UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

Facultad de Ciencias

Primer proyecto
Introducción a la Estadística y las Probabilidades
CM-274 A

Informe matemático del grupo E conformado por los alumnos

Sarria Palacios Eduardo David	20141445C
Maquera de la Cruz Stefany Briguitte	20162254B
Chung Alvarez Alex Steve	20164552C
Aznarán Laos Carlos Alonso	20162720C

Profesor de teoría:	Ph.D Ángel Enrique Ramírez Gutiérrez.
Profesor de Laboratorio:	Lic. José Fernando Zamudio Peves.

Escuela Profesional de Matemática
de la Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

12 de febrero del 2019 – 19 de febrero del 2019

Responda las preguntas en los espacios provistos en las hojas de preguntas. Si se queda sin espacio para una respuesta, continúe en la parte posterior de la página.

1. Cinco números distintos se distribuyen aleatoriamente entre los jugadores del 1 al 5. Cuando dos jugadores comparan sus números, el que tiene el más alto es declarado ganador. Inicialmente, los jugadores 1 y 2 comparan sus números; el ganador se compara con el jugador 3, y así sucesivamente. Sea X el número de veces que el jugador 1 es un ganador. Encuentra $\mathbb{P}[X = i]$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

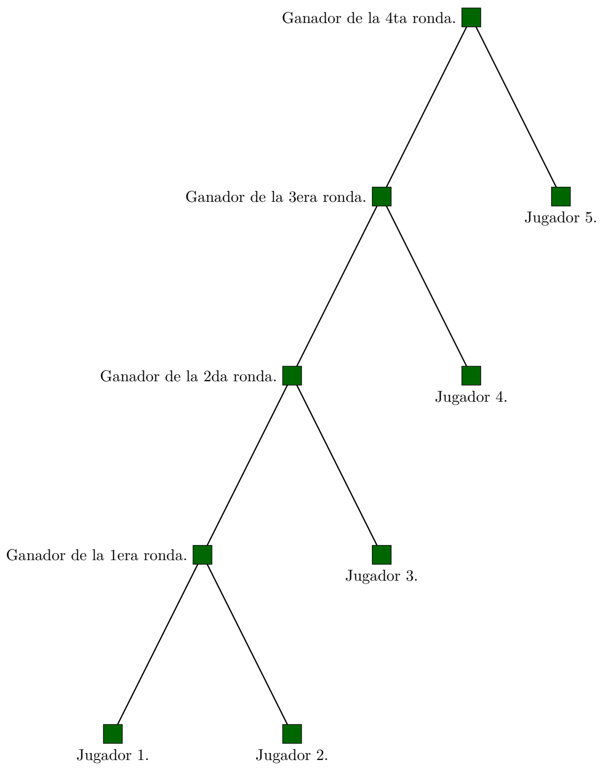

Figura 1: Diagrama de árbol de las rondas del juego de la pregunta 1.

Solución

Sea X una variable aleatoria discreta cuyos valores de x están en $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ que representa el número de rondas que gana el Jugador 1 durante el torneo. Se asumirá que los números son asignados a los jugadores al azar, con cada permutación de los números con la misma probabilidad.

El jugador 1 es (a priori) igualmente probable que obtenga cualquiera de los cinco números.

- Si obtienen un 1, están seguros de ganar 0 rondas.
- Si obtienen un 2, ganan 0 rondas o 1 ronda. ¿Cuál es la única circunstancia bajo la cual ganan 1 vuelta?
- Si obtienen un 3, hay dos números más altos (A, ya que no necesitamos distinguir entre 4 y 5) y dos números más bajos (llamémoslos B). ¿Cuántas permutaciones diferentes hay de $AABB$? Una pareja son $ABAB$ y $BABA$. ¿En qué casos el Jugador 1 gana 0, 1 o 2 rondas? Por ejemplo, $AABB$ lleva a ganar 0 rondas.
- Si obtienen un 4, ganan de 0 a 3 rondas. Depende solo de donde se encuentre el 5.

- Si obtienen un 5, están seguros de ganar las 4 rondas.

