Carlos A. Aznarán Laos
Franss Cruz Ordoñez
Junior Micha Velasque
Gabriel Quiróz Gómez
Davis S. García Fernández

Relación de recurrencia

Ecuaciones en diferencias y análisis en escalas de tiempo

21 de junio del 2019

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

La presente monografía está dedicada a mis profesores y estudiantes de la Facultad de Ciencias.

Prefacio

Uno de los temas más importantes dentro del *Análisis Matemático* son las sucesiones, es decir, funciones cuyo dominio y contradominio es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y el de los números reales $\mathbb{R}$, respectivamente. En el presente trabajo nos enfocaremos en nada menos que las "relaciones de recurrencia", donde cualquier término se determina en función de al menos uno de los términos precedentes, en el célebre libro [13, ver pág. 404] de *Leonardo de Pisa*[1] se da la solución al siguiente problema de cría de conejos:

> "Cierta persona cría una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y desea saber cuántos nacimientos durante un año han acontecido a partir del par inicial, de acuerdo a su naturaleza, cada pareja necesita un mes para envejecer y cada mes posterior procrea otra pareja".

Este ejemplo famoso es conocido como la *sucesión de Fibonacci*. Viendo esto, hemos concebido un modelo matemático basado en sucesiones recursivas, dando su definición, algunos otros ejemplos, su relación con las ecuaciones en diferencias y otras aplicaciones como resolver sistemas de ecuaciones lineales empleando nuestros conocimientos adquiridos en el curso de Análisis Real de la carrera de Matemática en la Universidad Nacional de Ingeniería.

Rímac,
junio 2019

Carlos Aznarán Laos
Franss Cruz Ordoñez

[1] Fibonacci

Agradecimientos Nos gustaría expresar el agradecimiento especial al maestro Manuel Toribio Cangana, así como a nuestro profesor Benito Ostos, que nos brindó la excelente oportunidad de elaborar esta monografía sobre el tema *relaciones de recurrencia*, quien también nos ayudó en la organización del mismo. Estamos muy agradecidos con ellos. En segundo lugar, también nos gustaría agradecer a nuestros padres y amigos que nos ayudaron a terminar este proyecto en un tiempo limitado.

Estamos haciendo este proyecto no solo por las notas sino también para expandir nuestro conocimiento.

Contenido

Parte I
Fundamentos

En la primera parte de la monografía presentaremos los conceptos fundamentales para modelar y simular los problemas de las ecuaciones en diferencias, a veces, mal llamado *relaciones de recurrencias*. En el capítulo 1 presentaremos los modelos fundamentales y las ecuaciones en diferencias. Discutiremos la relación de *Ackermann*.

Capítulo 1
Introducción

1.1 Relación de recurrencia

En esta sección presentamos a nuestros lectores las nociones básicas subyacentes de las relaciones de recurrencia, así como varios ejemplos de tales relaciones. Una relación de recurrencia es una familia numerable de ecuaciones que definen sucesiones en modo recursivo. Aquellas sucesiones que así surgen se llaman *soluciones de la recurrencia*, dependiendo de uno o más *valores iniciales*: cada término que sigue al valor inicial en tales sucesiones es definida como una función de los términos anteriores.

Ejemplo 1.1 (Relaciones de recurrencias real)

1. El sistema de ecuaciones con coeficientes reales en la colección infinita de incógnitas $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$
$$\begin{cases} x_1 & = 3x_0 \\ x_2 & = 3x_1 \\ \vdots & = \vdots \\ x_{n+1} & = 3x_n \\ \vdots & = \vdots \end{cases}$$
podría indicarse más concisamente por $x_{n+1} = 3x_n, n \geq 0$, es una *relación de recurrencia*. La sucesión $(3^n)_{n\geq 0}$ es una solución de la recurrencia dada con *valor inicial* $x_0 = 1$. Es fácil de convencerse a uno mismo que en general, para cualquier número real $c \in \mathbb{R}$, la sucesión $(c3^n)_{n\geq 0}$ es la única solución de la *recurrencia* con el valor inicial $x_0 = c$.
2. Con el cuidado adecuado es fácil verificar que la sucesión real
$$x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 4, \ldots, x_7 = 4, \ldots, x_{2^m} = 2^m, \ldots$$
es la solución de la *relación de recurrencia* con coeficientes reales
$$x_n = \begin{cases} 2x_{n/2}, & \text{si } n \geq 2 \text{ es par,} \\ x_{n-1}, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$
con el *valor inicial* $x_0 = 1$.
3. La sucesión real

$$x_0 = 2, x_1 = 1, x_2 = 2^{1/2}, x_3 = 1, \ldots, x_{2m-1} = 1, x_{2m} = 2^{1/2^m}, \ldots$$

es la solución de la *relación de recurrencia* con coeficientes reales

$$x_n = \sqrt{x_{n-2}}, \quad n \geq 2,$$

y los *valores iniciales* $x_0 = 2$ y $x_1 = 1$.

La pregunta que ahora surge naturalmente es la de definir relaciones generales de recurrencia. Buscamos exponer de manera rigurosa lo que acabamos de inferior de los ejemplos anteriores.

Definición 1.1 (Relación de recurrencia) Una **relación de recurrencia** en las incógnitas x_i, $i \in \mathbb{N}$, es una familia de ecuaciones

$$x_n = f_n(x_0, \ldots, x_{n-1}), \quad n \geq r,$$

donde $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, y $(f_n)_{n \geq r}$ son funciones

$$f_n \colon D_n \to \mathbb{R}, \quad D_n \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \text{o} \quad f_n \colon D_n \to \mathbb{C}, \quad D_n \subseteq \mathbb{C}^n.$$

Dependiendo del caso encontrado, las llamaremos **recurrencias reales** o **recurrencias complejas**. Las incógnitas $x_0, \ldots, x_{r-1}$ son llamadas **libres**. Su número r es el **orden** de la relación.

Al reemplazar n por $n + r$, la relación de recurrencia de orden r

$$x_n = f_n(x_0, \ldots, x_{n-1}), \quad n \geq r,$$

puede también escribirse como

$$x_{n+r} = f_{n+r}(x_0, \ldots, x_{n+r-1}), \quad n \geq 0.$$

Definición 1.2 (Solución de una recurrencia) Una sucesión $(a_n)_n$ es una **solución** de la relación de recurrencia de orden r

$$x_n = f_n(x_0, \ldots, x_{n-1}), \quad n \geq r, \tag{1.1}$$

con $f_n \colon D_n \to \mathbb{R}$, $D_n \in \mathbb{R}^n$, sii

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in D_n, \quad a_n = f_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \quad \forall\, n \geq r.$$

La tupla $(a_0, \ldots, a_{r-1})$ de valores asignados para las r incógnitas libres es llamada la r–tupla de **valor inicial** o de las **condiciones iniciales** de la solución. Definimos la **solución general real** (respectivamente **compleja**) de la sucesión como la familia de todas las soluciones con elementos que pertenece a $\mathbb{R}$ (respectivamente en $\mathbb{C}$).

