Los movimientos en el plano (que son las transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$) eran de dos tipos: directos e inversos. Un movimiento era directo o inverso según que, para llevar a coincidir una figura con su transformada (manteniendo siempre su misma forma), fuera o no suficiente con desplazarla a lo largo del plano. Para lograr dicha coincidencia, en los movimientos inversos es necesario sacar la figura del plano; en los movimientos directos no se precisa de ello.

Los movimientos directos en el plano son los giros (o rotaciones); en todo movimiento inverso interviene, además de un posible giro, una simetría (respecto de una recta).

Supongamos que en el plano $\mathbb{R}^2$ se considera una base ortonormal $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ con orientación positiva, es decir, tal que $\bar{e}_2$ se obtiene de girar $\bar{e}_1$ un ángulo recto en sentido positivo (contrario al de las agujas del reloj). Un movimiento transforma a $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ en otra base $(\bar{e}'_1, \bar{e}'_2)$ también ortonormal. Según que el movimiento sea directo o inverso, la base $(\bar{e}'_1, \bar{e}'_2)$ tendrá orientación positiva o negativa, respectivamente. Los movimientos directos no alteran la orientación del plano; los inversos cambian dicha orientación.

ROTACIONES Y SIMETRÍAS ORTOGONALES

[150]

Sea $f : V \to V$ una transformación ortogonal, en un espacio vectorial euclídeo V de dimensión finita n. Se verifica que:

1. El determinante de f, esto es(*), el determinante de cualquiera de las matrices asociada a f, vale 1 o vale -1; en uno y otro caso, se dice respectivamente que f es una *transformación ortogonal directa o inversa*. Las primeras, que también se llaman *rotaciones*, forman grupo (grupo de las rotaciones), que se denota por $\mathbb{O}^+(V)$.
2. Si $\det f = -1$ (f es ortogonal inversa), entonces f se compone de una *simetría ortogonal*, respecto de un subespacio de dimensión $n-1$ (**), y de una rotación (que puede ser la identidad); es decir, $f = (\text{simetría}) \circ (\text{rotación})$.
3. Una base de V y su base transformada por f tienen la misma o distinta orientación(***) según que f sea, respectivamente, directa o inversa.

(*) Según se vio en [095], todas las matrices asociadas a un mismo endomorfismo tienen el mismo determinante.

(**) Si U es un subespacio de V, llamando $\bar{x}_u$ a la proyección ortogonal de un vector $\bar{x} \in V$ sobre U, la simetría ortogonal respecto de U es la aplicación $\bar{x} \to \bar{x}'$ definida por $\bar{x} + \bar{x}' = 2\bar{x}_u$.

(***) Véase el concepto de bases igualmente orientadas en [095].

DEMOSTRACIÓN

1.° Antes de empezar, quizá convenga recordar que si A y A' son matrices de f en bases distintas, como $A' = P^{-1}AP$, donde P es la matriz regular del cambio de coordenadas, tomando determinantes en esta igualdad, como $\det P^{-1} = (\det P)^{-1}$, resulta que $\det A' = \det A$. Una vez hecha esta comprobación previa, que nos permite poner $\det f = \det A = \det A'$, veamos ya que $\det f = 1$ o $\det f = -1$, o lo que es igual, que $(\det f)^2 = 1$.

Recurramos a que, si A es la matriz de f en una cierta base de V y llamando G a la matriz métrica del producto escalar en esa base, se verifica que $G = A^tGA$. Tomando aquí determinante, como G es una matriz regular y como $\det A^t = det A$, se obtiene:

$$\det G = (\det A^t)(\det G)(\det A), \qquad \text{luego} \qquad 1 = (\det A)^2$$

Es decir $(\det f)^2 = 1$, como había que comprobar.
El conjunto $\mathbb{O}^+(V)$, de las rotaciones en V, es un subgrupo del grupo ortogonal $\mathbb{O}(V)$ y ello es debido a que el determinante de la composición de dos endomorfismos es igual al producto de los determinantes de los endomorfismos componentes. En efecto: 1) La identidad es una rotación, pues $\det I = 1$; 2) la composición de dos rotaciones f_1 y f_2 es otra rotación, ya que $\det(f_1 \circ f_2) = (\det f_1)(\det f_2) = 1 \times 1 = 1$; 3) Si f es una rotación, entonces f^{-1} también es rotación, ya que $(\det f^{-1}) = (\det f)^{-1} = (1)^{-1} = 1$.

