de modo que *los productos vectorial y escalar en el producto mixto pueden intercambiarse sin alterar el valor del producto.* Sin embargo,

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = -\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{B})$$

Un producto mixto no se altera permutando cíclicamente el orden de los vectores, pero se invierte de signo si se cambia el orden cíclico. (Ordenaciones cíclicas de *ABC* son *BCA* y *CAB* y las ordenaciones no cíclicas son *BAC*, *ACB* y *CBA*.)

3. *Ley de los senos.* Consideremos el triángulo definido por $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ (fig. 2.18 c) y multipliquemos vectorialmente ambos miembros de la ecuación por $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{A} + \mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

Ahora bien, $\mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0$ y los módulos de ambos miembros deben ser iguales, de modo que

$$AC\,\mathrm{sen}(\mathbf{A},\mathbf{C}) = AB\,\mathrm{sen}(\mathbf{A},\mathbf{B})$$

o

$$\frac{\mathrm{sen}(\mathbf{A},\mathbf{C})}{B} = \frac{\mathrm{sen}(\mathbf{A},\mathbf{B})}{C} \qquad (2.16)$$

que es la *ley de los senos de un triángulo.*

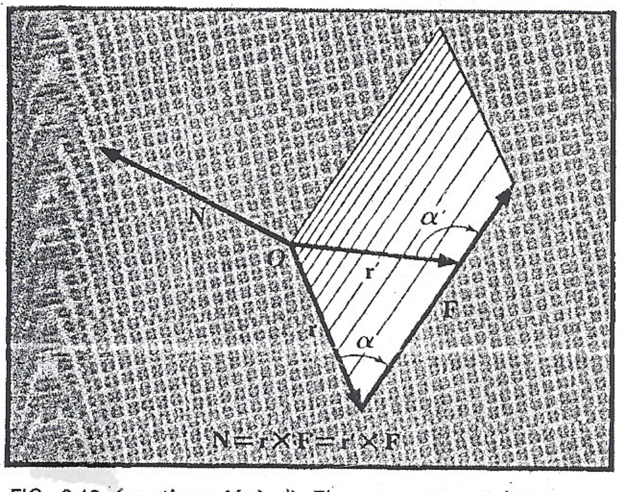
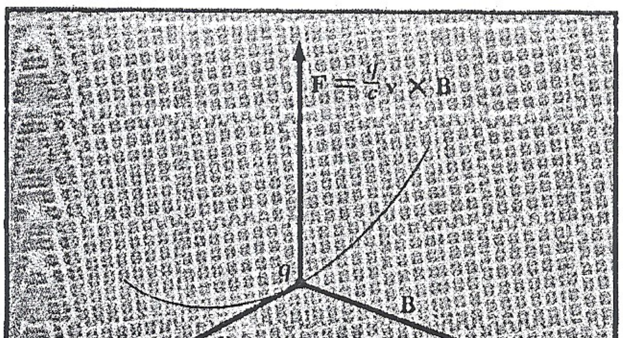


FIG. 2.18 *(continuación) d)* El par como producto vectorial.

4. *Par.* La idea del par es familiar desde los primeros cursos de introducción en la física. Tiene particular importancia en el movimiento de los cuerpos rígidos discutido en el Cap. 8. El par se refiere a un punto y tiene una expresión conveniente en función de los vectores:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}, \qquad (2.17)$$

en donde $\mathbf{r}$ es un vector dirigido desde el punto al vector $\mathbf{F}$. En la fig. 2.18 *d* se ve que el par tiene una dirección perpendicular a $\mathbf{r}$ y a $\mathbf{F}$. Obsérvese que la magnitud de $\mathbf{N}$ es $rF\,\mathrm{sen}\,\alpha$ y $r\,\mathrm{sen}\,\alpha$ es la longitud de la perpendicular trazada desde el punto (*O* en la figura) a $\mathbf{F}$. En la figura $r\,\mathrm{sen}\,\alpha = r'\,\mathrm{sen}\,\alpha'$. Por tanto, el par, tanto en magnitud como en dirección y sentido, es independiente del punto de la dirección de $\mathbf{F}$, al cual se traza $\mathbf{r}$.



e) Fuerza ejercida sobre una carga positiva en un campo magnético.

5. *Fuerza sobre una partícula en un campo magnético.* La fuerza que actúa sobre una carga eléctrica puntual que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un campo magnético $\mathbf{B}$ es proporcional a v veces la componente normal de B, en función del producto vectorial (fig. 2.18 *e*).

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} \qquad \text{(unidades gaussianas)} \qquad (2.18)$$

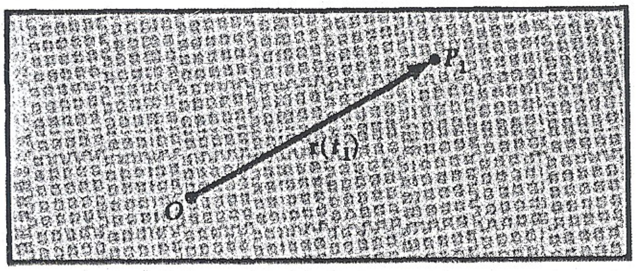
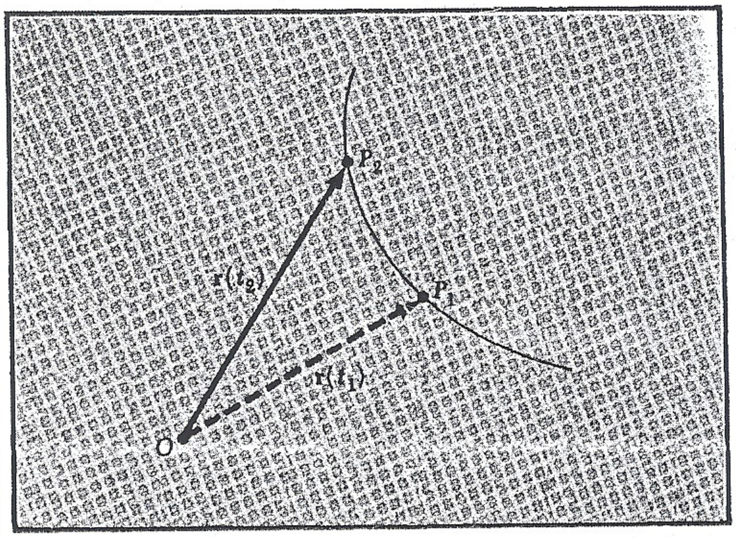
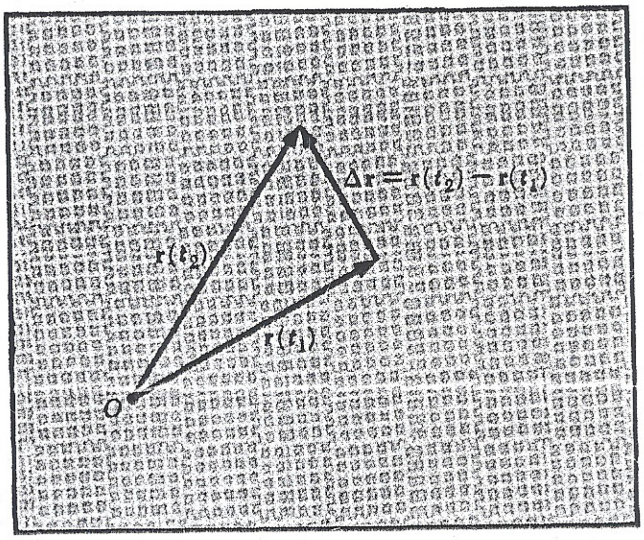


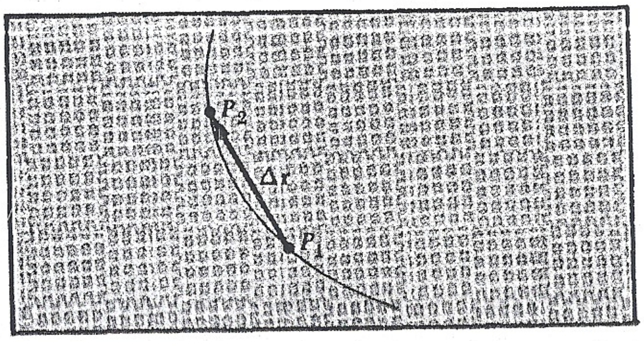
FIG. 2.19 *a*) La posición P_1 de una partícula en el instante t_1 se especifica mediante el vector $\mathbf{r}(t_1)$ relativo al origen fijo en el punto O.



b) La partícula se ha trasladado a P_2 en el instante t_2.



c) El vector $\Delta\mathbf{r}$ es la diferencia entre $\mathbf{r}(t_2)$ y $\mathbf{r}(t_1)$.



d) $\Delta\mathbf{r}$ es la cuerda que une los puntos P_1 y P_2 situados sobre la trayectoria de la partícula.

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad \text{(unidades mks)} \tag{2.18}$$

en donde q es la carga de la partícula y c la velocidad de la luz. Esta ley se desarrollará con detalle en el Vol. 2 y se utiliza en el Cap. 3 (pág. 75).