Ejemplo 1.2 Considere la relación de recurrencia de primer orden definida por

$$x_n = \frac{1}{x_{n-1} - 1}, \quad n \geq 1.$$

La 1–tupla $(2) \in D_0$ no es una tupla de valor inicial de una solución, en efecto, 2 pertenece al dominio de $f_0(x) = \frac{1}{x-1}$, pero $(2, f_0(x = 2)) = (2, 1)$ no pertenece al dominio de $f_1(x_0, x_1) = \frac{1}{x-1}$. En cambio, la 1–tupla (3) es una tupla de valor inicial de la solución (sucesión)

$$(a_n)_n := \left\{3, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{7}, -\frac{7}{1}, \ldots\right\}.$$

Note que para $n \geq 2$ uno tiene $a_n < 0$ y así $a_{n+1} = \frac{1}{a_n - 1} < 0$ es distinto de 1.

Ejemplo 1.3 (Forma alternativa de la relación de recurrencia) En muchas ocasiones una relación de recurrencia de orden r involucra solo los últimos r términos y es de la forma

$$x_n = g_n(x_{n-r}, \ldots, x_{n-1}), \quad n \geq r,$$

donde $(g_n)_{n \geq r}$ son las funciones definidas en un subconjunto E_n de $\mathbb{R}^r$ o $\mathbb{C}^r$. Este último es de hecho una relación de recurrencia: es suficiente para establecer $f_n(x_0, \ldots, x_{n-1}) := g_n(x_{n-r}, \ldots, x_{n-1})$ para $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in D_n := \mathbb{R}^{n-r} \times E_n$ (o $\mathbb{C}^{n-r} \times E_n$) a fin de cumplir los requerimientos de la definición (1.1).

1.2 Ecuación en diferencias

Aquí es conveniente representar cualquier sucesión de números reales $(a_n)_n$ como la función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(n) = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dadas dos funciones $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{R}$ consideremos las funciones:

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n), \quad \text{y} \quad (rf)(n) = rf(n) quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dotado de estas operaciones, el conjunto de funciones de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial de funciones. También consideraremos la función:

$$(fg)(n) = f(n)g(n), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Un mapa lineal del espacio de funciones de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$ en sí mismo es un operador.

Definición 1.3 (Operador identidad y operador de cambio) Consideramos el espacio de funciones de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Para cada función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ el operador identidad y el operador de cambio θ están definidos:

$$\mathbb{I}(f) = f \quad \text{y} \quad \theta(f)(n) = f(n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Uno verifica inmediatamente que la identidad y el operador de cambio son de hecho lineales.

Proposición 1.1 (Linealidad de la identidad y el operador de cambio) *Sean las funciones $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $c \in \mathbb{R}$. Luego tenemos:*

1. $\mathbb{I}(f+g)(n) = \mathbb{I}(f)(n) + \mathbb{I}(g)(n)$.
2. $\mathbb{I}(cf)(n) = c\mathbb{I}(f)(n)$ *y* $\theta(cf)(n) = c\theta(f)(n)$.

Prueba Sea $n \in \mathbb{N}$, luego:

$$\theta(f+g)(n) = (f+g)(n+1) = f(n+1) + g(n+1) = \theta(f)(n) + \theta(g)(n).$$
$$\theta(cf)(n) = (cf)(n+1) = cf(n+1) = c\theta(f)(n).$$

Se verifica la linealidad de $\mathbb{I}$ inmediatamente. □

Para cualquier operador T, será conveniente un ligero abuso de notación, para escribir $Tf(n)$ en lugar de $T(f)(n)$. Además en algunos casos, por ejemplo cuando f depende de otros parámetros, uno escribe $T_n f(n)$ en lugar de $Tf(n)$ para evitar la ambigüedad. Así, por ejemplo, denotada por $\mathbb{I}_{\mathbb{N}}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función definida por $\mathbb{I}_{\mathbb{N}}(n) = n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ escribiremos $\theta n = n+1$ en lugar de $\theta(\mathbb{I}_{\mathbb{N}})(n) = n+1$. Análogamente $\theta n^2 = (n+1)^2$, $\theta_n n^a = (n+1)^a$ y $\theta_n a^n = a^{n+1}$ para cada $a \in \mathbb{R}$.

Para las funciones de valor real de una variable de número natural ahora introducimos el análogo de la derivada habitual para funciones de valor real de una variable real:

Definición 1.4 (Operador diferencia) El operador diferencia es el operador $\triangle$ que a cada función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ asigna la función $\triangle f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definido de la siguiente manera:

$$\triangle f(n) = f(n+1) - f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observación 1.1 Usando el operador de cambio, uno tiene $\triangle = \theta - \mathbb{I}$, es decir:

$$\triangle f = \theta f - f, \quad \forall f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Claramente, para cada función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, uno tiene:

$$\triangle f(k) = \frac{f(k+1) - f(k)}{1},$$

entonces $\triangle f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una función que mide el cociente de diferencia de f sobre el intervalo más pequeño posible de números naturales, es decir, un intervalo de longitud uno. En este sentido, el operador diferencia constituye el análogo discreto de la noción de derivada para funciones de una variable real. En lo que sigue, el lector tendrá ocasión para anotar analogías y contrastes entre estas dos nociones.

Al igual que la derivada, el operador de diferencia es lineal: de hecho, es una diferencia de dos operadores lineales.

Proposición 1.2 (Linealidad de la diferencia) *Sean $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Luego uno tiene:*

1. $\triangle(f+g) = \triangle f + \triangle g$.
2. $\triangle(cf) = c \triangle f$.

Prueba Como $\triangle = \theta - \mathbb{I}$ se obtiene:

1. $\triangle(f+g) = (\theta - \mathbb{I})(f+g) = \theta(f+g) - \mathbb{I}(f+g) = \theta(f) - f + \theta(g) - g = \triangle(f) - \triangle(g)$.
2. $\triangle(cf) = (\theta - \mathbb{I})(cf) = \theta(cf) - \mathbb{I}(cf) = c\theta(f) - cf = c(\theta - \mathbb{I})(f) = c \triangle(f)$. □

Ahora vemos cómo el operador de diferencia actúa en algunas funciones simples con dominio $\mathbb{N}$.

