

Relaciones de recurrencias

Ecuaciones en diferencias y análisis en escalas de tiempo

C. Aznarán Laos

F. Cruz Ordoñez

G. Quiroz Gómez

J. Micha Velasque

D. García Fernández

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

25, 27 de junio del 2019



Índice analítico

1 Introducción

- Relación de recurrencia
- Ecuaciones en diferencias
 - Ecuaciones en diferencias lineales
 - Homogénea de coeficientes constantes
 - Número de Catalan

2 Ecuaciones de recurrencia

- Ejemplos definidos por ecuaciones de recurrencia
 - Función de Ackermann
- Ecuación de recurrencia de primer orden
 - Torre de Hanói
- Ecuación de recurrencia lineal de segundo orden
 - Un modelo de la cunicultura

3 Realización numérica

- Aproximación lineal de una función
- Problema de valor inicial
- Método de Euler
- Escalas de tiempo
- Módulo `timescale`

Relación de recurrencia

Definición

Una **relación de recurrencia** en las incógnitas x_i , $i \in \mathbb{N}$, es una familia de ecuaciones

$$x_n = f_n(x_0, \dots, x_{n-1}), \quad \forall n \geq r, \quad (1)$$

donde $r \in \mathbb{N}$, y $(f_n)_{n \geq r}$ son funciones

$$f_n: D_n \rightarrow \mathbb{R}, \quad D_n \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \text{o} \quad f_n: D_n \rightarrow \mathbb{C}, \quad D_n \subseteq \mathbb{C}^n.$$

Dependiendo del caso encontrado, las llamaremos **recurrencias reales** o **recurrencias complejas**. Las incógnitas x_0, \dots, x_{r-1} son llamadas **libres**. Su número r es el **orden** de la relación.

Definición

Una sucesión $(a_n)_n$ es una **solución** de (1), sii

$$(a_0, \dots, a_{n-1}) \in D_n, \quad a_n = f_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \quad \forall n \geq r.$$

Relación de recurrencia

Ejemplo

La sucesión real definida por

$$x_0 = 2, x_1 = 1, x_2 = 2^{1/2}, x_3 = 1, \dots, x_{2m-1} = 1, x_{2m} = 2^{1/2^m}, \dots$$

es la **solución** de la *relación de recurrencia* con coeficientes reales

$$x_n = \sqrt{x_{n-2}}, \quad \forall n \geq 2,$$

y los *valores iniciales* $x_0 = 2$ y $x_1 = 1$.

Ejemplo

Considere la relación de recurrencia de primer orden definida por

$$x_n = \frac{1}{x_{n-1} - 1}, \quad \forall n \geq 1.$$

- La 1-tupla $(2) \in D_0$ de valor inicial **no es una solución**.
- La 1-tupla $(3) \in D_0$ de valor inicial **es una solución**.

Relación de recurrencia

Observación

En muchas ocasiones una relación de recurrencia de orden r involucra solo los últimos r términos y es de la forma

$$x_n = g_n(x_{n-r}, \dots, x_{n-1}), \quad n \geq r,$$

donde $(g_n)_{n \geq r}$ son las funciones definidas en un subconjunto E_n de \mathbb{R}^r o \mathbb{C}^r .

Este último es de hecho una relación de recurrencia: es suficiente establecer

$$f_n(x_0, \dots, x_{n-1}) := g_n(x_{n-r}, \dots, x_{n-1})$$

para $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in D_n := \mathbb{R}^{n-r} \times E_n$ (o $\mathbb{C}^{n-r} \times E_n$) a fin de cumplir los requerimientos de la definición (1).

Ecuaciones en diferencias

Aquí es conveniente representar cualquier sucesión de números reales $(a_n)_n$ como la función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$f(n) = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definición

Una **ecuación en diferencias** es una expresión de la forma:

$$G(n, f(n), f(n+1), \dots, f(n+k)) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

El **orden** de una ecuación en diferencias se halla mediante la diferencia entre los “términos mayor” y “menor” respectivamente. En (2), su orden es $n+k-n=k$.

Ejemplo

- El **orden** de $f(n+3) - f(n+1) - 5f(n) = n$ es **3**.
- El **orden** de $f(n+3) - f(n+1) = n^2 - 3$ es **2**.

