

Carlos A. Aznarán Laos  
Franss Cruz Ordoñez  
Junior Micha Velasque  
Gabriel Quiróz Gómez  
Davis S. García Fernández

## Relación de recurrencia

Ecuaciones en diferencias y análisis en escalas de tiempo

20 de junio del 2019

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

*La presente monografía está dedicada a mis  
profesores y estudiantes de la Facultad de Ciencias.*

## Prólogo

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Rímac, junio 2019

*El profesor del curso*

## Prefacio

Uno de los temas más importantes dentro del *Análisis Matemático* son las sucesiones, es decir, funciones cuyo dominio y contradominio es el conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$  y el de los números reales  $\mathbb{R}$ , respectivamente. En el presente trabajo nos enfocaremos en nada menos que las “relaciones de recurrencia”, donde cualquier término se determina en función de al menos uno de los términos precedentes, en el célebre libro [5, ver pág. 404] de *Leonardo de Pisa*<sup>1</sup> se da la solución al siguiente problema de cría de conejos:

“Cierta persona cría una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y desea saber cuántos nacimientos durante un año han acontecido a partir del par inicial, de acuerdo a su naturaleza, cada pareja necesita un mes para envejecer y cada mes posterior procrea otra pareja”.

Este ejemplo famoso es conocido como la *sucesión de Fibonacci*. Viendo esto, hemos concebido un modelo matemático basado en sucesiones recursivas, dando su definición, algunos otros ejemplos, su relación con las ecuaciones en diferencias y otras aplicaciones como resolver sistemas de ecuaciones lineales empleando nuestros conocimientos adquiridos en el curso de Análisis Real de la carrera de Matemática en la Universidad Nacional de Ingeniería.

Rímac,  
junio 2019

*Carlos Aznarán Laos*  
*Franss Cruz Ordoñez*

---

<sup>1</sup> Fibonacci

## Agradecimientos

Nos gustaría expresar el agradecimiento especial al maestro Manuel Toribio Cangana, así como a nuestro profesor Benito Ostos, que nos brindó la excelente oportunidad de elaborar esta monografía sobre el tema *relaciones de recurrencia*, quien también nos ayudó en la organización del mismo. Estamos muy agradecidos con ellos. En segundo lugar, también nos gustaría agradecer a nuestros padres y amigos que nos ayudaron a terminar este proyecto en un tiempo limitado.

Estamos haciendo este proyecto no solo por las notas sino también para expandir nuestro conocimiento.

# Contenido

## Parte I Fundamentos

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	3
1.1	Relación de Recurrencia	3
1.2	Ecuaciones en diferencias	5
1.2.1	Algunos modelos de recurrencias lineales	9
1.2.2	Problemas	10
1.3	Recurrencias Lineales con coeficientes constantes	12
1.4	Relación de recurrencia lineal con homogénea con coeficientes constantes	14
1.5	Ejemplos definidos por ecuaciones de recurrencia	16
1.6	Resolución de ecuaciones de recurrencia lineal de primer orden	21
1.6.1	Las torres de Hanói	22
1.6.2	Los tres piratas naufragados	24
1.6.3	Interés compuesto	25
1.7	Resolución de ecuaciones de recurrencia lineal de segundo orden	26

## Parte II Realización numérica

<b>2</b>	<b>Método de Euler</b>	34
2.1	Ecuación diferencial ordinaria lineal	34

## Parte III Aplicaciones

<b>3</b>	<b>Bifurcación de la ecuación logística</b>	36
3.1	Ecuación diferencial ordinaria lineal	36
3.2	Introducción	38
3.3	Diferenciación	39
	<b>Algunos códigos Python adicionales</b>	42
A.1	Interés compuesto	42
A.2	Números de Fibonacci	42
A.3	Método de Runge–Kutta	42
A.4	Escala de tiempo	42
	<b>Índice</b>	43

## **Acrónimos**

CAS Sistema Computarizado Algebraico  
RE Relación de recurrencia

# **Parte I**

## **Fundamentos**



En la primera parte de la monografía presentaremos los conceptos fundamentales para modelar y simular los problemas de las ecuaciones en diferencias, a veces, mal llamado *relaciones de recurrencias*. En el capítulo 1 presentaremos los modelos fundamentales y las ecuaciones en diferencias. Discutiremos la relación de *Ackermann*

# Capítulo 1

## Introducción

**Resumen.** En este capítulo introducimos las relaciones de recurrencia. Estas son *ecuaciones* que definen de *manera recursiva*, a través de funciones adecuadas, los términos aparecen en una sucesión real o compleja. La primera sección trata algunos ejemplos bien conocidos que muestran cómo estas relaciones pueden surgir en la vida real, por ejemplo, el problema de la Torre de Hanói o el problema de Flavio Josefo. Luego, dedicamos una gran parte del capítulo a las ecuaciones en diferencias, es decir,  $\Delta x_n$ , donde  $f$  es una función de valor real: en este contexto, los métodos más estudiados son el de Euler y Runge-Kutta. Estudiamos a fondo el caso que pueden ser usados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. La última parte del capítulo está dedicada al célebre teorema del Polinomio minimal, que afirma que la raíz de un implica la solución: así le damos al estudiante el sabor de un sistema dinámico, esa noción no se desarrolla explícitamente en la monografía.

### 1.1 Relación de Recurrencia

En esta sección presentamos a nuestros lectores las nociones básicas subyacentes de las relaciones de recurrencia, así como varios ejemplos de tales relaciones.

Una relación de recurrencia es una familia numerable de ecuaciones que definen sucesiones en modo recursivo. Aquellas sucesiones que así surgen se llaman *soluciones de la recurrencia*, dependiendo de uno o más *valores iniciales*: cada término que sigue al valor inicial en tales sucesiones es definida como una función de los términos anteriores.

#### Ejemplo 1.1 (Relaciones de recurrencias real)

1. El sistema de ecuaciones con coeficientes reales en la colección infinita de incógnitas  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & 3x_0 \\ x_2 & = & 3x_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ x_{n+1} & = & 3x_n \\ \vdots & = & \vdots \end{array} \right.$$

podría indicarse más concisamente por  $x_{n+1} = 3x_n, n \geq 0$ , es una *relación de recurrencia*. La sucesión  $(3^n)_{n \geq 0}$  es una solución de la recurrencia dada con *valor inicial*  $x_0 = 1$ . Es fácil de convencerse a uno mismo que en general, para cualquier número real  $c \in \mathbb{R}$ , la sucesión  $(c3^n)_{n \geq 0}$  es la única solución de la *recurrencia* con el valor inicial  $x_0 = c$ .

2. Con el cuidado adecuado es fácil verificar que la sucesión real

$$x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 4, \dots, x_7 = 4, \dots, x_{2^m} = 2^m, \dots$$

es la solución de la *relación de recurrencia* con coeficientes reales

$$x_n = \begin{cases} 2x_{n/2}, & \text{si } n \geq 2 \text{ es par,} \\ x_{n-1}, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

con el *valor inicial*  $x_0 = 1$ .

3. La sucesión real

$$x_0 = 2, x_1 = 1, x_2 = 2^{1/2}, x_3 = 1, \dots, x_{2^m-1} = 1, x_{2^m} = 2^{1/2^m}, \dots$$

es la solución de la *relación de recurrencia* con coeficientes reales

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} - 2}, \quad n \geq 2,$$

y los *valores iniciales*  $x_0 = 2$  y  $x_1 = 1$ .

La pregunta que ahora surge naturalmente es la de definir relaciones generales de recurrencia. Buscamos exponer de manera rigurosa lo que acabamos de inferir de los ejemplos anteriores.

**Definición 1.1 (Relación de recurrencia)** Una **relación de recurrencia** en las incógnitas  $x_i, i \in \mathbb{N}$ , es una familia de ecuaciones

$$x_n = f_n(x_0, \dots, x_{n-1}), \quad n \geq r,$$

donde  $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ , y  $(f_n)_{n \geq r}$  son funciones

$$f_n: D_n \rightarrow \mathbb{R}, \quad D_n \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \text{o} \quad f_n: D_n \rightarrow \mathbb{C}, \quad D_n \subseteq \mathbb{C}^n.$$

Dependiendo del caso encontrado, las llamaremos **recurrencias reales** o **recurrencias complejas**. Las incógnitas  $x_0, \dots, x_{r-1}$  son llamadas **libres**. Su número  $r$  es el **orden** de la relación.

Al reemplazar  $n$  por  $n + r$ , la relación de recurrencia de orden  $r$

$$x_n = f_n(x_0, \dots, x_{n-1}), \quad n \geq r,$$

puede también escribirse como

$$x_{n+r} = f_{n+r}(x_0, \dots, x_{n+r-1}), \quad n \geq 0.$$

**Definición 1.2 (Solución de una recurrencia)** Una sucesión  $(a_n)_n$  es una **solución** de la relación de recurrencia de orden  $r$

$$x_n = f_n(x_0, \dots, x_{n-1}), \quad n \geq r, \quad (1.1)$$

con  $f_n: D_n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_n \in \mathbb{R}^n$ , sii

$$(a_0, \dots, a_{n-1}) \in D_n, \quad a_n = f_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \quad \forall n \geq r.$$

La sucesión  $(a_0, \dots, a_{r-1})$  de valores asignados para las  $r$  incógnitas libres es llamada la  $r$ -sucesión de **valor inicial** o de las **condiciones iniciales** de la solución. Definimos la **solución general real** (respectivamente **compleja**) de la sucesión como la familia de todas las soluciones con elementos que pertenece a  $\mathbb{R}$  (respectivamente en  $\mathbb{C}$ ).

**Ejemplo 1.2** Considere la relación de recurrencia de primer orden definida por

$$x_n = \frac{1}{x_{n-1} - 1}, \quad n \geq 1.$$

La 1-sucesión  $(2) \in D_0$  no es una sucesión de valor inicial de una solución, en efecto, 2 pertenece al dominio de  $f_0(x) = \frac{1}{x-1}$ , pero  $(2, f_0(x=2)) = (2, 1)$  no pertenece al dominio de  $f_1(x_0, x_1) = \frac{1}{x-1}$ . En cambio, la 1-sucesión  $(3)$  es una sucesión de valor inicial de la solución (sucesión)

$$(a_n)_n := \left\{ 3, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{7}, -\frac{7}{1}, \dots \right\}.$$

Note que para  $n \geq 2$  uno tiene  $a_n < 0$  y así  $a_{n+1} = \frac{1}{a_n - 1} < 0$  es distinto de 1.

**Ejemplo 1.3 (Forma alternativa de la relación de recurrencia)** En muchas ocasiones una relación de recurrencia de orden  $r$  involucra solo los últimos  $r$  términos y es de la forma

$$x_n = g_n(x_{n-r}, \dots, x_{n-1}), \quad n \geq r,$$

donde  $(g_n)_{n \geq r}$  son las funciones definidas en un subconjunto  $E_n$  de  $\mathbb{R}^r$  o  $\mathbb{C}^r$ . Este último es de hecho una relación de recurrencia: es suficiente para establecer  $f_n(x_0, \dots, x_{n-1}) := g_n(x_{n-r}, \dots, x_{n-1})$  para  $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in D_n := \mathbb{R}^{n-r} \times E_n$  (o  $\mathbb{C}^{n-r} \times E_n$ ) a fin de cumplir los requerimientos de la definición (1.1).

## 1.2 Ecuaciones en diferencias

Aquí es conveniente representar cualquier sucesión de números reales  $(a_n)_n$  como la función  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por:

$$f(n) = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dadas dos funciones  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $r \in \mathbb{R}$  consideremos las funciones:

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n), \quad \text{y} \quad (rf)(n) = rf(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dotado de estas operaciones, el conjunto de funciones de  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de funciones. También consideraremos la función:

$$(fg)(n) = f(n)g(n) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Un mapa lineal del espacio de funciones de  $\mathbb{N}$  a  $\mathbb{R}$  en sí mismo es un operador.

**Definición 1.3 (Operador identidad y operador de cambio)** Consideramos el espacio de funciones de  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Para cada función  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  el operador identidad y el operador de cambio  $\theta$  están definidos:

$$\mathbb{I}(f) = f \quad \text{y} \quad \theta(f)(n) = f(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Uno verifica inmediatamente que la identidad y el operador de cambio son de hecho lineales.

**Proposición 1.1 (Linealidad de la identidad y el operador de cambio)** Sean las funciones  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  y  $c \in \mathbb{R}$ . Luego tenemos:

1.  $\mathbb{I}(f+g)(n) = \mathbb{I}(f)(n) + \mathbb{I}(g)(n)$ .
2.  $\mathbb{I}(cf)(n) = c\mathbb{I}(f)(n)$  y  $\theta(cf)(n) = c\theta(f)(n)$ .