Ejemplo 1.4

1. Funciones constantes: al igual que en el caso de la derivada de una constante. Funciona con dominios en $\mathbb{R}$, aquí también tenemos que la diferencia de una función constante (con dominio $\mathbb{N}$) es igual a la función cero: de hecho, si $f(n) = c \in \mathbb{R}$ por cada $n \in \mathbb{N}$, entonces
$$\triangle f(k) = f(k+1) - f(k) = c - c = 0.$$
2. Función de identidad en los números naturales: al igual que en el caso continuo, la diferencia de la función de identidad $I_{\mathbb{N}} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es la función constante $n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De hecho,
$$\triangle I_{\mathbb{N}}(n) = I_{\mathbb{N}}(n+1) - 1 = n + 1 - n = 1.$$

Ejemplo 1.5 Los operadores de cambio y diferencia conmutan. Más explícitamente, uno tiene
$$\triangle \circ \theta = \theta \circ \triangle.$$

Prueba De hecho, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada función $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uno tiene
$$\triangle\left(\theta f\right)(n) = \theta f\ (n+1) - \theta f(n) = f(n+2) - f\ (n+1)\,,$$
mientras
$$\theta\left(\triangle f\right)(n) = \triangle f\ (n+1) = f(n+2) - f(n+1).$$
Por lo tanto, uno tiene $\triangle\left(\theta f\right) = \theta\left(\triangle f\right)(n)$. $\square$

La fórmula para la diferencia de un producto se parece a la del derivado de un producto, excepto la introducción del operador de cambio:

Proposición 1.3 (Diferencia de un producto) *Si* $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, luego*
$$\triangle\left(fg\right) = \triangle f \theta g + f \triangle g.$$

Observación 1.2 Cabe destacar el hecho evidente de que a pesar de la aparente falta de simetría, uno tiene $\triangle\left(fg\right) = \triangle\left(gf\right)$.

Prueba
$$\begin{aligned}
\triangle\left(f(n)g(n)\right) &= f\ (n+1)\, g\ (n+1) - f(n)g(n) \\
&= f(n+1)g(n+1) - f(n)g(n+1) + f(n)(n+1) - f(n)g(n) \\
&= (f(n+1) - f(n))g(n+1) + f(n)g(n+1) - g(n) \\
&= \triangle f(n)\theta g(n) + f(n) \triangle g(n).
\end{aligned}$$

Una ecuación en diferencias es una expresión de la forma:
$$G\left(n, f(n), f(n+1), \ldots, f(n+k)\right) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$$
donde f es una función definida en $\mathbb{Z}$.

Si después de simplificar esta expresión quedan los términos $f\ (n+k_1)$ y $f\ (n+k_2)$ como el mayor y el menor, respectivamente. Se dice que la ecuación es de orden $k = k_1 - k_2$.

Ejemplo 1.6 (Ecuación en diferencias de orden 3) La ecuación dada por

$$5f(n+4) - 4f(n+2) + f(n+1) + (n-2)^3 = 0$$

es de orden $4 - 1 = 3$.

Una ecuación en diferencias de orden k se dice que es *lineal* si puede expresarse de la forma:

$$p_0(n)f(n+k) + p_1(n)f(0+k-1) + \cdots + p_k(n)f(n) = g(n),$$

donde los coeficientes p_i son funciones definidas en $\mathbb{Z}$.

El caso más sencillo es cuando los coeficientes son constantes $p_i(n) = a_i$:

$$a_0 f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \cdots + a_k f(n) = g(n).$$

La ecuación en diferencias se dice que es *homogénea* en el caso que $g(n) = 0$, y completa en el caso contrario.

Teorema 1.1 *Dada la ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes y de orden K:*

$$a_0 f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \cdots + a_k f(n) = g(n)$$

el problema de hallar una función definida $\mathbb{Z}$, que verifique la ecuación, y tales que en los k enteros consecutivos $n_0, n_0+1, \ldots, n_0+k-1$ tome los valores dados $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$, tiene solución única.

Teorema 1.2 *Dada una ecuación en diferencias lineal homogénea de coeficientes constantes y de orden k. Si una solución f es nula en k enteros consecutivos, entonces f es idénticamente nula.*

Teorema 1.3 *Toda combinación lineal de soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea de coeficientes constantes y de orden k es también solución de dicha ecuación.*

Definición 1.5 (Solución de una ecuación en diferencias homogénea) Sea la ecuación en diferencias lineal homogénea de coeficientes constantes y de orden k.

$$a_0 f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \cdots + a_k f(n) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Buscaremos soluciones del tipo $f(n) = r^n$. Entonces,

$$r^n \left(a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \cdots + a_k\right) = 0 \implies r^n(a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \cdots + a_k) = 0.$$

Por tanto, r es raíz de la **ecuación característica**

$$(a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \cdots + a_k) = 0.$$

El estudio de la solución dependería de si las raíces de la ecuación característica son simples o múltiples.

Ejemplo 1.7 Hallar la solución de

$$f(n+2) - 4f(n+1) + 3f(n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

La ecuación característica es

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \to r_1 = 3, \quad r_2 = 1.$$

Por lo tanto:

$$f(n) = c_1 3^n + c_2 1^n = c_1 3^n + c_2.$$

Por otra parte:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ f(1) = 3c_1 + c_2 = 1 \end{array}\right\} \longrightarrow c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{2}.$$

De donde

$$f(n) = \frac{1}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

1.3 Recurrencias Lineales con coeficientes constantes

Una relación de recurrencia lineal de orden r con coeficientes constantes es una recurrencia del tipo:

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = h_n, \forall n \geq r, \tag{1.2}$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_r$ son constantes reales o complejas, con c_0 y c_r ambos diferentes de cero y $(h_n)_{n \geq r}$ es una sucesión de números reales o complejos llamado sucesión de términos no homogéneos de la recurrencia. La recurrencia es llamada homogénea si la sucesión de términos no homogéneos es una sucesión nula, no homogénea si $h \neq 0$ para algún n. La relación de recurrencia:

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = 0, \forall n \geq r, \tag{1.3}$$

es llamada la recurrencia homogénea asociada, o la parte homogénea de la recurrencia (1.2). Como nosotros ya hemos notado, la recurrencia:

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = h_n, \forall n \geq r,$$

puede ser escrito equivalentemente como

$$c_0 x_{n+r} + c_1 x_{n+(r-1)} + \cdots + c_r x_n = h_{n+r}, \forall n \geq 0.$$

Se puede utilizar cualquiera de las formas presentadas.

Observación 1.3 Cada r-secuencia de valores asignados a las r incógnitas desconocidas de la relación de recurrencia

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = h_n, \forall n \geq r,$$

determina de forma única una solución. Al resolver una relación de recurrencia lineal, el siguiente principio es fundamental importancia.