Ecuaciones en diferencias lineales

Definición

Una **ecuación en diferencias** se le llama **lineal** si puede expresarse de la siguiente forma:

$$a_0(n)f(n+k) + a_1(n)f(n+k-1) + \cdots + a_{k-1}(n)f(n+1) + a_k(n)f(n) = b(n), \quad (3)$$

donde $a_k(n) \neq 0$.

Cuadro: Clasificación de las ecuaciones en diferencias lineales.

Abreviación	Denominación	Condición
E.D.L.H	Homogéneas	$b(n) = 0$.
E.D.L.C	Completas	$b(n) \neq 0$.
E.D.L.C.C.	De coeficientes constantes	$\forall i : a_i(n) = a_i$.
E.D.C.N.C.	De coeficientes no constantes	$\exists i \ni a_i(n) \neq a_i$.

Homogénea de coeficientes constantes

Definición

Sea una **ecuación en diferencias lineal homogénea** de coeficientes constantes y de orden k , buscaremos soluciones del tipo $f(n) = r^n$, haciendo este cambio en (3) y simplificando resulta

$$a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \dots + a_k = 0 \quad (4)$$

la **ecuación característica**.

Definición

Llamamos **solución** de una ecuación en diferencias a cualquier sucesión $\{f(1), \dots, f(k)\}$ que satisfaga (2).

Definición

Se le llama **solución general** de una ecuación en diferencias al conjunto de todas las soluciones, que tendrá tantos parámetros como orden tenga la ecuación (2).

Teorema (De la existencia y la unicidad)

Dada la ecuación (3) y dados n números reales k_0, k_1, \dots, k_{n-1} existe una única solución que verifica

$$f(0) = k_0, f(1) = k_1, \dots, f(n-1) = k_{n-1}.$$

Demostración.

Por favor, ver



Teorema

Toda combinación lineal de soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n es también una solución.

Demostración.

Por favor, ver Mariconda y Tonolo, pág. 357.



Teorema

Las soluciones de una ecuación en diferencia lineal de orden n forman un espacio vectorial y la dimensión del espacio solución de una ecuación en diferencias lineal de orden k es k .

Demostración.

Por favor, ver



Homogénea de coeficientes constantes

Definición (Raíces simples)

Sean r_1, r_2, \dots, r_k las k raíces de la ecuación característica. Se definen entonces las funciones:

$$f_j(n) = r_j^n, \quad j = 1, \dots, k.$$

Entonces, f_1, \dots, f_k es un sistema fundamental de soluciones, lo cual nos permite resolver la ecuación.

Definición (Raíces múltiples)

Sea r una raíz de multiplicidad m de la ecuación característica. Esta raíz proporciona m soluciones diferentes del tipo:

$$f_j(n) = n^j r^n, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Por tanto, pasarán a formar parte del sistema fundamental de soluciones las funciones f_0, \dots, f_{m-1} ; esto es:

$$r^n, nr^n, n^2 r^n, \dots, n^{m-1} r^n.$$

Homogénea de coeficientes constantes

Ejemplo

Hallar la solución de la ecuación en diferencias

$$f(n+3) - 7f(n+2) + 15f(n+1) - 9f(n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

con las condiciones iniciales $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ y $f(2) = 17$.

Ejemplo (E.D.L.C)

Hallar la solución de la ecuación en diferencias

$$f(n+1) - 2f(n) = 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

con la condición inicial $f(0) = -1$.

Número de Catalan

Triangulación

Una triangulación de un polígono es una partición del mismo en triángulos disjuntos cuyos vértices coinciden con los vértices del polígono.

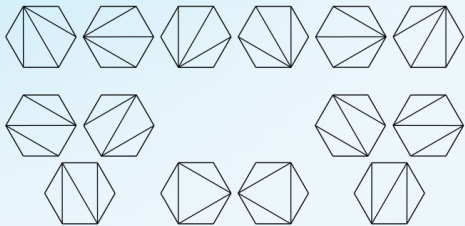


Figura: Diversas maneras de triangular hexágonos.

Caminos en rejillas

Un camino monótono es aquel que empieza en la esquina inferior izquierda y termina en la esquina superior derecha, y consiste únicamente en tramos que apuntan hacia arriba o hacia la derecha, sin que pase de diagonal.

