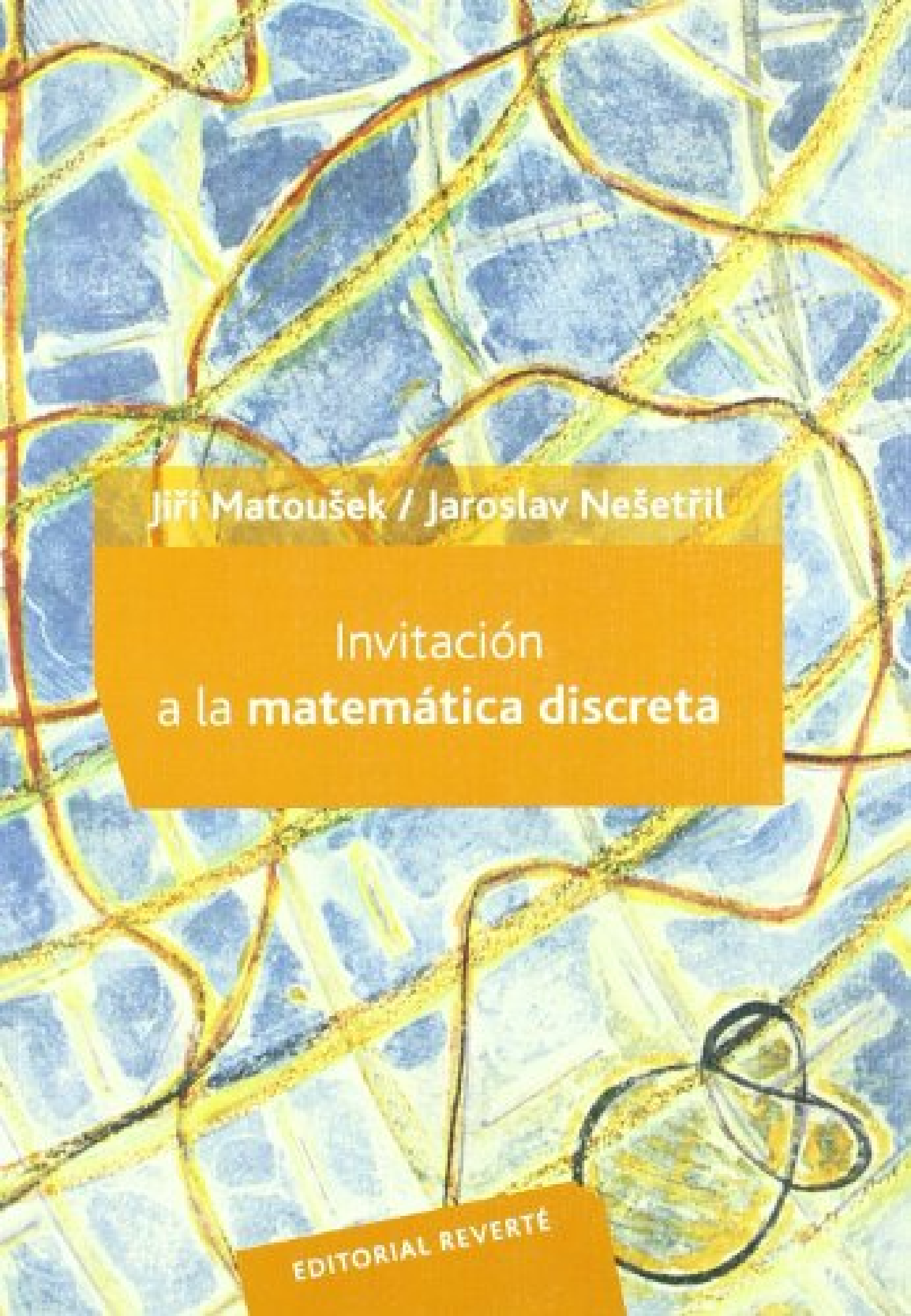


Jiří Matoušek / Jaroslav Nešetřil

Invitación a la **matemática discreta**

EDITORIAL REVERTÉ

Invitación a la **matemática discreta**

Jiří Matoušek / Jaroslav Nešetřil

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Charles, Praga

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

Registro bibliográfico (ISBD)

Matoušek, Jiří

[Invitation to Discrete Mathematics. Español]

Invitación a la matemática discreta / Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil ; [versión española traducida por Anna Lladó Sánchez]. – Barcelona : Reverté, [2008]
XVII, 442 p. : il. col. ; 24 cm.– Traducción de: Invitation to Discrete Mathematics. –. Índice
DL B-24070-08. – ISBN 978-84-291-5180-0

1. Matemáticas. 2. Informática. I. Matoušek, Jiří. II. Nešetřil, Jaroslav L. III. Lladó Sánchez, Anna, trad. III. Título.
519.1 : 004

Título de la obra original:
Invitation to Discrete Mathematics

Versión original publicada en lengua inglesa en 1998 por:
Oxford University Press

Versión española traducida por:
Anna Lladó
Profesora Titular de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España

EL DIBUJO QUE APARECE EN LA CUBIERTA ES DE
JIŘÍ NAČERADSKÝ Y JAROSLAV NEŠETŘIL.

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA
Tel: (34) 93 419 33 36
Fax: (34) 93 419 51 89
reverte@reverte.com

Edición en español:
© Editorial Reverté, S. A., 2008
ISBN: 978-84-291-5180-0

Impreso en España - Printed in Spain

Depósito Legal: B-24070-08

Impreso por Liberdúplex, S.LU.

Prólogo a la edición española

La presente traducción está basada en la edición inglesa de nuestro libro publicada por *Oxford University Press*. Sin embargo, hemos incluido algunas mejoras: hemos cambiado el texto en diversas partes (confiamos que mejorando lo anterior), hemos orregido diversos errores y hemos llenado algunas lagunas. El capítulo sobre la fórmula de Cayley para el número de árboles generadores se ha complementado con una nueva demostración, relativamente reciente y quizás una de las más simples. El Apéndice que contiene nociones algebraicas ha sido complementado con material sobre álgebra universal.

Creemos que nuestra traductora, Prof. Anna Lladó, ha hecho un gran trabajo y queremos expresarle nuestro agradecimiento por su excelente cooperación.

En el primer capítulo de Introducción discutimos ampliamente los propósitos y objetivos que nos animaron a escribir este texto. Ahora sólo nos gustaría añadir que el libro fue escrito en el marco y en la tradición de la educación universitaria europea. Por ello nos sentimos muy satisfechos por la publicación de esta traducción en español.

Praga J. M.
Marzo 2008 J. N.

Prefacio

¿Por qué un libro de texto sobre matemática discreta debe tener un prefacio tan largo? ¿Y qué queremos decir en él? Hay muchas maneras de presentar la matemática discreta, y para empezar mencionamos algunas de las líneas generales que intentamos seguir en nuestro texto; el lector podrá juzgar después hasta qué punto hemos conseguido nuestro propósito. Para un posible curso basado en este libro, añadimos también algunas observaciones técnicas, ejercicios, literatura existente y otras cuestiones de interés.

A continuación destacamos algunas características que quizás distingan este libro de otros textos con título y temas similares:

- *Desarrollo del pensamiento matemático.* Mas allá de presentar conocimientos nuevos, nuestro primer propósito, y quizás el más importante, es guiar al estudiante para que entienda y aprecie ciertas nociones, definiciones y demostraciones matemáticas con el fin de que aprenda a resolver problemas que requieran algo más que las recetas habituales, y que pueda además aprender a expresar pensamientos matemáticos con precisión y rigor. Los hábitos matemáticos pueden proporcionar grandes ventajas en muchas actividades humanas, por ejemplo en programación o en el diseño de sistemas complejos.[1] Parece que muchas empresas privadas (que ofrecen buenos sueldos) son sensibles a este hecho. No están realmente interesadas en si uno sabe de memoria la inducción matemática, sino más bien en la habilidad para pensar y absorber rápidamente conceptos complejos, y al parecer los teoremas matemáticos proporcionan un buen entrenamiento para desarrollar esa habilidad. La elección de un tema específico para esta formación no es probablemente esencial: si el lector está entusiasmado con el álgebra, ciertamente no trataremos de convertirle a la combinatoria. Sin embargo, creemos que la matemática discreta es particularmente adecuada para una

[1] Por otra parte, es preciso también tener presente que en muchas otras actividades humanas los hábitos matemáticos más bien deberían evitarse.

primera inmersión en las matemáticas, puesto que los problemas y nociones iniciales son más elementales que en otras ramas, como por ejemplo en análisis, donde se empieza con ideas bastante profundas desde el principio.