Proposición 1.4 (Principio de superposición) *Sean $(u_n)_n$, $(V_n)_n$ respectivamente las soluciones de las relaciones de recurrencia lineal.*

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = h_n, \quad n \geq r$$

y

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = k_n, \quad n \geq r,$$

con partes homogéneas iguales y secuencias de términos no homogéneos $(h_n)_n$ *y* $(k_n)_n$. *Para cualquier par de constantes* A *y* B, *la sucesión* $(Av_n + Bv_n)_n$ *es una solución de la relación de recurrencia.*

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = Ah_n + Bk_n.$$

La solución general de la relación de recurrencia

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = h_n, \quad n \geq r. \tag{1.4}$$

Prueba

1. Uno tiene fácilmente

$$\begin{aligned} & c_0(Au_n + Bv_n) + c_1(Au_{n-1} + Bv_{n-1}) + \cdots + c_r(Au_{n-r} + Bv_{n-r}) = \\ & \qquad = A(c_0 u_n + c_1 u_{n-1} + \cdots + c_r u_{n-r}) + B(c_0 v_n + c_1 v_{n-i} + \cdots + c_r v_{n-r}) \\ & \qquad = Ah_n + Bk_n. \end{aligned}$$

2. Sea $(u_n)_n$ una solución particular de (1.4). Por el punto previo nosotros conocemos que $(v_n)_n = (u_n)_n + (v_n - u_n)_n$ es una solución de (1.4) si y solo si $v_n - u_n$ es una solución de la recurrencia homogénea asociada. Por lo tanto cada solución de (1.4) es obtenida añadiendo una solución de la recurrencia homogénea asociada para $(u_n)_n$. □

1.4 Relación de recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes

La sucesión nula es una solución de cualquier relación de recurrencia lineal. La estructura de la solución general de una relación de recurrencia lineal homogénea corresponde a la estructura de la solución general de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

Proposición 1.5 (Teorema principal) *Considere la relación de recurrencia lineal homogénea de orden* r*:*

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = 0, \quad n \geq r \quad (c_0 c_r \neq 0) \tag{1.5}$$

1. *Cualquier combinación lineal de soluciones de* (1.5) *es de nuevo una solución de* (1.5).
2. *Existe* r *soluciones de* (1.5) *tal que cualquier otra solución de* (1.5) *puede ser expresado únicamente como su combinación lineal.*

Prueba

1. Esto sigue inmediatamente por el “Principio de Superposición”.
2. Para todo $i \in \{0, \ldots, r-1\}$ sea $\left(u_n^i\right)_n$ la solución de (1.5) con r–sucesión de valores iniciales iguales a 0 para índices $j \neq i$, iguales a 1 en índices i, es decir:

$$u_j^i = 0 \text{ si } j \neq i, \quad u_i^i = 1 \quad j \in \{0, \dots, r-1\}.$$

Consideramos ahora alguna solución $(a_n)_n$ de (1.5); la combinación lineal

$$a_0 \big(u_n^0\big)_n + a_1 \big(u_n^1\big)_n + \cdots + a_{r-1} (u_n^{r-1})_n,$$

es una solución de (1.5) con secuencia de datos iniciales $(a_0, \dots, a_{r-1})$. Ya que la sucesión de valores iniciales determinan la solución de una relación de recurrencia, uno tiene

$$(a_n)_n = a_0 \left(u_n^0\right)_n + a_1 \left(u_n^1\right)_n + \cdots + a_{r-1} \left(u_n^{r-1}\right)_n.$$

Definición 1.6 (Polinomio característico) Definimos el *polinomio característico* de una relación de recurrencia con coeficientes constantes de orden r de la siguiente manera:

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = h_n, \quad n \geq r \ (c_0 c_r \neq 0),$$

para el polinomio de grado r:

$$P(X) := c_0 X^r + c_1 X^{r-1} + \cdots + c_r.$$

Cada polinomio de grado r tiene exactamente r raíces complejas contando con su multiplicidad. Vemos ahora que la sucesión de las potencias naturales de una determinada raíz del polinomio característico de una relación de recurrencia lineal es una solución de la correspondiente relación homogénea.

Proposición 1.6 (Raíz del polinomio característico) *Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. La sucesión $(\lambda^n)_n$ de las potencias de λ es una solución de la relación de recurrencia lineal homogénea*

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = 0, \quad n \leq r \quad (c_0 c_r \neq 0), \tag{1.6}$$

sii λ es una raíz de este polinomio característico.

Prueba Dado que $c_r \neq 0$, las raíces del polinomio característico deben ser necesariamente no nulas. Sustituyendo los valores de la sucesión $(\lambda^n)_n$ en la recurrencia, uno tiene

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} = 0,$$

y dividiendo por $\lambda^{n-r} \neq 0$

$$c_0 \lambda^r + c_1 \lambda^{r-1} + \cdots + c_r = 0.$$

Por lo tanto, la sucesión $(\lambda^n)_n$ es una solución de (1.6) sii λ es una raíz del polinomio $c_0 X^r + c_1 X^{r-1} + \cdots + c_r$. □

En general, no es fácil encontrar las raíces de un polinomio de grado mayor que dos, aunque uno puede siempre usar un adecuado CAS. El siguiente criterio simple, sin embargo, muestra cómo encontrar las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros.

Proposición 1.7 (Las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros) *Sea $P(X) = c_0 X^r + c_1 X^{r-1} + \cdots + c_r$ un polinomio con coeficientes enteros $c_0 \dots c_r \in \mathbb{Z}$, con $c_0 \neq 0$. Si la fracción $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ con $\mathrm{mcd} = 1$ es una raíz de $P(X)$, luego $a \mid c_r$ y $b \mid c_0$. En particular, si $c_0 = \pm 1$ las raíces racionales del polinomio $P(X)$ son enteros que dividen a c_r.*

Prueba Dado $c_0\left(\frac{a}{b}\right)^r + c_1\left(\frac{a}{b}\right)^{r-1} + \cdots + c_{r-1}\left(\frac{a}{b}\right) + c_r = 0$, multiplicado por b^r obtenemos:

$$c_0 a^r + c_1 a^{r-1} b + \cdots + c_{r-1} a b^{r-1} + c_r b^r = 0.$$

Como $a \mid c_0 a^r + c_1 a^{r-1} b + \cdots + c_{r-1} a b^{r-1}$, luego tiene que dividir también $c_r b^r$, y por lo tanto, al no tener a y b factores comunes, $a \mid c_r$. Análogamente $b \mid c_0 a^r$ y por lo tanto divide a c_0. □

Ejemplo 1.8 (Polinomio característico) La recurrencia homogénea de segundo orden:

$$x_n = 2x_{n-1} - 2x_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

tiene polinomio característico $X^2 - 2X + 2$ cuyas raíces son $\lambda_1 = 1 - i$ y $\lambda_2 = 1 + i$. Las sucesiones $((1-i)^n)_n$ y $((1+i)^n)_n$ son las soluciones bases de la recurrencia. La solución general compleja de la recurrencia es:

$$x_n = A_1(1-i)^n + A_2(1+i)^n, \quad n \geq 0,$$

con la variante de A_1 y A_2 entre los números complejos. Veamos la solución real general. Uno tiene:

$$\lambda_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

y

$$\lambda_2 = 1 + i = \overline{\lambda_1} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Luego, las sucesiones $\left(2^{n/2}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)_n$ y $\left(2^{n/2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)_n$ son las soluciones base reales de la recurrencia. Por lo tanto, la solución general real de la recurrencia es:

$$x_n = A_1 2^{n/2}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + A_2 2^{n/2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right), \quad n \geq 0,$$

con la variación de A_1 y A_2 entre los números reales.