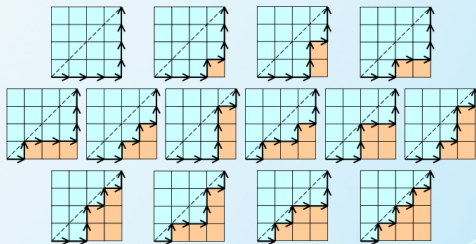


Figura: Los caminos monótonos que no cruzan la diagonal del retículo.

Ecuaciones de recurrencia

Resolver una ecuación de recurrencia significa encontrar una sucesión que satisfaga las ecuaciones de recurrencia.

Encontrar una “solución general” significa encontrar una fórmula que describe todas las soluciones posibles (todas las sucesiones posibles que satisfacen la ecuación).

Veamos el siguiente ejemplo:

Afirmación

Considere que T_n satisface la siguiente ecuación

$$T_n = 2T_{n-1} + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \quad (5)$$

Ejemplos definidos por ecuaciones de recurrencia

Ejemplo (Desajustes)

Imagine una fiesta donde las parejas llegan juntas, pero al final de la noche, cada persona se va con una nueva pareja. Para cada $n \in \mathbb{N}$, digamos que D_n es el número de diferentes formas en que las parejas pueden ser “trastornadas”, es decir, reorganizadas en parejas, por lo que ni uno está emparejado con la persona con la que llegaron.

Afirmación (D_n para cualquier valor de n)

Para todo $n \geq 4$ tendremos:

$$D_n = (n - 1) \{D_{n-2} + D_{n-1}\}.$$

Y la sucesión definida en \mathbb{N} es

$$S_n = A \times n!.$$

Ejemplos definidos por ecuaciones de recurrencia

Teorema (Desigualdad para la acotación de D_n)

Para todo $n \geq 2$ tenemos:

$$\left(\frac{1}{3}\right) n! \leq D_n \leq \left(\frac{1}{2}\right) n!.$$

La mejor fórmula para D_n que sabemos utiliza la función de “entero más cercano”.

Definición

Para cualquier número real x , se define **el entero más cercano a x** , $\lceil x \rceil$:

Si x es escrito como $n + f$ donde n es el entero $\lfloor x \rfloor$, y f es una fracción donde $0 \leq f < 1$:

- Si $0 \leq f < \frac{1}{2}$, entonces $\lceil x \rceil = n$.
- Si $\frac{1}{2} \leq f < 1$, entonces $\lceil x \rceil = n + 1$.

Observación

Entonces $D_n = \lceil (n!)/e \rceil$ cuando $e = 2,71828182844\dots$ es la base del logaritmo natural.
 $(n!)/e$ nunca es igual a $\lceil (n!)/e \rceil + \frac{1}{2}$.

Función de Ackermann

A finales de 1920's, el lógico y matemático alemán, discípulo de David Hilbert, Wilhelm Ackermann (1896–1962), dio un ejemplo de una función computable total que no es recursiva primitiva.

Definición (Ackermann)

Sea $A: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función. Se define recursivamente usando tres reglas:

1. $A(1, n) = 2, \forall n \geq 1$.
2. $A(m, 1) = 2m, \forall m \geq 2$.
3. Cuando $m > 1$ y $n > 1$ se tiene:
 $A(m, n) = A(A(m-1, n), n-1)$.

Observación

Entonces $A(2, n) = 4, \forall n \geq 1$. Además $A(m, 2) = 2^m, \forall m \geq 1$. Seguidamente se puede continuar a calcular $A(m, 3) = 2 \uparrow m$ con la función torre definida por $2 \uparrow [k+1] = 2^{2 \uparrow k}$ con valor inicial $2 \uparrow 1 = 2$, por el P.I.M.

```
def ack(n, m):  
    if n == 0:  
        return m + 1  
    elif m == 0:  
        return ack(n - 1, 1)  
    else  
        return ack(n - 1, ack(n, m - 1))
```

Programa 1: Programa ackermann.py

Ecuación de recurrencia de primer orden

Definición

Una **ecuación de recurrencia lineal de primer orden** relaciona entradas consecutivas en una sucesión mediante una ecuación de la forma

$$S_{n+1} = aS_n + c, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

donde $a \neq 0$ y la condicional inicial es S_0 .

