Carlos A. Aznarán Laos
Franss Cruz Ordoñez
Junior Micha Velasque
Gabriel Quiróz Gómez
Davis S. García Fernández

Relación de recurrencia

– Monografía de Análisis Real –

3 de mayo del 2019

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

La presente monografía está dedicada a mis profesores y estudiantes de la Facultad de Ciencias.

Prefacio

Uno de los temas más importantes dentro del *Análisis Matemático* son las sucesiones, es decir, funciones cuyo dominio y contradominio es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y el de los números reales $\mathbb{R}$, respectivamente. En el presente trabajo nos enfocaremos en nada menos que las "relaciones de recurrencia", donde cualquier término se determina en función de al menos uno de los términos precedentes, un ejemplo famoso es la *sucesión de Fibonacci*. Esta sucesión fue descrita por *Leonardo de Pisa*[1] como la solución a un problema de cría de conejos: "Cierta persona cría una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año cuando, de acuerdo a su naturaleza, cada pareja necesita un mes para envejecer y cada mes posterior procrea otra pareja".

Viendo esto, hemos concebido un modelo matemático basado en sucesiones recursivas, dando su definición, algunos otros ejemplos, su relación con las ecuaciones en diferencias y otras aplicaciones como resolver sistemas de ecuaciones lineales empleando nuestros conocimientos adquiridos en el curso de Análisis Real de la carrera de Matemática en la Universidad Nacional de Ingeniería.

Rímac, *Carlos Aznarán Laos*
mayo 2019 *Franss Cruz Ordoñez*

[1] Fibonacci

Agradecimientos

Nos gustaría expresar el agradecimiento especial al maestro Manuel Toribio Cangana, así como a nuestro profesor Benito Ostos, que nos brindó la excelente oportunidad de hacer este maravilloso proyecto sobre el tema de relaciones de recurrencia, quien también me ayudó a hacer mucha investigación y llegué a conocer a muchos cosas nuevas. Estoy muy agradecido con ellos. En segundo lugar, también me gustaría agradecer a mis padres y amigos que me ayudaron mucho a terminar este proyecto en un tiempo limitado.

Estoy haciendo este proyecto no solo para las notas sino también para aumentar nuestro conocimiento.

Contenido

Parte I
Primera parte

0.1 Supongamos que E_n es definido recursivamente en $\mathbb{Z}^+$ por $E_0 = 0$, $E_1 = 2, \ldots,$ $E_{n+1} = 2n\{E_n + E_{n-1}\}$ para $n \geq 1$. Determine el valor de E_{10}.

0.2 Supongamos que la función f es definida recursivamente en $\mathbb{Z}^+$ por

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2^k \text{ para algún } k \in \mathbb{N}, \\ f(n/2) & \text{si } n \text{ es par pero no una potencia de 2}, \\ f(3n+1) & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(3) =& f(10) \quad \text{porque 3 es impar} \\ =& f(5) \quad \text{porque } 10 = 2 \times 5 \\ =& f(16) \quad \text{porque 5 es impar} \\ =& 1 \quad \text{porque } 16 = 2^4. \end{aligned}$$

0.1 Definiciones básicas y modelos

En esta sección presentamos a nuestros lectores las nociones básicas subyacentes de las relaciones de recurrencia, así como varios ejemplos de tales relaciones.

0.1.1 Primeras definiciones

Una relación de recurrencia es una familia numerable de ecuaciones que define sucesiones en modo recursivo. Aquellas sucesiones que así surgen se llaman *soluciones de la recurrencia*, dependiendo de uno o más datos iniciales: cada término que sigue al dato inicial en tales sucesiones es definida como una función de los términos anteriores.

Definición 0.1 Una **relación de recurrencia** en las incógnitas x_i, $i \in \mathbb{N}$, es una familia de ecuaciones

$$x_n = f_n\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right), \quad n \geq r,$$

donde $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, y $(f_n)_{n \geq r}$ son funciones

$$f_n \mathcal{W}\ D_n \to \mathbb{R}, \quad D_n \subseteq \mathbb{R}^n, \text{ o } f_n \mathcal{W}\ D_n \to \mathbb{C}, \quad D_n \subseteq \mathbb{C}^n.$$

Dependiendo en el caso encontrado, hablaremos de las **recurrencias reales** o de las **recurrencias complejas**. Las incógnitas $x_0, \ldots, x_{r-1}$ son llamadas **libres**. El número r es el *orden de la relación*.

Al reemplazar x por y, la relación de recurrencia de orden r

$$x_n = f_n\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right), \quad n \geq r,$$

puede también escribirse como

$$x_{n+r} = f_{n+r}\left(x_0, \ldots, x_{n+r-1}\right), \quad n \geq 0.$$

Definición 0.2 Una sucesión $(a_n)_n$ es una **solución** de la relación de recurrencia de orden r

$$x_n = f_n\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right), \quad n \geq r, \tag{0.1}$$

con $f_n \mathcal{W}\ D_n \to \mathbb{R}$, $D_n \in \mathbb{R}^n$, si

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in D_n, \quad a_n = f_n\left(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\right) \quad \forall\, n \geq r.$$

La sucesión $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ de valores asignados para las r incógnitas libres es llamado la r–sucesión de **valor inicial** o de las **condiciones iniciales** de la solución. Definimos la **solución general real** (**respectivamente compleja**) de la sucesión como la familia de todas las soluciones con elementos que están en $\mathbb{R}$ (respectivamente, en $\mathbb{C}$).

Considere la relación de recurrencia de primer orden definida por

$$x_n = \frac{1}{x_{n-1} - 1}, \quad n \geq 1.$$

La 1–sucesión (2) no es una sucesión de valor inicial de una solución, en efecto, 2 pertenece al dominio de $f_0(x) = \frac{1}{x-1}$, pero $(2, f_0(2)) = (2, 1)$ no pertenece al dominio de $f_1(x_0, x_1) = \frac{1}{x-1}$. Por otra parte, la 1–sucesión (3) es en efecto la sucesión de valor inicial de la solución (sucesión)

$$(a_n)_n := (3, 1/2, -2, -1/3, -3/4, -4/7, -7/11, \ldots).$$

Note que para $n \geq 2$ uno tiene $a_n < 0$ y así $a_{n+1} = \frac{1}{a_n - 1} < 0$ es distinto de 1.

