Resolver una ecuación de recurrencia significa encontrar una secuencia que satisfaga las ecuación de recurrencia. Encontrar una "solución general"significa encontrar una fórmula que describe todas las soluciones posibles (todas las secuencias posibles que satisfacen la ecuación).
Veamos el siguiente ejemplo:
Considere T_n que satisface la siguiente ecuación para todo $n \in \mathbb{N}$; $n > 1$:

$$T_n = 2T_{n-1} + 1$$

La ecuación de recurrencia T_n indica cómo continúa la sucesión pero no nos dice como empieza tal.
si $T_1 = 1$, se tiene $T = (1, 7, 3, 15, 31, ...)$.
si $T_2 = 1$, se tiene $T = (2, 5, 11, 23, 47, ...)$.
si $T_4 = 1$, se tiene $T = (4, 9, 19, 39, 79, ...)$.
si $T_{-1} = 1$, se tiene $T = (-1, -1, -1, 1 - 1, -1, ...)$.

¿Hay formula para cada una de estas sucesiones? ¿Existe una fórmula(tal vez con n y el valor de T_1) que describa todos los terminos de la sucesión?¿existe una posible solución para T_n?
Para poder responder este tipo de problemas, veamos un poco más de ecuaciónes con recurrencia.

1. Ejemplos definidos por ecuaciones de recurrencia.

1.1. ejemplo 1.[Desajustes]

Imagina una fiesta donde las parejas llegan juntas, pero al final de la noche, cada persona se va con una nueva pareja. Para cada $n \in P$, digamos que D_n es el número de diferentes formas en que las parejas pueden ser "trastornadas", es decir, reorganizadas en parejas, por lo que ni uno está emparejado con la persona con la que llegaron.

Para los valores :
$D_1 = 0$ // una pareja no puede ser transtornada.
$D_2 = 1$ // $\exists$ una y solo una manera de transtornar una pareja.
$D_3 = 2$ // si las parejas llegan como Aa, Bb, Cc, entonces A estaria emparejado con b o c. Si A esta emparejado con b, C debe estar emparejado con a(y no c) y B con c. Si A esta emparejado con c, B no debe estar emparejado con a(y no b) y C con b.

¿Qué tan grandes son D_4, D_5 y D_{10}? ¿Cómo podemos calcularlos? ¿Hay una fórmula?

Vamos a desarrollar una estrategia para contar los desajustes cuando $n \geq 4$. Supongamos que hay n mujeres $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, y cada A_j llega con el hombre a_j.

La mujer A_1 puede ser re-emparejadaçon cualquiera de los $n - 1$ hombre restantes a_2 o a_3 o ...o a_n; digamos que esta emparejada con a_k, donde $2 \leq k \leq n$. y ahora consideremos a'_ks pareja original de la mujer A_k: ella podria tomar a_1 o ella podria rechazar a_1 y tomar a alguien más.

Si A_1 es pareja con a_k y A_k es pareja con a_1, entonces $n - 2$ parejas dejaron para transtornar, y eso puede hacerce exactamente de D_{n-2} maneras diferente.
Ahora para cada uno de los $n - 1$ hombres que A_1 podria elegir, hay $\{D_{n-2} + D_{n-1}\}$ diferentes formas de completar el trastorno. Por lo tanto, cuando $n \geq 4$ tenemos :

$$D_n = (n - 1)\{D_{n-2} + D_{n-1}\} \qquad (1_1)$$

Usando la ecuación (1_1) las evaluaciones para 1 y 2 verifican la igualdad, ahora evaluemos D_n para cualquier valor de n, con $n \in \mathbb{N}$

