corta expresión con la expresión normal de la geometría analítica para la ecuación de un plano

$$ax + by + cz = 1$$

escribamos **N** y **r** en función de sus componentes N_x, N_y, N_z y x, y, z. Ahora la Ec. (2.9) adquiere la forma

$$(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}})\cdot(N_x\hat{\mathbf{x}} + N_y\hat{\mathbf{y}} + N_z\hat{\mathbf{z}}) = N^2$$

que se reduce a

$$x\frac{N_x}{N^2} + y\frac{N_y}{N^2} + z\frac{N_z}{N^2} = 1$$

3. *Vectores eléctrico y magnético en una onda electromagnética.* Si $\hat{\mathbf{k}}$ es el vector unitario en la dirección de propagación de la onda electromagnética plana en el espacio libre (fig. 2.14), entonces (como veremos en los Vols. 2 y 3) los vectores campo eléctrico y de inducción **E** y **B**, deben estar en un plano normal a $\hat{\mathbf{k}}$ y deben ser perpendiculares entre sí. Podemos expresar la condición geométrica por las relaciones

$$\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{E} = 0 \qquad \hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0$$

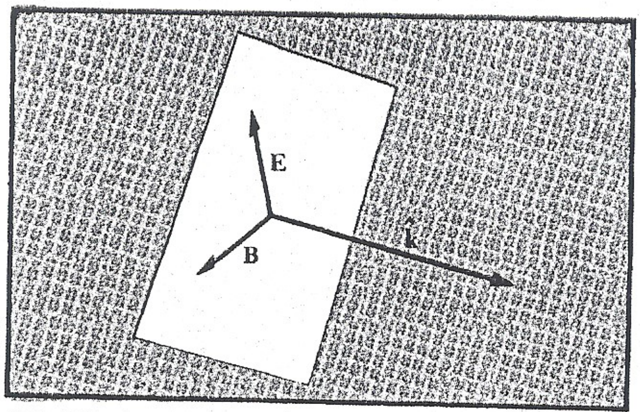


FIG. 2.14 Los campos eléctrico y magnético en una onda plana electromagnética en el espacio libre son perpendiculares a la dirección de propagación $\hat{\mathbf{k}}$. Así, pues, $\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{E} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{B} = 0$; $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0$.

4. *Trabajo realizado por unidad de tiempo.* En física elemental (véase también el Cap. 5) se vio que el trabajo realizado por una fuerza **F** por unidad de tiempo sobre una partícula que se mueve con velocidad **v** es igual a $Fv\cos(\mathbf{F},\mathbf{v})$. Se reconoce fácilmente que esta expresión es precisamente el producto escalar

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$$

Si escribimos de un modo general la derivada dW/dt como un símbolo para el trabajo realizado por unidad de tiempo, resulta (fig. 2.15)

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \tag{2.10}$$

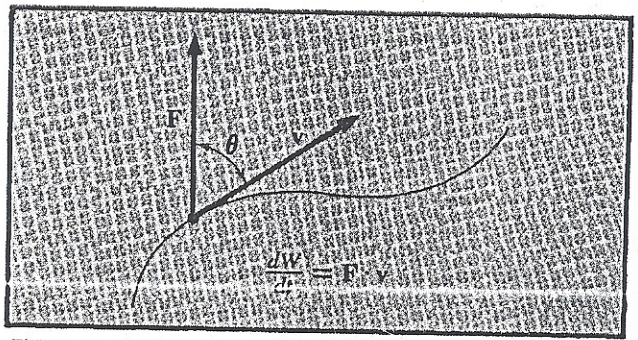


FIG. 2.15 Trabajo que por unidad de tiempo realiza una fuerza **F** sobre una partícula moviéndose con velocidad **v**.

5. *Variación de volumen por unidad de tiempo.* Sea **S** un vector normal a una área plana de valor S y designemos por **v** la velocidad con que se mueve dicha área. Es fácil darse cuenta de que el volumen barrido por el área S por unidad de tiempo es un cilindro cuya área de la base es S y cuya generatriz es v (fig. 2.16), o sea $\mathbf{S}\cdot\mathbf{v}$. La variación del volumen barrido por unidad de tiempo es, por tanto,

$$\frac{dV}{dt} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{v} \tag{2.11}$$

