

1 Resolución de ecuaciones de recurrencia lineal de primer orden

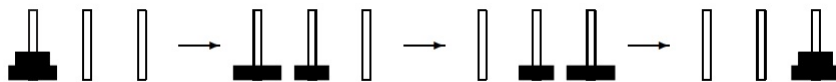
1.1 Las Torres de Hanoi

Cuenta la leyenda que los monjes de un monasterio de la ciudad Hanoi medían el tiempo que faltaba para la llegada del “fin del mundo” con el siguiente procedimiento: Se dispone de tres agujas de diamante, en una de las cuales se apilan 64 discos de oro distintos, ordenados por el tamaño de sus diámetros. En cada segundo mueven un disco de una aguja a otra, y su tarea finalizará (y con ella el mundo) cuando logren transportarlos todos a otra aguja. Pero, ¡atención!, a lo largo del proceso no se puede colocar un disco sobre otro de diámetro más pequeño.

Como la preparación para el “fin del mundo” supondrá sin duda un notable ajeteo, vamos a estimar el tiempo del cuál dispondremos. Por ello, replanteamos el problema en general:

“Tenemos n discos y llamamos a_n al mínimo número de movimientos necesario para transportar los n discos desde una aguja a otra.”.

Por ejemplo, si $a_1 = 1$, nos basta con un movimiento para pasar el disco a otra aguja. El cálculo de a_2 requiere ya un pequeño argumento: podemos, por ejemplo, pasar el disco pequeño a otra aguja, luego el grande a la tercera, para finalmente pasar el pequeño a esta tercera aguja, como en la figura:



Como en dos movimientos no se puede hacer, concluimos que la descrita es la mejor estrategia posible, y que, por tanto, $a_2 = 3$. Si partimos de tres discos, podemos pasar los dos menores a una segunda aguja (con el procedimiento anterior, de tres movimientos), luego pasar el mayor a la tercera aguja, para finalmente llevar los dos discos menores sobre ese disco mayor (de nuevo tres movimientos). En total, 7 movimientos. Aunque ahora no está claro si se puede hacer el trasvase con menos.

El procedimiento esbozado en el caso $n = 3$ se puede generalizar: si tenemos n discos, pasamos $n - 1$ a una segunda aguja, luego el mayor disco a la aguja final y, por último, pasamos los $n - 1$ discos a esa tercera aguja. Es un algoritmo recursivo: el procedimiento para mover n discos se apoya, dos veces, en el (ya conocido) método para mover $n - 1$. Se deduce entonces que el número mínimo de movimientos para transportar n discos cumple que

$$a_n \leq 2a_{n-1} + 1, \quad \forall n \geq 2 \quad (1)$$

porque con $2a_{n-1} + 1$ movimientos lo sabemos hacer. Observe que no es una ecuación de recurrencia, sino una desigualdad. Para comprobar que, en realidad, la relación se cumple en la igualdad. Deduciríamos así que la estrategia de movimientos es la mejor posible. Esto requiere un argumento extra.

Veamos: Si tenemos n discos, en algún momento tendremos que mover el disco mayor, para lo que necesitaremos haber llevado el resto de los discos a otra aguja, pues debe quedar una aguja libre. Esto requiere, como mínimo a_{n-1} movimientos. Una vez movido el disco grande a una aguja, tendremos que mover los restantes $n - 1$ discos sobre él, y esto exige, al menos, otros a_{n-1} movimientos (sea cual sea la estrategia que empleemos). Así que

$$a_n \geq 2a_{n-1} + 1, \quad \forall n \geq 2. \quad (2)$$

Reuniendo las condiciones (1) y (2), ya podemos afirmar que

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad \forall n \geq 2. \quad (3)$$

La condición inicial ya la hemos visto, es $a_1 = 1$. La resolvemos por simple aplicación repetida de la regla de recurrencia:

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 1 = 2(2a_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 a_{n-2} + 2 + 1 = 2^2 (2a_{n-3} + 1) + 2 + 1 \\ a_n &= 2^3 a_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 = 2^3 (2a_{n-4} + 1) + 2 + 1 = 2^4 a_{n-4} + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 \\ a_n &= \dots = 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 = \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1 \end{aligned}$$

Del caso $n = 64$ deducimos que el fin del mundo llegará dentro de $a_{64} = 2^{64} - 1$ segundos, esto es, ¡más de medio billón de años! Parece que, después de todo, la profecía de los monjes de Hanoi no debería ser una de nuestras mayores preocupaciones.