**Prueba** Sea  $n \in \mathbb{N}$ , luego:

$$\begin{aligned} \theta(f+g)(n) &= (f+g)(n+1) = f(n+1) + g(n+1) = \theta(f)(n) + \theta(g)(n). \\ \theta(cf)(n) &= (cf)(n+1) = cf(n+1) = c\theta(f)(n). \end{aligned}$$

Se verifica la linealidad de  $\mathbb{I}$  inmediatamente. □

Para cualquier operador  $T$ , será conveniente un ligero abuso de notación, para escribir  $Tf(n)$  en lugar de  $T(f)(n)$ . Además en algunos casos, por ejemplo cuando  $f$  depende de otros parámetros, uno escribe  $T_n f(n)$  en lugar de  $Tf(n)$  para evitar la ambigüedad. Así, por ejemplo, denotada por  $\mathbb{I}_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  la función definida por  $\mathbb{I}_{\mathbb{N}}(n) = n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  escribiremos  $\theta n = n+1$  en lugar de  $\theta(\mathbb{I}_{\mathbb{N}})(n) = n+1$ . Análogamente  $\theta n^2 = (n+1)^2$ ,  $\theta_n n^a = (n+1)^a$  y  $\theta_n a^n = a^{n+1}$  para cada  $a \in \mathbb{R}$ .

Para las funciones de valor real de una variable de número natural ahora introducimos el análogo de la derivada habitual para funciones de valor real de una variable real:

**Definición 1.4 (Operador de cambio)** El operador diferencia es el operador  $\Delta$  que a cada función  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  asigna la función  $\Delta f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , definido de la siguiente manera:

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Observación 1.1** Usando el operador de cambio, uno tiene  $\Delta = \theta - \mathbb{I}$ , es decir:

$$\Delta f = \theta f - f, \quad \forall f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Claramente, para cada función  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , uno tiene:

$$\Delta f(k) = \frac{f(k+1) - f(k)}{1},$$

entonces  $\Delta f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función que mide el cociente de diferencia de  $f$  sobre el intervalo más pequeño posible de números naturales, es decir, un intervalo de longitud uno. En este sentido, el operador diferencia constituye el análogo discreto de la noción de derivada para funciones de una variable real. En lo que sigue, el lector tendrá ocasión para anotar analogías y contrastes entre estas dos nociones.

Al igual que la derivada, el operador de diferencia es lineal: de hecho, es una diferencia de dos operadores lineales.

**Proposición 1.2 (Linealidad de la diferencia)** Sean  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $c \in \mathbb{R}$ . Luego uno tiene:

1.  $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$ .
2.  $\Delta(cf) = c \Delta f$ .

**Prueba** Como  $\Delta = \theta - \mathbb{I}$  se obtiene:

1.  $\Delta(f + g) = (\theta - \mathbb{I})(f + g) = \theta(f + g) - \mathbb{I}(f + g) = \theta(f) - f + \theta(g) - g = \Delta(f) + \Delta(g)$ .
2.  $\Delta(cf) = (\theta - \mathbb{I})(cf) = \theta(cf) - \mathbb{I}(cf) = c\theta(f) - cf = c(\theta(f) - f) = c\Delta(f)$ .  
□

Ahora vemos cómo el operador de diferencia actúa en algunas funciones simples con dominio  $\mathbb{N}$ .

#### Ejemplo 1.4

1. Funciones constantes: al igual que en el caso de la derivada de una constante. Funciona con dominios en  $\mathbb{R}$ , aquí también tenemos que la diferencia de una función constante (con dominio  $\mathbb{N}$ ) es igual a la función cero: de hecho, si  $f(n) = c \in \mathbb{R}$  por cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\Delta f(k) = f(k + 1) - f(k) = c - c = 0.$$

2. Función de identidad en los números naturales: al igual que en el caso continuo, la diferencia de la función de identidad  $I_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  es la función constante  $n = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . De hecho,

$$\Delta I_{\mathbb{N}}(n) = I_{\mathbb{N}}(n + 1) - I_{\mathbb{N}}(n) = n + 1 - n = 1.$$

**Ejemplo 1.5** Los operadores de cambio y diferencia conmutan. Más explícitamente, uno tiene

$$\Delta \circ \theta = \theta \circ \Delta.$$

**Prueba** De hecho, para cada  $n \in \mathbb{N}$  y cada función  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  uno tiene

$$\Delta(\theta f)(n) = \theta f(n + 1) - \theta f(n) = f(n + 2) - f(n + 1),$$

mientras

$$\theta(\Delta f)(n) = \Delta f(n + 1) = f(n + 2) - f(n + 1).$$

Por lo tanto, uno tiene  $\Delta(\theta f) = \theta(\Delta f)(n)$ . □

La fórmula para la diferencia de un producto se parece a la del derivado de un producto, excepto la introducción del operador de turno:

**Proposición 1.3 (Diferencia de un producto)** Si  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , luego

$$\Delta(fg) = \Delta f \theta g + f \Delta g.$$

**Observación 1.2** Cabe destacar el hecho evidente de que a pesar de la aparente falta de simetría, uno tiene  $\Delta(fg) = \Delta(gf)$ .

**Prueba**

$$\begin{aligned}
\Delta(f(n)g(n)) &= f(n+1)g(n+1) - f(n)g(n) \\
&= f(n+1)g(n+1) - f(n)g(n+1) + f(n)(n+1) - f(n)g(n) \\
&= (f(n+1) - f(n))g(n+1) + f(n)g(n+1) - g(n) \\
&= \Delta f(n)g(n+1) + f(n)\Delta g(n).
\end{aligned}$$

Una ecuación en diferencias es una expresión de la forma:

$$G(n, f(n), f(n+1), \dots, f(n+k)) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$$

donde  $f$  es una función definida en  $\mathbb{Z}$ .

Si después de simplificar esta expresión quedan los términos  $f(n+k_1)$  y  $f(n+k_2)$  como el mayor y el menor, respectivamente. Se dice que la ecuación es de orden  $k = k_1 - k_2$ .

**Ejemplo 1.6 (Ecuación en diferencias de orden 3)** La ecuación dada por

$$5f(n+4) - 4f(n+2) + f(n+1) + (n-2)^3 = 0$$

es de orden  $4 - 1 = 3$ .

Una ecuación en diferencias de orden  $k$  se dice que es *lineal* si puede expresarse de la forma:

$$p_0(n)f(n+k) + p_1(n)f(n+k-1) + \dots + p_k(n)f(n) = g(n),$$

donde los coeficientes  $p_i$  son funciones definidas en  $\mathbb{Z}$ .

El caso más sencillo es cuando los coeficientes son constantes  $p_i(n) = a_i$ :

$$a_0f(n+k) + a_1f(n+k-1) + \dots + a_kf(n) = g(n).$$

La ecuación en diferencias se dice que es *homogénea* en el caso que  $g(n) = 0$ , y completa en el caso contrario.

**Teorema 1.1** Dada la ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes y de orden  $K$ :

$$a_0f(n+k) + a_1f(n+k-1) + \dots + a_kf(n) = g(n)$$

el problema de hallar una función definida  $\mathbb{Z}$ , que verifique la ecuación, y tales que en los  $k$  enteros consecutivos  $n_0, n_0+1, \dots, n_0+k-1$  tome los valores dados  $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ , tiene solución única.

**Teorema 1.2** Dada una ecuación en diferencias lineal homogénea de coeficientes constantes y de orden  $k$ . Si una solución  $f$  es nula en  $k$  enteros consecutivos, entonces  $f$  es idénticamente nula.

**Teorema 1.3** Toda combinación lineal de soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea de coeficientes constantes y de orden  $k$  es también solución de dicha ecuación.

**Definición 1.5 (Solución de una ecuación en diferencias homogénea)** Sea la ecuación en diferencias lineal homogénea de coeficientes constantes y de orden  $k$ .

$$a_0 f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \cdots + a_k f(n) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Buscaremos soluciones del tipo  $f(n) = r^n$ . Entonces,

$$r^n (a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \cdots + a_k) = 0 \implies r^n (a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \cdots + a_k) = 0.$$

Por tanto,  $r$  es raíz de la **ecuación característica**

$$(a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \cdots + a_k) = 0.$$

El estudio de la solución dependería de si las raíces de la ecuación característica son simples o múltiples.

**Ejemplo 1.7** Hallar la solución de

$$f(n+2) - 4f(n+1) + 3f(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

La ecuación característica es

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \rightarrow r_1 = 3, \quad r_2 = 1.$$

Por lo tanto:

$$f(n) = c_1 3^n + c_2 1^n = c_1 3^n + c_2.$$

Por otra parte:

$$\begin{cases} f(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ f(1) = 3c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \rightarrow c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{2}.$$

De donde

$$f(n) = \frac{1}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

### 1.2.1 Algunos modelos de recurrencias lineales

Ahora damos una serie de ejemplos que ilustran cómo reducir la solución de un problema en el que la búsqueda de las soluciones de una relación de recurrencia apropiada.

**Ejemplo 1.8 (Número de Catalan)** El número de Catalan ( $C_n$ ) es igual al número de rutas de la esquina inferior izquierda de una rejilla cuadrada de  $n \times n$  a la esquina superior derecha si estamos restringidos a viajar solo a la derecha o hacia arriba y si se permite tocar pero no pasar arriba de la diagonal entre la esquina inferior izquierda y la superior derecha. Tal ruta recibe el nombre de *ruta buena*. Se da una relación de recurrencia para los números de Catalan. Las rutas buenas se dividen en clases con base en la primera vez que tocan la diagonal después de salir de la esquina inferior derecha. Por ejemplo, la ruta en la figura toca la diagonal primero en el punto  $(3, 3)$ . Las rutas que tocan la diagonal primero en el punto  $(k, k)$  se consideran construidas por un proceso de dos pasos:

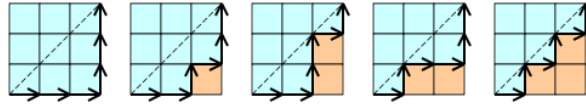
1. Primero, se construye la parte de  $(0, 0)$  a  $(k, k)$ .
2. Segundo, se construye la parte de  $(k, k)$  a  $(n, n)$ . Una buena ruta siempre sale de  $(0, 0)$  moviéndose hacia la derecha a  $(1, 0)$  y siempre llega a  $(k, k)$  moviéndose hacia arriba desde  $(k, k-1)$ .



3. Los movimientos de  $(1, 0)$  a  $(k, k-1)$  dan una ruta buena en la rejilla de  $(k-1) \times (k-1)$  con esquina en  $(1, 0)$ ,  $(1, k-1)$ ,  $(k, k-1)$  y  $(k, 0)$ . En la figura, se marcaron los puntos  $(1, 0)$  y  $(k, k-1)$ ,  $k = 3$ , con rombos, y se aisló la subrejilla de  $(k-1) \times (k-1)$ . Así, hay  $C_{k-1}$  rutas de  $(0, 0)$  a  $(k, k)$  que tocan primero a la diagonal en  $(k, k)$ .
4. La parte de  $(k, k)$  a  $(n, n)$  es una buena ruta en la rejilla de  $(n-k) \times (n-k)$  con esquinas en  $(k, k)$ ,  $(k, n)$ ,  $(n, n)$  y  $(n, k)$  (vea la figura). Hay  $C_{n-k}$  rutas de este tipo. Por el principio de la multiplicación, hay  $C_{k-1}C_{n-k}$  rutas buenas en una rejilla de  $n \times n$  que tocan primero la diagonal en  $(k, k)$ . Las rutas buenas que tocan por primera vez en  $(k', k')$ ,  $k \neq k'$ . Entonces se utiliza el principio de la suma a fin de obtener una relación de recurrencia para el número total de rutas buenas en una rejilla de  $n \times n$ :

$$C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k}.$$

**Fig. 1.1** Retículo de tamaño  $(k, k)$ .



**Ejemplo 1.9 (La escalera)** Un niño decide escalar una escalera con  $n \geq 1$  de tal manera que cada paso que él despeja uno o dos de los pasos de la escalera. Encuentre la relación de recurrencia que sirva para calcular el número de diferentes maneras posibles de escalar la escalera.

Usamos la variable desconocida  $x_n$  para denotar el número de maneras en las cuales el niño puede escalar la escalera de  $n \geq 1$  pasos. Es fácil de observar que  $x_1 = 1$  y  $x_2 = 2$  (dos pasos cada uno de longitud uno, o un paso de longitud dos escalones). Ahora sea  $n \geq 3$ : si con el primer paso el niño mueve solo el primer escalón; existen claramente  $x_{n-1}$  posibles maneras de escalar los que quedan. Si en cambio con el primer lugar, se suben dos peldaños de escalera.

