# Relaciones de recurrencias

## Ecuaciones en diferencias y análisis en escalas de tiempo

C. Aznarán Laos

F. Cruz Ordoñez

G. Quiroz Gómez

J. Micha Velasque

D. García Fernández

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

25, 27 de junio del 2019

# Índice analítico

# Relación de recurrencia

### Definición

Una **relación de recurrencia** en las incógnitas $x_i$, $i \in \mathbb{N}$, es una familia de ecuaciones

$$x_n = f_n\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right), \quad \forall n \geq r, \tag{1}$$

donde $r \in \mathbb{N}$, y $(f_n)_{n \geq r}$ son funciones

$$f_n \colon D_n \to \mathbb{R}, \quad D_n \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \text{o} \quad f_n \colon D_n \to \mathbb{C}, \quad D_n \subseteq \mathbb{C}^n.$$

Dependiendo del caso encontrado, las llamaremos **recurrencias reales** o **recurrencias complejas**. Las incógnitas $x_0, \ldots, x_{r-1}$ son llamadas **libres**. Su número $r$ es el **orden** de la relación.

### Definición

Una sucesión $(a_n)_n$ es una **solución** de (1), sii

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in D_n, \quad a_n = f_n\left(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\right) \quad \forall\, n \geq r.$$

# Relación de recurrencia

### Ejemplo

La sucesión real definida por

$$x_0 = 2, x_1 = 1, x_2 = 2^{1/2}, x_3 = 1, \ldots, x_{2m-1} = 1, x_{2m} = 2^{1/2^m}, \ldots$$

es la solución de la *relación de recurrencia* con coeficientes reales

$$x_n = \sqrt{x_{n-2}}, \quad \forall n \geq 2,$$

y los *valores iniciales* $x_0 = 2$ y $x_1 = 1$.

### Ejemplo

Considere la relación de recurrencia de primer orden definida por

$$x_n = \frac{1}{x_{n-1} - 1}, \quad \forall n \geq 1.$$

- La 1–tupla $(2) \in D_0$ de valor inicial no es una solución.
- La 1–tupla $(3) \in D_0$ de valor inicial es una solución.

# Relación de recurrencia

**Observación**

En muchas ocasiones una relación de recurrencia de orden $r$ involucra solo los últimos $r$ términos y es de la forma

$$x_n = g_n\left(x_{n-r}, \ldots, x_{n-1}\right), \quad n \geq r,$$

donde $\left(g_n\right)_{n\geq r}$ son las funciones definidas en un subconjunto $E_n$ de $\mathbb{R}^r$ o $\mathbb{C}^r$.

Este último es de hecho una relación de recurrencia: es suficiente establecer

$$f_n\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right) := g_n\left(x_{n-r}, \ldots, x_{n-1}\right)$$

para $\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right) \in D_n := \mathbb{R}^{n-r} \times E_n$ (o $\mathbb{C}^{n-r} \times E_n$) a fin de cumplir los requerimientos de la definición (1).

# Ecuaciones en diferencias

Aquí es conveniente representar cualquier sucesión de números reales $(a_n)_n$ como la función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(n) = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

### Definición

Una **ecuación en diferencias** es una expresión de la forma:

$$G\left(n, f(n), f\left(n+1\right), \ldots, f\left(n+k\right)\right) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

El **orden** de una ecuación en diferencias se halla mediante la diferencia entre los "términos mayor" y "menor" respectivamente. En (2), su orden es $n+k-n=k$.

### Ejemplo

- El orden de $f\left(n+3\right) - f\left(n+1\right) - 5f(n) = n$ es 3.
- El orden de $f\left(n+3\right) - f\left(n+1\right) = n^2 - 3$ es 2.

# Ecuaciones en diferencias

## Definición

Una **ecuación en diferencias** se le llama **lineal** si puede expresarse de la siguiente forma:

$$a_0(n)f\left(n+k\right)+a_1(n)f\left(n+k-1\right)+\cdots+a_{k-1}(n)f\left(n+1\right)+a_k(n)f\left(n\right)=b\left(n\right), \tag{3}$$

donde $a_k(n)\neq 0$.

Cuadro: Clasificación de las ecuaciones en diferencias.

| Abreviación | Denominación | Condición |
|---|---|---|
| E.D.L.H | Homogéneas | $b(n)=0.$ |
| E.D.L.C | Completas | $b(n)\neq 0.$ |
| E.D.C.C. | De coeficientes constantes | $\forall i: a_i(n)=a_i.$ |
| E.D.C.N. | De coeficientes no constantes | $\exists i \ni a_i(n)\neq a_i.$ |

# Homogénea de coeficientes constantes

**Definición**

Sea una **ecuación en diferencias lineal homogénea** de coeficientes constantes y de orden $k$, buscaremos soluciones del tipo $f(n) = r^n$, haciendo este cambio en (3) y simplificando resulta

$$a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \cdots + a_k = 0 \tag{4}$$

la **ecuación característica**.

