Relaciones de recurrencias

Ecuaciones en diferencias y análisis en escalas de tiempo

C. Aznarán Laos

F. Cruz Ordoñez

G. Quiroz Gómez

J. Micha Velasque

D. García Fernández

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

25, 27 de junio del 2019

Índice analítico

Relación de recurrencia

Definición

Una **relación de recurrencia** en las incógnitas x_i, $i \in \mathbb{N}$, es una familia de ecuaciones

$$x_n = f_n\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right), \quad \forall n \geq r, \tag{1}$$

donde $r \in \mathbb{N}$, y $(f_n)_{n \geq r}$ son funciones

$$f_n \colon D_n \to \mathbb{R}, \quad D_n \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \text{o} \quad f_n \colon D_n \to \mathbb{C}, \quad D_n \subseteq \mathbb{C}^n.$$

Dependiendo del caso encontrado, las llamaremos **recurrencias reales** o **recurrencias complejas**. Las incógnitas $x_0, \ldots, x_{r-1}$ son llamadas **libres**. Su número r es el **orden** de la relación.

Definición

Una sucesión $(a_n)_n$ es una **solución** de (1), sii

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in D_n, \quad a_n = f_n\left(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\right) \quad \forall\, n \geq r.$$

Relación de recurrencia

Ejemplo

La sucesión real definida por

$$x_0 = 2, x_1 = 1, x_2 = 2^{1/2}, x_3 = 1, \ldots, x_{2m-1} = 1, x_{2m} = 2^{1/2^m}, \ldots$$

es la solución de la *relación de recurrencia* con coeficientes reales

$$x_n = \sqrt{x_{n-2}}, \quad \forall n \geq 2,$$

y los *valores iniciales* $x_0 = 2$ y $x_1 = 1$.

Ejemplo

Considere la relación de recurrencia de primer orden definida por

$$x_n = \frac{1}{x_{n-1} - 1}, \quad \forall n \geq 1.$$

- La 1–tupla $(2) \in D_0$ de valor inicial no es una solución.
- La 1–tupla $(3) \in D_0$ de valor inicial es una solución.

Relación de recurrencia

Observación

En muchas ocasiones una relación de recurrencia de orden r involucra solo los últimos r términos y es de la forma

$$x_n = g_n\left(x_{n-r}, \ldots, x_{n-1}\right), \quad n \geq r,$$

donde $(g_n)_{n\geq r}$ son las funciones definidas en un subconjunto E_n de $\mathbb{R}^r$ o $\mathbb{C}^r$.

Este último es de hecho una relación de recurrencia: es suficiente establecer

$$f_n\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right) := g_n\left(x_{n-r}, \ldots, x_{n-1}\right)$$

para $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in D_n := \mathbb{R}^{n-r} \times E_n$ (o $\mathbb{C}^{n-r} \times E_n$) a fin de cumplir los requerimientos de la definición (1).

Ecuaciones en diferencias

Aquí es conveniente representar cualquier sucesión de números reales $(a_n)_n$ como la función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(n) = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definición

Una **ecuación en diferencias** es una expresión de la forma:

$$G\left(n, f(n), f\left(n+1\right), \ldots, f\left(n+k\right)\right) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

El **orden** de una ecuación en diferencias se halla mediante la diferencia entre los "términos mayor" y "menor" respectivamente. En (2), su orden es $n + k - n = k$.

Ejemplo

- El orden de $f\left(n+3\right) - f\left(n+1\right) - 5f(n) = n$ es 3.
- El orden de $f\left(n+3\right) - f\left(n+1\right) = n^2 - 3$ es 2.

Ecuaciones en diferencias lineales

Definición

Una **ecuación en diferencias** se le llama **lineal** si puede expresarse de la siguiente forma:

$$a_0(n)f\,(n+k)+a_1(n)f\,(n+k-1)+\cdots+a_{k-1}(n)f\,(n+1)+a_k(n)f\,(n)=b\,(n)\,, \tag{3}$$

donde $a_k(n) \neq 0$.

Cuadro: Clasificación de las ecuaciones en diferencias lineales.

Abreviación	Denominación	Condición
E.D.L.H	Homogéneas	$b(n)=0.$
E.D.L.C	Completas	$b(n)\neq 0.$
E.D.L.C.C.	De coeficientes constantes	$\forall i: a_i(n)=a_i.$
E.D.C.N.C.	De coeficientes no constantes	$\exists i \ni a_i(n)\neq a_i.$

Homogénea de coeficientes constantes

Definición

Sea una **ecuación en diferencias lineal homogénea** de coeficientes constantes y de orden k, buscaremos soluciones del tipo $f(n) = r^n$, haciendo este cambio en (3) y simplificando resulta

$$a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \cdots + a_k = 0 \tag{4}$$

la **ecuación característica**.

Definición

Llamamos **solución** de una ecuación en diferencias a cualquier sucesión $\{f(1), \ldots, f(k)\}$ que satisfaga (2).

Definición

Se le llama **solución general** de una ecuación en diferencias al conjunto de todas las soluciones, que tendrá tantos parámetros como orden tenga la ecuación (2).

Teorema (De la existencia y la unicidad)

Dada la ecuación (3) y dados n números reales k_0, k_1, . . . , k_{n-1} existe una única solución que verifica

$$f(0) = k_0, f(1) = k_1, \ldots, f(n-1) = k_{n-1}.$$

Demostración.

Por favor, ver en Morales, el teorema 5.3.1. □

Teorema

Toda combinación lineal de soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n es también una solución.

Demostración.

Por favor, ver en Mariconda y Tonolo, pág. 357. □

Teorema

Las soluciones de una ecuación en diferencia lineal de orden n forman un espacio vectorial y la dimensión del espacio solución de una ecuación en diferencias lineal de orden k es k.

Demostración.

Por favor, ver en Morales, el corolario 5.3.1. □

Homogénea de coeficientes constantes

Definición (Raíces simples)

Sean $r_1, r_2, \ldots, r_k$ las k raíces de la ecuación característica. Se definen entonces las funciones:

$$f_j(n) = r_j^n, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Entonces, $f_1, \ldots, f_k$ es un sistema fundamental de soluciones, lo cual nos permite resolver la ecuación.

