Apuntes de clases de Introducción a la matemática discreta

Profesor William Echegaray or Ronald Mas

Actualizado a la fecha 14 de mayo del 2018

Tabla de contenido

Tabla de contenido 2

I Teoría 3

1 Preparación 4
1.1. Problemas ligados a la matemática discreta . . . 4
1.2. Inducción matemática . . . 5
1.3. Principio de inducción matemática generalizado . . . 6
1.4. Funciones y relaciones . . . 6
1.5. Relaciones de equivalencia . . . 7
1.6. Método de inducción . . . 8
1.7. Principio de buena ordenación . . . 8
1.8. Variante del principio de buen orden en $\mathbb{Z}$ . . . 9
1.9. Principio de buen orden en $\mathbb{Z}$ . . . 9
1.10. Segundo principio de inducción o inducción fuerte . . . 9
1.11. Definiciones inductivas . . . 10
1.12. Relación de A en B . . . 11

2 Conteo 12

3 Introducción a los grafos 16
3.1. El concepto de grafo . . . 16
3.2. Tipos de grafos no dirigidos . . . 19
3.3. Grafos isomorfos . . . 22
3.4. Grafos no isomorfos . . . 23
3.5. Subgrafos, componentes, matriz de adyacencia . . . 25
3.6. Caminos y ciclos . . . 26
3.7. Componentes conexas . . . 26
3.8. Distancia entre grafos . . . 27
3.9. Caminos en grafos . . . 28

4 Árboles 33

II Ejercicios 34

Bibliografía 36

Parte I

Teoría

Capítulo 1

Preparación

1.1. Problemas ligados a la matemática discreta

1. *Factorización de números primos muy grandes*

   Los bancos basan su encriptación en algoritmos como el clave pública RSA. Esta se basa en dos hechos y una conjetura.

Hecho 1 **La generación de números primos es sencilla:** Es fácil encontrar un número primo aleatorio de un tamaño determinado.

Hecho 2 **La multiplicación es fácil:** Dado p y q, es fácil encontrar su producto, $n = pq$.

Conjetura 1 **La factorización es difícil:** Dado tal n, parece ser bastante difícil recuperar los factores primos p y q.

Hecho 4 **La exponenciación modular es fácil:** Dado n, m, y e, es fácil calcular $c = m^e \mod n$.

Hecho 5 **La extracción de raíz modular (la inversa de la exponenciación modular)** Es fácil dados los factores primarios: dados n, e, c, y los factores primos p y q, es fácil recuperar el valor m tal que $c = m^e \mod n$.

Conjetura 2 **La extracción de raíz modular es, por lo demás, difícil:** Dado que solo n, e, y c, pero no los factores primos, parece ser bastante difícil recuperar el valor m.

2. *Generación de números pseudoaleatorios*

   Los números aleatorios son la base esencial de la simulación. Si realizaríamos un sorteo de lotería mediante ordenador, seguramente la gente no confiaría en la aleatoriedad del ordenador y se quejaría. En su lugar, se prefiere un método físico y sencillo de entender, como extraer bolas de un bombo. Incluso este tipo de métodos requiere tomar ciertas precauciones: todas las bolas debe tener idéntica masa, deben de estar bien mezcladas en el bombo y se deben cambiar regularmente para reducir las posibilidades de que unas aparezcan más que otras. Veamos uno de los métodos más famosos (y simples) creados por los matemáticos John von Neumann y Nicholas Metropolis en 1940. La técnica parte desde una semilla inicial, un número entero de $2n$ cifras propuesto por el usuario y los pasos a seguir son:

Algoritmo 1: Método de los cuadrados medios (Neumann – Metropolis)

Entrada: Un entero no negativo x_0 de $2n$ cifras como semilla (por ejemplo $x_0 = 3234$).

1. Se calcula y como ${x_0}^2$ (ejemplo $y = 10458756$)
2. Se toman los $2n$ dígitos centrales. Este número servirá para formar el primer número y para continuar calculando números pseudoaleatorios (ejemplo: 4587).
3. Se toman los $2n$ dígitos centrales. Este número servirá para formar el primer número y para continuar calculando números pseudoaleatorios (ejemplo: 4587).
4. El primer número pseudoaleatorio es $y/10^{2n}$ (ejemplo: 0,4587).
5. La nueva semilla es 4587, o sea, se comienza el procedimiento nuevamente para crear otro número pero con la nueva semilla.

Salida : Número pseudoaleatorio.

Veamos un ejemplo en C:

```
#include<stdio.h>
int main()
{
    long int seed = 6897; //Toma cualquier número de 4 dígitos no seguidos de 00

    int i, n, random;
    printf("¿Cuántos número quieres generar?\n");
    scanf("%d", &n);

    printf("Los números pseudo aleatorios son:\n");
```

```c

    for(i = 0; i < n; i++)
    {
        seed = seed * seed;
        seed = seed / 100;        //Toma el dividendo
        seed = seed % 10000;     // Toma el resto
        random = seed;
        printf("%d ", random);
    }

    printf("\n");
    return 0;
}
```

3. *El problema de los siete puentes de Königsberg* en el que se explica a detalle aquí dio origen a otras ramas de las matemáticas como la topología y la teoría de grafos.

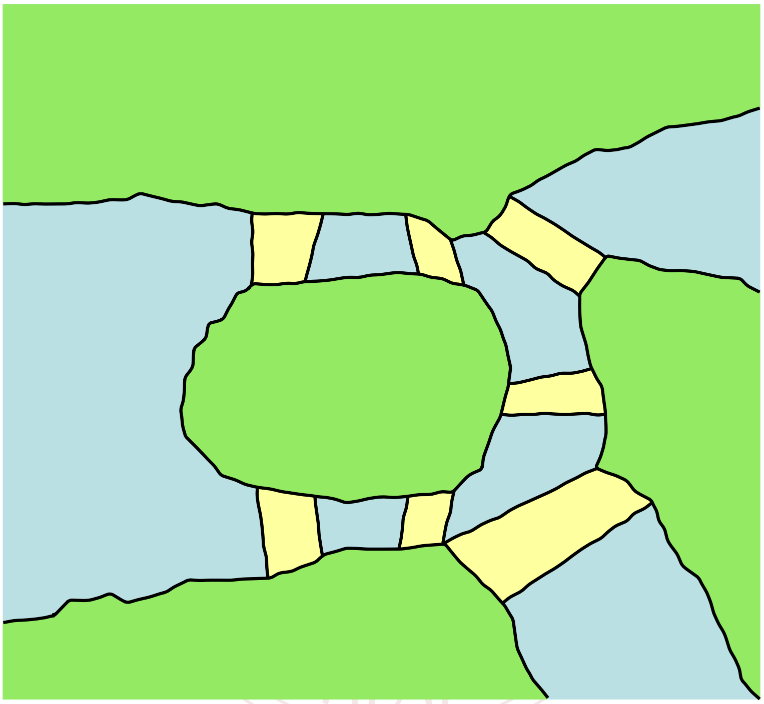


Figura 1.1: Gráfico abstracto correspondiente a los puentes de Königsberg

4. Teoría hiperbólica (curvas hiperbólicas) más refinado, conocen menos personas.

1.2. Inducción matemática

Está basado en el siguiente axioma de Giuseppe Peano.

Sea $\mathbb{N}$ im conjunto no vacío, llamado el conjunto de los **números naturales**, $S \subset \mathbb{N}$ un subconjunto no vacío y una función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sucesor tales que:

1. $f(\mathbb{N} \backslash S)$ es un conjunto unitario cuyo elemento es llamado *uno* y lo identificamos con 1, es decir,

$$f(\mathbb{N} \backslash S) = \{1\}$$

2. No existe $e \in S$ tal que

$$f(e) = 1.$$

   Denotamos “2” a la expresión $f(1) := 1 + 1 = 2 \in \mathbb{N}$.

3. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} \colon \mathcal{P}_n\} \subset \mathbb{N}$un subconjunto no vacío tal que

- $1 \in X$
- Si hasta $n \in X$ (hipótesis inductiva)

Esto implica que $n+1 \in X$. Entonces $X = \mathbb{N}$.

1.3. Principio de inducción matemática generalizado

Sean $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$Y = \{n \in \mathbb{N} \colon Q(n)\} \subset \mathbb{N}$$

un conjunto no vacío.

- $n_0 \in Y$
- Hipótesis inductiva

A partir de n_0 hasta $n \in Y$ $(n_0 < n)$ ESTO IMPLICA: $n+1 \in Y$.
Entonces

$$\begin{aligned} Y &= \mathbb{N} \backslash \{1, 2, \ldots, n_0 - 1\} \\ Y &= \mathbb{N} \backslash \{n \in \mathbb{N} \colon n \notin Y\} \\ Y &= \mathbb{N} \backslash \{n \in \mathbb{N} \colon n < n_0\} \end{aligned}$$

1.4. Funciones y relaciones

Sean A y B dos conjuntos no vacíos, $\mathcal{R} \subset A \times B$ un conjunto no vacío.
Por ejemplo si

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \quad \text{y} \quad B = \{b_1, b_2, b_3\},$$

entonces puede ser

$$\mathcal{R} = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_5, b_3)\}.$$

A esto lo denotamos como $A\mathcal{R}B$ o $\mathcal{R} \colon A \to B$.
En particular, diremos que $f \colon A \to B$ es una función si

$$\{(x, y), (x, z)\} \in f \subset A \times B, \text{esto implica que} y = z.$$

Ejemplo 1.1

$$f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a)\}.$$

Observación 1.1

$$\boxed{p \equiv V \implies f \text{ es una función.}}$$

$$(p \to q) \equiv (\neg p \vee q).$$

Es una “forma de definir” una relación de orden.

Entonces

$$\begin{aligned} Y &= \mathbb{N} \backslash \{1, \ldots, n_0 - 1\} \\ &= \mathbb{N} \backslash \{n \in \mathbb{N} \colon n \notin Y\} \\ &= \mathbb{N} \backslash \{n \in \mathbb{N} \colon n < n_0\} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2

Dados $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^2$. Diremos que $\bar{x}$ " $<''$ $\bar{y} \iff (\bar{y} - \bar{x}) \in \mathbb{P}$.

1.5. Relaciones de equivalencia

Consideremos $\mathcal{R}$ una relación sobre un conjunto X no vacío.

Definición 1.1

Diremos que $\mathcal{R}$ es una "relación" sobre X si satisface lo siguiente:

(I) Reflexiva: $(\forall x \in X)\,(x\mathcal{R}x)$.

