Contenido

Introducción

Una de las principales habilidades que todo estudiante y profesional de Ciencias debe ostentar es la comunicar el contenido de sus trabajos, tanto de forma escrita como expositiva. En nuestro entorno, la gran mayoría de alumnos tiene dificultades en ambos aspectos. La Facultad de Ciencias de la UNI no es ajena a esta problemática y reparte esta labor a sus estudiantes con el fin de formar científicos que afronten los retos que proponen las nuevas tecnologías de información. Tal es el caso del lenguaje de marcado LaTeX. Con este fin hemos de organizar nuestro trabajo, recolectar las debidas fuentes y exponer los principales conceptos del Álgebra Lineal, sus resultados y aplicaciones. Tales conceptos: el de espacio vectorial, transformación lineal y las matrices, son el motor que da impulso al Álgebra Lineal y sus aplicaciones a diversas ramas del conocimiento humano. Comprender estos conceptos conlleva al estudiante a una mayor capacidad de generalización en otros campos matemáticos, uno de los casos más emblemáticos es el cálculo multivariable. Esta pequeña, pero sustancial exposición, obedece al curso de Álgebra Lineal 1, y las clases expuestas por el PhD. Luis Flores Luyo, profesor a cargo de la asignatura en nuestra casa de estudios.

Uni, 5 de octubre del 2018.

Capítulo 1

Espacios Vectoriales

1.1 El porqué del espacio vectorial

Desde la etapa escolar y en la academia estudiamos conceptos intuitivos que al pasar por la actividad matemática esta se ordena, sistematiza y toma la forma de un edificio construido con todo el rigor que la matemática puede ofrecer.

Sin embargo aún haciendo o recreando las matemáticas es posible darle una mirada al interior de ellas mismas con las herramientas lógicas que va creando, es decir, su actividad es dirigida no solo hacia el exterior en búsqueda de más conceptos que formalizar y la obtención de aplicaciones; sino hacia dentro de ellas mismas. La abstracción siempre tiene como objetivo la generalización, así que los matemáticos y nosotros nos preguntamos: ¿todo lo que hemos estudiado tiene algún *patrón* guardado en sí, o alguna actividad que subyace en todos sus desarrollos?

Como ya hemos mencionado antes, en el colegio y la academia, hemos visto los polinomios, las funciones, las sucesiones, las matrices, sistemas de ecuaciones, repasamos la geometría analítica en R^2 y R^3 si es que de primeros ciclos de universidad se trata y al parecer, según nuestra experiencia, hay algo en común: las operaciones permitidas (o definidas) entre sus elementos. Estamos hablando de la *suma* de estos elementos y la *multiplicación por algún número.* Esta situación es objeto de nuestro análisis y fundará la rama que se conoce como Álgebra Lineal.

Pero, ¿cómo es que se procede en tal *sistematización*? La respuesta inmediata es marcar un concepto de *inicio* que nos permita, a partir de allí, mirar hacia arriba y correr con todos los requisitos que esta generalización requiere. Ya que hemos afirmado la posibilidad de esta tarea. Partimos por preguntarnos: ¿qué concepto envuelve a todos los elementos de los conceptos matemáticos con los que usualmente se trabaja?

Como buscamos la generalización y ya no habrá distinción alguna, se englobarán a estos elementos con el nombre de *vector* y al conjunto que las representa se le denominará *espacio vectorial.* Notemos de primera vista que ambos nombres están circunscritos a la geometría (analítica si se quiere más precisión), muchos de los nombres acuñados en el Álgebra Lineal siguen este comportamiento pues es por analogía y extensión que se les asigna.

1.2 Definición y ejemplos

Bien, ahora el Espacio Vectorial es un conjunto que, como se ha discutido al inicio, y ahora formalmente hablando, consta de los siguientes ingredientes: un conjunto V diferente del vacío, una ley de composición interna, un cuerpo (o campo) $\mathbb{K}$ y una ley de composición externa.

Definición 1.1. El objeto $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ es un espacio vectorial si y solo si se verifican lo siguiente

A1) *(La suma es una ley de composición interna)* Esto quiere decir que la suma es *cerrada*, formalmente se la denota como:

$$\begin{aligned} V \times V &\to V \\ (u, v) &\mapsto u + v. \end{aligned}$$

En muchas ocasiones, para las demostraciones se prefiere:

$$v \in V \wedge u \in V \implies u + v \in V.$$

A2) *(La suma es conmutativa)* $\quad v \in V \wedge u \in V \implies u + v = v + u.$

A3) *(La suma es asociativa)* $\quad v \in V \wedge u \in V \implies u + v = v + u.$

A4) *(Existe un neutro para la suma)* $\quad \exists\, \mathbf{0} \in V \mid \forall x \in V : v + \mathbf{0} = v.$

A5) *(Todo elemento admite inverso aditivo)* $\quad \forall v \in V, \exists\, u \in V \mid v + u = \mathbf{0}.$

M1) *(El producto por un escalar es una ley de composición externa)* Esto quiere decir que el producto de un escalar por un vector es *cerrado*, formalmente se la denota como:

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times V &\to V \\ (\alpha, v) &\mapsto \alpha v. \end{aligned}$$