1.2 Los tres piratas naufragados

Un barco pirata es naufragado en una tormenta en la noche. Tres de los piratas sobreviven y se encuentran en una playa la mañana después de la tormenta. Aceptan cooperar para asegurar su supervivencia. Ellos divisan a un mono en la selva cerca de la playa y pasan todo ese primer día recogiendo una gran pila de cocos y luego se van a dormir exhaustos.

Pero ellos son piratas.

El primero duerme bien, preocupado por su parte de los cocos; despierta, divide la pila en 3 montones iguales, pero encuentra uno sobrante que arroja en el arbusto para el mono, entierra su tercero en la arena, amontona los otros dos montones, y se va a dormir profundamente.

El segundo pirata duerme bien, preocupado por su parte de los cocos; se despierta, divide la pila en 3 montones iguales, pero encuentra uno sobrante que arroja en el arbusto para el mono, entierra su tercero en la arena, amontona los otros dos montones, y se va a dormir profundamente.

El tercero también duerme bien, preocupado por su parte de los cocos; despierta, divide la pila en 3 montones iguales, pero encuentra uno sobrante que arroja en el arbusto para el mono, entierra su tercero en la arena, amontona los otros dos montones juntos, y se va a dormir profundamente.

A la mañana siguiente, todos se despiertan y ven una pila algo más pequeña de cocos que se dividen en 3 montones iguales, pero encuentran uno sobrante que tiran en el arbusto para el mono.

¿Cuántos cocos recolectaron el primer día?

Sea S_j denota el tamaño de la pila después del pirata j y sea S_0 será el número que recogieron en el primer día. Entonces

$$S_0 = 3x + 1 \text{ para algún número entero } "x" \text{ y } S_1 = 2x,$$

$$S_1 = 3y + 1 \text{ para algún número entero } "y" \text{ y } S_2 = 2y,$$

$$S_2 = 3z + 1 \text{ para algún número entero } "z" \text{ y } S_3 = 2z,$$

$$\text{y } S_3 = 3w + 1 \text{ para algún número entero } "w".$$

//¿Hay una ecuación de recurrencia aquí?

$$S_1 = 2x \text{ donde } x = (S_0 - 1)/3, \text{ entonces } S_1 = (2/3)S_0 - (2/3);$$

$$S_2 = 2y \text{ donde } y = (S_1 - 1)/3, \text{ entonces } S_2 = (2/3)S_1 - (2/3);$$

$$S_3 = 2z \text{ donde } z = (S_2 - 1)/3, \text{ entonces } S_3 = (2/3)S_2 - (2/3).$$

La ecuación de recurrencia satisfecha por los primeros S_j es

$$S_{j+1} = (2/3)S_j - (2/3) \tag{4}$$

Si ahora tenemos $S_4 = (2/3)S_3 - (2/3)$, entonces $S_4 = 2[S_3 - 1]/3 = 2w$ para algún número entero w .

Queremos saber qué valor (o valores) de S_0 producirá un número entero par para S_4 cuando aplicamos la ecuación de recurrencia (1).

En (1), $a = 2/3$ y $c = -2/3$, entonces $c/(1-a) = -2$, y así la solución general de (1) es

$$S_n = (2/3)^n [S_0 + 2] - 2$$

Por lo tanto, $S_4 = (2/3)^4 [S_0 + 2] - 2 = (16/81)[S_0 + 2] - 2$

S_4 será un número entero

$\Leftrightarrow S_4 + 2$ es (un aún) el número entero

$\Leftrightarrow 81$ divide en $[S_0 + 2]$

$\Leftrightarrow [S_0 + 2] = 81k$ para algún número entero k

$\Leftrightarrow S_0 = 81k - 2$ para algún número entero k .

S_0 debe ser un número entero positivo, pero hay un número infinito de respuestas posibles:

$$79 \text{ o } 160 \text{ o } 241 \text{ o } 322 \text{ o } \dots$$

//Necesitamos más información para determinar S_0 .