DERIVADAS DE VECTORES

La velocidad $\mathbf{v}$ de una partícula es un vector; la aceleración $\mathbf{a}$ es también un vector. La *velocidad* es la variación de la posición de una partícula referida al tiempo. La posición de una partícula en cualquier instante t puede especificarse mediante el vector $\mathbf{r}(t)$ trazado desde un punto fijo O a la partícula (fig. 2.19 *a*). Cuando el tiempo progresa, la partícula se mueve y el vector de posición varía en dirección y módulo (fig. 2.19 *b*). La diferencia entre $\mathbf{r}(t_2)$ y $\mathbf{r}(t_1)$ es

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$$

y es también un vector (fig. 2.19 *c*). Si el vector $\mathbf{r}$ puede considerarse como una función (una función vectorial) de la variable escalar única t, el valor de $\Delta\mathbf{r}$ quedará determinado completamente cuando se conozcan los dos valores t_1 y t_2. Así, en la figura 2.19 *d*, $\Delta\mathbf{r}$ es la cuerda P_1P_2. La relación

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

es un vector colineal con la cuerda $P_1 P_2$ pero ampliado en la relación $1/\Delta t$. Cuando Δt tiende a cero, P_2 se aproxima a P_1 y la cuerda $P_1 P_2$ se convierte en la tangente en P_1. Entonces el vector

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad \text{tiende a} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

que es un vector tangente a la curva en P_1 dirigido en el sentido en que la variable t aumenta a lo largo de la curva (fig. 2.19 *e*).

Velocidad. El vector

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

se denomina *derivada respecto al tiempo de* $\mathbf{r}$. Por definición, la velocidad es

$$\mathbf{v}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{2.19}$$

El módulo $v = |\mathbf{v}|$ de la velocidad se denomina *celeridad* de la partícula y es un escalar. En función de sus componentes resulta

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{x}} + y(t)\hat{\mathbf{y}} + z(t)\hat{\mathbf{z}} \tag{2.20}$$

y

$$\boxed{\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{x}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{y}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{z}} = v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}}}$$

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{2.21}$$

en donde hemos supuesto que los vectores unitarios no cambian con el tiempo, de modo que

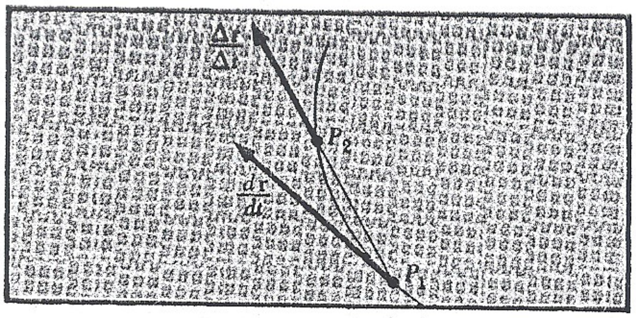
$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = 0 = \frac{d\hat{\mathbf{y}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{z}}}{dt}$$

En general, podemos escribir, sin expresar $\mathbf{r}$ en función de sus componentes, como en la Ec. (2.20),

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\hat{\mathbf{r}}(t)$$

en donde el escalar $r(t)$ es la longitud del vector y $\hat{\mathbf{r}}(t)$ es el vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$. La derivada de $\mathbf{r}(t)$ se define en la forma

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\Big[r(t)\hat{\mathbf{r}}(t)\Big] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t)\hat{\mathbf{r}}(t+\Delta t) - r(t)\hat{\mathbf{r}}(t)}{\Delta t} \tag{2.22}$$



e) Cuando $\Delta t = t_2 - t_1 \to 0$, el vector $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ colineal con la cuerda tiende hacia el vector velocidad $d\mathbf{r}/dt$ colineal con la tangente a la trayectoria en el punto P_1.

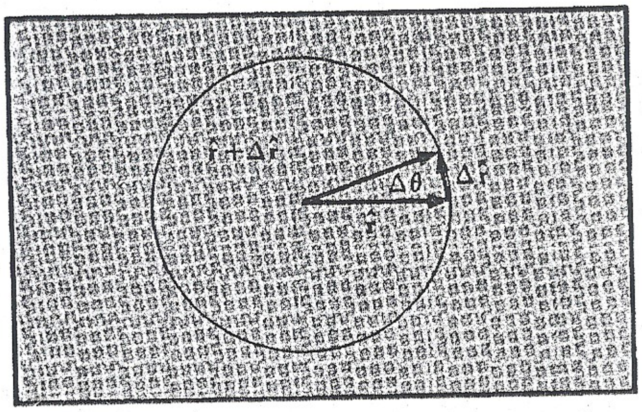
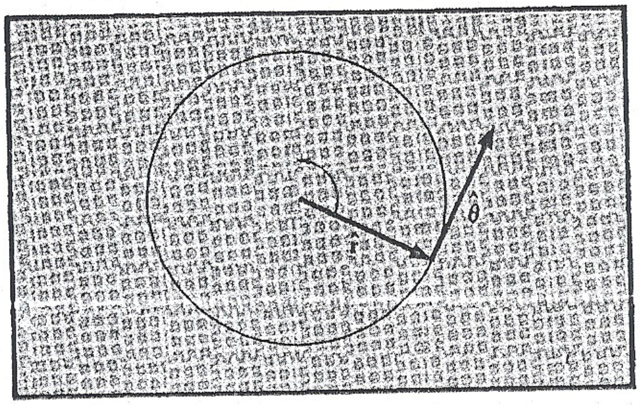
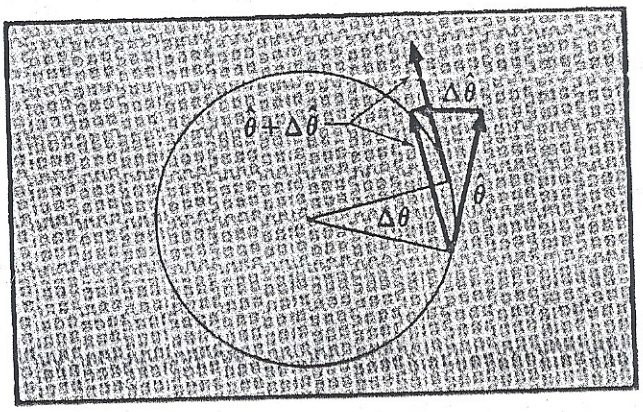


FIG. 2.20 *a*) $\Delta\hat{r}$ es la variación del vector unitario $\hat{r}$.



b) El vector unitario $\hat{\theta}$ es perpendicular a $\hat{r}$ y tiene la dirección indicada por el incremento de θ.



c) $\Delta\hat{\theta}$ es la variación del vector unitario $\hat{\theta}$.

Podemos volver a escribir el numerador *, reteniendo sólo los dos primeros términos del desarrollo en serie de $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ y $\hat{\mathbf{r}}(t + \Delta t)$:

$$\left[r(t) + \frac{dr}{dt}\Delta t\right]\left[\hat{\mathbf{r}}(t) + \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\Delta t\right] - r(t)\hat{\mathbf{r}}(t)$$

$$= \Delta t\left(\frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\right) + (\Delta t)^2\left(\frac{dr}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\right)$$

En el límite, cuando $\Delta t \to 0$, el último término del segundo miembro puede despreciarse y tendremos, sustituyendo en la Ec. (2.22)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \tag{2.23}$$

Aquí $d\hat{\mathbf{r}}/dt$ representa la cantidad de variación en la dirección del vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$.
Este caso es un ejemplo de la regla general para derivar el producto de un escalar $a(t)$ y un vector $\mathbf{b}(t)$

$$\frac{d}{dt}a\mathbf{b} = \frac{da}{dt}\mathbf{b} + a\frac{d\mathbf{b}}{dt} \tag{2.24}$$

Según vemos en la Ec. (2.23), a la velocidad contribuye por una parte la variación en la dirección $\hat{\mathbf{r}}$ y por otra el cambio en la longitud r.

Más adelante (particularmente en el Cap. 9 para el movimiento en un plano) utilizaremos una nueva forma de $d\mathbf{r}/dt$, que desarrollaremos aquí utilizando el vector radial unitario $\hat{\mathbf{r}}$ y un vector perpendicular unitario que denominaremos $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

A fin de aclarar el significado de estos vectores unitarios y sus derivadas respecto al tiempo, consideremos el movimiento de un punto en una trayectoria circular; en este caso, el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ cambiará en un intervalo de tiempo Δt en un incremento vectorial $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ para convertirse en $\hat{\mathbf{r}} + \Delta\hat{\mathbf{r}}$, como indica la fig. 2.20 *a*. Si Δt es tan pequeño que se aproxima a cero, $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ toma la dirección del vector unitario transversal $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, indicado en la fig. 2.20 *b*.

