UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
Facultad de Ciencias

Primer proyecto
Introducción a la Estadística y las Probabilidades
CM-274 A

Informe matemático del grupo E conformado por los alumnos

Sarria Palacios Eduardo David	20141445C
Maquera de la Cruz Stefany Briguitte	20162254B
Chung Alvarez Alex Steve	20164552C
Aznarán Laos Carlos Alonso	20162720C

Profesor de teoría:	Ph.D Ángel Enrique Ramírez Gutiérrez.
Profesor de Laboratorio:	Lic. José Fernando Zamudio Peves.

Escuela Profesional de Matemática
de la Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

12 de febrero del 2019 – 19 de febrero del 2019

Datos de los integrantes del Grupo E:

1. Cinco números distintos se distribuyen aleatoriamente entre los jugadores del 1 al 5. Cuando dos jugadores comparan sus números, el que tiene el más alto es declarado ganador. Inicialmente, los jugadores 1 y 2 comparan sus números; el ganador se compara con el jugador 3, y así sucesivamente. Sea X el numero de veces que el jugador 1 es un ganador. Encuentra $\mathbb{P}[X = i]$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

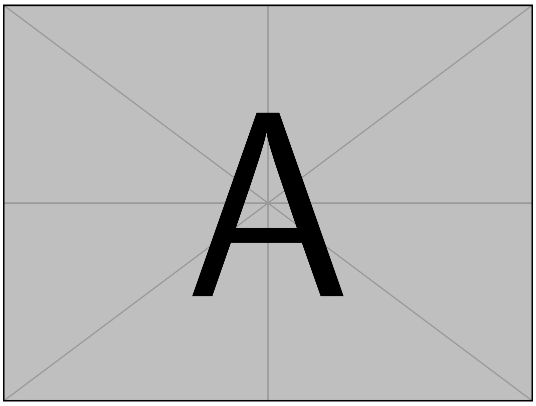

Figure 1: This is a lovely figure

Solución

Sea X una variable aleatoria cuyos valores de x están en $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ahora

$$f(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \ , \qquad f(2) = \mathbb{P}(X = 2) = \ ,$$
$$f(3) = \mathbb{P}(X = 3) = \ , \qquad f(4) = \mathbb{P}(X = 4) = \ ,$$
$$f(5) = \mathbb{P}(X = 5) = \ ,$$

Por lo tanto, la distribución de probabilidad de X es

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	2	3	4	5

2. Un sistema satelital consta de n componentes y funciona en un día cualquiera si al menos k de los n componentes funcionan ese día. En un día lluvioso, cada uno de los componentes funciona independientemente con probabilidad p_1, mientras que en un día seco cada uno funciona independientemente con probabilidad p_2. Si la probabilidad de que llueva mañana es de α, ¿cual es la probabilidad de que el sistema satelital funcione?

Solución

Hola

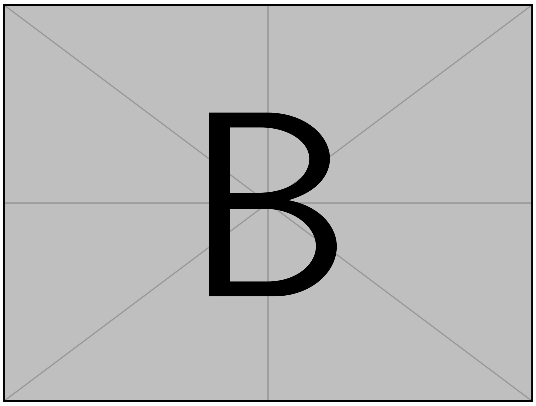

Figure 2: This is a lovely figure

Hola

3. Supuesto que el número de accidentes que ocurren en una autopista cada día es una variable aleatoria de *Poisson* con parámetro $\lambda = 3$.
   (a) Calcular la probabilidad que 3 o más accidentes ocurran hoy.
   (b) Responder (a) bajo el supuesto que al menos un accidente ocurrio hoy.

Solución

A

4. Supuesto que el número de ventas que ocurren en un tiempo específico es una variable aleatoria de Poisson con parámetro λ. Si cada evento es contado con probabilidad p, independiente un evento de otro evento, mostrar que el numero de eventos que son contados es una V.A de Poisson con parámetro λp. También, dar un argumento intuitivo de porqué esto debería ser así. Como una aplicación del párrafo anterior, suponer que el número de los distintos depósitos de uranio en un área dada es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = 10$. Si en un periodo de tiempo fijado, cada depósito es descubierto independientemente con probabilidad $\frac{1}{50}$, calcular la probabilidad que sea
   (a) exactamente 1.
   (b) Al menos 1
   (c) A lo más 1 depósito son descubiertos durante aquel tiempo.