- *Métodos, técnicas, principios.* En los planes de estudio universitarios contemporáneos, la matemática discreta normalmente significa matemática de conjuntos finitos, y a menudo incluye temas tan diversos como la lógica, autómatas finitos, programación lineal o arquitectura de ordenadores. Nuestro texto tiene un marco más limitado; el libro es esencialmente una introducción a la combinatoria y a la teoría de grafos, e incluso alguien familiarizado con estas áreas podría echar en falta algunos de sus temas favoritos (como emparejamientos y flujos en redes, la teoría de Ramsey o la NP-completitud, por mencionar sólo algunos). Nos centraremos en relativamente pocos métodos y principios básicos, con el propósito de mostrar la gran variedad de técnicas matemáticas que existen incluso a este nivel básico, y la elección del material está subordinada a ello.
- *El placer.* Este libro está escrito para aquellos lectores que disfrutan con las matemáticas, aunque sólo sea de vez en cuando, y nuestro máximo deseo es que pueda ayudarles a desarrollar algunos sentimientos positivos hacia las matemáticas que pudieran estar latentes hasta el momento. En nuestra opinión, este es un prerrequisito clave: un placer estético hacia una idea matemática elegante, a veces mezclada con un sentimiento de triunfo cuando la idea es difícil de entender o de descubrir. No todo el mundo parece tener este don, al igual que no todo el mundo disfruta con la música, pero nos imaginamos que estudiar matemáticas sin él puede ser una cosa más que aburrida.
- *Todas las cartas sobre la mesa.* Intentamos presentar argumentos completos para ser matemáticamente honestos con el lector. Cuando decimos que algo es fácil de ver, realmente creemos que es así, pero si el lector no puede verlo, esto probablemente significa que algo está mal; quizás hemos juzgado mal la situación, pero también puede indicar un problema del lector en el seguimiento y comprensión del texto precedente. Siempre que sea posible, haremos que el texto sea autocontenido (a veces indicaremos las demostraciones de resultados auxiliares con ejercicios guiados), y si la demostración de algún resultado no puede presentarse

rigurosamente y por completo (como es el caso de algunos resultados sobre grafos planares, por ejemplo), pondremos énfasis en ello e indicaremos los pasos que no están completamente justificados.

- *Informática.* Hoy en día un gran número de estudiantes de matemática discreta son informáticos. A pesar de ello, creemos que incluso la gente que no sabe nada de ordenadores ni de informática, o incluso la que considera que estas materias son repulsivas, debe tener libre acceso al conocimiento de la matemática discreta, de forma que hemos evitado intencionadamente sobrecargar el texto con terminología y ejemplos de informática. Sin embargo, no hemos olvidado a los informáticos y hemos incluido varios pasajes sobre algoritmos eficientes junto con su análisis, además de un cierto número de ejercicios concernientes a algoritmos (véase más adelante).
- *Otras voces, otros lugares.* Al exponer los temas de este libro se presentan varias oportunidades para mostrar algunos conceptos de otras ramas actualmente activas de las matemáticas, y aunque de forma intencionada restringimos el marco conceptual del libro, queremos resaltar estas conexiones. Nuestra experiencia nos dice que los estudiantes aprecian este tipo de aplicaciones, siempre que se hayan tratado suficientemente y no sólo de modo superficial.

Prerrequisitos y lectores. En la mayor parte del libro suponemos que no hay un conocimiento matemático previo superior al que se atribuye a un curso estándar de secundaria. En el primer capítulo se explican varias nociones abstractas muy comunes en todas las matemáticas y que están más allá del nivel usual de secundaria. En varias ocasiones, necesitamos algunos conceptos de álgebra elemental, y estos están resumidos en un apéndice. También hacemos algunas incursiones en el cálculo (nociones tales como límite, derivada, continuidad, y demás), pero creemos que la mayoría de los estudiantes que quieran seguir un curso relacionado con este libro tienen ya un conocimiento básico de cálculo.

Los lectores de este libro pueden ser estudiantes universitarios no graduados de matemáticas o informática con una preparación matemática básica de la escuela secundaria (como es habitual en la mayor parte de Europa), y también para estudiantes más avanzados o recién graduados (en los Estados Unidos, por ejemplo). También algunos graduados no especializados, como biólogos o químicos, pueden encontrar en el texto una fuente de recursos. Para lectores matemáticos más avanzados, el libro puede servir como una introducción rápida a la combinatoria.

En clase. Este libro está basado en un curso para no graduados que hemos estado impartiendo durante mucho tiempo a estudiantes de matemáticas e informática en la Universidad Karlova de Praga. El segundo autor también impartió parte del mismo en la Universidad de Chicago, en la Universidad de Bonn y en la Universidad Simon Fraser en Vancouver. Nuestro curso semestral en Praga (13 semanas, con clases de 90 minutos y unos 90 minutos de tutoría por semana) incluían típicamente el material de los Capítulos 1 a 8, con muchas secciones cubiertas sólo parcialmente y algunas otras sin cubrir (como por ejemplo 2.6, 3.5, 3.6, 4.5, 7.3–7.5, 8.2). Mientras que en el libro a veces se prueba un resultado de varias maneras, nosotros presentábamos sólo una demostración en clase, y las demostraciones alternativas fueron ocasionalmente explicadas en las tutorías. A veces insertábamos dos clases para funciones generadoras (10.1 a 10.3) o una clase sobre el espacio de ciclos de un grafo (11.4).

Hemos añadido material para nuestro curso básico (y a veces no tan básico), confiando que así el lector podrá también leer algunas otras cosas que vayan más allá de las partes que son necesarias para un examen. Algunos capítulos, muchos, pueden servir como introducciones para cursos especializados (sobre el método probabilístico o sobre los métodos del álgebra lineal). Los últimos tres capítulos y la última sección del capítulo sobre el número de árboles generadores son de este tipo.

Este tipo de letra pequeña se usa como material de “segundo nivel”, es decir, cosas que consideramos suficientemente interesantes para ser incluidas, pero menos esenciales. Son aclaraciones, comentarios y ejemplos adicionales, a veces a un nivel más avanzado que en un texto básico. El texto principal debe, en general, tener sentido incluso si se omite el texto en letra pequeña.

Intentamos también incluir alguna información avanzada dentro de los ejercicios. Así, incluso personas que no intenten resolver los ejercicios pueden leerlos si así lo desean.

Sobre los ejercicios. Al final de la mayor parte de las secciones, el lector encontrará una pequeña o gran colección de ejercicios. Algunos de ellos sólo están relacionados vagamente con el tema correspondiente y se incluyen como diversión o como educación matemática general. Resolver como mínimo algunos ejercicios es una parte esencial del estudio de este libro, aunque sabemos que el ritmo de la vida moderna y la naturaleza humana difícilmente permiten al lector invertir tiempo y esfuerzo para resolver la mayor parte de los 451 ejercicios propuestos (aunque ésta pueda ser a la larga la manera más rápida de conocer el material cubierto).

En general no hemos incluido ejercicios rutinarios que solamente requieran la aplicación directa de alguna "receta" dada, como puede ser: "Aplica este algoritmo para este grafo concreto". Creemos que la mayoría de los lectores pueden comprobar por sí mismos su nivel de comprensión. Clasificamos los ejercicios en tres grupos de dificultad (sin asterisco, un asterisco y dos asteriscos). Suponemos que un buen estudiante que haya entendido el contenido de una sección debe ser capaz de resolver la mayoría de los ejercicios sin asterisco, aunque no necesariamente sin esfuerzo. Los ejercicios con un asterisco normalmente necesitan alguna idea o un conocimiento matemático algo más avanzado (de cálculo, por mencionar alguno) y finalmente, los ejercicios con dos asteriscos requieran probablemente alguna idea brillante. La mayor parte de los ejercicios tienen soluciones cortas; pensamos que los cálculos largos y tediosos siempre pueden evitarse. Nuestra clasificación sobre la dificultad es subjetiva, y un ejercicio que parece fácil para alguien puede ser inabordable para otros. Por tanto, si el lector no puede resolver un ejercicio sin asterisco, no debe desesperarse.

Algunos de los ejercicios están también indicados con ^{CS}, una abreviación para indicar ciencias de la computación. Estos son normalmente problemas sobre el diseño de algoritmos eficientes, que a veces requieren un conocimiento elemental sobre estructuras de datos. Los algoritmos diseñados pueden también ser programados y comprobados, y de esta forma proveemos material para un curso avanzado de programación. Algunos de los ejercicios ^{CS} con asteriscos pueden servir (y han servido) como sugerencias para posibles proyectos, ya que normalmente requieren una combinación de un cierto ingenio matemático, trucos algorítmicos y cierta habilidad para programar.

En un capítulo aparte se proporcionan indicaciones para muchos de los ejercicios. Son realmente indicaciones, no soluciones completas, y aunque aceptar una ayuda puede deslucir el placer de resolver un problema, escribir la solución completa y detallada puede ser también un objetivo para muchos estudiantes.