Además, cuando Δt y en correspondencia $\Delta\theta$ se aproximan a cero, la magnitud de $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ se hace simplemente

$$|\Delta\hat{\mathbf{r}}| = |\hat{\mathbf{r}}|\Delta\theta = \Delta\theta$$

(ya que $|\hat{\mathbf{r}}| = 1$) y, por tanto, el vector $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ y la relación $\Delta\hat{\mathbf{r}}/\Delta t$ se convierten en

$$\Delta\hat{\mathbf{r}} = \Delta\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad \frac{\Delta\hat{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

(*) Véase al final del capítulo, en las *Notas matemáticas*, el desarrollo en serie.

En el límite, cuando $\Delta t \to 0$, se obtiene para la derivada del vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ respecto al tiempo

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{2.25}$$

Con argumentos semejantes, utilizando la fig. 2.20 *c*, se demuestra fácilmente que la derivada respecto al tiempo de $\boldsymbol{\theta}$ es

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{r}} \tag{2.26}$$

Consideremos ahora un punto que se mueve en un plano según una trayectoria cualquiera; como sugiere la fig. 2.21, el vector velocidad $\mathbf{v}$ en cualquier instante está compuesto del vector componente radial $dr/dt\,\hat{\mathbf{r}}$ y del vector componente transversal $r\,d\hat{\mathbf{r}}/dt = r\,d\theta/dt\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$. El último vector se expresa por la ecuación (2.25). Por tanto, el valor de $\mathbf{v}$ en la forma de la Ec. (2.23) es

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}} \tag{2.27}$$

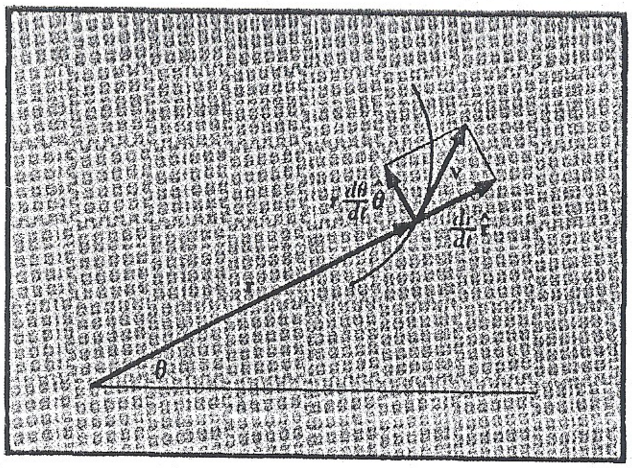


FIG. 2.21 Componentes del vector velocidad en función de $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Aceleración. La aceleración es también un vector; se relaciona con $\mathbf{v}$ del mismo modo que $\mathbf{v}$ se relaciona con $\mathbf{r}$. Su definición es

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \tag{2.28}$$

Teniendo en cuenta (2.21) resulta en componentes cartesianas,

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\mathbf{y}} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{\mathbf{z}}} \tag{2.29}$$

Más adelante (Cap. 9) necesitaremos $\mathbf{a}$ en función de r y θ; según la Ec. (2.27)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{\mathbf{r}} + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt}$$

Teniendo en cuenta las Ecs. (2.25) y (2.26) para $d\hat{\mathbf{r}}/dt$ y $d\hat{\boldsymbol{\theta}}/dt$ la expresión se convierte en

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{\mathbf{r}} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\theta}} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{\mathbf{r}}$$

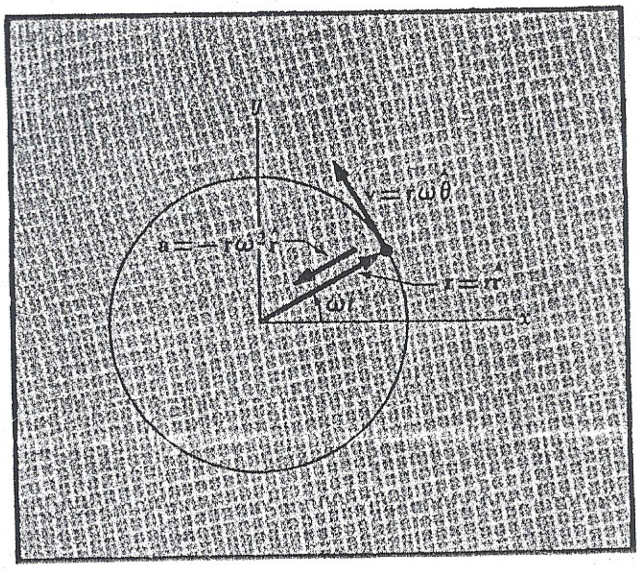


FIG. 2.22 Partícula moviéndose con velocidad constante en un círculo de radio r. La velocidad angular constante es ω. La velocidad y la aceleración de la partícula se deducen en las Ecs. (2.31) a (2.38).

Agrupando términos y reajustando resulta

$$\boxed{\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}} \tag{2.30}$$

Esta expresión es útil en el ejemplo del movimiento circular (véase a continuación) y particularmente en el estudio del movimiento de una partícula alrededor de un centro de fuerza (expuesto en el Cap. 9).

EJEMPLO

Movimiento circular. Este ejemplo (mostrado en la fig. 2.22) es muy importante, debido a la frecuencia con que aparece en física y en astronomía. Se desea obtener explícitamente las expresiones que nos den la velocidad y la aceleración de una partícula que se mueve con una celeridad constante en una órbita circular de radio r. Este movimiento puede describirse mediante

$$\mathbf{r}(t) = r\hat{\mathbf{r}}(t) \tag{2.31}$$

con tal que r sea constante y que el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ gire ángulos iguales en tiempos iguales.

Podemos tratar este problema de dos formas distintas: a partir de las expresiones en función de r y θ, ecuaciones (2.27) y (2.30) o utilizando los ejes $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ fijos en el espacio y las ecuaciones (2.21) y (2.29).

Método 1. Como r es constante, la ecuación (2.27) nos da simplemente $\mathbf{v} = r\,d\theta/dt\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Por costumbre se utiliza la letra griega ω para designar la velocidad angular $d\theta/dt$. Se mide en radianes * por segundo (rad/s) y en nuestra consideración actual es constante. Así $\mathbf{v} = r\omega\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y la velocidad constante de la partícula es

$$v = \omega r \tag{2.32}$$

Para la aceleración utilizamos la ecuación (2.30), que para r constante y $d\theta/dt = \omega$ se convierte en

$$\boxed{\mathbf{a} = -r\omega^2\hat{\mathbf{r}}} \tag{2.33}$$

Así la aceleración es constante en magnitud y dirigida hacia el centro de la trayectoria circular.

Método 2. En función de las componentes cartesianas escribiremos el vector posición de la partícula en cualquier momento t de su movimiento circular en la forma indicada por la ecuación (2.20):

$$\mathbf{r}(t) = r\cos\omega t\hat{\mathbf{x}} + r\operatorname{sen}\omega t\hat{\mathbf{y}} \tag{2.34}$$

El vector velocidad, dado por la ecuación (2.21) es, por tanto, con r constante,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega r\operatorname{sen}\omega t\hat{\mathbf{x}} + \omega r\cos\omega t\hat{\mathbf{y}} \tag{2.35}$$

(*) Véase al final del capítulo las *Notas matemáticas* para la explicación de los radianes.

La velocidad v es la magnitud de este vector velocidad

$$v = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \omega r\sqrt{\text{sen}^2\,\omega t + \cos^2\omega t} = \omega r \qquad (2.36)$$

de acuerdo con la ecuación (2.32). Puede mostrarse que el vector $\mathbf{v}$ es perpendicular a $\mathbf{r}$, teniendo en cuenta que el producto escalar de estos vectores es cero.

Según la ecuación (2.29), el vector aceleración es la derivada respecto al tiempo de $\mathbf{v}$. Diferenciando la ecuación (2.35) resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\omega^2 r\cos\omega t\hat{\mathbf{x}} - \omega^2 r\,\text{sen}\,\omega t\hat{\mathbf{y}}\\ &= -\omega^2(r\cos\omega t\hat{\mathbf{x}} + r\,\text{sen}\omega t\hat{\mathbf{y}})\\ &= -\omega^2\mathbf{r} = -\omega^2 r\hat{\mathbf{r}} \qquad (2.37)\end{aligned}$$

Este resultado es idéntico al obtenido por el método 1 en la ecuación (2.33). La aceleración tiene la magnitud constante $a = \omega^2 r$ y la dirección y sentido de la aceleración coincide con los de $-\hat{\mathbf{r}}$, es decir, hacia el centro de la circunferencia. A partir de (2.36) o (2.32) podemos poner $v = \omega r$ y entonces la magnitud de la aceleración se puede volver a escribir en la forma

$$a = \frac{v^2}{r} \qquad (2.38)$$

Esta aceleración se llama *centrípeta* (que busca el centro) y debe resultarnos familiar por los estudios de física previos.

