Traducción del artículo

Las variaciones de la probabilidad en la distribución de partículas α

Sobre la distribución de probabilidad de las partículas α

H. Bateman

28 de febrero del 2019

Índice

1 Una nota

Sea λt la probabilidad que una partícula α golpee la pantalla en un intervalo de tiempo dt. Si los intervalos de tiempo bajo la consideración son pequeños comparados con el período de tiempo de la sustancia radiactiva, podemos asumir que λ de t. Ahora, sea $W_n(t)$ la probabilidad que n partículas α golpeen la pantalla en un intervalo de tiempo t, entonces la probabilidad que $(n+1)$ partículas golpeen la pantalla en un intervalo $t + \mathrm{d}t$ es la suma de las dos probabilidades. En primer lugar, las $n+1$ partículas α pueden golpear la pantalla en el intervalo t y ninguno en el intervalo dt. La probabilidad de que esto pueda ocurrir es $(1-\lambda t\mathrm{d}t)W_{n+1}(t)$. En segundo lugar, n partículas α podrían golpear la pantalla en el intervalo t y una partícula en el intervalo dt; la probabilidad de que esto ocurra es $\lambda \mathrm{d}t W_n(t)$. Por lo tanto

$$W_{n+1}\left(t + \mathrm{d}t\right) = \left(1 - \lambda \mathrm{d}t\right) W_{n+1}(t) + \lambda \mathrm{d}t W_n\left(t\right).$$

Procediendo al límite, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}W_{n+1}}{\mathrm{d}t} = \lambda\left(W_n - W_{n+1}\right).$$

Poniendo $n = 0, 1, 2, \ldots$ en una sucecsión tenemos el sistema de ecuaciones:

2 Definiciones

2.1 Distribución uniforme

Definición 3. Una variable aleatoria continua tiene *distribución uniforme* en el intervalo $[a, b]$ si su función de densidad de probabilidad f es dado por $f(x) = 0$ si x no está en $[a, b]$ y

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} \quad \text{para } \alpha \leq x \leq \beta.$$

Denotamos esta distribución por $U(\alpha, \beta)$.

3.1 La fórmula del cambio de variable

Con frecuencia no queremos calcular el valor esperado de una variable aleatoria X, pero de una función X, como, por ejemplo, X^2. Entonces necesitamos determinar la distribución $Y = X^2$, por ejemplo para calcular la función de distribución F_Y de Y (este es un ejemplo del problema general de cómo las distribuciones bajo las transformaciones – este tópico es es tema del capitulo 8). Para un ejemplo concreto, suponga un arquitecto quiere maximizar en el tamaño de los edificios: estos deben ser el mismo ancho y profunidad X, pero X es uniformemente distribuido entre 0 y 10 metros. ¿Cuál es la distribución del área X^2 de un edificio? En particular, ¿será esta distribución (cualquier próxima a la) uniforme? Calculemos F_Y, para $0 \leq a \leq 100$:

$$F_Y(a) = \mathbb{P}\left(X^2 \leq a\right) = \mathbb{P}\left(X \leq \sqrt{a}\right) = \frac{\sqrt{a}}{10}.$$

Así, la función de densidad de probabilidad f_Y para el área es, para $0 < y < 199$ metros cuadrados , dado por

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}\sqrt{y}}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{20\sqrt{y}}.$$

Esto significa que los edificios con áreas pequeñas son , porque f_Y explota cerca de 0–vea también la , en el cual f_Y.

Sorpresivamente, esto no es muy visible en , un ejemplo donde debemos crear en nuestros cálculos más que en nuestros ojos. En la figura las ubicaciones de los edificios son generados por el proceso de Poisson, el tema del capítulo 12.

Suponga que un tiene que hacer una ofera en el precio de las de los edificios. El monto concreto que neceistará será proporcional al área X^2 de un edificio. Asi, su problema es: ¿cuál es el área esperada de un edificio? Con f_Y de él encuentra

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \mathbb{E}\left[Y\right] = \int_0^{199} y \cdot \frac{1}{20\sqrt{y}} \mathrm{d}y = \int_0^{100} \frac{\sqrt{y}}{20} \mathrm{d}y = \left[\frac{1}{20}\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^{100} = 33\tfrac{1}{3}\mathrm{m}^2.$$

La densidad de probabilidad del cuadrado de una variable aleatoria $U\left(0, 10\right)$.

Es interesante notar que *realmente* necesitamos hacer este cálculo. porque el valor esperado *no* es simplemente el producto del ancho esperado y la profundidad esperada, que es 25 m