2.° Hemos de comprobar que si $\det f = -1$, entonces f es la composición de una simetría ortogonal (respecto de un subespacio de dimensión $n - 1$) por una rotación (o transformación ortogonal directa). Para ello, echemos mano de una base ortonormal $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n)$ de V; llamemos A a la matriz de f en esta base, que es una matriz ortogonal inversa, es decir, tal que $A^tA = I$ y $\det A = -1$. Sea A_1 la matriz que se obtiene de cambiar de signo a todos los elementos de la primera fila de A, sin ninguna otra alteración. Sea I_1 la matriz que sólo difiere de la matriz unidad I en que su elemento de lugar 11 es -1 (en lugar de 1, como es en I). Es evidente que $A = I_1A_1$; como consecuencia de ello, se verifica que $\det A_1 = 1$, ya que $\det A = -1$ y $\det I_1 = -1$. Por otra parte, como $I_1^tI_1 = I$, resulta que

$$A^tA = I \;\Rightarrow\; (I_1A_1)^t(I_1A_1) = I \;\Rightarrow\; A_1^t(I_1^tI_1)A_1 = I \;\Rightarrow\; A_1^tA_1 = I$$

luego A_1 es ortogonal y, además, es ortogonal directa, pues $\det A_1 = 1$. Como A_1 es ortogonal directa, también será ortogonal directa la transformación $f_1 : V \to V$ que tiene asociada la matriz A_1, en la base dada; es decir, f_1 es una rotación. La transformación $s : V \to V$ que, en la referida base, tiene por matriz a la I_1 es la simetría ortogonal respecto del subespacio engendrado por $(\bar{e}_2, ..., \bar{e}_n)$. Al ser $A = I_1A_1$, se concluye que $f = s \circ f_1$, como se deseaba obtener.

3.° En este apartado, lo único que se hace es particularizar lo ya dicho anteriormente (véase [095]) sobre la conservación o no conservación de la orientación de las bases por un automorfismo; aquí, los automorfismos que se consideran son las transformaciones ortogonales.

EJERCICIO

En el espacio vectorial euclídeo canónico $\mathbb{R}^3$, sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un giro [illegible] ción), de cierto ángulo, alrededor del vector $\bar{u} = (1, 1, 1)$. Compruébese [illegible] matriz A asociada a f en la base canónica es del tipo siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{bmatrix} \quad \text{con} \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ \quad a + b + c = 1 \end{array} \right.$$

RESOLUCIÓN

Como el vector $\bar{u}$ forma el mismo ángulo con los tres vectores de la base, [illegible] llamamos (a, b, c) a $f(1, 0, 0)$, por simetría de revolución las imágenes [illegible] otros dos vectores de la base serán $f(0, 1, 0) = (c, a, b)$ y $f(0, 0, 1) = (b, c, a)$ [illegible] Las columnas de A son, por tanto, las que se señalan en el enunciado. [illegible] dichas columnas son vectores unitarios de $\mathbb{R}^n$, ha de ser $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. [illegible] $\bar{u}$ permanece invariable y f conserva el producto escalar, si es $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$ [illegible] ha de ser:

$$f(\bar{e}_1) \cdot f(\bar{u}) = \bar{e}_1 \cdot \bar{u} \quad , \quad \text{o sea } (a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = (1, 0, 0) \cdot (1, 1, 1)$$

es decir, debe de ser $a + b + c = 1$.

Nótese que las columnas de A son ortogonales dos a dos, ya que

$$1^2 = (a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca) = 1 + 2(ab + bc + [illegible]$$

luego $ab + bc + ca = 0$, lo que confirma la ortogonalidad de las columnas [illegible]

MATRICES ORTOGONALES DIRECTAS E INVERSAS

[151]

Sea A una matriz ortogonal, de tamaño $n \times n$. Se verifica que:

1. El determinante de A vale $\det A = 1$ o vale $\det A = -1$; se dice, [illegible] respectivamente, que A es *matriz ortogonal directa* o *inversa*.
2. Las matrices ortogonales directas de tamaño $n \times n$ forman grupo, [illegible] que se denota por $\mathbb{O}^+(n)$ o $\mathbb{O}_n^+$.