En muchas ocasiones una relación de recurrencia de orden r involucra solo los últimos r términos y es de la forma

$$x_n = g_n(x_{n-r}, \ldots, x_{n-1}), \quad n \geq r,$$

donde $(g_n)_{n \geq r}$ son las funciones definidas en un subconjunto E_n de $\mathbb{R}^r$ o $\mathbb{C}^r$. Este último es de hecho una relación de recurrencia: es suficiente para establecer $f_n(x_0, \ldots, x_{n-1}) := g_n(x_{n-r}, \ldots, x_{n-1})$ para $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in D_n := \mathbb{R}^{n-r} \times E_n$ (o $\mathbb{C}^{n-r} \times E_n$) a fin de cumplir los requerimientos de la definición

0.1.2 Algunos modelos de recurrencias lineales

Ahora damos una serie de ejemplos que ilustran cómo reducir la solución de un problema en el que la búsqueda de las soluciones de una relación de recurrencia apropiada.

Un niño decide escalar una escalera con $n \geq 1$ de tal manera que cada paso que él despeja uno o dos de los pasos de la escalera Encuentre la relación de recurrencia que sirva para calcular el número de diferentes maneras posibles de escalar la escalera.

Prueba (Solución) Usamos la variable desconocida x_n para denotar el número de maneras en las cuales el niño puede escalar la escalera de $n \geq 1$ pasos. Es fácil de observar que $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$ (dos pasos cada uno de longitud uno, o un paso de longitud dos escalones). Ahora sea $n \geq 3$: si con el primer paso el niño mueve solo el primer escalón; existen claramente x_{n-1} posibles maneras de escalar los que quedan. Si en cambio con el primer lugar, se suben dos peldaños de escalera. □

0.2 Recurrencias Lineales con coeficientes constantes

Una relación de recurrencia lineal de orden r con coeficientes constantes es una recurrencia del tipo:

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = h_n, \forall n \geq r, \tag{0.2}$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_r$ son constantes reales o complejas,con c_0 y c_r ambos diferentes de cero y $(h_n)_{n\geq r}$ es una sucesión de números reales o complejos llamado sucesión de términos no homogéneos de la recurrencia. La recurrencia es llamada homogénea si la sucesión de términos no homogéneos es una sucesión nula, no homogénea si $h\neg 0$ para algún n. La relación de recurrencia:

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = 0, \forall n \geq r, \tag{0.3}$$

es llamada la recurrencia homogénea asociada, o la parte homogénea de la recurrencia (0.10). Como nosotros ya hemos notado, la recurrencia:

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = h_n, \forall n \geq r,$$

puede ser escrito equivalentemente como

$$c_0 x_{n+r} + c_1 x_{n+(r-1)} + \cdots + c_r x_n = h_{n+r}, \forall n \geq 0.$$

Se puede utilizar cualquiera de las formas presentadas.

Observación 0.1 Cada r-secuencia de valores asignados a las r incógnitas desconocidas de la relación de recurrencia

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = h_n, \forall n \geq r,$$

determina de forma única una solución. Al resolver una relación de recurrencia lineal, el siguiente principio es fundamental importancia.

Proposición 0.1 *Principio de superposición Sean $(u_n)_n$, $(V_n)_n$ respectivamente las soluciones de las relaciones de recurrencia lineal. x*

$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = h_n \ n \geq r$ y
$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = k_n \ n \geq r$,

con partes homogéneas iguales y secuencias de términos no homogéneos $(h_n)_n$ y $(k_n)_n$. Para cualquier par de constantes A y B, la secuencia $(Av_n + Bv_n)_n$ es una solución de la relación de recurrencia.

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = Ah_n + Bk_n.$$

La solución general de la relación de recurrencia

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = h_n, \quad n \geq r. \tag{0.4}$$

Prueba

1. Uno tiene fácilmente

$$\begin{aligned} c_0(Au_n + Bv_n) + c_1(Au_{n-1} + Bv_{n-1}) + \cdots + c_r(Au_{n-r} + Bv_{n-r}) = \\ = A(c_0u_n + c_1u_{n-1} + \cdots + c_ru_{n-r}) + B(c_0v_n + c_1v_{n-i} + \cdots + c_rv_{n-r}) \\ = Ah_n + Bk_n. \end{aligned}$$

2. Sea $(u_n)_n$ una solución particular de (0.4).Por el punto previo nosotros conocemos que $(v_n)_n = (u_n)_n + (v_n - u_n)_n$ es una solución de (0.4) si y solo si $v_n - u_n$ es una solución de la recurrencia homogénea asociada. Por lo tanto cada solución de (0.4) es obtenida añadiendo una solución de la recurrencia homogénea asociada para $(u_n)_n$. □

0.3 Relación de recurrencia lineal con homogénea con coeficientes constantes

La secuencia nula es una solución de cualquier relación de recurrencia lineal. La estructura de la solución general de una relación de recurrencia lineal homogénea corresponde a la estructura de la solución general de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

Proposición 0.2 *Considere la relación de recurrencia lineal homogénea de orden r:*

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \cdots + c_rx_{n-r} = 0, \quad n \geq r \quad (c_0c_r \neq 0) \tag{0.5}$$

1. *Cualquier combinación lineal de soluciones de* (0.5) *es de nuevo una solución de* (0.5).
2. *Existe r soluciones de* (0.5) *tal que cualquier otra solución de* (0.5) *puede ser expresado únicamente como su combinación lineal.*

Prueba 1. Esto sigue inmediatamente por el "Principio de Superposición".
2. Para todo $i \in \{0, \ldots, r-1\}$ sea $\left(u_n^i\right)_n$ la solución de (0.5) con r–sucesión de datos iniciales iguales a 0 para lugares $j \neq i$, iguales a 1 en lugares i, es decir:

$$u_j^i = 0 \text{ si } j \neq i, \quad u_i^i = 1 \quad j \in \{0, \ldots, r-1\}.$$

Consideramos ahora alguna solución $(a_n)_n$ de (0.5); la combinación lineal

$$a_0\left(u_n^0\right)_n + a_1\left(u_n^1\right)_n + \cdots + a_{r-1}(u_n^{r-1})_n,$$

es una solución de (0.5) con secuencia de datos iniciales $(a_0, \ldots, a_{r-1})$. Ya que la secuencia de datos iniciales determinan la solución de una relación de recurrencia, uno tiene

$$(a_n)_n = a_0\left(u_n^0\right)_n + a_1\left(u_n^1\right)_n + \cdots + a_{r-1}\left(u_n^{r-1}\right)_n.$$

Definición 0.3 Nosotros definimos el polinomio característico de una relación de recurrencia con coeficientes constantes de orden r de la siguiente manera:

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \cdots + c_rx_{n-r} = h_n, \quad n \geq r\,(c_0c_r \neq 0),$$

para sel el polinomio de grado r:

$$P(X) := c_0X^r + c_1X^{r-1} + \cdots + c_r.$$

Cada polinomio de grado r tiene exactamente r raíces complejas contando con su multiplicidad. Nosotros vemos ahora que la sucesión de las potencias naturales de una determinada raíz del polinomio característico de una relación de recurrencia lineal es una solución de la correspondiente relación homogénea.