$D_3 = (3-1)\{D_2 + D_1\} = 2(1+0) = 2$
$D_4 = (4-1)\{D_3 + D_2\} = 3(2+1) = 9$
$D_5 = (5-1)\{D_4 + D_3\} = 4(9+2) = 44$
$D_6 = (6-1)\{D_5 + D_4\} = 5(44+9) = 265$
$D_7 = (7-1)\{D_6 + D_5\} = 6(265+44) = 1854$
$D_8 = (8-1)\{D_7 + D_6\} = 7(1854+265) = 14833$
$D_9 = (9-1)\{D_8 + D_7\} = 8(14833+1854) = 133496$
$D_{10} = (10-1)\{D_9 + D_8\} = 9(133496+14833) = 1334961$

La suceción en P definido por $S_n = A \times n!$ donde A es un número real satisface la ecuación de recurrencia 1_1. Si $n \geq 3$ se tiene :

$$\begin{aligned}
(n-1)\{S_{n-2} + S_{n-1}\} &= (n-1)\{A(n-2)! + A(n-1)!\} \\
&= (n-1)A(n-2)!\{1 + (n-1)\} \\
&= A(n-1)(n-2)!\{n\} \\
&= A \times n! \\
&= S_n.
\end{aligned}$$

¿Pero se aplica esta formula cuando $n = 1$ o $n = 2$?
¿Existe algun número real tal que $D_n = A(n!)$ cuando $n = 1$ o $n = 2$?
No, porque si $0 = D_1 = A(1!)$, entonces A debe ser igual a 0,
y si $1 = D_2 = A(2!)$, se tiene que A deberia tomar el valor de $\frac{1}{2}$.

Sin embargo, podemos usar esta fórmula para probar que D_n es acotado.

Teorema 1 *para todo $n \geq 2$;* $\quad (\frac{1}{3})n! \leq D_n \leq (\frac{1}{2})n!$

Primero considere la tabla de valores:

n	(1/3)n!	D_n	(1/2)n!
1	1/3	0	1/2
2	2/3	1	1 = 2/2
3	6/3 = 2	2	3 = 6/2
4	24/3 = 8	9	12 = 24/2
5	120/3 = 40	44	60 = 120/2
6	720/3 = 240	265	360 = 720/2

Demostración
Por inducción fuerte en matemática sobre n.

Paso 1. Si $n = 2$, se tiene $(1/3)n! = 2/3 < 1 = D_n = (1/2)n!$
y $\quad n = 3$, se tiene $(1/3)n! = 6/3 = 2 = D_n < 3 = (1/2)n!$.

Paso 2. Supongamos que $\exists\ k \geq 3$ tal que si $2 \leq n \leq k$, se tiene $(1/3)n! \leq D_n \leq (1/2)n!$.

Paso 3. Si $n = k+1$, se tiene $n \geq 4$ y :
$D_n = (n-1)[D_{n-2} + D_{n-1}]$ cuando $2 \leq n-2 < n-1 \leq k$.

Asi, $\quad D_n \leq (n-1)\{(1/3)[n-2]! + (1/3)[n-1]!\} = (1/3)n!$, // como vimos antes y $\qquad D_n \le (n-1)\{(1/2)[n-2]! + (1/2)[n-1]!\} = (1/2)n!$. // como vimos antes.

La mejor fórmula para $\mathbf{D_n}$ que sabemos utiliza la función de " entero más cercano". Para cualquier número real x, sea $\lceil x \rfloor$ que denote ***el entero más cercano a*** x se define de la siguiente manera:
Si x es escrito como $\boldsymbol{n+f}$ donde $\boldsymbol{n}$ es el entero $\lfloor x \rfloor$, y $\boldsymbol{f}$ es una fracción donde $0 \le f < 1$:

si $0 \le f < \frac{1}{2}$ $\qquad$ entonces $\lceil x \rfloor = n$;

si $\frac{1}{2} \le f < 1$ $\qquad$ entonces $\lceil x \rfloor = n+1$. // Es ¿ $\lceil x \rfloor = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$?

