1 Formas Canónicas

1.1 Valores y Vectores Propios

En lo que sigue de este capitulo, U, V, W denotarán $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita y $\mathbb{K}$ denotará los cuerpos $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, salvo mención especifica distinta.

Definición 1.1. Dada una transformación lineal $T\colon V \to V$, un número $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama *valor propio* o *autovalor* de T, si existe un vector $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $T(v) = \lambda v$. Este vector se llama *vector propio* o *autovector* de T correspondiente al autovalor λ.

Llamaremos valor propio y vector propio de una matriz A, al valor propio y vector propio correspondiente de la transformación lineal L_A, respectivamente.

Los autovectores de T y A_T, en general, se hallan en espacios vectoriales distintos y no tienen que ser iguales. En cambio los autovalores que se hallan en el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, por lo que cabe la pregunta: ¿son estos iguales o distintos? Una elegante respuesta a esta interrogante se da en las siguientes proposiciones.

Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y A_T la matriz asociada a la transformación lineal $T\colon V \to V$ en esta base. A cada vector $v \in V$, $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$, le asociamos su vector de coordenadas $x_v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}$. Con estas notaciones tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.1. La función $\psi\colon V \to \mathbb{K}^{n\times 1}$, definida por $\psi(v) = x_v$, es un isomorfismo y satisface

$$\psi(T(v)) = A_T(x_v)$$

.

Demostración. Es inmediato que ψ es una transformación lineal, además es un isomorfismo, pues lleva la base v_i de V en la base canónica e_j de $\mathbb{K}^{n\times n}$.

Por otro lado

$$\psi(T(v_j)) = \psi(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i) = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}) = A_T(e_j)$$

de donde

$$\psi(T(v_j)) = \psi(\sum_{j=1}^{n} x_j T(v_j)) = \sum_{j=1}^{n} x_j \psi(T(v_j))$$

$$\psi(T(v_j)) = \sum_{x_j}^{n} A_T(e_j) = A_T(x_1, \ldots, x_n)^t$$

$$\psi(T(v_j)) = A_T(x_v)$$

Esto concluye la prueba de la proposición. □

Proposición 1.2. Una transformación lineal $T\colon V \to V$ y su matriz asociada A_T tienen los mismos autovalores.

Demostración. Sea λ un autovalor de T y $v \in V$ un autovector correspondiente a λ, entonces

$$\begin{aligned}
A_T(x_v) &= \psi(T_v) \\
A_T(x_v) &= \psi(\lambda v) = \lambda\psi(v) \\
A_T(x_v) &= \lambda x_v
\end{aligned}$$

Esto prueba que λ es un autovalor de A_T.

Recíprocamente, sea λ un autovalor de A_T y $x \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ un correspondiente autovector. Existe entonces un vector $v \in V$ tal que $\psi(v) = x$ (pues ψ es un isomorfismo), de donde

$$\begin{aligned}
\psi(T_v) &= A_T x \\
&= \lambda x = \lambda\psi(v) \\
&= \psi(\lambda v)
\end{aligned}$$

Siendo ψ inyectiva, resulta $T(v) = \lambda v$. Como $v \neq 0$, λ es un autovalor de T. Esto prueba la proposición.

□

Proposición 1.3. Una transformación lineal $T : V \to V$ y su matriz asociada A_T tienen los mismos autovalores.

Demostración. Sea λ un autovalor de T y $v \in V$ un autovector correspondiente a λ, entonces

$$\begin{aligned}
A_T(x_v) &= \psi(T(v)) && \text{(por la proposición)} \\
&= \psi(\lambda v) = \lambda\psi(v) \\
&= \lambda x_v
\end{aligned}$$

Esto prueba que λ es un autovector de A_T.
Recíprocamente, sea λ un autovalor de A_T y $x \in \mathbb{K}^n$ un correspondiente autovector. Existe entonces un vector $v \in V$ tal que $\psi(v) = x$(pues ψ es un isomorfismo), de donde

$$\begin{aligned}
\psi(T(v)) &= \psi(T(v)) && \text{(por la proposición)} \\
&= \psi(\lambda v) = \lambda\psi(v) \\
&= \lambda(x_v)
\end{aligned}$$

siendo ψ inyectiva, resulta $T(v) = \lambda v$. Como $v \neq 0$, λ es autovalor de T. □

Corolario 1.1. Si A, $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y P es inversible, entonces A y $P^{-1}AP$ tienen los mismos autovalores.

Demostración. Es suficiente observar que A y $P^{-1}AP$ son matrices asociadas a una misma transformación lineal. □

La existencia de de autovalores de una transformación lineal depende del cuerpo $\mathbb{K}$ y de la dimensión del espacio vectorial, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1. La transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (-y,x)$ no posee autovalores en $\mathbb{R}$.

En efecto, supongamos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de T y $v = (a,b) \neq 0$ un correspondiente autovector. Por definición

$$(-b,a) = T(a,b) = \lambda(a,b)$$

.
ecuación que no posee solución en $\mathbb{R}$.

2 Tiangulación de Matrices. El Teorema de Cayley-Hamilton

Definición. Diremos que una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es **triangulable** si es semejante a una matriz triangular(superior). Una transformación lineal $T\colon V \to V$ es **triangulable** si existe una base de V en la que la matriz asociada a T es triangular.

Una proposición importante sobre la estructura de una matriz es la siguiente.

Proposición 2.1. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Toda transformación lineal $T\colon V \to V$ es triangulable.

Demostración. Esta demostración se hará por inducción sobre $n = \dim V$. Si $n > 1$, suponemos que la proposición es valida para todo espacio vectorial de dimensión $n-1$. Consideremos la transformación lineal $T^{\triangledown}\colon V^* \to V^*$, definida por $T^{\triangledown}(f) = f \circ T$, para $f \in V^*$.

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de $T^{\triangledown}$ y $g \in V^*$ un correspondiente autovector, esto es

$$T^{\triangledown} = \lambda g,\ g \neq 0.$$

El subespacio de V

$$S = \{v \in V / g(v) = 0\}$$

tiene dimensión $n-1$ y es invariante por $T(T(s) \subset S)$. Por hipótesis inductiva, S posee una base $\{v_1,\ldots,v_n\}$en la que T se escribe como

$$\begin{aligned}
T(v_1) &= \lambda_1 v_1 \\
T(v_2) &= a_{12}v_1 + \lambda_2 v_2 \\
&\vdots \\
T(v_{n-1}) &= a_{1,n-1}v_1 + \ldots + \lambda_{n-1}v_{n-1}
\end{aligned}$$

Si a los vectores $v_1,\ldots,v_n$ agregamos un vector v_n a fin de completar una base de V, con la expresión

$$T(v_n) = a_{1n}v_1, \ldots, \lambda v_n$$

la matriz asociada a T, en la base $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es triangular superior. □