Sobre la literatura. En las referencias no mencionamos el origen de todas las ideas y resultados utilizados en este libro. Aquí nos gustaría resaltar, y recomendar, una de estas fuentes, una larga colección de problemas combinatorios resueltos por Lovász [7]. Este libro es excelente para un estudio avanzado de combinatoria, y también como enciclopedia para muchos resultados y métodos conocidos. Parece imposible ignorarlo al escribir un nuevo libro de combinatoria, y un número significativo de los ejercicios difíciles propuestos aquí están seleccionados de, o inspirados por, los problemas (menos avanzados) de Lovász. El libro de Biggs [1] es una bonita introducción como libro de texto con un punto de vista diferente del nuestro. Ligeramente más avanzados (adecuados como continuación de nuestro texto, digamos) son los libros de Van Lint y Wilson [6] y de Cameron [3]. El excelente texto introductorio de teoría de grafos de Bollobás [2] está probablemente escrito con objetivos similares a los nuestros, pero con un ritmo más rápido y cubriendo mucho más la parte correspondiente a teoría de grafos. Un libro de texto sobre teoría de grafos, relativamente reciente, a nivel de licenciatura es el de Diestel [4]. El arte de la combinatoria computacional y análisis asintótico está perfectamente explicado en un libro bien conocido de Graham, Knuth y Patashnik [5] (y también en la monografía de Knuth [38]). Si se busca algo específico en combinatoria y no se sabe por dónde empezar, sugerimos el *Handbook of Combinatorics* [35]. Otras recomendaciones para la literatura están mencionadas a lo largo de todo el texto. El número de libros de texto en matemática discreta es vasto, y aquí sólo mencionamos algunos de los más estimados por nosotros.

Sobre el índice. Para la mayoría de los términos matemáticos, especialmente los de significado general (como relación, grafo), el índice de términos sólo hace referencia a su significado. Los símbolos matemáticos formados por letras latinas (como C_n) están colocados al principio de la sección de símbolos correspondiente. La notación que incluye símbolos especiales (como $X \setminus Y$, $G \cong H$) y las letras griegas se encuentran también al principio del índice.

Agradecimientos. Una versión preliminar checa de este libro fue desarrollada gradualmente en nuestras clases de Praga. Agradecemos a nuestros colegas del Departamento de Matemática Aplicada de la

Universidad Karlova y a nuestros estudiantes su estímulo, sus comentarios y sugerencias sobre el texto y los ejercicios. En particular, Pavel Socha, Eva Matoušková, Tomáš Holan y Robert Babilon descubrieron cierto número de errores en la versión checa. Martin Klazar y Jiří Otta proporcionaron una lista de una docena de problemas y ejercicios; esta lista fue el núcleo inicial de nuestra colección de ejercicios. Nuestro colega Jan Kratochvíl nos proporcionó inestimables observaciones basadas en su experiencia como profesor del curso. Agradecemos a Tomáš Kaiser su sustancial ayuda en la traducción de un capítulo al inglés. Adam Dingle y Tim Childers nos ayudaron con algunos comentarios en inglés en las primeras etapas de la traducción. Jan Nekovář fue muy amable al abandonar brevemente las cimas de la teoría de números y ofrecernos indicaciones para una adecuada demostración del Hecho 10.7.1.

Varias personas leyeron la versión inglesa en varias ocasiones y nos proporcionaron una claridad que probablemente nunca se nos hubiera ocurrido a nosotros. Un agradecimiento especial para Jeff Stopple por visitarnos en Praga, leer cuidadosamente todo el manuscrito y compartir con nosotros parte de su sabiduría en cuanto a la enseñanza. Estamos realmente en deuda con Mari Inaba y Helena Nešetřilová por sus comentarios, que fueron muy útiles y diferentes de casi todos los demás lectores. Fueron también importantes algunos informes obtenidos por Oxford University Press de algunos revisores anónimos. La mayor parte del trabajo de pulir y completar el libro se debe al primer autor durante su estancia en el Eidgenössische Technische Hochschule (ETH) de Zurich. Emo Welzl y los miembros de su equipo proporcionaron un entorno muy agradable y amistoso, incluso después de que se les pidiera a cada uno de ellos la lectura de un capítulo, y así la ayuda de Hans-Martin Will, Beat Trachsler, Bernhard von Stengel, Lutz Kettner, Joachim Giesen, Bernd Gärtner, Johannes Blömer y Artur Andrzejak se agradece realmente. También agradecemos a Hee-Kap Ahn la lectura de un capítulo.

A continuación nos gustaría agradecer a Karel Horák, cuyas sugerencias de experto ayudaron al primer autor en sus dificultades para la presentación final del libro (desafortunadamente, los tiempos en los que los libros eran mecanografiados por tipógrafos profesionales parecen haberse terminado), y a Jana Chlebíková por una larga lista de correcciones tipográficas menores.

Casi todas las figuras fueron dibujadas por el primer autor usando el editor gráfico Ipe 5.0. En nombre de la humanidad, agradecemos a Otfried Cheong (anteriormente Schwarzkopf) su creación.

Finalmente, no debemos olvidar que Sönke Adlung fue extremadamente amable con nosotros y muy útil durante el proceso de edición, y también fue un placer trabajar con Julia Tompson en las etapas finales de la preparación del libro.

Un ruego final. Un texto largo de matemáticas normalmente contiene un número sustancial de errores. Comparado con varias versiones preliminares del libro, hemos corregido un gran número de ellos, pero seguramente aún quedan algunos. Por consiguiente agradeceremos a los lectores que descubran errores, malas formulaciones, falsas ayudas en los ejercicios, etc., que nos lo comuniquen.[2]

Praga J. M.
Febrero 1998 J. N.

[2] Se pueden enviar los correos electrónicos sobre este libro a `matousek@kam.mff.cuni.cz`. Actualmente se puede acceder a la página de Internet correspondiente al libro con la lista de errores. `http://kam.mff.cuni.cz/~matousek/IDM/`.

Índice

1

Introducción y conceptos básicos

En este capítulo de introducción veremos primero algunos ejemplos de los problemas y cuestiones que trataremos en este libro. Después explicaremos algunas nociones y técnicas básicas que se aplican en casi todas las ramas de las matemáticas; la mayoría de ellas fundamentales y sencillas. Supondremos que el lector está familiarizado o que, al menos, ha oído hablar de algunas de ellas. Así, nos limitaremos a revisar estas nociones, daremos las definiciones formales y descubriremos varias maneras de captar el significado de estos conceptos mediante diagramas y dibujos. El lector que prefiera una introducción más detallada de estas cuestiones básicas puede consultar, por ejemplo, el texto de Stewart y Tall [8].

En la Sección 1.1 presentamos varios problemas que estudiaremos más adelante en este libro, junto con algunas reflexiones sobre la importancia de los problemas matemáticos y otras cosas por el estilo.

En la Sección 1.2, que es un un repaso de la notación, introduciremos algunos símbolos comunes de operaciones entre conjuntos o números, como, por ejemplo, $\cup$ para la unión de conjuntos o $\sum$ para la suma de una sucesión de números. La mayoría de estos símbolos son estándar, y el lector debe ser capaz de pasar rápidamente esta sección y mirar el índice de vez en cuando para refrescar la memoria.

En la Sección 1.3 hablaremos de la inducción matemática como método importante que se utilizan para demostrar afirmaciones en el contexto de la matemática discreta. Aquí será suficiente entender este principio básico; en capítulos posteriores ya habrá muchas oportunidades para ver y practicar varias aplicaciones en las que se usa inducción. En esta sección también comentaremos algo sobre las demostraciones matemáticas en general.

En la Sección 1.4 recordaremos la noción de función y definiremos algunos tipos especiales de funciones: las inyectivas, las suprayectivas y las biyectivas, términos que se usarán frecuentemente a lo largo de este libro.