Asi que $\lceil 3{,}29 \rfloor = 3$, $\qquad \lceil -3{,}78 \rfloor = -4$,

Entonces $\mathbf{D_n} = \lceil (n!)/e \rfloor$ cuando $e = 2{,}71828182844...$ es la base del logaritmo natural. // $(n!)/e$ nunca es igual a $\lceil (n!)/e \rfloor + \frac{1}{2}$.

n	D_n	(n!)/e
1	0	0.367879441
2	1	0.735758882
3	2	2.207276647
4	9	8.829106588
5	44	44.14553294
6	265	264.8731976
7	1854	1854.112384
8	14833	14832.89907
9	133496	133496.0916
10	1334961	1334960.916

Hay otra fórmula (mucho menos compacta) para $\mathbf{D_n}$ dado en los ejercicios, junto con un resumen de la prueba de que $\mathbf{D_n} = \lceil (n!)/e \rfloor$(para completar).

1.2. Ejemplo 2.[Números de ackermann]

Por los 1920s, un lógico y matemático alemán, Wilhelm Ackermann (1896–1962), inventó una función muy curiosa, $A : P \times P \longrightarrow P$, que define recursivamente usando "tres reglas":
Regla 1. $A(1, n) = 2$ para $n = 1, 2, ...,$
Regla 2. $A(m, 1) = 2m$ para $m = 2, 3, ...,$
Regla 3. cuando $m > 1$ y $n > 1$ se tiene: $A(m, n) = A(A(m-1, n), n-1)$.

$$
\begin{aligned}
Entonces \quad A(2,2) &= A(A(2-1,2), 2-1) \quad //regla\ 3 \\
&= A(A(1,2), 1) \\
&= A(2,1) \quad //regla\ 1 \\
&= 2(2) \quad //regla\ 2 \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

ademas

$$
\begin{aligned}
A(2,3) &= A(A(2-1,3), 3-1) \quad //regla\ 3 \\
&= A(A(1,3), 2) \\
&= A(2,2) \quad //regla 1 \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

De hecho

$$
\begin{aligned}
si\ A(2,k) &= 4, && //para\ algun\ k \geq 2 \\
entonces\ A(2,k+1) &= A(A(2-1,k+1),(k+1)-1) && //regla\ 3 \\
&= A(A(1,k+1),k) \\
&= A(2,k) && //regla\ 1 \\
&= 4. && //nuestro\ supuesto
\end{aligned}
$$

Así, tenemos por Inducción Matemática:

$$A(2,n) = 4,\ para\ todo\ n \geq 1.$$

Hasta ahora la tabla de los números de Ackermann se ve así:

A	n=1	n=2	3	4	5	6	7	8	9...
m=1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
m=2	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	6								
4	8								
5	10								

Observamos que la segunda fila es de puro 4s. ¿pero como es la segunda columna?

$$
\begin{aligned}
A(3,2) &= A(A(3-1,2),2-1) \quad //regla\ 3 \\
&= A(A(2,2),1) \\
&= A(4,1) \quad //segundafila \\
&= 2(4). \quad //Regla\ 2 \\
&= 8. \\
A(4,2) &= A(A(4-1,2),2-1) \quad //regla\ 3 \\
&= A(A(3,2),1) \\
&= A(8,1) \quad //encima \\
&= 2(8). \quad //Regla\ 2 \\
&= 16. \\
Si\quad A(k,2) &= 2^k \quad //\ para\ algunos\ k \geq 2 \\
se\ tiene &= A(A([k+1],2-1) \quad //\ regla\ 3 \\
&= A(A(k,2),1) \\
&= A(2^k,1) \quad //\ nuestro\ supuesto \\
&= 2(2^k) \quad //\ regla\ 2 \\
&= 2^{k+1}.
\end{aligned}
$$

ademas

$$
\begin{aligned}
A(2,3) &= A(A(2-1,3),3-1) \quad //regla\ 3 \\
&= A(A(1,3),2) \\
&= A(2,2) \quad //regla1 \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