**Definición**

Llamamos **solución** de una ecuación en diferencias a cualquier sucesión $\{f(1), \ldots, f(k)\}$ que satisfaga (2).

**Definición**

Se le llama **solución general** de una ecuación en diferencias al conjunto de todas las soluciones, que tendrá tantos parámetros como orden tenga la ecuación (2).

**Teorema (De la existencia y la unicidad)**

*Dada la ecuación (3) y dados $n$ números reales $k_0$, $k_1$, ..., $k_{n-1}$ existe una única solución que verifica*

$$f(0) = k_0, f(1) = k_1, \ldots, f(n-1) = k_{n-1}.$$

**Demostración.**

Por favor, ver [1]. □

**Teorema**

*Toda combinación lineal de soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden $n$ es también una solución.*

**Demostración.**

Por favor, ver [1]. □

**Teorema**

*Las soluciones de una ecuación en diferencia lineal de orden $n$ forman un espacio vectorial y la dimensión del espacio solución de una ecuación en diferencias lineal de orden $k$ es $k$.*

**Demostración.**

Por favor, ver [1]. □

# Homogénea de coeficientes constantes

## Definición (Raíces simples)

Sean $r_1, r_2, \ldots, r_k$ las $k$ raíces de la ecuación característica. Se definen entonces las funciones:

$$f_j(n) = r_j^n, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Entonces, $f_1, \ldots, f_k$ es un sistema fundamental de soluciones, lo cual nos permite resolver la ecuación.

## Definición (Raíces múltiples)

Sea $r$ una raíz de multiplicidad $m$ de la ecuación característica. Esta raíz proporciona $m$ soluciones diferentes del tipo:

$$f_j(n) = n^j r^n, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Por tanto, pasarán a formar parte del sistema fundamental de soluciones las funciones $f_0, \ldots, f_{m-1}$; esto es:

$$r^n, nr^n, n^2r^n, \ldots, n^{m-1}r^n.$$

# Homogénea de coeficientes constantes

**Ejemplo**

Hallar la solución de la ecuación en diferencias

$$f(n+3) - 7f(n+2) + 15f(n+1) - 9f(n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

con las condiciones iniciales $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ y $f(2) = 17$.

**Ejemplo (E.D.L.C)**

Hallar la solución de la ecuación en diferencias

$$f(n+1) - 2f(n) = 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

con la condición inicial $f(0) = -1$.

# Número de Catalan

## Triangulación

Una triangulación de un polígono es una partición del mismo en triángulos disjuntos cuyos vértices coinciden con los vértices del polígono.

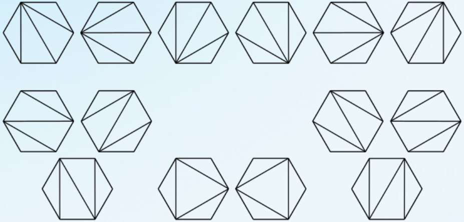


Figura: Diversas maneras de triangular hexágonos.

## Caminos en rejillas

Un camino monótono es aquel que empieza en la esquina inferior izquierda y termina en la esquina superior derecha, y consiste únicamente en tramos que apuntan hacia arriba o hacia la derecha,sin que pase de diagonal.

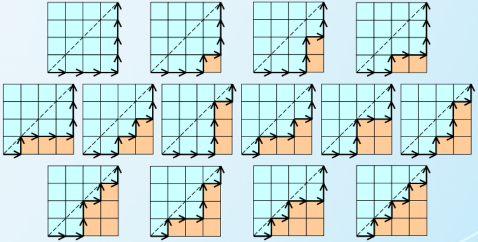


Figura: Los caminos monótonos que no cruzan la diagonal del retículo.

# Ecuaciones de recurrencia

*Resolver una ecuación de recurrencia* significa encontrar una sucesión que satisfaga las ecuaciones de recurrencia.

Encontrar una "solución general" significa encontrar una fórmula que describe todas las soluciones posibles (todas las sucesiones posibles que satisfacen la ecuación).

Veamos el siguiente ejemplo:

**Afirmación**

Considere que $T_n$ satisface la siguiente ecuación

$$T_n = 2T_{n-1} + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{5}$$

# Ejemplos definidos por ecuaciones de recurrencia

## Ejemplo (Desajustes)

Imagine una fiesta donde las parejas llegan juntas, pero al final de la noche, cada persona se va con una nueva pareja. Para cada $n \in \mathbb{N}$, digamos que $D_n$ es el número de diferentes formas en que las parejas pueden ser "trastornadas", es decir, reorganizadas en parejas, por lo que ni uno está emparejado con la persona con la que llegaron.