Proposición 0.3 *Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. La sucesión $(\lambda^n)_n$ de las potencias de λ es una solución de la relación de recurrencia lineal homogénea*

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \ldots + c_r x_{n-r} = 0, \quad n \leq r \quad (c_0 c_r \neq 0), \tag{0.6}$$

sii λ es una raíz de este polinomio característico.

Prueba Dado que $c_r \neq 0$, las raíces del polinomio característico deben ser necesariamente no nulas. Sustituyendo los valores de la sucesión $(\lambda^n)_n$ en la recurrencia, uno tiene

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = 0,$$

y dividiendo por $\lambda^{n-r} \neq 0$

$$c_0 \lambda^r + c_1 \lambda^{r-1} + \cdots + c_r = 0.$$

Por lo tanto, la sucesión $(\lambda^n)_n$ es una solución de (0.6) si y solo si λ es una raíz del polinomio $c_0 X^r + c_1 X^{r-1} + \cdots + c_r$. □

En general, no es fácil encontrar las raíces de un polinomio de grado mayor que dos, aunque uno puede siempre usar un adecuado CAS. El siguiente criterio simple; sin embargo, muestra cómo encontrar las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros.

Proposición 0.4 *(Las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros) Sea $P(X) = c_0 X^r + c_1 X^{r-1} + \cdots + c_r$ un polinomio con coeficientes enteros $c_0 \ldots c_r \in \mathbb{Z}$, con $c_0 \neq 0$. Si la fracción $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ con* mcd $= 1$ *es una raíz de $P(X)$, luego $a \mid c_r$ y $b \mid c_0$. En particular, si $c_0 = \pm 1$ las raíces racionales del polinomio $P(X)$ son enteros que dividen a c_r.*

Prueba Dado $c_0 \left(\frac{a}{b}\right)^r + c_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{r-1} + \cdots + c_{r-1} \left(\frac{a}{b}\right) + c_r = 0$, multiplicado por b^r obtenemos:

$$c_0 a^r + c_1 a^{r-1} b + \cdots + c_{r-1} a b^{r-1} + c_r b^r = 0.$$

Como $a \mid c_0 a^r + c_1 a^{r-1} b + \cdots + c_{r-1} a b^{r-1}$, luego tiene que dividir también $c_r b^r$, y por lo tanto, al no tener a y b factores comunes, $a \mid c_r$; análogamente $b \mid c_0 a^r$ y por lo tanto divide a c_0. □

La recurrencia homogénea de segundo orden:

$$x_n = 2x_{n-1} - 2x_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

tiene polinomio característico $X^2 - 2X + 2$ cuyas raíces son $\lambda_1 = 1 - i$ y $\lambda_2 = 1 + i$. Las sucesiones $((1-i)^n)_n$ y $((1+i)^n)_n$ son las soluciones bases de la recurrencia. La solución general compleja de la recurrencia es:

$$x_n = A_1(1-i)^n + A_2(1+i)^n, \quad n \geq 0,$$

con la variante de A_1 y A_2 entre los números complejos. Veamos la solución real general. Uno tiene:

$$\lambda_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

y

$$\lambda_2 = 1 + i = \overline{\lambda_1} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Luego, las sucesiones $\left(2^{n/2}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)_n$ y $\left(2^{n/2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)_n$ son las soluciones base reales de la recurrencia. Por lo tanto, la solución general real de la recurrencia es:

$$x_n = A_1 2^{n/2}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + A_2 2^{n/2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right), \quad n \geq 0,$$

con la variación de A_1 y A_2 entre los números reales.

Resolver una ecuación de recurrencia significa encontrar una secuencia que satisfaga las ecuación de recurrencia. Encontrar una “solución general” significa encontrar una fórmula que describe todas las soluciones posibles (todas las secuencias posibles que satisfacen la ecuación).

Veamos el siguiente ejemplo:

Considere T_n que satisface la siguiente ecuación para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$:

$$T_n = 2T_{n-1} + 1.$$

La ecuación de recurrencia T_n indica cómo continúa la sucesión pero no nos dice como empieza tal. Si $T_1 = 1$, se tiene $T = (1, 7, 3, 15, 31, \ldots)$.

Si $T_2 = 1$, se tiene $T = (2, 5, 11, 23, 47, \ldots)$.

Si $T_4 = 1$, se tiene $T = (4, 9, 19, 39, 79, \ldots)$.

Si $T_{-1} = 1$, se tiene $T = (-1, -1, -1, 1 - 1, -1, \ldots)$.

£Existe alguna fórmula para cada una de estas sucesiones? £Existe una fórmula en términos de n y T_1 que describa todos los términos de la sucesión? £Existe una posible solución para T_n?

Para poder responder este tipo de problemas, veamos un poco más de ecuaciones con recurrencia.

0.4 Ejemplos definidos por ecuaciones de recurrencia

Imagina una fiesta donde las parejas llegan juntas, pero al final de la noche, cada persona se va con una nueva pareja. Para cada $n \in P$, digamos que D_n es el número de diferentes formas en que las parejas pueden ser “trastornadas”, es decir, reorganizadas en parejas, por lo que ni uno está emparejado con la persona con la que llegaron.

Para los valores:

$D_1 = 0$ // una pareja no puede ser transtornada.

$D_2 = 1$ // $\exists$ una y solo una manera de transtornar una pareja.

$D_3 = 2$ // si las parejas llegan como Aa, Bb, Cc, entonces A estaria emparejado con b o c. Si A esta emparejado con b, C debe estar emparejado con a(y no c) y B con c. Si A esta emparejado con c, B no debe estar emparejado con a(y no b) y C con b.

£Qué tan grandes son D_4, D_5 y D_{10}? £Cómo podemos calcularlos? £Existe alguna expresión cerrada para obtener todos los términos de la?

Vamos a desarrollar una estrategia para contar los desajustes cuando $n \leq 4$. Supongamos que hay n mujeres $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, y cada A_j llega con el hombre a_j.

