1 Formas Canónicas

1.1 Valores y Vectores Propios

En lo que sigue de este capitulo, U, V, W denotarán $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita y $\mathbb{K}$ denotará los cuerpos $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, salvo mención especifica distinta.

Definición 1.1. Dada una transformación lineal $T\colon V \longrightarrow V$, un número $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama *valor propio* o *autovalor* de T, si existe un vector $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $T(v) = \lambda v$. Este vector se llama *vector propio* o *autovector* de T correspondiente al autovalor λ.

Llamaremos valor propio y vector propio de una matriz A, al valor propio y vector propio correspondiente de la transformación lineal L_A, respectivamente.

Los autovectores de T y A_T, en general, se hallan en espacios vectoriales distintos y no tienen que ser iguales. En cambio los autovalores que se hallan en el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, por lo que cabe la pregunta: £son estos iguales o distintos? Una elegante respuesta a esta interrogante se da en las siguientes proposiciones.

Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y A_T la matriz asociada a la transformación lineal $T\colon V \longrightarrow V$ en esta base. A cada vector $v \in V$, $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$, le asociamos su vector de coordenadas $x_v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}$. Con estas notaciones tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.1. La función $\psi\colon V \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times 1}$, definida por $\psi(v) = x_v$, es un isomorfismo y satisface

$$\psi(T(v)) = A_T(x_v)$$

.

Demostración. Es inmediato que ψ es una transformación lineal, además es un isomorfismo, pues lleva la base v_i de V en la base canónica e_j de $\mathbb{K}^{n\times n}$.

Por otro lado

$$\psi(T(v_j)) = \psi(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i) = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}) = A_T(e_j)$$

de donde

$$\psi(T(v_j)) = \psi(\sum_{j=1}^{n} x_j T(v_j)) = \sum_{j=1}^{n} x_j \psi(T(v_j))$$

$$\psi(T(v_j)) = \sum_{x_j}^{n} A_T(e_j) = A_T(x_1, \ldots, x_n)^t$$

$$\psi(T(v_j)) = A_T(x_v)$$

Esto concluye la prueba de la proposición. □

Proposición 1.2. Una transformación lineal $T\colon V \longrightarrow V$ y su matriz asociada A_T tienen los mismos autovalores.

Demostración. Sea λ un autovalor de T y $v \in V$ un autovector correspondiente a λ, entonces

$$A_T(x_v) = \psi(T_v)$$

$$A_T(x_v) = \psi(\lambda v) = \lambda \psi(v)$$

$$A_T(x_v) = \lambda x_v$$

Esto prueba que λ es un autovalor de A_T.

Recíprocamente, sea λ un autovalor de A_T y $x \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ un correspondiente autovector. Existe entonces un vector $v \in V$ tal que $\psi(v) = x$ (pues ψ es un isomorfismo), de donde