La velocidad angular tiene una relación sencilla con la frecuencia ordinaria f. En la unidad de tiempo, el vector $\hat{\mathbf{r}}$ en la ecuación (2.34) describe ω radianes, de modo que ω designa el número de radianes barridos en la unidad de tiempo. En cambio, la frecuencia ordinaria f se define como el número de ciclos de movimiento que se verifican en la unidad de tiempo. Como hay 2π radianes en cada ciclo, debemos tener

$$2\pi f = \omega$$

Se define el *período* T del movimiento como el tiempo necesario para completar un ciclo. Vemos según la ecuación (2.34) que un ciclo se completa en el tiempo T tal que $\omega T = 2\pi$, o bien

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

Para tener una orientación numérica, supongamos que la frecuencia f es de 60 ciclos por segundo, ó 60 cps. Entonces el período

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{60} \approx 0{,}017\ \text{s}$$

y la frecuencia angular es

$$\omega = 2\pi f \approx 377\ \text{rad/s}$$

Si el radio de una órbita circular es 10 cm, entonces la velocidad es

$$v = \omega r \approx (377)(10) \approx 3{,}8 \times 10^3\ \text{cm/s}$$

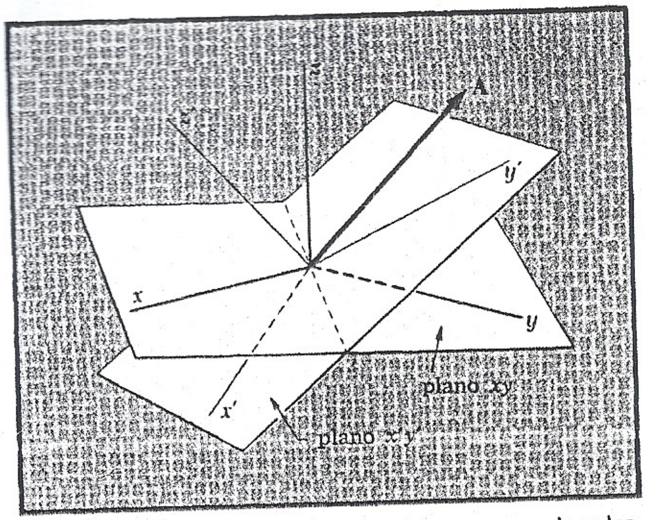


FIG. 2.23 El vector **A** puede describirse en coordenadas xyz o en coordenadas $x'y'z'$ obtenidas a partir de las anteriores mediante una rotación arbitraria. Decimos que A^2 es una forma invariante respecto a la rotación, lo cual equivale a decir $A_x^2+A_y^2+A_z^2 = A'^2_{x'}+A'^2_{y'}+A'^2_{z'}$.

La aceleración en cualquier punto de la órbita es

$$a = \omega^2 r \approx (377)^2(10) \approx 1{,}42 \times 10^6 \text{ cm/s}^2$$

En el Cap. 4 se desarrolla un ejemplo numérico que muestra que la aceleración de un punto fijo sobre la superficie de la Tierra en el ecuador, debida a la rotación de la Tierra sobre su propio eje, es alrededor de 3,4 cm/s^2.

INVARIANTES

Hemos mencionado (pág. 30) que la independencia de la elección de los ejes coordenados es un aspecto importante de las leyes de la física y una razón importante para el uso de la notación vectorial. Consideremos el valor de la magnitud de un vector en dos sistemas de coordenadas diferentes que tengan un origen común, pero que giren uno respecto al otro, como indica la figura 2.23. En los dos sistemas coordenados

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$$

y

$$\mathbf{A} = A'_{x'}\hat{\mathbf{x}}' + A'_{y'}\hat{\mathbf{y}}' + A'_{z'}\hat{\mathbf{z}}' \qquad \text{(fig. 2.23)}$$

Como **A** no ha cambiado, A^2 debe ser el mismo y, por tanto,

$$A_x^{\,2} + A_y^{\,2} + A_z^{\,2} = A'^{\,2}_{x'} + A'^{\,2}_{y'} + A'^{\,2}_{z'}$$

En otras palabras, la magnitud de un vector es la misma en todos los sistemas de coordenadas cartesianos que difieren en una rotación rígida del eje coordenado; por ello, se denomina *forma invariante*. El problema 20 (al final del capítulo), proporciona un método de comprobar este invariante. De esta definición es evidente que el producto escalar dado por la Ec. (2.7) es una forma invariante y la magnitud del producto vectorial es también otra forma invariante. Suponemos que no hay cambio de escala; por ejemplo, la longitud que representa una unidad no cambia en la rotación.

A veces hablamos de una función escalar de la posición, tal como la temperatura $T(x, y, z)$ en el punto (x, y, z) como un *campo escalar*. De igual modo, para un vector cuyo valor es una función de la posición, tal como la velocidad $\mathbf{v}(x, y, z)$ de una partícula cuando está en el punto (x, y, z), se dice que existe un *campo vectorial*. Gran parte del análisis vectorial está relacionado con los campos escalar y vectorial y con operaciones diferenciales con vectores que se discuten ampliamente en el Vol. 2.

EJEMPLOS

Diversas operaciones vectoriales elementales. Consideremos el vector (fig. 2.24)

$$\mathbf{A} = 3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}$$

(1) Determinar la longitud de **A**. Hallemos A^2:

$$A^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = 3^2 + 1^2 + 2^2 = 14$$

de modo que $A = \sqrt{14}$ es la longitud de **A**.

(2) ¿Cuál es la longitud de la proyección de **A** sobre el plano xy? La proyección de **A** sobre el plano xy es el vector $3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}$; el cuadrado de la longitud de este vector es $3^2 + 1^2 = 10$.

(3) Construir un vector en el plano xy que sea perpendicular a **A**. Se desea, pues, un vector de la forma

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}}$$

con la propiedad $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$, o bien

$$(3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}})\cdot(B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}}) = 0$$

Verificando el producto escalar encontramos

$$3B_x + B_y = 0$$

o

$$\frac{B_y}{B_x} = -3$$

La longitud del vector **B** no queda determinada por el enunciado del problema (fig. 2.25).

(4) Calcular el vector unitario $\hat{\mathbf{B}}$. Debemos tener

$$\hat{B}_x{}^2 + \hat{B}_y{}^2 = 1$$

o bien

$$\hat{B}_x{}^2(1^2 + 3^2) = 10\,\hat{B}_x{}^2 = 1$$

Así, pues,

$$\hat{\mathbf{B}} = \sqrt{\tfrac{1}{10}}\,\hat{\mathbf{x}} - \sqrt{\tfrac{9}{10}}\,\hat{\mathbf{y}} = \frac{\hat{\mathbf{x}} - 3\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{10}}$$

(5) Determinar el producto escalar de **A** con el vector $\mathbf{C} = 2\hat{\mathbf{x}}$. Se ve directamente que es $2 \times 3 = 6$. (Véase fig. 2.26.)

(6) Determinar la expresión de los vectores **A** y **C** en un sistema de referencia obtenido a partir del otro sistema mediante una rotación de $\pi/2$ en el sentido de las agujas del reloj a lo largo del eje z positivo (fig. 2.27). Los nuevos vectores unitarios $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$, $\hat{\mathbf{z}}'$ están relacionados con los antiguos, $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$, por

$$\hat{\mathbf{x}}' = \hat{\mathbf{y}} \qquad \hat{\mathbf{y}}' = -\hat{\mathbf{x}} \qquad \hat{\mathbf{z}}' = \hat{\mathbf{z}}$$

Donde aparecía $\hat{\mathbf{x}}$, ahora tenemos $-\hat{\mathbf{y}}'$, donde aparecía $\hat{\mathbf{y}}$, ahora tenemos $\hat{\mathbf{x}}'$, de modo que

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}' - 3\hat{\mathbf{y}}' + 2\hat{\mathbf{z}}' \qquad \mathbf{C} = -2\hat{\mathbf{y}}'$$

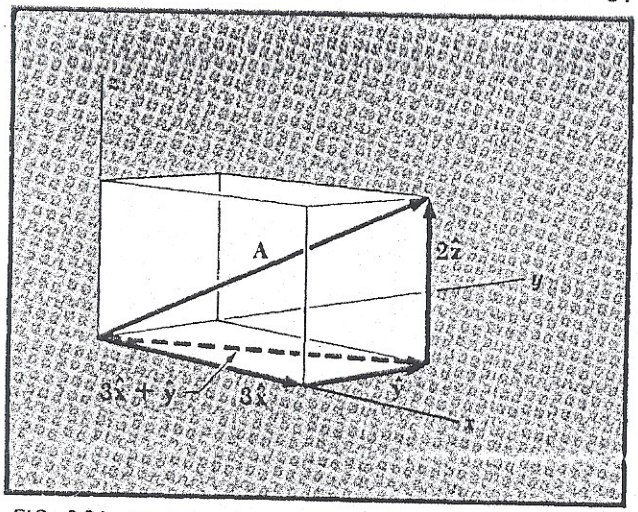


FIG. 2.24 El vector $\mathbf{A} = 3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}$ y sus proyecciones sobre el plano xy.