DEMOSTRACIÓN

1. Aunque podemos remitirnos a que el determinante de una transformación ortogonal vale ± 1, demostremos directamente esta propiedad: como A es ortogonal, será $A^t A = I$, y tomando determinantes se obtiene:

$$(\det A^t)(\det A) = 1 \quad , \quad \text{luego } (\det A)^2 = 1$$

es decir

$$\det A = \pm 1$$

2. El conjunto $\mathbb{O}^+(n)$ es un subgrupo del grupo $\mathbb{O}(n)$ de las matrices ortogonalesde tamaño $n \times n$. En efecto:

   - Si I es la matriz unidad, $I \in \mathbb{O}^+(n)$, ya que $I \in \mathbb{O}(n)$ y $\det I = 1$.
   - $A, B \in \mathbb{O}^+(n) \Rightarrow AB^{-1} \in \mathbb{O}^+(n)$, ya que $AB^{-1} \in \mathbb{O}(n)$ y $\det(AB^{-1}) = (\det A)(\det B)^{-1} = 1 \times 1^{-1} = 1$.

EJERCICIO

Compruébese que la matriz A del ejercicio anterior (que, según allí se vio, es ortogonal) es ortogonal directa.

RESOLUCIÓN

Sumándole a la última columna las dos primeras, como $a + b + c = 1$, se obtiene:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & c & 1 \\ b & a & 1 \\ c & b & 1 \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2) - (ac + ba + cb) = 1 - 0 = 1$$

8.7. TRANSFORMACIONES ORTOGONALES EN 2 Y 3 DIMENSIONES

No se pretende hacer aquí un estudio pormenorizado del funcionamiento de las transformaciones ortogonales en espacios euclídeos de dimensión n cualquiera, para el que, entre otras cosas, precisaríamos de algunos conocimientos acerca de los autovalores y de los autovectores de las matrices, que aún no poseemos. Nos vamos a ceñir a los casos de dimensiones $n = 2$ y $n = 3$. Más adelante (véase [183] a [185]) analizaremos el caso general (n cualquiera).

El análisis que vamos a hacer aquí de estas cuestiones no es exhaustivo, se limita a recoger, comprobándolos, sus aspectos más destacados.

TRANSFORMACIONES ORTOGONALES EN DIMENSIÓN 2

[152]

1.° Sea $f: V_2 \to V_2$ un movimiento (transformación ortogonal), en un espacio vectorial euclídeo V_2, de dimensión 2. Según que f sea un movimiento directo (rotación) o inverso (simetría), la matriz de f en una base ortonormal $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ de V_2 es la siguiente A_R o A_S, respectivamente, para algún $\alpha \in]-\pi, \pi]$.

2.° <u>MATRIZ DE ROTACION</u>: La matriz (en base ortonormal) del movimiento directo (o rotación) f es la siguiente A_R (donde α no depende de la base; α sólo depende de f):

$$A_R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(en un caso general) (si $\alpha = 0$) (si $\alpha = \pi$)

El movimiento directo cuya matriz es A_R es la rotación de ángulo α en sentido positivo (esto es, de $\bar{e}_1$ a $\bar{e}_2$) si $0 < \alpha < \pi$ y en sentido negativo si $-\pi < \alpha < 0$. En cualquier otra base ortonormal con la misma orientación que la de $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, la matriz de f no cambia, sigue siendo la misma A_R.

3.° <u>MATRIZ DE SIMETRIA ORTOGONAL</u>: La matriz (en base ortonormal) del movimiento inverso (o simetría ortogonal) f es la siguiente A_S (donde α depende de la base ortonormal, y sólo de ella):

$$A_S = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \qquad A_{S_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(en base ortonormal cualquiera) (en base ortonormal ad hoc)

El movimiento inverso cuya matriz es A_S es la simetría ortogonal respecto de la recta E (eje) engendrada por el vector $\bar{a}$ de coordenadas $(\cos(\alpha/2), \operatorname{sen}(\alpha/2))$. La matriz A_{S_0} es la matriz de f en una base ortonormal cuyo primer vector es $\bar{a}$.