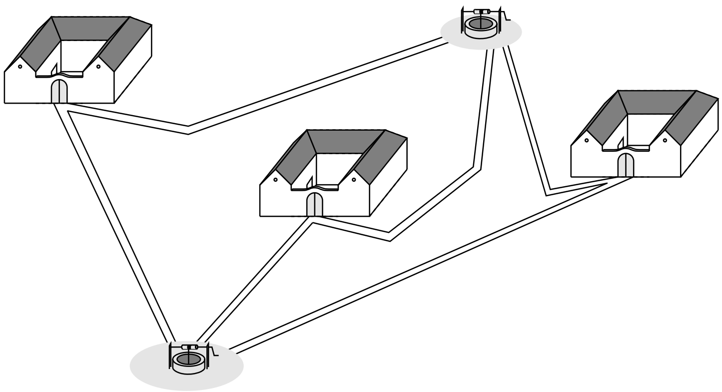
En las Secciones 1.5 a 1.7 hablaremos de relaciones y de algunos tipos especiales de relaciones, como las de equivalencia y las de orden. Estos últimos términos también pertenecen al conjunto de palabras realmente esenciales en el vocabulario matemático. Sin embargo, como son conceptos generales simples que aún no hemos revisado con ejemplos particulares interesantes, algunos lectores pueden encontrarlos, en una primera lectura,“demasiado abstractos”, una forma elegante de decir “aburridos”. Estos lectores pueden leer por encima estas secciones y volver a ellas más adelante. Por ejemplo, los conjuntos ordenados (Sección 1.7) sólo son necesarios para una comprensión completa de la Sección 6.2 y también para algunos de los ejercicios de este libro, aunque ciertamente deben formar parte de una educación matemática más profunda. (Cuando se aprende una nueva lengua, memorizar las formas gramaticales del verbo “ser”no es precisamente demasiado apasionante, pero después de un cierto tiempo puede llegar a ser realmente difícil hablar con fluidez sabiendo sólo el “yo soy” o bien el “él es”. Bien, esto es lo que tenemos que hacer en este capítulo: repasar el *lenguaje* matemático.)

1.1 Un surtido de problemas

Veamos algunos de los problemas que trataremos en este libro. Aquí presentaremos algunos problemas populares de las matemáticas recreativas, por lo que es posible que el lector ya conozca algunos de estos rompecabezas”.

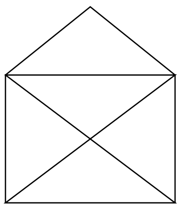
Un problema bien conocido es el de las tres casas y los tres pozos. Hace ya tiempo, en una pradera de un reino lejano había tres hermosas casas blancas, con agua limpia y fresca. Todo iba bien, hasta que un día los dueños de las casas comenzaron a pelearse entre sí y no había forma de resolver la disputa. Los habitantes de cada casa querían tener tres caminos que les llevaran de su puerta a cada uno de los tres pozos, tres caminos que no se cruzaran con ninguno de los caminos de sus vecinos. ¿Es posible encontrar alguna solución satisfactoria para todos ellos y devolver así la paz al lugar?

Con sólo dos pozos habría una posible solución:

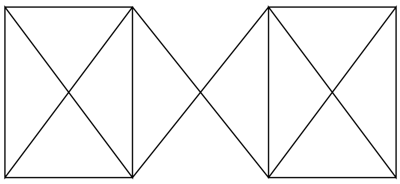


Pero con tres pozos, no hay esperanza (a no ser que aquellos hombres y mujeres tan orgullosos quisieran usar túneles o puentes, lo que parecía más bien improbable). ¿Sabrías expresar este problema en lenguaje matemático y demostrar que no tiene solución?

Esencialmente, éste es un problema que implica dibujar en el plano. Muchos otros problemas que veremos en este libro pueden formularse también con dibujos. Si trazamos cada línea una sola vez, ¿puede dibujarse la figura siguiente sin separar el lápiz del papel?

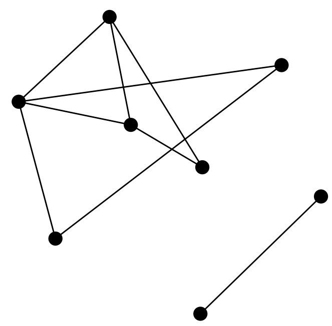


¿Y esta otra?

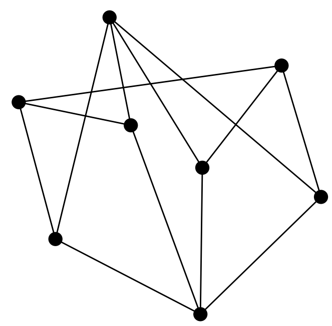


En caso negativo, ¿por qué no? ¿Existe alguna manera fácil de distinguir las figuras que pueden dibujarse de esta forma de aquellas que no lo permiten? (¿Podrías encontrar historias bonitas que acompañen a este problema y también a los siguientes?)

Para los problemas que siguen, dibuja 8 puntos en el plano de manera que ningún subconjunto de 3 puntos esté sobre una misma recta (el número 8 es bastante arbitrario; en general podríamos considerar n de estos puntos). Uniendo mediante segmentos algunos pares de puntos, obtenemos un dibujo como el que sigue:

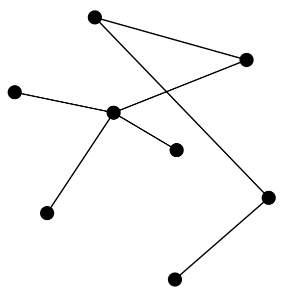


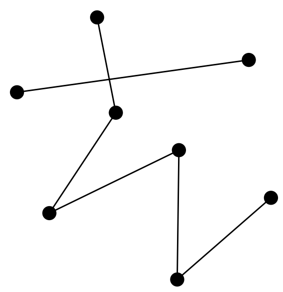
¿Cuál es el número máximo de segmentos que pueden dibujarse de manera que no aparezca ningún triángulo con vértices en los puntos? El dibujo siguiente tiene 13 segmentos:



Con estos 8 puntos, ¿se puede trazar algún segmento más sin que exista ningún triángulo? Seguramente lo conseguirás, pero ¿puedes demostrar que tu resultado es el mejor posible?

Supongamos ahora que queremos dibujar algunos segmentos de manera que dos puntos cualesquiera puedan unirse mediante el camino formado por los segmentos dibujados. En este camino sólo está permitido cambiar de segmento en los puntos y no en los cruces. En el dibujo de abajo situado a la izquierda tenemos una solución válida, mientras que en el de la derecha tenemos otra que no lo es:

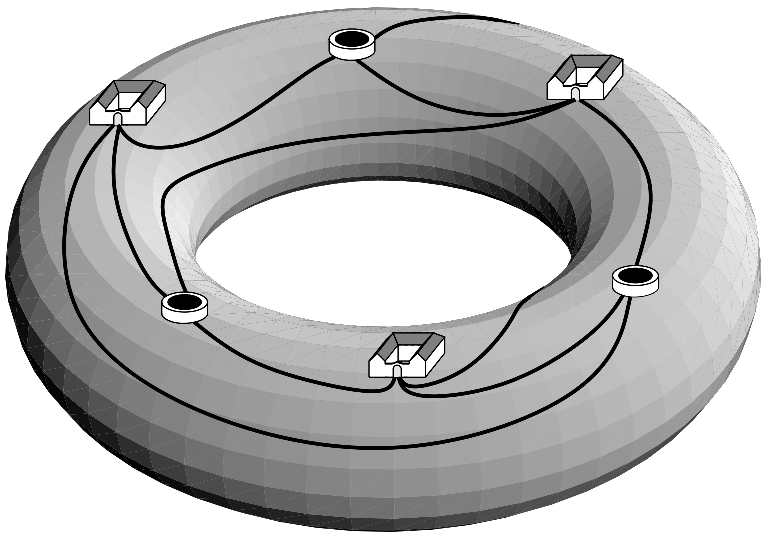




¿Cuál es el número mínimo de segmentos que podemos trazar? ¿Y cuántas soluciones diferentes existen con este número mínimo de segmentos? ¿Cómo podemos encontrar una solución para que la longitud total de todos los segmentos dibujados sea la menor posible?

Todos estos problemas son versiones populares de algunas cuestiones básicas y sencillas de *la teoría de grafos*, que es uno de los principales temas de este libro (tratado en los Capítulos 3, 4 y 5).

En los problemas anteriores con los 8 puntos del plano, es fácil ver que la posición en que se dibujan los puntos es irrelevante; lo importante es cuáles son los pares de puntos que se unen mediante un segmento y cuáles no. La mayoría de las ramas en teoría de grafos tratan con problemas que pueden expresarse en forma geométrica pero en los que la geometría no juega ningún papel esencial. Sin embargo, el problema de las casas y los pozos pertenece a una parte "realmente" geométrica de la teoría de grafos. Allí era esencial que los caminos pudieran construirse en el plano. Si las casas y los pozos estuvieran en un planeta con forma de neumático, entonces el problema tendría solución:



La *enumeración combinatoria*, tratada en los Capítulos 2 y 10, es otro tema importante de este libro. En este caso los problemas normalmente empiezan así "¿Cuántas maneras hay de ...", o algo similar. Ya se mencionó una pregunta de este tipo en nuestra serie de problemas de los "8 puntos" (y la totalidad del Capítulo 7 está dedicada a ello). Probablemente ya habrás visto montones de problemas de este tipo; pero permítenos añadir uno más. ¿De cuántas maneras se pueden repartir n monedas en grupos? Por ejemplo, 4 monedas se pueden repartir de 5 maneras: $1+1+1+1$ (4 grupos de 1 moneda cada uno), $1+1+2$, $1+3$, $2+2$ y 4 (todas en un grupo, que no es realmente un "reparto" en el sentido que lo entiende la mayoría de la gente, ¡pero qué se puede esperar de los matemáticos!). Aunque existe una fórmula exacta para resolver este problema, nosotros no seremos capaces de darla aquí porque su deducción va más allá del alcance de este libro. No obstante, obtendremos al menos una estimación para este número, una función de n, y esta estimación nos elemento es ignorada: ¡el mismo elemento no puede estar contenido dos veces en el mismo conjunto! Con esta notación, $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ significa el conjunto de todos los números naturales pares. El patrón apropiado que describe los elementos del conjunto debería ser evidente a primera vista. En el ejemplo, se entiende fácilmente que $\{2^1, 2^2, 2^3, \ldots\}$ denota el conjunto de todas las potencias de 2, mientras que $\{2, 4, 8, \ldots\}$ es menos claro.