En muchas ocasiones, para las demostraciones se prefiere:

$$\alpha \in \mathbb{K} \wedge v \in V \implies \alpha v \in V.$$

M2) *(El producto satisface la asociatividad mixta)*
$$\alpha, \beta \in \mathbb{K} \wedge v \in V \implies \alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v.$$

M3) *(Distribución con respecto a la suma en $\mathbb{K}$)*
$$\alpha, \beta \in \mathbb{K} \wedge v \in V \implies (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v.$$

M4) *(Distribución con respecto a la suma en V)*
$$\alpha \in \mathbb{K} \wedge u, v \in V \implies \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v.$$

M5) *(La unidad del cuerpo es neutro para el producto)* $\forall v \in V : 1 \cdot v = v.$

Ejemplo 1.1 (Espacio vectorial de las funciones)
Si consideramos la cuaterna $(\mathbb{K}^X, +, \mathbb{K}, \cdot)$, el símbolo $\mathbb{K}^X$ denota al conjunto de todas las funciones con dominio un conjunto $X \neq \emptyset$ y codominio un cuerpo $\mathbb{K}$, o sea:
$$\mathbb{K}^X = \{f \mid f : X \to \mathbb{K}\}.$$

En $\mathbb{K}^X$ definimos la suma de funciones y el producto de escalares por funciones mediante:

i) Si f y g son elementos cualesquiera de $\mathbb{K}^X$, entonces $f + g : X \to \mathbb{K}$ es tal que
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in X.$$

ii) Si α es cualquier elemento de $\mathbb{K}$ y f es cualquier elemento de $\mathbb{K}^X$, entonces $\alpha f : X \to \mathbb{K}$ es tal que
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in X.$$

Observación 1.1. *Tanto la suma de funciones con dominio $X \neq \emptyset$ y codominio en $\mathbb{K}$, como el producto de escalares por funciones se llaman leyes de composición punto a punto.*

Ejemplo 1.1 (Espacio vectorial de las n-uplas de elementos de $\mathbb{K}$)
Con relación al espacio vectorial de funciones $(\mathbb{K}^X, +, \mathbb{K}, \cdot)$ consideremos el caso particular en que X es el intervalo natural inicial I_n. Toda función $f : I_n \to \mathbb{K}$ es una n-upla de elementos de $\mathbb{K}$ y escribiendo $\mathbb{K}^{I_n} = \mathbb{K}^n$ es $(\mathbb{K}^n, +, \mathbb{K}, \cdot)$ el espacio vectorial de las n-uplas de elementos de $\mathbb{K}$.

Las definiciones *i)* y *ii)* del ejemplo 1.1 se traducen aquí de la siguiente manera:

i) Si f y g denotan elementos de $\mathbb{K}^n$, entonces $f+g$ es la función de I_n en $\mathbb{K}$ definida por

$$f + g(i) = f(i) + g(i), \quad \forall i \in I_n.$$

Acomodando la notación para este caso también se puede expresar como

$$c_i = (f+g)(i) = f(i) + g(i) = a_i + b_i.$$

Donde a_i, b_i, c_i son las imágenes de i-adas por f, g y $f+g$, respectivamente. En consecuencia, las n-uplas de elementos de $\mathbb{K}$ se suman componente a componente. Pues si consideramos $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $v = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ entonces

$$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

ii) Si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $f \in \mathbb{K}^n$, entonces αf es la función de I_n en $\mathbb{K}$ definida por

$$(\alpha f)(i) = \alpha f(i), \quad \forall i \in I_n.$$

Donde c_i viene a ser la imagen de la i-ada por αf y además:

$$c_i = (\alpha f)(i) = \alpha f(i) = \alpha a_i.$$

Es decir, el producto de un elemento $\mathbb{K}$ por una n-upla se realiza multiplicando en $\mathbb{K}$ a dicho elemento por cada componente de la n-upla. Considerando a $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$\alpha u = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n).$$

Observación 1.2. *Esta definición no es más que la generalización de los conjuntos que usualmente se utilizan en matemáticas básicas y superiores.*

Ejemplo 1.2 (Espacio vectorial de las matrices $n \times m$)
Particularizando nuevamente con relación al espacio vectorial del ejemplo 1.1, consideremos $X = I_n \times I_m$, o sea, el producto cartesiano de los dos intervalos naturales I_n e I_m.

Llamamos matriz $n \times m$ con elementos en $\mathbb{K}$ a toda la función

$$f : I_n \times I_m \to \mathbb{K}$$

La imagen del elemento (ij) pertenece al dominio se denota por a_{ij}. Esquemáticamente se tiene

La matriz queda caracterizada por el conjunto de las imágenes

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{matrix}$$

y suele escribirse como un cuadro de mn elementos de $\mathbb{K}$ dispuestos en n filas y m columnas. Generalmente

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Abreviando, puede escribirse

$$A = (a_{ij}) \text{ donde } i = 1, 2, \ldots, n \text{ y } j = 1, 2, \ldots, m.$$

El conjunto de todas las matrices $n \times m$ con elementos en $\mathbb{K}$ es $\mathbb{K}^{I_n \times I_m}$ y se denota mediante $\mathbb{K}^{n \times m}$.