(II) Simétrica: $(\forall x \in X)\,(\forall y \in Y)\,(x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x)$.
También se puede resumir en uno solo cuando no exista confusión:

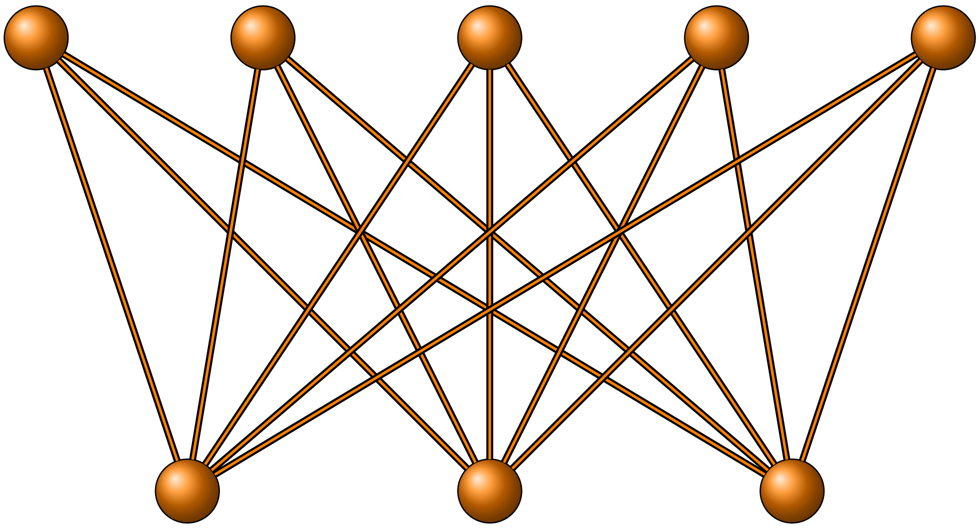
$$(\forall x, y \in X)\,(x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x)\,.$$

(III) Antisimétrica: $(\forall x, y \in X)\,(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x)$.
Nunca se cumple a menos que $x = y$.

(IV) Transitiva: $(\forall x, y \in X)\,((x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z)$.

Ejemplo 1.3

1. Si se tiene el siguiente grafo



2. El grafo anterior no es antisimétrica.
3. Si tenemos el siguiente grafo.
4. Si definimos en $\mathbb{R}$ (como números reales) $\leqslant$ como sigue
   Para $x, y \in \mathbb{R}$, diremos que x es menor que $y \equiv x < y$ si existe $z \in \mathbb{R}$ tal que

$$z = x - y > 0.$$

¿Cuál de las cuatro ítemes de la definición anterior se satisface?

Definición 1.2

Diremos que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia sobre X si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

Notación: $\equiv, \simeq, \cong, \approx$ si no hay confusión, esto significa que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
Consideremos X un subconjunto no vacío, definimos la relación, denotada, Δ_x

$$\Delta_x = \{(x, x)/x \in X\}.$$

esta relación es llamada DIAGONAL sobre X, se observa que Δ_x es simétrica, reflexiva.

Definición 1.3

i la relación $\mathcal{R}$ definida sobre X posee relación RELACIÓN INVERSA $\mathcal{R}^{-1}$ está definida como sigue:

$$y\mathcal{R}^{-1} \text{ si } x\mathcal{R}y$$

Ejercicio 1.1

1. $\mathcal{R}$ es reflexiva si $\Delta_x \subset \mathcal{R}$.
2. $\mathcal{R}$ es simétrica si $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$.
3. $\mathcal{R}$ es antisimétrica si $\mathcal{R}^{-1}\mathcal{R} \subset \Delta_x$.
4. $\mathcal{R}$ es transitiva si $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}$.

1.6. Método de inducción

Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$

Principio de inducción

Si $X \subset \mathbb{N}$ es tal que

1. $1 \in X$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, n \in X \implies n + 1 \in X$, entonces $X = \mathbb{N}$.

Principio de inducción en $\mathbb{Z}$

Si $X \subset \mathbb{Z}$

1. $n_0 \in X$
2. $\forall n \in \mathbb{Z}, n \in X \implies n + 1 \in X$.

Entonces

$$\{n \in \mathbb{Z} \colon n \geqslant n_0\} \subset X.$$

$n_0 = 1 \downarrow\ X \subset \mathbb{N}$: Principio de inducción.

$$\boxed{n_0 = 0}$$

son hechos equivalentes (Ejercicio) $\forall n \geqslant 0$.

1.7. Principio de buena ordenación

Si $\mathcal{A} \subset \mathbb{N},\ \mathcal{A} \neq \varnothing$, entonces $\mathcal{A}$ posee un **menor elemento**, existe $n_0 \in \mathcal{A}$ tal que

$$\forall n \in \mathcal{A} \quad , n_0 \leqslant n.$$

Vamos a probar que el principio de inducción y el principio de buen orden son equivalentes.

Observación 1.2

$\mathbb{N}$ se define con el Principio de inducción matemática, por construcción inductiva.

Teorema 1.1

El Principio de inducción matemática es equivalente al Principio de buen orden.

Prueba. ($\leftarrow$) Sea $\mathcal{B} \subset \mathbb{N}$ un conjunto inductivo. Por reducción al absurdo. Supongamos que $\mathcal{B} \neq \mathbb{N}$ (hipótesis auxiliar).
Consideremos $\mathcal{A} = \mathcal{A} \backslash \mathcal{B}$. Como $\mathcal{A} \neq \varnothing$, existe $n_0 = \text{mín}(\mathcal{A})$ (menor elemento de $\mathcal{A}$).
Pero $n_0 > 1$ pues $1 \notin \mathcal{A}$ ($1 \in \mathcal{B}$, (i)), luego $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ y siendo $n_0 \in \mathcal{A}$, el menor, $n_0 \notin \mathcal{A} \implies n_0 - 1 \in \mathcal{B}$.
Luego, por (ii)

$$n_0 - 1 \in \mathcal{B} \implies n_0 \in \mathcal{B}.$$

$n_0 \in \mathcal{B} \implies n_0 \notin \mathcal{A}$, absurdo.
$\therefore \mathcal{B} = \mathbb{N}$. (la hipótesis auxiliar es falsa).
$\implies$ Sea $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$, $\mathcal{A} \neq \varnothing$ queremos probar que $\mathcal{A}$ posee un mínimo.
Si $1 \in \mathcal{A}$, $1 = \text{mín}(\mathcal{A})$, así que suponemos que $1 \neq \mathcal{A}$.
Sea $\mathcal{B} = \{n \in \mathbb{N} \colon [1, n] \cap \mathbb{N} \subset \mathbb{N} \backslash \mathcal{A}\}$ "n" tal que todos los números naturales menores o iguales a n no están en $\mathcal{A}$.
$\mathcal{B} = \mathbb{N}$ significa que $\mathcal{A} = \varnothing$.

$$\mathcal{A} \neq \varnothing \iff \mathcal{B} \neq \mathbb{N}$$

Como $1 \notin \mathcal{A} \to 1 \in \mathcal{B}$. Como $\mathcal{B} \neq \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{B}$ no cumple (ii):

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / n_0 \in \mathcal{B} \wedge n_0 + 1 \notin \mathcal{B}.$$

$n_0 \in \mathcal{B} \colon \{1, 2, \ldots, n_0\} \subset \mathbb{N} \backslash \mathcal{A}$ $n_0 + 1 \notin \mathcal{B} \colon \{1, 2, \ldots, n_0, n_0 + 1\} \nsubseteq \mathbb{N} \backslash \mathcal{A}$ ($\implies$)

$$n_0 + 1 \in \mathcal{A}$$

Además de si $m \in \mathbb{N}$ y $m < n_0 + 1 \to m \notin \mathcal{A}$.
$\therefore n_0 + 1 = \text{mín}(\mathcal{A})$. ■

1.8. Variante del principio de buen orden en $\mathbb{Z}$

Un conjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$ es **acotado inferiormente** si existe un $m_0 \in \mathbb{Z}$ (no necesariamente en $\mathcal{A}$)tal que $\forall m \in \mathcal{A}, m_0 \leqslant m$.

1.9. Principio de buen orden en $\mathbb{Z}$

Si $\mathcal{B} \subset \mathbb{Z}$ no vacío y acotado inferiormente, entonces $\mathcal{B}$ posee un menor elemento.

1.10. Segundo principio de inducción o inducción fuerte

Si $S \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{m \in \mathbb{N} \colon m < n\} \subset S \implies n \in S. \tag{1.1}$$

entonces $S = \mathbb{N}$.

Teorema 1.2

El Principio de inducción matemática es equivalente al segundo principio de inducción matemática.

Prueba: ($\implies$) Sea $S \subset \mathbb{N}$ que cumple (1.1):
$n = 1$: $\{m \in \mathbb{N} \colon m < 1\} = \varnothing \subset S \implies 1 \in S$.
Defino:

$$T = \{n \in \mathbb{N} \colon \{1, 2, \ldots, n\} \subset S.$$

De lo anterior, $1 \in T \colon \{1\} \subset S$.
Sea $m \in \mathbb{N}$ con $m \in T$

$$\{1, 2, \ldots, m\} \subset S$$

De (1.1), $m+1 \in S$, pero eso significa

$$\{1,2,\dots,m,m+1\} \subset S \implies m+1 \in T.$$

Por el principio de inducción matemática, $T=\mathbb{N}$.
$\forall n \in \mathbb{N}, n \in T$, en particular $n \in S \implies S=\mathbb{N}$.
($\Longleftarrow$) Probamos que el Segundo principio de inducción matemática implica el Principio de Buen Orden.
Sea $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$ y sea $S=\mathbb{N}\backslash A$. Como $S \neq \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ que no cumple (1.1).

$$\exists \qquad \underbrace{\{m \in \mathbb{N} \colon m < n_0\}}_{\forall m \in \mathbb{N}, m<n_0 \implies m \notin A \wedge n_0 \in A} \qquad \subset S \wedge n_0 \notin S$$

Luego $n_0 = \text{mín}(A)$. ■

1.11. Definiciones inductivas

1. Sumatoria a partir de valores

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad \in \mathbb{R}.$$

Definimos

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

Mediante:

$$\begin{cases} S_1 = a_1 \text{ y} \\ S_{n+1} = s_n + a_{n+1} \text{ para } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ejemplo: Por demostrar φ

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\begin{cases} S_1 = 1 \\ S_{n+1} = S_n + (n+1) \end{cases}$$

esto define $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$.
Sea $X = \{n \in \mathbb{N} \colon S_n = \frac{n(n+1)}{2}\}$.

- $1 \in X \colon S_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.
- Dado $n \in \mathbb{N}$, si $n \in X$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \text{(hipótesis inductiva)}$$

entonces $S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$.

$$S_{n+1} \overset{def}{\equiv} S_n + (n+1) \overset{hip}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$S_{n+1} = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1)\frac{(n+1)+1}{2}$$

Por el Principio de Inducción matemática, $X=\mathbb{N}$.