COMPROBACIÓN

1. Sea A la matriz de f en la base dada y representémosla poniendo:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Como A es ortogonal, ha de ser $a^2 + b^2 = 1$, luego existe un único $\alpha \in]-\pi, \pi]$ tal que $a = \cos\alpha$ y $b = \operatorname{sen}\alpha$. Como A es ortogonal, ha de ser $a^2 + c^2 = 1$, luego $c^2 = \operatorname{sen}^2\alpha$ y por ello $c = \pm\operatorname{sen}\alpha$ ó $c = \varepsilon\operatorname{sen}\alpha$

donde $\varepsilon = \pm 1$. Como A es ortogonal, ha de ser $ab + cd = 0$, luego $d = -\varepsilon \cos\alpha$(*). Por tanto $\det A = -\varepsilon$ y, como $\det A$ vale 1 si f es directa y -1 si f es inversa, resulta que $\varepsilon = -1$ ó $\varepsilon = 1$ según que f sea directa o inversa, respectivamente, con lo que concluye la comprobación.

2. Si la matriz de f es A_R, entonces los transformados de los vectores $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$ de la base son los $\bar{e}'_1$ y $\bar{e}'_2$ siguientes:

$$\bar{e}_1 \longmapsto \bar{e}'_1 = \cos\alpha\, \bar{e}_1 + \operatorname{sen}\alpha\, \bar{e}_2 \quad \text{y} \quad \bar{e}_2 \longmapsto \bar{e}'_2 = -\operatorname{sen}\alpha\, \bar{e}_1 + \cos\alpha\, \bar{e}_2$$

Nótese que $\bar{e}'_1$ y $\bar{e}'_2$ son los vectores que resultan de rotar $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$ un ángulo α (en el sentido que se señala en el enunciado). Como (por ser f lineal) el transformado de un vector $\bar{u} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$, cualquiera de V_2, es

$$\bar{u} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 \longmapsto \bar{u}' = x\bar{e}'_1 + y\bar{e}'_2$$

resulta que cualquier vector de V_2 se transforma rotándole un ángulo α, del modo que se dice en el enunciado.

Sea A' la matriz de f en otra base ortonormal $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ con la misma orientación que $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Como f es el giro de ángulo α, resulta que

$$f(\bar{u}_1) = \cos\alpha\, \bar{u}_1 + \operatorname{sen}\alpha\, \bar{u}_2 \quad \text{y} \quad f(\bar{u}_2) = -\operatorname{sen}\alpha\, \bar{u}_1 + \cos\alpha\, \bar{u}_2$$

Por tanto, las columnas de A' son (1.ª columna) = $(\cos\alpha,\ \operatorname{sen}\alpha)$ y (2.ª columna) = $(-\operatorname{sen}\alpha,\ \cos\alpha)$, es decir, A' coincide con la anterior matriz A_R.

3. Si la matriz de f es A_S, llamemos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ a los siguientes vectores unitarios

$$\bar{a} = \cos\frac{\alpha}{2}\, \bar{e}_1 + \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\bar{e}_2 \qquad \text{y} \qquad \bar{b} = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\, \bar{e}_1 - \cos\frac{\alpha}{2}\, \bar{e}_2$$

Recuérdese que se llamó E a la recta vectorial que determina el vector $\bar{a}$. Los transformados de estos vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son los siguientes $\bar{a}'$ y $\bar{b}'$:

$$\bar{a}' = \left(\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)\bar{e}_1 + \left(\operatorname{sen}\alpha\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)\bar{e}_2 =$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2}\, \bar{e}_1 + \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\, \bar{e}_2 = \bar{a}$$

$$\bar{b}' = \left(\cos\alpha\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\right)\bar{e}_1 + \left(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\right)\bar{e}_2 =$$

$$= -\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\, \bar{e}_1 + \cos\frac{\alpha}{2}\, \bar{e}_2 = -\bar{b}$$

Por tanto, como cualquier vector $\bar{u} \in V_2$ se puede expresar en la forma $\bar{u} = x\bar{a} + y\bar{b}$ (nótese que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ forman base ortonormal de V_2) y recurriendo

(*) Si fuese $c = 0$, como $c^2 + d^2 = 1$, resultaría que $d = \pm 1$; como ahora sería $b = 0$ y $a = \pm 1$, seguía siendo válida la conclusión $d = -\varepsilon \cos\alpha$.

a que f es lineal, resulta que el transformado de cualquier $\bar{u} \in V_2$ es:

$$x\bar{a} + y\bar{b} \longmapsto f(x\bar{a} + y\bar{b}) = x\bar{a}' + y\bar{b}' = x\bar{a} - y\bar{b}$$

Como $x\bar{a} - y\bar{b}$ es el simétrico de $x\bar{a} + y\bar{b}$ respecto de la recta E, la pro-
dad queda comprobada.