Las definiciones *(i)* y *(ii)* dadas en el primer ejemplo, se traducen aquí de la siguiente manera:

Si A y B son dos matrices de $\mathbb{K}^{m \times n}$, su suma es $C \in \mathbb{K}^{m \times n}$, tal que

$$\begin{aligned} c_{ij} &= (f + g)(i, j) = f(i, j) + g(i, j) \\ &= a_{ij} + b_{ij}. \end{aligned}$$

Y el producto del escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ por la matriz A es la matriz $C \in \mathbb{K}^{m \times n}$ cuyo elemento genérico c_{ij} es tal que

$$c_{ij} = (\alpha f)(i, j) = \alpha f(i, j) = \alpha a_{ij}.$$

Observación 1.3. $(\mathbb{K}^{n\times n}, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *es el espacio vectorial de las matrices cuadradas, es decir, de n filas y n columnas.*

Observación 1.4. *El vector nulo del espacio $\mathbb{K}^{n\times m}$ se llama matriz nula, la denotaremos mediante N y estas definida por $n_{ij} = 0, \forall i \forall j$. Por otro lado, la matriz inversa aditiva u opuesta de $A = (a_{ij})$ es B, cuyo elemento genérico satisface la relación $b_{ij} = -a_{ij}$. Se escribirá entonces $B = -A$.*

Observación 1.5. *La definición de funciones iguales conlleva a deducir para el caso de las matrices $A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \forall i \forall j$.*

Ejemplo 1.3 (Espacio vectorial de las sucesiones)
Sean $X = \mathbb{N}$ y $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$. Los elementos de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ son todas las sucesiones de elementos de $\mathbb{K}$, y retomando lo expuesto en el primer ejemplo resulta que $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \mathbb{K}, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Las definiciones *(i)* y *(ii)* del primer ejemplo se interpretan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} c_i &= (f+g)(i) = f(i) + g(i) = a_i + b_i, && \forall i \in \mathbb{N} \\ c_i &= (\alpha f)(i) = \alpha f(i) = \alpha a_i, && \forall i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

O sea, expresado de una manera más familiar

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots a_n, \dots) + (b_1, b_2, \dots, b_n \dots) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots) \\ \alpha(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) &= (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots \alpha a_n \dots) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4 (Funciones de polinomios sobre el cuerpo $\mathbb{K}$)
Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea V el conjunto de todas las funciones f de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$ definida en las formas

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \cdots + c_n x^n$$

donde $c_0, c_1, \dots c_n$ son escalares fijas de $\mathbb{K}$ (independientes de x). Una función de este tipo se llama *función polinomio* sobre $\mathbb{K}$. Sea la adición y la multiplicación escalar definidos como el primer ejemplo y c está en $\mathbb{K}$, entonces $f + g$ son también funciones polinomios.

Ejemplo 1.5 (Espacio de las funciones continuas)
Sea $I = [a, b]$, donde $a < b$. Si definimos $C(I) = \{f : I \to \mathbb{R} | f \text{ es continua}\}$, con las operaciones del ejemplo 1, es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

Ejemplo 1.6 (Función diferenciable en un punto)
El conjunto

$$D = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ es diferenciable en } x = 1\}$$

es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial con as operaciones del primer ejemplo.

Ejemplo 1.7 (Operación entre funciones)
Si consideramos

$$F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f' + af = \mathbf{0}\}$$

es un espacio vectorial con las operaciones del primer ejemplo.

Ejemplo 1.8 (Funciones integrables con restricción)
Las funciones integrables sobre el intervalo $[-1, 1]$ también conforman un espacio vectorial.

Proposición 1.1. En todo $\mathbb{K}$ espacio vectorial V, se verifica que para todo vector $u, v, w \in V$ y escalar $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. El vector nulo ($\mathbf{0}$) es único.
2. El opuesto de un vector es único.
   (a) $0v = \mathbf{0}$.
   (b) $\lambda\mathbf{0} = 0, \quad \lambda \in \mathbb{K}$.
3. Si $\lambda v = \mathbf{0} \implies \lambda = 0 \vee v = \mathbf{0}$.
4. Si $u + v = u + w \implies v = w$.
5. $-(u + v) = -u + (-v)$

Prueba 1. Identifiquemos las partes del enunciado:

***hipótesis*)** el vector nulo es un elemento de V y

***tesis*)** es único.

***demostración*)** Para garantizar la unicidad asumimos que existe otro elemento $\mathbf{0}'$ con la misma propiedad[1], es decir, a partir de $u + \mathbf{0} = u$, se llega a $u + \mathbf{0}' = u$. Entonces podemos afirmar que $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}'$ y $\mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$. Como $\mathbf{0}$ y $\mathbf{0}$ están en V pueden conmutar, es decir, $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}'$.

Luego tenemos que $\mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$, infiriendo que, tratando con elementos iguales, se trata del mismo elemento. ■

[1]En general, cuando en matemáticas se desea probar la unicidad de algún objeto, se toma como esquema a la Teoría de Conjuntos, se asume un segundo elemento, es decir, que el conjunto tiene dos elementos. Luego tras un correcto razonamiento se llega a concluir que ambos son iguales, en consecuencia estamos frente a un conjunto unitario o *singletón*.