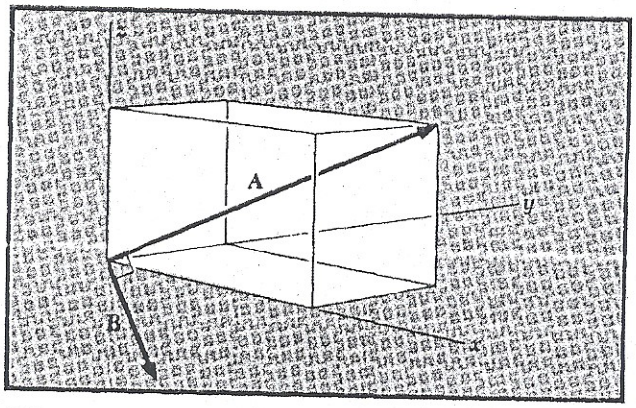


FIG. 2.25 El vector **B** está en el plano xy y es perpendicular a **A**.

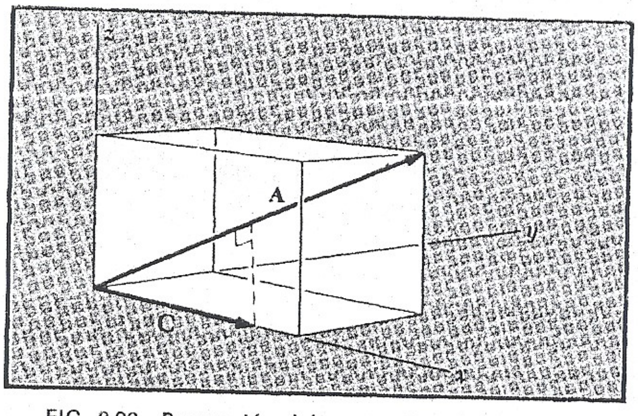


FIG. 2.26 Proyección del vector $\mathbf{C} = 2\hat{\mathbf{x}}$. sobre **A**. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} =$ (proyección de **C** sobre **A**) A.

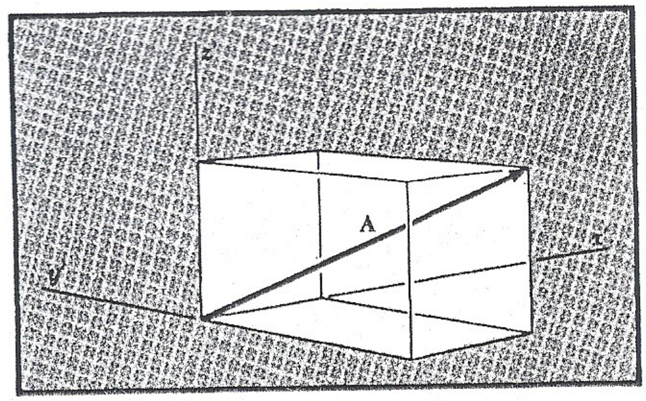


FIG. 2.27 El sistema de referencia x', y', z' se obtiene a partir del sistema x, y, z mediante una rotación de $\pi/2$ alrededor del eje z.

(7) Determinar el producto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ en el sistema coordenado indicado con el simbolismo de las primas. Del resultado de (6) se obtiene $(-3)\ (-2) = 6$, exactamente igual que en el sistema primitivo.

(8) Calcular el producto vectorial $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$. En el sistema primitivo es

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\hat{y} - 2\hat{z}$$

Formando los productos escalares, se puede confirmar que este vector es perpendicular tanto a $\mathbf{A}$ como a $\mathbf{C}$.

(9) Formar el vector $\mathbf{A} - \mathbf{C}$. Tenemos (fig. 2.28)

$$\mathbf{A} - \mathbf{C} = (3 - 2)\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z} = \hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}$$

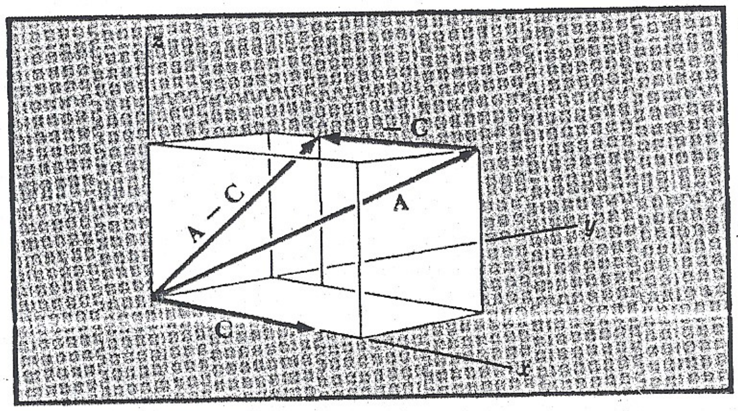


FIG. 2.28 Vector $\mathbf{A} - \mathbf{C}$.

PROBLEMAS

1. *Vectores de posición.* Utilizando el eje x como dirección este, el eje y como norte y el eje z hacia arriba, representar los siguientes puntos:
(*a*) 10 km al noreste y 2 km hacia arriba.
(*b*) 5 m al sureste y 5 m hacia abajo
(*c*) 1 cm al noroeste y 6 cm hacia arriba.
Determinar la magnitud o módulo de cada vector y la expresión del vector unitario en dicha dirección.

2. *Componentes vectoriales.* Utilizando los ejes del problema 1, determinar:
(*a*) Las componentes de un vector posición trazado desde el origen a un punto del plano horizontal en dirección sureste y de longitud 5 m.
(*b*) Las componentes de un vector posición trazado desde el origen a un punto situado a 15 m de tal modo que la componente horizontal está 60° al oeste del Norte y el vector forma un ángulo de 45° con la vertical.

3. *Suma de vectores.* Representar gráficamente el resultado de las siguientes sumas vectoriales:
(*a*) Sumar un vector de 2 cm hacia el este a uno de 3 cm hacia el noroeste.
(*b*) Sumar un vector de 8 cm hacia el este a uno de 12 cm hacia el noroeste.
(*c*) Comparar los resultados de las partes (*a*) y (*b*) y bosquejar un teorema acerca de la suma de dos vectores que son múltiplos de otros dos.

4. *Multiplicación por un escalar.* Sea $\mathbf{A} = 2{,}0$ cm a 70° al este del norte y $\mathbf{B} = 3{,}5$ cm a 130° al este del norte. Utilizar un transportador o un papel con un gráfico de coordenadas polares para hallar las soluciones.
(*a*) Dibujar los vectores descritos anteriormente y otros dos que sean 2,5 veces mayores.
(*b*) Multiplicar $\mathbf{A}$ por -2 y $\mathbf{B}$ por $+3$ y encontrar el vector suma. *Sol.* 9,2 cm a 152°.

(*c*) Colocar un punto 10 cm al norte del origen. Encontrar múltiplos de **A** y **B** cuyo vector suma es el vector que une el origen con este punto.

(*d*) Resolver analíticamente las partes (*b*) y (*c*).

5. *Productos escalar y vectorial de dos vectores.* Dados dos vectores $\mathbf{a} = 3\hat{x} + 4\hat{y} - 5\hat{z}$ y $\mathbf{b} = -\hat{x} + 2\hat{y} + 6\hat{z}$, calcular por métodos vectoriales:

(*a*) La longitud de cada uno de ellos. *Sol.* $a = \sqrt{50}$; $b = \sqrt{41}$
(*b*) El producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. *Sol.* -25.
(*c*) El ángulo formado entre ambos. *Sol.* 123,5°.
(*d*) Los cosenos directores de cada uno.
(*e*) El vector suma y diferencia $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. *Sol.* $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\hat{x} + 6\hat{y} + \hat{z}$.
(*f*) El vector producto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. *Sol.* $34\hat{x} - 13\hat{y} + 10\hat{z}$.

6. *Algebra vectorial.* Dados dos vectores tales que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 11\hat{x} - \hat{y} + 5\hat{z}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b} = -5\hat{x} + 11\hat{y} + 9\hat{z}$:

(*a*) Hallar **a** y **b**.

(*b*) Determinar el ángulo formado por **a** y $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ utilizando métodos vectoriales.

7. *Suma vectorial de velocidades.* En agua tranquila un hombre puede remar un bote a 5 km/h.

(*a*) Si intenta cruzar un río que fluye a 2 km/h, ¿cuál será la dirección de su trayectoria y su velocidad?

(*b*) ¿En qué dirección debe apuntar en su movimiento para cruzar perpendicularmente el río y cuál debería ser su velocidad?

8. *Composición de vectores.* El piloto de un aeroplano desea alcanzar un punto a 200 km al este de su posición presente. Sopla viento del noroeste a 30 km/h. Calcular su vector velocidad respecto a la masa de aire en movimiento, si su horario le exige que llegue a su destino en 40 minutos. *Sol.* $\mathbf{v} = 279\hat{x} + 21\hat{y}$ km/h; $\hat{x}$ = este; $\hat{y}$ = norte.

9. *Operaciones con vectores; vector de posición relativa.* De una fuente común se emiten dos partículas y en un instante determinado tienen los siguientes desplazamientos:

$$\mathbf{r}_1 = 4\hat{x} + 3\hat{y} + 8\hat{z}; \qquad \mathbf{r}_2 = 2\hat{x} + 10\hat{y} + 5\hat{z}$$

(*a*) Indicar en un esquema las posiciones de las partículas y escribir la expresión que nos da el desplazamiento **r** de la partícula 2 respecto a 1.