Como $f(\bar{a}) = \bar{a}$ y $f(\bar{b}) = -b$, la matriz de f en la base ortonormal (
tiene (1.ª columna) = (1, 0) y (2.ª columna) = (0, −1), es decir, esta ma
es la A_{S_0} del enunciado.

EJERCICIO

Sea $f: V_2 \rightarrow V_2$ la transformación ortogonal, en el espacio vectorial eucl
bidimensional V_2, que respecto de una base ortonormal $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ de V_2
asociada la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

Obtener directamente aquellos vectores $\bar{u}$, $\bar{v} \in V_2$ tales que $f(\bar{u}) = \bar{u}$ y $f(\bar{v}) = -$

RESOLUCIÓN

Llamando x e y a las coordenadas de los vectores buscados, tanto de $\bar{u}$
de $\bar{v}$, se ha de verificar que:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{para el vector } \bar{u} \\ -1 & \text{para el vector } \bar{v} \end{cases}$$

Operando en la anterior ecuación matricial, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} (\cos\alpha - \varepsilon)x \quad + \operatorname{sen}\alpha\, y = 0 \\ \operatorname{sen}\alpha\, x - (\cos\alpha + \varepsilon)\, y = 0 \end{aligned}\right\}$$

donde

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - \varepsilon & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha + \varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon^2 - 1 = 0$$

Este sistema tiene pues solución, que es $x = \operatorname{sen}\alpha$, $y = \varepsilon - \cos\alpha$ o cual
otra proporcional a ella. Recurriendo al ángulo mitad $\alpha/2$ y po
$\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$ y $\cos\alpha = 2\cos^2(\alpha/2) - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\alpha/2)$,
tiene fácilmente que

$$\bar{u} = \rho\left(\cos\frac{\alpha}{2}\,\bar{e}_1 + \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\,\bar{e}_2\right) \quad \text{y} \quad \bar{v} = \rho\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\,\bar{e}_1 - \cos\frac{\alpha}{2}\,\bar{e}_2\right) \quad , \quad \text{para}$$

TRANSFORMACIONES ORTOGONALES EN DIMENSIÓN 3

[153]

Sea $f: V_3 \to V_3$ un movimiento (transformación ortogonal), en un espacio vectorial euclídeo V_3 de dimensión 3. Se verifica que:

1. Existe una base ortonormal $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ de V_3 en la que la matriz (ortonormal) de f es una de las $A_\varepsilon(\alpha)$ siguientes (donde $\varepsilon = 1$ o $\varepsilon = -1$), para cierto $\alpha \in]-\pi, \pi]$ (*):

$$A_\varepsilon(\alpha) = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon = 1 & \text{si } f \text{ es directo} \\ \varepsilon = -1 & \text{si } f \text{ es inverso} \end{pmatrix}$$

Casos particulares de especial relevancia ($\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$)

$$A_1(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A_1(\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(identidad) (simetría respecto de una recta)

$$A_{-1}(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A_{-1}(\pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(simetría respecto de un plano) (simetría respecto del origen)

2. Si la matriz de f es $A_{+1}(\alpha)$, entonces f es la rotación de ángulo α alrededor de la recta R engendrada por el vector $\bar{e}_1$. En particular, si $\alpha = 0$ entonces f es la identidad y si $\alpha = \pi$ entonces f es la simetría respecto de R.
3. Si la matriz de f es $A_{-1}(\alpha)$, entonces f es la composición de la rotación del apartado anterior con la simetría ortogonal respecto del plano P ortogonal a R, esto es, el que engendran los vectores $\bar{e}_2$ y $\bar{e}_3$. En particular, si $\alpha = 0$, entonces f es la simetría respecto de P y si $\alpha = \pi$ entonces f es la simetría respecto del origen (vector nulo).