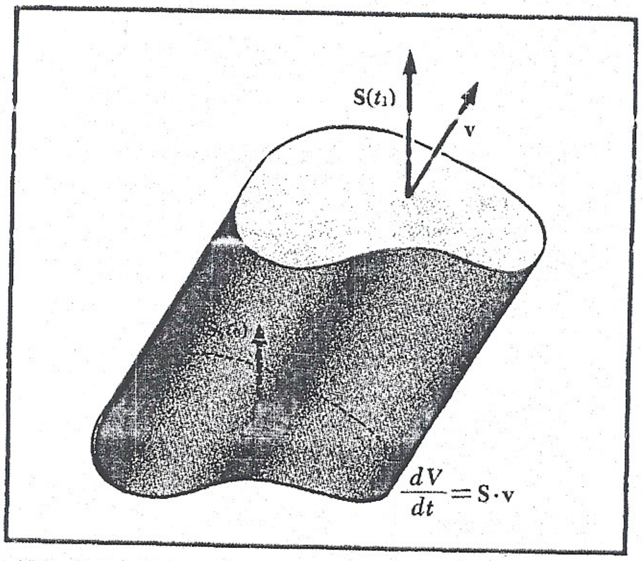


FIG. 2.16 Volumen que por unidad de tiempo dv/dt, barre el área **S** que se mueve con velocidad **v**.

Producto vectorial *. Existe otro tipo de producto de dos vectores ampliamente utilizado en física. Este

(*) Esta sección puede omitirse en una primera lectura. El producto vectorial se utiliza en el Cap. 3, el cual también puede omitirse; sólo al comenzar el Cap. 6 resulta esencial.

producto no es un escalar sino más bien un vector, pero un vector en cierto sentido restringido. El *producto vectorial* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ se define como el vector normal al plano en el que están contenidos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ y que tiene por módulo AB (sen $\mathbf{A},\mathbf{B}$) (fig 2.17 *a*):

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{C}}AB|\mathrm{sen}(\mathbf{A},\mathbf{B})|} \tag{2.12}$$

Y se lee «$\mathbf{A}$ multiplicado vectorialmente por $\mathbf{B}$». Se determina el sentido de $\mathbf{C}$ mediante un convenio fijo indicado por la *regla del sacacorchos o del tornillo:* El vector $\mathbf{A}$, que es el primer factor, se hace girar según el ángulo menor que forme con $\mathbf{B}$ hasta hacerle coincidir con la dirección de este último. El sentido de $\mathbf{C}$ coincidirá entonces con el avance de un sacacorchos o tornillo con rosca a derechas (rosca normal en la mayoría de los países) cuando se le hace girar del mismo modo que al vector $\mathbf{A}$, como se ve en la fig. 2.17 *b*.

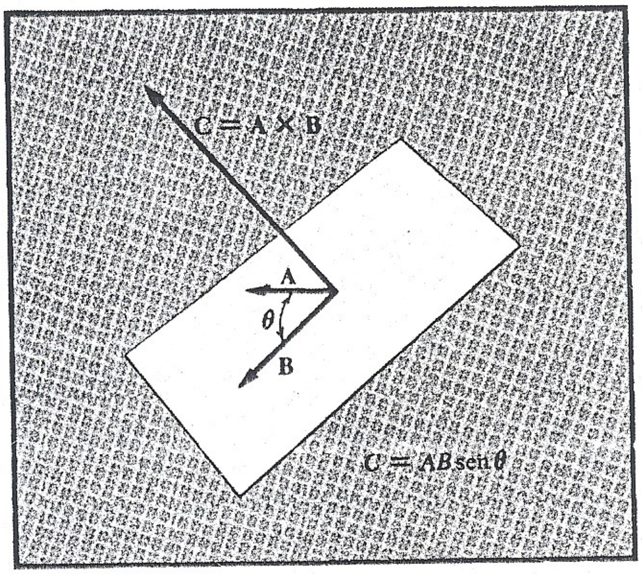
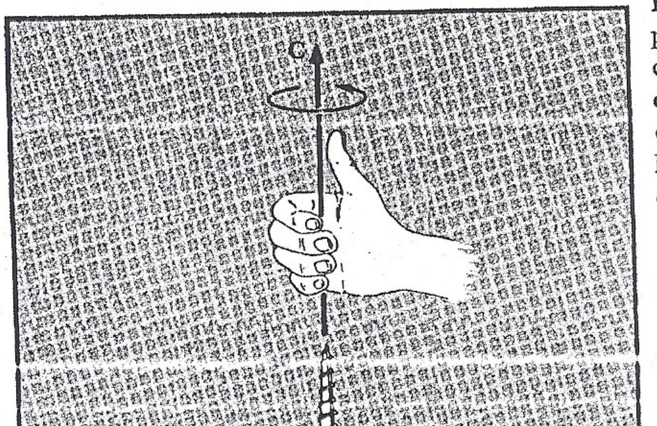