La mujer A_1 puede ser “re-emparejada” con cualquiera de los $n-1$ hombres restantes a_2 o a_3 o $\ldots$ o a_n. Digamos que está emparejada con a_k, donde $2 \leq k \leq n$ y ahora consideremos a'_k pareja original de la mujer A_k: ella podría tomar a_1 o ella podría rechazar a_1 y tomar a alguien más.

Si A_1 es pareja con a_k y A_k es pareja con a_1, entonces $n - 2$ parejas dejaron para transtornar, y eso puede hacerse exactamente de D_{n-2} maneras diferente.

Ahora para cada uno de los $n - 1$ hombres que A_1 podría elegir, hay $\{D_{n-2} + D_{n-1}\}$ diferentes formas de completar el trastorno. Por lo tanto, cuando $n \geq 4$ tenemos: Usando la ecuación (**??**) las evaluaciones para 1 y 2 verifican la igualdad, ahora evaluemos D_n para cualquier valor de n, con $n \in \mathbb{N}$

$D_3 = (3-1)\{D_2 + D_1\} = 2\,(1+8) = 2$
$D_4 = (4-1)\{D_3 + D_2\} = 3\,(2+1) = 9$
$D_5 = (5-1)\{D_4 + D_3\} = 4\,(9+2) = 44$
$D_6 = (6-1)\{D_5 + D_4\} = 5\,(44+9) = 265$
$D_7 = (7-1)\{D_6 + D_5\} = 6\,(265+44) = 1854$
$D_8 = (8-1)\{D_7 + D_6\} = 7\,(1854+265) = 14833$
$D_9 = (9-1)\{D_8 + D_7\} = 8\,(14833+1854) = 133496$
$D_{10} = (10-1)\{D_9 + D_8\} = 9\,(133496+14833) = 1334961$

La sucesión en P definido por $S_n = Axn$ donde A es un número real satisface la ecuación de recurrencia (**??**). Si $n \geq 3$ se tiene:

$$\begin{aligned}(n-1)\{S_{n-2} + S_{n-1}\} &= (n-1)\{A(n-2) + A(n-1)\}\\ &= (n-1)A(n-2)\{1 + (n-1)\}\\ &= A(n-1)(n-2)\{n\}\\ &= Axn\\ &= S_n.\end{aligned}$$

£Es válida la fórmula para $n = 1$ o $n = 2$?

£Existe algún número real tal que $D_n = A(n)$ cuando $n = 1$ o $n = 2$?

No, porque si $0 = D_1 = A(1)$, entonces A debe ser igual a 0, y si $1 = D_2 = A(2)$, se tiene que A debería tomar el valor de $\frac{1}{2}$. Sin embargo, podemos usar esta fórmula para probar que D_n es acotado.

Teorema 0.1 *Para todo $n \geq 2$, $\frac{1}{3})n \leq D_n \leq \left(\frac{1}{2}\right) n$.*

Números de Ackermann

Por los 1920's, el lógico y matemático alemán, Wilhelm Ackermann (18961962), inventó una función muy curiosa, $A\text{'W } PXP \longrightarrow P$, que define recursivamente usando "tres reglas":

Regla 1.$A(1, n) = 2$ para $n = 1, 2, \ldots$.
Regla 2.$A(m, 1) = 2m$ para $m = 2, 3, \ldots$.
Regla 3. Cuando $m > 1$ y $n > 1$ se tiene: $A(m, n) = A(A(m-1, n), n-1)$.

Entonces

$$\begin{aligned}
A(2,2) &= A(A(2-1,2),2-1)//regla\ 3\\
&= A(A(1,2),1)\\
&= A(2,1) \quad //regla\ 1\\
&= 2(2) \quad //regla\ 2\\
&= 4.
\end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}
A(2,3) &= A(A(2-1,3),3-1) \quad //regla\ 3\\
&= A(A(1,3),2)\\
&= A(2,2) \quad //regla 1\\
&= 4.
\end{aligned}$$

De hecho

$$\begin{aligned}
si\ A(2,k) &= 4, && //para\ algun\ k \geq 2\\
entonces\ A(2,k+1) &= A(A(2-1,k+1),(k+1)-1) && //regla\ 3\\
&= A(A(1,k+1),k)\\
&= A(2,k) && //regla\ 1\\
&= 4. && //nuestro\ supuesto
\end{aligned}$$

Así, tenemos por Inducción Matemática:

$$A(2,n) = 4,\ para\ todo\ n \geq 1.$$

Hasta ahora la tabla de los números de Ackermann se ve así:

A	n=1	n=2	3	4	5	6	7	8	9...
m=1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
m=2	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	6								
4	8								
5	10								

Observamos que la segunda fila es de puro 4s. £Pero cómo es la segunda columna?

Si

$$A(k,2) = 2^k //\ para\ algunos\ k \geq 2$$

se tiene

$$
\begin{aligned}
&= A(A([k+1], 2-1) // \ regla\ 3 \\
&= A(A(k,2),1) \\
&= A(2^k, 1) \quad // \ nuestro\ supuesto \\
&= 2(2^k) \quad // \ regla\ 2 \\
&= 2^{k+1}.
\end{aligned}
$$

además

$$
\begin{aligned}
A(2,3) &= A(A(2-1,3),3-1) \quad //regla\ 3 \\
&= A(A(1,3),2) \\
&= A(2,2) \quad //regla 1 \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

$Asisetiene\ \mathcal{W}\ \ A(m,2) = 2^m\ para\ todo\ m\ \geq\ 1.$

Ahora, £como so los otros valores?

$$
\begin{aligned}
A(3,3) &= A(A(3-1),3),3-1) && //Regla\ 3 \\
&= A(A(2,3),2) \\
&= A(4,2) && //Segunda\ fila \\
&= 2^4 && //segunda\ columna \\
&= 16. \\
A(4,3) &= A(A(4-1),3),3-1) && //Regla\ 3 \\
&= A(A(3,3),2) \\
&= A(16,2) && //Encima \\
&= 2^{16} && //Segunda\ columna \\
&= 65536. \\
A(3,4) &= A(A(3-1),3),4-1) && //Regla\ 3 \\
&= A(A(2,4),3) \\
&= A(4,3) && //Segunda\ fila \\
&= 65536.
\end{aligned}
$$

£Cual es el valor de A(4,4)? £Podría ejecutar un programa recursivo simple para evaluar A (4,4)?

$$
\begin{aligned}
A(5,3) &= A(A(5-1),3),3-1) && //Regla\ 3 \\
&= A(A(4,3),2) \\
&= A(65536,2) \\
&= 2^{65536}. && //Segunda\ columna \\
&= n\ (n\ grande\ aprox\ 20000\ digitos\ en\ base\ 10.)
\end{aligned}
$$

hasta ahora tenemos:

A	n=1	n=2	3	4	5	6	7	8	9...
m=1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
m=2	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	6	8	16	65536	?				
4	8	16	65536	?					
5	10	32	2^{65536}						

£Cómo continúa la tercera columna? Sea $2 \uparrow$ denota el valor de "Torre" de k 2's, definida recursivamente por

$$2 \uparrow 1 = 2 \text{ y para } k \geq 1, 2 \uparrow [k+1] = 2^{2 \uparrow k}.$$

Pero este es un número tan grande que nunca podría escribirse en dígitos decimales, incluso utilizando todo el papel del mundo, Su valor nunca podría ser calculado. Ahora nos preguntamos £Los números Ackermann son computables? Por otro lado, supongamos que las secuencias que encontramos, incluso aquellas definidas por ecuaciones de recurrencia, serán fáciles para entender y tratar.