1.4.1 Algunos modelos de recurrencias lineales

Ahora damos una serie de ejemplos que ilustran cómo reducir la solución de un problema en el que la búsqueda de las soluciones de una relación de recurrencia apropiada.

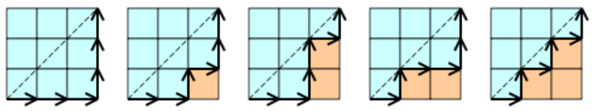
Ejemplo 1.9 (Número de Catalan) El número de Catalan (C_n) es igual al número de rutas de la esquina inferior izquierda de una retícula cuadrada de $n \times n$ a la esquina superior derecha si estamos restringidos a viajar solo a la derecha o hacia arriba y si se permite tocar pero no pasar arriba de la diagonal entre la esquina inferior izquierda y la superior derecha. Tal ruta recibe el nombre de *ruta buena*. Se da una relación de recurrencia para los números de Catalan. Las rutas buenas se dividen en clases con base en la primera vez que tocan la diagonal después de salir de la esquina inferior derecha. Por ejemplo, la ruta en la figura toca la diagonal primero en el punto $(3, 3)$. Las rutas que tocan la diagonal primero en el punto (k, k) se consideran construidas por un proceso de varios pasos:

1. Primero, se construye la parte de $(0, 0)$ a (k, k).

2. Segundo, se construye la parte de (k, k) a (n, n). Una buena ruta siempre sale de $(0, 0)$ moviéndose hacia la derecha a $(1, 0)$ y siempre llega a (k, k) moviéndose hacia arriba desde $(k, k-1)$.
3. Los movimientos de $(1, 0)$ a $(k, k-1)$ dan una ruta buena en la rejilla de $(k-1) \times (k-1)$ con esquina en $(1, 0)$, $(1, k-1)$, $(k, k-1)$ y $(k, 0)$. En la figura 1.1, se marcaron los puntos $(1, 0)$ y $(k, k-1)$, $k = 3$, con rombos, y se aisló la subrejilla de $(k-1) \times (k-1)$. Así, hay C_{k-1} rutas de $(0, 0)$ a (k, k) que tocan primero a la diagonal en (k, k).
4. La parte de (k, k) a (n, n) es una buena ruta en la rejilla de $(n-k) \times (n-k)$ con esquinas en $(k, k), (k, n), (n, n)$ y (n, k) (vea la figura). Hay C_{n-1} rutas de este tipo. Por el principio de la multiplicación, hay $C_{k-1}C_{n-k}$ rutas buenas en una rejilla de $n \times n$ que tocan primero la diagonal en (k, k). Las rutas buenas que tocan por primera vez en $(k', k'), k \neq k'$. Entonces se utiliza el principio de la suma a fin de obtener una relación de recurrencia para el número total de rutas buenas en una rejilla de $n \times n$:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}.$$

Fig. 1.1 Retículo de tamaño (k, k).



Ejemplo 1.10 (La escalera) Un niño decide escalar una escalera con $n \geq 1$ de tal manera que cada paso que él despeja uno o dos de los pasos de la escalera.Encuentre la relación de recurrencia que sirva para calcular el número de diferentes maneras posibles de escalar la escalera.

Usamos la variable desconocida x_n para denotar el número de maneras en las cuales el niño puede escalar la escalera de $n \geq 1$ pasos. Es fácil de observar que $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$ (dos pasos cada uno de longitud uno, o un paso de longitud dos escalones). Ahora sea $n \geq 3$: si con el primer paso el niño mueve solo el primer escalón; existen claramente x_{n-1} posibles maneras de escalar los que quedan. Si en cambio con el primer lugar, se suben dos peldaños de escalera. *Resolver una ecuación de recurrencia* significa encontrar una sucesión que satisfaga las ecuaciones de recurrencias. Encontrar una "solución general" significa hallar una fórmula que describa todas las soluciones posibles (todas las sucesiones posibles que satisfacen la ecuación). Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.11 Considere que T_n satisface la siguiente ecuación para todo $n \in \mathbb{N}, n > 1$:

$$T_n = 2T_{n-1} + 1.$$

La ecuación de recurrencia T_n indica cómo continúa la sucesión pero no nos dice como empieza tal.

- Si $T_1 = 1$, se tiene $T = (1, 7, 3, 15, 31, \ldots)$.
- Si $T_2 = 1$, se tiene $T = (2, 5, 11, 23, 47, \ldots)$.

- Si $T_4 = 1$, se tiene $T = (4, 9, 19, 39, 79, \ldots)$.
- Si $T_{-1} = 1$, se tiene $T = (-1, -1, -1, 1 - 1, -1, \ldots)$.

¿Existe alguna fórmula para cada una de estas sucesiones? ¿Existe una fórmula en términos de n y T_1 que describa todos los términos de la sucesión? ¿Existe una posible solución para T_n? Para poder responder este tipo de problemas, veamos un poco más de ecuaciones con recurrencia.

1.5 Ejemplos definidos por ecuaciones de recurrencia

Ejemplo 1.12 (Parejas desordenadas) Imagina una fiesta donde las parejas llegan juntas, pero al final de la noche, cada persona se va con una nueva pareja. Para cada $n \in P$, digamos que D_n es el número de diferentes formas en que las parejas pueden ser "desordenadas", es decir, reorganizadas en parejas, por lo que ni uno está emparejado con la persona con la que llegaron.

Para los valores:

- $D_1 = 0$, una pareja no puede ser desordenada.
- $D_2 = 1$, existe una y solo una manera de "desordenar" una pareja.
- $D_3 = 2$, si las parejas llegan como Aa, Bb, Cc, entonces A estaría emparejado con b o c. Si A esta emparejado con b, C debe estar emparejado con a(y no c) y B con c. Si A esta emparejado con c, B no debe estar emparejado con a(y no b) y C con b.

¿Qué tan grandes son D_4, D_5 y D_{10}? ¿Cómo podemos calcularlos? ¿Existe alguna expresión cerrada para obtener todos los términos de la?

Vamos a desarrollar una estrategia para contar los desajustes cuando $n \leq 4$. Supongamos que hay n mujeres $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, y cada A_j llega con el hombre a_j.

La mujer A_1 puede ser "re-emparejada" con cualquiera de los $n - 1$ hombres restantes a_2 o a_3 o $\ldots$ o a_n. Digamos que está emparejada con a_k, donde $2 \leq k \leq n$ y ahora consideremos a'_k pareja original de la mujer A_k: ella podría tomar a_1 o ella podría rechazar a_1 y tomar a alguien más.

Si A_1 es pareja con a_k y A_k es pareja con a_1, entonces $n - 2$ parejas dejaron para desordenar, y eso puede hacerse exactamente de D_{n-2} maneras diferentes.