Pares ordenados y no ordenados. Como ya sabemos, el símbolo $\{x, y\}$ denota al conjunto que contiene exactamente los elementos x e y. En este caso particular, al conjunto $\{x, y\}$ se le llama a veces el *par no ordenado* de x e y. Recordemos que $\{x, y\}$ es lo mismo que $\{y, x\}$, y si $x = y$, entonces $\{x, y\}$ es un conjunto con un único elemento.

También introducimos la notación (x, y) para el *par ordenado* de x e y. En este caso el orden de los elementos x e y es importante. Tenemos por tanto lo siguiente:

$$(x, y) = (z, t) \text{ si y sólo si } x = z \text{ e } y = t. \tag{1.1}$$

Curiosamente, el par ordenado se puede definir usando la noción de par no ordenado, como sigue:

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Puedes verificar que los pares ordenados definidos de esta manera satisfacen la condición (1.1). Sin embargo, en este texto será más fácil para nosotros considerar (x, y) como otra noción primitiva.

De forma similar, escribimos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para la *n-tupla ordenada* formada por los elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Un caso particular de este convenio es la manera de escribir un punto del plano con coordenadas x e y como (x, y), y de forma análoga para puntos o vectores en espacios de dimensiones superiores.

Definir conjuntos. Habitualmente los conjuntos más complicados e interesantes se crean a partir de conjuntos conocidos usando alguna regla. El conjunto de todos los cuadrados de los números naturales se puede escribir

$$\{i^2 \colon i \in \mathbf{N}\}$$

o también

$$\{n \in \mathbf{N} \colon \text{existe } k \in \mathbf{N} \text{ tal que } k^2 = n\}$$

o, usando el símbolo $\exists$ para "existe":

$$\{n \in \mathbf{N} \colon \exists k \in \mathbf{N}\,(k^2 = n)\}.$$

Otro ejemplo es una definición formal del intervalo abierto (a, b) introducido anteriormente:

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \colon a < x < b\}.$$

Observa que el símbolo (a, b) tanto puede denotar el intervalo abierto como el par ordenado formado por a y b. Estos dos significados deben distinguirse por el contexto (normalmente se puede). Esto es común en todas las matemáticas: muchos símbolos, como los paréntesis en este caso, se usan de varias maneras distintas. Por ejemplo, (a, b) puede también denotar el máximo común divisor de los números naturales a y b (significado que evitaremos en este libro).

Con los modernos sistemas de tipografía, no hay problema en usar cualquier clase de alfabetos y símbolos, incluidos los jeroglíficos y por tanto alguien podría pensar en cambiar la notación en tales casos. Pero los matemáticos tienden más bien a ser conservadores y la literatura existente es muy vasta, por lo que las nuevas notaciones tienen en general una vida corta.

El conjunto vacío. Un conjunto importante es el que no contiene ningún elemento en absoluto. Solamente existe uno de estos conjuntos y normalmente se denota por $\emptyset$ y se llama *conjunto vacío*. Cabe destacar que el conjunto vacío puede ser un elemento de otro conjunto. Por ejemplo, $\{\emptyset\}$ es el conjunto que contiene el conjunto vacío como un elemento, y por tanto no es el mismo conjunto que $\emptyset$.

Sistemas de conjuntos. En matemáticas tratamos a menudo con conjuntos cuyos elementos son otros conjuntos. Por ejemplo, podemos definir el conjunto

$$M = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{4\}\},$$

cuyos elementos son cuatro conjuntos de números naturales, más precisamente cuatro subconjuntos del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. En la matemática discreta se encuentran este tipo de conjuntos muy a menudo. Para evitar decir “conjunto de conjuntos”, usamos el concepto de *sistema de conjuntos* o de *familia de conjuntos*. Podríamos así decir que M es una familia de conjuntos del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Estas familias de conjuntos se suelen denotar con letras caligráficas mayúsculas, como $\mathcal{M}$.

Sin embargo, está claro que una distinción así, usando varios tipos de letras, no puede ser siempre coherente; ¿qué hacemos si nos encontramos con un conjunto de conjuntos de conjuntos?

La familia formada por todos los posibles subconjuntos de algún conjunto X se denota con el símbolo[3] 2^X y a veces se llama *potencia del conjunto* X. Otra notación que aparece frecuentemente en la literatura para este conjunto es $\mathcal{P}(X)$, llamado *partes de un conjunto.*

Tamaño de un conjunto. Una gran parte de este libro se dedica a contar varias clases de objetos. Por lo tanto es muy importante la notación que usemos para considerar el número de elementos de un conjunto finito X. Lo escribimos usando el mismo símbolo que para el valor absoluto de un número: $|X|$.

Una notación más general para sumas y productos. A veces resulta ventajoso utilizar una forma más general para escribir una suma que usar el patrón $\sum_{i=1}^n a_i$. Por ejemplo,

$$\sum_{i\in\{1,3,5,7\}} i^2$$

significa la suma $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2$. Bajo el signo de sumatorio, escribimos primero la variable y a continuación el conjunto de valores sobre los que se extiende la suma. Tenemos mucha libertad para denotar este conjunto de valores. A veces puede ser descrito en parte con palabras, como en el ejemplo siguiente:

$$\sum_{\substack{i:\,1\le i\le 10\\ i \text{ es primo}}} i = 2+3+5+7.$$

Si el conjunto de valores para la suma es vacío, el valor de la suma se define como 0, independientemente de lo que aparezca después del signo sumatorio. Por ejemplo :

$$\sum_{i=1}^{0}(i+10) = 0, \qquad \sum_{\substack{i\in\{2,4,6,8\}\\ i \text{ impar}}} i^4 = 0.$$

Una notación similar a la del sumatorio también se puede emplear para los productos. Un producto vacío, como $\prod_{j:\,2\le j<1} 2^j$, se define siempre como 1 (*no* 0 como para una suma vacía).

---

[3] Esta notación puede parecer extraña, pero es tradicional y tiene sus razones. Por ejemplo, ayuda a recordar que un conjunto de n elementos tiene 2^n subconjuntos; ver la Proposición 2.1.2.

Operaciones con conjuntos. Usando la noción primitiva de miembro de un conjunto, $\in$, podemos definir nuevas relaciones entre conjuntos y también otras operaciones con conjuntos. Por ejemplo, dos conjuntos X e Y se consideran idénticos (iguales) si tienen los mismos elementos. En este caso escribimos $X = Y$.

Otras relaciones entre conjuntos pueden definirse de forma similar. Por ejemplo, si X, Y son conjuntos, $X \subseteq Y$ (en palabras: "X es un subconjunto de Y") significa que cada elemento de X pertenece también a Y.

La notación $X \subset Y$ denota a veces que X es un subconjunto de Y pero X no es igual a Y. Esta distinción entre $\subseteq$ y $\subset$ no está muy unificada en la literatura, y algunos autores pueden usar $\subset$ como sinónimo de nuestro $\subseteq$.

Las notaciones $X \cup Y$ (unión de X e Y) y $X \cap Y$ (intersección de X e Y) se pueden definir como sigue:

$$X \cup Y = \{z\colon z \in X \text{ `ó' } z \in Y\}, \qquad X \cap Y = \{z\colon z \in X \text{ `y' } z \in Y\}.$$

Si queremos expresar que los conjuntos X e Y de la unión son disjuntos, escribimos la unión como $X \dot{\cup} Y$. La expresión $X \setminus Y$ denota la *diferencia* entre los conjuntos X e Y, es decir, el conjunto de todos los elementos que pertenecen a X pero no a Y.

Los símbolos $\cup$ y $\cap$ se pueden usar de la misma forma que los símbolos $\sum$ y $\prod$. Por lo tanto, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son conjuntos, su unión se puede escribir como

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i \tag{1.2}$$

y de forma similar para la intersección.

