

Velocidad y aceleración instantáneas en el movimiento rectilíneo

OBJETIVOS

Determinar la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento rectilíneo a partir de la información posición vs tiempo.

Determinar la aceleración instantánea a partir de la información velocidad instantánea vs tiempo.

INFORMACIÓN PREVIA

El concepto de derivada es introducido formalmente en el curso de Matemática I. En esta información previa sólo hacemos un listado de los conceptos básicos que el profesor de Física debe haber introducido en la primera semana de clases con la finalidad de preparar al estudiante a comprender el ejemplo más tangible del concepto de derivada, i.e., el concepto de velocidad instantánea.

CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Función real de variable real: (f):

Conjunto de pares ordenados de números reales tales que a un mismo primer elemento no le corresponden dos segundos elementos diferentes.

$$f = \{ x, f(x) \}$$

Límite de una función en un punto x_0 :

Es el valor al cual se aproxima la variable dependiente $f(x)$ cuando la variable

independiente x se aproxima a x_0 . Algunas veces no existe.

Razón de cambio de una función en un intervalo (x_1, x_2)

$$r(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (5.1)$$

Función razón de cambio de una función alrededor de un punto x_n

$$r(x, x_n) = \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \quad (5.2)$$

Derivada de una función en un punto x_n , cuando existe el límite:

$$f'(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_n} \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} \quad (5.3)$$

O aproximadamente:

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n + \delta) - f(x_n)}{\delta} \quad (5.4)$$

(esta aproximación será mejor cuanto más pequeña sea δ).

Función derivada Es el conjunto de pares ordenados

$$f' = \{x_n, f'(x_n)\}$$

donde x_n es cualquier número real sobre el cual está definida la función f y $f'(x_n)$ es el correspondiente segundo elemento obtenido de acuerdo a la ecuación (5.3)

Segunda derivada (f'') Es la función derivada de la función f' .

CONCEPTOS FÍSICOS

Función posición. Es el conjunto de pares ordenados

$$\{t, x(t)\}$$

donde t es el tiempo transcurrido desde un instante fijado convencionalmente como $t_0 = 0$, $x(t)$ es la posición respecto a un punto tomado convencionalmente como $x_0 = 0$.

Velocidad media en un intervalo de tiempo (t_1, t_2)

$$v_m(t_1, t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (5.5)$$

(comparar con el concepto "razón de cambio", ecuación (5.1))

Función velocidad media alrededor de un instante t_n

$$v_m(t_n, t) = \frac{x(t) - x(t_n)}{t - t_n} \quad (5.6)$$

(comparar con el concepto "función razón de cambio", ecuación (5.2)).

Velocidad instantánea en un instante t_n

$$v(t_n) = \lim_{t \rightarrow t_n} \frac{x(t) - x(t_n)}{t - t_n} \quad (5.7)$$

(Comparar con el concepto "derivada en un punto", ecuación (5.3)).

Función velocidad instantánea

Es el conjunto de pares ordenados

$$v = \{t_n, v(t_n)\}$$

donde t_n designa un instante y $v(t_n)$ es la velocidad en ese instante obtenida de acuerdo a la ecuación (5.7)

(Observe que la función velocidad instantánea viene a ser la derivada de la función posición)

Aceleración media en un intervalo de tiempo (t_1, t_2)

$$a_m(t_1, t_2) = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad (5.8)$$

Función aceleración media alrededor de un instante

$$a_m(t_n, t) = \frac{v(t) - v(t_n)}{t - t_n} \quad (5.9)$$

Aceleración en el instante t_n

$$a(t_n) = \lim_{t \rightarrow t_n} \frac{v(t) - v(t_n)}{t - t_n} \quad (5.10)$$

Función aceleración instantánea

Es el conjunto de pares ordenados

$$a = \{t_n, a(t_n)\}$$

donde t_n designa un instante y $a(t_n)$ es la aceleración en ese instante de acuerdo a la ecuación (5.10)

Es la función derivada de la función velocidad instantánea.

EQUIPO

El material necesario para este experimento está mostrado en la figura 1 y consta de:

- ♦ Riel sobre un plano inclinado con tira de papel eléctrico
- ♦ Carrito metálico

- ♦ Chispero electrónico (caja de color azul), produce chispas cada 25 milisegundos o cada 50 ms según la posición del interruptor negro en la parte superior derecha
 - ♦ Fuente del chispero (caja de color rojo)
 - ♦ Una tira de papel bond de 65 cm x 6 cm.
 - ♦ Cinco hojas de papel milimetrado
- 5° Coloque en "ON" el interruptor de la fuente pero todavía no el del chispero.
 - 6° Coloque el carrito en la parte superior del plano inclinado, sostenerlo de la parte de acrílico.
 - 7° El estudiante A colocará en "ON" el interruptor del chispero y un instante después el estudiante B que está sosteniendo el carrito lo soltará. Cuando el carrito llegue a la parte más baja del plano inclinado, inmediatamente el estudiante A colocará en "OFF" el interruptor del chispero.
 - 8° Sobre el papel bond queda marcada una serie de puntos, designe al instante en que se produjo el primer punto de la trayectoria como $t_0 = 0$ y $x_0 = 0$ la posición del primer punto. (Por convención se podría elegir $t_0 = 0$ y $x_0 = 0$ en cualquier otro punto, pero en este experimento no es lo más conveniente).
 - 9° La posición de los otros puntos quedará expresada por la distancia en cm al punto $x = 0$. El instante en que el móvil ocupaba la posición marcada por el segundo, tercer, n-ésimo puntos serán 1 tick, 2 ticks, etc. (entre tick y tick hay 25 ó 50 ms dependiendo de la frecuencia a la cual está trabajando el chispero).