(*b*) Utilizar el producto escalar para calcular el módulo de cada vector. *Sol.* $r_1 = 9{,}4$; $r_2 = 11{,}4$; $r = 7{,}9$.

(*c*) Calcular los ángulos entre las parejas posibles de estos tres vectores.

(*d*) Calcular la proyección de **r** sobre $\mathbf{r}_1$. *Sol.* $-1{,}2$.

(*e*) Calcular el vector producto $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$. *Sol.* $-65\hat{x} - 4\hat{y} + 34\hat{z}$.

10. *Distancia mínima entre dos partículas.* Dos partículas 1 y 2 se mueven a lo largo de los ejes x e y con las velocidades $\mathbf{v}_1 = 2\hat{x}$ cm/s y $\mathbf{v}_2 = 3\hat{y}$ cm/s, respectivamente. Para $t = 0$ están en la posición

$$x_1 = -3 \text{ cm}, \; y_1 = 0; \qquad x_2 = 0, \; y_2 = -3 \text{ cm}.$$

(*a*) Encontrar el vector $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ que representa la posición de 2 respecto a 1 en función del tiempo. *Sol.* $\mathbf{r} = (3 - 2t)\,\hat{x} + (3t - 3)\,\hat{y}$ cm.

(*b*) ¿Cuándo y dónde están más cerca entre sí las dos partículas? *Sol.* $t = 1{,}15$ s.

11. *Diagonales de un cubo.* ¿Cuál es el ángulo formado por dos diagonales interiores de un cubo? (Una *diagonal interior* une dos vértices y pasa por el interior de un cubo. Una *diagonal superficial* une dos vértices pertenecientes a la misma cara del cubo.) *Sol.* $\cos^{-1} \frac{1}{3}$.

12. *Condiciones para que* $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. Demostrar que **a** es perpendicular a **b** si $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$

13. *Vectores paralelos y perpendiculares.* Determinar x e y de tal modo que los vectores $\mathbf{B} = x\hat{x} + 3\hat{y}$ y $\mathbf{C} = 2\hat{x} + y\hat{y}$ sean cada uno de ellos perpendicular a $\mathbf{A} = 5\hat{x} + 6\hat{y}$. Demostrar ahora que **B** y **C** son paralelos. Si consideramos un espacio tridimensional, ¿también se cumple que dos vectores perpendiculares a un tercero son necesariamente paralelos?

14. *Volumen de un paralelepípedo.* Un paralelepípedo tiene sus aristas descritas por los vectores $\hat{x} + 2\hat{y}$, $4\hat{y}$, e $\hat{y} + 3\hat{z}$ a partir del origen. Calcular su volumen. *Sol.* 12.

15. *Equilibrio de fuerzas.* Tres fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ actúan simultáneamente sobre una partícula puntual. La fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ es simplemente el vector suma de las fuerzas. La partícula se dice que está en equilibrio si $\mathbf{F}_R = 0$.

(*a*) Demostrar que si $\mathbf{F}_R = 0$, los vectores que representan las tres fuerzas forman un triángulo.

(*b*) Si $\mathbf{F}_R = 0$ como antes, ¿es posible que uno cualquiera de los vectores no esté contenido en el plano determinado por los otros dos?

(*c*) Una partícula sometida a una fuerza vertical hacia abajo de 10 newtons y suspendida de una cuerda (tensión 15 newtons), que forma un ángulo de 0,1 radian con la vertical, no puede estar en equilibrio. ¿Cuánto vale la tercera fuerza que se necesita para el equilibrio? ¿La solución es única?

16. *Trabajo realizado por las fuerzas.* Las fuerzas constantes $\mathbf{F}_1 = \hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}$ (dinas) y $\mathbf{F}_2 = 4\hat{x} - 5\hat{y} - 2\hat{z}$ (dinas) actúan juntas sobre una partícula, durante un desplazamiento desde el punto $A\,(20{,}15{,}0)$ cm hasta el punto $B\,(0{,}0{,}7)$ centímetros.

(*a*) ¿Cuál es el trabajo realizado (en ergios) sobre la partícula? El trabajo realizado (Cap. 5) viene dado por $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$, siendo **F** la fuerza resultante (en este caso $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$) y **r** el desplazamiento. *Sol.* -48 ergios.

(*b*) Calcular separadamente el trabajo realizado por $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$.

(c) Supóngase que actúan las mismas fuerzas, pero el movimiento es de B a A. ¿Cuál es el trabajo realizado sobre la partícula en este caso?

17. *Momento de una fuerza respecto a un punto.* El momento **N** de una fuerza respecto de un punto determinado viene dado por $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, en donde **r** es el vector que une el punto dado con el punto de aplicación de **F**. Considérese una fuerza $\mathbf{F} = -3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 5\hat{\mathbf{z}}$ (dinas) actuando en el punto $7\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$ (cm). Recuérdese que $\mathbf{F} \times \mathbf{r} = -\mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

(*a*) ¿Cuál es el momento en dinas-cm respecto al origen? (Dar el resultado para **N** como combinación lineal de $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$.) *Sol.* $14\hat{\mathbf{x}} - 38\hat{\mathbf{y}} + 16\hat{\mathbf{z}}$.

(*b*) ¿Cuál es el momento respecto al punto (0,10,0)? *Sol.* $-36\hat{\mathbf{x}} - 38\hat{\mathbf{y}} - 14\hat{\mathbf{z}}$.

18. *Velocidad y aceleración: diferenciación de vectores.* Determinar la velocidad y la aceleración del punto descrito por los siguientes vectores de posición (t = tiempo).

(*a*) $\mathbf{r} = 16t\hat{\mathbf{x}} + 25t^2\hat{\mathbf{y}} + 33\hat{\mathbf{z}}$.

(*b*) $\mathbf{r} = 10 \text{ sen } 15t\hat{\mathbf{x}} + 35t\hat{\mathbf{y}} + e^{6t}\hat{\mathbf{z}}$.

(Para la derivación, consúltese las Notas Matemáticas al final del capítulo.)

19. *Desplazamientos aleatorios.* Una partícula sigue una trayectoria en el espacio que se compone de N pasos iguales, cada uno de los cuales tiene una longitud s. La dirección en el espacio de cada paso es completamente al azar, sin relación ni correlación entre dos cualesquiera de ellos. El desplazamiento total es

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{s}_i$$

Demostrar que el desplazamiento cuadrático medio entre las posiciones inicial y final es $\langle S^2 \rangle = Ns^2$, donde $\langle\ \rangle$ designa el valor medio. (*Indicación:* la hipótesis de que la dirección de cada paso es independiente de la dirección de cualquier otro significa que $\langle \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j \rangle = 0$ para todo valor i y j, excepto para $i = j$.)

20. *Invariancia.* Consideremos un vector **A** en un sistema de coordenadas cartesianas con los vectores unitarios $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$. Este sistema gira ahora un ángulo θ alrededor del eje $\hat{\mathbf{z}}$.

(*a*) Expresar los nuevos vectores unitarios $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$ en función de $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ y θ; $\hat{\mathbf{z}}' = \hat{\mathbf{z}}$.

(*b*) Expresar **A** en función de $A'_{x'}$, $A'_{y'}$, $A'_{z'}$ y $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$, $\hat{\mathbf{z}}'$; transformar en $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ y determinar las relaciones entre $A'_{x'}$, $A'_{y'}$, $A'_{z'}$ y A_x, A_y, A_z.

(*c*) Demostrar que $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A'^2_{x'} + A'^2_{y'} + A'^2_{z'}$. (Este problema con una rotación arbitraria en tres dimensiones es complicado. Un método es usar 9 cosenos directores entre los cuales hay 6 relaciones, tres procedentes de la ortogonalidad de $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$, $\hat{\mathbf{z}}'$ y tres del hecho de que la suma de los cuadrados de los cosenos directores es 1.)

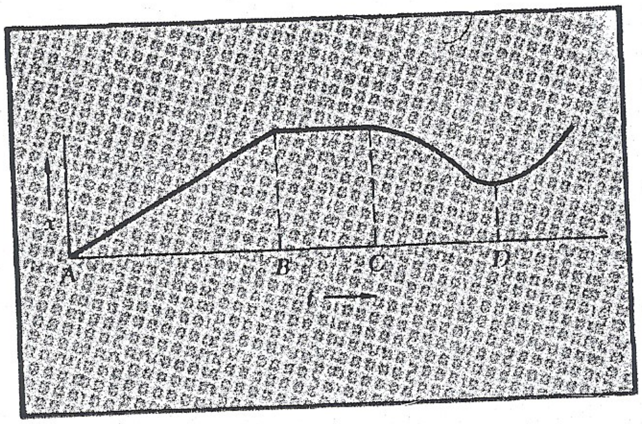


FIG. 2.29 Gráfica de x respecto a t.

NOTAS MATEMÁTICAS

Derivadas respecto al tiempo, velocidad y aceleración. La dinámica incluye el movimiento de las partículas y los objetos y, en consecuencia, la evolución con el tiempo; es decir, algunas magnitudes que describen las partículas u objetos son variables con el tiempo. Frecuentemente utilizaremos las coordenadas x, y, z en nuestra descripción del sistema físico. Al final de esta sección se introducen otros tipos importantes de sistemas coordenados: el polar esférico y el cilíndrico.