Observa que esta notación sólo es posible (o correcta) sólo porque las operaciones de unión e intersección son *asociativas*; esto es, para tres conjuntos cualesquiera X, Y, Z,

$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$$

y

$$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z.$$

En consecuencia, la manera de "poner paréntesis" en la unión de 3 conjuntos cualesquiera, y en general de cualquier número n de conjuntos, no tiene importancia, y el valor común se puede denotar como en (1.2).

razonable, incluso cuando la afirmación trata con una situación tan complicada que su verdad no se puede demostrar con pruebas directas. Difícilmente se puede ver directamente que no existen dos números naturales m, n tales que $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$, y aún así podemos creer completamente en este hecho porque se puede probar mediante una cadena de simples pasos lógicos.

A los estudiantes a menudo no les gustan las demostraciones, incluso a los estudiantes de matemáticas. Una razón puede ser que nunca han sentido la satisfacción que se experimenta al comprender una demostración elegante e inteligente o nunca han obtenido por sí mismos una buena demostración. Uno de nuestros objetivos más relevantes es el de ayudar al lector a adquirir la habilidad de probar rigurosamente afirmaciones matemáticas sencillas.

> Una posible objeción es que la mayoría de los estudiantes nunca necesitarán tales demostraciones en su futuro profesional. Creemos que aprender a demostrar teoremas matemáticos ayuda a desarrollar hábitos de pensamiento útiles, tales como trabajar con nociones o ideas claras y precisas, formular exactamente pensamientos y afirmaciones, y no pasar por alto las posibilidades que no son tan obvias. Estos hábitos tienen un valor incalculable, por ejemplo, a la hora de escribir programas informáticos que no generen un error cada vez que las circunstancias normales de funcionamiento cambien ligeramente.

En general, el arte de encontrar y escribir demostraciones se aprende a partir de ejemplos[6], mostrando al estudiante muchas demostraciones (que creemos) correctas y “buenas”, y señalando los posibles errores en las demostraciones propuestas por estudiantes. Estos últimos ejemplos “negativos”(los errores de los estudiantes) no son muy importantes, y puesto que un libro es un medio de comunicación unidireccional, hemos decidido incluir también algunos ejemplos negativos, es decir, intentos de demostraciones que son erróneas y, según nuestra experiencia, típicos en estudiantes primerizos. Estas demostraciones intencionadamente erróneas se presentan en un tipo de letra especial como ésta. En el resto de esta sección veremos algunos errores bastante comunes. (Queremos advertir que los tipos de errores que hay en algunas demostraciones son numerosísimos y de ninguna manera tenemos la intención de clasificarlos.)

Una situación bastante frecuente es que el estudiante no entiende el problema correctamente. En la formulación de un problema puede

[6] !Ni siquiera nosotros intentaremos decir qué es una demostración ni cómo se hace una!

(i) El conjunto $R[x]$ siempre contiene a x, ya que R es una relación reflexiva.

(ii) Sean x, y dos elementos. Distinguimos dos casos:

a) Si xRy, primero probamos $R[x] \subseteq R[y]$. Efectivamente, si $z \in R[x]$, entonces sabemos también que zRx (por la simetría de R) y por tanto zRy (gracias a la transitividad de R). Así también $z \in R[y]$. Usando la simetría de nuevo, tenemos que xRy implica que $R[x] = R[y]$.

b) Supongamos que xRy no se cumple. Queremos ver que $R[x] \cap R[y] = \emptyset$. Procedemos por contradicción. Supongamos que existe $z \in R[x] \cap R[y]$. Entonces xRz y zRy (por la simetría de R), y xRy (por la transitividad de R), lo cual es una contradicción.

(iii) Esta parte es obvia, ya que la clase de equivalencia determina R como sigue:

$$xRy \text{ si y sólo si } \{x, y\} \subseteq R[x].$$

□

La proposición anterior explica el dibujo anterior. Garantiza que las clases de equivalencia forman una *partición* del conjunto X; es decir, una familia de subconjuntos de X dos a dos disjuntos cuya unión es todo X. Por otro lado, cualquier partición de X determina exactamente una equivalencia sobre X. Esto es, existe una aplicación biyectiva del conjunto de todas las equivalencias de X sobre el conjunto de todas las particiones de X.

Ejercicios

1. Formula las condiciones de reflexividad, simetría y transitividad de una relación, usando su matriz de adyacencia.

2. Prueba que una relación R es transitiva si y sólo si $R \circ R \subseteq R$.

3. (a) Prueba que para cualquier relación R, la relación $T = R \cup R \circ R \cup R \circ R \circ R \cup \ldots$ (la unión de todas las múltiples composiciones de R) es transitiva.

   (b) Prueba que cualquier relación transitiva que contenga R como subconjunto también contiene a T.

   (c) Prueba que si $|X| = n$, $T = R \cup (R \circ R) \cup \cdots \cup \underbrace{(R \circ R \circ \cdots \circ R)}_{(n-1)\times}$.

   Observación. La relación T como en (a), (b) es la menor relación transitiva que contiene a R, y se la llama la *clausura transitiva* de R.

4. Sean R y S dos equivalencias arbitrarias sobre un conjunto X. Decide cuáles de las siguientes relaciones son también equivalencias (en caso afirmativo, pruébalo; en caso contrario da un contraejemplo).

   (a) $R \cap S$

   (b) $R \cup S$

   (c) $R \setminus S$

   (d) $R \circ S$.

5. (a) Supongamos que R es una relación transitiva sobre el conjunto $\mathbf{Z}$ de todos los enteros, y sabemos que para cualquier par de enteros $a, b \in \mathbf{Z}$, si $|a-b| = 2$ entonces aRb. *Cada* R que satisface estas condiciones, ¿es necesariamente una equivalencia? (Observa que un par de elementos puede estar en R incluso si no satisface las condiciones dadas.)

   (b) Supongamos que R es una relación transitiva sobre $\mathbf{Z}$, y sabemos que para cualquier par de enteros $a, b \in \mathbf{Z}$, si $|a-b| \in \{3, 4\}$, entonces aRb. ¿Es R necesariamente una equivalencia?

6. Una *congruencia* es una equivalencia $\sim$ sobre el conjunto $\mathbf{Z}$ (los enteros): si se cumple la siguiente condición para todos los $a, x, y \in \mathbf{Z}$, entonces si $x \sim y$, también se cumple $a + x \sim a + y$.

   (a) Sea q un entero no nulo. Define una relación $\equiv_q$ sobre $\mathbf{Z}$ permitiendo que $x \equiv_q y$ si y sólo si q divide a $x - y$. Comprueba que $\equiv_q$ es una congruencia de acuerdo con la definición anterior.

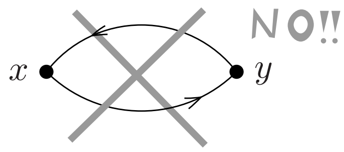
   (b) *Prueba que cualquier congruencia sobre $\mathbf{Z}$ es o bien de la forma $\equiv_q$ para algún q, o bien la *relación diagonal* $\{(x, x) \colon x \in \mathbf{Z}\}$.

   (c) Supongamos que en la definición de congruencia sustituimos la condición "$a + x \sim a + y$" por "$ax \sim ay$". Para esta clase de "congruencia multiplicativa", ¿continúa siendo cierta la afirmación de (a)? *¿Y qué hay acerca de la afirmación de (b)?

1.7 Conjuntos ordenados

El lector está ciertamente familiarizado con el orden de los números naturales, y de otros conjuntos de números, por magnitud (el orden "habitual" de los números). En matemáticas, un orden así se considera como un tipo especial de relación, es decir, un conjunto de pares de números. En el caso que acabamos de mencionar, esta relación se denota normalmente por el símbolo "$\leq$" ("menor o igual que"). También se pueden definir órdenes sobre otros conjuntos, tales como el conjunto de todas las palabras en algún lenguaje, y un conjunto se puede ordenar de muchas maneras diferentes, incluso exóticas.

Antes de introducir la noción general de conjunto ordenado definiremos una noción auxiliar. Una relación R sobre un conjunto X se llama *antisimétrica*[13] si, para todo $x, y \in X$, xRy e yRx implica $x = y$. Cuando describimos una relación por flechas, en una relación antisimétrica la siguiente situación está prohibida:



1.7.1 Definición. *Un* orden *en un conjunto X es cualquier relación sobre X que sea reflexiva, antisimétrica y transitiva. Un* conjunto ordenado *es un par (X, R), donde X es un conjunto y R es un orden sobre X.*

Observa la similitud formal de esta definición con la definición de equivalencia. Las definiciones son casi idénticas: "solamente"se ha cambiado la palabra *simétrica* por la palabra *antisimétrica*. Aun así, los conceptos de equivalencias y órdenes son muy diferentes.