Afirmación

La solución general de (6) se divide en dos casos:

Primer caso Si $a = 1$, entonces

$$S_n = S_0 + nc, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Segundo caso Si $a \neq 1$, entonces

$$S_n = a^n \left[S_0 - \frac{c}{1-a} \right] + \frac{c}{1-a}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Torre de Hanói

Considere la ecuación de recurrencia (6)

$$S_n = 2S_{n-1} + 1, \quad \forall n \geq 2,$$

donde:

- n denota el número de discos y
- S_n es el mínimo número de movimientos necesario para transportar los n discos desde una aguja a otra.



Figura: El objetivo es trasladar los discos de una aguja a otra bajo ciertas condiciones.

Ecuación de recurrencia lineal de segundo orden

Definición

Una **ecuación de recurrencia lineal de segundo orden** relaciona entradas consecutivas en una secuencia mediante una ecuación de la forma

$$S_{n+2} = aS_{n+1} + bS_n + c, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

donde $ab \neq 0$. Cuando $c = 0$, la ecuación de recurrencia se dice que es **homogénea**.

Definición

La **ecuación característica** de (7) homogénea es $x^2 - ax - b = 0$ que tiene raíces

$$r_1 = \frac{a + \Delta}{2} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{a - \Delta}{2} \quad \text{donde } \Delta = \sqrt{a^2 + 4b}.$$

Teorema

La solución general de (7) homogénea es

$$\begin{aligned} S_n &= A(r_1)^n + B(r_2)^n & \text{si } r_1 \neq r_2 \quad (\Delta \neq 0), \\ S_n &= A(r)^n + Bn(r)^n & \text{si } r_1 = r_2 = r \quad (\Delta = 0). \end{aligned}$$

Un modelo de la cunicultura

Considere la ecuación de recurrencia

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 2,$$

llamada **ecuación de Fibonacci**.

Fibonacci partía de ciertas hipótesis, a saber:

- Los conejos viven eternamente.
- Cada mes, un par de adultos de distinto sexo da lugar a un nuevo par de conejos de distinto sexo.
- Cada conejo se hace adulto a los dos meses de vida, momento en el que comienza a tener descendencia.

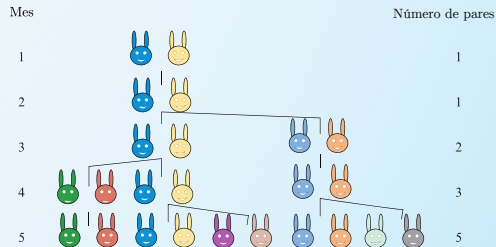


Figura: La cantidad de conejos en función de los meses transcurridos.

Aproximación lineal de una función

Del diagrama, tenemos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x) \quad \text{para } h \text{ pequeño.}$$

Reordenando la ecuación resulta

$$f(x+h) \approx f(x) + hf'(x).$$

Esto se muestra en el diagrama. La recta ℓ es tangente a $y = f(x)$ en el punto de coordenadas $(x, f(x))$.

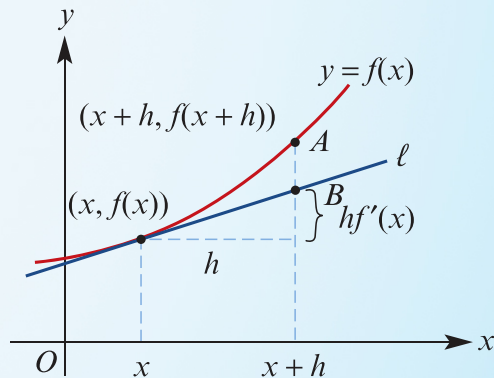


Figura: La recta ℓ es una aproximación lineal en B de $y = f(x)$.

Observación

Esto nos da una aproximación a la curva $y = f(x)$ en que la coordenada y de B es una aproximación a la coordenada y de A en la gráfica de $y = f(x)$.

Problema de valor inicial

Considere el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \quad \text{con} \quad y(x_0) = 0.$$

Entonces, $x_1 = x_0 + h$ e $y_1 = y_0 + hg(x_0)$.

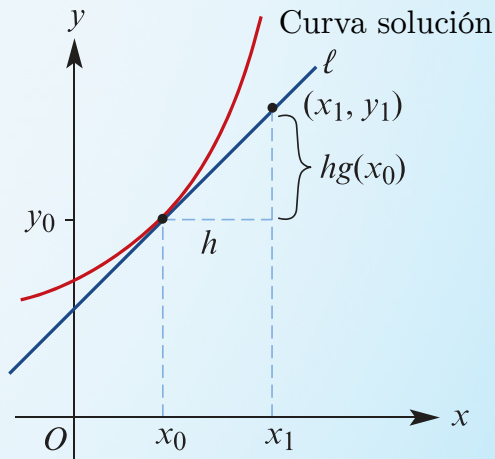


Figura: La diferencia en las ordenadas es $y_1 - y_0 = hg(x_0)$.