Observación 1.6. *Esta proposición, aunque bien sencilla en su enunciado, proporciona una pieza clave en las demás demostraciones. Pues para cualquier elemento u que tenga la propiedad de $u + w = u$ este será necesariamente el* $\mathbf{0}$*, es decir $w = 0$.*

Prueba 5. Identificando las partes del enunciado

hipótesis) $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in V$, $\lambda v = \mathbf{0}$ y

tesis) $\lambda = 0 \vee v = \mathbf{0}$.

demostración) La cadena de igualdades

$$\begin{aligned} v &= v + \mathbf{0} \\ &= v + (u + (-u)) \\ &= (v + u) + (-u) \\ &= (u + w) + (-u) && \text{(por hipótesis)} \\ &= (u + (-u)) + w \\ &= \mathbf{0} + w = w \end{aligned}$$

garantiza la validez de la proposición. ∎

Las demás pruebas se dejan como ejercicio para el lector.

Ejercicio 1.1 Determine si el siguiente conjunto obedece a la definición de espacio vectorial.

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = 0\}.$$

Solución. Procedemos con garantizar la cerradura, es decir

$$\begin{aligned} B \times B &\to B \\ ((x, y), (x', y')) &\mapsto (x, y) + (x', y'). \end{aligned}$$

Como está propuesto en los axiomas, para este caso debemos tener que si

$$(x, y) \in B \wedge (x', y') \in B \implies (x + x', y + y,) \in B.$$

Sospechosamente podemos afirmar que esta implicación no siempre se da. Para comprobarlo basta con exponer un *contraejemplo*. A decir $(1, 0) \in B$ y $(0, 2) \in B$, pero $(1, 0) + (0, 2) = (1, 2) \notin B$. Por lo tanto B no es un espacio vectorial. ∎

Capítulo 2

Transformaciones Lineales

Las transformaciones lineales son funciones que relacionan espacios vectoriales, manteniendo la estructura de dichos espacios.

Definición 2.1. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo F. Una *transformación lineal* de V en W, es una función $T : V \to W$ que verifica:

$$T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta)$$

para todos los vectores α y β de V y todos los escalares c de F.

Teorema 2.1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo F, sea $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ una base ordenada de V. Sean W un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo F y $\beta_1, \dots, \beta_n$ vectores cualesquiera de W. Entonces existe una única transformación lineal T de V en W tal que

$$T(\alpha_j) = \beta_j; j = 1, 2, \dots, n$$

Teorema 2.2. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo F y sea T una transformación lineal de V en W. El *espacio nulo* de T es el conjunto de todos los vectores α de V tales que $T(\alpha) = \mathbf{0}$. Si V es de dimensión finita, el *rango* de T es la dimensión de la imagen de T y la *nulidad* de T es la dimensión del espacio nulo de T.

He aquí uno de los resultados más importantes del Álgebra Lineal.

Teorema 2.3. Sean V y W espacios vectoriales sobre el cuerpo F y sea T una transformación lineal de V en W. Supóngase que V es de dimensión finita, entonces:

$$\dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\operatorname{Nu} T) = \dim(V).$$

Teorema 2.4. Si A es una matriz mxn de elementos en el cuerpo F, entonces

$$\operatorname{Im} A = \text{ rango de las columna de } A.$$

2.1 Álgebra de las Transformaciones Lineales

En el estudio de las transformaciones lineales de V en W es de fundamental importancia que el conjunto de estas transformaciones herede una estructura natural de espacio vectorial. El conjunto de las transformaciones lineales de un espacio V en si mismo tiene una estructura algebraica mayor, pues la composición ordinaria de funciones da una *multiplicación* de tales transformaciones. Se analiza esas ideas en esta sección.

Teorema 2.5. Sean V en W espacios vectoriales sobre el cuerpo F y Sean T y U transformaciones lineales de V en W, La función $(T+U)$ es definida por

$$(T+U)(\alpha) = T(\alpha) + U(\alpha)$$

es una transformación lineal de V en W. Si c es cualquier elemento de F, la función (cT) definida por:

$$(cT)(\alpha) = c(T\alpha).$$

Es una transfromación lineal de V en W. El conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W, junto con la adición y la multiplicación escalar aquí definidas, es un espacio vectorial sobre el cuerpo F.

Teorema 2.6. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre el cuerpo F, y sea W un espacio vectorial de dimensión finita m sobre el cuerpo F. Entonces el espacio $L(V,W)$ es de dimensión finita y tiene dimensión mn.

Teorema 2.7. Sean V, W y Z espacios vectoriales sobre el cuerpo F. Sea T una transformación lineal de V en W y U una transformación lineal de W en Z. Entonces la función compuesta UT definida por $UT(\alpha) = U(T(\alpha))$ es una transformación lineal de V en Z.

2.2 Operador lineal

Definición 2.2. Si V es un espacio vectorial sobre el cuerpo F, un *operador lineal* sobre V es una transformación lineal de V en V.

Cuando $V = W = Z$, en el que U y T son operadores lineales del espacio V, se ve que la composición UT es tambien un operador lineal sobre V. Asi, el espacio $L(V, V)$ tiene una *multiplicación* definida por composición. En este caso el operador TU también esta definido, y debe observarse que en general $UT \neq TU$, es decir $UT - TU \neq 0$. Se ha de advertir de manera especial que si T es un operador lineal sobre V, entonces se puede componer T con T. Se usará para ello la notación $T^2 \neq TT$, y en general $T^n = T \dots T(n - veces)$ para $n = 1, 2, \dots$ se define $T^0 = I$ si $T \neq 0$.