Solución

A

5. Probar que
$$\sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = \frac{1}{n}\int_{\lambda}^{\infty} e^{-x}x^n \, \mathrm{d}x$$

6. Si X es una variable aleatoria geométrica, mostrar analíticamente que
$$\mathbb{P}[X = n + k \mid X > n] = \mathbb{P}[X = k]$$

Dar un argumento verbal usando la interpretación de una variable aleatoria geométrica en cuanto a porqué la ecuación anterior es verdadera.

Solución

A

7. Sea X una variable aleatoria binomial negativa con parámetros r y p, y sea Y una V.A binomial con parámetros n y p. Mostrar que

$$\mathbb{P}[X > n] = \mathbb{P}[Y < r]$$

Sugerencia: La prueba analítica anterior, es equivalente a probar la siguiente identidad

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{i-1}{i+1} p^r (1-p)^{i-r} = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

o se podría intentar una prueba que utilice la interpretación probabilística de estas V.A. Es decir, en el ultimo caso, comience considerando una secuencia de ensayos independientes que tienen una probabilidad de éxito común p. Luego, trate de expresar los eventos $\{X > n\}$ y $\{Y < n\}$ en términos de los resultados de esta secuencia.

Solución

A

8. Una persona arroja una moneda hasta que aparezca sello por primera vez. Si el sello sale en el n-ésimo lanzamiento, la persona gana 2^n dolares. Si X denota lo ganado por el jugador. Mostrar que $\mathbb{E}[X] = +\infty$. Este problema es conocido como la paradoja de San Petersburgo.
   (a) ¿Estaría dispuesto a pagar \$1 millón para jugar este juego una vez?
   (b) ¿Estaría dispuesto a pagar \$1 millón por cada juego si pudiera jugar durante el tiempo que quisiera y solo tendría que conformarse cuando dejó de jugar?

Solución

A

9. Supongamos que cuando están en vuelo, los motores del avión fallarán con probabilidad $(1-p)$ independientemente de motor a motor. Si un avión necesita la mayoría de sus motores operativos para realizar un vuelo exitoso, ¿Para qué valores de p es preferible un avión de 5 motores a un avión de 3 motores?

Referencias bibliográficas

[1] Alan Agresti, Christine A Franklin, and Bernhard Klingenberg. *Statistics: The art and science of learning from data*. 4th ed. Pearson Education, 2017.

[2] Michael G Akritas. *Probability & statistics with R for engineers and scientists*. 1st ed. Pearson Boston, MA, 2016.

[3] Morris H DeGroot and Mark J Schervish. *Probability and statistics*. 4th ed. Pearson Education, 2012.

[4] Robert N Gould, Colleen N Ryan, and Rebecca Wong. *Essential Statistics*. 2nd ed. Pearson Education, 2017.

[5] Ronald E Walpole et al. *Probability and statistics for engineers and scientists*. 9th ed. Pearson Education, 2016.

Algunas definiciones empleadas en las soluciones

Definición 1 (Espacio muestral) El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento estadístico es llamado el **espacio muestral** y es representado por el símbolo S.

Definición 2 (Evento) Un **evento** es un subconjunto de un espacio muestral.

Definición 3 El **complemento** de un evento A con respecto a S es el subconjunto de todos los elementos de S que no están en A. Denotamos el complemento de A por el símbolo A'.

Definición 4 La **intersección** de dos eventos A y B, denotado por el símbolo $A \cap B$, es el evento que contiene todos los elementos que son comunes a A y B.

Definición 5 Dos eventos A y B **mutuamente excluyentes**, o **disjuntos**, si $A \cap B = \emptyset$, esto es, si A y B no tienen elementos en común.

Definición 6 La **unión** de dos eventos A y B, denotado por el símbolo $A \cup B$, es el evento que contiene todos elementos que pertenecen a A o B o ambos.

Definición 7 Una **permutación** es un reordenamiento de todo o parte de un conjunto de objetos.

Definición 8 Para cualquier entero no negativo n, $n!$, llamado "n factorial", es definido como

$$n! = n\,(n-1)\cdots(2)\,(1)\,,$$

con el caso especial $0! = 1$.

Usando el argumento de arriba, llegamos al siguiente teorema.

Teorema 1 El número de permutaciones de n objetos es $n!$.

Teorema 2 El número de permutaciones de n objetos distintos tomando r por vez es

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Teorema 3 El número de permutaciones de n objetos ordenados en un círculo es $(n-1)!$.

