

Vectores velocidad y aceleración instantáneas

OBJETIVOS

Determinar el vector velocidad instantánea ($V_x(t)$, $V_y(t)$), de una partícula en movimiento bidimensional, a partir de la información posición vs tiempo.

Determinar el vector aceleración instantánea ($a_x(t)$, $a_y(t)$) a partir de la información velocidad vs tiempo.

CONCEPTO BÁSICOS

Vector posición, $\mathbf{r}(t)$, es el segmento orientado de un punto de referencia (origen de coordenadas) al punto en que se encuentra la partícula en el instante t . Si se define un sistema de coordenadas cartesianas, este segmento puede ser representado por el par ordenado:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad (6.1)$$

Vector desplazamiento, entre los instantes t_1 y t_2 , $\Delta \mathbf{r}$, es el segmento orientado que va de la posición de la partícula en el instante t_1 a su posición en el instante t_2 , también:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \quad (6.2)$$

Vector velocidad media $\bar{\mathbf{V}}_m$, entre instantes t_1 y t_2 es el cambio del vector posición por unidad de tiempo.

$$\mathbf{V}_m(t_1, t_2) = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \right) \quad (6.3)$$

Vector velocidad instantánea, en el instante t , es el límite del vector velocidad media entre los instantes t y $t + \Delta t$ cuando Δt tiende a cero.

$$\mathbf{V}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = (V_x(t), V_y(t)) \quad (6.4)$$

Vector aceleración media $\bar{\mathbf{a}}_m$, entre los instantes t_1 y t_2 es el cambio de velocidad por unidad de tiempo:

$$\mathbf{a}_m(t_1, t_2) = \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t} \quad (6.5)$$

Vector aceleración instantánea, en el instante t , es el límite de la aceleración media entre los instantes t y $t + \Delta t$, cuando Δt tiende a cero.

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t} = (a_x(t), a_y(t)) \quad (6.6)$$

EQUIPO

Parte del equipo necesario para este experimento está mostrado en la figura 1. Consta de:

1. Tablero con superficie de vidrio y conexiones para circulación de aire comprimido
2. Un disco metálico de aproximadamente 10 cm de diámetro con mango de madera y agujero para circulación de aire comprimido
3. Chispero electrónico
4. Fuente del chispero
5. Papel eléctrico tamaño A3
6. Papel bond tamaño A3
7. Un nivel de burbuja
8. Dos resortes
9. Una regla de un metro milimetrado
10. Dos hojas de papel milimetrado tamaño A4

PROCEDIMIENTO

NOTA: Si el chispero electrónico está funcionando evite tocar el papel eléctrico y el disco. Para poner en movimiento el disco tómelo del mango de madera.

- 1° Fije los dos resortes y el disco como se muestra en la figura 1. Usando el nivel de burbuja y los tornillos en los bordes del

tablero trate de conseguir que la superficie del vidrio quede completamente horizontal.

- 2° Haga las conexiones eléctricas como se ilustra en la figura 1. La fuente del chispero a la línea de 220 V. De la salida de la fuente a la entrada del chispero. De la salida del chispero al papel eléctrico y al disco. Puede poner en "ON" la fuente pero todavía no el chispero.
- 3° El estudiante A, estirando el resorte, mantendrá fijo al disco en una posición aproximadamente intermedia entre el centro y una de las esquinas del tablero. El estudiante B pone en "ON" el interruptor del chispero y un instante después el estudiante A soltará el disco.
- 4° El disco realizará un movimiento en una trayectoria que se cruza a sí misma en varios puntos. El estudiante B tendrá el cuidado de poner el interruptor del chispero en "OFF" cuando el disco haya completado una trayectoria similar a la de la figura 2.

Nota: La "partícula" cuyo movimiento vamos a estudiar es el centro del disco.