0.5 Resolución de ecuaciones de recurrencia lineal de primer orden

0.5.1 Las torres de Hanoi

La ecuación de recurrencia para el número de movimientos en las Torres de Hanoi es una ecuación de recurrencia lineal de primer orden:

$$T_n = 2T_{n-1} + 1.$$

Sea $a = 2$ y $c = 1$, entonces $\frac{c}{1-a} = \frac{1}{1-2} = -1$, y cualquier secuencia T que satisfaga este RE está dado por la fórmula

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T_n} &= 2^n\,[I - (-1)] + (-1)\\ \boldsymbol{T_n} &= 2^n\,[I + 1] - 1\end{aligned}$$

Asumiendo que T tiene el dominio $\mathbb{N}$ y que denota T_0 por I, vimos al principio de este capítulo varias soluciones particulares:
Si $I = 0$, entonces $\boldsymbol{T} = (0, 1, 3, 7, 15, 31, \ldots)$ $\boldsymbol{T_n} = 2^n[0 + 1] - 1 = 2^n - 1$.
Si $I = 2$, entonces $\boldsymbol{T} = (4, 9, 19, 39, 79, 159, \ldots)$ $\boldsymbol{T_n} = 2^n[2 + 1] - 1 = 3 \times 2^n - 1$.
Si $I = 4$, entonces $\boldsymbol{T} = (2, 5, 11, 23, 47, 95, \ldots)$ $\boldsymbol{T_n} = 2^n[4 + 1] - 1 = 5 \times 2^n - 1$.
Si $I = -1$, entonces $\boldsymbol{T} = (-1, -1, -1, -1, -1, \ldots)$ $\boldsymbol{T_n} = 2^n\,[-1 + 1] - 1 = -1$.

0.5.2 Los tres piratas naufragados

Un barco pirata es naufragado en una tormenta en la noche. Tres de los piratas sobreviven y se encuentran en una playa la mañana después de la tormenta. Aceptan cooperar para asegurar su supervivencia. Ellos divisan a un mono en la selva cerca de la playa y pasan todo ese primer día recogiendo una gran pila de cocos y luego se van a dormir exhaustos. Pero ellos son piratas. El primero duerme bien, preocupado por su parte de los cocos; despierta, divide la pila en 3 montones iguales, pero encuentra uno sobrante que arroja en el arbusto para el mono, entierra su tercero en la arena, amontona los otros dos montones, y se va a dormir profundamente. El segundo pirata duerme bien, preocupado por su parte de los cocos; se despierta, divide la pila en 3 montones iguales, pero encuentra uno sobrante que arroja en el arbusto para el mono, entierra su tercero en la arena, amontona los otros dos montones, y se va a dormir profundamente.

El tercero también duerme bien, preocupado por su parte de los cocos; despierta, divide la pila en 3 montones iguales, pero encuentra uno sobrante que arroja en el arbusto para el mono, entierra su tercero en la arena, amontona los otros dos montones juntos, y se va a dormir profundamente.

A la mañana siguiente, todos se despiertan y ven una pila algo más pequeña de cocos que se dividen en 3 montones iguales, pero encontrar uno sobrante que tiran en el arbusto para el mono. £Cuántos cocos recolectaron el primer día?

Sea S_j el tamaño de la pila después del pirata j^{4h} y sea S_0 el número que recogieron en el primer día. Entonces

$$\begin{aligned}
S_0 &= 3x + 1 \text{ para algún número entero } x \text{ y } S_1 = 2x,\\
S_1 &= 3y + 1 \text{ para algún número entero } y \text{ y } S_2 = 2y,\\
S_2 &= 3z + 1 \text{ para algún número entero} z \text{ y } S_3 = 2z,
\end{aligned}$$

y

$$S_3 = 3w + 1 \text{ para algún número entero } w.$$

£Hay una ecuación de recurrencia aquí?

$$\begin{aligned}
S_1 &= 2x \text{ donde } x = (S_0 - 1)/3, \text{ entonces } S_1 = (2/3)S_0 - (2/3)\\
S_2 &= 2y \text{ donde } y = (S_1 - 1)/3, \text{ entonces } S_2 = (2/3)S_1 - (2/3)\\
S_3 &= 2z \text{ donde } z = (S_2 - 1)/3, \text{ entonces } S_3 = (2/3)S_2 - (2/3).
\end{aligned}$$

La ecuación de recurrencia satisfecha por los primeros $S_j's$ es

$$S_{j+1} = (2/3)S_j - (2/3). \tag{0.7}$$

Si ahora tenemos $S_4 = (2/3)S_3 - (2/3)$, entonces $S_4 = 2[S_3 - 1]/3 = 2w$ para algún número entero w. Queremos saber qué valor (o valores) de S_0 producirá un número entero par para S_4 cuando aplicamos el RE (1). En (1), $a = 2/3$ y $c = -2/3$, entonces $c/(1-a) = -2$, y así la solución general de (1) es

$$S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n [S_0 + 2] - 2.$$

Por lo tanto, $S_4 = (2/3)^4[S_0 + 2] - 2 = (16/81)\,[S_0 + 2] - 2$.

S_4 será un número entero
$\Leftrightarrow S_4 + 2$ es (un aún) el número entero
$\Leftrightarrow 81 \mid [S_0 + 2]$
$\Leftrightarrow [S_0 + 2] = 81k$ para algún número entero k
$\Leftrightarrow S_0 = 81k - 2$ para algún número entero k.