Lema 1. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo F y sean U, T_1, T_2 operadores lineales sobre V, ademas c un elemento de F.

a. $IU = UI = I$

b. $U(T_1 + T_2) = UT_1 + UT_2; (T_1 + T_2)U = T_1U + T_2U$

c. $c(UT_1) = (cU)T_1 = U(cT_1)$

Teorema 2.8. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo F y sea T una transformación lineal de V en W. Si T es inversible , entonces la función reciproca T^{-1} es una transfromación lineal de W sobre V.

Teorema 2.9. Sea T una transformación lineal de V en W. Entonces T es no singular si, y solo si, T aplica cada subconjunto linealmente independiente de W.Sean V y W espacios vectoriales de dimención finita sobre el cuerpo F tal que $\dim V = \dim W$. Si T es una transformación lineal de V en W, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i. T es inversible.

ii. T es no singular.

iii. T es sobreyectiva, eso es la imagen de T es W.

Definición 2.3. Un *grupo* consta de lo siguiente:

i. Un conjunto G.

ii. Una correspondencia(u operación) que asocia a cada par de elementos x, y de G, un elemento xy de G de tal modo que:

a. $x(yz) = (xy)z$ para todo x, y, z en G*(asociatividad).*

b. Existe un elemento e en G tal que $ex = xe = x$ para todo x de G.

c. A cada elemento x de G le corresponde un elemento x^{-1} en G tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

2.3 Isomorfismo

Si V y W son espacios vectoriales sobre el cuerpo F, toda transformación lineal T de V en W sobreyectiva e inyectiva, se dice *isomorfismo de V sobre W*. Si existe un isomorfismo de V sobre W, se dice que V es *isomorfo* a W. Obsérvese que V es trivialmente isomorfo a V, ya que el operador identidad es un isomorfismo de V sobre V. También si V es isomorfo a W por un isomorfismo T, entonces W es isomorfo a V, pues T^{-1} es un isomorfismo de W sobre V. En resumen, el isomorfismo es una relación de equivalencia sobre la clase de espacios vectoriales. Si existe un isomorfismo de V sobre W, se dirá aveces que V y W son isomorfos, en vez de que V es isomorfo a W. Ello no será motivo de confusión porque V es isomorfo a W, si y solo si W es isomorfo a V.

Teorema 2.10. Todo espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo F es isomorfo al espacio F^n.

2.4 Transformaciones y matrices

Sea V un espacio vectorial de dimención n sobre el cuerpo F, y sea W un espacio vectorial de dimensión m sobre F. Sea $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base ordenada de V, y $B' = \{\beta_1, ..., \beta_m\}$ una base ordenada de W. Si T es cualquier transformación lineal de V en W, entonces T esta determinada por su efecto sobre los vectores α_j. Cada uno de los n vectores $T(\alpha_j)$ se expresa de manera única como una combinación lineal.

$$T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ij} B_i$$

de los vectores β_i, por los escalares $A_{1j}, \ldots, A_{mj}$ son las coordenadas de T_{α_j} en la base ordenada B'. Por consiguiente, la transformación T está determinada por los mn escalares A_{ij} mediante la expresión anterior mencionada. La matriz mn, A definida por $A(i, j) = A_{ij}$ se llama *matriz de T respecto al par de bases ordenadas B y B'* , la tarea inmediata es comprender claramente como la matriz A determina la transformación lineal T.

Teorema 2.11. Sean V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo F. Sean B una base ordenada de V y B' una base ordenada de w. Para cada transformación lineal T de V en W y en el conjunto de todas las matrices mxn, A cuyos elementos pertenecen a F ,tal que:

$$[T_\alpha]_{B'} = A\,[\alpha]_B$$

para todo vector α en V, ademas, $T \to A$ es una correspondencia biyectiva entre el conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W y el conjunto de todas las matrices mxn sobre el cuerpo F. La matriz A asociada, que esta asociada a T en el teorema 10 se llama la *matriz de T respecto a las bases ordenadas B , B'.*

Teorema 2.12. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo F. Para cada par de bases ordenadas B, B' de V y W , respectivamente ,la función que asigna a una transformación lineal T su matriz respecto a B, B' es un isomorfismo entre el espacio $L(V, W)$ y el espacio de todas las matrices mxn sobre el cuerpo F.

Teorema 2.13. Sean V, W y Z espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo F, sea T una transformación lineal de V en W y U una transformación lineal de W en Z. Si M, B', B'' son las bases ordenadas de los espacios V, W, Z respectivamente, y si A es la matriz de T respecto al par B, B' Y M es la matriz de T respecto al par M, B' y M es la matriz de la composición UT respecto al par M, B'' es la matriz producto $C = MA$.