//Si nos hubieran dicho que el primer día los piratas recolectaron entre 200 y 300 cocos, ahora podríamos decir que "el número que recogieron el primer día fue exactamente 241."

1.3 Interés Compuesto

Supongamos que se le ofrecen dos planes de ahorro para la jubilación. En el Plan A, empiezas con \$1,000, y cada año (en el aniversario del plan), te pagan un 11% de interés simple, y agregas \$1,000. En el Plan B, empiezas con \$100, y cada mes, te pagan una-duodécima parte del 10% de interés simple (anual), y agregas \$100. ¿Qué plan será más grande después de 40 años?.

//¿Podemos aplicar una ecuación de recurrencia?

Considere el Plan A:

Sea a_n denote el número de dólares en el plan después de (exactamente) n años de operación. Entonces $a_0 = \$1,000$ y

$$S_{n+1} = S_n + \text{interes sobre } S_n + \$1000$$

$$S_{n+1} = S_n + 11\% \text{ de } S_n + \$1000$$

$$S_{n+1} = S_n(1 + 0.11) + \$1000.$$

En esta ecuación de recurrencia, sean $a = 1.11$, $c = 1000$, entonces $\frac{c}{1-a} = \frac{1000}{-0.11}$. y

$$S_n = (1.11)^n \left[1000 - \frac{1000}{-0.11} \right] + \frac{1000}{-0.11}$$

$$S_n = (1.11)^n \left[\frac{1110}{0.11} \right] - \frac{1000}{0.11}$$

Por lo tanto,

$$S_{40} = (1.11)^{40} \left[\frac{1110}{0.11} \right] - \frac{1000}{0.11}$$

$$S_{40} = (65.000867...)(10090.909090...) - (9090.909090...)$$

$$S_{40} = 655917.842... - (9090.909090...)$$

$$S_{40} \cong \$646826.$$

Ahora considere el Plan B:

Sea T_n denota el número de dólares en el plan después de (exactamente) n meses de funcionamiento. Entonces $T_0 = \$100$ y

$$T_{n+1} = T_n + \text{interes sobre } T_n + \$100$$

$$T_{n+1} = T_n + (1/12) \text{ de } 10\% \text{ de } T_n + \$100$$

$$T_{n+1} = T_n[1 + 0.1/12] + \$100$$

En esta ecuación de recurrencia, sean $a = 12.1/12$, $c = 100$, entonces $\frac{c}{1-a} = \frac{100}{-0.1/12} = -12000$ y

$$T_n = (12.1/12)^n \left[100 - \frac{100}{-0.1/12} \right] + \frac{100}{-0.1/12}$$

$$T_n = (12.1/12)^n [100 + 12000] - 12000$$

De ahí, después 40x12 meses,

$$T_{480} = (12.1/12)^{480} (12100) - (12000)$$

$$T_{480} = (1.008333\ldots)^{480} (12100) - (12000)$$

$$T_{480} = (53.700663\ldots) (12100) - (12000)$$

$$T_{480} = 649778.0234\ldots - (12000)$$

$$T_{480} \cong \$637778.$$

Por lo tanto, el Plan A tiene un valor ligeramente mayor después de 40 años.

2 Resolución de ecuaciones de recurrencia lineal de segundo orden

Una ecuación de la recurrencia lineal del segundo-orden relaciona entradas consecutivas en una secuencia por una ecuación de la forma

$$S_{n+2} = aS_{n+1} + bS_n + c \quad \forall n \text{ en el dominio de } S \quad (5)$$

Pero vamos a asumir que el dominio de S es \mathbb{N} . Supongamos también que ni "a" ni "b" son 0; de lo contrario, $S_n = c$ para $\forall n \in \{2..\}$, y las soluciones para (2) no son muy interesante.

La ecuación de recurrencia de primer orden son sólo un caso especial de la ecuación de recurrencia de segundo orden cuando $b = 0$.

Cuando $c = 0$, se dice que la RE es homogénea (todos los términos se ven igual – una constante veces una entrada de secuencia).

La ecuación de recurrencia de Fibonacci es homogéneo.