S_0 debe ser un número entero positivo, pero hay un número infinito de respuestas posibles:

$$79 \vee 160 \vee 241 \vee 322 \vee \cdots$$

Necesitamos más información para determinar S_0. Si nos hubieran dicho que el primer día los piratas recolectaron entre 200 y 300 cocos, ahora podríamos decir "el número que recogieron el primer día fue exactamente 241".

0.5.3 Interés Compuesto

Supongamos que se le ofrecen dos planes de ahorro para la jubilación. En el plan A, empiezas con \$1,000, y cada año (en el aniversario del plan), te pagan un 11% de interés simple, y agregas \$1,000. En el plan B, empiezas con \$100, y cada mes, te pagan una-duodécima parte del 10% de interés simple (anual), y agregas \$100. £Qué plan será más grande después de 40 años?. £Podemos aplicar una ecuación de recurrencia? Considere el plan A y deje que S_n denote el número de dólares en el plan después de (exactamente) n

años de operación. Entonces $S_0 = \$1,000$ y

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \text{ interés sobre } S_n + \$1000 \\ S_{n+1} &= S_n + 11\% \text{ de } S_n + \$1000 \\ S_{n+1} &= S_n(1+0.11) + \$1000. \end{aligned}$$

En esta RE, $a = 1.11$, $c = 1000$, entonces $\frac{c}{1-a} = \frac{1000}{-0.11}$ y

$$\begin{aligned} S_n &= (1.11)^n \left[1000 - \frac{1000}{-0.11}\right] + \frac{1000}{+0.11} \\ S_n &= (1.11)^n \left[\frac{1110}{+0.11}\right] - \frac{1000}{+0.11} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} S_{40} &= (1.11)^{40}(10090.090909\ldots) - (-9090.909090\ldots) \\ S_{40} &= (65.000867\ldots)(10090.090909\ldots) - (9090.909090\ldots) \\ S_{40} &= 655917.842\ldots - (9090.909090\ldots) \\ S_{40} &\approxeq \$646826. \end{aligned}$$

£Puede ser cierto? Pusiste $\$40,000$ y sacaste mayor que $\$600,000$ en intereses. Ahora considere el plan B y sea T_n denota el número de dólares en el plan después de (exactamente) n meses de funcionamiento. Entonces $T_0 = \$100$ y

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= T_n + \text{ interés sobre } T_n + \$100 \\ T_{n+1} &= T_n + (1/2) \text{ de } 10\% \text{ de } T_n + \$100 \\ T_{n+1} &= T_n\,[1 + 0.1/12]\,\$100 \end{aligned}$$

En esta RE, $a = 12.1/12, c = 100$, entonces $\frac{c}{1-a} = \frac{100}{-0.1/12} = -12000$ y

$$T_n = (12.1/12)^n\,[100 + 12000] - 12000$$

De ahí, después 40×12 meses,

$$\begin{aligned} T_{480} &= (12.1/12)^{480}(12100) \quad - (12000) \\ T_{480} &= (1.008333\ldots)^{480}(12100) \quad - (12000) \\ T_{480} &= (53.700663\ldots)\,(12100) \quad - (12000) \\ T_{480} &= 649778.0234\ldots \quad - (12000) \\ T_{480} &\approxeq \$637778. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el plan A tiene un valor ligeramente mayor después de 40 años.

0.6 Resolución de ecuaciones de recurrencia lineal de segundo orden

Una ecuación de la recurrencia lineal de segundo orden relaciona entradas consecutivas en una secuencia por una ecuación de la forma

$$S_{n+2} = aS_{n+1} + bS_n + c \quad \forall n \text{ en el dominio de } S. \tag{0.8}$$

Pero vamos a asumir que el dominio de S es $\mathbb{N}$. Supongamos también que $ab \neq 0$, de lo contrario, $S_n = c$ para $\forall\, n \in \{2\ldots\}$, y las soluciones para (2) no son muy interesantes.

£Qué es de ellos? El primer orden RE son solo un caso especial de segundo orden REs cuando $b = 0$.

Cuando $c = 0$, se dice que la RE es homogénea (todos los términos se ven igualuna constante veces una entrada de secuencia).

Cuando $c = 0$, se dice que la RE es homogénea (todos los términos se ven igual una constante veces una entrada de secuencia).

El Fibonacci RE es homogénea.

Vamos a restringir también nuestra atención (por el momento) a una ecuación de segundo orden lineal, la recurrencia homogénea

$$S_{n+2} = aS_{n+1} + bS_n \text{ para } \forall n \in \mathbb{N}. \tag{0.9}$$

Tal como hicimos para la ecuación de la recurrencia de Fibonacci, supongamos que hay una secuencia geométrica, $S_n = r^n$, que satisface (3)

Si lo hubiera, entonces $r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$ para $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Cuando $n = 0$, $r^2 = ar + b$.

La "ecuación característica" de (3) es $x^2 - ax - b = 0$, que tiene "raíces" $r = \frac{-(-a)\pm\sqrt{(-a)^2-4(1)(-b)}}{2(1)} = \frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$.

Sea $\Delta = \sqrt{a^2 + 4b}$, $r_1 = \frac{a+\Delta}{2}$, y $r_2 = \frac{a-\Delta}{2}$.

Entonces $r_1 + r_2 = a$, $r_1 x r_2 = -b$, y $r_1 - r_2 = \Delta$.

£estos son derechos? The Greek capital letter delta denotes the difference in the roots. Tanto r_1 como r_2 satisfacen la ecuación $x^2 = ax + b$, y son las únicas soluciones.

Si $S_{n+2} = 10S_{n+1} - 21S_n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$, la ecuación característica es $x^2 - 10x + 21 = 0$ o $(x-7)(x-3) = 0$ donde, $a = 10$, $b = -21$, $a^2 + 4b = 100 - 84 = 16$, $\Delta = 4$, entonces $r_1 = 7$ y $r_2 = 3$.

Si $S_{n+2} = 3S_{n+1} - 2S_n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$, la ecuación característica es $x^2 - 3x + 2 = 0$ o $(x-2)(x-1) = 0$ donde, $a = 3$, $b = -2$, $a^2 + 4b = 9 - 8 = 1$, $\Delta = 1$, entonces $r_1 = 2$ y $r_2 = 1$.

Si $S_{n+2} = 2S_{n+1} - S_n$ para $\forall\, n \in \mathbb{N}$, la ecuación característica es $x^2 - 2x + 1 = 0$ o $(x-1)(x-1) = 0$ donde, $a = 2$, $b = -1$, $a^2 + 4b = 4 - 4 = 0$, $\Delta = 0$, entonces $r_1 = 1$ y $r_2 = 1$. £Pero qué hay de una fórmula que da la solución general?