Sea E_n el evento en el que el jugador 1 tenga el número más alto entre los jugadores desde el 1 hasta n. Entonces $\mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{n}$. Además $E_{n+1} \subseteq E_n$, y por lo tanto

$$\mathbb{P}(E_n \setminus E_{n+1}) = \mathbb{P}(E_n) - \mathbb{P}(E_{n+1}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Como $E_n \setminus E_{n+1}$ es el evento $X = n-1$, tenemos $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Esto se mantiene para $0 \leq n < 4$. Para $n = 4$, no hay más rondas para ganar, por lo que la probabilidad de ganar 4 rondas es solo $\mathbb{P}(E_5) = \frac{1}{5}$. Ahora, las probabilidades develadas son

$$f(X=0) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}, \qquad f(X=1) = \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{6},$$
$$f(X=2) = \mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{12}, \qquad f(X=3) = \mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{20},$$
$$f(X=4) = \mathbb{P}(X=4) = \frac{1}{5}.$$

Por lo tanto, la distribución de probabilidad de X es

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$

2. Un sistema satelital consta de n componentes y funciona en un día cualquiera si al menos k de los n componentes funcionan ese día. En un día lluvioso, cada uno de los componentes funciona independientemente con probabilidad p_1, mientras que en un día seco cada uno funciona independientemente con probabilidad p_2. Si la probabilidad de que llueva mañana es de α, ¿cual es la probabilidad de que el sistema satelital funcione?

Solución

Sea k el número de componentes en funcionamiento en un día determinado. Primero, aplique la ley de probabilidad total al condicionar en día lluvioso o día seco:

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k \mid \textbf{día lluvioso}) + \mathbb{P}(X \geq k \mid \textbf{día seco}).$$

Ahora tome por ejemplo $\mathbb{P}(X \geq k \mid \textbf{día lluvioso})$. Esto es,

$$\mathbb{P}(X \geq k \mid \textbf{día lluvioso}) = \mathbb{P}(X = k \mid \textbf{día lluvioso}) + \cdots + \mathbb{P}(X = n \mid \textbf{día lluvioso}),$$

donde

$$\mathbb{P}(X \mid \textbf{día lluvioso}) \sim \text{binomial}(n, p_1).$$

De manera similar, para la probabilidad $\mathbb{P}(X \geq k \mid \textbf{día seco})$. Esto es,

$$\mathbb{P}(X \geq k \mid \textbf{día seco}) = \mathbb{P}(X = k \mid \textbf{día seco}) + \cdots + \mathbb{P}(X = n \mid \textbf{día seco}),$$

donde

$$\mathbb{P}(X \mid \textbf{día seco}) \sim \text{binomial}(n, p_2).$$

Además, nos pide calcular $\mathbb{P}\left(X \geq k \mid \textbf{llueva mañana}\right)$, esto es, de la definición de probabilidad condicional:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X \geq k \mid \textbf{llueva mañana}\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(X \geq k \cap \textbf{llueva mañana}\right)}{\mathbb{P}\left(\textbf{llueva mañana}\right)}\\ &= \frac{\mathbb{P}\left(X \geq k \cap \textbf{llueva mañana}\right)}{\alpha}\end{aligned}$$

Primero, calculamos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X \geq k \mid \textbf{día lluvioso}\right) &= \mathbb{P}\left(X = k \mid \textbf{día lluvioso}\right) + \cdots + \mathbb{P}\left(X = n \mid \textbf{día lluvioso}\right)\\ &= b\left(k; n, p_1\right) + \cdots + b\left(n; n, p_1\right)\\ &= \binom{n}{k} {p_1}^k (1-p_1)^{n-k} + \cdots + \binom{n}{n} {p_1}^n (1-p_1)^0.\end{aligned}$$

Luego, calculamos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X \geq k \mid \textbf{día seco}\right) &= \mathbb{P}\left(X = k \mid \textbf{día seco}\right) + \cdots + \mathbb{P}\left(X = n \mid \textbf{día seco}\right)\\ &= b\left(k; n, p_2\right) + \cdots + b\left(n; n, p_2\right)\\ &= \binom{n}{k} {p_2}^k (1-p_2)^{n-k} + \cdots + \binom{n}{n} {p_2}^n (1-p_2)^0.\end{aligned}$$