Método de Euler

El proceso es ahora aplicado repetidamente para aproximar el valor de la función en x_2, x_3, \dots

El resultado es:

$$x_2 = x_1 + h \quad \text{e} \quad y_2 = y_1 + hg(x_1),$$

$$x_3 = x_2 + h \quad \text{e} \quad y_3 = y_2 + hg(x_2),$$

y así sucesivamente.

El punto (x_n, y_n) es encontrado en el n -ésimo paso del proceso iterativo.

Este proceso iterativo se puede resumir de la siguiente manera.

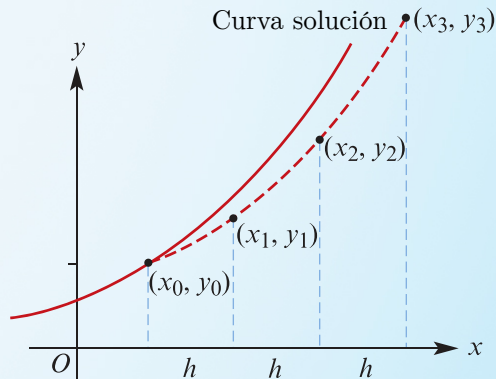


Figura: Los puntos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) se aproximan a la curva solución.

Método de Euler

Teorema (Método de Euler)

Si $\frac{dy}{dx} = g(x)$ con $x_0 = a$ e $y_0 = b$, entonces

$$x_{n+1} = x_n + h \quad \text{e} \quad y_{n+1} = y_n + hg(x_n).$$

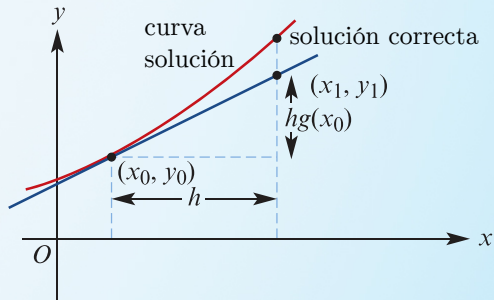


Figura: .

Método de Euler

Ejemplo

Considere el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -y + \sin(x), \quad y(0) = 1.$$

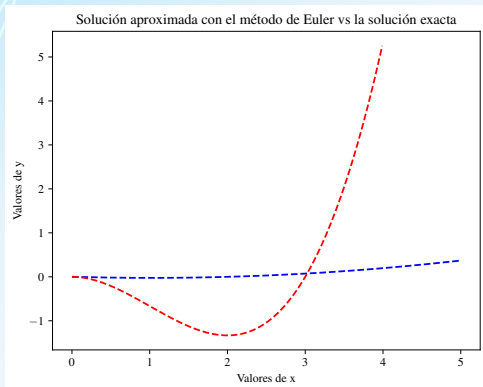


Figura: Solución exacta vs solución de Euler

```
import numpy as np
```

```
def euler(f, x0, t):  
    X = np.zeros((len(t), len(x0)), float)  
    dxdt = np.zeros(len(x0), float)
```

```
    X[0, :] = x = np.array(x0)  
    tlast = t[0]
```

```
    for n, tcur in enumerate(t[1:], 1):  
        f(x, tlast, dxdt)  
        X[n, :] = x = x + dxdt*(tcur - tlast)  
        tlast = tcur  
    return X
```

```
def func(x, t, dxdt):  
    dxdt[0] = x[1]  
    dxdt[1] = - x[0]
```

Programa 2: Programa euler.py

Escalas de tiempo

Una escala de tiempo es un conjunto cerrado \mathbb{T} bajo la topología estándar sobre \mathbb{R} . Se define el operador salto posterior $\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ por

$$\sigma(t) := \inf \{z \in \mathbb{T} : z > t\}$$

la granicidad $\mu: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ por

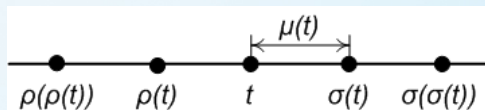
$$\mu(t) = \sigma(t) - t$$

y función granicidad minimal $\mu_*: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\mu_*(s) = \inf_{\tau \in [s, \infty) \cap \mathbb{T}} \mu(t).$$