## 1.2.2 Problemas

**Ejercicio 1.1** Supongamos que  $E_n$  es definido recursivamente en  $\mathbb{Z}^+$  por

$$E_0 = 0, E_1 = 2, \text{ y } E_{n+1} = 2n\{E_n + E_{n-1}\} \text{ para } n \geq 1.$$

Determine el valor de  $E_{10}$ .

**Solución 1.1** Suponga que  $E_n$  es definida recursivamente sobre  $P$  por

$$E_0 = 0, \quad E_1 = 2, \quad \text{y} \quad E_{n+1} = 2n\{E_n + E_{n-1}\} \quad \forall n \geq 1.$$

El valor de  $E_{10}$  se determina así:

$$\begin{aligned}
E_2 &= E_{1+1} = 2(1)\{E_1 + E_0\} = 2\{2 + 0\} = 4. \\
E_3 &= E_{2+1} = 2(2)\{E_2 + E_1\} = 4\{4 + 2\} = 24. \\
E_4 &= E_{3+1} = 2(3)\{E_3 + E_2\} = 6\{24 + 4\} = 168. \\
E_5 &= E_{4+1} = 2(4)\{E_4 + E_3\} = 8\{168 + 24\} = 1536. \\
E_6 &= E_{5+1} = 2(5)\{E_5 + E_4\} = 10\{1536 + 168\} = 17040. \\
E_7 &= E_{6+1} = 2(6)\{E_6 + E_5\} = 12\{17040 + 1536\} = 222912. \\
E_8 &= E_{7+1} = 2(7)\{E_7 + E_6\} = 14\{222912 + 17040\} = 3359328. \\
E_9 &= E_{8+1} = 2(8)\{E_8 + E_7\} = 16\{3359328 + 222912\} = 57315840. \\
E_{10} &= E_{9+1} = 2(9)\{E_9 + E_8\} = 18\{57315840 + 3359328\} = 1092153024.
\end{aligned}$$

**Ejercicio 1.2** Supongamos que  $A$  es un conjunto de  $2n$  objetos. Sea  $P_n$  el número de diferentes maneras que los objetos en  $A$  pueden ser “emparejados” (el número de diferentes particiones de  $A$  en 2-subconjuntos). Supongamos que  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Si  $n = 2$ , entonces  $A$  tiene cuatro elementos,  $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ . Los tres posibles emparejamientos son:

1.  $x_1$  con  $x_2$  y  $x_3$  con  $x_4$ ,
2.  $x_2$  con  $x_3$  y  $x_1$  con  $x_4$ ,
3.  $x_3$  con  $x_4$  y  $x_2$  con  $x_1$ .

Así  $P_2 = 3$ .

- (a) Mostrar que si  $n = 3$  y  $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ , existen 15 posibles emparejamientos enumerándolos a todos:
- a.  $x_1$  con  $x_2$  y  $x_3$  con  $x_4$  y  $x_5$  con  $x_6$ .
  - b. ...

Así  $P_3 = 15$ .

- (b) Mostrar que  $P_n$  debe satisfacer la RE  $P_n = (2n - 1)P_{n-1}$  para  $\forall n \geq 2$ .  
(c) Use esta ecuación de recurrencia y la inducción matemática para probar

$$P_n = \frac{(2n)!}{2^n \times n!} \quad \forall n \geq 1.$$

### Solución 1.2

- (a) Los 15 posibles emparejamientos son:

1.  $x_1$  con  $x_2$ ,  $x_3$  con  $x_4$  y  $x_5$  con  $x_6$ .
2.  $x_1$  con  $x_2$ ,  $x_3$  con  $x_5$  y  $x_4$  con  $x_6$ .
3.  $x_1$  con  $x_2$ ,  $x_3$  con  $x_6$  y  $x_4$  con  $x_5$ .
4.  $x_1$  con  $x_3$ ,  $x_2$  con  $x_4$  y  $x_5$  con  $x_6$ .
5.  $x_1$  con  $x_3$ ,  $x_2$  con  $x_5$  y  $x_4$  con  $x_6$ .
6.  $x_1$  con  $x_2$ ,  $x_2$  con  $x_6$  y  $x_4$  con  $x_5$ .
7.  $x_1$  con  $x_4$ ,  $x_2$  con  $x_3$  y  $x_5$  con  $x_6$ .
8.  $x_1$  con  $x_4$ ,  $x_2$  con  $x_5$  y  $x_3$  con  $x_6$ .
9.  $x_1$  con  $x_4$ ,  $x_2$  con  $x_6$  y  $x_3$  con  $x_5$ .
10.  $x_1$  con  $x_5$ ,  $x_2$  con  $x_3$  y  $x_4$  con  $x_6$ .
11.  $x_1$  con  $x_5$ ,  $x_2$  con  $x_4$  y  $x_3$  con  $x_6$ .
12.  $x_1$  con  $x_5$ ,  $x_2$  con  $x_6$  y  $x_3$  con  $x_4$ .
13.  $x_1$  con  $x_6$ ,  $x_2$  con  $x_3$  y  $x_4$  con  $x_5$ .

14.  $x_1$  con  $x_5$ ,  $x_2$  con  $x_4$  y  $x_3$  con  $x_5$ .

15.  $x_1$  con  $x_6$ ,  $x_2$  con  $x_5$  y  $x_3$  con  $x_4$ .

Así,  $P_3 = 15$  posibles emparejamientos.

- (b) Supongamos que  $n \geq 2$ . Un elemento  $x_1$  puede ser emparejado con cualquier de los  $(2n - 1)$  otros elementos en  $A$ . Esto resulta  $2(n - 2) = 2(n - 1)$  elementos aún por emparejar, y que pueden emparejarse en  $P_{n-1}$  maneras. Así, el número de emparejamientos de  $2n$  elementos es  $P_n = (2n - 1) \times P_{n-1}$ .
- (c)  $P_n = (1)(3) \cdots (2n - 1)$ , esto es, el producto de los primeros  $n$  naturales. Por inducción matemática:

Paso 1  $P_1 = 1$  que es el primer natural impar.

Paso 2 Asuma que  $\exists k \geq 1$  donde  $P_k = (1)(3) \cdots (2k - 1)$ .

Paso 3 Si  $n = k + 1$ , entonces para  $n \geq 2$  y

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= (2[k + 1] - 1) P_k \quad \text{usando la RE} \\ &= (2k + 1) \times (1)(3) \cdots (2k - 1) \quad \text{del paso 2} \\ &= (1)(3)(5) \cdots (2k - 1) \times (2[k + 1] - 1). \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.3** Mostrar que  $y_n = \frac{n(n-1)}{2} + c$  para  $n > 0$  es una solución de la relación de recurrencia

$$y_{n+1} = y_n + n.$$

**Solución 1.3**  $z_{n+1} = \frac{[n+1]([n+1]-1)}{2} + c = \frac{[n+1](n)}{2} + c = \frac{n(n-1)+2n}{2} + c = z_n + n.$

**Ejercicio 1.4** Suponga que una sucesión es definida por:

$$f(0) = 5 \text{ y } f(n + 1) = 2 \times f(n) + 1 \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots$$

- (a) Encuentre el valor de  $f(10)$ .
- (b) Probar que la sucesión ni es una sucesión aritmética ni es una sucesión geométrica.

**Solución 1.4** 1.

$$\begin{aligned} f(1) = 11, f(2) &= 23, f(3) = 47, f(4) &= 95, f(5) = 191, \\ f(6) = 383, f(7) &= 767, f(8) = 1535, f(9) &= 3071, f(10) = 6143. \end{aligned}$$

2.  $f(1) - f(0) = 6$ , pero  $f(2) - f(1) = 12$ , así que  $f$  no es una sucesión aritmética. Por otro lado,  $\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{11}{5} = \frac{121}{55}$ , pero  $\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{23}{11} = \frac{115}{55}$ , por lo tanto,  $f$  no es una sucesión geométrica.

## 1.3 Recurrencias Lineales con coeficientes constantes

Una relación de recurrencia lineal de orden  $r$  con coeficientes constantes es una recurrencia del tipo:

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = h_n, \forall n \geq r, \quad (1.2)$$

donde  $c_0, c_1, \dots, c_r$  son constantes reales o complejas, con  $c_0$  y  $c_r$  ambos diferentes de cero y  $(h_n)_{n \geq r}$  es una sucesión de números reales o complejos llamado sucesión de términos

no homogéneos de la recurrencia. La recurrencia es llamada homogénea si la sucesión de términos no homogéneos es una sucesión nula, no homogénea si  $h \neq 0$  para algún  $n$ . La relación de recurrencia:

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \cdots + c_rx_{n-r} = 0, \forall n \geq r, \quad (1.3)$$

es llamada la recurrencia homogénea asociada, o la parte homogénea de la recurrencia (1.2). Como nosotros ya hemos notado, la recurrencia:

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \cdots + c_rx_{n-r} = h_n, \forall n \geq r,$$

puede ser escrito equivalentemente como

$$c_0x_{n+r} + c_1x_{n+(r-1)} + \cdots + c_rx_n = h_{n+r}, \forall n \geq 0.$$

Se puede utilizar cualquiera de las formas presentadas.

*Observación 1.3* Cada  $r$ -secuencia de valores asignados a las  $r$  incógnitas desconocidas de la relación de recurrencia

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \cdots + c_rx_{n-r} = h_n, \forall n \geq r,$$

determina de forma única una solución. Al resolver una relación de recurrencia lineal, el siguiente principio es fundamental importancia.

**Proposición 1.4 (Principio de superposición)** Sean  $(u_n)_n, (v_n)_n$  respectivamente las soluciones de las relaciones de recurrencia lineal.

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \cdots + c_rx_{n-r} = h_n, \quad n \geq r$$

y

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \cdots + c_rx_{n-r} = k_n, \quad n \geq r,$$

con partes homogéneas iguales y secuencias de términos no homogéneos  $(h_n)_n$  y  $(k_n)_n$ . Para cualquier par de constantes  $A$  y  $B$ , la sucesión  $(Av_n + Bv_n)_n$  es una solución de la relación de recurrencia.

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \cdots + c_rx_{n-r} = Ah_n + Bk_n.$$

La solución general de la relación de recurrencia

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \cdots + c_rx_{n-r} = h_n, \quad n \geq r. \quad (1.4)$$

### Prueba

1. Uno tiene fácilmente

$$\begin{aligned} c_0(Au_n + Bv_n) + c_1(Au_{n-1} + Bv_{n-1}) + \cdots + c_r(Au_{n-r} + Bv_{n-r}) &= \\ &= A(c_0u_n + c_1u_{n-1} + \cdots + c_ru_{n-r}) + B(c_0v_n + c_1v_{n-1} + \cdots + c_rv_{n-r}) \\ &= Ah_n + Bk_n. \end{aligned}$$

2. Sea  $(u_n)_n$  una solución particular de (1.4). Por el punto previo nosotros conocemos que  $(v_n)_n = (u_n)_n + (v_n - u_n)_n$  es una solución de (1.4) si y solo si  $v_n - u_n$  es una

solución de la recurrencia homogénea asociada. Por lo tanto cada solución de (1.4) es obtenida añadiendo una solución de la recurrencia homogénea asociada para  $(u_n)_n$ .  $\square$

## 1.4 Relación de recurrencia lineal con homogénea con coeficientes constantes

La sucesión nula es una solución de cualquier relación de recurrencia lineal. La estructura de la solución general de una relación de recurrencia lineal homogénea corresponde a la estructura de la solución general de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

**Proposición 1.5 (Teorema principal)** *Considere la relación de recurrencia lineal homogénea de orden  $r$ :*

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \cdots + c_rx_{n-r} = 0, \quad n \geq r \quad (c_0c_r \neq 0) \quad (1.5)$$

1. *Cualquier combinación lineal de soluciones de (1.5) es de nuevo una solución de (1.5).*
2. *Existe  $r$  soluciones de (1.5) tal que cualquier otra solución de (1.5) puede ser expresado únicamente como su combinación lineal.*

### Prueba

1. Esto sigue inmediatamente por el “Principio de Superposición”.
2. Para todo  $i \in \{0, \dots, r-1\}$  sea  $(u_n^i)_n$  la solución de (1.5) con  $r$ -sucesión de valores iniciales iguales a 0 para índices  $j \neq i$ , iguales a 1 en índices  $i$ , es decir:

$$u_j^i = 0 \text{ si } j \neq i, \quad u_i^i = 1 \quad j \in \{0, \dots, r-1\}.$$

Consideramos ahora alguna solución  $(a_n)_n$  de (1.5); la combinación lineal

$$a_0(u_n^0)_n + a_1(u_n^1)_n + \cdots + a_{r-1}(u_n^{r-1})_n,$$

es una solución de (1.5) con secuencia de datos iniciales  $(a_0, \dots, a_{r-1})$ . Ya que la sucesión de valores iniciales determinan la solución de una relación de recurrencia, uno tiene

$$(a_n)_n = a_0(u_n^0)_n + a_1(u_n^1)_n + \cdots + a_{r-1}(u_n^{r-1})_n.$$

**Definición 1.6 (Polinomio característico)** Definimos el *polinomio característico* de una relación de recurrencia con coeficientes constantes de orden  $r$  de la siguiente manera:

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \cdots + c_rx_{n-r} = h_n, \quad n \geq r \quad (c_0c_r \neq 0),$$

para el polinomio de grado  $r$ :

$$P(X) := c_0X^r + c_1X^{r-1} + \cdots + c_r.$$

Cada polinomio de grado  $r$  tiene exactamente  $r$  raíces complejas contando con su multiplicidad. Vemos ahora que la sucesión de las potencias naturales de una determinada raíz del polinomio característico de una relación de recurrencia lineal es una solución de la correspondiente relación homogénea.