2. Productorias

Si $a_1, a_2, \dots, a_n \dots \quad \in \mathbb{R}$.
Defino

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2, \dots, a_n$$

mediante

$$\begin{cases} P_1 = a_1 \\ P_{n+1} = P_n \cdot a_{n+1}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ejercicio: Si $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, entonces

$$\log\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \log(a_k).$$

Ayuda: $\log(a_1 a_2 \cdots a_n) = \log(a_1) + \log(a_2) + \cdots + \log(a_n)$.

Ejemplo: Todo número natural mayor que uno es primo o producto de primos

$$\begin{cases} n \in \mathbb{N} \text{ es primo si} \\ n = ab \text{ con } ab \in \mathbb{N} \\ \implies a = 1(\vee b = n) \text{ o} \\ b = 1(\vee a = n). \end{cases}$$

Observación 1.3

Si n es un número primo, entonces este puede considerarse como un producto de un primo.

Así leo: "Todo número mayor que uno es producto de primos".

Demostración. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} \colon n = 1 \text{ o } n > 1 \text{ es producto de primos}\}$

Sea $n \in \mathbb{N}\checkmark$.

Supongamos $n > 1$. Entonces, o bien n es primo (y $n \in X$) o sino $n = ab$ con $1 < a < n$ y $1 < b < n$.

Por hipótesis inductiva, $a \in X$ y $b \in X$.

$a = p_1 p_2 p_3 \ldots p_r$, p_i primo, $r \geqslant 1$.

$b = q_1 q_2 q_3 \ldots q_s$, p_i primo, $s \geqslant 1$.

$\implies n = p_1 p_2 \cdots p_r q_1 \cdots q_s \implies n \in X$.

Por el Segundo principio de inducción: $X = \mathbb{N}$. ∎

1.12. Relación de A en B

Sean A, B conjuntos. $\mathcal{R} \colon A \to B$ es $\mathcal{R} \subset A \times B = \{(a, b) \colon a \in A, b \in B\}$.

Observación 1.4

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d.$$

Definición 1.4

$f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una relación $f \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tal que $\forall a \in \mathcal{A}, \forall b \in \mathcal{B}, \forall b' \in \mathcal{B} \colon (a, b) \in f \wedge (a, b' \in f) \implies b = b'$.

Capítulo 2

Conteo

Definición 2.1: Estimación

La función factorial sabemos que el factorial de n está definida por

$$n! = \begin{cases} n(n-1)! & , \text{ si } n \in \mathbb{N} \\ 1 & , \text{ si } n = 0 \end{cases}$$

de esta manera para todo $i, n \in \mathbb{N}$ con $i \leqslant m$ tenemos

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i \leqslant \prod_{i=1}^{n} n = n^n.$$

Además, para todo $i, n \in \mathbb{N}$ con $i \leqslant m$ e $i \geqslant 2$ se tiene

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i \geqslant \prod_{i=2}^{n} 2 = 2^{n-1}.$$

entonces

$$2^{n-1} \leqslant n! \quad \forall n \geqslant 2$$

también notamos que $2^{1-1} = 1!$, entonces se tiene

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(2^{n-1} \leqslant n!\right)$$

Comparando con la primera desigualdad tenemos

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n\right)$$

Definición 2.2

Sea $h \colon \mathbb{N} \to [0, \infty >$ una función diremos que h es acotado si existe $\alpha > 0$ tal que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(h(n) \leqslant \alpha\right).$$

Por tanto la *función factorial*
$f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n_0) = n_0$ no es acotada. Sabemos que

$$2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, estas cotas inferiores y superiores de $n!$ dependen de n respectivamente.
Para $n = 2k$ (par), $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$
\begin{aligned}
n! &= (2k)! = \prod_{i=1}^{2k} i \\
&= (2k) \times (2k-1) \times \cdots \times (k+1) \times k \times (k-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \\
&=> \prod_{i=1}^{n=2k} i >_{i>k} \prod_{i=k+1}^{n=2k} = k^k = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}
\end{aligned}
$$

De manera similar tenemos

$$
n! = (2k)! \leqslant \left(\prod_{i=1}^{k=\frac{n}{2}}\right)\left(\prod_{i=k+1}^{n} n\right) = \frac{n^n}{2^{n/2}}
$$

entonces

$$
\sqrt{\frac{n}{2}}^{\,n} \leqslant n! \leqslant \frac{n^n}{2^{n/2}}
$$

Ejercicio: Obtenga una nueva cota para $n!$ si $n = 2k-1, k \in \mathbb{N}$. Antes de obtener otras cotas para $n!$, haremos uso del siguiente.

Teorema 2.1: Desigualdad Media geométrica vs media aritmética

Sean $a, b \in <0, +\infty>$ cualesquiera, entonces

$$
\underbrace{MG(a,b)}_{\text{Media geométrica}} \leqslant \underbrace{MA(a,b)}_{\text{Media aritmética}}
$$

Prueba. Sabemos que $(\forall x \in \mathbb{R})\left(x^2 \geqslant 0\right)$, en particular escogemos:

$$
x = \sqrt{a} - \sqrt{b} \text{ en } a, b \in <0, \infty> .
$$

Luego $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \geqslant 0$, entonces $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, de donde $\sqrt{ab} = MG(a,b) \leqslant MA(a,b) = \frac{a+b}{2}$■. ■

Haremos uso de este resultado para demostrar el siguiente

Teorema 2.2

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$
\left(\sqrt{n}\right)^n \leqslant n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n
$$

Prueba: Sabemos que

$$
n! = \prod_{i=1}^{n} i
$$

se observa que $1 \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Esta enumeración para i es creciente. Dado que $xy = yx$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} &= n! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n \\
&= n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1 \\
&= \prod_{i=1}^{n} (n+1-i)
\end{aligned}
$$

en este caso para i es decreciente, de donde

$$
(n!)(n!) = (n!)^2 = \prod_{i=1}^{n} i\,(n+1-i)
$$

entonces

$$n! = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{i\,(n+1-i)}$$

Aplicando el *teorema de la desigualdad de la media aritmética y media geométrica* para $a = i$, $b = n+1-i$, entonces

$$\sqrt{i\,(n+1-i)} \leqslant \frac{a+b}{2} = \underbrace{\frac{n+1}{2}}_{\text{independiente de} i} .$$

Luego:

$$\begin{aligned} n! &= \prod_{i=1}^{n} (n+1-i) \qquad\qquad \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{n+1}{2}\right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}}_{\text{cota superior que depende de } n} \end{aligned}$$

Para el lado izquierdo hacemos uso de la desigualdad

$$i\,(n+1-i) \geqslant n \text{ para todo } i \in \{1, 2, \ldots, n.\}$$

En efecto: Probemos por inducción sobre i:

- $i = 1$

  $n = 1\,(n+1-1) \geqslant n\checkmark$

- Supongamos que esta desigualdad se satisface hasta i. Veamos que pasa para $i+1$, también se cumple:

  $$(i+1 \leqslant n)$$

  De

  $$\begin{aligned} (i+1)\,(n+1-(i+1)) &= i(n+1-i) + n + 1 - i - 1 - i \\ &\geqslant^{\text{H.I.}} n + n - 2i = 2(n-1) \\ &\leqslant n\checkmark \end{aligned}$$

  Por tanto,

  $$i\,(n+1-i) \geqslant n \text{ para todo } i \in \{1, 2, \ldots, n.\}$$

  donde $n! = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{i\,(n+1-i)} \geqslant \prod_{i=1}^{n} \sqrt{n} = \left(\sqrt{n}^{n}\right)$.

  Finalmente se tiene que

  $$\sqrt{n}^{n} \leqslant n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}$$

  para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

Sabemos por cálculo diferencial que

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,(1 + x \leqslant e^{x})$$

Teorema 2.3

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^{n} \leqslant n! \leqslant en\left(\frac{n}{e}\right)^{n}.$$

Prueba: Veamos la cota por la derecha. Probando por inducción sobre n:

- $n = 1$:

$$1! = 1 = e \cdot 1\left(\frac{1}{e}\right)^{2} \checkmark$$

- Suponga que hasta n la desigualdad es válida.
- Suponga que para $n+1$ la desigualdad de la derecha satisface:

  De

  De la expresión:

$$\begin{aligned}
e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} &= e1 - \frac{1}{n+1}^{\,n+1} \\
&\leqslant e\left(e^{-\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \\
&= e \cdot e^{-1} = 1.
\end{aligned}$$

  Por tanto

$$(n+1)! \leqslant e(n+1)\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \cdot 1.$$

  Luego:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(n! \leqslant e(n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\right)$$

Para la desigualdad de la izquierda queda como ejercicio. ■

Capítulo 3

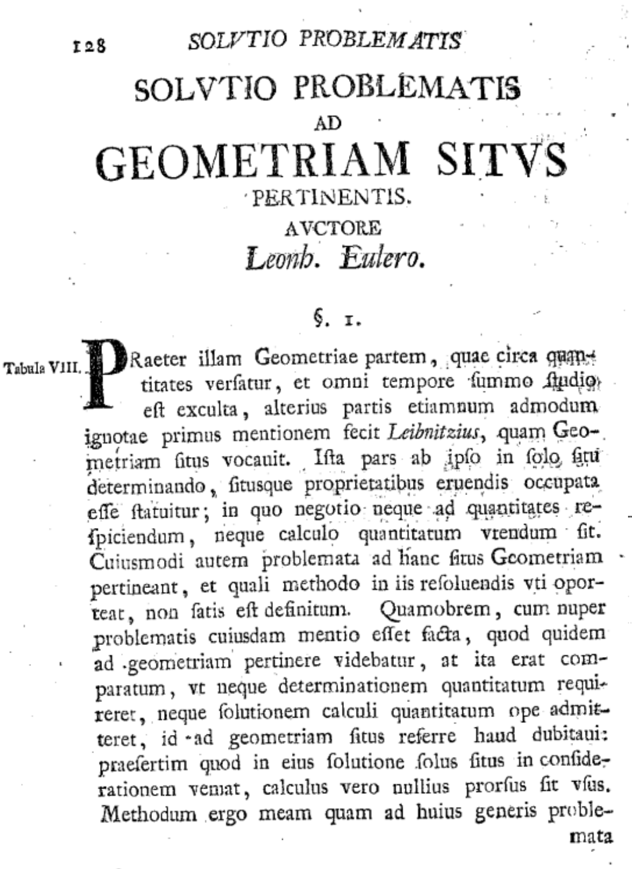
Introducción a los grafos

En esta primera parte, introduciremos la idea de grafos por medio de ejemplos y nos prepararemos para estudiar una clase muy especial, los *grafos eulerianos*.