Definición (Raíces múltiples)

Sea r una raíz de multiplicidad m de la ecuación característica. Esta raíz proporciona m soluciones diferentes del tipo:

$$f_j(n) = n^j r^n, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Por tanto, pasarán a formar parte del sistema fundamental de soluciones las funciones $f_0, \ldots, f_{m-1}$; esto es:

$$r^n, nr^n, n^2 r^n, \ldots, n^{m-1} r^n.$$

Homogénea de coeficientes constantes

Ejemplo

Hallar la solución de la ecuación en diferencias

$$f(n+3) - 7f(n+2) + 15f(n+1) - 9f(n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

con las condiciones iniciales $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ y $f(2) = 17$.

Ejemplo

Hallar la solución de la ecuación en diferencias

$$f(n+1) - 2f(n) = 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

con la condición inicial $f(0) = -1$.

Número de Catalan

Triangulación

Una triangulación de un polígono es una partición del mismo en triángulos disjuntos cuyos vértices coinciden con los vértices del polígono.

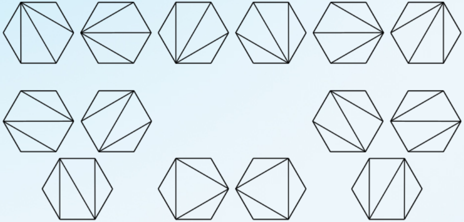


Figura: Diversas maneras de triangular hexágonos.

Caminos en rejillas

Un camino monótono es aquel que empieza en la esquina inferior izquierda y termina en la esquina superior derecha, y consiste únicamente en tramos que apuntan hacia arriba o hacia la derecha,sin que pase de diagonal.

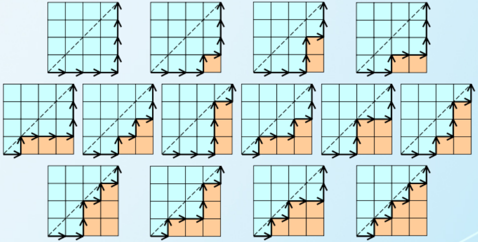


Figura: Los caminos monótonos que no cruzan la diagonal del retículo.

Ecuaciones de recurrencia

Resolver una ecuación de recurrencia significa encontrar una sucesión que satisfaga las ecuaciones de recurrencia.

Encontrar una "solución general" significa encontrar una fórmula que describe todas las soluciones posibles (todas las sucesiones posibles que satisfacen la ecuación).

Veamos el siguiente ejemplo:

Afirmación

Considere que T_n satisface la siguiente ecuación

$$T_n = 2T_{n-1} + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{5}$$

Ejemplos definidos por ecuaciones de recurrencia

Ejemplo (Desajustes)

Imagine una fiesta donde las parejas llegan juntas, pero al final de la noche, cada persona se va con una nueva pareja. Para cada $n \in \mathbb{N}$, digamos que D_n es el número de diferentes formas en que las parejas pueden ser "trastornadas", es decir, reorganizadas en parejas, por lo que ni uno está emparejado con la persona con la que llegaron.

Afirmación (D_n para cualquier valor de n)

Para todo $n \geq 4$ tendremos:

$$D_n = (n-1)\left\{D_{n-2} + D_{n-1}\right\}.$$

Y la sucesión definida en $\mathbb{N}$ es

$$S_n = A \times n!.$$

Ejemplos definidos por ecuaciones de recurrencia

Teorema (Desigualdad para la acotación de D_n)

Para todo $n \geq 2$ tenemos:

$$\left(\frac{1}{3}\right) n! \leq D_n \leq \left(\frac{1}{2}\right) n!.$$

La mejor fórmula para D_n que sabemos utiliza la función de "entero más cercano".

Definición

Para cualquier número real x, se define **el entero más cercano a** x, $\lceil x \rfloor$:
Si x es escrito como $n+f$ donde n es el entero $\lfloor x \rfloor$, y f es una fracción donde $0 \leq f < 1$:

- Si $0 \leq f < \frac{1}{2}$, entonces $\lceil x \rfloor = n$.
- Si $\frac{1}{2} \leq f < 1$, entonces $\lceil x \rfloor = n+1$.

Observación

Entonces $D_n = \lceil (n!)/e \rfloor$ cuando $e = 2{,}71828182844\ldots$ es la base del logaritmo natural.
$(n!)/e$ nunca es igual a $\lceil (n!)/e \rfloor + \frac{1}{2}$.

Función de Ackermann

A finales de 1920's, el lógico y matemático alemán, discípulo de David Hilbert, Wilhelm Ackermann (1896–1962), dio un ejemplo de una función computable total que no es recursiva primitiva.

Definición (Ackermann)

Sea $A\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ una función. Se define recursivamente usando tres reglas:

1. $A(1,n)=2,\ \forall n\geq 1.$
2. $A(m,1)=2m,\ \forall m\geq 2.$
3. Cuando $m>1$ y $n>1$ se tiene: $A\left(m,n\right)=A\left(A(m-1,n),n-1\right).$

Observación

Entonces $A\left(2,n\right)=4,\quad \forall n\geq 1$. Además $A\left(m,2\right)=2^m,\quad \forall m\geq 1$. Seguidamente se puede continuar a calcular $A\left(m,3\right)=2\uparrow m$ con la función torre definida por $2\uparrow[k+1]=2^{2\uparrow k}$ con valor inicial $2\uparrow 1=2$, por el P.I.M.

```python
def ack(n, m):
  if n = 0:
    return m + 1
  elif m = 0:
    return ack(n - 1, 1)
  else
    return ack(n - 1, ack(n, m - 1))
```

Programa 1: Programa `ackermann.py`

Ecuación de recurrencia de primer orden

Definición

Una **ecuación de recurrencia lineal de primer orden** relaciona entradas consecutivas en una sucesión mediante una ecuación de la forma

$$S_{n+1} = aS_n + c, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

donde $a \neq 0$ y la condicional inicial es S_0.

Afirmación

La solución general de (6) se divide en dos casos:

Primer caso Si $a = 1$, entonces

$$S_n = S_0 + nc, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

.

Segundo caso Si $a \neq 1$, entonces

$$S_n = a^n \left[S_0 - \frac{c}{1-a} \right] + \frac{c}{1-a}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Torre de Hanói

Considere la ecuación de recurrencia (6)

$$S_n = 2S_{n-1} + 1, \quad \forall n \geq 2,$$

donde:

- n denota el número de discos y
- S_n es el mínimo número de movimientos necesario para transportar los n discos desde una aguja a otra.

Figura: El objetivo es trasladar los discos de una aguja a otra bajo ciertas condiciones.