**Proposición 1.6 (Raíz del polinomio característico)** Sea  $\lambda \in \mathbb{C}$ . La sucesión  $(\lambda^n)_n$  de las potencias de  $\lambda$  es una solución de la relación de recurrencia lineal homogénea

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = 0, \quad n \geq r \quad (c_0 c_r \neq 0), \quad (1.6)$$

sii  $\lambda$  es una raíz de este polinomio característico.

**Prueba** Dado que  $c_r \neq 0$ , las raíces del polinomio característico deben ser necesariamente no nulas. Sustituyendo los valores de la sucesión  $(\lambda^n)_n$  en la recurrencia, uno tiene

$$c_0 \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \cdots + c_r \lambda^{n-r} = 0,$$

y dividiendo por  $\lambda^{n-r} \neq 0$

$$c_0 \lambda^r + c_1 \lambda^{r-1} + \cdots + c_r = 0.$$

Por lo tanto, la sucesión  $(\lambda^n)_n$  es una solución de (1.6) sii  $\lambda$  es una raíz del polinomio  $c_0 X^r + c_1 X^{r-1} + \cdots + c_r$ .  $\square$

En general, no es fácil encontrar las raíces de un polinomio de grado mayor que dos, aunque uno puede siempre usar un adecuado CAS. El siguiente criterio simple, sin embargo, muestra cómo encontrar las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros.

**Proposición 1.7 (Las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros)** Sea  $P(X) = c_0 X^r + c_1 X^{r-1} + \cdots + c_r$  un polinomio con coeficientes enteros  $c_0 \dots c_r \in \mathbb{Z}$ , con  $c_0 \neq 0$ . Si la fracción  $\frac{a}{b}$  con  $a, b \in \mathbb{Z}$  con  $\text{mcd} = 1$  es una raíz de  $P(X)$ , luego  $a \mid c_r$  y  $b \mid c_0$ . En particular, si  $c_0 = \pm 1$  las raíces racionales del polinomio  $P(X)$  son enteros que dividen a  $c_r$ .

**Prueba** Dado  $c_0 \left(\frac{a}{b}\right)^r + c_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{r-1} + \cdots + c_{r-1} \left(\frac{a}{b}\right) + c_r = 0$ , multiplicado por  $b^r$  obtenemos:

$$c_0 a^r + c_1 a^{r-1} b + \cdots + c_{r-1} a b^{r-1} + c_r b^r = 0.$$

Como  $a \mid c_0 a^r + c_1 a^{r-1} b + \cdots + c_{r-1} a b^{r-1}$ , luego tiene que dividir también  $c_r b^r$ , y por lo tanto, al no tener  $a$  y  $b$  factores comunes,  $a \mid c_r$ . Análogamente  $b \mid c_0 a^r$  y por lo tanto divide a  $c_0$ .  $\square$

**Ejemplo 1.10 (Polinomio característico)** La recurrencia homogénea de segundo orden:

$$x_n = 2x_{n-1} - 2x_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

tiene polinomio característico  $X^2 - 2X + 2$  cuyas raíces son  $\lambda_1 = 1 - i$  y  $\lambda_2 = 1 + i$ . Las sucesiones  $((1 - i)^n)_n$  y  $((1 + i)^n)_n$  son las soluciones bases de la recurrencia. La solución general compleja de la recurrencia es:

$$x_n = A_1(1 - i)^n + A_2(1 + i)^n, \quad n \geq 0,$$

con la variante de  $A_1$  y  $A_2$  entre los números complejos. Veamos la solución real general. Uno tiene:

$$\lambda_1 = 1 - i = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

y

$$\lambda_2 = 1 + i = \overline{\lambda_1} = \sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) - i \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

Luego, las sucesiones  $(2^{n/2} \cos(\frac{n\pi}{4}))_n$  y  $(2^{n/2} \sin(\frac{n\pi}{4}))_n$  son las soluciones base reales de la recurrencia. Por lo tanto, la solución general real de la recurrencia es:

$$x_n = A_1 2^{n/2} \cos \left( \frac{n\pi}{4} \right) + A_2 2^{n/2} \sin \left( \frac{n\pi}{4} \right), \quad n \geq 0,$$

con la variación de  $A_1$  y  $A_2$  entre los números reales.

*Resolver una ecuación de recurrencia* significa encontrar una sucesión que satisfaga las ecuaciones de recurrencias. Encontrar una “solución general” significa hallar una fórmula que describa todas las soluciones posibles (todas las sucesiones posibles que satisfacen la ecuación). Veamos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 1.11** Considere que  $T_n$  satisface la siguiente ecuación para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ :

$$T_n = 2T_{n-1} + 1.$$

La ecuación de recurrencia  $T_n$  indica cómo continúa la sucesión pero no nos dice como empieza tal.

- Si  $T_1 = 1$ , se tiene  $T = (1, 7, 31, 127, \dots)$ .
- Si  $T_2 = 1$ , se tiene  $T = (2, 5, 11, 23, 47, \dots)$ .
- Si  $T_4 = 1$ , se tiene  $T = (4, 9, 19, 39, 79, \dots)$ .
- Si  $T_{-1} = 1$ , se tiene  $T = (-1, -1, -1, 1 - 1, -1, \dots)$ .

¿Existe alguna fórmula para cada una de estas sucesiones? ¿Existe una fórmula en términos de  $n$  y  $T_1$  que describa todos los términos de la sucesión? ¿Existe una posible solución para  $T_n$ ? Para poder responder este tipo de problemas, veamos un poco más de ecuaciones con recurrencia.

## 1.5 Ejemplos definidos por ecuaciones de recurrencia

**Ejemplo 1.12 (Parejas desordenadas)** Imagina una fiesta donde las parejas llegan juntas, pero al final de la noche, cada persona se va con una nueva pareja. Para cada  $n \in \mathbb{P}$ , digamos que  $D_n$  es el número de diferentes formas en que las parejas pueden ser “desordenadas”, es decir, reorganizadas en parejas, por lo que ni uno está emparejado con la persona con la que llegaron.

Para los valores:

- $D_1 = 0$ , una pareja no puede ser desordenada.
- $D_2 = 1$ , existe una y solo una manera de “desordenar” una pareja.
- $D_3 = 2$ , si las parejas llegan como  $Aa, Bb, Cc$ , entonces  $A$  estaría emparejado con  $b$  o  $c$ . Si  $A$  esta emparejado con  $b$ ,  $C$  debe estar emparejado con  $a$  (y no  $c$ ) y  $B$  con  $c$ . Si  $A$  esta emparejado con  $c$ ,  $B$  no debe estar emparejado con  $a$  (y no  $b$ ) y  $C$  con  $b$ .

¿Qué tan grandes son  $D_4, D_5$  y  $D_{10}$ ? ¿Cómo podemos calcularlos? ¿Existe alguna expresión cerrada para obtener todos los términos de la?

Vamos a desarrollar una estrategia para contar los desajustes cuando  $n \leq 4$ . Supongamos que hay  $n$  mujeres  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , y cada  $A_j$  llega con el hombre  $a_j$ .

La mujer  $A_1$  puede ser “re-emparejada” con cualquiera de los  $n - 1$  hombres restantes  $a_2$  o  $a_3$  o  $\dots$  o  $a_n$ . Digamos que está emparejada con  $a_k$ , donde  $2 \leq k \leq n$  y ahora consideremos  $a'_k$  pareja original de la mujer  $A_k$ : ella podría tomar  $a_1$  o ella podría rechazar  $a_1$  y tomar a alguien más.

Si  $A_1$  es pareja con  $a_k$  y  $A_k$  es pareja con  $a_1$ , entonces  $n - 2$  parejas dejaron para desordenar, y eso puede hacerse exactamente de  $D_{n-2}$  maneras diferentes.

Ahora para cada uno de los  $n - 1$  hombres que  $A_1$  podría elegir, hay  $\{D_{n-2} + D_{n-1}\}$  diferentes formas de completar el trastorno. Por lo tanto, cuando  $n \geq 4$  tenemos:

$$D_n = (n - 1) \{D_{n-2} + D_{n-1}\} \quad (1.7)$$

Usando la ecuación (1.7) las evaluaciones para  $n = 1$  y  $n = 2$  verifican la igualdad, ahora evaluemos  $D_n$  para cualquier valor de  $n$ , con  $n \in \mathbb{N}$

$$D_3 = (3 - 1) \{D_2 + D_1\} = 2(1 + 8) = 2.$$

$$D_4 = (4 - 1) \{D_3 + D_2\} = 3(2 + 1) = 9.$$

$$D_5 = (5 - 1) \{D_4 + D_3\} = 4(9 + 2) = 44.$$

$$D_6 = (6 - 1) \{D_5 + D_4\} = 5(44 + 9) = 265.$$

$$D_7 = (7 - 1) \{D_6 + D_5\} = 6(265 + 44) = 1854.$$

$$D_8 = (8 - 1) \{D_7 + D_6\} = 7(1854 + 265) = 14833.$$

$$D_9 = (9 - 1) \{D_8 + D_7\} = 8(14833 + 1854) = 133496.$$

$$D_{10} = (10 - 1) \{D_9 + D_8\} = 9(133496 + 14833) = 1334961.$$

La sucesión en  $P$  definido por  $S_n = A \times n!$  donde  $A$  es un número real satisface la ecuación de recurrencia (1.7). Si  $n \geq 3$  se tiene:

$$\begin{aligned} (n - 1) \{S_{n-2} + S_{n-1}\} &= (n - 1) \{A(n - 2)! + A(n - 1)!\} \\ &= (n - 1) A(n - 2)! \{1 + (n - 1)\} \\ &= A(n - 1)(n - 2)! \{n\} \\ &= A \times n! \\ &= S_n. \end{aligned}$$

¿Es válida la fórmula para  $n = 1$  o  $n = 2$ ? ¿Existe algún número real tal que  $D_n = A(n!)$  cuando  $n = 1$  o  $n = 2$ ? No, porque si  $0 = D_1 = A(1!)$ , entonces  $A$  debe ser igual a 0, y si  $1 = D_2 = A(2!)$ , se tiene que  $A$  debería tomar el valor de  $\frac{1}{2}$ . Sin embargo, podemos usar esta fórmula para probar que  $D_n$  es acotado.

**Teorema 1.4** Para todo  $n \geq 2$ ,  $(\frac{1}{3})n! \leq D_n \leq (\frac{1}{2})n!$ .

**Prueba** Primero considere la tabla de valores: Por inducción fuerte en matemática sobre  $n$ .

Paso 1 Si  $n = 2$ , se tiene  $(\frac{1}{3})n! = \frac{2}{3} < 1 = D_n = (\frac{1}{2})n!$  y  $n = 3$ , se tiene  $(\frac{1}{3})n! = \frac{6}{3} = 2 = D_n < 3 = (\frac{1}{2})n!$ .

Paso 2 Supongamos que  $\exists k \geq 3$  tal que si  $2 \leq n \leq k$ , se tiene  $(\frac{1}{3})n! \leq D_n \leq (\frac{1}{2})n!$ .



$n$	$(\frac{1}{3})n!$	$D_n$	$(\frac{1}{2})n!$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{2}{3}$	1	$1 = \frac{2}{2}$
3	$\frac{6}{3} = 2$	2	$3 = \frac{6}{2}$
4	$\frac{24}{3} = 8$	9	$12 = \frac{24}{2}$
5	$\frac{120}{3} = 40$	44	$60 = \frac{120}{2}$
6	$\frac{720}{3} = 240$	265	$360 = \frac{720}{2}$

Paso 3 Si  $n = k + 1$ , se tiene  $n \geq 4$  y  $D_n = (n - 1)[D_{n-2} + D_{n-1}]$  cuando  $2 \leq n - 2 < n - 1 \leq k$ . Así,  $D_n \leq (n - 1)\{(1/3)[n - 2]! + (1/3)[n - 1]!\} = (1/3)n!$ , y  $D_n \leq (n - 1)\{(1/2)[n - 2]! + (1/2)[n - 1]!\} = (1/2)n!$ .