PROCEDIMIENTO

NOTA: Cuando el chispero se encuentre en operación evite tener contacto con el papel milimetrado, los rieles y la parte metálica del carrito. El carrito debe ser operado cogiéndolo de la parte de acrílico.

- 1° Disponga el sistema riel/plano inclinado con una inclinación de 10 a 25 grados sexagesimales, como se muestra en la figura 1.
- 2° Conecte la fuente del chispero a 220 V.
- 3° Conecte la salida de la fuente a la entrada del chispero (bananas a la izquierda en la parte inferior del chispero).
- 4° Conecte una salida del chispero a la banana sobre el riel y la otra salida del chispero a la banana sobre la base de madera, la cual a su vez está conectada al papel eléctrico.

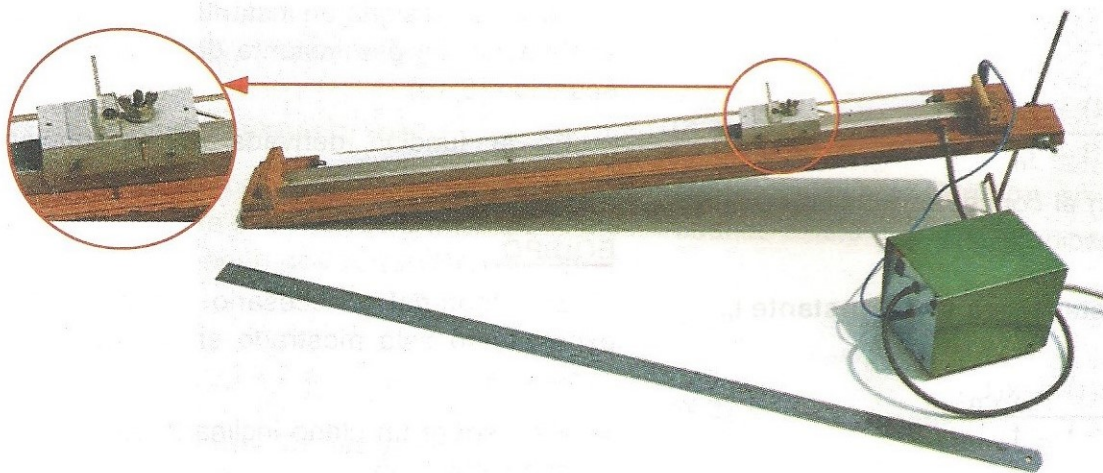


Figura 1

ANÁLISIS DE DATOS

Gráfica de la función posición

- Llene las dos primeras columnas de la tabla 1: t en ticks y x en cm.
- Grafique en el papel milimetrado

Velocidad instantánea en $t = 4$ ticks

A partir de las dos primeras columnas y haciendo las operaciones indicadas en la parte superior de la tercera columna, llene la tercera columna.

Observe que la primera y tercera columnas definen la función velocidad media alrededor de $\{ t, V_m(4, t) \}$ ecuación (5.5). Observe también que esta función no está definida en $t = 4$.

Haga un gráfico de la función $\{ t, V_m(4, t) \}$.

Observe que este gráfico se puede considerar como constituido por dos partes: (i) para $t < 4$ y (ii) para $t > 4$. Si prolonga ambas partes para que se encuentren en $t = 4$ se obtendrá la velocidad aproximadamente instantánea $v(4)$. Ella estará expresada en cm/tick, haga la transformación a m/s.

Velocidad instantánea en varios puntos

Repita lo mismo para los instantes $t = 8, 12, 16, 20, 24$, ticks o los puntos que el profesor le sugiera. Puede usar un sólo papel milimetrado para todas las gráficas $\{ t, V_m(t_n, t) \}$.

Aceleración en un instante ($t = 16$)

Ahora que ya tiene la función velocidad instantánea puede proceder a hallar la aceleración en un instante, en forma análoga a como de la función posición obtuvo la velocidad en cada instante.

Gráfico x vs t^2

Observe que el método descrito para hallar la velocidad y aceleración instantáneas se basa sólo en las respectivas definiciones, es decir, este método es aplicable para cualquier dependencia de x respecto de t . En particular, en el experimento descrito se espera:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2$$

La aceleración es constante y su valor se puede obtener graficando x vs t^2 y calculando la pendiente.