Ecuación de recurrencia lineal de segundo orden

Definición

Una **ecuación de recurrencia lineal de segundo orden** relaciona entradas consecutivas en una secuencia mediante una ecuación de la forma

$$S_{n+2} = aS_{n+1} + bS_n + c, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

donde $ab \neq 0$. Cuando $c = 0$, la ecuación de recurrencia se dice que es **homogénea**.

Definición

La **ecuación característica** de (7) homogénea es $x^2 - ax - b = 0$ que tiene raíces

$$r_1 = \frac{a+\Delta}{2} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{a-\Delta}{2} \quad \text{donde } \Delta = \sqrt{a^2+4b}.$$

Teorema

La solución general de (7) *homogénea es*

$$\begin{aligned} S_n &= A(r_1)^n + B(r_2)^n & \text{si } r_1 \neq r_2 \quad & (\Delta \neq 0)\,, \\ S_n &= A(r)^n + Bn(r)^n & \text{si } r_1 = r_2 = r \quad & (\Delta = 0)\,. \end{aligned}$$

Un modelo de la cunicultura

Considere la ecuación de recurrencia

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 2,$$

llamada **ecuación de Fibonacci**.

Fibonacci partía de ciertas hipótesis, a saber:

- Los conejos viven eternamente.
- Cada mes, un par de adultos de distinto sexo da lugar a un nuevo par de conejos de distinto sexo.
- Cada conejo se hace adulto a los dos meses de vida, momento en el que comienza a tener descendencia.

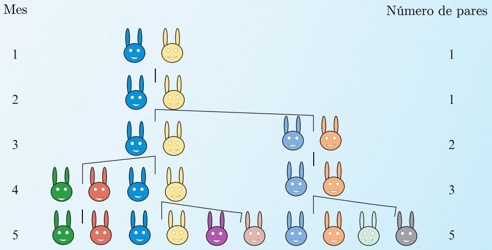


Figura: La cantidad de conejos en función de los meses transcurridos.

Aproximación lineal de una función

Del diagrama, tenemos

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \approx f'(x) \quad \text{para } h \text{ pequeño.}$$

Reordenando la ecuación resulta

$$f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)\,.$$

Esto se muestra en el diagrama. La recta ℓ es tangente a $y = f(x)$ en el punto de coordenadas $(x, f(x))$.

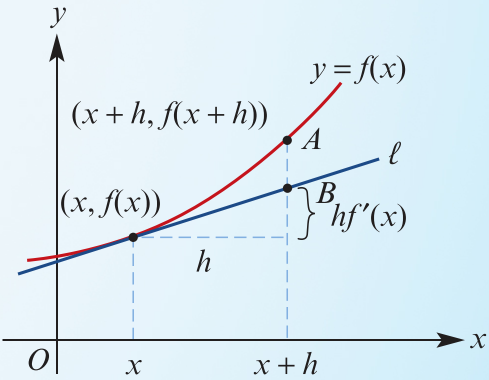


Figura: La recta ℓ es una aproximación lineal en B de $y = f(x)$.

Observación

Esto nos da una aproximación a la curva $y = f(x)$ en que la coordenada y de B es una aproximación a la coordenada y de A en la gráfica de $y = f(x)$.

Problema de valor inicial

Considere el problema de valor inicial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g\left(x\right) \quad \text{con} \quad y\left(x_0\right) = 0.$$

Entonces, $x_1 = x_0 + h$ e $y_1 = y_0 + hg\left(x_0\right)$.

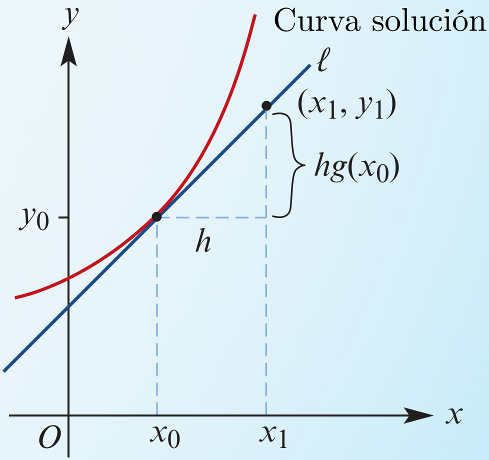


Figura: La diferencia en las ordenadas es $y_1 - y_0 = hg\left(x_0\right)$.

Método de Euler

El proceso es ahora aplicado repetidamente para aproximar el valor de la función en $x_2, x_3, \ldots$.

El resultado es:

$$x_2 = x_1 + h \quad \text{e} \quad y_2 = y_1 + hg(x_1),$$
$$x_3 = x_2 + h \quad \text{e} \quad y_3 = y_2 + hg(x_2),$$

y así sucesivamente.

El punto (x_n, y_n) es encontrado en el n–ésimo paso del proceso iterativo.

Este proceso iterativo se puede resumir de la siguiente manera.

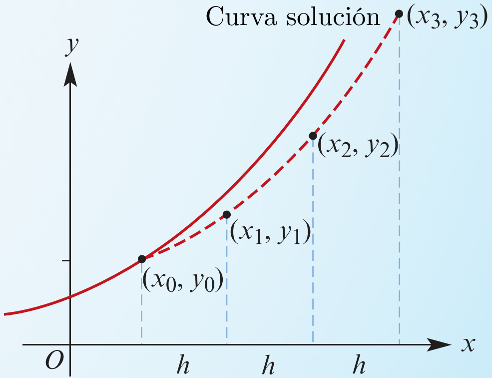


Figura: Los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) se aproximan a la curva solución.

Método de Euler

Teorema (Método de Euler)

Si $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)$ *con* $x_0 = a$ *e* $y_0 = b$, *entonces*

$$x_{n+1} = x_n + h \quad \text{e} \quad y_{n+1} = hg(x_n)\,.$$

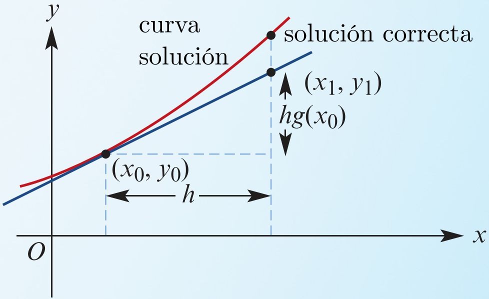


Figura: Solución correcta y curva aproximada.