Ahora para cada uno de los $n - 1$ hombres que A_1 podría elegir, hay $\{D_{n-2} + D_{n-1}\}$ diferentes formas de completar el trastorno. Por lo tanto, cuando $n \geq 4$ tenemos:

$$D_n = (n - 1)\{D_{n-2} + D_{n-1}\} \tag{1.7}$$

Usando la ecuación (1.7) las evaluaciones para $n = 1$ y $n = 2$ verifican la igualdad, ahora evaluemos D_n para cualquier valor de n, con $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
D_3 &= (3-1)\{D_2 + D_1\} = 2\,(1+8) = 2.\\
D_4 &= (4-1)\{D_3 + D_2\} = 3\,(2+1) = 9.\\
D_5 &= (5-1)\{D_4 + D_3\} = 4\,(9+2) = 44.\\
D_6 &= (6-1)\{D_5 + D_4\} = 5\,(44+9) = 265.\\
D_7 &= (7-1)\{D_6 + D_5\} = 6\,(265+44) = 1854.\\
D_8 &= (8-1)\{D_7 + D_6\} = 7\,(1854+265) = 14833.\\
D_9 &= (9-1)\{D_8 + D_7\} = 8\,(14833+1854) = 133496.\\
D_{10} &= (10-1)\{D_9 + D_8\} = 9\,(133496+14833) = 1334961.
\end{aligned}$$

La sucesión en P definido por $S_n = A \times n!$ donde A es un número real satisface la ecuación de recurrencia (1.7). Si $n \geq 3$ se tiene:

$$\begin{aligned}
(n-1)\{S_{n-2} + S_{n-1}\} &= (n-1)\{A(n-2)! + A(n-1)!\}\\
&= (n-1)A(n-2)!\{1 + (n-1)\}\\
&= A(n-1)(n-2)!\{n\}\\
&= A \times n!\\
&= S_n.
\end{aligned}$$

¿Es válida la fórmula para $n = 1$ o $n = 2$? ¿Existe algún número real tal que $D_n = A(n!)$ cuando $n = 1$ o $n = 2$? No, porque si $0 = D_1 = A(1!)$, entonces A debe ser igual a 0, y si $1 = D_2 = A(2!)$, se tiene que A debería tomar el valor de $\frac{1}{2}$. Sin embargo, podemos usar esta fórmula para probar que D_n es acotado.

Teorema 1.4 *Para todo* $n \geq 2$, $\left(\frac{1}{3}\right) n! \leq D_n \leq \left(\frac{1}{2}\right) n!$.

Prueba Primero considere la tabla de valores: Por inducción fuerte en matemática sobre

n	$\left(\frac{1}{3}\right) n!$	D_n	$\left(\frac{1}{2}\right) n!$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{2}{3}$	1	$1 = \frac{2}{2}$
3	$\frac{6}{3} = 2$	2	$3 = \frac{6}{2}$
4	$\frac{24}{3} = 8$	9	$12 = \frac{24}{2}$
5	$\frac{120}{3} = 40$	44	$60 = \frac{120}{2}$
6	$\frac{720}{3} = 240$	265	$360 = \frac{720}{2}$

n.

Paso 1 Si $n = 2$, se tiene $\left(\frac{1}{3}\right) n! = \frac{2}{3} < 1 = D_n = \left(\frac{1}{2}\right) n!$ y $n = 3$, se tiene $\left(\frac{1}{3}\right) n! = \frac{6}{3} = 2 = D_n < 3 = \left(\frac{1}{2}\right) n!$.

Paso 2 Supongamos que $\exists k \geq 3$ tal que si $2 \leq n \leq k$, se tiene $\left(\frac{1}{3}\right) n! \leq D_n \leq \left(\frac{1}{2}\right) n!$.

Paso 3 Si $n = k+1$, se tiene $n \geq 4$ y $D_n = (n-1)[D_{n-2} + D_{n-1}]$ cuando $2 \leq n - 2 < n-1 \leq k$. Así, $D_n \leq (n-1)\{(1/3)[n-2]! + (1/3)[n-1]!\} = (1/3)n!$, y $D_n \leq (n-1)\{(1/2)[n-2]! + (1/2)[n-1]!\} = (1/2)n!$.

La mejor fórmula para $\mathbf{D_n}$ que sabemos utiliza la función de “entero más cercano”. Para cualquier número real x, sea $\lceil x \rfloor$ que denote *el entero más cercano a* x se define de la siguiente manera:

- Si x es escrito como $n + f$ donde n es el entero $\lfloor x \rfloor$, y f es una fracción donde $0 \leq f < 1$.
- Si $0 \leq f < \frac{1}{2}$, entonces $\lceil x \rfloor = n$.
- Si $\frac{1}{2} \leq f < 1$, entonces $\lceil x \rfloor = n + 1$.

¿Es $\lceil x \rfloor = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$? Así que $\lceil 3.29 \rfloor = 3$, $\lceil -3.78 \rfloor = -4$. Entonces $D_n = \lceil (n!)/e \rfloor$ cuando $e = 2.71828182844\ldots$ es la base del logaritmo natural. Note que $(n!)/e$ nunca es igual a $\lceil (n!)/e \rfloor + \frac{1}{2}$.

n	D_n	$(n!)/e$
1	0	0.367879441
2	1	0.735758882
3	2	2.207276647
4	9	8.829106588
5	44	44.14553294
6	265	264.8731976
7	1854	1854.112384
8	14833	14832.89907
9	133496	133496.0916
10	1334961	1334960.916

Hay otra fórmula (mucho menos compacta) para D_n dado en los ejercicios, junto con un resumen de la prueba de que $D_n = \lceil (n!)/e \rfloor$. □

Ejemplo 1.13 (Números de Ackermann) En la década de 1920's, el lógico y matemático alemán, Wilhelm Ackermann (18961962), inventó una función muy curiosa, $A: P \times P \to P$ que se define recursivamente usando "tres reglas":

Regla 1 $A(1, n) = 2$ para $n = 1, 2, \ldots$.
Regla 2 $A(m, 1) = 2m$ para $m = 2, 3, \ldots$.
Regla 3 Cuando $m > 1$ y $n > 1$ se tiene $A(m, n) = A(A(m-1, n), n-1)$.

Entonces,

$$\begin{aligned} A(2,2) &= A(A(2-1,2),2-1) && \text{regla 3} \\ &= A(A(1,2),1) \\ &= A(2,1) && \text{regla 1} \\ &= 2(2) && \text{regla 2} \\ &= 4. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} A(2,3) &= A(A(2-1,3),3-1) && \text{regla 3} \\ &= A(A(1,3),2) \\ &= A(2,2) && \text{regla 1} \\ &= 4. \end{aligned}$$

De hecho, si $A(2, k) = 4$, para algún $k \geq 2$, entonces

$$\begin{aligned} A(2,k+1) &= A(A(2-1,k+1),(k+1)-1) && \text{regla 3}\\ &= A(A(1,k+1),k)\\ &= A(2,k) && \text{regla 1}\\ &= 4. \end{aligned}$$

Así, tenemos por inducción matemática $A(2,n) = 4$, $\forall n \geq 1$.