Vamos a restringir también nuestra atención (por el momento) a una ecuación de segundo orden lineal, la recurrencia homogénea

$$S_{n+2} = aS_{n+1} + bS_n \quad \text{para } \forall n \in \mathbb{N} \quad (6)$$

Tal como hicimos para la ecuación de la recurrencia de Fibonacci, supongamos que hay una secuencia geométrica, $S_n = r^n$, que satisface (3)

Si hubiera; entonces $r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$.

Cuando $n = 0$, $r^2 = ar + b$.

La "ecuación característica" de (3) es $x^2 - ax - b = 0$,

que tiene "raíces" $r = \frac{-(-a) \pm \sqrt{(-a)^2 - 4(1)(-b)}}{2(1)} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$

Sea $\Delta = \sqrt{a^2 + 4b}$, $r_1 = \frac{a+\Delta}{2}$, y $r_2 = \frac{a-\Delta}{2}$.

Entonces $r_1 + r_2 = a$, $r_1 r_2 = -b$, y $r_1 - r_2 = \Delta$

Tanto r_1 como r_2 satisfacen la ecuación $x^2 = ax + b$, y son las únicas soluciones.

2.1 Ejemplo.

Si $S_{n+2} = 10S_{n+1} - 21S_n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$, la ecuación característica es $x^2 - 10x + 21 = 0$.

// O $(x-7)(x-3) = 0$

Donde, $a = 10$, $b = -21$, $a^2 + 4b = 100 - 84 = 16$, $\Delta = 4$, entonces $r_1 = 7$ y $r_2 = 3$.

2.2 Ejemplo.

Si $S_{n+2} = 3S_{n+1} - 2S_n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$, la ecuación característica es $x^2 - 3x + 2 = 0$.

// O $(x-2)(x-1) = 0$

Donde, $a = 3$, $b = -2$, $a^2 + 4b = 9 - 8 = 1$, $\Delta = 1$, entonces $r_1 = 2$ y $r_2 = 1$.

2.3 Ejemplo.

Si $S_{n+2} = 2S_{n+1} - S_n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$, la ecuación característica es $x^2 - 2x + 1 = 0$.

// O $(x-1)(x-1) = 0$

Donde, $a = 2$, $b = -1$, $a^2 + 4b = 4 - 4 = 0$, $\Delta = 0$, entonces $r_1 = 1$ y $r_2 = 1$. // ¿Pero qué hay de una fórmula que da la solución general?

2.4 Teorema.

// La solución general de la RE homogénea (3) es

$S_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$ si $r_1 \neq r_2$, // Si $\Delta \neq 0$

$S_n = A(r)^n + Bn(r)^n$ si $r_1 = r_2 = r$ // Si $\Delta = 0$

Prueba. Supongamos que T es cualquier solución particular de la RE homogénea

// Nos ocupamos de los dos casos por separado.

Caso 1. Si $\Delta \neq 0$, entonces las dos raíces son distintas (pero pueden ser números "complejos").

// Encontraremos valores para A y B, luego probaremos que $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$

// Mostraremos $A(r_1)^n + B(r_2)^n$ arranca correctamente para valores especialmente elegidos

// de A y B, y luego mostrar $A(r_1)^n + B(r_2)^n$ continúa correctamente.

Vamos a resolver las ecuaciones (para A y B) que garantizaría $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$ entonces $n = 0$ y $n = 1$. Si

$T_0 = A(r_1)^0 + B(r_2)^0 = A + B \dots \dots \dots (1)$

y $T_1 = A(r_1)^1 + B(r_2)^1 = A(r_1) + B(r_2) \dots \dots \dots (2)$

entonces $(r_1)T_0 = A(r_1) + B(r_1) \dots \dots \dots$ // multiplicamos (1) por r_1

y $T_1 = A(r_1) + B(r_2) \dots \dots \dots$ // (2) otra vez restamos, obtenemos

$(r_1)T_0 - T_1 = B(r_1 - r_2) = B\Delta \dots \dots \dots$ // $r_1 - r_2 = \Delta \neq 0$

entonces $B = \frac{(r_1)T_0 - T_1}{\Delta}$

Tenemos, $A = T_0 - B = \frac{\Delta T_0}{\Delta} - \frac{(r_1)T_0 - T_1}{\Delta} = \frac{-(r_2)T_0 + T_1}{\Delta}$

// No importa cómo comience la secuencia T (no importa cuáles sean los valores para T_0 y T_1)

//hay números únicos A y B tales que $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$ para $n = 0$ y 1

// Continuando la prueba por la inducción matemática que $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$

Paso 1. Si $n = 0$ o 1 , entonces $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$, por nuestra "opción" A y B.