Sumando las dos expresiones de arriba se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X \geq k\right) = \binom{n}{k} {p_1}^k (1-p_1)^{n-k} + \cdots + \binom{n}{n} {p_1}^n (1-p_1)^0\\ + \binom{n}{k} {p_2}^k (1-p_2)^{n-k} + \cdots + \binom{n}{n} {p_2}^n (1-p_2)^0.\end{aligned}$$

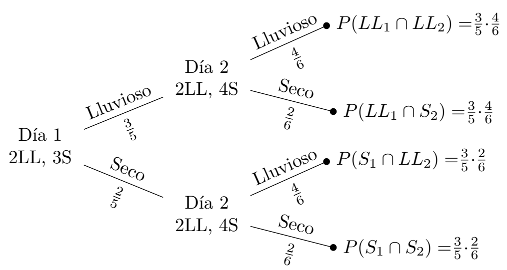

Figura 2: Diagrama de árbol que ejemplifica la pregunta 2 para algún caso particular.

3. Supuesto que el número de accidentes que ocurren en una autopista cada día es una variable aleatoria de *Poisson* con parámetro $\lambda = 3$.

(a) Calcular la probabilidad que 3 o más accidentes ocurran hoy.

(b) Responder (a) bajo el supuesto que al menos un accidente ocurrió hoy.

Solución

(a) Nos piden calcular $\sum_{i=3}^{\infty} p\left(x=i;\lambda t=3\right)$, donde $p\left(x;\lambda t\right)$ es la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X de Poisson, que representa el número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo por t,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[X\geq 3\right] &= 1-\mathbb{P}\left[X<3\right]\\ &= 1-\sum_{x=0}^{2} p\left(x;3\right)\\ &= 0.57681\end{aligned}$$

(b) Nos piden calcular $\mathbb{P}\left[X\geq 3 \mid x\geq 1\right]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[X\geq 3 \mid x\geq 1\right] &= \frac{\mathbb{P}\left[X\geq 3\cap x\geq 1\right]}{\mathbb{P}\left[X\geq 1\right]}\\ &= \frac{\mathbb{P}\left[X\geq 3\right]}{1-\mathbb{P}\left[X=0\right]}\\ &= 0.607.\end{aligned}$$

4. Supuesto que el número de ventas que ocurren en un tiempo específico es una variable aleatoria de Poisson con parámetro λ. Si cada evento es contado con probabilidad p, independiente un evento de otro evento, mostrar que el numero de eventos que son contados es una V.A de Poisson con parámetro λp. También, dar un argumento intuitivo de porqué esto debería ser así. Como una aplicación del párrafo anterior, suponer que el número de los distintos depósitos de uranio en un área dada es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda=10$. Si en un periodo de tiempo fijado, cada depósito es descubierto independientemente con probabilidad $\frac{1}{50}$, calcular la probabilidad que sea

(a) exactamente 1.

(b) Al menos 1

(c) A lo más 1 depósito son descubiertos durante aquel tiempo.

Solución

A

5. Probar que

$$\sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = \frac{1}{n}\int_{\lambda}^{\infty} e^{-x}x^n\,\mathrm{d}x$$

Solución

A

6. Si X es una variable aleatoria geométrica, mostrar analíticamente que

$$\mathbb{P}[X = n + k \mid X > n] = \mathbb{P}[X = k]$$

Dar un argumento verbal usando la interpretación de una variable aleatoria geométrica en cuanto a porqué la ecuación anterior es verdadera.

Solución

A

7. Sea X una variable aleatoria binomial negativa con parámetros r y p, y sea Y una V.A binomial con parámetros n y p. Mostrar que

$$\mathbb{P}[X > n] = \mathbb{P}[Y < r]$$

Sugerencia: La prueba analítica anterior, es equivalente a probar la siguiente identidad

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{i-1}{i+1} p^r (1-p)^{i-r} = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

o se podría intentar una prueba que utilice la interpretación probabilística de estas V.A. Es decir, en el ultimo caso, comience considerando una secuencia de ensayos independientes que tienen una probabilidad de éxito común p. Luego, trate de expresar los eventos $\{X > n\}$ y $\{Y < n\}$ en términos de los resultados de esta secuencia.