Teorema 0.2 *La solución general de la RE homogénea (3) es*

$$S_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n, \text{ si } r_1 \neq r_2 \quad si\Delta \neq 0$$
$$S_n = A(r)^n + Bn(r)^n, \text{ si } r_1 = r_2 = r \quad si\ \Delta = 0$$

Prueba Supongamos que T es cualquier solución particular de la RE homogénea. Nos ocupamos de los dos casos por separado.

Caso 1. Si $\Delta \neq 0$, entonces las dos raíces son distintas (pero pueden ser números "complejos").

Encontraremos valores para A y B, luego probaremos que $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$ para $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Mostraremos que $A(r_1)^n + B(r_2)^n$ arranca correctamente para valores especialmente elegidos de A y B, y luego mostrar $A(r_1)^n + B(r_2)^n$ continúa correctamente.

Vamos a resolver las ecuaciones (para A y B) que garantizaría $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$, entonces $n = 0$ y $n = 1$. Si $T_0 = A(r_1)^0 + B(r_2)^0 = A + B$.................................(1)
y $T_1 = A(r_1)^1 + B(r_2)^1 = A(r_1) + B(r_2)$.................................(2)

entonces $(r_1)T_0 = A(r_1) + B(r_1)$......................//multiplicamos (1) por r_1
y $T_1 = A(r_1) + B(r_2)$................// (2) otra vez restamos, obtenemos

$(r_1)T_0 - T_1 = B(r_1 - r_2) = B\Delta$..............//$r_1 - r_2 = \Delta \neq 0$

entonces $B = \frac{(r_1)T_0 - T_1}{\Delta}$

Tenemos, $A = T_0 - B = \frac{\Delta T_0}{\Delta} - \frac{(r_1)T_0 - T_1}{\Delta} = \frac{-(r_2)T_0 + T_1}{\Delta}$
// No importa cómo comience la secuencia T (no importa cuáles sean los valores para T_0 y T_1)
//hay números únicos A y B tales que $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$ para $n = 0$ y 1
// Continuando la prueba por la inducción matemática que $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$ para $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Paso 1. Si $n = 0$ o 1, entonces $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$, por nuestra "opción" A y B.
Paso 2. Asuma que $\exists k \geq 1$ tal que si $0 \leq n \leq k$, entonces $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$.
Paso 3. Si $n = k + 1$, entonces $n \geq 2$ entonces, porque T satisface la RE homogénea (3)

$$T_{k+1} = aT_k + bT_{k-1}$$
$$T_{k+1} = a\left[A(r_1)^k + B(r_2)^k\right] + b\left[A(r_1)^{k-1} + B(r_2)^{k-1}\right] \text{ por el paso 2}$$
$$T_{k+1} = \left[aA(r_1)^k + bA(r_1)^{k-1}\right] + [aB(r_2)^k + bB(r_2)^{k-1}]$$
$$T_{k+1} = A(r_1)^{k-1}[a(r_1) + b] + B(r_2)^{k-1}[a(r_2) + n]$$
$$T_{k+1} = A(r_1)^{k+1} + B(r_2)^{k+1}$$

Así, si $r_1 \neq r_2$, $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$ para $\forall\, n \in \mathbb{N}$. □

Si $S_{n+2} = 10S_{n+1} - 21S_n$ para $\forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces $r_1 = 7$ y $r_2 = 3$. Tenemos, la solución general de la RE es $S_n = A7^n + B3^n$.

Si $S_{n+2} = 3S_{n+1} - 2S_n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $r_1 = 2$ y $r_2 = 1$. Tenemos, la solución general de la RE es $S_n = A2^n + B1^n = A2^n + B$.

Caso 2. Si $\Delta = 0$, entonces las raíces son (ambos) iguales a r donde $r = a/2$. También, $b = -a^2/4 = -r^2$. Si a eran 0, entonces $b = 0$, pero asumimos que no tanto a y b son 0. De ahí, $r \neq 0$. Vamos a resolver las ecuaciones (para A y B) que garantizarían $T_n = A(r)^n + nB(r)^n$ cuando $n = 0$ y $n = 1$. Si

$T_0 = A(r)^0 + 0B(r)^0 = A$................(1)

y $T_1 = A(r)^1 + 1B(r)^1 = Ar + Br$, ...(2)

entonces $A = T_0$ y $B = (T_1 - Ar)/r$

No importa cómo comience la sucesión T (no importa cuáles sean los valores para T_0 y T_1) hay números únicos A y B tales que $T_n = A(r)^n + B(r)^n$ para $n = 0$ y 1

// Continuando la prueba por la inducción matemática que $T_n = A(r)^n + B(r)^n$ para $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Paso 1. Si $n = 0$ o $n = 1$, entonces $T_n = A(r)^n + B(r)^n$, por nuestra “opción” A y B.

Paso 2. Asuma que $\exists k \geq 1$ tal que si $0 \leq n \leq k$, entonces $T_n = A(r)^n + B(r)^n$.

Paso 3. Si $n = k + 1$, entonces $n \geq 2$ entonces, porque T satisface la RE homogénea (3).

$$
\begin{aligned}
T_{k+1} &= aT_k + bT_{k-1}\\
T_{k+1} &= a[A(r)^k + kB(r)^k] + b[A(r)^{k-1} + (k-1)B(r)^{k-1}] // \text{ por el paso 2}\\
T_{k+1} &= [aAr^k + bAr^{k-1}] + [akBr^k + b(k-1)Br^{k-1}]\\
T_{k+1} &= Ar^{k-1}[ar + b] + Br^{k-1}[akr + b(k-1)]\\
T_{k+1} &= Ar^{k-1}[r^2] + Br^{k-1}[k(r^2) + r^2] // r^2 = ar + b\\
T_{k+1} &= Ar^{k+1} + Br^{k-1}[k(r^2) + r^2] // -b = r^2\\
T_{k+1} &= Ar^{k+1} + (k+1)Br^{k+1}
\end{aligned}
$$

Así, si $r_1 = r_2 = r$, $T_n = A(r)^n + nB(r)^n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$.

0.3 Sucesión contractiva Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que **contractiva** si $\exists$ alguna constante c, $0 < c < 1 \ni \forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+2} - x_{n+1}| \le c|x_{n+1} - x_n|$. Pruebe que una sucesión contractiva debe ser una sucesión de Cauchy, y por lo tanto converge.

0.4 Media aritmética recursiva Sea $a \neq b$ números reales arbitrarios, y defina la sucesión $\{x_n\}$ por

$$x_1 = a, x_2 = b, \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2}.$$

Esto es, cada nuevo término está iniciando con el tercero que es el promedio de los dos términos previos.