Teorema 2.14. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo F y sean:

$$B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$
$$B' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$$

Dos bases ordenadas de V. Supóngase que T es un operador lineal sobre V. Si $P = [p_1, \ldots, p_n]$ es la matriz nxn de columnas $P_j = \left[\alpha'_j\right]_{B'}$, entonces:

$$[T]_{B'} = P^{-1} [T]_B P$$

de otra manera, si U es el operador lineal sobre V definido por $U_{\alpha_j} = \alpha'_j$; para todo $j = 1, 2, \ldots, n$ entonces:

$$[T]_{B'} = [U]_B^{-1} [T]_B [U]_B$$

Definición 2.4. Sean A y B dos matrices(cuadradas) nxn sobre el cuerpo F. Se dice que B es semejante a A sobre F si existe una matriz inversible $n \times n$, P, sobre F tal que $B = P^{-1}AP$.

De acuerdo con el teorema mencionado, se tiene que: si V es un espacio vectorial de dimención n sobre el cuerpo F y B, B' son 2 bases ordenadas de V, entonces para todo operador lineal de T sobre V, la matriz $B = [T]_{B'}$ es semejante a la matriz $A = [T]_B$. El razonamiento también es válido a la inversa. Supongase que A Y B son matrices nxn y que B es semejante a A. Sea V cualquier espacio de dimención n sobre F y sea B una base ordenada de V. Sea T el operador lineal sobre V que esta representado en la base B por A. Si $B = PAP^{-1}$, sea B' la base ordenada de Y obtenida de B por P, es decir:

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_j$$

2.5 Funciones Lineales

Si V es un espacio vectorial sobre el cuerpo F, una transformación lineal f de V en el cuerpo de los escalares F se llama también *una función lineal* sobre V. Si se comienza desde el principio, esto quiere decir que f es una función de V en F tal que:

$$f(c\alpha + \beta) = cf(\alpha) + f(\beta)$$

para todos los vectores α y β de V y todos los escalares c de F. El concepto de función lineal es importante para el estudio de los espacios vectoriales de dimensión finita, pues ayuda a organizar y clasificar el estudio de los subespacios, las ecuaciones lineales y las coordenadas.

Ahora si V es un espacio vectorial, el conjunto de todos los funcionales lineales sobre V forman, naturalmente, un un espacio vectorial. Es el espacio $L(V, F)$. Se designa este espacio por V^* y se le llama *espacio dual* de V:

$$V = L(V, F).$$

Si V es de dimensión finita se puede obtener una descripción muy explicita del espacio dual V^*. Por el teorema 6 sabemos algo acerca del espacio V^*.

$$\dim V^* = \dim V$$

De esta forma se obtiene de B un conjunto de n funciones lineales distintos $f_1, ...f_n$ sobre V. Estos funcionales son también linealmente independientes, pues supóngase que:

$$
\begin{aligned}
f &= \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \\
\implies f(\alpha_i) &= \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(\alpha_i) \\
f(\alpha_i) &= \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{ij} \\
f(\alpha_i) &= c_j
\end{aligned}
$$

En particular si f es funcional cero, $f(\alpha_j) = 0$ para cada j y por lo tanto los escalares c_j son todos cero. Entonces los f_i son n funcionales linealmente independientes, y como se sabe que V^* tiene dimensión n, deben ser tales que $B^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ es una base de V^*. Esta base se llama **base dual** de B.

Teorema 2.15. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo F y sea $B' = \{f_1, \ldots, f_n\}$ es una base de V^* tal que $f_i(\alpha_j = \delta_{ij}$. Para cada funcional lineal f sobre V se tiene.

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) f_i$$

y para cada vector α de V se tiene:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha)\alpha_i$$

Definición 2.5. Si V es un espacio vectorial sobre el cuerpo F y S es un subconjunto de V, el *anulador* de S es el conjunto S^0 de funciones lineales f sobre V tales que $f(\alpha) = 0$ para todo α de S.

Teorema 2.16. Sea V un esoacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo F y sea W un subespacio de V entonces :

$$\dim W + \dim W^0 = \dim V$$

2.6 Transpuesta de una transformación lineal

Supóngase que se tiene 2 espacios vectoriales V y W sobre el cuerpo F y una transformación lineal T de V en W, con. Entonces T induce una transformación lineal de W^* en V^*, como sigue. Supóngase que g es funcional lineal en W, y sea:

$$f(\alpha) = g(T(\alpha))$$

para cada α en V. Entonces la ecución mencionada describe una función f de V en F que es la composición de T(función de T en W), con g(funcion de W en F).

Teorema 2.17. Sean V y W espacios vectoriales sobre el cuerpo F, para toda transfromación lineal Tde V en W, existe una única transformación lineal T^t de W^* en V^* tal que:

$$(Tg)(\alpha) = g(T\alpha)$$

para todo g de W^* y todo α de V. A T^t se le llama *transpuesta* de T. Esta transformación T^t también se le llama a menudo adjunta de T, pero no usaremos esa terminología.

Teorema 2.18. Sean V en W espacios vectoriales sobre el cuerpo F y sea T una transformación lineal de V en W. El espacio nulo de T^t es el anulador de la imagen de T. si V y W son de dimensión finita, entonces:

i. rango(T^t) = rango(T).

ii. La imagen de T^t es el anulador del espacio nulo de T.