Una función $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ es llamada Δ -diferenciable si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $s \in (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ y existe un número $f^\Delta(t)$ tal que

$$| [f(\sigma(s)) - f(s)] f^\Delta(s) [\sigma(t) - s] | \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|.$$



Escalas de tiempo

La integración se define de modo que $\int_t^s f^\Delta(\tau) \Delta\tau = f(t) - f(s)$.
Si \mathbb{T} consiste únicamente de puntos aislados, entonces

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

y

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t \in [a,b) \cap \mathbb{T}} \mu(t) f(t), & \text{si } a < b. \\ 0, & \text{si } a = b. \\ -\sum_{t \in [b,a) \cap \mathbb{T}} \mu(t) f(t), & \text{si } a > b. \end{cases}$$

timescalecalculus python library documentation

Note: this documentation applies to commit 4c23e99ab3b10fd13c30e485fa8a14973ac333c5 of the repo. There has been a lot of development recently and the documentation is now out-of-date. Please e-mail tomcuchta@gmail.com for questions until the documentation is updated.

This is the documentation for the Python repository [timescalecalculus](#).

Contents [\[hide\]](#)

1 The basics

- 1.1 Forward jump and graininess
- 1.2 Backward jump and graininess
- 1.3 Delta-derivative

2 Special functions

- 2.1 Delta exponential $e_p(t, s)$
 - 2.1.1 On $\mathbb{T} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 - 2.1.2 On $\mathbb{T} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$

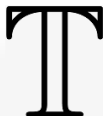
The basics

After extracting the files (or cloning the repository), open a Python instance in its folder and type

```
>>> import timescalecalculus as tsc
```

Right now, a [time scale](#) in this library can consist of only a finite list of numbers. Fraction types are available. Let $\mathbb{T} = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{7}{9}, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\right\}$.

```
>>> import timescalecalculus as tsc
>>> from fractions import Fraction
>>> ts=tsc.timescale([0,Fraction(1,3),Fraction(1,2),Fraction(7,9),1,2,3,4,5,6,7],'documentation example')
>>> ts.name
'documentation example'
>>> ts.ts
[0, Fraction(1, 3), Fraction(1, 2), Fraction(7, 9), 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
```

[Main page](#)[Recent changes](#)[Books](#)[Papers](#)[Python library documentation](#)[Random page](#)[Format notes](#)[Help](#)

Tools

[What links here](#)[Related changes](#)[Special pages](#)[Printable version](#)[Permanent link](#)[Page information](#)

Referencias

■ Libros



Carlo Mariconda y Alberto Tonolo. *Discrete calculus. Methods for counting*. Vol. 103. UNITEXT - La Matematica per il 3+2. Springer International Publishing, 2016. ISBN: 978-3-319-03037-1. DOI: 10.1007/978-3-319-03038-8.



Tom Jenkyns y Ben Stephenson. *Fundamentals of Discrete Math for Computer Science: A Problem-Solving Primer*. Second. Undergraduate Topics in Computer Science. Springer International Publishing AG, part of Springer Nature, 2018. ISBN: 978-3-319-70150-9.

■ Artículo matemático



Stefan Hilger. "Analysis on Measure Chains — A Unified Approach to Continuous and Discrete Calculus". En: *Results in Mathematics* 18.1 (ago. de 1990), págs. 18-56. ISSN: 1420-9012.

■ Sitio web



Tom Cuchta y Matthias Baur. *Timescalecalculus: Python library*. 2019. URL: http://timescalewiki.org/index.php/Timescalecalculus_python_library_documentation (visitado 30-05-2019).

¡Muchas gracias!

Colaboradores:

- Creación del módulo `timescalecalculus`: Dr. Tom Cuchta y Matthias Baur.
- Tipografía en \LaTeX : Todo el grupo.
- Explicación del contenido matemático: Todo el grupo.
- Esquema de la exposición: Todo el grupo.

Presentación disponible en:



Dudas, sugerencias o preguntas a:

caznaranl@uni.pe
fransscruz18@gmail.com
yums123@hotmail.com
junior_mv_194@hotmail.com
ge_qg_25@hotmail.com