La mejor fórmula para  $D_n$  que sabemos utiliza la función de “entero más cercano”. Para cualquier número real  $x$ , sea  $\lceil x \rceil$  que denote *el entero más cercano a  $x$*  se define de la siguiente manera:

- Si  $x$  es escrito como  $n + f$  donde  $n$  es el entero  $\lfloor x \rfloor$ , y  $f$  es una fracción donde  $0 \leq f < 1$ .
- Si  $0 \leq f < \frac{1}{2}$ , entonces  $\lceil x \rceil = n$ .
- Si  $\frac{1}{2} \leq f < 1$ , entonces  $\lceil x \rceil = n + 1$ .

¿Es  $\lceil x \rceil = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ ? Así que  $\lceil 3.29 \rceil = 3$ ,  $\lceil -3.78 \rceil = -4$ . Entonces  $D_n = \lceil (n!)/e \rceil$  cuando  $e = 2.71828182844 \dots$  es la base del logaritmo natural. Note que  $(n!)/e$  nunca es igual a  $\lceil (n!)/e \rceil + \frac{1}{2}$ .

$n$	$D_n$	$(n!)/e$
1	0	0.367879441
2	1	0.735758882
3	2	2.207276647
4	9	8.829106588
5	44	44.14553294
6	265	264.8731976
7	1854	1854.112384
8	14833	14832.89907
9	133496	133496.0916
10	1334961	1334960.916

Hay otra fórmula (mucho menos compacta) para  $D_n$  dado en los ejercicios, junto con un resumen de la prueba de que  $D_n = \lceil (n!)/e \rceil$ .  $\square$

**Ejemplo 1.13 (Números de Ackermann)** En la década de 1920's, el lógico y matemático alemán, Wilhelm Ackermann (1896-1962), inventó una función muy curiosa,  $A: P \times P \rightarrow P$  que define recursivamente usando “tres reglas”:

Regla 1  $A(1, n) = 2$  para  $n = 1, 2, \dots$

Regla 2  $A(m, 1) = 2m$  para  $m = 2, 3, \dots$

Regla 3 Cuando  $m > 1$  y  $n > 1$  se tiene  $A(m, n) = A(A(m - 1, n), n - 1)$ .

Entonces,

$$\begin{aligned}
A(2, 2) &= A(A(2 - 1, 2), 2 - 1) && \text{regla 3} \\
&= A(A(1, 2), 1) \\
&= A(2, 1) && \text{regla 1} \\
&= 2(2) && \text{regla 2} \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
A(2, 3) &= A(A(2 - 1, 3), 3 - 1) && \text{regla 3} \\
&= A(A(1, 3), 2) \\
&= A(2, 2) && \text{regla 1} \\
&= 4.
\end{aligned}$$

De hecho, si  $A(2, k) = 4$ , para algún  $k \geq 2$ , entonces

$$\begin{aligned}
A(2, k + 1) &= A(A(2 - 1, k + 1), (k + 1) - 1) && \text{regla 3} \\
&= A(A(1, k + 1), k) \\
&= A(2, k) && \text{regla 1} \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Así, tenemos por inducción matemática  $A(2, n) = 4, \forall n \geq 1$ .

Hasta ahora la tabla de los números de Ackermann se ve así:

$A$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$
$m = 1$	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$m = 2$	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$m = 3$	6								
$m = 4$	8								
$m = 5$	10								

Observamos que la segunda fila es de puro 4s. ¿Pero cómo es la segunda columna? Si  $A(k, 2) = 2^k$  para algunos  $k \geq 2$  se tiene

$$\begin{aligned}
A(k, 2) &= 2^k = A(A([k + 1], 2 - 1)) && \text{regla 3} \\
&= A(A(k, 2), 1) \\
&= A(2^k, 1) \\
&= 2(2^k) && \text{regla 2} \\
&= 2^{k+1}.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
A(2, 3) &= A(A(2 - 1, 3), 3 - 1) && \text{regla 3} \\
&= A(A(1, 3), 2) \\
&= A(2, 2) && \text{regla 1} \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Así, se tiene  $\forall m \geq 1 : A(m, 2) = 2^m$ . Ahora, ¿como son los otros valores?

$$\begin{aligned}
 A(3, 3) &= A(A(3-1, 3), 3-1) && \text{regla 3} \\
 &= A(A(2, 3), 2) \\
 &= A(4, 2) && \text{segunda fila} \\
 &= 2^4 && \text{segunda columna} \\
 &= 16.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(4, 3) &= A(A(4-1, 3), 3-1) && \text{regla 3} \\
 &= A(A(3, 3), 2) \\
 &= A(16, 2) && \text{encima} \\
 &= 2^{16} && \text{segunda columna} \\
 &= 65536.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(3, 4) &= A(A(3-1, 3), 4-1) && \text{regla 3} \\
 &= A(A(2, 4), 3) \\
 &= A(4, 3) && \text{segunda fila} \\
 &= 65536.
 \end{aligned}$$

¿Cual es el valor de  $A(4, 4)$ ? ¿Podría ejecutar un programa recursivo simple para evaluar  $A(4, 4)$ ?

$$\begin{aligned}
 A(5, 3) &= A(A(5-1, 3), 3-1) && \text{regla 3} \\
 &= A(A(4, 3), 2) \\
 &= A(65536, 2) \\
 &= 2^{65536}. && \text{segunda columna} \\
 &= n && \text{grande aproximadamente 20000 dígitos en base 10.}
 \end{aligned}$$

Hasta ahora tenemos:

$A$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$
$m = 1$	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$m = 2$	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$m = 3$	6	8	16	65536	?				
$m = 4$	8	16	65536	?					
$m = 5$	10	$2^{65536}$							

¿Cómo continúa la tercera columna? Sea  $2 \uparrow$  denota el valor de “Torre” de  $k$  2’s, definida recursivamente por

$$2 \uparrow 1 = 2, \quad \text{y para } k \geq 1, \quad 2 \uparrow [k + 1] = 2^{2 \uparrow k}.$$

Pero este es un número tan grande que nunca podría escribirse en dígitos decimales, incluso utilizando todo el papel del mundo, Su valor nunca podría ser calculado. Ahora nos preguntamos ¿Los números Ackermann son “computables”? Por otro lado, supongamos que las sucesiones que encontramos, incluso aquellas definidas por ecuaciones de recurrencia, serán fáciles para entender y tratar.

## 1.6 Resolución de ecuaciones de recurrencia lineal de primer orden

Una ecuación de recurrencia lineal de primer orden relaciona entradas consecutivas en una secuencia por una ecuación de la forma:

$$S_{n+1} = aS_n + c \quad \text{para todo } n \text{ en el dominio de } S. \quad (1.8)$$

Una solución general es una descripción algebraica de todas estas secuencias de soluciones. Si  $S$  es cualquier secuencia en  $\mathbb{N}$  que satisface la ecuación anterior, entonces denotando  $S_0$  por  $I$ , tenemos:

$$\begin{aligned} S_1 &= aS_0 + c = aI + c \\ S_2 &= aS_1 + c = a[aI + c] + c = a^2I + ac + c \\ S_3 &= aS_2 + c = a[a^2I + ac + c] + c = a^3I + a^2c + ac + c \end{aligned}$$

Entonces podríamos decir que

$$S_n = a^n I + a^{n-1}c + a^{n-2}c + \cdots + ac + c \quad \text{para } \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.9)$$

Podemos demostrarlo por *inducción matemática* para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_k = a^n I + a^{n-1}c + a^{n-2}c + \cdots + ac + c$ , entonces:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= aS_k + c \\ S_{k+1} &= a \left[ a^k I + a^{k-1}c + a^{k-2}c + \cdots + ac + c \right] + c \\ S_{k+1} &= a^{k+1}I + a^k c + a^{k-1}c + \cdots + a^2c + ac + c \end{aligned}$$

Por lo tanto, (1.9) es correcto. Por lo tanto, si  $S$  es cualquier secuencia en  $\mathbb{N}$  que satisface (1.8), entonces para  $\forall n \in \mathbb{P}$ .

- Si  $a = 1$ , entonces  $S_n = 1^n I + 1^{n-1}c + 1^{n-2}c + \cdots + 1c + c = I + nc$ .
- Y si  $a \neq 1$ , se tiene

$$\begin{aligned}
S_n &= a^n I + a^{n-1}c + a^{n-2}c + \cdots + ac + c \\
&= a^n I + c \frac{1-a^n}{1-a} = a^n I + \frac{c}{1-a} - a^n \frac{c}{1-a} \\
&= a^n \left[ 1 - \frac{c}{1-a} \right] + \frac{c}{1-a}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general a la ecuación de recurrencia es

$$S_{n+1} = aS_n + c \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se da en dos partes:

$$\text{Si } a = 1, S_n = S_0 + nc \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Si } a \neq 1 = S_n = a^n \left[ S_0 - \frac{c}{1-a} \right] + \frac{c}{1-a} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

### 1.6.1 Las torres de Hanói

Cuenta la leyenda que los monjes de un monasterio de la ciudad Hanói medían el tiempo que faltaba para la llegada del “fin del mundo” con el siguiente procedimiento:

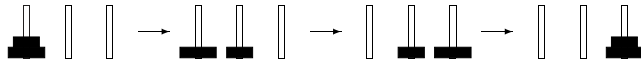
“Se dispone de tres agujas de diamante, en una de las cuales se apilan 64 discos de oro distintos, ordenados según el tamaño de sus diámetros. En cada segundo mueven un disco de una aguja a otra, y su tarea finalizará (y con ella el mundo) cuando logren transportar todos los discos a la otra aguja. Pero, ¡atención!, a lo largo del proceso no se puede colocar un disco sobre otro de diámetro más pequeño.”.

Como la preparación para el “fin del mundo” supondrá sin duda un notable ajetreo, vamos a estimar el tiempo del cuál dispondremos. Por ello, replanteamos el problema en general:

“Tenemos  $n$  discos y llamamos  $a_n$  al mínimo número de movimientos necesario para transportar los  $n$  discos desde una aguja a otra.”.

Por ejemplo, si  $a_1 = 1$ , nos basta con un movimiento para pasar el disco a otra aguja. El cálculo de  $a_2$  requiere ya un pequeño argumento: podemos, por ejemplo, pasar el disco pequeño a otra aguja, luego el grande a la tercera, para finalmente pasar el pequeño a esta tercera aguja, como en la figura 1.2 Como en dos movimientos no se puede hacer,

**Fig. 1.2** Proceso exitoso para dos discos.



concluimos que la descrita es la mejor estrategia posible, y que, por tanto,  $a_2 = 3$ . Si partimos de tres discos, podemos pasar los dos menores a una segunda aguja (con el procedimiento anterior, de tres movimientos), luego pasar el mayor a la tercera aguja, para finalmente llevar los dos discos menores sobre ese disco mayor (de nuevo tres movimientos). En total, 7 movimientos. Aunque ahora no está claro si se puede hacer el trasvase con menos.

El procedimiento esbozado en el caso  $n = 3$  se puede generalizar: si tenemos  $n$  discos, pasamos  $n - 1$  a una segunda aguja, luego el mayor disco a la aguja final y, por último,

pasamos los  $n - 1$  discos a esa tercera aguja. Es un algoritmo recursivo: el procedimiento para mover  $n$  discos se apoya, dos veces, en el (ya conocido) método para mover  $n - 1$ . Se deduce entonces que el número mínimo de movimientos para transportar  $n$  discos cumple que

$$a_n \leq 2a_{n-1} + 1, \quad \forall n \geq 2 \quad (1.10)$$

porque con  $2a_{n-1} + 1$  movimientos lo sabemos hacer. Observe que no es una ecuación de recurrencia, sino una desigualdad. Para comprobar que, en realidad, la relación se cumple en la igualdad. Deduciríamos así que la estrategia de movimientos es la mejor posible. Esto requiere un argumento extra.