$Asi\ se\ tiene:\ A(m,2) = 2^m\ para\ todo\ m\ \geq\ 1.$

Ahora, ¿como so los otros valores?

$$\begin{aligned}
A(3,3) &= A(A(3-1),3),3-1) && //Regla\ 3\\
&= A(A(2,3),2)\\
&= A(4,2) && //Segunda\ fila\\
&= 2^4 && //segunda\ columna\\
&= 16.\\
A(4,3) &= A(A(4-1),3),3-1) && //Regla\ 3\\
&= A(A(3,3),2)\\
&= A(16,2) && //Encima\\
&= 2^{16} && //Segunda\ columna\\
&= 65536.\\
A(3,4) &= A(A(3-1),3),4-1) && //Regla\ 3\\
&= A(A(2,4),3)\\
&= A(4,3) && //Segunda\ fila\\
&= 65536.
\end{aligned}$$

¿Cual es el valor de A(4,4)? ¿Podría ejecutar un programa recursivo simple para evaluar A (4,4)?

$$\begin{aligned}
A(5,3) &= A(A(5-1),3),3-1) && //Regla\ 3\\
&= A(A(4,3),2)\\
&= A(65536,2)\\
&= 2^{65536}. && //Segunda\ columna\\
&= n\ (n\ grande\ aprox\ 20000\ digitos\ en\ base\ 10.)
\end{aligned}$$

hasta ahora tenemos:

A	n=1	n=2	3	4	5	6	7	8	9...
m=1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
m=2	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	6	8	16	65536	?				
4	8	16	65536	?					
5	10	32	2^{65536}						

¿Cómo continúa la tercera columna?

sea $2\uparrow$ denota el valor de "Torre"de k 2's, definida recursivamente por

$$2\uparrow 1 = 2;\ y\ para\ k\ \geq 1,\ 2\uparrow[k+1] = 2^{2\uparrow k}.$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}
2\uparrow 2 &= 2^{2\uparrow 1} = 2^2 = 4,\\
2\uparrow 3 &= 2^{2\uparrow 2} = 2^4 = 16,\\
2\uparrow 4 &= 2^{2\uparrow 3} = 2^{16} = 65536.
\end{aligned}$$

Podemos probar (por Inducción Matemática) que $A(m,3) = 2\uparrow m;\ \forall m \in \mathbf{P}$

Paso 1. Si $m = 1$, entonces por la regla 1, $A(1,3) = 2$ y $2 = 2\uparrow 1$.

Paso 2. Asuma que $\exists k \geq 1$ tal que $A(k,3) = 2\uparrow k$.

Paso 3. Si $m = k+1$, entonces por la regla 3

$$\begin{aligned}
A(k+1,3) &= A(A([k+1]-1,3),3-1)\\
&= A(A(k,3),2)\\
&= A(2\uparrow k,2) \quad //nuestro\ supuesto\\
&= 2^{2\uparrow k}. \qquad\quad //segunda\ \ columna\\
&= 2\uparrow(k+1) \quad //definido\ por \uparrow
\end{aligned}$$

Asi, $A(m,3) = 2\uparrow m$ para todo $m \geq 1$. // por Inducción Matemática.

$$\begin{aligned}
\textit{Finalmente} \quad A(4,4) &= A(A(4-1,4),4-1) \quad //regla\ 3\\
&= A(A(3,4),3)\\
&= A(65536,3) \quad //encima\\
&= 2\uparrow(65536).
\end{aligned}$$

Pero este es un número tan grande que nunca podría escribirse en dígitos decimales, incluso utilizando todo el papel del mundo, Su valor nunca podria ser calculado. Ahora nos preguntamos ¿Los números Ackermann son "computables"? Por otro lado, supongamos que las secuencias que encontramos, incluso aquellas definidas por ecuaciones de recurrencia, serán fáciles para entender y tratar.

Ahora daremos 3 teoremas para poder presentar la solución de ecuaciones de recurrencia de primer y segundo orden.