Solución

A

8. Una persona arroja una moneda hasta que aparezca sello por primera vez. Si el sello sale en el n-ésimo lanzamiento, la persona gana 2^n dolares. Si X denota lo ganado por el jugador. Mostrar que $\mathbb{E}[X] = +\infty$. Este problema es conocido como la paradoja de San Petersburgo.

   (a) ¿Estaría dispuesto a pagar \$1 millón para jugar este juego una vez?

   (b) ¿Estaría dispuesto a pagar \$1 millón por cada juego si pudiera jugar durante el tiempo que quisiera y solo tendría que conformarse cuando dejó de jugar?

Solución

A

9. Supongamos que cuando están en vuelo, los motores del avión fallarán con probabilidad $(1 - p)$ independientemente de motor a motor. Si un avión necesita la mayoría de sus motores operativos para realizar un vuelo exitoso, ¿Para qué valores de p es preferible un avión de 5 motores a un avión de 3 motores?

Solución

A

Referencias bibliográficas

[1] Alan Agresti, Christine A Franklin, and Bernhard Klingenberg. *Statistics: The art and science of learning from data*. 4th ed. Pearson Education, 2017.

[2] Michael G Akritas. *Probability & statistics with R for engineers and scientists*. 1st ed. Pearson Boston, MA, 2016.

[3] Morris H DeGroot and Mark J Schervish. *Probability and statistics*. 4th ed. Pearson Education, 2012.

[4] Robert N Gould, Colleen N Ryan, and Rebecca Wong. *Essential Statistics*. 2nd ed. Pearson Education, 2017.

[5] Ronald E Walpole et al. *Probability and statistics for engineers and scientists*. 9th ed. Pearson Education, 2016.

Algunas definiciones empleadas en las soluciones

Definición 1 (Espacio muestral) El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento estadístico es llamado el **espacio muestral** y es representado por el símbolo S.

Definición 2 (Evento) Un **evento** es un subconjunto de un espacio muestral.

Definición 3 El **complemento** de un evento A con respecto a S es el subconjunto de todos los elementos de S que no están en A. Denotamos el complemento de A por el símbolo A'.

Definición 4 La **intersección** de dos eventos A y B, denotado por el símbolo $A \cap B$, es el evento que contiene todos los elementos que son comunes a A y B.

Definición 5 Dos eventos A y B **mutuamente excluyentes**, o **disjuntos**, si $A \cap B = \emptyset$, esto es, si A y B no tienen elementos en común.

Definición 6 La **unión** de dos eventos A y B, denotado por el símbolo $A \cup B$, es el evento que contiene todos elementos que pertenecen a A o B o ambos.

Definición 7 Una **permutación** es un reordenamiento de todo o parte de un conjunto de objetos.

Definición 8 Para cualquier entero no negativo n, $n!$, llamado "n factorial", es definido como

$$n! = n\,(n-1)\cdots(2)\,(1)\,,$$

con el caso especial $0! = 1$.

Usando el argumento de arriba, llegamos al siguiente teorema.

Teorema 1 El número de permutaciones de n objetos es $n!$.

Teorema 2 El número de permutaciones de n objetos distintos tomando r por vez es

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Teorema 3 El número de permutaciones de n objetos ordenados en un círculo es $(n-1)!$.

Teorema 4 El número de permutaciones distintas de n cosas cuyos n_1 son de un tipo, n_2 son de un segundo tipo, ..., n_k del k-ésimo tipo es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Teorema 5 El número de modos de particionar un conjunto de n objetos dentro de r celadas con n_1 elementos en la primera celda, n_2 elementos en la segunda, así sucesivamente, es

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

Teorema 6 El número de combinaciones de n distintos objetos tomados r por vez es

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Definición 9 La **probabilidad** de un evento A es la suma de los pesos de todos puntos muestrales en A. Por lo tanto,

$$0 \leq \mathbb{P}\left(A\right) \leq 1, \quad \mathbb{P}\left(\emptyset\right) = 0, \quad \text{y} \quad \mathbb{P}\left(S\right) = 1.$$