Hasta ahora la tabla de los números de Ackermann se ve así:

A	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$
$m=1$	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$m=2$	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$m=3$	6								
$m=4$	8								
$m=5$	10								

Observamos que la segunda fila es de puro 4s. ¿Pero cómo es la segunda columna? Si $A(k,2) = 2^k$ para algunos $k \geq 2$ se tiene

$$\begin{aligned} A(k,2) = 2^k &= A(A([k+1],2-1) && \text{regla 3}\\ &= A(A(k,2),1)\\ &= A(2^k,1)\\ &= 2(2^k) && \text{regla 2}\\ &= 2^{k+1}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} A(2,3) &= A(A(2-1,3),3-1) && \text{regla 3}\\ &= A(A(1,3),2)\\ &= A(2,2) && \text{regla 1}\\ &= 4. \end{aligned}$$

Así, se tiene $\forall m \geq 1 : A(m,2) = 2^m$. Ahora, ¿como son los otros valores?

$$\begin{aligned} A(3,3) &= A(A(3-1,3),3-1) && \text{regla 3}\\ &= A(A(2,3),2)\\ &= A(4,2) && \text{segunda fila}\\ &= 2^4 && \text{segunda columna}\\ &= 16. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A(4,3) &= A(A(4-1,3),3-1) && \text{regla 3}\\
&= A(A(3,3),2) \\
&= A(16,2) && \text{encima}\\
&= 2^{16} && \text{segunda columna}\\
&= 65536.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A(3,4) &= A(A(3-1,3),4-1) && \text{regla 3}\\
&= A(A(2,4),3) \\
&= A(4,3) && \text{segunda fila}\\
&= 65536.
\end{aligned}
$$

¿Cual es el valor de $A(4,4)$? ¿Podría ejecutar un programa recursivo simple para evaluar $A(4,4)$?

$$
\begin{aligned}
A(5,3) &= A(A(5-1,3),3-1) && \text{regla 3}\\
&= A(A(4,3),2) \\
&= A(65536,2) \\
&= 2^{65536}. && \text{segunda columna}\\
&= n && \text{grande aproximadamente 20000 dígitos en base 10.}
\end{aligned}
$$

Hasta ahora tenemos:

A	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$
$m=1$	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$m=2$	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$m=3$	6	8	16	65536	?				
$m=4$	8	16	65536	?					
$m=5$	10	2^{65536}							

¿Cómo continúa la tercera columna? Sea $2 \uparrow$ denota el valor de “Torre” de k 2’s, definida recursivamente por

$$2 \uparrow 1 = 2, \quad \text{y para} \quad k \geq 1, \quad 2 \uparrow [k+1] = 2^{2 \uparrow k}.$$

Pero este es un número tan grande que nunca podría escribirse en dígitos decimales, incluso utilizando todo el papel del mundo, Su valor nunca podría ser calculado. Ahora nos preguntamos ¿Los números Ackermann son “computables”? Por otro lado, supongamos que las sucesiones que encontramos, incluso aquellas definidas por ecuaciones de recurrencia, serán fáciles para entender y tratar.

1.6 Resolución de ecuaciones de recurrencia lineal de primer orden

Una ecuación de recurrencia lineal de primer orden relaciona entradas consecutivas en una secuencia por una ecuación de la forma:

$$S_{n+1} = aS_n + c \quad \text{para todo } n \text{ en el dominio de } S. \tag{1.8}$$

Una solución general es una descripción algebraica de todas estas secuencias de soluciones. Si S es cualquier secuencia en $\mathbb{N}$ que satisface la ecuación anterior, entonces denotando S_0 por I, tenemos:

$$\begin{aligned} S_1 &= aS_0 + c = aI + c \\ S_2 &= aS_1 + c = a[aI + c] + c = a^2 I + ac + c \\ S_3 &= aS_2 + c = a[a^2 I + ac + c] + c = a^3 I + a^2 c + ac + c \end{aligned}$$

Entonces podríamos decir que

$$S_n = a^n I + a^{n-1}c + a^{n-2}c + \cdots + ac + c \quad \text{para } \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

Podemos demostrarlo por *inducción matemática* para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $S_k = a^n I + a^{n-1}c + a^{n-2}c + \cdots + ac + c$, entonces:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= aS_k + c \\ S_{k+1} &= a\left[a^k I + a^{k-1}c + a^{k-2}c + \cdots + ac + c\right] + c \\ S_{k+1} &= a^{k+1} I + a^k c + a^{k-1}c + \cdots + a^2 c + ac + c \end{aligned}$$

Por lo tanto, (1.9) es correcto. Por lo tanto, si S es cualquier secuencia en $\mathbb{N}$ que satisface (1.8), entonces para $\forall n \in \mathbb{P}$.

- Si $a = 1$, entonces $S_n = 1^n I + 1^{n-1}c + 1^{n-2} + \cdots + 1c + c = I + nc$.
- Y si $a \neq 1$, se tiene

$$\begin{aligned} S_n &= a^n I + a^{n-1}c + a^{n-2}c + \cdots + ac + c \\ &= a^n I + c\frac{1-a^n}{1-a} = a^n I + \frac{c}{1-a} - a^n \frac{c}{1-a} \\ &= a^n \left[1 - \frac{c}{1-a}\right] + \frac{c}{1-a} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general a la ecuación de recurrencia es

$$S_{n+1} = aS_n + c, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se da en dos partes:

$$\begin{aligned} &\text{Si } a = 1, S_n = S_0 + nc, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\text{Si } a \neq 1 = S_n = a^n \left[S_0 - \frac{c}{1-a}\right] + \frac{c}{1-a} \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

1.6.1 Las torres de Hanói

Cuenta la leyenda que los monjes de un monasterio de la ciudad Hanói medían el tiempo que faltaba para la llegada del "fin del mundo" con el siguiente procedimiento:

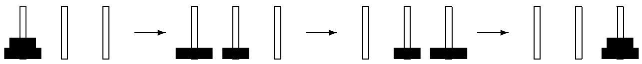
> "Se dispone de tres agujas de diamante, en una de las cuales se apilan 64 discos de oro distintos, ordenados según el tamaño de sus diámetros. En cada segundo mueven un disco de una aguja a otra, y su tarea finalizará (y con ella el mundo) cuando logren transportar todos los discos a la otra aguja. Pero, ąatención!, a lo largo del proceso no se puede colocar un disco sobre otro de diámetro más pequeño.".

Como la preparación para el "fin del mundo" supondrá sin duda un notable ajetreo, vamos a estimar el tiempo del cuál dispondremos. Por ello, replanteamos el problema en general:

> "Tenemos n discos y llamamos a_n al mínimo número de movimientos necesario para transportar los n discos desde una aguja a otra.".