Teorema 2 *Si S es una sucesión aritmética con diferencia común b, entonces* $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = I + nb$ *donde* $I = S_0$.

Demostración.
// Observamos que I es el valor inicial en S.
// Aqui p_n es la ecuación $S_n = I + nb$.

La demostración se hace por Inducción Matemática, usando la ecuación de recurrencia

$$S_{q+1} = S_q + b;\ \forall\ q \in \mathbb{N},$$

Paso 1. Si $n = 0$, entonces $S_n = I$, ya que : $S_0 = I + 0 \times b = I$. // $P(0)$ es verdadero.
Paso 2. Asuma que $\exists k \in \mathbb{N}$ cuando $S_k = I + kb$. // $P(k)$ es verdadero.
Paso 3. Si $n = k+1$, entonces :

$$\begin{aligned}
S_n = S_{k+1} &= S_k + b\\
&= \{I + kb\} + b\\
&= I + (kb + b)\\
&= I + (k+1)b. \quad //Es\ decir\ cumple\ para\ (k+1).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = I + nb = S_0 + nb$.

Teorema 3 *Si S es la sucesión geométrica con razón común r, entonces* $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = r^n \times I$ *cuando* $I = S_0$.

Demostración

// La demostración se hace por Inducción Matemática, usando la ecuación de recurrencia :

$$S_{q+1} = r \times S_q;\ \forall q \in \mathbb{N}.$$

// Aqui y P_n es la ecuación $S_n = r^n \times I$.

Paso 1. Si $n = 0$, entonces $S_n = I$, ya que : $S_0 = r^0 \times I = 1 \times I = I$. // $P(0)$ es verdadero.

Paso 2. Asuma que $\exists k \in \mathbb{N}$ cuando $S_k = r^k \times I$. // $P(k)$ es verdadero.

Paso 3. Si $n = k + 1$, entonces :

$$\begin{aligned} S_n = S_{k+1} &= r \times S_k && \textit{//usando la S.R.} \\ &= r \times \{r^k \times I\} && \textit{//por el paso } 2. \\ &= \{r \times r^k\} \times I \\ &= r^{k+1} \times I. && \textit{//Es decir cumple para } (k+1). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = r^{k+1} \times I$.

//Esto se puede generalizar como:

//Si $S_a = I$ y $\forall q \in \{a..\};\ S_{q+1} = r \times S_q$.

//Entonces $\forall n \in \{a..\};\ S_n = r^n \times K$ cuando $K = \dfrac{I}{r^a}$.

Teorema 4 *Si* $r \neq 1$, *entonces* $\forall n \in \mathbb{N},\ I + rI + rI^2 + ... + r^n I = \dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \times I$.

Demostración

//Por Inducción Matematicá nuevamente. cuando $r - 1 \neq 0$

//Y $P(n)$ es la ecuación

Paso 1. Si $n = 0$, entonces ,la ecuación del lado izquierdo termina siendo I , y al lado derecho $\dfrac{r^{0+1} - 1}{r - 1} \times I = I$. por lo tanto sí cumple. // $P(0)$ es verdadero.

Paso 2. Asuma que $\exists k \in \mathbb{N}$ cuando $I + rI + r^2 I + ... + r^k I = \dfrac{r^{k+1} - 1}{r - 1} \times I = I$. // $P(k)$ es verdadero.

Paso 3. Si $n = k + 1$, entonces :

$$\begin{aligned} L.I &= I + rI + r^2 I + ... + r^k I + r^{k+1} I \\ &= \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1} \times I + r^{k+1} I \times \frac{r - 1}{r - 1} \quad \textit{//por parte } 2. \\ &= \{\frac{r^{k+1} - 1 + r^{k+1} r - r^{k+1}}{r - 1}\} \times I \\ &= \frac{r^{[k+1]+1}}{r - 1} \times I = L.D. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I + rI + r^2 I + ... + r^n I = \dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \times I$.