Proposición 0.1. Una transformación lineal $T \colon V \to V$ y su matriz asociada A_T tienen los mismos autovalores.

Demostración. Sea λ un autovalor de T y $v \in V$ un autovector correspondiente a λ, entonces

$$\begin{aligned} A_T(x_v) &= \psi(T(v)) && \text{(por la proposición)} \\ &= \psi(\lambda v) = \lambda\psi(v) \\ &= \lambda x_v \end{aligned}$$

Esto prueba que λ es un autovector de A_T.
Recíprocamente, sea λ un autovalor de A_T y $x \in \mathbb{K}^n$ un correspondiente autovector. Existe entonces un vector $v \in V$ tal que $\psi(v) = x$(pues ψ es un isomorfismo), de donde

$$\begin{aligned} \psi(T(v)) &= \psi(T(v)) && \text{(por la proposición)} \\ &= \psi(\lambda v) = \lambda\psi(v) \\ &= \lambda(x_v) \end{aligned}$$

siendo ψ inyectiva, resulta $T(v) = \lambda v$. Como $v \neq 0$, λ es autovalor de T. □

Corolario. Si A, $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y P es inversible, entonces A y $P^{-1}AP$ tienen los mismos autovalores.

Demostración. Es suficiente observar que A y $P^{-1}AP$ son matrices asociadas a una misma transformación lineal.

La existencia de de autovalores de una transformación lineal depende del cuerpo $\mathbb{K}$ y de la dimensión del espacio vectorial, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. La transformación lineal $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (-y, x)$ no posee autovalores en $\mathbb{R}$.

En efecto, supongamos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de T y $v = (a, b) \neq 0$ un correspondiente autovector. Por definición

$$(-b, a) = T(a, b) = \lambda(a, b)$$

.
ecuación que no posee solución en $\mathbb{R}$.

1 Tiangulación de Matrices. El Teorema de Cayley-Hamilton

Definición. Diremos que una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es **triangulable** si es semejante a una matriz triangular(superior). Una transformación lineal $T : V \to V$ es **triangulable** si existe una base de V en la que la matriz asociada a T es triangular.

Un asistente importante sobre la estructura de una matriz es el siguiente.

Proposición 1.1. sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Toda transformación lineal $T : V \to V$ es triangulable.

Demostración. Esta demostración se hará por inducción sobre $n = dimV$. Si $n > 1$, suponemos que la proposición es valida para todo espacio vectorial de dimensión $n - 1$. Consideremos la transformación lineal $T^{\triangledown} : V^* \to V^*$, definida por $T^{\triangledown}(f) = foT$, para $f \in V^*$.
Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de $T^{\triangledown}$ y y $g \in V^*$ un correspondiente autovector, esto es

$$T^{\triangledown} = \lambda g, \ g \neq 0$$

El subespacio de V

$$S = v \in V/g(v) = 0$$

tiene dimensión $n-1$ y es invariante por $T(T(s) \subset S)$. Por hipótesis inductiva, S posee una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$en la que T se escribe como

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \lambda_1 v_1 \\ T(v_2) &= a_{12} v_1 + \lambda_2 v_2 \\ &. \\ &. \\ &. \\ T(v_{n-1}) &= a_{1,n-1} v_1 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1} \end{aligned}$$

Si a los vectores $v_1, ..., v_n$ agregamos un vector v_n a fin de completar una base de V, con la expresión
$T(v_n) = a_{1n} v_1, ..., \lambda v_n$
la matriz asociada a T, en la base $\{v_1, ..., v_n\}$ es triangular superior.

□