Método de Euler

Ejemplo

Considere el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x, \quad y(3) = 0.$$

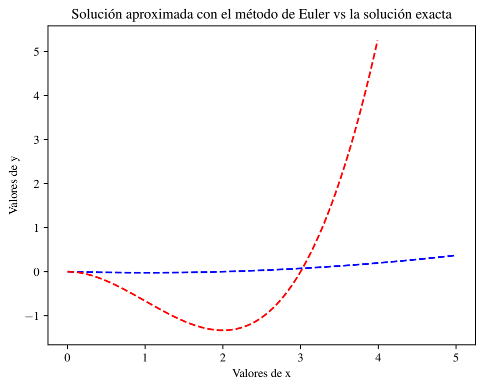


Figura: Solución exacta vs solución de Euler

```
import numpy as np

def euler(f, x0, t):
  X = np.zeros((len(t), len(x0)), float)
  dxdt = np.zeros(len(x0), float)

  X[0, :] = x = np.array(x0)
  tlast = t[0]

  for n, tcur in enumerate(t[1:], 1):
    f(x, tlast, dxdt)
    X[n, :] = x = x + dxdt*(tcur - tlast)
    tlast = tcur
  return X

def func(x, t, dxdt):
  dxdt[0] = x[1]
  dxdt[1] = - x[0]
```

Programa 2: Programa euler.py

Escalas de tiempo

Definición

Una escala de tiempo es un conjunto arbitrario cerrado no vacío $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ bajo la topología estándar de $\mathbb{R}$.

Ejemplo

- $[1,2]$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$ son escalas de tiempo.
- $[a,b)$, $(a,b]$ y (a,b) no son escalas de tiempo si $a < b$.
- El conjunto
$$\{1,2,3\} \cup [4,5] \cup \{11,12,13\}$$
es una escala de tiempo.

Ejercicio

Pruebe que los siguientes conjuntos son escalas de tiempo.

1. $h\mathbb{Z} := \{hk : k \in \mathbb{Z}, h \in \mathbb{R}\}$.
2. $\mathbb{P}_{a,b} := \bigcup_{k=0}^{\infty} [k(a+b), k(a+b)+a]$, $a > 0$.
3. $\overline{q^{\mathbb{Z}}} := \{q^k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$, $q > 1$.
4. $\mathbb{N}_0^n := \{k^n : k \in \mathbb{N}_0\}$, $n \in \mathbb{N}$.
5. $\{H_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, donde H_n son los llamados *números armónicos* definidos por $H_0 = 0$ y $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
6. $\mathcal{C} := \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$, donde $K_0 = [0,1]$. $\mathcal{C}$ es el *conjunto de Cantor*.

Definición

Para $t \in \mathbb{T}$, definimos el **operador salto posterior** $\sigma \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ por

$$\sigma(t) := \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}.$$

Note que $\sigma(t) \geq t$ para cualquier $t \in \mathbb{T}$.

Definición

Para $t \in \mathbb{T}$, definimos el **operador salto anterior** $\rho \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ por

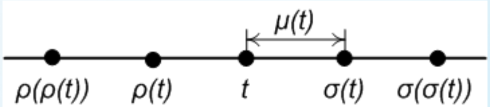
$$\rho(t) := \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

Note que $\rho(t) \leq t$ para todo $t \in \mathbb{T}$.

Definición

La función **granicidad** $\mu \colon \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ es definido por

$$\mu(t) = \sigma(t) - t, \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$



Definición

Para $t \in \mathbb{T}$, definimos lo siguiente:

1. Si $\sigma(t) > t$, entonces t es llamado **disperso a la derecha**.
2. Si $t < \sup \mathbb{T}$ y $\sigma(t) = t$, entonces t es llamado **denso a la derecha**.
3. Si $\rho(t) < t$, entonces t es llamado **disperso a la izquierda**.
4. Si $t > \inf \mathbb{T}$ y $\rho(t) = t$, entonces t es llamado **denso a la izquierda**.
5. Si t es *disperso a la izquierda* y *disperso a la derecha* al mismo tiempo, entonces t es llamado **aislado**.

Ejemplo

Encuentre σ y ρ para $\mathbb{T} = \{H_n : n \in \mathbb{N}_0\}$.
Solución:

$$\sigma(H_n) = H_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \qquad \rho(H_n) = H_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \rho(H_0) = H_0.$$

Ejercicio

Encuentre σ y ρ para

1. $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, $h > 0$.
2. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$.
3. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.
4. $\mathbb{T} = \mathbb{N}^k$, $k \in \mathbb{N}$.
5. $\mathbb{T} = q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$, $q > 1$.
6. $\mathbb{T} = p^{\mathbb{N}_0} \cup \{0\}$, $p \in (0, 1)$.

Ejemplo

Sea $\mathbb{T} = \left\{2^{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Asuma que $t = 2^{n+1} \in \mathbb{T}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\sigma(t) = \text{ínf}\left\{2^{l+1} : 2^{l+1} > 2^{n+1}, l \in \mathbb{N}\right\} = 2^{n+2} = 2t.$$

Así,

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = 2t - t = t, \text{ es decir, } \mu\left(2^{n+1}\right) = 2^{n+1}.$$

Ejemplo

Sea t denso por la derecha y disperso por la izquierda con $\sigma(t) = t - 1$. Simplifique

$$A = \frac{\sigma(t) + t + (\rho(t))^2 - 2\sigma(t)\rho(t)}{\sigma(t) + \rho(t) + 2}, \quad t \in \mathbb{T}, \quad \sigma(t) + \rho(t) + 2 \neq 0.$$

Solución:

Tenemos $\sigma(t) = t$, $\rho(t) = t - 1$ y $\sigma(t) + \rho(t) + 2 = t + t - 1 + 2 = 2t + 1$. Así, obtenemos

$$A = \frac{t + t + (t-1)^2 - 2t(t-1)}{2t - 1} = \frac{2t + t^2 - 2t + 1 - 2t^2 + 2t}{2t - 1} = \frac{-t^2 + 2t + 1}{2t + 1}, \quad t \neq -\frac{1}{2}.$$

Ejemplo

Suponga que $\mathbb{T}$ tiene una cantidad finita de puntos $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_k.$$

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, tenemos

$$\sigma(t) = \text{ínf}\,\{t_l \in \mathbb{T} : t_l > t_i, l \in \{1, \ldots, k\}\} = t_{i+1}.$$