## Afirmación ($D_n$ para cualquier valor de $n$)

Para todo $n \geq 4$ tendremos:

$$D_n = (n-1)\left\{D_{n-2} + D_{n-1}\right\}.$$

Y la sucesión definida en $\mathbb{N}$ es

$$S_n = A \times n!.$$

# Ejemplos definidos por ecuaciones de recurrencia

**Teorema (Desigualdad para la acotación de $D_n$)**

*Para todo $n \geq 2$ tenemos:*

$$\left(\frac{1}{3}\right) n! \leq D_n \leq \left(\frac{1}{2}\right) n!.$$

La mejor fórmula para $D_n$ que sabemos utiliza la función de "entero más cercano".

**Definición**

Para cualquier número real $x$, se define **el entero más cercano a** $x$, $\lceil x \rfloor$:
Si $x$ es escrito como $n + f$ donde $n$ es el entero $\lfloor x \rfloor$, y $f$ es una fracción donde $0 \leq f < 1$:

- Si $0 \leq f < \frac{1}{2}$, entonces $\lceil x \rfloor = n$.
- Si $\frac{1}{2} \leq f < 1$, entonces $\lceil x \rfloor = n + 1$.

**Observación**

Entonces $D_n = \lceil (n!)/e \rfloor$ cuando $e = 2{,}71828182844\ldots$ es la base del logaritmo natural.
$(n!)/e$ nunca es igual a $\lceil (n!)/e \rfloor + \frac{1}{2}$.

# Número de Ackermann

Por los 1920's, el lógico y matemático alemán, discípulo de David Hilbert, Wilhelm Ackermann (1896–1962), inventó una función muy curiosa.

**Definición (Ackermann)**

Sea $A\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función. Se define recursivamente usando tres reglas:

1. $A(1,n) = 2$, $\forall n \geq 1$.
2. $A(m,1) = 2m$, $\forall m \geq 2$.
3. Cuando $m > 1$ y $n > 1$ se tiene: $A\left(m,n\right) = A\left(A(m-1,n), n-1\right)$.

**Observación**

Entonces $A\left(2,n\right) = 4, \quad \forall n \geq 1$. Además $A\left(m,2\right) = 2^m, \quad \forall m \geq 1$. Seguidamente se puede continuar a calcular $A\left(m,3\right) = 2 \uparrow m$ con la función torre definida por $2 \uparrow [k+1] = 2^{2 \uparrow k}$ con valor inicial $2 \uparrow 1 = 2$, por P.I.M.

```python
def ack(n, m):
  if n = 0:
    return m + 1
  elif m = 0:
    return ack(n - 1, 1)
  else
    return ack(n - 1, ack(n, m - 1))
```

Programa 1: Programa ackermann.py

# Ecuación de recurrencia de primer orden

**Solución general a la ecuación de recurrencia**

Considere la ecuación de recurrencia

$$S_{n+1} = aS_n + c, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Primer caso** Si $a = 1$, entonces $S_n = S_0 + nc$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

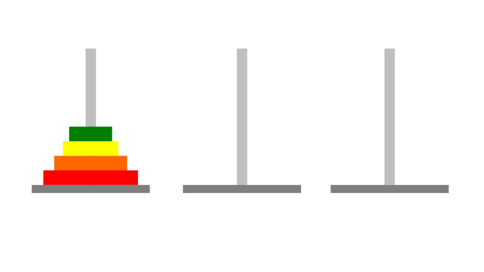
**Segundo caso** Si $a \neq 1$, entonces $S_n = a^n \left[S_0 - \frac{c}{1-a}\right] + \frac{c}{1-a}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

# Torre de Hanói

Considere la ecuación de recurrencia

$$S_n = 2S_{n-1} + 1, \quad \forall n \geq 2,$$

donde $n$ denota el número de discos y $S_n$ es el mínimo número de movimientos necesario para transportar los $n$ discos desde una aguja a otra.



# Ecuación de recurrencia de segundo orden

**Teorema**

$S_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$ *si* $r_1 \neq r_2$, *siempre que* $\Delta \neq 0$.

**Teorema**

$S_n = A(r)^n + Bn(r)^n$ *si* $r_1 = r_2 = r$, *siempre que* $\Delta = 0$.

# Un modelo de la cunicultura

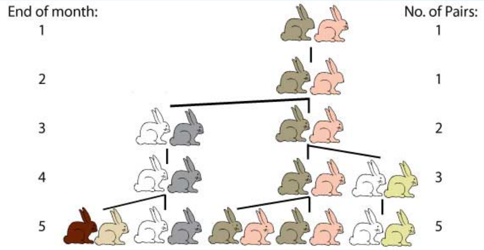
Considere la ecuación de recurrencia

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 2,$$

llamada **ecuación de Fibonacci**.