Es más, si A_1, A_2, A_3, ...es una sucesión de eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots\right) = \mathbb{P}\left(A_1\right) + \mathbb{P}\left(A_2\right) + \mathbb{P}\left(A_3\right) + \cdots.$$

Teorema 7 Si A y B son dos eventos, entonces

$$\mathbb{P}\left(A \cup B\right) = \mathbb{P}\left(A\right) + \mathbb{P}\left(B\right) - \mathbb{P}\left(A \cap B\right).$$

Corolario 1 Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces

$$\mathbb{P}\left(A \cup B\right) = \mathbb{P}\left(A\right) + \mathbb{P}\left(B\right).$$

Corolario 2 Si A_1, A_2,..., A_n son mutuamente excluyentes, entonces

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = \mathbb{P}\left(A_1\right) + \mathbb{P}\left(A_2\right) + \cdots + \mathbb{P}\left(A_n\right).$$

Una colección de eventos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de un espacio muestral S es llamado una **partición** de S si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente excluyentes y $A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n = S$. Así, tenemos

Corolario 3 Si A_1, A_2, ..., A_n es una partición del espacio muestral S, entonces

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = \mathbb{P}\left(A_1\right) + \mathbb{P}\left(A_2\right) + \cdots + \mathbb{P}\left(A_n\right) = \mathbb{P}\left(S\right) = 1.$$

Teorema 8 Para tres eventos A, B y C,

$$\mathbb{P}\left(A \cup B \cup C\right) = \mathbb{P}\left(A\right) + \mathbb{P}\left(B\right) + \mathbb{P}\left(C\right) - \mathbb{P}\left(A \cap B\right) - \mathbb{P}\left(A \cap C\right) - \mathbb{P}\left(B \cap C\right) + \mathbb{P}\left(A \cap B \cap C\right).$$

Teorema 9 Si A y A' son eventos complementarios, entonces

$$\mathbb{P}\left(A\right) + \mathbb{P}\left(A'\right) = 1$$

Definición 10 La probabilidad condicional de B dado A, denotado por $\mathbb{P}\left(B \mid A\right)$, se define por

$$\mathbb{P}\left(B \mid A\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A \cap B\right)}{\mathbb{P}\left(A\right))}, \quad \text{siempre que} \quad \mathbb{P}\left(A\right) > 0.$$

Definición 11 Dos eventos A y B son independientes si y solo si

$$\mathbb{P}\left(B \mid A\right) = \mathbb{P}\left(B\right) \quad \text{o} \quad \mathbb{P}\left(A \mid B\right) = \mathbb{P}\left(A\right).$$

asumiendo las existencias de las probabilidades condicionales. Caso contrario, A y B son **dependientes**.

Teorema 10 Si en un experimento los eventos A y B pueden ocurrir ambos, entonces

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \mid A), \quad \text{siempre que} \quad \mathbb{P}(A) > 0.$$

Teorema 11 Dos eventos A y B son independientes si y solo si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

Por lo tanto, para obtener la probabilidad de que ocurran dos eventos independientes, simplemente encontramos el producto de sus probabilidades individuales.

Teorema 12 Si, en un experimento, los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ pueden ocurrir, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}&(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)\\ &= \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}).\end{aligned} \tag{1}$$

Si los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son independientes, entonces

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2) \cdots \mathbb{P}(A_k).$$

Definición 12 Una colección de eventos $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ son mutuamente independientes si para cualquier subconjunto de $\mathcal{A}$, $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$, para $k \leq n$, tenemos

$$\mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = \mathbb{P}\left(A_{i_1}\right) \cdots \mathbb{P}\left(A_{i_k}\right).$$

Teorema 13 Si los eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ constituye una partición del espacio muestral S tal que $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces para cualquier evento de S,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)\,\mathbb{P}(A \mid B_i).$$

Teorema 14 (Regla de Bayes) Si los eventos $B_1, B_{2,\ldots,B_k}$ constituye una partición del espacio muestral S tal que $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces para cualquier evento A en S tal que $\mathbb{P}(A) \neq 0$,

$$\mathbb{P}(B_r \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B_r \cap A)}{\sum\limits_{k=1}^{k} \mathbb{P}(B_i \cap A)} = \frac{\mathbb{P}(B_r)\,\mathbb{P}(A \mid B_r)}{\sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)\,\mathbb{P}(A \mid B_i)} \text{ para } r = 1, 2, \ldots, k.$$

Definición 13 Una **variable aleatoria** es una función que asocia un número real con cada elemento en el espacio muestral.