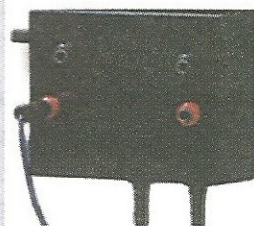
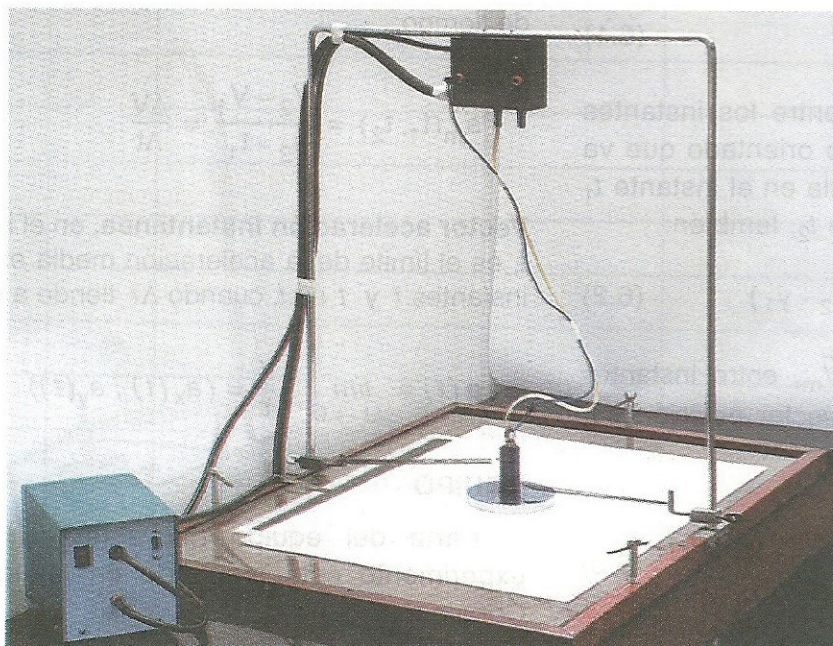


Figura 1

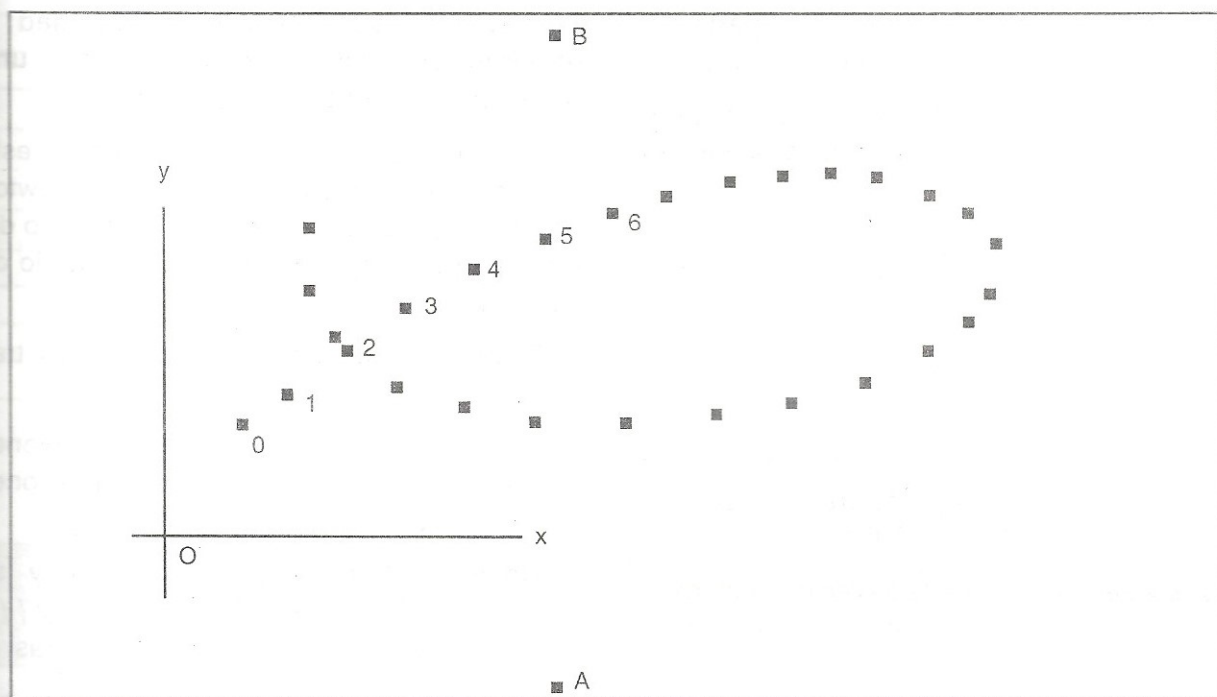


Figura 2

ANÁLISIS DE DATOS:

Cálculo analítico de la velocidad instantánea

1. Defina un sistema de referencia, es decir, dibuje un sistema de coordenadas XY.
2. Respecto a este sistema de referencia y al instante tomado como $t_0 = 0$ construya la función $\{(t, x(t))\}$, para ello llene la segunda columna de la tabla 1.
3. Calcule la componente x de la velocidad en los instantes $t = 6, 10$ y 14 ticks o los que le indique el profesor. Para ello llene las columnas 3, 4 y 5 de la tabla 1; grafique las funciones $\{(t, V_{mx}(6, t))\}$, $\{(t, V_{mx}(10, t))\}$, $\{(t, V_{mx}(14, t))\}$ y obtenga los respectivos límites.
4. Construya la función $\{(t, y(t))\}$, es decir, llene la segunda columna de la tabla 2.
5. Calcule la componente y de la velocidad en los instantes $t = 6, 10$ y 14 ticks o los que le indique su profesor.
6. Transforme los valores de las velocidades obtenidas a cm/s. Con estos valores

construya para cada instante el par ordenado $(V_x(t), V_y(t))$. Dibuje a escala, a partir de los puntos $t = 6, 10$ y 14 ticks de la trayectoria, los respectivos segmentos orientados que representan a cada vector velocidad instantánea.

Cálculo geométrico de la velocidad y aceleración instantáneas

Es posible aproximar a la velocidad instantánea como la velocidad media entre dos instantes muy próximos entre sí.

1. Para obtener una aproximación a la velocidad en el instante $t = 17,5$ ticks, trace sobre la trayectoria dejada por la partícula, el segmento orientado desde el punto correspondiente a $t = 17$ a $t = 18$ ticks. El módulo del vector $V(17,5)$ es la distancia del segmento trazado dividido por un tick. La representación gráfica de $V(17,5)$ es el mismo segmento orientado pero con su origen trasladado al punto medio entre los puntos 17 y 18.
2. Similarmente al paso anterior obtenga la velocidad en el instante $t = 18,5$ ticks y

- trace su representación gráfica a partir del punto medio entre los puntos 18 y 19.
3. Obtenga la aceleración en el instante $t = 18$ ticks. Para esto efectúe la siguiente operación vectorial:

$$\mathbf{a}(18) = \frac{V(18,5) - V(17,5)}{t(\text{tick})} \tag{6.7}$$

4. Transforme el módulo del vector aceleración a cm/s^2 .
5. Repita los tres pasos anteriores para calcular el vector aceleración en los instantes $t = 20$ y $t = 22$ ticks.
6. A escala trace, sobre la trayectoria obtenida, los segmentos orientados que representan a los vectores $\mathbf{a}(18)$, $\mathbf{a}(20)$ y $\mathbf{a}(22)$.

Cálculo de las funciones velocidad y aceleración instantáneas usando una computadora personal (opcional)

Los estudiantes pueden hacer esto usando, por ejemplo, el programa Newton que conseguirán a través de su profesor o del empleado del conservador del laboratorio de Física General.

El método consiste en introducir en tres columnas t , $x(t)$ y $y(t)$.

El programa ajustará las funciones $\{(t, x(t))\}$ y $\{(t, y(t))\}$ a dos funciones polinómicas.

Cada función se puede derivar y se obtendrá las funciones $\{(t, V_x(t))\}$ y $\{(t, V_y(t))\}$, las cuales podrán ser graficadas.

Similarmente, el estudiante podrá obtener los gráficos de las funciones $\{t, a_x(t)\}$ y $\{t, a_y(t)\}$.

TABLA 1

t (Ticks)	$x(t)$ (cm)	$\frac{x(t) - x(6)}{t - 6}$ (cm / tick)	$\frac{x(t) - x(10)}{t - 10}$ (cm / tick)	$\frac{x(t) - x(14)}{t - 14}$ (cm / tick)
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				

20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				

TABLA 2

t (Ticks)	y(t) (cm)	$\frac{y(t) - y(6)}{t - 6}$ (cm / tick)	$\frac{y(t) - y(10)}{t - 10}$ (cm / tick)	$\frac{y(t) - y(14)}{t - 14}$ (cm / tick)
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				