Paso 2. Asuma que $\exists k \geq 1$ tal que si $0 \leq n \leq k$, entonces $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$.

Paso 3. Si $n = k + 1$, entonces $n \geq 2$ entonces, porque T satisface la RE homogénea (3)

$$T_{k+1} = aT_k + bT_{k-1}$$

$$T_{k+1} = a[A(r_1)^k + B(r_2)^k] + b[A(r_1)^{k-1} + B(r_2)^{k-1}] \dots \dots \dots // por paso 2$$

$$T_{k+1} = [aA(r_1)^k + bA(r_1)^{k-1}] + [aB(r_2)^k + bB(r_2)^{k-1}]$$

$$T_{k+1} = A(r_1)^{k-1}[a(r_1) + b] + B(r_2)^{k-1}[a(r_2) + b]$$

$$T_{k+1} = A(r_1)^{k+1} + B(r_2)^{k+1} \text{ Así, si } r_1 \neq r_2, T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n \text{ para } \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso 2. Si $\Delta = 0$, entonces las raíces son (ambos) iguales a r donde $r = a/2$. También, $b = -a^2/4 = -r^2$. Si a eran 0, entonces $b = 0$; pero asumimos que no tanto a y b son 0. De ahí, $r \neq 0$.

Vamos a resolver las ecuaciones (para A y B) que garantizarían $T_n = A(r)^n + nB(r)^n$ cuando $n = 0$ y $n = 1$. Si

$$T_0 = A(r)^0 + 0B(r)^0 = A \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{y } T_1 = A(r)^1 + 1B(r)^1 = Ar + Br, \dots \dots \dots (2)$$

entonces $A = T_0$ y $B = (T_1 - Ar)/r$

// No importa cómo comience la secuencia T (no importa cuáles sean los valores para T_0 y T_1)

//hay números únicos A y B tales que $T_n = A(r)^n + B(r)^n$ para $n = 0$ y 1

// Continuando la prueba por la inducción matemática que $T_n = A(r)^n + B(r)^n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$

Paso 1. Si $n = 0$ o 1 , entonces $T_n = A(r)^n + B(r)^n$, por nuestra "opción" A y B.

Paso 2. Asuma que $\exists k \geq 1$ tal que si $0 \leq n \leq k$, entonces $T_n = A(r)^n + B(r)^n$.

Paso 3. Si $n = k + 1$, entonces $n \geq 2$ entonces, porque T satisface la RE homogénea (3)

$$T_{k+1} = aT_k + bT_{k-1}$$

$$T_{k+1} = a[A(r)^k + kB(r)^k] + b[A(r)^{k-1} + (k-1)B(r)^{k-1}] \dots \dots \dots // por paso 2$$

$$T_{k+1} = [aAr^k + bAr^{k-1}] + [akBr^k + b(k-1)Br^{k-1}]$$

$$T_{k+1} = Ar^{k-1}[ar + b] + Br^{k-1}[akr + b(k-1)]$$

$$T_{k+1} = Ar^{k-1}[r^2] + Br^{k-1}[k(r^2) + r^2] \dots \dots \dots // r^2 = ar + b$$

$$T_{k+1} = Ar^{k+1} + Br^{k-1}[k(r^2) + r^2] \dots \dots \dots // -b = r^2$$

$$T_{k+1} = Ar^{k+1} + (k+1)Br^{k+1}$$

Así; si $r_1 = r_2 = r$, $T_n = A(r)^n + nB(r)^n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.5 Ejemplo.

Si $S_{n+2} = 10S_{n+1} - 21S_n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$

entonces $r_1 = 7$ y $r_2 = 3$. Tenemos, la solución general de la RE es $S_n = A7^n + B3^n$

2.6 Ejemplo.

Si $S_{n+2} = 3S_{n+1} - 2S_n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$

entonces $r_1 = 2$ y $r_2 = 1$. Tenemos, la solución general de la RE es $S_n = A2^n + B1^n = A2^n + B$