Una descripción dinámica ofrecerá las coordenadas x, y, z en función del tiempo. La fig. 2.29 representa tal descripción con la magnitud x en función del tiempo t. Para comprender cómo varía x, la característica fundamental es la pendiente de la curva. Entre A y B, x crece uniformemente y la pendiente, que es la tangente del ángulo que forma con el eje t, es constante. Entre B y C la curva es paralela al eje t y la pendiente es cero. Observemos que x no cambia y, por tanto, la pendiente es una reflexión de la componente x de la velocidad. Entre C y D la pendiente se hace negativa, la tangente del ángulo es también negativa y x decrece. En D la pendiente se anula y después se incrementa. A partir de la Ec. (2.21) se define dx/dt como la velocidad en la dirección x y ésta es, naturalmente, la definición de la pendiente. Es importante recordar que la velocidad en cualquier dirección particular tiene una magnitud que puede ser positiva o negativa.

Sería una pérdida de tiempo inútil si hiciéramos un gráfico cada vez que queremos describir un movimiento. En su lugar, daremos una relación funcional entre las coordenadas x, y o z y el tiempo t. Tal relación es $x = vt$. Como $dx/dt = v$, resulta que la velocidad es una constante v. Otro ejemplo es $x = \frac{1}{2}at^2$, en cuyo caso $dx/dt = at = v$. Podemos ahora representar v en función de t. ¿Cuál es la pendiente de esta curva? Ya lo hemos discutido [Ec. (2.28)] y sabemos que esta pendiente es la aceleración en la dirección x; así, $d^2x/dt^2 = dv/dt = a$. En los capítulos siguientes haremos referencia y utilizaremos la aceleración con mucha frecuencia.

Observemos que las dimensiones de la velocidad son *longitud* dividida por *tiempo*. Naturalmente, existen muchas unidades de longitud y muchas unidades de tiempo. Como mencionamos en el Cap. 1, usaremos comúnmente cm para medir la distancia y segundos para el tiempo; de modo que nuestra unidad de velocidad es el cm/s. Sin embargo, son también unidades de velocidad las millas/hora, pulgadas/siglo, kilómetros/μs, etc. [En unidades S.I. (sistema mks) la unidad de velocidad es el m/s].

Al derivar es importante recordar lo que se denomina *regla de la cadena*, regla para derivar un producto de variables. La derivada de un producto es igual a la derivada del primer factor por los demás factores, más la derivada del segundo factor por los demás factores, etc.

Determinar la velocidad y aceleración en la dirección x, y o z, si:

$$
\begin{array}{lll}
x = 35t & x = 5\cos 8t & x = t^2 \operatorname{sen} 6t \\
y = \frac{1}{2}At^2 & y^2 = 25t & y = t^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} 5t \\
z = \frac{1}{2}Ct^4 + \frac{1}{4}Dt^3 & z = 7e^{-t} & z = A \ln t
\end{array}
$$

Si el lector no está familiarizado con la derivación del seno o coseno, téngase en cuenta que:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\operatorname{sen} t &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\operatorname{sen}(t + \Delta t) - \operatorname{sen} t}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t \cos \Delta t + \cos t \operatorname{sen} \Delta t - \operatorname{sen} t}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t + \cos t \,\Delta t - \operatorname{sen} t}{\Delta t} \\
&= \cos t
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

Véanse las Ecs. (2.44) y (2.45) para sen Δt y cos Δt. Igualmente

$$\frac{d}{dt}\cos t = -\operatorname{sen} t \tag{2.40}$$

Si queremos derivar sen ωt, sea $\omega t = z$. Por tanto

$$\frac{d}{dt}\operatorname{sen}\omega t = \frac{d}{dz}\operatorname{sen} z\frac{dz}{dt} = \omega \cos z = \omega \cos \omega t \tag{2.41}$$

Igualmente se obtiene

$$\frac{d}{dt}\operatorname{tg} t = \frac{d}{dt}\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{\cos t}{\cos t} + \frac{\operatorname{sen} t \operatorname{sen} t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} = \sec^2 t$$

Angulos. Al describir la posición de una partícula, como en el caso del movimiento circular, se utilizan muy a menudo los ángulos como un elemento de la descripción. La velocidad angular es la derivada del ángulo respecto al tiempo con su dirección vectorial paralela al eje de rotación. Existe una unidad natural para medir los ángulos, muy utilizada en toda la física: es el *radian* (rad). Un radian es el ángulo subtendido por un arco de un círculo cuya longitud sea igual al radio. Como la circunferencia es igual a 2π veces el radio, el ángulo de un círculo completo (360°) será 2π radianes. Dividiendo 360 por 2π obtenemos 57,3°, medida de 1 rad en grados. La velocidad angular se mide en rad/s. Conocida la velocidad angular, si el radio es constante, para obtener la velocidad lineal basta multiplicar por el radio [Ec. (2.32)]. Obsérvese que el radian no tiene dimensiones, por tratarse del cociente entre dos longitudes (arco dividido por radio).

A continuación se indican algunos problemas sobre medidas angulares:

1. Determinar cuántos radianes son 90°, 240° y 315°.

2. Si $\theta = {}^1/_5 t$, ¿cuánto vale la velocidad angular? Suponiendo que θ se exprese en radianes, determinar la velocidad angular en grados por segundo (°/s).

3. Una partícula se mueve en un círculo de radio 15 cm con una velocidad de 5 cm/s. Determinar la velocidad angular.

La función e^x. Una cuestión interesante desde el punto de vista matemático es la siguiente: ¿Qué función tiene una derivada igual a la propia función? Esta función, representada por una serie de infinitos términos, tiene la forma

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} \cdots \frac{x^n}{n!} \cdots$$

En efecto, si la derivamos respecto a x, el primer término es 0, el segundo es 1, el tercero x, el siguiente $x^2/2!$, y así sucesivamente; es decir, vuelve a reaparecer la serie primitiva, que es e^x. ¿Qué es e? Haciendo $x = 1$, tenemos $e^x = e$, es decir, $e = 1 + 1 + 1/2 + 1/3! + 1/4! + 1/5! + \ldots = 2{,}7183\ldots$ También puede comprobarse que $e^{x+y} = e^x e^y$. Podemos preguntarnos por qué 10^x no es una función como e^x. En otros términos, ¿de dónde surge este número? Supongamos que queremos calcular $d(10^x)/dx$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^{x+\Delta x} - 10^x}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^x 10^{\Delta x} - 10^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^x(10^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\
&= 10^x \times 2{,}30\ldots = 2{,}30\ldots \times 10^x\,{}^*
\end{aligned}
$$

Desde este punto de vista vemos que e es justamente una magnitud tal que

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \tag{2.42}$$

(*) El factor 2,30 ... es el logaritmo neperiano de 10. Hagamos $10^{\Delta x} = 1 + \alpha + \ldots$ donde tanto Δx como α son magnitudes pequeñas:

$$\log_e 10^{\Delta x} = 2{,}30\ldots \log_{10} 10^{x\Delta} = 2{,}30\ldots \Delta x$$
$$\log_e(1 + \alpha) = \alpha$$

Por tanto, $\alpha = 2{,}30\ldots\Delta x$. Este resultado puede comprobarse mediante el uso de una tabla de logaritmos.

Una de las razones de la importancia de esta magnitud en física es que muy a menudo nos encontramos con ecuaciones del tipo $dy/dx = ky$, en las que la derivada de y es igual a una constante multiplicada por y. Esto puede escribirse en la forma $dy/k\,dx = y$, y si hacemos kx igual a la variable independiente z, resulta $dy/dz = y$. Teniendo en cuenta la Ec. (2.42), vemos que $y = e^z = e^{kx}$ es una función que satisface la ecuación. Por tanto, hemos «encontrado una solución» a la ecuación $dy/dx = ky$.

Algunas propiedades de e^x son: $e^0 = 1$, $e^{-\infty} = 0$, $e^1 = e$ y $e^\alpha \approx 1 + \alpha$, siempre que α sea muy pequeño. Obsérvese que la serie que define e^x recuerda un poco la serie del seno y del coseno, excepto que en estas últimas se alterna el signo y sólo tienen potencias impares y pares de x, respectivamente. Recordando que $\sqrt{-1} = i$ alterna el signo al aumentar en una unidad su potencia, resulta

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} \tag{2.43}$$

$$= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + i\theta - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{i\theta^7}{7!} \cdots$$

que es justamente $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$. La relación

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

se denomina *teorema de Moivre* y tendremos ocasión de utilizarlo en el Cap. 7 (en las Notas matemáticas).