Teorema 4 El número de permutaciones distintas de n cosas cuyos n_1 son de un tipo, n_2 son de un segundo tipo, ..., n_k del k-ésimo tipo es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Teorema 5 El número de modos de particionar un conjunto de n objetos dentro de r celadas con n_1 elementos en la primera celda, n_2 elementos en la segunda, así sucesivamente, es

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

Teorema 6 El número de combinaciones de n distintos objetos tomados r por vez es

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Definición 9 La **probabilidad** de un evento A es la suma de los pesos de todos puntos muestrales en A. Por lo tanto,

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1, \quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0, \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(S) = 1.$$

Es más, si A_1, A_2, A_3, ...es una sucesión de eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \cdots .$$

Teorema 7 Si A y B son dos eventos, entonces

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Corolario 1 Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Corolario 2 Si A_1, A_2,..., A_n son mutuamente excluyentes, entonces

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n).$$

Una colección de eventos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de un espacio muestral S es llamado una **partición** de S si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente excluyentes y $A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n = S$. Así, tenemos

Corolario 3 Si A_1, A_2, ..., A_n es una partición del espacio muestral S, entonces

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(S) = 1.$$

Teorema 8 Para tres eventos A, B y C,

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Teorema 9 Si A y A' son eventos complementarios, entonces

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A') = 1$$

Definición 10 La probabilidad condicional de B dado A, denotado por $\mathbb{P}(B \mid A)$, se define por

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A))}, \quad \text{siempre que} \quad \mathbb{P}(A) > 0.$$

Definición 11 Dos eventos A y B son independientes si y solo si

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B) \quad \text{o} \quad \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A).$$

asumiendo las existencias de las probabilidades condicionales. Caso contrario, A y B son **dependientes**.

Teorema 10 Si en un experimento los eventos A y B pueden ocurrir ambos, entonces

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \mid A), \quad \text{siempre que} \quad \mathbb{P}(A) > 0.$$

Teorema 11 Dos eventos A y B son independientes si y solo si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

Por lo tanto, para obtener la probabilidad de que ocurran dos eventos independientes, simplemente encontramos el producto de sus probabilidades individuales.

Teorema 12 Si, en un experimento, los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ pueden ocurrir, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k\right) \\ &= \mathbb{P}\left(A_1\right)\mathbb{P}\left(A_2 \mid A_1\right)\mathbb{P}\left(A_3 \mid A_1 \cap A_2\right)\cdots\mathbb{P}\left(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}\right).\end{aligned} \tag{1}$$

Si los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son independientes, entonces

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k\right) = \mathbb{P}\left(A_1\right)\mathbb{P}\left(A_2\right)\cdots\mathbb{P}\left(A_k\right).$$

Definición 12 Una colección de eventos $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ son mutuamente independientes si para cualquier subconjunto de $\mathcal{A}$, $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$, para $k \leq n$, tenemos

$$\mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = \mathbb{P}\left(A_{i_1}\right)\cdots\mathbb{P}\left(A_{i_k}\right).$$

Teorema 13 Si los eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ constituye una partición del espacio muestral S tal que $\mathbb{P}\left(B_i\right) \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces para cualquier evento de S,

$$\mathbb{P}\left(A\right) = \sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}\left(B_i \cap A\right) = \sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}\left(B_i\right)\mathbb{P}\left(A \mid B_i\right).$$

Teorema 14 (Regla de Bayes) Si los eventos $B_1, B_{2,\ldots,B_k}$ constituye una partición del espacio muestral S tal que $\mathbb{P}\left(B_i\right) \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces para cualquier evento A en S tal que $\mathbb{P}\left(A\right) \neq 0$,

$$\mathbb{P}\left(B_r \mid A\right) = \frac{\mathbb{P}\left(B_r \cap A\right)}{\sum\limits_{k=1}^{k}\mathbb{P}\left(B_i \cap A\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(B_r\right)\mathbb{P}\left(A \mid B_r\right)}{\sum\limits_{i=1}^{k}\mathbb{P}\left(B_i\right)\mathbb{P}\left(A \mid B_i\right)} \text{ para } r = 1, 2, \ldots, k.$$

Definición 13 Una **variable aleatoria** es una función que asocia un número real con cada elemento en el espacio muestral.

Definición 14 Si un espacio muestral contiene un número finito de posibilidades o una sucesión con tantos elementos como números enteros, se llama espacio de muestra discreto.

Definición 15 Si un espacio muestral contiene un número infinito de posibilidades igual al número de puntos en un segmento de recta, se le llama **espacio muestral continuo**.

Definición 16 El junto de pares ordenados $(x, f(x))$ es una **función de probabilidad**, **función de masa de probabilidad**, o **distribución de probabilidad** de una variable aleatoria discreta X si, para cada posible resultado x,

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\sum\limits_{x} f(x) = 1$,
3. $\mathbb{P}\left(X = x\right) = f(x)$.

Definición 17 La **función de distribución acumulativa** $F(x)$ para una variable aleatoria discreta X con distribución de probabilidad $f(x)$ es

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t), \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty.$$

Definición 18 (Función Gamma) La función $x \mapsto \Gamma(x)$, $x > 0$, definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t \tag{2}$$

es llamada la *función Gamma de Euler*.

Obviamente, tenemos las siguientes propiedades:

(i) Γ es positiva para cualquier $x > 0$,

(ii) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$.

Podemos usar la integración por partes para obtener para $x > 0$:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^x\,\mathrm{d}t \\ &= -e^{-t}t^x\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-e^{-t}\right)xt^{x-1}\,\mathrm{d}t \\ &= x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x).\end{aligned}$$

Puntuación

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Puntos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20
Puntaje										