(*) Para probar esta afirmación se va a recurrir a un resultado que se comprobará posteriormente (cuando se estudien los autovalores de endomorfismos y de matrices). Se trata de lo siguiente: si f es un endomorfismo ortogonal en un espacio tridimensional, entonces existe algún vector $\bar{u} \neq \bar{o}$ tal que $f(\bar{u}) = \bar{u}$ o tal que $f(\bar{u}) = -\bar{u}$ (véase [180]).

COMPROBACIÓN

1. Según hemos anunciado, se va a echar mano de un resultado que más adelante se podrá comprobar con facilidad, con el recurso de los autovalores y los vectores propios de los endomorfismos. Debido a que el endomorfismo f es ortogonal y como la dimensión de V_3 es impar, posteriormente se obtendrá fácilmente que ha de existir algún vector $u \in V_3$ (no nulo) tal que $f(\bar{u}) = \bar{u}$ ó $f(\bar{u}) = -\bar{u}$ (véase [180],1). Sea $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ una base ortonormal de V_3 a la que sólo se le exige que $\bar{e}_1$ sea vector de la dirección del anterior vector $\bar{u}$, con lo que $f(\bar{e}_1) = \pm\bar{e}_1$; sea A la matriz de f en esta base. La primera columna de A, como está formada por las coordenadas de $f(\bar{e}_1) = \pm\bar{e}_1$, es la $(a_{11}, a_{21}, a_{31}) = (\pm 1, 0, 0)$. Como A es ortogonal, su primera fila $(\pm 1, a_{12}, a_{13})$ es un vector unitario de $\mathbb{R}^3$ y, por ello, ha de ser $a_{12} = a_{13} = 0$. De lo ya dicho y como A es ortogonal, resulta que:

$$A = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{bmatrix}$$

verificándose:

$$\begin{cases} 0^2 + a^2 + b^2 = 1 \\ 0^2 + c^2 + d^2 = 1 \\ 0^2 + ac + bd = 0 \end{cases}$$

es decir, descomponiendo A en bloques

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} \varepsilon & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} \\ 0 & & \end{array}\right]$$

donde

$$\begin{cases} \varepsilon = 1 \ \text{ o } \ \varepsilon = -1 \\ B \text{ es una matriz ortogonal cualquiera de tamaño } 2 \times 2 \end{cases}$$

Si B es ortogonal directa, entonces sus columnas son, según se ha comprobado en [152] (1.ª columna) = (cos α, sen α) y (2.ª columna) = ($-$sen α, cos α) para un cierto $\alpha \in]-\pi, \pi]$. Por tanto, si B es ortogonal directa, en cualquiera de las bases $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ que venimos manejando la matriz de f es una de las $A_\varepsilon(\alpha)$ del enunciado.
Si B es ortogonal inversa, entonces sus columnas son, según obtuvimos en [152], (1.ª columna) = (cos α, sen α) y (2.ªcolumna) = (sen α, $-$cos α) para algún $\alpha \in]-\pi, \pi]$, que dependerá de la base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ que venimos considerando. En este caso, al cambiar a la nueva base ortonormal $(\bar{e}, \bar{a}, \bar{b})$, donde

$$\bar{a} = \cos\frac{\alpha}{2}\,\bar{e}_1 + \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\,\bar{e}_1 \qquad \text{y} \qquad \bar{b} = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\,\bar{e}_1 - \cos\frac{\alpha}{2}\,\bar{e}_2$$

la matriz de f pasa a ser la

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(esto se comprueba, como en el caso de dimensión 2, viendo que $f(\bar{a}) = \bar{a}$ y que $f(\bar{b}) = -b$). Por tanto: para $\varepsilon = +1$, la matriz de f en la base $(\bar{b}, \bar{a}, \bar{e}_1)$ es la $A_{-1}(0)$ del enunciado; y para $\varepsilon = -1$, la matriz de f en la base $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{e}_1)$ es la $A_1(\pi)$ del enunciado.