Al derivar la ecuación 2.39 observamos que $\operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta) = \operatorname{sen}\theta \cos\Delta\theta + \cos\theta \operatorname{sen}\Delta\theta \approx \operatorname{sen}\theta + \cos\theta\,\Delta\theta$, en donde $\Delta\theta$ es una magnitud pequeña. En resumen, $\operatorname{sen}\Delta\theta \approx \Delta\theta$ y $\cos\Delta\theta \approx 1$, en donde $\Delta\theta$ es un ángulo pequeño. Recuérdese que el ángulo se mide en radianes. El lector puede tomar unas tablas de senos y cosenos y comprobar esto por sí mismo. A continuación se exponen los primeros términos de las siguientes series que definen el seno y el coseno:

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} \cdots \tag{2.44}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} \cdots \tag{2.45}$$

Obsérvese que si θ es pequeño, por ejemplo 0,10, el segundo término de la serie para el seno es $\theta^3/6 = \dfrac{1}{6000}$, o sea, 600 veces más pequeño que el primero. Por tanto, se comete sólo un pequeño error omitiendo el segundo término y en el límite cuando θ tiende a cero, la aproximación es estrictamente exacta.

Desarrollo en serie. A menudo es importante en física calcular el valor de una función en un punto cuando se conoce en otro próximo. A este fin es muy útil el *Desarrollo de Taylor*. En la proximidad de un punto x_0 el valor de una función $f(x)$ viene dado por

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=x_0} + \cdots \tag{2.46}$$

La relación entre el tercer término y el segundo es

$$\frac{\frac{1}{2}(x - x_0)^2\left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=x_0}}{(x - x_0)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0}} \approx (x - x_0)$$

Por tanto, si $x - x_0$ es pequeño en comparación con la unidad, podemos con un pequeño error (que puede calcularse) aproximar $f(x)$ usando la fórmula

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} \tag{2.47}$$

Por ejemplo, supongamos que $y = Ax^5$ y que sabemos que $y_0 = Ax_0^5$ y deseamos calcular y para $x = x_0 + \Delta x$. Entonces

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0} = 5Ax_0^4 \qquad (x - x_0)\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} = \Delta x\, 5Ax_0^4$$

y por tanto,

$$y = Ax_0^5 + 5Ax_0^4\,\Delta x \cdots \tag{2.48}$$

Con expresiones que incluyan potencias puede escribirse la siguiente ecuación

$$(a + bx)^n = a^n\left(1 + \frac{bx}{a}\right)^n$$

y utilizar la fórmula del binomio, con la que resulta

$$a^n\left(1 + \frac{bx}{a}\right)^n = a^n\left[1 + n\left(\frac{bx}{a}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{bx}{a}\right)^3 \cdots\right] \tag{2.49}$$

Si bx/a es pequeño frente a 1, podemos realizar una buena aproximación despreciando todos los términos que siguen a $n(bx/a)$. Aplicando esto a nuestro problema resulta

$$y = A(x_0 + \Delta x)^5 = Ax_0^5\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^5 = Ax_0^5\left(1 + 5\frac{\Delta x}{x_0} \cdots\right)$$

$$= Ax_0^5 + 5Ax_0^4\,\Delta x \cdots$$

de acuerdo con la ecuación (2.48).

Comprobar las siguientes aproximaciones para valores de x pequeños frente a la unidad:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \tfrac{1}{2}x \cdots \qquad \sqrt[3]{1+x} = 1 + \tfrac{1}{3}x \cdots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x \cdots \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \tfrac{1}{3}x \cdots$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \tfrac{1}{2}x \cdots$$

Vectores y coordenadas polares esféricas. La posición de una partícula se expresa en coordenadas polares esféricas mediante los valores de r, θ y φ, donde r es el módulo del vector $\mathbf{r}$ desde el origen a la partícula; θ, el ángulo comprendido entre $\mathbf{r}$ y el eje polar z; y φ es el ángulo formado por el eje x y la proyección de r sobre el plano ecuatorial xy. Se toma $0 \leqq \theta \leqq \pi$. La proyección de $\mathbf{r}$ sobre el plano xy tiene el valor r sen θ. Obsérvese que la posición en coordenadas cartesianas viene dada por

$$x = r \operatorname{sen}\theta\cos\varphi; \qquad y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi; \qquad z = r\cos\theta. \qquad (2.50)$$

como se ve en la figura 2.30.

1. Sea una primera partícula situada en $\mathbf{r}_1 \equiv (r_1, \theta_1, \varphi_1)$ y una segunda en $\mathbf{r}_2 \equiv (r_2, \theta_2, \varphi_2)$. Llamemos θ_{12} al ángulo entre $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$. Expresando el producto escalar $\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2 = r_1 r_2 \cos\theta_{12}$ en función de $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ se demuestra que

$$\cos\theta_{12} = \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2, \qquad (2.51)$$

en donde hemos utilizado la identidad trigonométrica

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2. \qquad (2.52)$$

Este es un buen ejemplo del poder de los métodos vectoriales. [¡Inténtese encontrar el resultado (2.51) de otra manera!]

2. De modo semejante, formando el producto vectorial $\hat{\mathbf{r}}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_2$, deducir una relación para sen θ_{12}.

Las coordenadas cilíndricas polares ρ, φ, z, son un conjunto de coordenadas ortogonales definidas por $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho$ sen φ; $z = z$, (fig. 2.31). Cuando se utiliza en dos dimensiones, las coordenadas se reducen a ρ y φ únicamente. Sin embargo, con frecuencia utilizaremos r y θ en lugar de ρ y φ. (Véase, por ejemplo, las fórmulas que siguen.)

Fórmulas de geometría analítica

Línea en el plano xy	$ax + by = 1$
Línea en el plano xy que pasa por el origen	$y = ax$
Plano	$ax + by + cz = 1$
Plano que pasa por el origen	$ax + by + cz = 0$

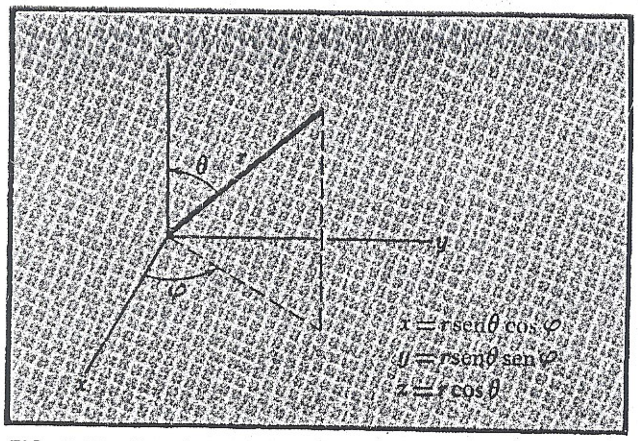


FIG. 2.30 Coordenadas polares esféricas.

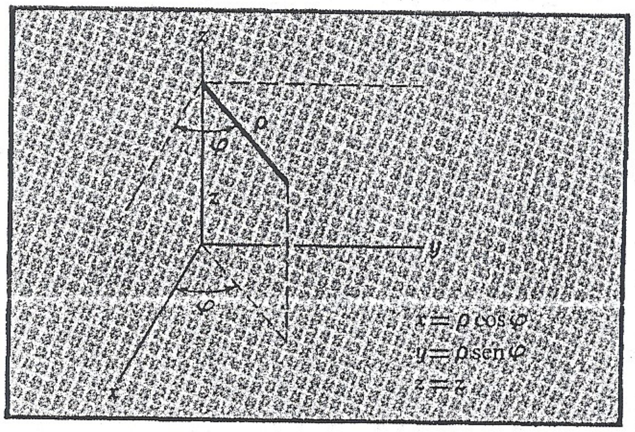


FIG. 2.31 Coordenadas polares cilíndricas.

	Coordenadas cartesianas	*Coordenadas polares*
Círculo, centro en el origen	$x^2 + y^2 = r_0^2$	$r = r_0$
Elipse	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ centro en el origen	$\dfrac{1}{r} = \dfrac{1 - e\cos\theta}{a}$ $e < 1$; origen en el foco
Parábola	$y^2 = mx$ vértice en el origen	$\dfrac{1}{r} = \dfrac{1 - \cos\theta}{a}$ origen en el foco
Hipérbola	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ centro en el origen	$\dfrac{1}{r} = \dfrac{1 - e\cos\theta}{a}$ $e > 1$; origen en el foco

Identidades vectoriales útiles

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{2.53}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{\mathbf{y}}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{\mathbf{z}}(A_x B_y - A_y B_x) \tag{2.54}$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A} \tag{2.55}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \tag{2.56}$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \tag{2.57}$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})]\mathbf{C} - [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]\mathbf{D} \tag{2.58}$$

$$\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] = (\mathbf{A} \times \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \times \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \tag{2.59}$$

LECTURAS SUPLEMENTARIAS

PSSC, *Física*, Cap. 6. Ed. Reverté.

Banesh Hoffman, *About Vectors*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1966. No es un libro de texto, pero es útil para aquellos alumnos que tengan algún conocimiento sobre vectores.

G. E. Hay, *Vector and Tensor Analysis*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1953.

D. E. Rutherford, *Vector Methods*, Oliver & Boyd Ltd., Edinburgh, or Interscience Publishers, Inc., Nueva York, 1949.

H. B. Phillips, *Vector Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York,. 1933. Libro antiguo, muy usado por una generación de estudiantes.