

1 Formas Canónicas

1.1 Valores y Vectores Propios

En lo que sigue de este capítulo, U , V , W denotarán \mathbb{K} -espacios vectoriales de dimensión finita y \mathbb{K} denotará los cuerpos \mathbb{R} o \mathbb{C} , salvo mención específica distinta.

Definición 1.1. Dada una transformación lineal $T: V \rightarrow V$, un número $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama *valor propio* o *autovalor* de T , si existe un vector $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $T(v) = \lambda v$. Este vector se llama *vector propio* o *autovector* de T correspondiente al autovalor λ .

Llamaremos valor propio y vector propio de una matriz A , al valor propio y vector propio correspondiente de la transformación lineal L_A , respectivamente.

Los autovectores de T y A_T , en general, se hallan en espacios vectoriales distintos y no tienen que ser iguales. En cambio los autovalores que se hallan en el mismo cuerpo \mathbb{K} , por lo que cabe la pregunta: ¿son estos iguales o distintos? Una elegante respuesta a esta interrogante se da en las siguientes proposiciones.

Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y A_T la matriz asociada a la transformación lineal $T: V \rightarrow V$ en esta base. A cada vector $v \in V$, $v = \sum_{j=1}^n x_j v_j$, le asociamos su vector de coordenadas $x_v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}$. Con estas notaciones tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.1. La función $\psi: V \rightarrow \mathbb{K}^{n \times 1}$, definida por $\psi(v) = x_v$, es un isomorfismo y satisface

$$\psi(T(v)) = A_T(x_v)$$

Demostración. Es inmediato que ψ es una transformación lineal, además es un isomorfismo, pues lleva la base v_i de V en la base canónica e_j de $\mathbb{K}^{n \times n}$.

Por otro lado

$$\psi(T(v_j)) = \psi\left(\sum_{i=1}^n a_{ij} v_i\right) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}) = A_T(e_j)$$

de donde

$$\begin{aligned}\psi(T(v_j)) &= \psi\left(\sum_{j=1}^n x_j T(v_j)\right) = \sum_{j=1}^n x_j \psi(T(v_j)) \\ \psi(T(v_j)) &= \sum_{x_j}^n A_T(e_j) = A_T(x_1, \dots, x_n)^t \\ \psi(T(v_j)) &= A_T(x_v)\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba de la proposición. \square

Proposición 1.2. Una transformación lineal $T: V \rightarrow V$ y su matriz asociada A_T tienen los mismos autovalores.

Demostración. Sea λ un autovalor de T y $v \in V$ un autovector correspondiente a λ , entonces

$$\begin{aligned} A_T(x_v) &= \psi(T_v) \\ A_T(x_v) &= \psi(\lambda v) = \lambda \psi(v) \\ A_T(x_v) &= \lambda x_v \end{aligned}$$

Esto prueba que λ es un autovalor de A_T .

Recíprocamente, sea λ un autovalor de A_T y $x \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ un correspondiente autovector. Existe entonces un vector $v \in V$ tal que $\psi(v) = x$ (pues ψ es un isomorfismo), de donde

$$\begin{aligned} \psi(T_v) &= A_T x \\ &= \lambda x = \lambda \psi(v) \\ &= \psi(\lambda v) \end{aligned}$$

Siendo ψ inyectiva, resulta $T(v) = \lambda v$. Como $v \neq 0$, λ es un autovalor de T . Esto prueba la proposición. □

Proposición 1.3. Una transformación lineal $T : V \rightarrow V$ y su matriz asociada A_T tienen los mismos autovalores.

Demostración. Sea λ un autovalor de T y $v \in V$ un autovector correspondiente a λ , entonces

$$A_T(x_v) = \psi(T(v))(\text{por la proposición}) = \psi(\lambda v) = \lambda \psi(v) = \lambda x_v$$

Esto prueba que λ es un autovalor de A_T . □