Así,

$$\mu(t_i) = t_{i+1} - t_i, \quad i\,\{1, 2, \ldots, k-1\}.$$

También,

$$\sigma(t_k) = \text{ínf}\,\{t_l \in \mathbb{T} : t_l > t_k, l \in \{1, \ldots, k\}\} = \text{ínf}\,\emptyset = \sup \mathbb{T} = t_k.$$

Por lo tanto,

$$\mu(t_k) = \sigma(t_k) - t_k = t_k - t_k = 0.$$

De aquí,

$$\sum_{i=1}^{k} \mu(t_i) = \sum_{i=1}^{k-1} \mu(t_i + \mu(t_l)) = \sum_{i=1}^{k-l} (t_{i+1} - t_i) = t_k - t_1.$$

Definición

Para $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, definimos el **operador de cambio anterior** $f^\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ por

$$f^\sigma(t) := f(\sigma(t)) \quad \text{para cualquier} \quad t \in \mathbb{T}, \text{ es decir, } f^\sigma = f \circ \sigma.$$

Ejemplo

Sea $\mathbb{T} = \{t = 2^{n+2} : n \in \mathbb{N}\}$, $f(t) = t^2 + t - 1$. Entonces,

$$\sigma(t) = \text{ínf}\left\{2^{l+2} : 2^{l+2} > 2^{n+2}, l \in \mathbb{N}\right\} = 2^{n+3} = 2t.$$

Así, $f^\sigma(t) = f(\sigma(t)) = (\sigma(t))^2 + \sigma(t) - 1 = (2t)^2 + 2t - 1 = 4t^2 + 2t - 1$, $t \in \mathbb{T}$.

Definición

Asumamos que $a \leq b$. Definimos el intervalo $[a, b]$ en $\mathbb{T}$ por

$$[a, b] = [a, b]_{\mathbb{T}} := \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}.$$

Observación

Los intervalos abiertos, los intervalos semiabiertos y así sucesivamente se definen de manera natural.

Definición

Definimos los conjuntos

$$\mathbb{T}^{\kappa} := \begin{cases} \mathbb{T} \setminus \left(\rho\left(\sup \mathbb{T}\right), \sup \mathbb{T}\right], & \text{si } \sup \mathbb{T} < \infty, \\ \mathbb{T}, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Ejemplo

Sea $\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$. Entonces $\sup \mathbb{T} = 1$ y

$$\rho\left(1\right) = \sup\left\{s \in \mathbb{T} : s < 1\right\} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T} \setminus \left(\frac{1}{2}, 1\right] = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right\} \cup \{0\}.$$

Ejemplo

Sea $\mathbb{T} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces, el $\sup \mathbb{T} = \infty$ y $\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T}$.

Teorema (Principio de inducción)

Sea $t_0 \in \mathbb{T}$ *y asuma que* $\{S(t) : t \in [t_0, \infty)\}$ *es una familia de proposiciones que satisfacen*

1. $S(t_0)$ *es verdadero.*
2. *Si* $t \in [t_0, \infty)$ *es disperso a la derecha y* $S(t)$ *es verdadero, entonces* $S(\sigma(t))$ *es verdadero.*
3. *Si* $t \in [t_0, \infty)$ *es denso a la derecha y* $S(t)$ *es verdadero, entonces existe una vecindad de* U *de* t *tal que* $S(s)$ *es verdadero para todo* $s \in U \cap (t, \infty)$.
4. *Si* $t \in (t_0, \infty)$ *es denso por la izquierda y* $S(s)$ *es verdadero para* $s \in [t_0, t)$, *entonces* $S(t)$ *es verdadero.*

Entonces $S(t)$ *es verdadero para cualquier* $t \in [t_0, \infty)$.

Teorema (Versión dual del principio de inducción)

Sea $t_0 \in \mathbb{T}$ *y asuma que* $\{S(t) : t \in (-\infty, t_0]\}$ *es una familia de proposiciones que satisfacen*

1. $S(t_0)$ *es verdadero.*
2. *Si* $t \in (-\infty, t_0]$ *es disperso a la izquierda y* $S(t)$ *es verdadero, entonces* $S(\rho(t))$ *es verdadero.*
3. *Si* $t \in (-\infty, t_0]$ *es denso a la izquierda y* $S(t)$ *es verdadero, entonces existe una vecindad de* U *de* t *tal que* $S(s)$ *es verdadero para todo* $s \in U \cap (-\infty, t)$.
4. *Si* $t \in (-\infty, t_0)$ *es denso por la derecha y* $S(s)$ *es verdadero para* $s \in [t, t_0)$, *entonces* $S(t)$ *es verdadero.*

Entonces $S(t)$ *es verdadero para cualquier* $t \in (-\infty, t_0]$.

Delta derivada

Definición

Asuma que $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es una función y sea $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Definimos $f^\Delta(t)$ como el número, siempre que exista, con la propiedad que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una vecindad U de t, $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ para algún $\delta > 0$, tal que

$$\left| f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s) \right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U.$$

Llamamos $f^\Delta(t)$ la **delta** o **Hilger** derivada de f en t. Diremos que f es **delta** o **Hilger** diferenciable, brevemente **diferenciable**, en $\mathbb{T}^\kappa$ si $f^\Delta(t)$ existe para todo $t \in \mathbb{T}^\kappa$. La función $f^\Delta\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ se dice que es la **delta derivada** o **Hilger derivada**, brevemente **derivada**, de f en $\mathbb{T}^\kappa$.

Observación

Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, entonces la delta derivada coincide con la derivada clásica.

Teorema

La delta derivada está bien definida.

Demostración.

Sea $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Suponga que $f_1^{\Delta}(t)$ y $f_2^{\Delta}(t)$ son tales que

$$\left| f(\sigma(t)) - f(s) - f_1^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\sigma(t) - s|$$

y

$$\left| f(\sigma(t)) - f(s) - f_2^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\sigma(t) - s|$$

para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier s en la vecindad U de t, $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ para algún $\delta > 0$. Así, si $s \neq \sigma(t)$, entonces

$$\begin{aligned}
\left| f_1^{\Delta}(t) - f_2^{\Delta}(t) \right| &= \left| f_1^{\Delta}(t) - \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} + \frac{f(\sigma(t) - f(s))}{\sigma(t) - s} - f_2^{\Delta}(t) \right| \\
&\leq \left| f_1^{\Delta}(t) - \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} \right| + \left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - f_2^{\Delta}(t) \right| \\
&= \frac{\left| f(\sigma(t)) - f(s) - f_1^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right|}{|\sigma(t) - s|} + \frac{\left| f(\sigma(t)) - f(s) - f_2^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right|}{|\sigma(t) - s|} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dado que $\varepsilon > 0$ fue escogido arbitrariamente, podemos concluir que $f_1^{\Delta}(t) = f_2^{\Delta}(t)$. $\square$