3.1. El concepto de grafo

Ejemplo 3.1: Los siete puentes de Königsberg

En los primeros años del siglo XVIII habían siete puentes sobre el río Pregel en el este de la ciudad prusiana de Königsberg (ahora Kaliningrado). Se decía que los residentes intentaron encontrar una ruta partiendo de sus hogares, cruzando cada puente exactamente una vez y regresar a casa. Comenzaron a creer que dicha tarea era imposible, así que le preguntaron a Leonhard Euler si esto era posible.



128 SOLVTIO PROBLEMATIS

SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula VIII. Praeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates verſatur, et omni tempore ſummo ſtudio eſt exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam Geometriam ſitus vocauit. Iſta pars ab ipſo in ſolo ſitu determinando, ſitusque proprietatibus eruendis occupata eſſe ſtatuitur; in quo negotio neque ad quantitates reſpiciendum, neque calculo quantitatum vtendum ſit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc ſitus Geometriam pertineant, et quali methodo in iis reſoluendis vti oporteat, non ſatis eſt definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio eſſet facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, vt neque determinationem quantitatum requireret, neque ſolutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam ſitus referre haud dubitaui: praeſertim quod in eius ſolutione ſolus ſitus in conſiderationem veniat, calculus vero nullius prorſus ſit vſus. Methodum ergo meam quam ad huius generis problemata

Figura 3.1: Extracto del artículo original *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*
(La solución de un problema relacionado con la geometría de la posición.

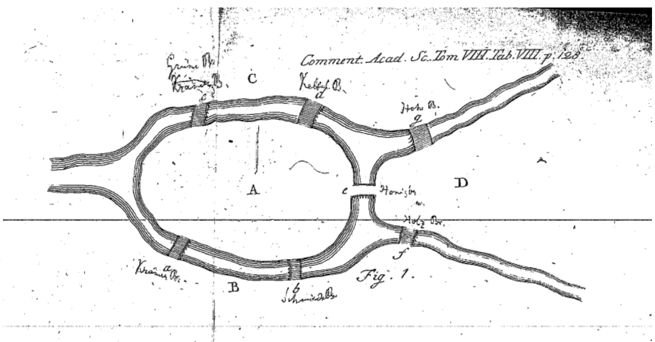


Figura 3.2: Dibujo de la representación de los siete puentes de Königsberg.

La prueba de Euler de que era imposible no es, desde luego, el comienzo de la teoría de grafos. Lo que Euler esencialmente hizo (aunque su argumento fue en palabras) es reducir la complejidad de la figura 3.2 al diagrama simple de 3.3, donde cada masa terrestre está representada por un punto (vértice) y cada puente por una línea (borde). Si la caminata deseada existía, entonces cada vez que se visitaba un vértice con un borde, entonces el otro borde se usaba para salir del vértice, por lo que cada vértice debería tener un número par de bordes incidiendo en él. Como este no es el caso, "la caminata deseada es imposible".

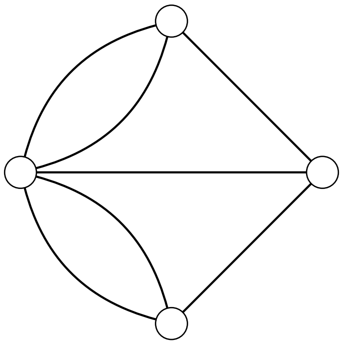


Figura 3.3: Grafo que representa el problema de los siete puentes de la ciudad de Königsberg.

Ejemplo 3.2: El problema de los tres servicios

Un antiguo problema se refiere a tres casas C_1, C_2, C_3 que se unirán a cada uno de los tres servicios públicos: gas, agua[a] y electricidad, sin que dos conexiones se crucen entre sí. En otras palabras, ¿se puede volver a dibujar el diagrama de la figura para que no se crucen dos líneas? El diagrama es otro ejemplo de un grafo.

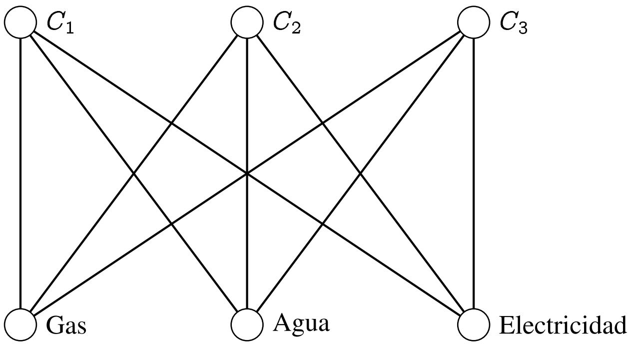


Figura 3.4: En la siguiente sección, se verá que el grafo es bipartito completo.

[a] agua potable y desagüe

Noción 3.1: Grafo no dirigido

Un grafo consiste de un *conjunto finito* de puntos (**vértices**) y de una colección de pares de vértices (**aristas**).

Observación 3.1: Dos nodos adyacentes y arista incidente

Los vértices son representados por puntos, y las aristas por líneas (no necesariamente rectas) unidas por pares de puntos. Si una arista e se uno a los vértices x e y, entonces x e y son **adyacentes** y e es **incidente** con ambos x e y. Cualquier arista que une un vértice x consigo mismo se denomina **bucle**.

Observación 3.2: Sobre el conjunto E

Note que decimos que E es una colección de pares, no un conjunto de pares. Esto permite la repetición de aristas. Si dos o más aristas unen los mismos dos vértices, ellos son llamados **aristas múltiple**. Por ejemplo, el grafo de la figura 3.2 tiene dos pares de aristas múltiple. El grafo del problema de los tres servicios es **simple**, es decir, este no tiene bucles o arista múltiple.

El número de aristas que incide en un vértice v en un grafo sin bucles es llamado el **grado** o **valencia** de v y se denota por deg. El segundo nombre recuerda una de las primeras apariciones de grafos, como dibujos de moléculas químicas.

Ejemplo 3.3: Molécula de octano C_2H_6

Por ejemplo, el etano C_2H_6 se puede representar mediante el grafo de la figura 3.4, donde los dos vértices "internos", de valencia cuatro, representa dos átomos de carbono (el carbono tiene valencia cuatro), y los otros seis vértices, de valencia uno, representado por átomos de hidrógeno. Los vértices de grado uno son llamados vértices **colgantes** o **finales**.

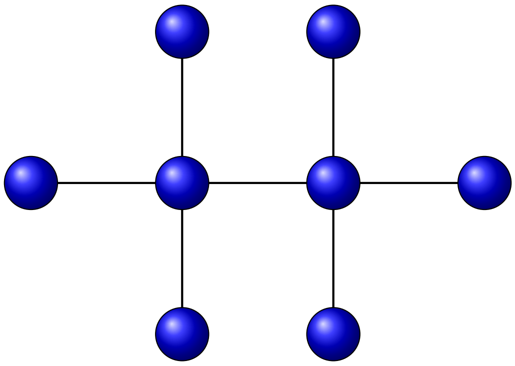


Figura 3.5: Grafo de la representación de la molécula de octano $\mathrm{C_2H_6}$.

Cuando un grafo contiene un bucle, se considera que el bucle contribuye dos veces al grado de su vértice incidente. Este convenio nos permite establecer el siguiente resultado útil.

Ejemplo 3.4: Fiesta de cumpleaños

1) En una fiesta de cumpleaños, la cantidad puntos de un grafo podría representar el número de asistentes al cumpleaños y las líneas que une un par de puntos podría representa a dos invitados que se conocen.

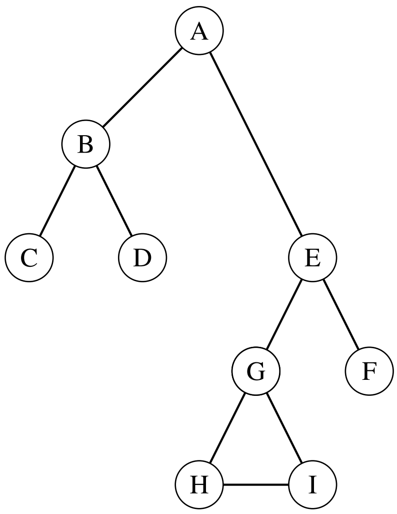


Figura 3.6: Más adelante estudiaremos grafos conexos, como el que se presenta en el ejemplo actual.

En este grafo, se puede observar lo siguiente:

- El cumpleañero se puede representar por el vértice A.
- A conoce a B y E, sin embargo, A no conoce a G.
- Las personas que representan los vértices G, H y E se conocen dos a dos.
- C, D y F solo conocen a una persona en la fiesta de cumpleaños.

2) Los puntos podrían representar los cruces de las avenidas o calles cercanas a la plaza Mayor de Lima y las líneas representarían las avenidas o calles.

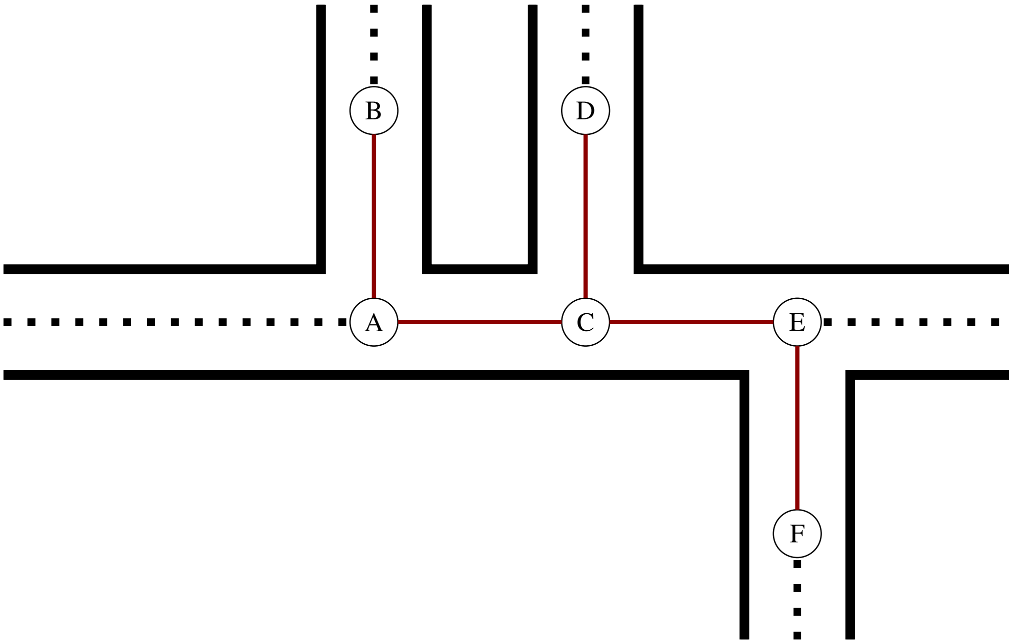
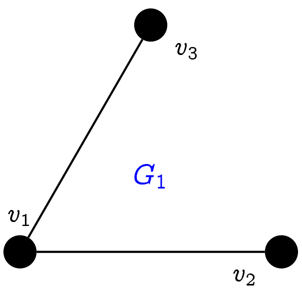


Figura 3.7: Grafo de vértices A, B, C, D, E y F y las aristas son las líneas de color rojo.