FIG. 2.17 *a*) Producto vectorial $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Enunciemos la regla para la dirección y el sentido de $\mathbf{C}$ de otro modo: Primero, coloquemos juntos los orígenes de los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ —así se define un plano. El vector $\mathbf{C}$ es perpendicular a este plano; esto es, el producto vectorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es perpendicular tanto a $\mathbf{A}$ como a $\mathbf{B}$. Gírese $\mathbf{A}$ hacia $\mathbf{B}$ recorriendo el menor de los dos ángulos posibles—, cúrvense los dedos de la mano derecha en el sentido en que gira $\mathbf{A}$ y el pulgar señalará la dirección y sentido de $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Obsérvese que, debido a este convenio de signos, $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ es un vector de signo opuesto a $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (fig. 2.17 *c*):

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B} \tag{2.13}$$



b) Regla del sacacorchos.

c) El producto vectorial $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ es opuesto a $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Así, pues, el producto vectorial no es conmutativo. Se deduce de la Ec. (2.12) que $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$, de modo que el producto vectorial de un vector por sí mismo es cero. El producto vectorial obedece la ley distributiva

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

La demostración, que es algo fatigosa, puede encontrarse en cualquier texto de análisis vectorial *.

Producto vectorial en función de las coordenadas cartesianas. Del mismo modo que hemos encontrado en la Ec. (2.6) los cosenos directores del vector $\mathbf{A}$, podríamos determinar los senos de los ángulos que $\mathbf{A}$ forma con los ejes cartesianos. Esto es poco conveniente, pues los senos se hallan más fácilmente a partir de los cosenos. Sin embargo, a veces es útil expresar el producto vectorial de dos vectores en función de sus componentes:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}) \times (B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) \\ &= (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}})A_xB_y + (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}})A_xB_z + (\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}})A_yB_z \\ &\quad + (\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}})A_yB_x + (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}})A_zB_x + (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}})A_zB_y\end{aligned}$$

en donde hemos utilizado el resultado $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = 0$. La cuestión que surge en seguida es: ¿Cuánto vale $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}}$? ¿Es $\hat{\mathbf{z}}$ o $-\hat{\mathbf{z}}$? Al escoger el resultado $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$ hacemos uso de un *sistema de coordenadas a derechas* **de un modo convencional en física, que utilizaremos en todo momento, como se indica en las figs. 2.10 *a* y *b*.

(*) Por ejemplo, véase C. E. Weatherburn, «Elementary Vector Analysis», p. 57, G. Bell & Sons, Ltd., London, 1928; J. G. Coffin, «Vector Analysis», p. 35, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1911.

(**) ¿Cómo podríamos comunicar nuestra definición de sistema «a derechas» á una criatura de otro sistema solar en nuestra galaxia? Podríamos utilizar ondas de radio polarizadas circularmente. La señal transporta un mensaje que indica al remoto observador en qué sentido definimos las ondas que han de polarizarse. El observador remoto construirá dos receptores, uno en el sentido correcto y otro en el incorrecto en función de la intensidad de la señal. Cualquier método requiere instrucciones muy claras. En el análisis original del efecto espectroscópico Zeeman, su descubridor asociaba incorrectamente una señal positiva a las cargas oscilantes de los átomos, porque confundía el sentido de una radiación polarizada circularmente (véase P. Zeeman, *Philosophical Magazine* (5), 43: 55 y 226 (1897). De un modo semejante, la primera transmisión por Telstar, el 11 de julio de 1962, fue recibida con dificultades en Gran Bretaña debido a la «inversión de un pequeño componente en el conductor de alimentación de la antena, que surgió de una ambigüedad en la definición aceptada del sentido de rotación de las ondas de la radio». *Times* (Londres), 13 de julio de 1962, pág. 11.