Observación

Podemos asumir que $\sup \mathbb{T} < \infty$ y $f^{\Delta}(t)$ está definida en un punto $t \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^{\kappa}$ con la misma definición dada en 54. Entonces, el único punto $t \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^{\kappa}$ es el $\sup \mathbb{T}$. Así, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una vecindad $U = (t - \delta, t + \delta) \cap (\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^{\kappa})$, para algún $\delta > 0$, tal que

$$f(\sigma(t)) = f(s) = f(\sigma(\sup \mathbb{T})) = f(\sup \mathbb{T}), \quad s \in U.$$

Por lo tanto, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ y $s \in U$, tenemos

$$\begin{aligned} |f(\sigma(t)) - f(s) - \alpha(\sigma(t) - s)| &= |f(\sup \mathbb{T}) - f(\sup \mathbb{T}) - \alpha(\sup \mathbb{T} - \sup \mathbb{T})| \\ &\leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \end{aligned}$$

es decir, cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ es la delta derivada de f en el punto $t \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^{\kappa}$.

Ejemplo (Delta derivada de una constante es cero)

Sea $f(t) = \alpha \in \mathbb{R}$. Probaremos que $f^{\Delta}(t) = 0$ para cualquier $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. En efecto, para $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ y para cualquier $\varepsilon > 0$, $s \in (t - 1, t + 1) \cap \mathbb{T}$ implica

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 0(\sigma(t) - s)| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|.$$

Teorema

Asuma que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es una función y sea $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Entonces tenemos los siguientes.

1. *Si f es diferenciable en t, entonces f es continua en t.*
2. *Si f es continua en t y t es dispersa a la derecha, entonces f es diferenciable en t con*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

3. *Si t es densa a la derecha, entonces f es diferenciable en t sii el límite*

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

existe como un número finito. En este caso,

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

4. *Si f es diferenciable en t, entonces la "simple fórmula"*

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t)$$

se mantiene.

Ejemplo

Sea $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ y f diferenciable en t. Note que todos los puntos de t son dispersos a la derecha y $\sigma(t) = t + 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} \\ &= \frac{f(t+1) - f(t)}{t+1-t} \\ &= f(t+1) - f(t) \\ &= \Delta f(t), \end{aligned}$$

donde Δ es el operador diferencia posterior usual.

Teorema

Asuma que $f, g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ son diferenciables en $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Entonces, tenemos los siguientes.

1. *La suma $f+g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en t con*
$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$
2. *Para cualquier constante α, $\alpha f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en t con*
$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$
3. *El producto $fg\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en t, y la "regla del producto"*
$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}g(t) + f(\sigma(t))\, g^{\Delta}(t) = f(t)\, g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)\, g(\sigma(t)).$$
4. *Si $g(t)\, g(\sigma(t)) \neq 0$, entonces el cociente $\frac{f}{g}\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en t, y la "regla del cociente"*
$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)\, g(t) - f(t)\, g^{\Delta} t}{g(t)\, g(\sigma(t))}$$

se mantiene.

Teorema (Fórmula de Leibniz)

Sea $S_k^{(n)}$ *el conjunto de todas las posible cadena de caracteres de longitud* n*, que contiene exactamente* k*–veces* σ *y* $n-k$*–veces* Δ*. Si* f^{Λ} *existe para cualquier* $\Lambda \in S_k^{(n)}$*, entonces*

$$(fg)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} \right) g^{\Delta^k}.$$

Demostración.

La prueba es por inducción sobre n. $\square$

Sea $\mathbb{T}$ una escala de tiempo y $a,b \in \mathbb{T}$, $a < b$. Sea $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ una función.

Teorema

Si f es delta diferenciable en t, entonces existe una función g definida en una vecindad U de t con

$$\lim_{s \to t} g(s) = g(t) = 0,$$

tal que

$$f(\sigma(t)) = f(s) + \left(f^{\Delta}(t) + g(s)\right)(\sigma(t) - s)$$

para todo $s \in U$.

Teorema

Suponga que f tiene una delta derivada en cada punto de $[a,b]$. Si $f(a) = f(b)$, entonces existen puntos $\xi_1, \xi_2 \in [a,b]$ tal que $f^{\Delta}(\xi_2) \leq 0 \leq f^{\Delta}(\xi_1)$.

Teorema (Teorema del valor medio)

Suponga que f es continua en $[a,b]$ y tiene una delta derivada en cada punto de $[a,b)$. Entonces, existen $\xi_1, \xi_2 \in [a,b)$ tal que

$$f^{\Delta}(\xi_1)(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq f^{\Delta}(\xi_2)(b-a).$$

Teorema (Regla de la cadena)

Asuma que $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua,* $g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *es delta diferenciable en* $\mathbb{T}^{\kappa}$*, y* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continuamente diferenciable. Entonces, existe un* $c \in [t, \sigma(t)]$ *con*

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = f'(g(c))\, g^{\Delta}(t).$$

Teorema (Regla de la cadena)

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continuamente diferenciable y suponga que* $g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *es delta diferenciable. Entonces,* $f \circ g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *es delta diferenciable y la fórmula*

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = \left\{ \int_0^1 f'\left(g(t) + h\mu(t)\, g^{\Delta}(t)\right) \mathrm{d}h \right\} g^{\Delta}(t)$$

se mantiene.

Teorema (Regla de la cadena)

Asuma que $\nu\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *es estrictamente creciente y* $\tilde{\mathbb{T}} = \nu(\mathbb{T})$ *es una escala de tiempo. Sea* $w\colon \tilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$*. Si* $\nu^{\Delta}(t)$ *y* $w^{\tilde{\Delta}}(\nu(t))$ *existe para* $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$*, entonces*

$$(w \circ \nu)^{\Delta} = \left(w^{\tilde{\Delta}} \circ \nu\right) \nu^{\Delta}.$$

Teorema (Derivada de la inversa)

Asuma que $\nu\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *es estrictamente creciente y* $\tilde{\mathbb{T}} = \nu(\mathbb{T})$ *es una escala de tiempo. Entonces*

$$\left(\left(\nu^{-1}\right)^{\tilde{\Delta}} \circ \nu\right)(t) = \frac{1}{\nu^{\Delta}(t)}$$

para cualquier $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ *tal que* $\nu^{\Delta}(t) \neq 0$.