Definición 14 Si un espacio muestral contiene un número finito de posibilidades o una sucesión con tantos elementos como números enteros, se llama espacio de muestra discreto.

Definición 15 Si un espacio muestral contiene un número infinito de posibilidades igual al número de puntos en un segmento de recta, se le llama **espacio muestral continuo**.

Definición 16 El junto de pares ordenados $(x, f(x))$ es una **función de probabilidad**, **función de masa de probabilidad**, o **distribución de probabilidad** de una variable aleatoria discreta X si, para cada posible resultado x,

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\sum\limits_{x} f(x) = 1$,

3. $\mathbb{P}(X = x) = f(x)$.

Definición 17 La **función de distribución acumulativa** $F(x)$ para una variable aleatoria discreta X con distribución de probabilidad $f(x)$ es

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t), \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty.$$

Definición 18 La función $f(x)$ es una **función de densidad de probabilidad** (fdp) para la variable aleatoria continua X, definida sobre el conjunto de los números reales, si

1. $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
3. $\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Definición 19 La **función de distribución acumulativa** $F(x)$ de una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$ es

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty.$$

Definición 20 La función $f(x,y)$ es una **distribución de probabilidad conjunta** o **función de distribución de masa** de las variables aleatorias X e Y si

1. $f(x,y) \geq 0$ para todo (x,y),
2. $\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$,
3. $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = f(x,y)$.

Para cualquier región A en el plano xy, $\mathbb{P}[(X,Y) \in A] = \sum \sum_A f(x,y)$.

Definición 21 La función $f(x,y)$ es una **función de densidad conjunta** de las variables aleatorias X e Y si

1. $f(x,y) > 0$, para todo (x,y),
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$,
3. $\mathbb{P}[(X,Y) \in A] = \int \int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, para cualquier región A en el plano xy.

Definición 22 Las **distribuciones marginales** de solo X y solo Y son

$$g(x) = \sum_y f(x,y) \quad \text{y} \quad h(y) = \sum_x f(x,y)$$

para el caso discreto, y

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \text{y} \quad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

para el caso continuo.

Definición 23 Sean X e Y dos variables aleatorias, discretas o continuas. La **distribución condicional** de la variable aleatoria Y dado que $X = x$ es

$$f(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \quad \text{siempre que} \quad g(x) > 0.$$

Similarmente, la distribución condicional de X dado que $Y = y$ es

$$f(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \quad \text{siempre que} \quad h(y) > 0.$$

Definición 24 Sean X e Y dos variables aleatorias, discretas o continuas, con distribuciones de probabilidad conjuntas $f(x, y)$ y distribuciones marginales $g(x)$ y $h(y)$, respectivamente. Las variables aleatorias X e Y se dice que son **estadísticamente independientes** si y solo si

$$f(x,y) = g(x)h(y)$$

para todo (x, y) dentro de su rango.

Definición 25 Sean n variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$, discretas o continuas, con distribución de probabilidad conjunta $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y distribución marginal $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$, respectivamente. Las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se dice que son **estadísticamente independientes** si y solo si

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$$

para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dentro de su rango.

Definición 26 Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$. La **media**, o **valor esperado**, de X es

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \sum_X x f(x)$$

si X es discreta, y

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, \mathrm{d}x$$

si X es continua.

Teorema 15 Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$. El valor esperado de la variable aleatoria $g(X)$ es

$$\mu_{g(X)} = \mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x) f(x)$$

si X es discreto, y

$$\mu_{g(X)} = \mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, \mathrm{d}x$$

si X es continua.

Definición 27 Sean X e Y variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta $f(x, y)$. La media, o valor esperado, de la variable aleatoria $g(X, Y)$ es

$$\mu_{g(X,Y)} = \mathbb{E}[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) f(x,y)$$

si X e Y son discretas, y

$$\mu_{g(X,Y)} = \mathbb{E}[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

si X e Y son continuas.