Teorema 2.19. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo F. Sea B una base ordenada de V con base dual B^*, y sea B' una base ordenada de W con base dual B'^*. Sea T una transformación lineal de V en W; sea A la matriz de T respecto a las bases B, B' y sea B la matriz de T^t respecto a B'^*, B^* . Entonces:

$$B_{ij} = A_{ji}$$

Definición 2.6. Si A es una matriz mxn sobre el cuerpo F, la *transpuesta* de A, es la matriz nxm, A^t, definida por

$$A^t_{ij} = A_{ji}.$$

El teorema 19 nos dice que si T es una transformacón lineal de V en W, cuya matriz con respecto a un par de bases es A, entonces la transformación transpuesta T^t esta representada, en el par de bases dual, por la matriz transpuesta A^t.

Teorema 2.20. Sea A cualquier matriz mxn sobre el cuerpo F. Entonces el rango de filas de A es igual al rango de columnas de A.

Ahora vemos que si A es una matriz mxn sobre F y T es la transformación lineal de F^n en F^m, entonces:

$$\text{rango}(T) = \text{rango de filas } (A) = \text{rango de columna } (A)$$

y se dirá simplemente que este número es el rango de A.

Capítulo 3

Matrices

3.1 Conceptos generales

Los coeficientes de un sistema lineales, tal como

$$\begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s \end{aligned}$$

revelan un ordenamiento rectangular de números, el cual es

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

al a partir de ahora llamaremos *matriz*. En general, una matriz $m \times n$, o sea de m filas y n columnas, es un ordenamiento rectangular de números,así

$$\begin{bmatrix} a_1 1 & a_1 2 \cdots & a_1 n \\ a_2 1 & a_2 2 \cdots & a_2 n \\ \vdots & & \vdots \\ a_m 1 & \cdots & a_m n \end{bmatrix}$$

donde la ubicación de los coeficientes $a_i j$ es única. Por comodidad, las matrices se denotarún con las letras mayúsculas como A,B,C, etc. y sus componentes con letras minúsculas. Así $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}], C = [c_{ij}], \ldots$

Al conjunto total de matrices m x n con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$, lo denotaremos con $\mathbb{K}^{m \times n}$. En particular $\mathbb{K}^{m \times 1}$ es el conjunto de vectores columna y $\mathbb{K}^{1 \times n}$ el conjunto de los vectores fila. El conjunto $\mathbb{K}^{m \times n}$ esta

provisto de las operaciones de suma y producto por un escalar, en forma análoga a $\mathbb{K}^n$, como mostramos a continuación.
Dadas $A = [a_ij], yB = [b_ij]$ en $\mathbb{K}^{m\times n}$, la suma y el producto por un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ son

$$A + B = [a_ij + b_ij], \lambda A = [\lambda a_ij]$$

con estas operaciones $\mathbb{K}^{mtimesn}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, donde el opuesto de A es

$$-A = [-a_ij]$$

y la matriz cero es $0 = [a_{ij}]$, donde $a_{ij} = 0$ para todo i,j. Por otro lado, bajo ciertas restricciones, existe el producto de matrices, definido para $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}^{n\times p}$, por $AB = [c_{ij}] \in \mathbb{K}^{m\times p}$ donde

$$c_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{jk}, \quad \text{para} \quad , i = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, p.$$

Por ejemplo para

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$$

El producto de matrices, cuando es posible, goza de las siguientes propiedades:

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$ y $(B + C)A = BA + CA$
3. $AB \neq BA$ en general.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

El espacio $\mathbb{K}^{n\times n}$ goza de importantes propiedades. El producto de dos matrices en $\mathbb{K}^{n\times n}$ es siempre posible; además se puede definir el concepto de matriz inversible, como veremos luego. Para esto último, ha de definirse la identidad para el producto de matrices. Para cada entero $n \geq 1$, existe una matriz cuadrada, *matriz identidad*, definida por $I = [\delta_{ij}]$ donde δ_{ij} es el delta de Kronecker. Por ejemplo: si $n = 1$, $I = [1]$ y $n = 2$.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz identidad tiene la propiedad $AI = IA = A$, para toda la matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se mencionan las siguientes posibilidades:

- *Diagonal*, si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$
- *Triangular superior*, si $a_{ij} = 0$ para $j < i$
- *Triangular inferior*, si $a_{ij} = 0$ para $j > i$
- *Simétrica*, si $A^t = A$
- *Antisimétrica*, si $A^t = -A$
- *Hermitiana*, si $A^* = A(\mathbb{K} = \mathbb{C})$
- *Ortogonal*, si $A^t A = I$
- *Idempotente*, si $A^2 = A$
- *Nilpotente*, si $A^p = 0$ para algún entero $q > 1$.

3.2 Matrices elementales

Existen algunas operaciones sobre las filas y las columnas de una matriz, llamadas operaciones elementales fila y operaciones elementales columna, respectivamente, que facilitan los cálculos cuando se desea resolver un sistema de ecuaciones lineales, hallar la inversa de una matriz, determinar el rango o calcular el determinante de la misma, etc. En cuando a las operaciones elementales fila, son esencialmente tres y consisten en:

1. Multiplicar una fila (de una matriz) por un número distinto de cero.
2. Sumar a una fila (de una matriz) el múltiplo de otra fila.
3. Intercambiar dos filas (de una matriz).