Definición 3.1: Grafo no dirigido G

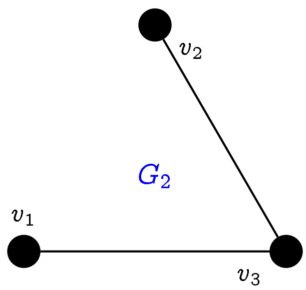
Un grafo G es un par (V, E) donde V es un conjunto no vacío y E es un conjunto formado por subconjuntos de dos elementos de V.

Ejemplo 3.5: Dos grafos distintos con el mismo conjunto de vértices



$V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$.

$E(G_1) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}\}$.



$V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3\}$.

$E(G_2) = \{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\}$.

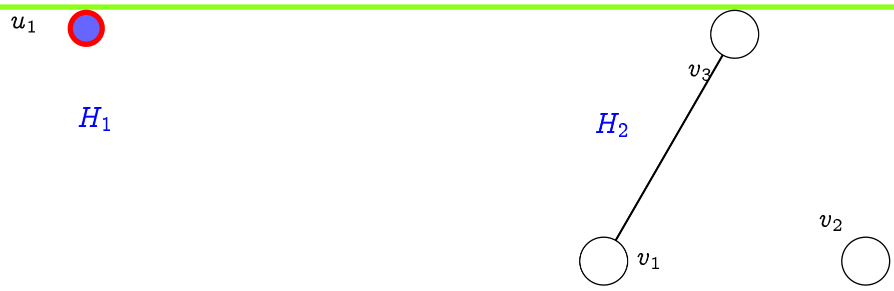
3.2. Tipos de grafos no dirigidos

Definición 3.2: Grafo simple no dirigido

Es aquel grafo cuyos puntos están enlazados a lo más por una arista.

Ejemplo 3.6: Dos grafos simples no dirigidos

Los grafos $H_1(V_1, E_1)$ y $H_2(V_2, E_2)$ con $V_1 = u_1$ y $V_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ son grafos simples no dirigidos.

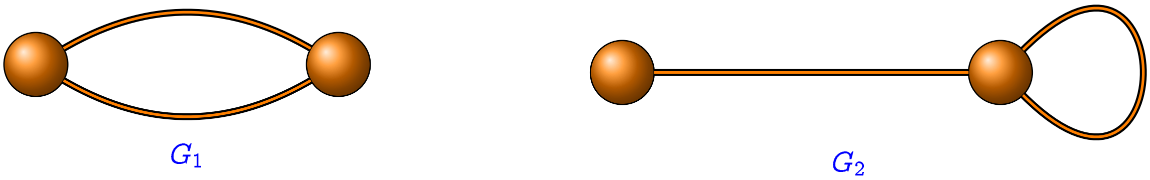


$E(G_1) = \varnothing$.

$E(G_2) \neq \varnothing$.

Definición 3.3: Multígrafo

Es aquel grafo cuyos puntos están unidos por más de una arista o *presenta bucles*.



Donde $V(G_1) = V(G_2) = \{1, 2\}$ y $E(G_2) = \{\{1, 2\}, \{2, 2\}\}$.

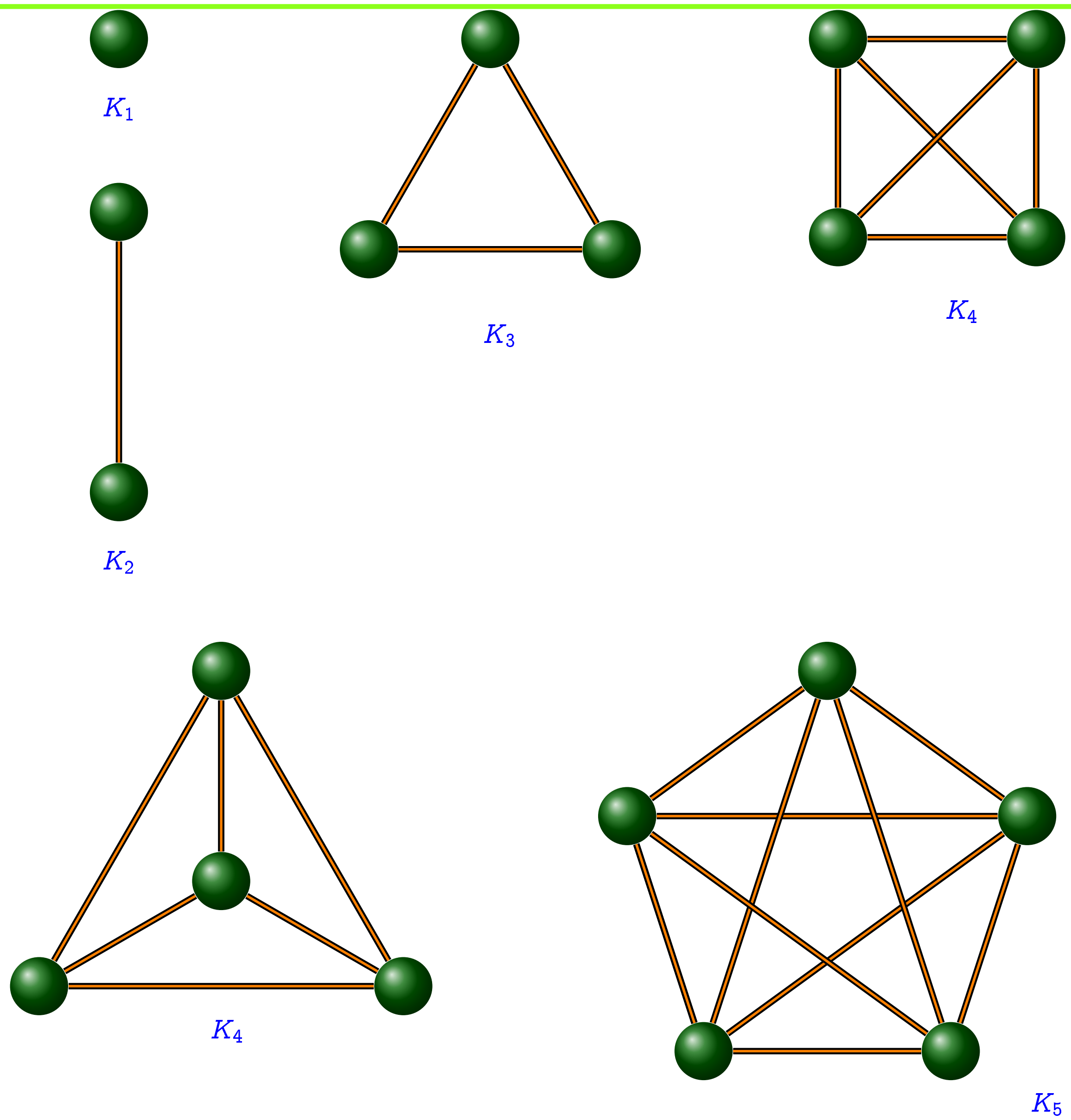
Ejemplo 3.7: Grafo completo K_n

El **grafo completo** K_n es un grafo simple con n vértices, en el cual cada par de vértices son adyacentes. Dado que cada uno de los n vértices tiene grado $n-1$, el número q de aristas debe satisface $2q = n(n-1)$, por lo que $q = \frac{1}{2}n(n-1)$. Por supuesto es lo que se espera, dado que q es el número de maneras de escoger dos de los n vértices, es decir, $q = \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$. Ahora veamos la definición formal:

Sea $V = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ el conjunto de nodos o vértices y $E = \binom{V}{2}$, es decir, E es el **conjunto formado por subconjuntos de solo dos elementos de V**.

Se cumple:

$$|E| = \#\text{aristas} = \frac{n(n-1)}{2}.$$



Los grafos K_n, $n \leqslant 4$ son mostrados a continuación. La notación K_n es en honor al matemático polaco *Kazimierz Kuratowski* el cual tiene un importante teorema que caracteriza los grafos planares. Note que K_3 es un subgrafo inducido por K_4, la idea de un grafo que está contenido en otro es formalizado en la siguiente definición.

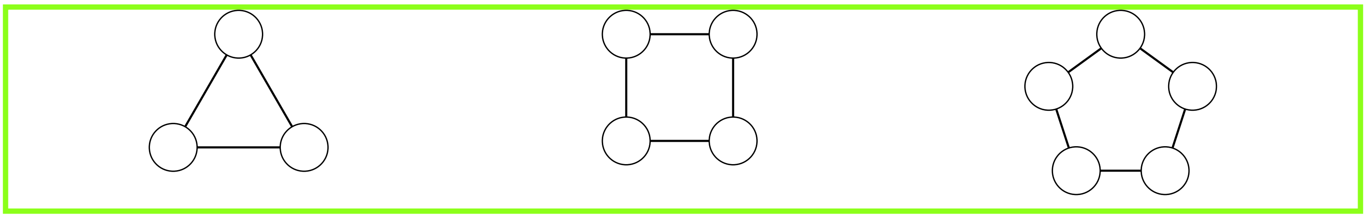
Observación 3.3: Grafo completo

Un grafo completo es aquel cuyos puntos están todos unidos por una arista.

Definición 3.4: Ciclo C_n

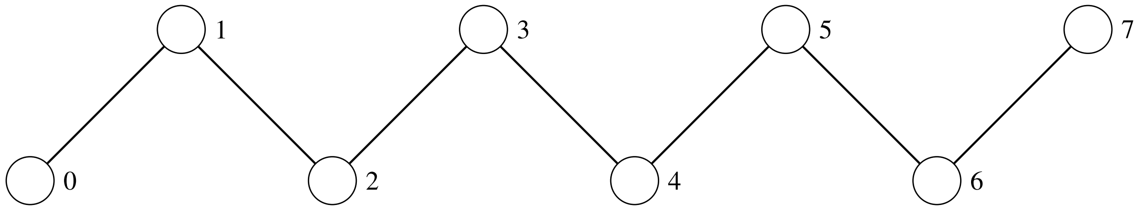
Sea $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $E = \{\{i, i+1\} \colon i = 1, 2, \ldots, n-1\} \bigcup \{\{1, n\}\}$.

Ejemplo 3.8: Ciclos C_3, C_4 y C_5



Definición 3.5: Camino P_n

Sea $G(V, E)$ un grafo con $V = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ y $E = \{\{i-1, i\}: i = 1, 2, \ldots, n\}$.