Definición 28 Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$ y media μ. La varianza de X es

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x), \quad \text{si } X \text{ es discreta, y}$$
$$\sigma^2 = \mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{si } X \text{ es continua}$$

La raiz cuadrado positiva de la varianza, σ, es llamada la **desviación estándar** de X.

Teorema 16 La varianza de una variable aleatoria X es

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mu^2$$

Teorema 17 Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$. La varianza de la variable aleatoria $g(X)$ es

$$\sigma^2_{g(X)} = \mathbb{E}\left\{\left[g(X) - \mu_{g(X)}\right]^2\right\} = \sum_x \left[g(x) - \mu_{g(X)}\right]^2 f(x)$$

si X es discreta, y

$$\sigma^2_{g(X)} = \mathbb{E}\left\{\left[g(X) - \mu_{g(X)}\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[g(x) - \mu_{g(X)}\right]^2 f(x)$$

si X es continua.

Definición 29 Sea X e Y una variable aleatoria con distribución de probabilidad conjunta $f(x,y)$. La covarianza de X e Y es

$$\sigma_{XY} = \mathbb{E}\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] = \sum_x \sum_y (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f(x,y)$$

si X e Y son discretas y

$$\sigma_{XY} = \mathbb{E}\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

si X e Y son continuas.

Teorema 18 La covarianza de dos variables aleatorias X e Y con medias μ_X y μ_Y, respectivamente, es dado por

$$\sigma_{XY} = \mathbb{E}(XY) - \mu_X\mu_Y.$$

Definición 30 Sean X e Y dos variables aleatorias con covarianza σ_{XY} y desviación estándar σ_X y σ_Y, respectivamente. El coeficiente de correlación de X y Y es

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

Teorema 19 Si a y b son constantes, entonces

$$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

Teorema 20 El valor esperado de la suma o diferencia de dos o más funciones de una variable aleatoria X es la suma o diferencia de los valores esperados de las funciones. Esto es,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[g(X) \pm h(X)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[g(x) \pm h(x)\right] f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathbb{E}\left[g(X)\right] \pm \mathbb{E}\left[h(X)\right].\end{aligned}$$

Teorema 21 El valor esperado de la suma o diferencia de dos o más funciones de las variables aleatorias X e Y es la suma o diferencia de los valores esperados de las funciones. Esto es,

$$\mathbb{E}\left[g\left(X,Y\right) \pm h\left(X,Y\right)\right] = \mathbb{E}\left[g\left(X,Y\right)\right] \pm \mathbb{E}\left[h\left(X,Y\right)\right].$$

Corolario 4 Haciendo $g\left(X,Y\right) = g(X)$ y $h\left(X,Y\right) = h(Y)$, vemos que

$$\mathbb{E}\left[g\left(X\right) \pm h\left(Y\right)\right] = \mathbb{E}\left[g\left(X\right)\right] \pm \mathbb{E}\left[h\left(Y\right)\right].$$

Corolario 5 Haciendo $g\left(X,Y\right) = X$ y $h\left(X,Y\right) = Y$, vemos que

$$\mathbb{E}\left[X \pm Y\right] = \mathbb{E}\left[X\right] \pm \mathbb{E}\left[Y\right].$$

Teorema 22 Sean X e Y dos variables aleatorias independientes. Entonces

$$\mathbb{E}\left(XY\right) = \mathbb{E}\left(X\right)\mathbb{E}\left(Y\right).$$

Corolario 6 Sean X e Y dos variables aleatorias independientes. Entonces $\sigma_{XY} = 0$.