Veamos: Si tenemos  $n$  discos, en algún momento tendremos que mover el disco mayor, para lo que necesitaremos haber llevado el resto de los discos a otra aguja, pues debe quedar una aguja libre. Esto requiere, como mínimo  $a_{n-1}$  movimientos. Una vez movido el disco grande a una aguja, tendremos que mover los restantes  $n - 1$  discos sobre él, y esto exige, al menos, otros  $a_{n-1}$  movimientos (sea cual sea la estrategia que empleemos). Así que

$$a_n \geq 2a_{n-1} + 1, \quad \forall n \geq 2. \quad (1.11)$$

Reuniendo las condiciones (1.10) y (1.11), ya podemos afirmar que

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad \forall n \geq 2. \quad (1.12)$$

La condición inicial ya la hemos visto, es  $a_1 = 1$ . La resolvemos por simple aplicación repetida de la regla de recurrencia:

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 1 = 2(2a_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 a_{n-2} + 2 + 1 = 2^2 (2a_{n-3} + 1) + 2 + 1 \\ a_n &= 2^3 a_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 = 2^3 (2a_{n-4} + 1) + 2 + 1 = 2^4 a_{n-4} + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 \\ a_n &= 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1 = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1. \end{aligned}$$

En el caso de  $n = 64$  deducimos que el fin del mundo llegará dentro de  $a_{64} = 2^{64} - 1$  segundos, esto es, ¡más de medio billón de años! Parece que, después de todo, la profecía de los monjes de Hanói no debería ser una de nuestras mayores preocupaciones.

**Ejemplo 1.14** Recurrencia del número de movimientos en la Torre de Hanói La ecuación de recurrencia para el número de movimientos en las Torres de Hanói es una ecuación de recurrencia lineal de primer orden:

$$T_n = 2T_{n-1} + 1.$$

Sea  $a = 2$  y  $c = 1$ , entonces  $\frac{c}{1-a} = \frac{1}{1-2} = -1$ , y cualquier secuencia  $T$  que satisfaga la RE está dado por la fórmula:

$$\begin{aligned} T_n &= 2^n [T_0 - (-1)] + (-1) \\ T_n &= 2^n [T_0 + 1] - 1 \end{aligned}$$

Asumiendo que  $T$  tiene el dominio  $\mathbb{Z}$  y que denota  $T_0$  la condición inicial, vimos al principio de este capítulo varias soluciones particulares:

Si  $T_0 = 0$ , entonces  $T = (0, 1, 3, 7, 15, 31, \dots)$   $T_n = 2^n[0 + 1] - 1 = 2^n - 1$ .  
 Si  $T_0 = 2$ , entonces  $T = (4, 9, 19, 39, 79, 159, \dots)$   $T_n = 2^n[2 + 1] - 1 = 3 \times 2^n - 1$ .  
 Si  $T_0 = 4$ , entonces  $T = (2, 5, 11, 23, 47, 95, \dots)$   $T_n = 2^n[4 + 1] - 1 = 5 \times 2^n - 1$ .  
 Si  $T_0 = -1$ , entonces  $T = (-1, -1, -1, -1, -1, \dots)$   $T_n = 2^n[-1 + 1] - 1 = -1$ .

### 1.6.2 Los tres piratas naufragados

Un barco pirata es naufragado en una tormenta en la noche. Tres de los piratas sobreviven y se encuentran en una playa la mañana después de la tormenta. Aceptan cooperar para asegurar su supervivencia. Ellos divisan a un mono en la selva cerca de la playa y pasan todo ese primer día recogiendo una gran pila de cocos y luego se van a dormir exhaustos. Pero ellos son piratas. El primero duerme bien, preocupado por su parte de los cocos; despierta, divide la pila en 3 montones iguales, pero encuentra uno sobrante que arroja en el arbusto para el mono, entierra su tercero en la arena, amontona los otros dos montones, y se va a dormir profundamente. El segundo pirata duerme bien, preocupado por su parte de los cocos; se despierta, divide la pila en 3 montones iguales, pero encuentra uno sobrante que arroja en el arbusto para el mono, entierra su tercero en la arena, amontona los otros dos montones, y se va a dormir profundamente.

El tercero también duerme bien, preocupado por su parte de los cocos; despierta, divide la pila en 3 montones iguales, pero encuentra uno sobrante que arroja en el arbusto para el mono, entierra su tercero en la arena, amontona los otros dos montones juntos, y se va a dormir profundamente.

A la mañana siguiente, todos se despiertan y ven una pila algo más pequeña de cocos que se dividen en 3 montones iguales, pero encontrar uno sobrante que tiran en el arbusto para el mono. ¿Cuántos cocos recolectaron el primer día?

Sea  $S_j$  el tamaño de la pila después del pirata  $j^{th}$  y sea  $S_0$  el número que recogieron en el primer día. Entonces

$$\begin{aligned} S_0 &= 3x + 1 \text{ para algún número entero } x \text{ y } S_1 = 2x, \\ S_1 &= 3y + 1 \text{ para algún número entero } y \text{ y } S_2 = 2y, \\ S_2 &= 3z + 1 \text{ para algún número entero } z \text{ y } S_3 = 2z, \end{aligned}$$

y

$$S_3 = 3w + 1 \text{ para algún número entero } w.$$

¿Hay una ecuación de recurrencia aquí?

$$\begin{aligned} S_1 &= 2x \text{ donde } x = (S_0 - 1)/3, \text{ entonces } S_1 = (2/3)S_0 - (2/3) \\ S_2 &= 2y \text{ donde } y = (S_1 - 1)/3, \text{ entonces } S_2 = (2/3)S_1 - (2/3) \\ S_3 &= 2z \text{ donde } z = (S_2 - 1)/3, \text{ entonces } S_3 = (2/3)S_2 - (2/3). \end{aligned}$$

La ecuación de recurrencia satisfecha por los primeros  $S'_j$ s es

$$S_{j+1} = (2/3)S_j - (2/3). \quad (1.13)$$

Si ahora tenemos  $S_4 = (2/3)S_3 - (2/3)$ , entonces  $S_4 = 2[S_3 - 1]/3 = 2w$  para algún número entero  $w$ . Queremos saber qué valor (o valores) de  $S_0$  producirá un número entero par para  $S_4$  cuando aplicamos el RE (1). En (1),  $a = 2/3$  y  $c = -2/3$ , entonces  $c/(1-a) = -2$ , y así la solución general de (1) es

$$S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n [S_0 + 2] - 2.$$

Por lo tanto,  $S_4 = (2/3)^4[S_0 + 2] - 2 = (16/81)[S_0 + 2] - 2$ .

$S_4$  será un número entero

$\Leftrightarrow S_4 + 2$  es (un aún) el número entero

$\Leftrightarrow 81 \mid [S_0 + 2]$

$\Leftrightarrow [S_0 + 2] = 81k$  para algún número entero  $k$

$\Leftrightarrow S_0 = 81k - 2$  para algún número entero  $k$ .

$S_0$  debe ser un número entero positivo, pero hay un número infinito de respuestas posibles:

$$79 \vee 160 \vee 241 \vee 322 \vee \dots$$

Necesitamos más información para determinar  $S_0$ . Si nos hubieran dicho que el primer día los piratas recolectaron entre 200 y 300 cocos, ahora podríamos decir “el número que recogieron el primer día fue exactamente 241”.

### 1.6.3 Interés compuesto

Supongamos que se le ofrecen dos planes de ahorro para la jubilación. En el plan *A*, empiezas con \$1,000, y cada año (en el aniversario del plan), te pagan un 11% de interés simple, y agregas \$1,000. En el plan *B*, empiezas con \$100, y cada mes, te pagan una-duodécima parte del 10% de interés simple (anual), y agregas \$100. ¿Qué plan será más grande después de 40 años?. ¿Podemos aplicar una ecuación de recurrencia? Considere el plan *A* y deje que  $S_n$  denote el número de dólares en el plan después de (exactamente)  $n$  años de operación. Entonces  $S_0 = \$1,000$  y

$$S_{n+1} = S_n + \text{interés sobre } S_n + \$1000$$

$$S_{n+1} = S_n + 11\% \text{ de } S_n + \$1000$$

$$S_{n+1} = S_n(1 + 0.11) + \$1000.$$

En esta RE,  $a = 1.11$ ,  $c = 1000$ , entonces  $\frac{c}{1-a} = \frac{1000}{-0.11}$  y

$$S_n = (1.11)^n \left[ 1000 - \frac{1000}{-0.11} \right] + \frac{1000}{+0.11}$$

$$S_n = (1.11)^n \left[ \frac{1110}{+0.11} \right] - \frac{1000}{+0.11}$$

Por lo tanto,



$$\begin{aligned}
S_{40} &= (1.11)^{40}(10090.090909\dots) - (-9090.909090\dots) \\
S_{40} &= (65.000867\dots)(10090.090909\dots) - (9090.909090\dots) \\
S_{40} &= 655917.842\dots - (9090.909090\dots) \\
S_{40} &\approx \$646826.
\end{aligned}$$

¿Puede ser cierto? Pusiste \$40000 y sacaste mayor que \$600000 en intereses. Ahora considere el plan  $B$  y sea  $T_n$  denota el número de dólares en el plan después de (exactamente)  $n$  meses de funcionamiento. Entonces  $T_0 = \$100$  y

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= T_n + \text{interés sobre } T_n + \$100 \\
T_{n+1} &= T_n + \left(\frac{1}{2}\right) \text{ de } 10\% \text{ de } T_n + \$100 \\
T_{n+1} &= T_n \left[1 + \frac{0.1}{12}\right] + \$100
\end{aligned}$$

En esta RE,  $a = 12.1/12$ ,  $c = 100$ , entonces  $\frac{c}{1-a} = \frac{100}{-0.1/12} = -12000$  y

$$T_n = \left(\frac{12.1}{12}\right)^n [100 + 12000] - 12000.$$

De ahí, después  $40 \times 12$  meses,

$$\begin{aligned}
T_{480} &= \left(\frac{12.1}{12}\right)^{480} (12100) - (12000) \\
T_{480} &= (1.008333\dots)^{480} (12100) - (12000) \\
T_{480} &= (53.700663\dots) (12100) - (12000) \\
T_{480} &= 649778.0234\dots - (12000) \\
T_{480} &\approx \$637778.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el plan  $A$  tiene un valor ligeramente mayor después de 40 años.

## 1.7 Resolución de ecuaciones de recurrencia lineal de segundo orden

Una *ecuación de recurrencia lineal de segundo orden* relaciona entradas consecutivas en una secuencia por una ecuación de la forma

$$S_{n+2} = aS_{n+1} + bS_n + c \quad \forall n \text{ en el dominio de } S. \quad (1.14)$$

Pero vamos a asumir que el dominio de  $S$  es  $\mathbb{N}$ . Supongamos también que  $ab \neq 0$ , de lo contrario,  $S_n = c$  para  $\forall n \in \{2 \dots\}$ , y las soluciones de (??) no son muy interesantes.

*Observación 1.4* La ecuación de recurrencia de primer orden es solo un caso especial de la ecuación de recurrencia de segundo orden (??) cuando  $b = 0$ .

Cuando  $c = 0$ , se dice que la RE es **homogénea** (todos los términos lucen igual a una constante multiplicada por una sucesión).

**Observación 1.5** La ecuación de recurrencia de Fibonacci es homogénea.

Vamos a restringir también nuestra atención (por el momento) a una *lineal de segundo orden*, la *ecuación de recurrencia homogénea*

$$S_{n+2} = aS_{n+1} + bS_n \text{ para } \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.15)$$

Tal como hicimos para la ecuación de la recurrencia de Fibonacci, supongamos que existe una secuencia geométrica,  $S_n = r^n$ , que satisface (1.15). Si lo hubiera, entonces

$$r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cuando  $n = 0$ ,

$$r^2 = ar + b.$$

La “ecuación característica” de (1.15) es  $x^2 - ax - b = 0$ , cuyas “raíces” son

$$r = \frac{-(-a) \pm \sqrt{(-a)^2 - 4(-b)}}{2(1)} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Sean  $\Delta = \sqrt{a^2 + 4b}$ ,  $r_1 = \frac{a+\Delta}{2}$ , y  $r_2 = \frac{a-\Delta}{2}$ , entonces  $r_1 + r_2 = a$ ,  $r_1 \times r_2 = -b$ , y  $r_1 - r_2 = \Delta$ . Tanto  $r_1$  como  $r_2$  satisfacen la ecuación  $x^2 = ax + b$ , y son las únicas soluciones.

**Ejemplo 1.15** Si  $S_{n+2} = 10S_{n+1} - 21S_n$  para  $\forall n \in \mathbb{N}$ , la ecuación característica es  $x^2 - 10x + 21 = 0$  o  $(x - 7)(x - 3) = 0$ .

Aquí  $a = 10$ ,  $b = -21$ ,  $a^2 + 4b = 100 - 84 = 16$ ,  $\Delta = 4$ , entonces  $r_1 = 7$  y  $r_2 = 3$ .

**Ejemplo 1.16** Si  $S_{n+2} = 3S_{n+1} - 2S_n$  para  $\forall n \in \mathbb{N}$ , la ecuación característica es  $x^2 - 3x + 2 = 0$  o  $(x - 2)(x - 1) = 0$ .

Aquí,  $a = 3$ ,  $b = -2$ ,  $a^2 + 4b = 9 - 8 = 1$ ,  $\Delta = 1$ , entonces  $r_1 = 2$  y  $r_2 = 1$ .