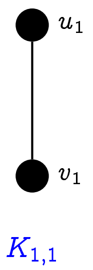


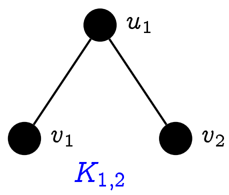
Definición 3.6: Grafo bipartito

Sea $V = \{u_1, \ldots, u_n\} \bigcup \{v_1, \ldots, v_m\}$ y $E = \{\{u_i, v_j\}: 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m\}$.

Se cumple:

$$|E| = n \times m \qquad \text{(grafo bipartito completo)}.$$





3.3. Grafos isomorfos

Los grafos G y G' son idénticos (**iguales**) si ellos poseen el mismo conjunto de vértices y aristas, pero muchos de los grafos difieren por el nombre de sus vértices y aristas. Pero tienen la misma estructura (grafos isomorfos).

Definición 3.7: Isomorfismo de grafos

Dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son isomorfos si existe una biyección $f: V \to V'$ tal que

$$\{x, y\} \in E \iff \{f(x), f(y)\} \in E'.$$

Notación:

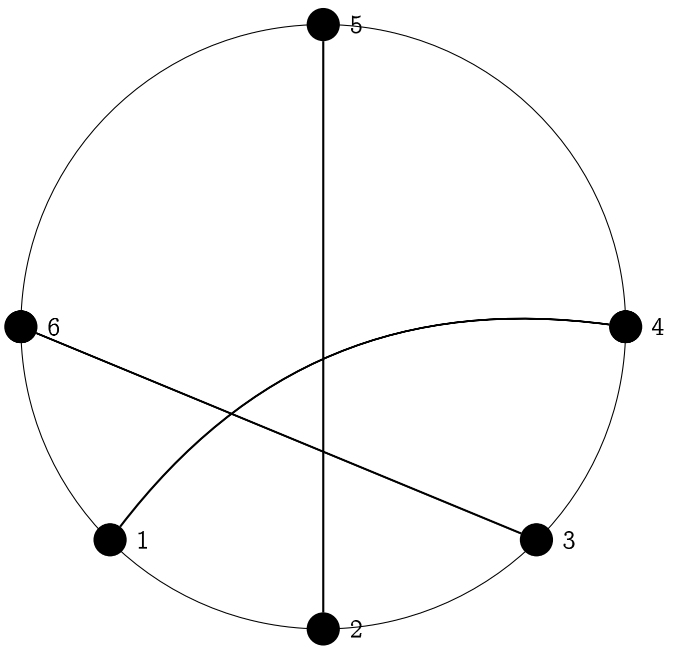
$$G \cong G' \qquad (G \text{ y } G' \text{ son isomorfos.})$$

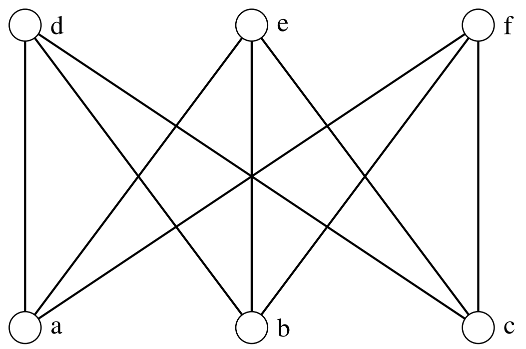
Ejercicio 3.1: Relación de equivalencia

Pruebe que el isomorfismo entre grafos de la definición 3.7 es una relación *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*, esto es, una *relación de equivalencia*.

Ejemplo 3.9: Isomorfismo de grafos

Encuentre un isomorfismo entre ambos grafos mostrados a continuación:





$K_{3,3}$

Solución.

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$
$$E(G) = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}.$$

$$V(G') = \{a, b, c, d, e, f\}.$$
$$E(G') = \{\{a, d\}, \{a, e\}, \{a, f\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{c, f\}\}.$$

$$\begin{aligned} f\colon V &\to V' \\ 1 &\to a \\ 2 &\to b \\ 3 &\to c \\ 4 &\to d \\ 5 &\to e \\ 6 &\to f \end{aligned}$$

Como f es biyectiva y cumple con la definición 3.7, entonces G y G' son isomorfos. ■

3.4. Grafos no isomorfos

Sea $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $E \subseteq \binom{V}{2}$. Como $\binom{V}{2}$ posee $\binom{n}{2}$ elementos y el número de grafos diferentes en V es $2^{\binom{n}{2}}$ elementos.

Ejemplo 3.10: Grafos no isomorfos

A continuación se muestran los grafos no isomorfos que se pueden obtener con un vértice, dos vértices y tres vértices:

Figura 3.8: **Grafo simple no dirigido de un vértice**, $V = \{1\}$.

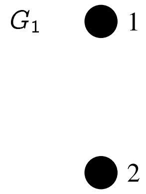


Figura 3.9: Grafo simple no dirigido G_1.

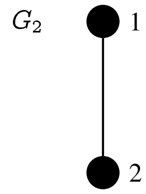
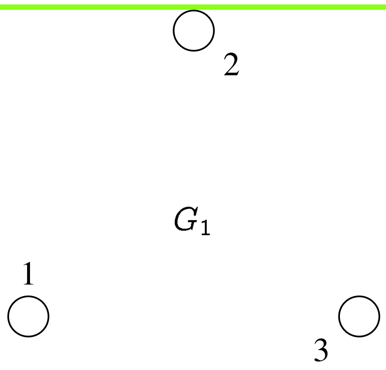
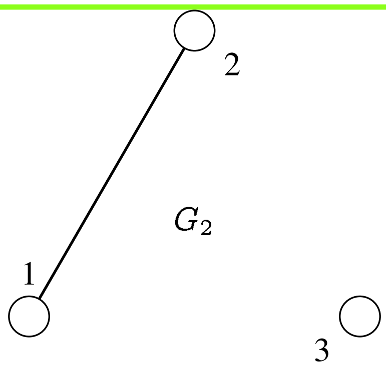


Figura 3.10: Grafo simple no dirigido G_2.

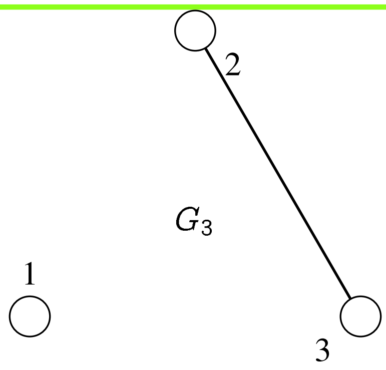
Figura 3.11: **Grafos simples no dirigidos de dos vértices**, $V = \{1, 2\}$.



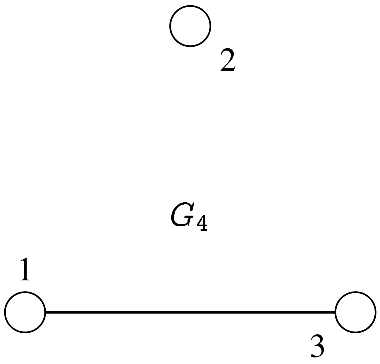
(a) Grafo simple no dirigido G_1.



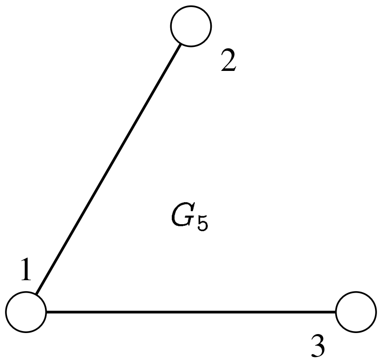
(b) Grafo simple no dirigido G_2.



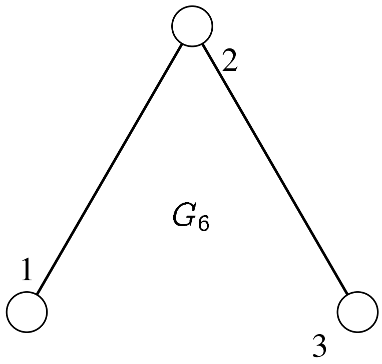
(c) Grafo simple no dirigido G_3.



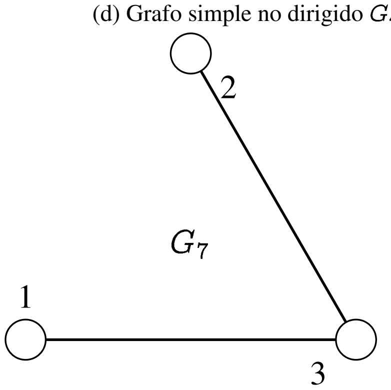
(d) Grafo simple no dirigido G_4.



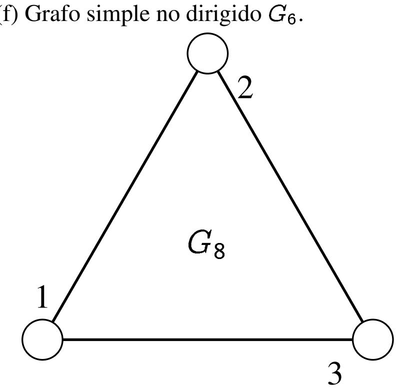
(e) Grafo simple no dirigido G_5.



(f) Grafo simple no dirigido G_6.



(g) Grafo simple no dirigido G_7.



(h) Grafo simple no dirigido G_8.

Figura 3.12: **Grafos simples no dirigidos de tres vértices**, $V = \{1, 2, 3\}$.

3.5. Subgrafos, componentes, matriz de adyacencia

Definición 3.8: Subgrafo

Sean G y G' grafos.

- Decimos que G es un subgrafo de G' si $V(G) \subseteq V(G')$ y $E(G) \subseteq (G')$.
- Además, decimos que G es un subgrafo inducido de G' si $V(G) \subseteq V(G')$ y $E(G) = E(G') \bigcap \binom{V(G)}{2}$.

Ejemplo 3.11

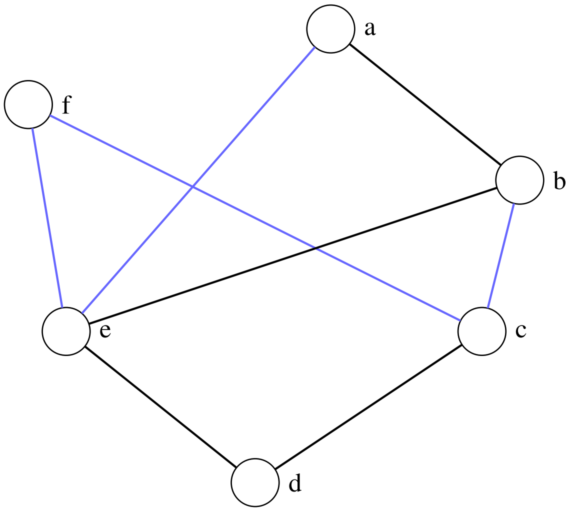


Figura 3.13: El grafo G' tiene como conjunto de vértices a $V(G') = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y sus aristas son las de color azul y negro. Y el grafo G tiene como conjunto de vértices a $V(G) = \{a, b, c, e, f\}$ y sus aristas son de color azul.