Estas operaciones no son sino el efecto de haber multiplicado a la izquierda la matriz dada por cierto tipo de matrices, llamadas matrices elementales. La multiplicación por la derecha de estas matrices elementales produce las operaciones elementales columna. Los tres tipos de matrices elementales en $\mathbb{K}^{n\times n}$ son:

1. $E_i(\lambda)$: matriz obtenida de la identidad I, multiplicando la i-ésima fila por $\lambda \epsilon \mathbb{K}, \lambda \neq 0 (1 \leqq i \leqq n)$ Por ejemplo, para n=2, existen dos matrices de este tipo:

$$E_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \lambda \neq 0$$

Para n =3, existen tres matrices de este tipo:

$$E_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \lambda \neq 0$$

2. $E_{ij}(\lambda)$: matriz obtenida de la igualdad I, sumando a la i-ésima fila, la j-ésima fila multiplicada por $\lambda, donde, i \neq j$ Por ejemplo, para n=2, existen dos tipos de matrices de este tipo:

$$E_1 2(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 1(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}, \lambda \epsilon \mathbb{K}$$

Para n =3, existen tres matrices de este tipo:

$$E_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{13}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{23}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

además de las matrices $E_{21}(\lambda), E_{31}(\lambda), E_{32}(\lambda)$.

3. E_{ij}: matriz obtenida de la identidad I, intercambiando de la i-ésima fila con la j-ésima, $i \neq j$. Por ejemplo, para n = 2, existe una única matriz de este tipo:

$$E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = E_{21}$$

Para n =3, existen tres matrices de este tipo:

$$E_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{13}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{23}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Además se observa que $E_{12} = E_{21}, E_{13} = E_{31}, E_{23} = E_{32}$. Toda matriz elemental es inversible y su inversa es una matriz elemental del mismo tipo. Es más, se verifican las fórmulas:

(a) $[E_i(\lambda)]^{-1} = E_i(\lambda^{-1})$, donde $\lambda \neq 0, i = 1, \ldots, m$.

(b) $[E_{ij}(\lambda)]^{-1} = E_{ij}(\lambda^{-1})$ donde $i \neq j$.

(c) $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$ donde $i \neq j$.

3.3 Cálculo de inversas

La primera aplicación, y una de las más importantes de las técnicas de operaciones elementales, es el cálculo de la inversa de una matriz. Recordemos que una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es inversible si existe una matriz B $\in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $AB = I = BA$. En la práctica, no hace falta verificar las dos propiedades, $AB = I$ y $BA = I$, para afirmar que B es la inversa de A, sino solamente una cualquiera de ellas, como veremos en seguida.

Proposición 3.1. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ una matriz tal que $L_A : \mathbb{K}^{n\times 1} \implies \mathbb{K}^{n\times 1}$ es inyectiva, entonces existen matrices elementales E_j, tales que

$$E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = I$$

Corolario 3.1. Con las hipótesis de la proposición anterior, la matriz A tiene la cualidad de ser inversible.

Ahora, $E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$ obtenida de la proposición anterior, multiplicando por la izquierda sucesivamente por $E_k^{-1}, \ldots, E_1^{-1}$, se obtiene

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}.$$

Luego, multiplicando sucesivamente por $E_k, ..., E_1 = I$, se llega a

$$AE_k \cdots E_1 = I.$$

Demostración. Por hipótesis, existe B ϵ $\mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $BA = I$. Si $Ax = 0$, entonces

$$x = Ix = B(Ax) = B0 = 0.$$

Esto prueba que L_A es inyectiva, y por tanto A inversible. ■

Corolario 3.2. Si A $\in \mathbb{K}^{n\times n}$ posee inversa a derecha, entonces es inversible.
***Demostracion*)**: Por hipótesis, existe B $\in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $AB = I$. Por el colorario anterior es inversible. Luego

$$A = (AB)B^{-1} = B^{-1}$$

Así, A es inversible.

Todo esto nos permite dar una aplicación a modo de ejemplo.

Ejemplo 3.1 La universidad de navarra ha hecho un estudio de los gastos de personal mensuales que tienen la facultad Amigos, Fcom,la facultad de ciencias y la facultad de Filosofía y letras. Para facilitar dicho calculo se han utilizado operaciones matriciales. La siguiente tabla nos muestra el numero de empleados de cada facultad respecto a los profesores, las personas dedicadas a la limpieza de los edificios y los bedeles .

	Amigos	Fcom	Ciencias	F y letras
Profesores	162	158	213	74
Limpieza	9	7	13	8
Bedeles	4	3	7	4

Las columnas de la matriz van a representar las diferentes facultades mientras que las filas representaran el numero de empleados en cada sector. A dicha matriz, la denominaremos matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 162 & 158 & 213 & 74 \\ 9 & 7 & 13 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 4 \end{bmatrix},$$

La matriz B sera la que represente los gastos de dicho personal en las facultades:

$$B = \begin{bmatrix} 2500 & 1200 & 1700 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos las dos matrices (A y B) para obtener dichos gastos mensuales de personal:

$$\begin{bmatrix} 2500 & 1200 & 1700 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 162 & 158 & 213 & 74 \\ 9 & 7 & 13 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 422600 & 408500 & 560000 & 201400 \end{bmatrix}.$$