Definición

Definimos la granicidad anterior como $\nu(t) := t - \rho(t)$. Si $\mathbb{T}$ tiene un mínimo m disperso a la derecha, entonces ponemos $\mathbb{T}_{\kappa} = \mathbb{T} \setminus \{m\}$. Caso contrario, $\mathbb{T}_{\kappa} = \mathbb{T}$.

Definición (Nabla derivada)

Una función $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ se dice que es **nabla diferenciable** en $t \in \mathbb{T}_{\kappa}$ si

1. f es definida en una vecindad U de t,
2. f es definida en $\rho(t)$,
3. existe un único número real $f^{\nabla}(t)$, llamado la **nabla derivada** de f en t, tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe una vecindad N de t con $N(t) \subseteq U$ y

$$\left|f(\rho(t)) - f(s) - (\rho(t) - s) f^{\nabla}(t)\right| \leq \varepsilon \left|\rho(t) - s\right| \quad \forall s \in N.$$

Teorema

Las funciones $f,g\colon \mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *son funciones y sea* $t\in\mathbb{T}_\kappa$. *Entonces, tenemos los siguientes.*

1. *La nabla derivada está bien definida.*
2. *Si* f *es nabla diferenciable en* t, *entonces* f *es continua en* t.
3. *Si* f *es continua en* t *y* t *es dispersa a la izquierda, entonces* f *es nabla diferenciable en* t *con*

$$f^{\nabla}(t)=\frac{f(t)-f(\rho(t))}{\nu(t)}.$$

4. *Si* t *es densa a la izquierda, entonces* f *es nabla diferenciable en* t *sii el límite*

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

   existe como un número finito. En este caso, $f^{\nabla}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$.

5. *Si* f *es diferenciable en* t, *entonces*

$$f(\rho(t))=f(t)+\nu(t)f^{\nabla}(t).$$

Teorema

1. *Si f y g son nabla diferenciables en t, entonces*
   1) *la suma $f+g\colon \mathbb{T}\to\mathbb{R}$ es nabla diferenciable en t con*
   $$(f+g)^{\nabla}(t)=f^{\nabla}(t)+g^{\nabla}(t).$$
   2) *Para cualquier constante α, $\alpha f\colon \mathbb{T}\to\mathbb{R}$ es nabla diferenciable en t con*
   $$(\alpha f)^{\nabla}(t)=\alpha f^{\nabla}(t).$$
   3) *El producto $fg\colon \mathbb{T}\to\mathbb{R}$ es nabla diferenciable en t con*
   $$(fg)^{\nabla}(t)=f^{\nabla}(t)\,g(g)+f(\rho(t))\,g^{\nabla}(t)=f(t)\,g^{\nabla}(t)+f^{\nabla}g(\rho(t)).$$
   4) *Si $g(t)\,g(\rho(t))\neq 0$, entonces $\frac{f}{g}\colon \mathbb{T}\to\mathbb{R}$ es nabla diferenciable en t con*
   $$\left(\frac{f}{g}\right)^{\nabla}(t)=\frac{f^{\nabla}(t)\,g(t)-f(t)\,g^{\nabla}(t)}{g(t)\,g(\rho(t))}.$$

Definición

Sea $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ y sea $t \in (\mathbb{T}_\kappa)_\kappa = \mathbb{T}_{\kappa^2}$. Definimos la segunda nabla derivada de f en t, siempre que exista, por

$$f^{\nabla\nabla} := \left(f^{\nabla}\right)^{\nabla} : \mathbb{T}_{\kappa^2} \to \mathbb{R}.$$

Definición (Completamente delta diferenciable)

Una función $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es llamada **completamente delta diferenciable** en el punto $t^0 \in \mathbb{T}^\kappa$ si existen las constantes A_1 y A_2 tales que

$$f\left(t^0\right) - f\left(t\right) = A_1\left(t^0 - t\right) + \alpha\left(t^0 - t\right) \quad \forall t \in U_\delta\left(t^0\right)$$

y

$$f\left(\sigma\left(t^0\right)\right) - f\left(t\right) = A_2\left(\sigma\left(t^0\right) - t\right) + \beta\left(\sigma\left(t^0\right) - t\right) \quad \forall t \in U_\delta\left(t^0\right),$$

donde $U_\delta\left(t^0\right)$ es una δ–vecindad de t^0. Además, $\alpha = \alpha\left(t^0, t\right)$ y $\beta = \beta\left(t^0, t\right)$ son iguales a cero para $t = t^0$ tales que

$$\lim_{t \to t^0} \alpha\left(t^0, t\right) = \lim_{t \to t^0} \beta\left(t^0, t\right) = 0.$$

Definición

Una función $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es llamada **regulada** siempre que existan sus límites por la derecha (finito) en todos los puntos densos por la derecha en $\mathbb{T}$ y que existan sus límites por la izquierda izquierda (finito) en todos los puntos densos por la izquierda en $\mathbb{T}$.

Ejemplo

Sea $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ y

$$f(t) = \frac{t^2}{t-1}, \quad g(t) = \frac{t}{t+1}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Note que todos los puntos son dispersos a la derecha. Los puntos $t \in \mathbb{T}$, $t \neq 1$, son dispersos a la izquierda. También, $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t)$ no es finito y $\lim\limits_{t\to 1^-} g(t)$ existe y este es finito. Por lo tanto, la función f no es regulada y la función g es regulada.

Ejemplo

Sea $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ y

$$\begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{para } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{para } t = 0. \end{cases}$$

Tenemos que todos los puntos de $\mathbb{T}$ son densos y los $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t)$, $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$ no son finitos. Por lo tanto, la función f no es regulada.

Definición

Una función continua $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ se llama **prediferenciable** con (región de diferenciación) D, siempre que

1. $D \subset \mathbb{T}^{\kappa}$,
2. $\mathbb{T}^{\kappa} \setminus D$ es numerable y no contiene ningún elemento disperso a la derecha de $\mathbb{T}$.
3. f es diferenciable en cada $t \in D$.

Ejemplo

Sea $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ y

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t-3}, & \text{si } \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ 0, & \text{si } t = 3. \end{cases}$$

Dado que $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ no es continua en $t = 3$, la función f no es prediferenciable.