Fibonacci partía de ciertas hipótesis, a saber:

- Los conejos viven eternamente.
- Cada mes, un par de adultos de distinto sexo da lugar a un nuevo par de conejos de distinto sexo.
- Cada conejo se hace adulto a los dos meses de vida, momento en el que comienza a tener descendencia.



# Escalas de tiempo

Una escala de tiempo es un conjunto cerrado $\mathbb{T}$ bajo la topología estándar sobre $\mathbb{R}$.
Se define el operador salto posterior $\sigma\colon\ \to \mathbb{T}$ por

$$\sigma\left(T\right) := \text{ínf}\left\{z \in \mathbb{T} : z > t\right\}$$

la granicidad $\mu\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ por

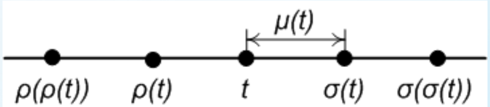
$$\mu\left(t\right) = \sigma\left(t\right) - t$$

y función granicidad minimal $\mu_{*}\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ por

$$\mu_{*}\left(s\right) = \underset{\tau \in [s,\infty)\cap\mathbb{T}}{\text{ínf}} \mu\left(t\right).$$

Una función $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ es llamada $\Delta$–diferenciable si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $s \in \left(t - \delta, t + \delta\right) \cap \mathbb{T}$ y existe un número $f^{\Delta}\left(t\right)$ tal que

$$\left|\,[f\left(\sigma\left(s\right)\right) - f\left(s\right)] f^{\Delta}\left(s\right)\left[\sigma\left(t\right) - s\right]\,\right| \leq \varepsilon\left|\sigma\left(t\right) - s\right|.$$



# Escalas de tiempo

La integración se define de modo que $\int_t^s f^\Delta(\tau)\,\Delta\tau = f(t) - f(s)$.
Si $\mathbb{T}$ consiste únicamente de puntos aislados, entonces

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

y

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)\cap\mathbb{T}} \mu(t) f(t), & \text{si } a < b. \\ 0, & \text{si } a = b. \\ -\sum_{t\in[b,a)\cap\mathbb{T}} \mu(t) f(t), & \text{si } a > b. \end{cases}$$

# timescalecalculus python library documentation

Note: this documentation applies to commit 4c23e99ab3b10fd13c30e485fa8a14973ac333c5 of the repo. There has been a lot of development recently and the documentation is now out-of-date. Please e-mail tomcuchta@gmail.com for questions until the documentation is updated.

This is the documentation for the Python repository timescalecalculus.

**Contents** [hide]



## The basics

After extracting the files (or cloning the repository), open a Python instance in its folder and type

```
>>> import timescalecalculus as tsc
```

Right now, a time scale in this library can consist of only a finite list of numbers. Fraction types are available. Let $\mathbb{T}=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{7}{9},1,2,3,4,5,6,7\right\}$.

```
>>> import timescalecalculus as tsc
>>> from fractions import Fraction
>>> ts=tsc.timescale([0,Fraction(1,3),Fraction(1,2),Fraction(7,9),1,2,3,4,5,6,7],'documentation example')
>>> ts.name
'documentation example'
>>> ts.ts
[0, Fraction(1, 3), Fraction(1, 2), Fraction(7, 9), 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
```

# Referencias

- Libros


Carlo Mariconda y Alberto Tonolo. *Discrete calculus. Methods for counting*. Vol. 103. UNITEXT - La Matematica per il 3+2. Springer International Publishing, 2016. ISBN: 978-3-319-03037-1. DOI: 10.1007/978-3-319-03038-8.

Tom Jenkyns y Ben Stephenson. *Fundamentals of Discrete Math for Computer Science: A Problem-Solving Primer*. Second. Undergraduate Topics in Computer Science. Springer International Publishing AG, part of Springer Nature, 2018. ISBN: 978-3-319-70150-9.


- Artículos matemáticos


Stefan Hilger. "Analysis on Measure Chains — A Unified Approach to Continuous and Discrete Calculus". En: *Results in Mathematics* 18.1 (ago. de 1990), págs. 18-56. ISSN: 1420-9012.


- Sitio web


Tom Cuchta y Matthias Baur. *Timescalecalculus: Python library*. 2019. URL: http://timescalewiki.org/index.php/Timescalecalculus_python_library_documentation (visitado 30-05-2019).

# Agradecimientos

## ¡Muchas gracias!

Colaboradores:

1. Creación del módulo `timescalecalculus`: Dr. Tom Cuchta y Matthias Baur.
2. Tipografía en LaTeX: Todo el grupo.
3. Explicación del contenido matemático: Todo el grupo.
4. Esquema de la exposición: Todo el grupo.

Presentación disponible en:

Dudas, sugerencias o preguntas a
caznaranl@uni.pe