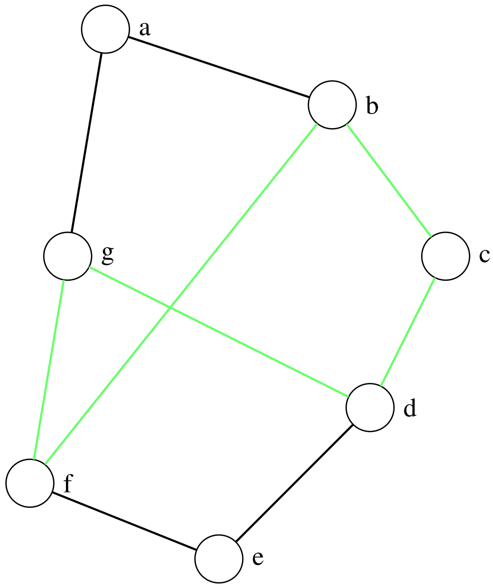


Figura 3.14: El grafo G' tiene como conjunto de vértices a $V(G') = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y sus aristas son las de color verde y negro. Y el grafo G tiene como conjunto de vértices a $V(G) = \{b, c, d, g, f\}$ y sus aristas son de color verde.

Figura 3.15: El grafo de la izquierda puede trazarse todo su recorrido con un lápiz sin tener que levantar del papel. En cambio, es imposible trazar el recorrido del grafo de la derecha sin tener que levantar un lápiz del papel.

- En los grafos de la izquierda, G es un subgrafo no inducido por G', ya que $\{a, b\} \notin E(G)$ y G es isomorfo a p_4.
- En los grafos de la derecha, G es subgrafo inducido por G' y es isomorfo a C_5.

3.6. Caminos y ciclos

- Un subgrafo de un grafo G isomorfo a algún camino p_t es llamado un camino en el grafo G.
  Es más, el camino puede ser visto como
  $$(v_0, e_1, v_1, \dots, e_t, v_t)$$
  donde:
  $v_0, v_1, \dots, v_t$ son vértices distintos de G y $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$.
- Un subgrafo G isomorfo a algún ciclo c_t $(t \geqslant 3)$ es llamado un *ciclo del grafo G*.
  Es más, el ciclo puede ser visto como
  $$(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_{t-1}, v_{t-1}, e_t, v_0)\,.$$
  donde:
  $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$ con $(1 \leqslant i \leqslant t-1)$.
  $e_t = \{v_{t-1}, v_t\} \in E(G)$.
  El t indica la *longitud del ciclo*.

3.7. Componentes conexas

Definición 3.9: Grafo conexo

Un grafo G es conexo[a] si para cualquier par de vértices $x, y \in V(G)$, se tiene que G contiene un camino de x hacia y.

[a] conexo o "de una sola pieza"

Ejemplo 3.12

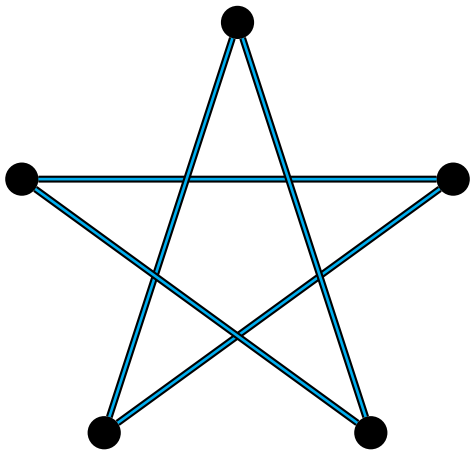


Figura 3.16: Grafo conexo con una sola componente conexa.

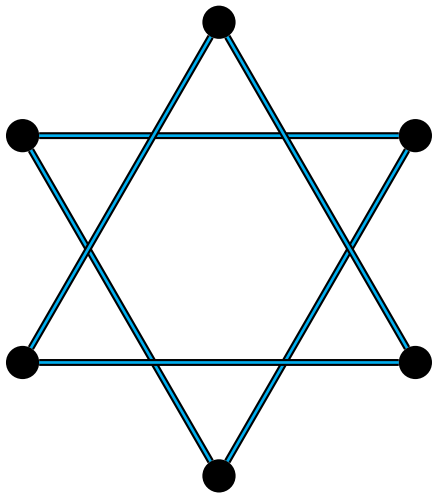


Figura 3.17: Grafo no conexo, con dos componentes conexas.

Figura 3.18: El grafo de la izquierda puede trazarse todo su recorrido con un lápiz sin tener que levantar del papel. En cambio, es imposible trazar el recorrido del grafo de la derecha sin tener que levantar un lápiz del papel.

3.8. Distancia entre grafos

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo, definamos la *función distancia* (o métrica) de dos vértices $v, v' \in V(G)$ por $d_G(v, v')$ como la longitud más corta de los caminos de v a v' en G.

Es decir:

$$\begin{aligned} d_G : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, v') &\longmapsto d_G\,(v, v') \end{aligned}$$

Cumple:

1) $d_G(v, v') \geqslant 0$.
2) $d_G(v, v') = d_G(v', v)$
3) $d_G(v, v'') \leqslant d_G(v, v') + d_G(v, v'') \quad \forall\, v, v', v'' \in V(G)$.

Observación 3.4: Espacio métrico

(V, d_G) es un espacio métrico, para más detalles ver [3].

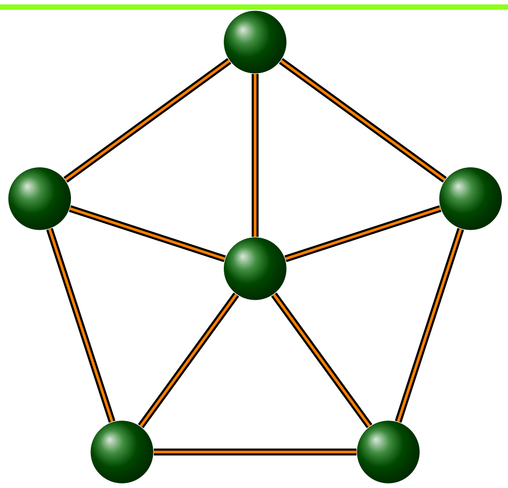
Definición 3.10: Matriz de adyacencia

ea $G = (V, E)$ un grafo con n vértices denotado por $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Se define la matriz de adyacencia

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Ejemplo 3.13

Sea el grafo



La matriz A_G “almacena” información del grafo.

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un grafo H se dice que es un **subgrafo** de G si es un subconjunto de vértices de G, y el conjunto de aristas de H es un subconjunto del conjunto de aristas de G. Por lo tanto, por ejemplo, K_m es un subgrafo de K_n cuando $m < n$,

simplemente restringe K_n a m de sus vértices.

Finalmente en esta sección, establecemos algunas notaciones estándar. De ahora en adelante, usaremos p y q para denotar los números de vértices y aristas respectivamente, y por un grafo–(p, q) quiere decir, un grafo con p vértices y q aristas. Por lo tanto, por ejemplo, K_4 es un grafo $(4, 6)$.

3.9. Caminos en grafos

Muchas aplicaciones importantes de la teoría de grafos implican “viajar” alrededor del grafo, en el sentido de moverse de un vértice a otro a lo largo de las aristas incidentes. Hacemos algunas definiciones relacionadas con esta idea

Definición 3.11: Paseo en un grafo

Un **paseo** en un grafo G es una secuencia de aristas de la forma

$$v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n.$$

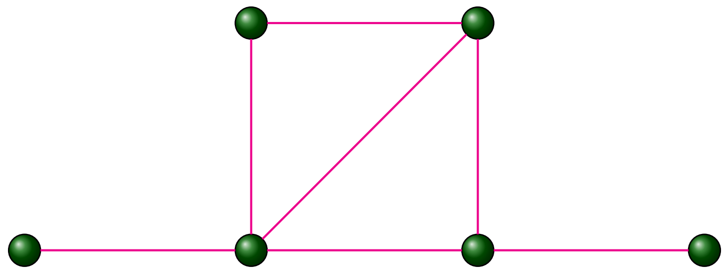
El paseo algunas veces, en un grafo simple, es representada de manera más compacta por $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_n$. Note que esto implica una sola dirección del paseo. v_0 es llamada el vértice **inicial** y v_n es llamado el vértice **final** del paseo, el número n de aristas es llamado la **longitud** del paseo.

Un camino en el cual todas las aristas son distintas es llamado **circuito**. Un circuito en el cual todos los vértices $v_0, \ldots, v_n$ con $v_n = v_0$ es llamado **ciclo**.

En la figura ,

$z \to u \to y \to v \to u$	es un circuito, pero no es un camino.
$u \to y \to w \to v$	es una camino de longitud 3.
$u \to y \to w \to v \to u$	es un ciclo de longitud 4.

Es natural considerar los ciclos $u \to y \to v \to u$ y $y \to v \to u \to y$.



Definición 3.12: Matriz de adyecencia

En una matriz de adyecencia de un grafo $G = (V, E)$, guardaremos el grafo usando una matriz de orden $|V|$. La i-ésima fila de la matriz corresponde a los vecinos del nodo i. Un 1 (o en términos booleanos, una verdad) en la columna j indica que la arista (i, j) está en E, un 0 o falso indica que (i, j) no está en E.

Observación 3.5

1. Si *la diagonal principal está conformado de todos ceros*, un 1 en la posición de la matriz corresponde a una arista entre los vértices i e i, esto es, un lazo, que no está permitido para grafos simples.
2. Para un grafo no dirigido, *la matriz es simétrica*. La posición (i, j) de la matriz graba la presencia o ausencia de una arista desde i hasta j, el cual es idéntico a la presencia o ausencia de una arista desde j hacia $i$de un garfo no dirigido. Las matrices de adyecencia no necesariamente deben ser simétricas en grafos dirigidos, existen grafos en el que las aristas desde u hacia v sin que la arista vaya desde v hacia u.

