1. Recurrencias Lineales con coeficientes constantes

Una relación de recurrencia lineal de orden r con coeficientes constantes es una recurrencia del tipo:

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \ldots + c_rx_{n-r} = h_n, \forall n \geq r, \tag{1}$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_r$ son constantes reales o complejas,con c_0 y c_r ambos diferentes de cero y $(h_n)_{n\geq r}$ es una sucesión de números reales o complejos llamado suecesión de términos no homogéneos de la recurrencia.La recurrencia es llamada homogénea si la sucesión de términos no homogéneos es una sucesión nula,no homogénea si $h\neg 0$ para algún n. La relación de recurrencia :

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \ldots + c_rx_{n-r} = 0, \forall n \geq r, \tag{2}$$

es llamada la recurrencia homogénea asociada, o la parte homogénea de la recurrencia 1 Como nosotros ya hemos notado ,la recurrencia:

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \ldots + c_rx_{n-r} = h_n, \forall n \geq r,$$

puede ser escriot equivalentemente como:

$$c_0x_{n+r} + c_1x_{n+(r-1)} + \ldots + c_rx_n = h_{n+r}, \forall n \geq 0.$$

Se peude utilizar cualquiera de las formas presentadas.

Observación

Cada r-secuencia de valores asignados a las r incógnitas desconocidas de la relación de recurrencia

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \ldots + c_rx_{n-r} = h_n, \forall n \geq r,$$

determina de forma única una solución. Al resolver una relación de recurrencia lineal, el siguiente principio es fundamental importancia.

Proposición.(Principio de superposición)

Sea $(u_n)_n, (V_n)_n$ serán respectivamente las soluciones de las relaciones de recurrencia lineal.

x $\begin{array}{ll} c_0x_n + c_1x_{n-1} + \ldots + c_rx_{n-r} = h_n & n \geq r \quad \text{y} \\ c_0x_n + c_1x_{n-1} + \ldots + c_rx_{n-r} = k_n & n \geq r, \end{array}$

con partes homogéneas iguales y secuencias de términos no homogéneos $(h_n)_n$ y $(k_n)_n$ Para cualquier par de constantes A y B, la secuencia $(Av_n + Bv_n)_n$ es una solución de la relación de recurrencia.

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \ldots + c_rx_{n-r} = Ah_n + Bk_n$$

La solución general de la relación de recurrencia

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \ldots + c_rx_{n-r} = h_n, \quad n \geq r \tag{3}$$

Demostración. 1. Uno tiene fácilmente $c_0(Au_n+Bv_n)+c_1(Au_{n-1}+Bv_{n-1})+\ldots+c_r(Au_{n-r}+Bv_{n-r}) = A(c_0u_n+c_1u_{n-1}+\ldots+c_ru_{n-r})+B(c_0v_n+c_1v_{n-i}+\ldots+c_rv_{n-r}) = Ah_n+Bk_n$

2. Sea $(u_n)_n$ una solución particular de (3).Por el punto previo nosotros conocemos que $(v_n)_n = (u_n)_n + (v_n - u_n)_n$ es una solución de 3 si y solo si $v_n - u_n$ es una solución de la recurrecncia homogenea asociada..Por lo tanto cada solución de 3 es obtenida añadiendo una solución de la recurrencia homogenea asociada para $(u_n)_n$

□