Definición

Una función $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es llamada **rd-continua** siempre que es continua en puntos densos por la derecha en $\mathbb{T}$ y sus límites por la izquierda existan (finito) en puntos densos por la izquierda en $\mathbb{T}$.

Observación

El conjunto de funciones rd-continuas $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es denotado por C_{rd} o $C_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T})$ o $C_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. El conjunto de funciones $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ que son diferenciables y cuyas derivadas son rd-continuas es denotado por $C^1_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T})$.

Teorema

Asuma que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$.

1. *Si f es continua, entonces f es rd–continua.*
2. *Si f es rd–continua, entonces f es regulada.*
3. *El operador de salto σ es rd–continua.*
4. *Si f es regulada o rd–continua, entonces f^σ también lo es.*
5. *Asuma que f es continua. Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es regulada o rd–continua, entonces $f \circ g$ tiene la propiedad.*

Teorema

Cualquier función regulada en un intervalo compacto es acotado.

Teorema (Teorema del valor medio)

Si $f, g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *son prediferenciables en* D*, entonces*

$$\left|f^{\Delta}(t)\right| \leq \left|g^{\Delta}(t)\right|$$

implica

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r) \quad \forall r, s \in \mathbb{T}, \quad r \leq s.$$

Teorema

Sea $t_0 \in \mathbb{T}^{\kappa}$, $x_0 \in \mathbb{R}$*. Asuma que* $f\colon \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ *es regulada. Entonces, existe exactamente una función prediferenciable* f *en* D *que satisface*

$$F^{\Delta}(t) = f(t) \quad \forall t \in D, \quad F(t_0) = x_0.$$

Definición

Asuma que $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es una función regulada. Cualquier función F del teorema 86 es llamado una **preantiderivada** de f. Definimos la **integral indefinida** de una función regulada por

$$\int f(t)\,\Delta t = F(t) + C,$$

donde c es una constante arbitraria y F es una preantiderivada de f. Definimos la **integral de Cauchy** por

$$\int_s^t f(\tau)\,\Delta\tau = F(t) - F(s) \quad \forall s,t \in \mathbb{T}.$$

Afirmación

Si $\mathbb{T}$ consiste únicamente de puntos aislados, entonces

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

y

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)\cap\mathbb{T}} \mu(t) f(t), & \text{si } a < b. \\ 0, & \text{si } a = b. \\ -\sum_{t\in[b,a)\cap\mathbb{T}} \mu(t) f(t), & \text{si } a > b. \end{cases}$$

Cuadro: Comparación entre el caso continuo y discreto.

Propiedad	Continuo $\mathbb{T}=\mathbb{R}$	Discreto $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$
Regla de la suma	$(f+g)'=f'+g'$	$\Delta(f+g)=\Delta f+\Delta g.$
Regla del producto	$(fg)'=f'g+g'f$	$\Delta(f+g)=g\Delta f+f^{\sigma}\Delta g.$
Regla del cociente	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{gf'-fg'}{g^2}$	$\Delta\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\Delta f-f\Delta g}{gg^{\sigma}}.$

$$
\begin{aligned}
e_p(t,s) &= \exp\left(\int_s^t \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + h\left(\tau\right)\right) \mathrm{d}\tau\right) \\
&\overset{\text{def}}{=} \exp\left(\lim_{h\to 0} \frac{1}{1 + hp\left(\tau\right)} p\left(\tau\right) \mathrm{d}\tau\right) \\
&= \exp\left(\int_s^t p\left(\tau\right) \mathrm{d}\tau\right).
\end{aligned}
$$

timescalecalculus python library documentation

Note: this documentation applies to commit 4c23e99ab3b10fd13c30e485fa8a14973ac333c5 of the repo. There has been a lot of development recently and the documentation is now out-of-date. Please e-mail tomcuchta@gmail.com for questions until the documentation is updated.

This is the documentation for the Python repository timescalecalculus.

Contents [hide]

The basics

After extracting the files (or cloning the repository), open a Python instance in its folder and type

```
>>> import timescalecalculus as tsc
```

Right now, a time scale in this library can consist of only a finite list of numbers. Fraction types are available. Let $\mathbb{T}=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{7}{9},1,2,3,4,5,6,7\right\}$.

```
>>> import timescalecalculus as tsc
>>> from fractions import Fraction
>>> ts=tsc.timescale([0,Fraction(1,3),Fraction(1,2),Fraction(7,9),1,2,3,4,5,6,7],'documentation example')
>>> ts.name
'documentation example'
>>> ts.ts
[0, Fraction(1, 3), Fraction(1, 2), Fraction(7, 9), 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
```

Referencias

- Libros
  - Carlo Mariconda y Alberto Tonolo. *Discrete calculus. Methods for counting*. Vol. 103. UNITEXT - La Matematica per il 3+2. Springer International Publishing, 2016. ISBN: 978-3-319-03037-1. DOI: 10.1007/978-3-319-03038-8.
  - Tom Jenkyns y Ben Stephenson. *Fundamentals of Discrete Math for Computer Science: A Problem-Solving Primer*. Second. Undergraduate Topics in Computer Science. Springer International Publishing AG, part of Springer Nature, 2018. ISBN: 978-3-319-70150-9.
- Artículo matemático
  - Stefan Hilger. "Analysis on Measure Chains — A Unified Approach to Continuous and Discrete Calculus". En: *Results in Mathematics* 18.1 (ago. de 1990), págs. 18-56. ISSN: 1420-9012.
- Sitio web
  - Purificación Nadal Morales. *Matemáticas II: Grado en economía. Lección 5: Ecuaciones en diferencias*. 2014. URL: http://personal.us.es/pnadal/Informacion/leccion5ecdiferencias.pdf (visitado 10-06-2019).
  - Tom Cuchta y Matthias Baur. *Timescalecalculus: Python library*. 2019. URL: http://timescalewiki.org/index.php/Timescalecalculus_python_library_documentation (visitado 30-05-2019).

Agradecimientos

¡Muchas gracias!

Colaboradores:

- Creación del módulo `timescalecalculus`: Dr. Tom Cuchta y Matthias Baur.
- Tipografía en LaTeX: Todo el grupo.
- Explicación del contenido matemático: Todo el grupo.
- Esquema de la exposición: Todo el grupo.

Presentación disponible en:

Dudas, sugerencias o preguntas a:

caznaranl@uni.pe
fransscruz18@gmail.com
yums123@hotmail.com
junior_mv_194 @hotmail.com
ge_qg_25@hotmail.com