Teorema 23 Si X e Y son variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta $f\left(x,y\right)$ y a, b y c son constantes, entonces

$$\sigma^2_{aX+bY+c} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y + 2ab\sigma_{XY}.$$

Corolario 7 Si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces

$$\sigma^2_{aX+bY} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y.$$

Corolario 8 Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes, entonces

$$\sigma^2_{a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n} = a_1^2\sigma^2_{X_1} + a_2^2\sigma^2_{X_2} + \cdots + a_n^2\sigma^2_{X_n}.$$

Teorema 24 (Chebyshev) La probabilidad que cualquier variable aleatoria X que tenga un valor con desviación estándar k de la media es por lo menos $1 - \frac{1}{k^2}$. Esto es,

$$\mathbb{P}\left(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Proceso de Bernoulli

Estrictamente hablando, el proceso de Bernoulli debe poseer las siguientes propiedades:

1. Le experimento consiste de ensayos repetidas.
2. Cada resultado del ensayo es un resultado que podría ser clasificado como éxito o fracaso.
3. La probabilidad de éxito, denotado por p, permanece constante desde un ensayo a otro.
4. Los ensayos repetidos son independientes.

Distribución de Bernoulli

El número X de sucesos en n ensayos de Bernoulli es llamado **variable aleatoria binomial**. La distribución de probabilidad de esta variable aleatoria discreta es llamada **distribución binomial**, y sus valores son denotados por $b\left(x; n, p\right)$ dado dependen del número de ensayos y la probabilidad de éxito en un ensayo dado. Así, para la distribución de probabilidad de X, el número de fracasos es

$$\mathbb{P}\left(X = 2\right) = f(2) = b\left(2; 3, \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{64}.$$

Definición 31 Un ensayo de Bernoulli puede resultar en éxito con una probabilidad p y de fracaso con una probabilidad $q = 1 - p$. Entonces, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria binomial X, es el número de éxitos en n ensayos independientes, es

$$b\left(x; n, p\right) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Frecuentemente, estamos interesados en problemas donde es necesario conocer $\mathbb{P}\left(X < r\right)$ o $\mathbb{P}\left(a \leq X \leq b\right)$. La sumatoria binomial

$$B\left(r; n, p\right) = \sum_{x=0}^{r} b\left(x; n, p\right)$$

Teorema 25 La media y la varianza de la distribución binomial $b\left(x; n, p\right)$ son

$$\mu = np \quad \text{y} \quad \sigma^2 = npq.$$

Experimentos multinomiales y la distribución multinomial

El experimento binomial se convierte en un **experimento multinomial** si dejamos que cada ensayo tenga más de dos posibles resultados. La clasificación de un producto manufacturado es siendo como ligero, pesado o aceptable y el registro de accidentes en cierta intersección de acuerdo al día de la semana constituyen experimentos multinomiales. El dibujar una tarjeta desde

Propiedades del proceso de Poisson

1. El número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo o región específica del espacio es independiente del número que se produce en cualquier otro intervalo de tiempo o región disjunta. En este sentido decimos que el proceso de Poisson no tiene memoria.

2. La probabilidad de que ocurra un solo resultado durante un intervalo de tiempo muy corto o en una pequeña región es proporcional a la duración del intervalo de tiempo o el tamaño de la región y no depende del número de resultados ocurridos fuera de este intervalo de tiempo o región.

3. La probabilidad de que ocurra más de un resultado en tan poco intervalo de tiempo o en una región tan pequeña es despreciable.

El número X de resultados que se producen durante un experimento de Poisson se denomina **Variable aleatoria de Poisson** y su distribución de probabilidad se llama **distribución de Poisson**.

Definición 32 La distribución de probabilidad de la variable aleatoria X de Poisson, que representa el número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo dado o en una región específica es denotado por t, es

$$p\left(x; \lambda t\right) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

donde λ es el número medio de resultados por unidad de tiempo, distancia, área o volumen y $e = 2.71828\ldots$.

Definición 33 (Función Gamma) La función $x \mapsto \Gamma(x)$, $x > 0$, definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t \tag{2}$$

es llamada la *función Gamma de Euler*.

Obviamente, tenemos las siguientes propiedades:

(i) Γ es positiva para cualquier $x > 0$,

(ii) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \, \mathrm{d}t = 1$.

Podemos usar la integración por partes para obtener para $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^x \, \mathrm{d}t \\
&= -e^{-t} t^x \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-e^{-t}\right) x t^{x-1} \, \mathrm{d}t \\
&= x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t = x\Gamma(x).
\end{aligned}$$

Puntuación

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Puntos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20
Puntaje										