**Ejemplo 1.17** Si  $S_{n+2} = 2S_{n+1} - S_n$  para  $\forall n \in \mathbb{N}$ , la ecuación característica es  $x^2 - 2x + 1 = 0$  o  $(x - 1)(x - 1) = 0$ .

Aquí,  $a = 2$ ,  $b = -1$ ,  $a^2 + 4b = 4 - 4 = 0$ ,  $\Delta = 0$ , entonces  $r_1 = 1$  y  $r_2 = 1$ .

¿Pero qué hay de una fórmula que da la solución general?

**Teorema 1.5** La solución general de la RE homogénea (1.15) es

$$S_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n, \quad \text{si } r_1 \neq r_2 (\Delta \neq 0)$$

y

$$S_n = A(r)^n + Bn(r)^n, \quad \text{si } r_1 = r_2 = r (\Delta = 0).$$

**Prueba** Supongamos que  $T$  es cualquier solución particular de la RE homogénea. Nos ocupamos de los dos casos por separado.

**Caso 1** Si  $\Delta \neq 0$ , entonces las dos raíces son distintas (pero pueden ser números “complejos”). Encontraremos valores para  $A$  y  $B$ , luego probaremos que  $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$  para  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Mostraremos que  $A(r_1)^n + B(r_2)^n$  inicia correctamente para valores especialmente elegidos de  $A$  y  $B$ , y luego mostraremos que  $A(r_1)^n + B(r_2)^n$  continúa correctamente.

Vamos a resolver las ecuaciones (para  $A$  y  $B$ ) que garantizaría  $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$ , entonces  $n = 0$  y  $n = 1$ . Si

$$T_0 = A(r_1)^0 + B(r_2)^0 = A + B \quad (1.16)$$

y

$$T_1 = A(r_1)^1 + B(r_2)^1 = A(r_1) + B(r_2), \quad (1.17)$$

entonces  $(r_1)T_0 = A(r_1) + B(r_1)$ . multiplicamos (1.16) por  $r_1$  y  $T_1 = A(r_1) + B(r_2)$  (2) otra vez restamos, obtenemos  $(r_1)T_0 - T_1 = B(r_1 - r_2) = B\Delta/r_1 - r_2 = \Delta \neq 0$  entonces  $B = \frac{(r_1)T_0 - T_1}{\Delta}$ . Tenemos,  $A = T_0 - B = \frac{\Delta T_0}{\Delta} - \frac{(r_1)T_0 - T_1}{\Delta} = \frac{-(r_1)T_0 + T_1}{\Delta}$ . No importa cómo comience la sucesión  $T$  (no importa cuáles sean los valores para  $T_0$  y  $T_1$ ). Hay números únicos  $A$  y  $B$  tales que  $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$  para  $n = 0$  y  $1$ . Continuando la prueba por la inducción matemática que  $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$  para  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Paso 1 Si  $n = 0$  o  $n = 1$ , entonces  $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$ , por nuestra “opción”  $A$  y  $B$ .

Paso 2 Asuma que  $\exists k \geq 1$  tal que si  $0 \leq n \leq k$ , entonces  $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$ .

Paso 3 Si  $n = k + 1$ , entonces  $n \geq 2$  entonces, porque  $T$  satisface la RE homogénea (3).

$$T_{k+1} = aT_k + bT_{k-1}$$

$$T_{k+1} = a[A(r_1)^k + B(r_2)^k] + b[A(r_1)^{k-1} + B(r_2)^{k-1}] \text{ por el paso 2}$$

$$T_{k+1} = [aA(r_1)^k + bA(r_1)^{k-1}] + [aB(r_2)^k + bB(r_2)^{k-1}]$$

$$T_{k+1} = A(r_1)^{k-1}[a(r_1) + b] + B(r_2)^{k-1}[a(r_2) + b]$$

$$T_{k+1} = A(r_1)^{k+1} + B(r_2)^{k+1}$$

Así, si  $r_1 \neq r_2$ ,  $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$  para  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Ejemplo 1.18** Si  $S_{n+2} = 10S_{n+1} - 21S_n$  para  $\forall n \in \mathbb{N}$ , entonces  $r_1 = 7$  y  $r_2 = 3$ . Tenemos, la solución general de la RE es  $S_n = A7^n + B3^n$ .  $\square$

**Ejemplo 1.19** Si  $S_{n+2} = 3S_{n+1} - 2S_n$  para  $\forall n \in \mathbb{N}$ , entonces  $r_1 = 2$  y  $r_2 = 1$ . Tenemos, la solución general de la RE es  $S_n = A2^n + B1^n = A2^n + B$ .  $\square$

Caso 2 Si  $\Delta = 0$ , entonces las raíces son (ambos) iguales a  $r$  donde  $r = a/2$ . También,  $b = -a^2/4 = -r^2$ . Si  $a$  eran 0, entonces  $b = 0$ , pero asumimos que no tanto  $a$  y  $b$  son 0. De ahí,  $r \neq 0$ . Vamos a resolver las ecuaciones (para  $A$  y  $B$ ) que garantizarían  $T_n = A(r)^n + nB(r)^n$  cuando  $n = 0$  y  $n = 1$ . Si

$$T_0 = A(r)^0 + 0B(r)^0 = A \quad (1.18)$$

y

$$T_1 = A(r)^1 + 1B(r)^1 = Ar + Br \quad (1.19)$$

entonces  $A = T_0$  y  $B = (T_1 - Ar)/r$ . No importa cómo comience la sucesión  $T$  (no importa cuáles sean los valores para  $T_0$  y  $T_1$ ). Hay números únicos  $A$  y  $B$  tales que  $T_n = A(r)^n + nB(r)^n$  para  $n = 0$  y  $1$ . Continuando la prueba por la inducción matemática que  $T_n = A(r)^n + nB(r)^n$  para  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Paso 1 Si  $n = 0$  o  $n = 1$ , entonces  $T_n = A(r)^n + B(r)^n$ , por nuestra “opción”  $A$  y  $B$ .

Paso 2 Asuma que  $\exists k \geq 1$  tal que si  $0 \leq n \leq k$ , entonces  $T_n = A(r)^n + B(r)^n$ .

Paso 3 Si  $n = k + 1$ , entonces  $n \geq 2$  entonces, porque  $T$  satisface la RE homogénea (3).

$$T_{k+1} = aT_k + bT_{k-1}$$

$$T_{k+1} = a[A(r)^k + kB(r)^k] + b[A(r)^{k-1} + (k-1)B(r)^{k-1}] // \text{ por el paso 2}$$

$$T_{k+1} = [aAr^k + bAr^{k-1}] + [akBr^k + b(k-1)Br^{k-1}]$$

$$T_{k+1} = Ar^{k-1}[ar + b] + Br^{k-1}[akr + b(k-1)]$$

$$T_{k+1} = Ar^{k-1}[r^2] + Br^{k-1}[k(r^2) + r^2] // r^2 = ar + b$$

$$T_{k+1} = Ar^{k+1} + Br^{k-1}[k(r^2) + r^2] // -b = r^2$$

$$T_{k+1} = Ar^{k+1} + (k+1)Br^{k+1}$$

Así, si  $r_1 = r_2 = r$ ,  $T_n = A(r)^n + nB(r)^n$  para  $\forall n \in \mathbb{N}$ . □

## Ejercicios

**1.1** Sucesión contractiva Una sucesión  $\{x_n\}$  se dice que **contractiva** si  $\exists$  alguna constante  $c$ ,  $0 < c < 1 \ni \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq c|x_{n+1} - x_n|$ . Pruebe que una sucesión contractiva debe ser una sucesión de Cauchy, y por lo tanto converge.

**Solución 1.5** Supongo que  $\{x_n\}$  es contractiva con constante de contracción  $c \in (0, 1)$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq c|x_{n+1} - x_n| \leq c^2|x_n - x_{n-1}| \leq \dots \leq c^n|x_2 - x_1|. \quad (1.20)$$

Pero, pero en (1.2) cuando  $n \rightarrow \infty$ , se tiene que  $c^n \rightarrow 0$  ya que  $c \in (0, 1)$ . Sea  $\varepsilon > 0$  y escogiendo  $\tilde{n} \in \mathbb{N}$  apropiado de modo que

$$\frac{c^{\tilde{n}}}{1-c} < \frac{\varepsilon}{|x_1 - x_2|}.$$

Para  $m, n \geq n_0$ , podemos escribir

$$|x_n - x_m| = |x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + x_{n-2} - \dots - x_{m+1} + x_{m+1} - x_m|.$$

Y aplicando la desigualdad triangular en (??) se tiene

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \dots + |x_{m+1} - x_m|.$$

Pero, aplicando la cadena de desigualdades, se obtiene

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &\leq c^{n-1}|x_1 - x_2| + c^{n-3}|x_1 - x_2| + \cdots + c^{m-1}|x_1 - x_2| \\
|x_n - x_m| &\leq |x_1 - x_2| c^{m-1} \frac{1 - c^{n-m}}{1 - c} \\
|x_n - x_m| &\leq |x_1 - x_2| \frac{c^{m-1}}{1 - c}
\end{aligned}$$

Pero, empleando el  $\tilde{n}$ :

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &\leq |x_1 - x_2| \frac{c^{\tilde{n}} - 1}{1 - c} \\
|x_n - x_m| &\leq \left| \frac{\varepsilon}{|x_1 - x_2|} \right| |x_n - x_m| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, cualquier sucesión  $\{x_n\}$  contractiva es de Cauchy, en consecuencia,  $\{x_n\}$  es convergente.

**1.2 Media aritmética recursiva** Sea  $a \neq b$  números reales arbitrarios, y defina la sucesión  $\{x_n\}$  por

$$x_1 = a, x_2 = b, \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2}.$$

Esto es, cada nuevo término está iniciando con el tercero que es el promedio de los dos términos previos.

1. Pruebe que  $\{x_n\}$  converge probando que este es una sucesión constructiva.
2. Pruebe que  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = b + \frac{1}{2}a$ .
3. Use 2 y el álgebra de límites para encontrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . ¿Está sorprendido por la respuesta? Note que si usted intercambia  $a$  y  $b$  la respuesta podría ser diferente.

**Solución 1.6** 1.

- 2.
- 3.

**1.3 Media aritmética ponderada recursiva** Sean  $a \neq b$  dos números reales arbitrarios, sea  $0 < t < 1$ , y defina la sucesión  $\{x_n\}$  por

$$x_1 = a, x_2 = b, \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = tx_n + (1 - t)x_{n+1}.$$

Esto es, cada nuevo término que inicia con el tercero que es el promedio ponderado de los términos previos. Geométricamente,  $x_{n+2}$  es un punto en el intervalo entre  $x_n$  y  $x_{n+1}$  que corta el intervalo en dos segmentos cuyas longitudes están en la proporción  $t$  a  $1 - t$ . Pruebe que  $\{x_n\}$  es contractiva, y encuentre su límite.

**Solución 1.7**

**1.4 Aplicación contractiva** Sean  $a < b$  e  $I = [a, b]$ . Una función  $f: I \rightarrow I$  se dice que es una **contracción** si  $\exists c \ni 0 < c < 1$  y  $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ . Pruebe que una aplicación contractiva debe tener por lo menos un “punto fijo”,  $x \in I \ni f(x) = x$ . También pruebe que  $f$  no puede tener más de un punto fijo en  $I$ .

**Solución 1.8**

**1.5 Números de Fibonacci** La sucesión de Fibonacci consiste de los números de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., y está definido recursivamente por  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = 1$ , y  $\forall n \geq 2$ ,  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ . Cada nuevo término después del segundo es la suma de los dos términos previos. Muchos resultados interesantes han sido probados acerca de los números de Fibonacci—lo suficiente para llenar un libro entero. Debemos concentrarnos aquí con la sucesión de proporciones de los sucesivos números de Fibonacci. Empezamos definiendo la sucesión por  $r_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ .

1. Desarrolle una tabla que muestre los primeros diez términos de  $\{r_n\}$ . En la base de esta tabla, conjeture las respuestas a las siguientes preguntas. ¿ $\{r_n\}$  es convergente? ¿Es monótona? ¿Eventualmente monótona? ¿Puede encontrar una subsucesión estrictamente creciente? ¿Una subsucesión estrictamente decreciente? (No se requieren demostraciones).
2. Pruebe que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}$ .
3. Pruebe que  $\forall n \geq 2$ ,  $\frac{3}{2} < r_n < 2$ .
4. Pruebe que  $\{r_n\}$  es “contractiva”, y por lo tanto es una sucesión de Cauchy.
5. Encuentre  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ . [Tome nota de este límite; este reaparecerá.]
6. La ecuación cuadrática  $x^2 - x - 1 = 0$  tiene dos soluciones,  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  y  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Muestre que  $\alpha + \beta = 1$ ,  $\alpha^2 = \alpha + 1$ , y  $\beta^2 = \beta + 1$ , y desde estos hechos muestre que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n$  y  $\beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n$ .
7.  $\forall n \in \mathbb{N}$ , defina  $u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  están definidos en ?? . Pruebe que  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 1$ , y  $\forall n \geq 2$ ,  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ . Por lo tanto,  $\{u_n\}$  debe ser la sucesión de Fibonacci. Tenemos encontrado una fórmula para los números de Fibonacci:  $f_n = u_n$ .
8. **Significado geométrico** de  $\alpha$ . Considere un rectángulo cuyo ancho  $\alpha$  y largo  $a + b$  son así proporcionados que cuando un cuadrado de lado  $a$  es removido, como se muestra aquí, el rectángulo restante tiene ancho y longitud en la misma proporción. Esto es,  $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ . Los matemáticos de la Grecia clásica llamaron esta proporción  $R = \frac{a}{b}$  la “**Proporción áurea**” y cualquier rectángulo con lados en la proporción un “**rectángulo áureo**”. Ellos consideraron esto como la más estéticamente agradable de todos los rectángulos, y se usó esto frecuentemente en su arte y arquitectura. Pruebe algebraicamente que  $R = \alpha$ , definida en ?? arriba.
9. Pruebe que  $\forall n \geq 2$ ,  $\forall n \geq 2$ ,  $f_{n+1}f_{n-1} - (f_n)^2 = (-1)^n$ .
10. Pruebe que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $r_{n+1} - r_n = \frac{(-1)^{n+1}}{f_n f_{n+1}}$ .
11. Use ?? para probar que  $\{r_{2n}\}$  es estrictamente decreciente y  $\{r_{2n+1}\}$  es estrictamente creciente.

### Solución 1.9

**1.6** Sea  $a \geq 1$ . Defina la sucesión  $\{x_n\}$  por  $x_1 = a$ , y  $x_{n+1} = a + \frac{1}{x_n}$ . Pruebe que  $\forall n \geq 2$ ,  $a + \frac{1}{2a} \leq x_n \leq 2a$ , y use este resultado para probar que  $x_n$  es contractiva. Encuentre  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

### Solución 1.10

**1.7** Sea  $a > 1$ . Defina la sucesión  $\{x_n\}$  por  $x_1 = a$  y  $x_n = \frac{1}{a+x_n}$ . Pruebe que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{2a} \leq x_n \leq a$ , y use este resultado para probar que  $\{x_n\}$  es contractiva. Encuentre el  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Compare este límite con el ejercicio anterior.

### Solución 1.11

## **Parte II**

### **Realización numérica**

La segunda parte de la monografía se dedica a las realizaciones prácticas de problemas. Combinaremos las consideraciones teóricas sobre diferentes modelos y ecuaciones con las técnicas. Al principio presentamos modelos alternativos para problemas de interacción. En el capítulo 3 estudiamos la formulación variacional. Este modelo debe ser considerado como la técnica más avanzada. Damos detalles en la construcción de . Segundo, la formulación es introducida en el capítulo 4. Este nuevo enfoque alternativo es adecuado para problemas con. Nuevamente, presentamos las herramientas necesarias de discretización y simulación. El capítulo 5 se ocupa de las herramientas para la solución de los problemas algebraicos que surgen de la discretización. En ambos casos, tenemos que lidiar con problemas muy grandes, no lineales. Finalmente, el capítulo 6 introduce el concepto de tiempo de escala para la reducción de la dimensión de los esquemas discretos que nos permitirá reducir significativamente la complejidad de los sistemas.



## Capítulo 2

### Método de Euler

**Resumen.** En este capítulo introducimos un tipo de funciones llamadas que pueden ser usados para aproximar otras funciones más generales

#### 2.1 Ecuación diferencial ordinaria lineal

## **Parte III**

# **Aplicaciones**

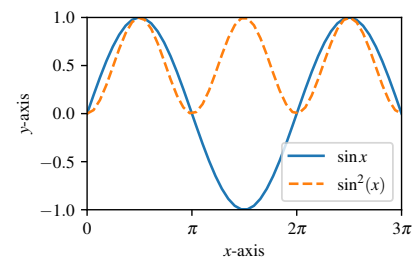
## **Capítulo 3**

### **Bifurcación de la ecuación logística**

**Resumen.** Muchas aplicaciones involucran problemas inversos. En esta sección,

#### **3.1 Ecuación diferencial ordinaria lineal**

**Fig. 3.1** A plot created with PythonTeX



En este capítulo introducimos algunos conceptos básicos concernientes al cálculo en una escala de tiempo. Una *escala de tiempo* es un subconjunto arbitrario no vacío de los números reales. Así,

$$\mathbb{R}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{N}, \quad \mathbb{N}_0,$$

es decir, los números reales, los enteros, los números naturales, y los enteros no negativos son ejemplos de escala de tiempo, como son

$$[0, 1] \cup [2, 3], \quad [0, 1] \cup \mathbb{N}, \quad \text{el conjunto de Cantor},$$

mientras que

$$\mathbb{Q}, \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad \mathbb{C}, \quad (0, 1),$$

los números racionales, los números irracionales, los números complejos y el intervalo abierto entre 0 y 1, *no* son escalas de tiempo. A lo largo de esta monografía denotaremos una escala de tiempo por el símbolo  $\mathbb{T}$ . Asumiremos que una escala de tiempo  $\mathbb{T}$  tiene la topología que hereda de los números reales con la topología estándar.

El cálculo de escala de tiempo fue iniciado por Stefan Hilger, a fin de crear una teoría que pueda unificar el análisis discreto y continuo. En efecto, abajo en la sección 1.2 introduciremos la derivada delta  $f^\Delta$  para una función  $f$  definida sobre  $\mathbb{T}$ , y resulta que

1.  $f^\Delta = f'$  es la derivada usual si  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  y
2.  $f^\Delta = \Delta f$  es el operador diferencia posterior usual si  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ .

En esta sección introducimos las nociones básicas conectadas a las escalas de tiempo. Empezamos definiendo los operadores salto posterior y anterior.

## 3.2 Introducción

**Definición 3.1 (Escala de tiempo)** Sea  $\mathbb{T}$  una escala de tiempo. Para  $t \in \mathbb{T}$  definimos el *operador salto posterior*  $\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  por

$$\sigma(t) := \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\} \quad \text{para cualquier } t \in \mathbb{T},$$

mientras que el *operador salto anterior*  $\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  es definido por

$$\rho(t) := \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\} \quad \text{para cualquier } t \in \mathbb{T}.$$

En esta definición agregamos el  $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ , es decir,  $\sigma(M) = M$  si  $T$  tiene un máximo  $M$  y el  $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$ , es decir,  $\rho(m) = m$  si  $\mathbb{T}$  tiene un mínimo  $m$ . Si  $\sigma(t) > t$ , diremos que  $t$  es *dispersa a la derecha*, mientras que si  $\rho(t) < t$  diremos que  $t$  es *dispersa a la izquierda*. Puntos que son dispersos a la derecha y dispersos a la izquierda en el mismo tiempo son llamados *aislados*. También, si  $t < \sup \mathbb{T}$  y  $\sigma(t) = t$ , entonces  $t$  es llamado *denso a la derecha*, y si  $t > \inf \mathbb{T}$  y  $\rho(t) = t$ , entonces  $t$  es llamado *denso a la izquierda*. Los puntos que son denso derecha y denso izquierda se llaman *densos*. Si  $T$  tiene un máximo disperso a la derecha  $M$ , entonces definimos  $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} \setminus \{M\}$ , caso contrario  $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$ . Finalmente, la función *grano*  $\mu: \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$  es definida por

$$\mu(t) := \sigma(t) - t \quad \text{para cualquier } t \in \mathbb{T}.$$

### 3.3 Diferenciación

Ahora consideremos una función  $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  y definir el llamado delta derivada (o Hilger) de  $f$  en un punto  $t \in \mathbb{T}^\kappa$ .

**Definición 3.2 (Delta diferenciable)** Asuma que  $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función y sea  $t \in \mathbb{T}^\kappa$ . Entonces definimos el número  $f^\Delta(t)$  (siempre que este exista) con la propiedad que dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe una vecindad  $U$  de  $t$  (es decir,  $U = (t - \delta) \cap \mathbb{T}$  para algún  $\delta > 0$ ) tal que

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \quad \text{para cualquier } s \in U.$$

Llamamos  $f^\Delta(t)$  la derivada delta (o Hilger) de  $f$  en  $t$ . Es más, diremos que  $f$  es *delta* (o Hilger) *diferenciable* (o en breve: *diferenciable*) en  $\mathbb{T}^\kappa$  siempre que  $f^\Delta(t)$  exista para cualquier  $t \in \mathbb{T}^\kappa$ . La función  $f^\Delta: \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$  es entonces llamada la derivada (delta) de  $f$  sobre  $\mathbb{T}^\kappa$ .

Algunas relaciones sencillas y útiles en relación con la derivada delta se dan a continuación.

**Teorema 3.1** Asuma que  $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función y sea  $t \in \mathbb{T}^\kappa$ . Entonces tenemos lo siguiente:

1. Si  $f$  es diferenciable en  $\mathbb{T}$ , entonces  $f$  es continua en  $t$ .
2. Si  $f$  es continua en  $t$  y  $t$  es dispersa a la derecha, entonces  $f$  es diferenciable en  $t$  con

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

3. Si  $t$  es densa a la derecha, entonces  $f$  es diferenciable en  $t$  sii el límite

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

existe como un número finito. En este caso

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

4. Si  $f$  es diferenciable en  $t$ , entonces

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t).$$

**Ejercicio 3.1** Muestre que si  $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0} := \{q^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ,  $q > 1$ , entonces

$$(\log t)^\Delta = \frac{\log q}{q - 1} \cdot \frac{1}{t}.$$

**Ejemplo 3.1** Nuevamente consideremos los dos casos  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  y  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ .

1. Si  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ , entonces el Teorema 1.3 resulta que  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es delta diferenciable en  $t \in \mathbb{R}$  sii

$$f'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \quad \text{existe,}$$

es decir, si  $f$  es diferenciable (en el sentido clásico) en  $t$ . En este caso tenemos entonces

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

por el Teorema 1.3 (iii).

2. Si  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ , entonces el Teorema 1.3 (ii) resulta que  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  es delta diferenciable en  $t \in \mathbb{Z}$  con

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t),$$

donde  $\Delta$  es el *operador diferencia posterior* usual definida por la última ecuación de arriba.

A continuación, nos gustaría poder encontrar las derivadas de sumas, productos, y cocientes de funciones diferenciables. Esto es posible de acuerdo con el siguiente teorema:

**Teorema 3.2** *Asuma que  $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  son diferenciables en  $t \in \mathbb{T}^\kappa$ . Entonces*

1. *La suma de  $f + g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $a$  con*

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t)$$

**Referencias bibliográficas**

- [1] Ravi Agarwal et al. “Dynamic equations on time scales: a survey”. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 141.1 (2002). Dynamic Equations on Time Scales, pp. 1–26. ISSN: 0377-0427.
- [2] Charles Denlinger. *Elements of real analysis*. Jones & Bartlett Learning, 2011.
- [3] Tom Jenkyns and Ben Stephenson. *Fundamentals of Discrete Math for Computer Science: A Problem-Solving Primer*. Second. Undergraduate Topics in Computer Science. Springer International Publishing AG, part of Springer Nature, 2018. ISBN: 978-3-319-70150-9.
- [4] Carlo Mariconda and Alberto Tonolo. *Discrete calculus. Methods for counting*. Vol. 103. UNITEXT - La Matematica per il 3+2. Springer International Publishing, 2016. ISBN: 978-3-319-03037-1. DOI: 10.1007/978-3-319-03038-8.
- [5] Laurence Sigler. *Fibonacci's Liber Abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisanos book of calculation*. Springer Science & Business Media, 2003.



## **Apéndice A**

### **Algunos códigos Python adicionales**

*All's well that ends well*

#### **A.1 Interés compuesto**

#### **A.2 Números de Fibonacci**

#### **A.3 Método de Runge–Kutta**

#### **A.4 Escala de tiempo**

# Índice

Ackermann	
número, 18	
Ecuación en diferencias	
definición, 5	
homogénea, 8	
lineal, 8	
Ecuación logística, 36	
Interés compuesto, 25	
Método de Euler, 34	
Principio de superposición, 13	
Relación de recurrencia	
compleja, 4	
definición, 4	
orden, 4	
polinomio característico, 14	
raíz, 15	
real, 4	
solución, 4	
Sucesión	
contractiva, 29	
media aritmética, 30	
media aritmética ponderada, 30	
Torres de Hanói, 22	