2. Para $\varepsilon = +1$, los transformados de los vectores $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ y $\bar{e}_3$ de la base son

$$\bar{e}_1' = \bar{e}_1 \quad , \quad \bar{e}_2' = \cos\alpha\, \bar{e}_2 + \operatorname{sen}\alpha\, \bar{e}_3 \quad \text{y} \quad \bar{e}_3' = -\operatorname{sen}\alpha\, \bar{e}_2 + \cos\alpha\, \bar{e}_3$$

Estos vectores son, como se ve fácilmente, los que resultan de rotar los $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ y $\bar{e}_3$ un ángulo α alrededor de la recta E (engendrada por $\bar{e}_1$). El transformado de un vector cualquiera $\bar{u} \in V_3$ será (por ser f lineal)

$$\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 \longmapsto \bar{u}' = x_1\bar{e}_1' + x_2\bar{e}_2' + x_3\bar{e}_3'$$

que, por tanto, es el vector que resulta de rotar $\bar{u}$ el ángulo α alrededor de la recta E.

3. Para $\varepsilon = -1$, la matriz $A_\varepsilon(\alpha)$ se puede poner:

$$A_{-1}(\alpha) = A_1(\alpha) \cdot A_{-1}(0)$$

Como $A_{-1}(\pi)$ es la matriz de la simetría ortogonal respecto del plano P (engendrado por $\bar{e}_2$ y $\bar{e}_3$) y $A_1(\alpha)$ es la matriz de la rotación de ángulo α alrededor de R (recta engendrada por $\bar{e}_1$), resulta que $A_{-1}(\alpha)$ es la matriz de la composición de las dos transformaciones citadas, como debíamos comprobar.

EJERCICIO

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que en la base canónica tiene asociada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}-2}{4} & \dfrac{-\sqrt{2}-2}{4} & \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{-\sqrt{2}-2}{4} & \dfrac{\sqrt{2}-2}{4} & -\dfrac{1}{2} \\[2ex] -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

La matriz A es ortogonal (como se comprueba fácilmente). Averígüese el tipo de movimiento que es f y describirlo en términos de rotaciones y simetrías.

RESOLUCIÓN

Resolvamos la ecuación $f(\bar{x}) = \varepsilon\bar{x}$ (para $\varepsilon = \pm 1$; $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$). Llamando X a columna de coordenadas del vector incógnita $\bar{x}$, la ecuación a resolver es $AX = \varepsilon X$, que se puede poner $AX = \varepsilon I\bar{X}$ (I matriz unidad) o también $(A - \varepsilon I)X = O$, que es un sistema homogéneo cuya matriz es $A - \varepsilon I$. Como se buscan soluciones no nulas de este sistema, ha de ser $\det(A - \varepsilon I) = 0$. Es evidente que esto es así para $\varepsilon = -1$, pues las dos primeras filas de $A + I$ son proporcionales. Para $\varepsilon = -1$, la ecuación $(A - \varepsilon I)X = O$ conduce a:

$$\left.\begin{aligned} (\sqrt{2}+2)x_1 - (\sqrt{2}+2)x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + \sqrt{2}x_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad , \quad \text{que dé} \begin{cases} x_1 = \rho \\ x_2 = \rho \quad (\rho \in \mathbb{R}) \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Por tanto, el vector $\bar{x} = (1, 1, 0)$ es tal que $f(\bar{x}) = -\bar{x}$. Tomemos una nueva base ortonormal $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ en la que $\bar{e}_1$, sea unitario de la dirección de $\bar{x}$, por ejemplo:

$$\bar{e}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) \quad , \quad \bar{e}_2(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) \quad \text{y} \quad \bar{e}_3 = (0, 0, 1)$$

La matriz A' de f en la nueva base es $A' = P^{-1}AP$, donde P es la matriz de cambio de coordenadas, es decir:

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{y} \quad A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Por tanto, f es la composición de la rotación de 45° alrededor de la recta engendrada por $\bar{e}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ y la simetría ortogonal respecto del plano ortogonal a dicha recta.

δ PRODUCTO MIXTO Y PRODUCTO VECTORIAL

Aun cuando lo que aquí vamos a decir acerca del producto mixto y del producto vectorial es fácilmente generalizable al caso de espacios vectoriales euclídeos de dimensión finita n cualquiera, nos vamos a centrar en el caso $n = 3$, que es para el que vamos a necesitar, más adelante, de estos conceptos. Ello no obstante, se harán algunas observaciones y comentarios sobre el caso general (n cualquiera).