Capítulo 1

Espacios con producto interno

En una ocasión anterior se han estudiado las condiciones, propiedades y operaciones con los espacios vectoriales, este contenido se obviará y se pasará a una definición muy importante que solo concierne a espacios vectoriales reales o complejos. El objetivo principal de lo que a continuación se expondrá es tratar con aquellos espacios vectoriales en los que tiene sentido hablar de *longitud* de un vector y *ángulo* entre vectores.

Bajo esta premisa, se define un cierto tipo de función que toma un valor escalar sobre parejas de vectores conocido como *producto interno*. El ejemplo más conocido es el producto que surge de manera natural[1] en $\mathbb{R}^3$.

1.1 Producto interno

El producto interno sobre un espacio vectorial es una función con propiedades similares a los de producto escalar $\mathbb{R}^3$, de manera análoga se pueden definir los conceptos de longitud y ángulo[2].

Definición 1.1. Sea V un espacio vectorial, un producto interno sobre $\mathbb{R}$

[1] Esta afirmación surge de garantizar la ortogonalidad de dos vectores utilizando la suma y diferencia de vectores

[2] El comentario respecto a la noción general de ángulo se restringirá al concepto de perpendicularidad (u ortogonalidad) de vectores.

es una aplicación

$$\begin{aligned}\langle \cdot\,,\cdot \rangle &\to \mathbb{R}\\ (u,v) &\mapsto \langle u,v\rangle\end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades

i) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle\ \forall u,v \in V$

ii) $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v+w\rangle$

iii) $\langle \lambda u,v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

iv) $\langle u,u\rangle \geq 0$ y $\langle u,u\rangle = 0 \iff u = \mathbf{0}$.

Definición 1.2. Un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensión finita con producto interno, se llama espacio euclidiano o espacio ortogonal

En $V = \mathbb{R}^n$, el producto interno

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

donde $u = (x_1, \ldots, x_n)$ y $v = (y_1, \ldots, y_n)$ se llama producto interno canónico. En este espacio existen muchos productos internos.

Definición 1.3. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, un producto interno (hermitiano) sobre V, es una aplicación

$$\begin{aligned}\langle \cdot\,,\cdot \rangle &\to \mathbb{C}\\ (u,v) &\mapsto \langle u,v\rangle\end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades

i) $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}\ \forall u,v \in V$

ii) $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$

iii) $\langle \lambda u,v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$

iv) $\langle u,u\rangle \geq 0$, $\langle u,u\rangle = 0 \iff u = \mathbf{0}$.

Definición 1.4. Un $\mathbb{C}$-espacio vectorial V de dimensión finita con producto interno, se llama espacio vectorial complejo o espacio unitario.

Observación 1.1. *Con respecto a las definiciones iniciales se afirma*

1. $\langle u, \lambda v\rangle = \overline{\langle \lambda v, u\rangle}$.
2. $\langle u, u\rangle = \overline{\langle u, u\rangle}$. *Luego* $\langle u, u\rangle$ *es real, esto implica* $\langle u, u\rangle \geq 0$.
3. *En* $\mathbb{C}^n$, *dados* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *y* $y = (y_1, \ldots, y_n)$, *su producto interno canónico se define como*

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Un producto interno sobre un espacio vectorial V (real o complejo) define una *norma* mediante la fórmula

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}, \quad u \in V.$$

Proposición 1.1. Son propiedades de la norma

i) $\|u\| \geq 0$ para todo $u \in V$ y $\|u\| = 0 \iff u = \mathbf{0}$

ii) $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$, $\forall u, v \in V$ (Schwarz)

iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualdad triangular).

Definición 1.5. Dos vectores $u, v \in V$ son ortogonales si $\langle u, v\rangle = 0$. En tal caso, esta situación se denotará con $u \perp v$.

1.2 Bases ortonormales

Nuevamente se aclara que se considera un espacio vectorial V provisto de un producto interno. Una base de V es llamada *base ortogonal* si sus elementos son mutuamente ortogonales. Por ejemplo, la base canónica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ es una base ortogonal.

Proposición 1.1 (Método de ortogonalización de Gram-Schmidt) Dada una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, existe una base ortogonal $u_1, \ldots, u_n$ de V, tal que $u_j \in \mathscr{L}\{v_1, \ldots, v_j\}$ para cada $j = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración. El método de ortogonalización de Gram-Schmidt tiene la siguiente secuencia. Sea $u_1 = v_1$. Buscamos el vector $u_2 = v_2 + \lambda u_1$ con la condición de que $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$. Esto implica

$$\lambda = -\frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2}.$$

Repitiendo el proceso se tiene que

$$u_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i u_i,$$

bajo las condiciones $\langle u_j, u_i \rangle = 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, j-1$, las que a su vez determinan los coeficientes λ_i, que son

$$\lambda_i = \frac{\langle v_j, v_i \rangle}{\|u_i\|^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, j-1.$$

■

Definición 1.6. Una base ortogonal se llama *base ortonormal* si cada un de sus elementos tiene norma 1.

La base canónica $\{e_1, \ldots e_n\} \in \mathbb{R}^n$ es una base ortonormal. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ortogonal de un espacio vectorial V, entonces basta dividir cada elemento por su norma para obtener una base ortonormal,

$$\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \ldots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}.$$

Para cada conjunto $A \subset V$ (V espacio con producto interno), se puede definir

$$A^{\perp} = \{u \in V | \langle u, v \rangle = 0, \text{ para todo } v \in A\}.$$

El conjunto $A^{\perp}$ es un subespacio, llamado *ortogonal* de A.

Proposición 1.2. Si S es un subespacio de dimensión finita de un espacio vectorial, entonces

$$V = S \oplus S^{\perp}.$$

1.3 Aplicación de las bases ortonormales

1.3.1 Análisis de imágenes

Se llama análisis de imágenes a la extracción de información derivada de sensores y representada gráficamente en formato de dos o tres dimensiones, para lo cual se puede utilizar tanto análisis visual como digital (procesamiento digital de imágenes). Abarca la fotografía en blanco y negro y color, infrarroja, imágenes satélitales, de radar, radar de alta definición, ultrasonido, electrocardiogramas, electroencefalogramas, resonancia magnéticay sismogramas y otros.

1.3.2 Las computadoras y el impacto de las imágenes

La experimentación con las imágenes ópticas resultaría en la explotación y la manipulación de centenares de niveles de sombra, resultando en una mejor explotación de la información obtenida.

Los primeros en usar esta nueva tecnología serían la inteligencia americana y los investigadores científicos quienes refinarían esta tecnología, resultando en la tomografía computarizada. Otra tecnología es la del ecocardiograma que haría posible el ver movimientos cardíacos y el flujo cardíaco. Otro adelanto sería la introducción de la resonancia magnética cuyas imágenes revelarían anomalías en tejidos humanos y flujo sanguíneos. También podría dar evidencia de daños en la espina dorsal y en procesos neuroquímicos cerebrales. En el presente los científicos están explorando el uso de nuevas tecnologías que hagan uso de más sectores des espectro electromagnético como por ejemplo las imágenes de rayos X.

Existe un sinfín de aplicaciones en el anaálisi de imágenes. Aquí tocamos un punto medular, y es que la matemática que la rige es, según Sergio Dominguez (Centro de Automática y Robótica UPM-CSISC Madrid, España), se deben realizar utilizando el método de los momentos utilizando funciones de base continuas a intervalos (PCBF).

1.3.3 Definición de las bases

El punto de partida para la propuesta

$$M_{mn} = \int_{x_0}^{x_f} \int_{y_0}^{y_f} I(x,y) p^*_{mn}(x,y) dx dx$$