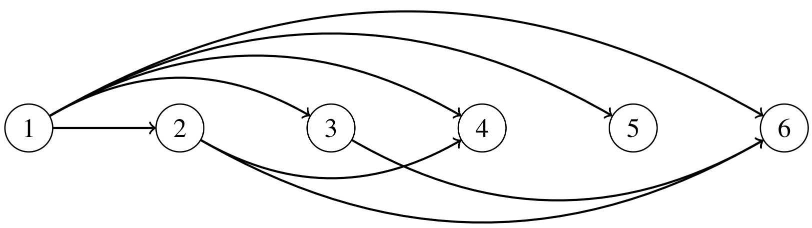
Definición 3.13: Isomorfismo de grafos

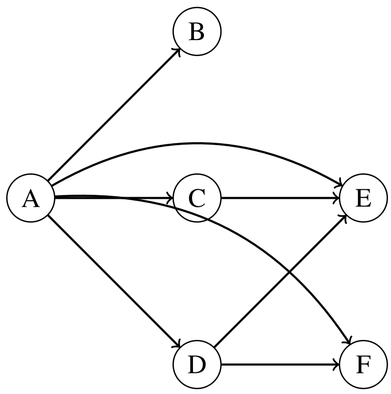
Considere dos grafos $G = (V, E)$ y $H = (U, F)$. Diremos que G y H son isomorfos si existe una biyección $f: V \to U$ tal que

$$\text{para cualquier } a \in V \text{ y } b \in V, \qquad (a, b) \in E \iff (f(a), f(b)) \in F.$$

Ejemplo 3.14

Sean G_1 y G_2 dos grafos dirigidos, verificar que estos son isomorfos. El primer grafo podría ser la representación de $\{a < b\}: a \mid b$. (1 divide a todos los números).





Solución. Notamos que el $|V(G_1)| = |V(G_2)|$ y que $|E(G_1)| = |E(G_2)|$:

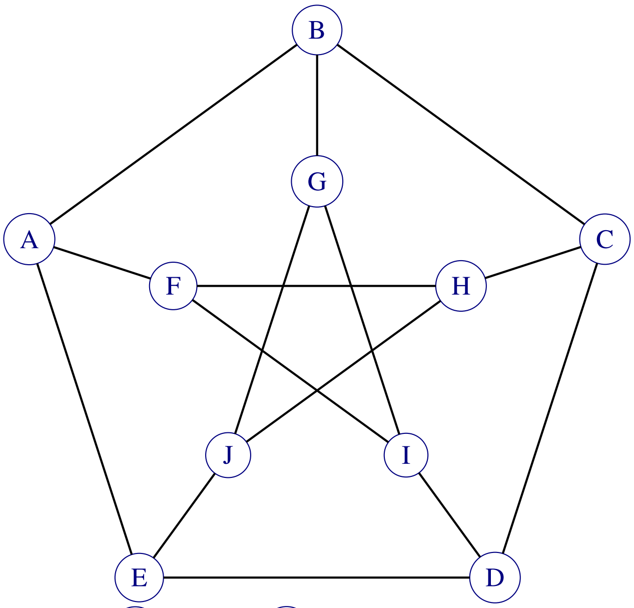
Así, definimos la siguiente biyección $f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{A, B, C, D, E, F\}$ como:

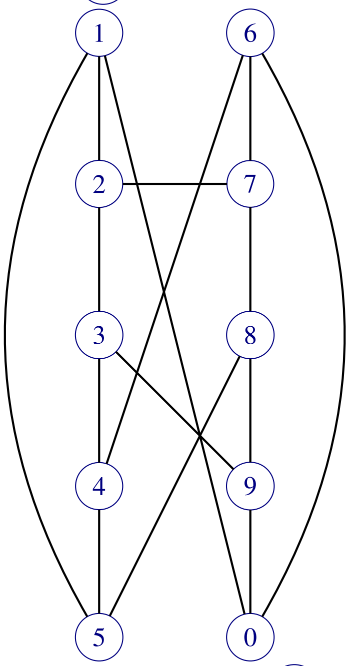
x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	A	B	C	D	E	F

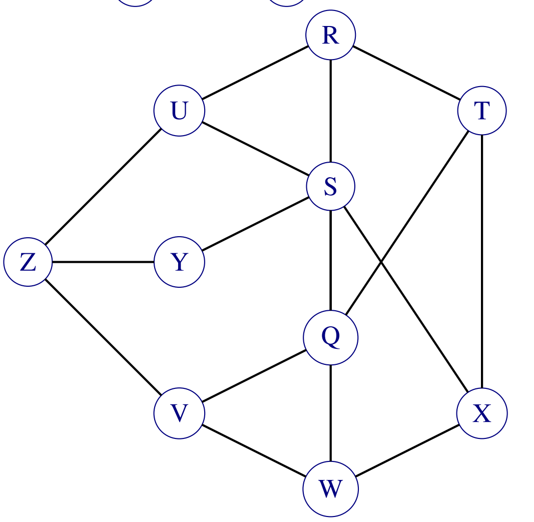
Notamos que las matrices de adyacencia tanto de G_1 como de G_2 son iguales. ■

Ejemplo 3.15: Isomorfismo de grafos

¿Cuál de los siguientes grafos son isomorfos?







Solución: Los dos primeros grafos son isomorfos. La manera más fácil de ver es el hecho de mostrar una biyección entre ambos nodos, es decir,

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	3	4	5	0	7	9	6	8

Trate de imaginar que el pentágono interior y exterior forman dos listas y ahora trate de enlazar vértice a vértice.

Sin embargo, el tercer grafo no es isomorfo a ninguno de los anteriores. Note que el vértice S tiene grado 5 (hay 5 conexiones con S) y no existen vértices tanto en G_1 como G_2 con grado 5. ■

Definición 3.14

Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un subgrafo de G es un grafo $G' = (V', E')$ donde $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$ tales que cada arista $(u, v) \in E'$ satisface $u \in V'$ y $v \in V'$.

Ejemplo 3.16

Por ejemplo, considere el grafo $G = (V, E)$ con nodos $V = \{A, B, C, D\}$ y aristas $E = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{C, D\}\}$. Entonces el grafo G' con nodos $\{B, C, D\}$ y aristas $\{\{B, C\}, \{C, D\}\}$ es un subgrafo de G. Es más, G tiene varios subgrafos distintos:

Ejemplo 3.17: Todos los subgrafos de 3 aristas

Aquí están todos los subgrafos de 3 aristas del grafo G con vértices $V = \{A, B, C, D\}$ y aristas $E = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{C, D\}\}$. Existen muchos otros subgrafos, cerca de 50 en total cuando consideramos subgrafos con 1, 2, 3 o 4 vértices.

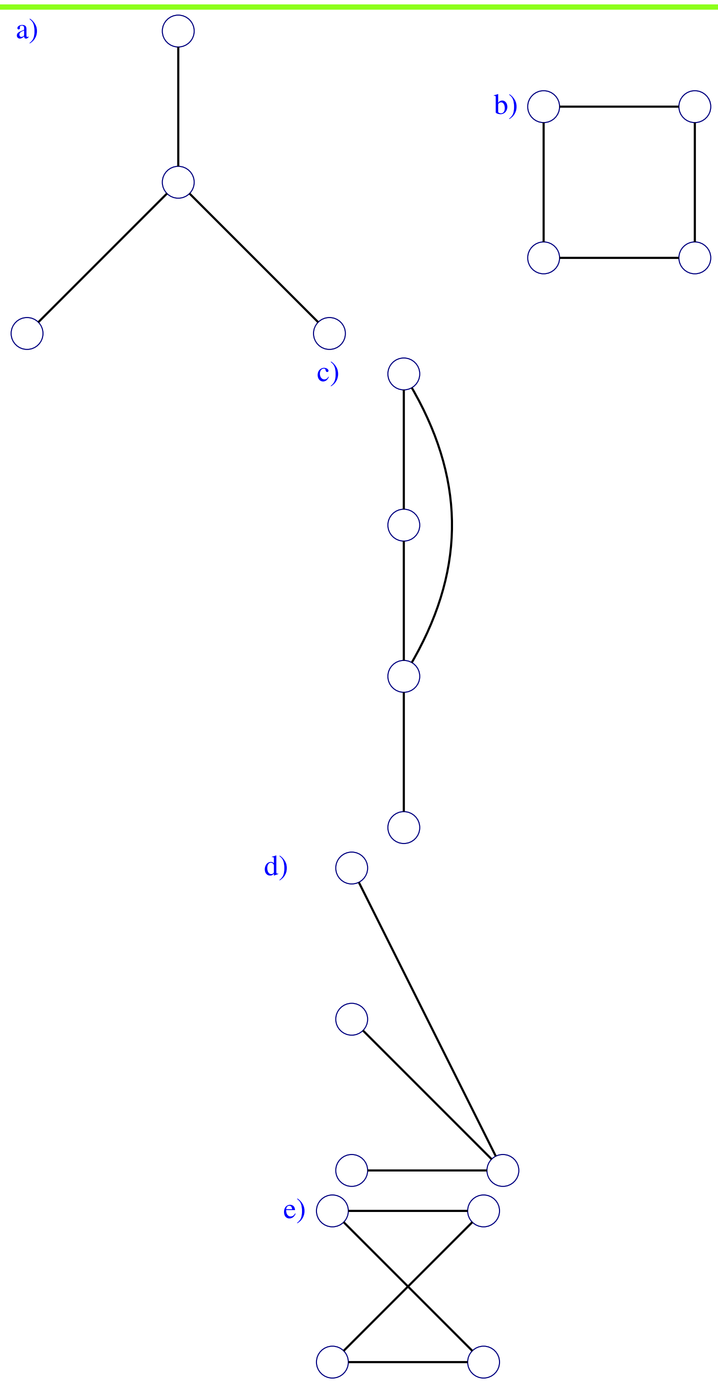
Definición 3.15: Grafo completo

Un grafo completo o clique es un grafo no dirigido $G = (V, E)$ tal que si $(u, v) \in E$ para cualesquiera aristas distintas $u \in V$ y $v \in V$.

Definición 3.16: Grafo bipartito

Un grafo bipartito es un grafo no dirigido $G = (V, E)$ tal que puede ser particionado en dos conjuntos disjuntos L y R donde, para cualquier arista $e \in E$, un punto final de e están en L y el otro punto final está en R.

Ejemplo 3.18



Solución. Todos ellos son grafos bipartitos excepto *c*). ■

Capítulo 4

Árboles

Parte II

Ejercicios

Ver .
s

Bibliografía

[1] Ian Anderson. *A First Course in Discrete Mathematics*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, 2002. ISBN: 978-1-85233-236-5,978-0-85729-315-2.

[2] D. Liben-Nowell. *Discrete Mathematics for Computer Science*. Wiley, 2017. ISBN: 9781119171096.

[3] Grupo Estudiantil de Matemática (GEM). *Apuntes de clase del taller de Espacios métricos*. 2017. URL: https://drive.google.com/file/d/1pqr-fw68SxDwg8CFPi-6KR2pvjnFVG14 (visitado 10-05-2018).

[4] Jiří Matoušek y J Nešetřil. *Invitation to Discrete Mathematics*. Oxford University Press, 2009.