Los símbolos $\preceq$ o $\leq$ se usan habitualmente para designar órdenes. El primero de ellos es útil, por ejemplo, cuando queremos hablar de algún otro orden diferente del usual para el conjunto de números naturales o, en general, si consideramos algún orden arbitrario sobre un conjunto.

Si tenemos algún orden $\preceq$, definimos una relación a partir de la "desigualdad estricta", $\prec$, como sigue: $a \prec b$ si y sólo si $a \preceq b$ y $a \neq b$. También podemos introducir la "desigualdad inversa" $\succeq$, aceptando $a \succeq b$ si y sólo si $b \preceq a$.

Ejemplos. Hemos mencionado ya varios ejemplos de conjuntos ordenados ; éstos eran $(\mathbf{N}, \leq)$, $(\mathbf{R}, \leq)$, y otros similares, donde $\leq$ por supuesto denota el orden usual, entendido formalmente como una relación.

Es fácil comprobar que si R es un orden sobre un conjunto X, y $Y \subseteq X$ es algún subconjunto de X, la relación $R \cap Y^2$ (la restricción de R sobre Y) es un orden sobre Y. Intuitivamente, ordenamos los elementos de Y de igual forma que antes pero olvidando los demás elementos. Esto produce nuevos ejemplos de conjuntos ordenados, como por ejemplo los subconjuntos de números reales con el orden usual.

---

[13] A veces se le llama *débilmente antisimétrica*, mientras que en una relación *fuertemente antisimétrica* nunca aparecen a la vez xRy e yRx, es decir, xRx está también excluido.

Órdenes lineales. Los ejemplos expuestos hasta ahora tienen un hecho significativo en común: dos elementos cualesquiera del conjunto implicado se pueden comparar; en otras palabras, para dos elementos distintos cualesquiera x e y se cumple o bien $x \leq y$ o bien $y \leq x$. Esta propiedad *no* forma parte de la definición de orden, y los órdenes que la poseen se llaman órdenes *lineales* (a veces se usa el término *orden total* con el mismo significado).

Otros ejemplos de órdenes. ¿Qué aspecto tienen los órdenes que no son lineales? Por ejemplo, sobre cualquier conjunto X, podemos definir una relación Δ en la que cada elemento x está en relación sólo consigo mismo, es decir, $\Delta = \{(x, x) \colon x \in X\}$. Se comprueba fácilmente que esta relación satisface la definición de orden, pero este es un ejemplo más bien tonto. Antes de dar más ejemplos, haremos una observación sobre la terminología.

Para enfatizar que estamos hablando de un orden no necesariamente lineal, usamos a veces el término más largo: el de *orden parcial.* un orden parcial significa exactamente lo mismo que orden (sin más adjetivos), de modo que un orden parcial también puede ser lineal. Del mismo modo, en lugar de un conjunto ordenado, se habla a veces de *conjunto parcialmente ordenado* . Para abreviar este término tan largo, se usa con frecuencia la palabra artificial *poset.*[14]

Describamos ejemplos más interesantes de conjuntos parcialmente ordenados.

1.7.2 Ejemplo. Imaginemos que queremos comprar, por ejemplo, una nevera. Intentemos simplificar la complicada situación real con una abstracción matemática, y supongamos que sólo tenemos en cuenta tres parámetros numéricos sobre neveras: su coste, el consumo de electricidad y el volumen del espacio interior. Si consideramos dos tipos de neveras, el primero de los cuáles es más caro, consume más energía y tiene una menor cabida para la comida, entonces el segundo tipo se puede considerar mejor; la mayoría de la gente que compra neveras estaría de acuerdo en esto. Por otro lado, alguien puede preferir una nevera más pequeña y más barata, otro puede preferir una nevera más grande aunque sea más cara, y un cliente preocupado por el medio ambiente puede incluso comprar una nevera cara si ahorra energía.

[14] Especie de acrónimo del inglés *partially ordered set*, pero de uso tan común que introducimos también su uso en castellano (N.T.)

En este sentido, la relación "ser claramente peor" (denotada por $\preceq$) es un orden parcial sobre el conjunto de las neveras, o reformulado matemáticamente, sobre el conjunto de triples (c,p,v) de números reales (donde c representa el coste, p la potencia que consume y v el volumen), definido como sigue:

$$\begin{aligned}&(c_1,p_1,v_1) \preceq (c_2,p_2,v_2) \text{ si y sólo si}\\ &c_1 \geq c_2,\ p_1 \geq p_2 \text{ y } v_1 \leq v_2.\end{aligned} \tag{1.3}$$

1.7.3 Ejemplo. Para números naturales a,b, el símbolo $a|b$ significa "a divide a b". En otras palabras, existe un número natural c tal que $b = ac$. La relación "$|$" es un orden sobre $\mathbf{N}$. Dejamos esta verificación para el lector.

1.7.4 Ejemplo. Sea X un conjunto. Recuerda que el símbolo 2^X denota el familia de todos los subconjuntos del conjunto X. La relación "$\subseteq$" (un subconjunto) define un orden parcial sobre 2^X.

Representaciones gráficas de conjuntos parcialmente ordenados. Los órdenes finitos se pueden dibujar usando flechas, como en cualquier otra relación. En general tales dibujos contienen muchas flechas. Por ejemplo, para un conjunto de 10 elementos linealmente ordenados podríamos tener que dibujar $10+9+\cdots+1 = 55$ flechas y lazos. Sin embargo, varias flechas se pueden reconstruir por transitividad: si sabemos que $x \preceq y$ y $y \preceq z$, entonces también $x \preceq z$, así podemos omitir la flecha de x a z. De forma análoga, no necesitamos dibujar los lazos, puesto que ya sabemos que éstos están siempre allí. Para conjuntos ordenados finitos, toda la información se obtiene a partir de la relación de "inmediato predecesor" que ahora vamos a definir.

Sea $(X,\preceq)$ un conjunto ordenado. Decimos que un elemento $x \in X$ es un *inmediato predecesor* del elemento $y \in X$ si

- $x \prec y$, y
- no existe $t \in X$ tal que $x \prec t \prec y$.

Denotamos la relación de inmediato predecesor por $\lhd$.

La afirmación que dice que el orden $\preceq$ puede reconstruirse a partir de la relación $\lhd$, se puede formular de forma precisa como sigue:

1.7.5 Proposición. *Sea $(X,\preceq)$ un conjunto finito ordenado, y sea $\lhd$ el correspondiente inmediato predecesor de la relación. Entonces, para dos elementos cualesquiera $x,y \in X$, se cumple $x \prec y$ si y sólo si existen elementos $x_1,x_2,\ldots,x_k \in X$ tales que $x \lhd x_1 \lhd \cdots \lhd x_k \lhd y$ (posiblemente con $k=0$, es decir, también podemos tener $x \lhd y$).*

Demostración Una implicación es fácil de ver: si tenemos $x \lhd x_1 \lhd \cdots \lhd x_k \lhd y$, entonces también $x \preceq x_1 \preceq \cdots \preceq x_k \preceq y$ (ya que el predecesor inmediato está contenido en la relación de orden), y por la transitividad de $\preceq$, tenemos que $x \preceq y$.

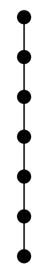
La implicación contraria tampoco es difícil, y la probaremos por inducción. Probamos primero la siguiente afirmación:

Lema. *Sean $x, y \in X$, $x \prec y$, dos elementos tales que existen como máximo n elementos $t \in X$ que satisfacen $x \prec t \prec y$ (es decir, "entre" x y y). Entonces existen $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ tales que $x \lhd x_1 \lhd \cdots \lhd x_k \lhd y$.*

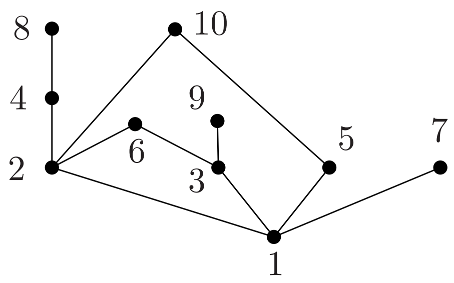
Para $n = 0$, la hipótesis asegura que no existe t con $x \prec t \prec y$, y así $x \lhd y$, lo cual significa que la afirmación se cumple (elegimos $k = 0$).