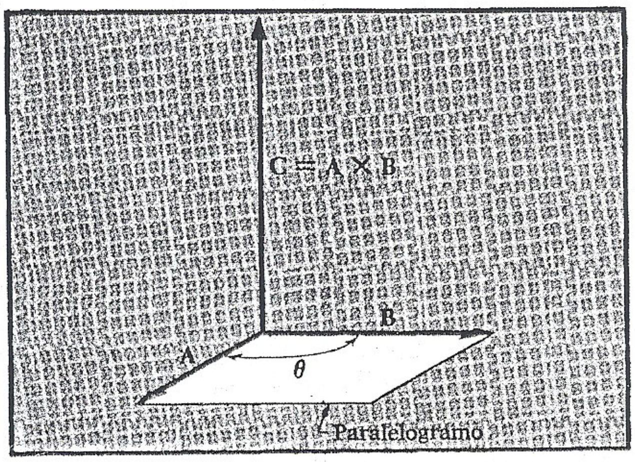
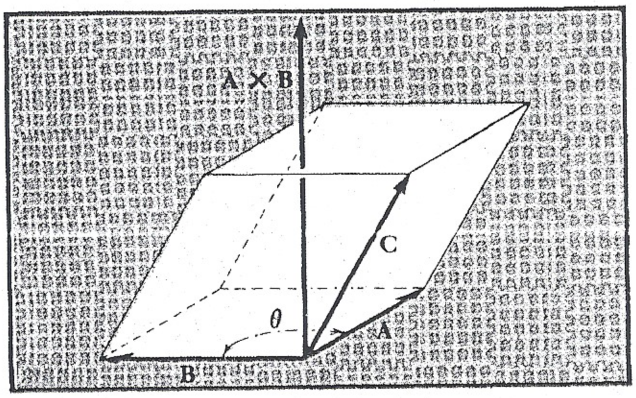
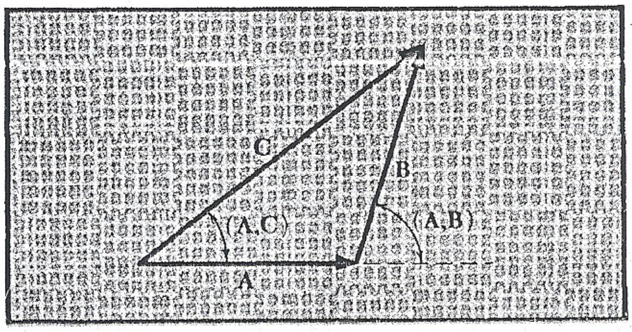


FIG. 2.18 *a*) El vector área de un paralelogramo es $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB\,|\text{sen}\,\theta|\,\hat{\mathbf{C}}$



b) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ = área de la base × altura = volumen del paralelepípedo.



c) Ley de los senos del triángulo.

Nota: sen (**A**,**B**) = sen [π — (**A**,**B**)].

Ahora $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} = -\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}$, etc., de modo que resulta

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{\mathbf{y}}\,(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{\mathbf{z}}(A_xB_y - A_yB_x) \qquad (2.14)$$

Obsérvese que si los índices guardan el orden cíclico *xyz*, el término interviene en el producto vectorial con signo +; de otro modo el signo es negativo. Si se está familiarizado con el cálculo de determinantes se puede comprobar que la representación

$$\boxed{\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}} \qquad (2.15)$$

es equivalente a la Ec. (2.14), pero más fácil de recordar.

Aplicaciones del producto vectorial. En los siguientes párrafos trataremos diversas aplicaciones del producto vectorial.

1. *Area de un paralelogramo.* El módulo

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB|\text{sen}\,(\mathbf{A},\mathbf{B})|$$

es el área del paralelogramo cuyos lados son **A** y **B** (o el doble del área del triángulo de lados **A** y **B**) (figura 2.18 *a*). La dirección de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es normal al plano del paralelogramo; por consiguiente, podemos considerar a $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ como el *vector área* del paralelogramo. Como hemos dado signos a los lados **A** y **B**, el vector área está dotado de dirección y sentido. Existen aplicaciones físicas en las que es conveniente poder asignar dirección a un área [Ec. (2.11)].

2. *Volumen de un paralelepípedo.* El escalar

$$|(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}| = V$$

es el volumen del paralelepípedo en el que $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es el área de la base y **C** es la tercera arista oblicua (figura 2.18 *b*). Si los tres vectores, **A**, **B** y **C** están contenidos en un mismo plano, el volumen será cero; por lo tanto, tres vectores serán coplanarios si $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = 0$ y únicamente en este caso.

Observemos en la figura que

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$