1. Pruebe que $\{x_n\}$ converge probando que este es una sucesión constructiva.
2. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = b + \frac{1}{2}a$.
3. Use 2 y el álgebra de límites para encontrar que $\lim_{n\to\infty} x_n$. £Está sorprendido por la respuesta? Note que si usted intercambia a y b la respuesta podría ser diferente.

0.5 Media aritmética ponderada recursiva Sean $a \neq b$ dos números reales arbitrarios, sea $0 < t < 1$, y defina la sucesión $\{x_n\}$ por

$$x_1 = a, x_2 = b, \text{ z } \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = t x_n + (1 - t)\, x_{n+1}.$$

Esto es, cada nuevo término que inicia con el tercero que es el promedio ponderado de los términos previos. Geométricamente, x_{n+2} es un punto en el intervalo entre x_n y x_{n+1} que corta el intervalo en dos segmentos cuyas longitudes están en la proporción t a $1 - t$. Pruebe que $\{x_n\}$ es contractiva, y encuentre su límite.

0.6 Aplicación contractiva Sean $a < b$ e $I = [a, b]$. Una función $f \mathcal{W}\ I \to I$ se dice que es una **contracción** si $\exists c \ni 0 < c < 1$ y $\forall x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \le c|x - y|$. Pruebe que una aplicación contractiva debe tener por lo menos un "punto fijo", $x \in I \ni f(x) = x$. También pruebe que f no puede tener más de un punto fijo en I.

0.7 Números de Fibonacci La sucesión de Fibonacci consiste de los números de Fibonacci, $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$, y está definido recursivamente por $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, y $\forall n \ge 2$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Cada nuevo término después del segundo es la suma de los dos términos previos. Muchos resultados interesantes han sido probados acerca de los números de Fibonacci–lo suficiente para llenar un libro entero. Deberemos concentrarnos aquí con la sucesión de proporciones de los sucesivos números de Fibonacci. Empezamos definiendo la sucesión por $r_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$.

1. Desarrolle una tabla que muestre los primeros diez términos de $\{r_n\}$. En la basa de esta tabla, conjeture las respuestas a las siguientes preguntas. £$\{r_n\}$ es convergente? £Es monótona? £Eventualmente monótona? £Puede encontrar una subsucesión estrictamente creciente? £Una subsucesión estrictamente decreciente? (No se requieren demostraciones).
2. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}$.
3. Pruebe que $\forall n \ge 2$, $\frac{3}{2} < r_n < 2$.
4. Pruebe que $\{r_n\}$ es "contractiva", y por lo tanto es una sucesión de Cauchy.
5. Encuentre $\lim_{n\to\infty} r_n$. [Tome nota de este límite; este reaparecerá.]
6. La ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$ tiene dos soluciones, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Muestre que $\alpha + \beta = 1$, $\alpha^2 = a + 1$, y $\beta^2 = \beta + 1$, y desde estos hechos muestre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n$ y $\beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n$..

7. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, defina $u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, donde α y β están definidos en 6. Pruebe que $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, y $\forall\, n \geq 2$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Por lo tanto, $\{u_n\}$ debe ser la sucesión de Fibonacci. Tenemos encontrado una fórmula para los números de Fibonacci: $f_n = u_n$.
8. **Significado geométrico** de α. Considere un rectángulo cuyo ancho α y largo $a + b$ son así proporcionados que cuando un cuadrado de lado a es removido, como se muestra aquí, el rectángulo restante tiene ancho y longitud en la misma proporción. Esto es, $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.
Los matemáticos de la Grecia clásica llamaron esta proporción $R = \frac{a}{b}$ la "**Proporción áurea**" y cualquier rectángulo con lados en la proporción un "**rectángulo áureo**". Ellos consideraron esto como la más estéticamente agradable de todos los rectángulos, y se usó esto frecuentemente en su arte y arquitectura. Pruebe algebraicamente que $R = \alpha$, definida en 6 arriba.
9. Pruebe que $\forall\, n \geq 2$, $\forall\, n \geq 2$, $f_{n+1} f_{n-1} - (f_n)^2 = (-1)^n$.
10. Pruebe que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} - r_n = \frac{(-1)^{n+1}}{f_n f_{n+1}}$.
11. Use 10 para probar que $\{r_{2n}\}$ es estrictamente decreciente y $\{r_{2n+1}\}$ es estrictamente creciente.

0.8 Sea $a \geq 1$. Defina la sucesión $\{x_n\}$ por $x_1 = a$, y $x_{n+1} = a + \frac{1}{x_m}$. Pruebe que $\forall\, n \geq 2$, $a + \frac{1}{2a} \leq x_n \leq 2a$, y use este resultado para probar que x_n es contractiva. Encuentre $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

0.9 Sea $a > 1$. Defina la sucesión $\{x_n\}$ por $x_1 = a$ y $x_n = \frac{1}{a + x_n}$. Pruebe que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2a} \leq x_n \leq a$, y use este resultado para probar que $\{x_n\}$ es contractiva. Encuentre el $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Compare este límite con el ejercicio anterior.

Parte II
Primera parte

0.10 Supongamos que E_n es definido recursivamente en $\mathbb{Z}^+$ por $E_0 = 0$, $E_1 = 2, \ldots,$ $E_{n+1} = 2n\{E_n + E_{n-1}\}$ para $n \geq 1$. Determine el valor de E_{10}.

0.11 Supongamos que la función f es definida recursivamente en $\mathbb{Z}^+$ por

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2^k \text{ para algún } k \in \mathbb{N}, \\ f(n/2) & \text{si } n \text{ es par pero no una potencia de 2,} \\ f(3n+1) & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(3) =& f(10) \quad \text{porque 3 es impar} \\ =& f(5) \quad \text{porque } 10 = 2 \times 5 \\ =& f(16) \quad \text{porque 5 es impar} \\ =& 1 \quad \text{porque } 16 = 2^4. \end{aligned}$$

Referencias bibliográficas

[1] Carlo Mariconda and Alberto Tonolo. *Discrete calculus. Methods for counting*. Vol. 103. UNITEXT - La Matematica per il 3+2. Springer International Publishing, 2016. ISBN: 978-3-319-03037-1. DOI: 10.1007/978-3-319-03038-8.

Soluciones

Problemas del Capítulo ??

?? The solution is revealed here.

?? Problem Heading
(a) The solution of first part is revealed here.
(b) The solution of second part is revealed here.

Índice