Supongamos que el lema se cumple para todo n hasta algún n_0, y elegimos $x \prec y$ tal que el conjunto $M_{xy} = \{t \in X\colon x \prec t \prec y\}$ tiene $n = n_0 + 1$ elementos. Elegimos un elemento $u \in M_{xy}$, y consideramos los conjuntos $M_{xu} = \{t \in X\colon x \prec t \prec u\}$ y M_{uy} definidos de forma similar. Por la transitividad de $\prec$ deducimos que $M_{xu} \subset M_{xy}$ y $M_{uy} \subset M_{xy}$. Ambos, M_{xu} y M_{uy} tienen como mínimo un elemento menos que M_{xy} (ya que $u \notin M_{xu}$, $u \notin M_{uy}$) y, por la hipótesis de inducción, encontramos elementos $x_1, \ldots, x_k$ e $y_1, \ldots, y_\ell$ de modo que $x \lhd x_1 \lhd \cdots \lhd x_k \lhd u$ y $u \lhd y_1 \lhd \cdots \lhd y_\ell \lhd y$. Combinando estas dos "cadenas" obtenemos la secuencia deseada que conecta x con y. $\square$

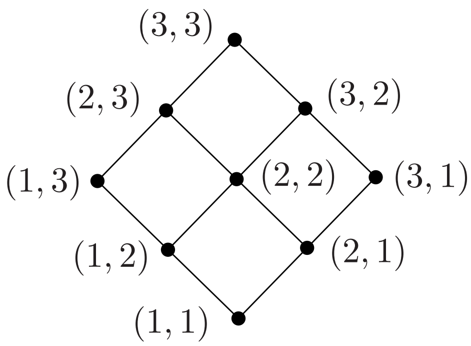
Por la Proposición anterior, es suficiente dibujar las flechas de la relación "inmediato predecesor". Si aceptamos el convenio que todas las flechas del dibujo están dirigidas hacia arriba (esto significa que si $x \prec y$ entonces y está dibujado más arriba que x), no necesitamos ni siquiera dibujar la dirección de las flechas: es suficiente dibujar segmentos que conecten los puntos. Este dibujo que corresponde a un conjunto parcialmente ordenado se llama *diagrama de Hasse*. La figura siguiente muestra un conjunto de siete elementos ordenado linealmente como $(\{1, 2, \ldots, 7\}, \leq)$:



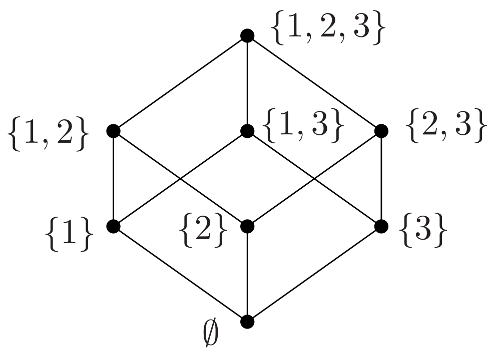
La figura siguiente muestra el conjunto $\{1, 2, \ldots, 10\}$ ordenado por la relación de divisibilidad (ver Ejemplo 1.7.3):



La siguiente figura es un diagrama de Hasse del conjunto $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ con el orden $\preceq$ dado por la regla $(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2)$ si y sólo si $a_1 \leq a_2$ y $b_1 \leq b_2$:



Finalmente, aquí tenemos un diagrama de Hasse del conjunto de todos los subconjuntos de $\{1,2,3\}$ ordenados por inclusión:



Otros ejemplos y nociones relativas a posets se dejan para los ejercicios. La teoría de posets finitos es una importante y floreciente rama de la combinatoria. El lector puede aprender sobre esta rama en Trotter [28].

Ejercicios

1. Dado un conjunto X, describe todas las relaciones que sean equivalencias y órdenes (parciales) al mismo tiempo.
2. Sean R y S órdenes parciales arbitrarios sobre un conjunto X. Decide cuáles de las siguientes relaciones son necesariamente órdenes parciales:
   (a) $R \cap S$
   (b) $R \cup S$

(c) $R \setminus S$

(d) $R \circ S$.

3. Verifica que la relación (1.3) en el Ejemplo 1.7.2 define realmente un orden parcial.

4. *Sea R una relación sobre un conjunto X tal que no existe ninguna sucesión finita de elementos $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de X que satisfagan $x_1 R x_2$, $x_2 R x_3, \ldots,$ $x_{k-1} R x_k$, $x_k R x_1$ (decimos que R es *acíclico*). Prueba que existe un orden $\preceq$ sobre X tal que $R \subseteq \preceq$. Puedes suponer que X es finito.

5. (a) Considera el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ ordenado por la relación de divisibilidad $|$ (ver Ejemplo 1.7.3). ¿Cuál es el máximo número posible de elementos de un conjunto $X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ que esté ordenado linealmente por la relación $|$ (un conjunto X así se llama *cadena*)?

   (b) Responde a la misma cuestión para el conjunto $2^{\{1,2,\ldots,n\}}$ ordenado por la relación $\subseteq$ (ver Ejemplo 1.7.4).

6. Muestra que la proposición 1.7.5 puede ser falsa para conjuntos infinitos.

7. Sea $(X, \preceq)$ un poset. Un elemento $a \in X$ se llama
   - un *elemento máximo* de X si para cada $x \in X$, se cumple $x \preceq a$, y
   - un *elemento maximal* de X si no existe $y \in X$ tal que $a \prec y$.

   De forma similar se definen un *elemento mínimo* y un *elemento minimal.*

   (a) Muestra que los elementos máximos son siempre maximales, y encuentra un ejemplo de un poset con un elemento maximal pero que no tenga máximos.

   (b) Encuentra un poset que no tenga elemento mínimo y tampoco tenga elemento minimal, pero que posea un elemento máximo.

8. *Sea $\preceq$ cualquier orden (parcial) sobre un conjunto X. Una *extensión lineal* de $\preceq$ es cualquier orden lineal $\leq$ sobre X tal que $x \preceq y$ implica $x \leq y$ para cada $x, y \in X$. (Si no pareciera tan extraño, podríamos escribir esta condición de forma compacta como $\preceq \subseteq \leq$.) Prueba que cualquier orden parcial sobre un conjunto finito X tiene como mínimo una extensión lineal.

9. Sean $(X, \leq)$ e $(Y, \preceq)$ dos conjuntos ordenados. Decimos que son *isomorfos* (esto es, que "parecen ser iguales" desde el punto de vista del orden) si existe una biyección $f\colon X \to Y$ tal que para cada $x, y \in X$, tenemos $x \leq y$ si y sólo si $f(x) \preceq f(y)$.

   (a) Dibuja los diagramas de Hasse para todos los posets de 3 elementos que no sean isomorfos.

(b) Prueba que cualquier par de conjuntos de n elementos linealmente ordenados son isomorfos.

(c) Encuentra dos órdenes no lineales isomorfos del conjunto de todos los números naturales.

(d) ¿Puedes encontrar una cantidad infinita de órdenes lineales no isomorfos en $\mathbf{N}$? ¿Una cantidad no numerable (para los lectores que saben algo sobre cardinales de conjuntos infinitos)?

10. * Prueba que para cada poset finito $(X, \preceq)$ existe un conjunto finito A y una familia $\mathcal{M}$ de subconjuntos de A tal que el conjunto ordenado $(\mathcal{M}, \subseteq)$ es isomorfo a $(X, \preceq)$. (En el Ejercicio 9 definimos el isomorfismo de un poset.)

11. Sea $(X, \preceq)$ un poset y sea $A \subseteq X$ un subconjunto. Un elemento $s \in X$ se llama *supremo* del conjunto A si se cumple lo siguiente:

    - $a \preceq s$ para cada $a \in A$,
    - si $a \preceq s'$ para todo $a \in A$, donde s' es algún elemento de X, entonces $s \preceq s'$.

    El *ínfimo* de un subconjunto $A \subseteq X$ se define de forma análoga, pero con todas las desigualdades en sentido contrario.

    (a) Comprueba que cada subconjunto $A \subseteq X$ tiene como máximo un supremo y un ínfimo. (El supremo de A, si existe, se denota por $\sup A$. De forma similar $\inf A$ denota el ínfimo.)

    (b) ¿Cuál es el elemento supremo del conjunto vacío (de acuerdo con la definición que acabamos de dar)?

    (c) Encuentra un ejemplo de un conjunto en el que cada subconjunto no vacío tenga un ínfimo, pero que contenga subconjuntos no vacíos sin supremo.

    (d) *Sea $(X, \preceq)$ un poset en el que cada subconjunto (incluido el conjunto vacío) tiene un supremo. Prueba que cada subconjunto tiene también un ínfimo.

12. Considera el poset $(\mathbf{N}, |)$ (ordenado por divisibilidad).

    (a) Decide si cada subconjunto no vacío de $\mathbf{N}$ tiene un supremo.

    (b) Decide si cada subconjunto finito no vacío de $\mathbf{N}$ tiene un supremo.

    (c) Decide si cada subconjunto no vacío tiene un ínfimo.