Por ejemplo, si $a_1 = 1$, nos basta con un movimiento para pasar el disco a otra aguja. El cálculo de a_2 requiere ya un pequeño argumento: podemos, por ejemplo, pasar el disco pequeño a otra aguja, luego el grande a la tercera, para finalmente pasar el pequeño a esta tercera aguja, como en la figura 1.2 Como en dos movimientos no se puede hacer,

Fig. 1.2 Proceso exitoso para dos discos.



concluimos que la descrita es la mejor estrategia posible, y que, por tanto, $a_2 = 3$. Si partimos de tres discos, podemos pasar los dos menores a una segunda aguja (con el procedimiento anterior, de tres movimientos), luego pasar el mayor a la tercera aguja, para finalmente llevar los dos discos menores sobre ese disco mayor (de nuevo tres movimientos). En total, 7 movimientos. Aunque ahora no está claro si se puede hacer el trasvase con menos.

El procedimiento esbozado en el caso $n = 3$ se puede generalizar: si tenemos n discos, pasamos $n-1$ a una segunda aguja, luego el mayor disco a la aguja final y, por último, pasamos los $n-1$ discos a esa tercera aguja. Es un algoritmo recursivo: el procedimiento para mover n discos se apoya, dos veces, en el (ya conocido) método para mover $n-1$. Se deduce entonces que el número mínimo de movimientos para transportar n discos cumple que

$$a_n \leq 2a_{n-1} + 1, \quad \forall n \geq 2 \tag{1.10}$$

porque con $2a_{n-1} + 1$ movimientos lo sabemos hacer. Observe que no es una ecuación de recurrencia, sino una desigualdad. Para comprobar que, en realidad, la relación se cumple en la igualdad. Deduciríamos así que la estrategia de movimientos es la mejor posible. Esto requiere un argumento extra.

Veamos: Si tenemos n discos, en algún momento tendremos que mover el disco mayor, para lo que necesitaremos haber llevado el resto de los discos a otra aguja, pues debe quedar una aguja libre. Esto requiere, como mínimo a_{n-1} movimientos. Una vez movido el disco grande a una aguja, tendremos que mover los restantes $n-1$ discos sobre él, y esto exige, al menos, otros a_{n-1} movimientos (sea cual sea la estrategia que empleemos). Así que

$$a_n \geq 2a_{n-1} + 1, \quad \forall n \geq 2. \tag{1.11}$$

Reuniendo las condiciones (1.10) y (1.11), ya podemos afirmar que

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad \forall n \geq 2. \tag{1.12}$$

La condición inicial ya la hemos visto, es $a_1 = 1$. La resolvemos por simple aplicación repetida de la regla de recurrencia:

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 1 = 2\,(2a_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 a_{n-2} + 2 + 1 = 2^2\,(2a_{n-3} + 1) + 2 + 1 \\ a_n &= 2^3 a_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 = 2^3(2a_{n-4} + 1) + 2 + 1 = 2^4 a_{n-4} + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 \\ a_n &= 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1 = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1. \end{aligned}$$

En el caso de $n = 64$ deducimos que el fin del mundo llegará dentro de $a_{64} = 2^{64} - 1$ segundos, esto es, ¡más de medio billón de años! Parece que, después de todo, la profecía de los monjes de Hanói no debería ser una de nuestras mayores preocupaciones.

Ejemplo 1.14 Recurrencia del número de movimientos en la Torre de Hanói La ecuación de recurrencia para el número de movimientos en las Torres de Hanói es una ecuación de recurrencia lineal de primer orden:

$$T_n = 2T_{n-1} + 1.$$

Sea $a = 2$ y $c = 1$, entonces $\frac{c}{1-a} = \frac{1}{1-2} = -1$, y cualquier secuencia T que satisfaga la RE está dado por la fórmula:

$$\begin{aligned} T_n &= 2^n\,[T_0 - (-1)] + (-1) \\ T_n &= 2^n\,[T_0 + 1] - 1 \end{aligned}$$

Asumiendo que T tiene el dominio $\mathbb{Z}$ y que denota T_0 la condición inicial, vimos al principio de este capítulo varias soluciones particulares:

$$\begin{aligned} \text{Si } T_0 = 0,\ \text{entonces } T &= (0, 1, 3, 7, 15, 31, \ldots) & T_n &= 2^n[0 + 1] - 1 = 2^n - 1. \\ \text{Si } T_0 = 2,\ \text{entonces } T &= (4, 9, 19, 39, 79, 159, \ldots) & T_n &= 2^n[2 + 1] - 1 = 3 \times 2^n - 1. \\ \text{Si } T_0 = 4,\ \text{entonces } T &= (2, 5, 11, 23, 47, 95, \ldots) & T_n &= 2^n[4 + 1] - 1 = 5 \times 2^n - 1. \\ \text{Si } T_0 = -1,\ \text{entonces } T &= (-1, -1, -1, -1, -1, \ldots) & T_n &= 2^n\,[-1 + 1] - 1 = -1. \end{aligned}$$

1.6.2 Los tres piratas naufragados

Un barco pirata es naufragado en una tormenta en la noche. Tres de los piratas sobreviven y se encuentran en una playa la mañana después de la tormenta. Aceptan cooperar para asegurar su supervivencia. Ellos divisan a un mono en la selva cerca de la playa y pasan todo ese primer día recogiendo una gran pila de cocos y luego se van a dormir exhaustos. Pero ellos son piratas. El primero duerme bien, preocupado por su parte de los cocos; despierta, divide la pila en 3 montones iguales, pero encuentra uno sobrante que arroja en el arbusto para el mono, entierra su tercero en la arena, amontona los otros dos montones, y se va a dormir profundamente. El segundo pirata duerme bien, preocupado por su parte de los cocos; se despierta, divide la pila en 3 montones iguales, pero encuentra uno sobrante que arroja en el arbusto para el mono, entierra su tercero en la arena, amontona los otros dos montones, y se va a dormir profundamente.

El tercero también duerme bien, preocupado por su parte de los cocos; despierta, divide la pila en 3 montones iguales, pero encuentra uno sobrante que arroja en el arbusto para el mono, entierra su tercero en la arena, amontona los otros dos montones juntos, y se va a dormir profundamente.

A la mañana siguiente, todos se despiertan y ven una pila algo más pequeña de cocos que se dividen en 3 montones iguales, pero encontrar uno sobrante que tiran en el arbusto para el mono. ¿Cuántos cocos recolectaron el primer día?

Sea S_j el tamaño de la pila después del pirata j^{4h} y sea S_0 el número que recogieron en el primer día. Entonces

$$\begin{aligned}
S_0 &= 3x + 1 \text{ para algún número entero } x \text{ y } S_1 = 2x,\\
S_1 &= 3y + 1 \text{ para algún número entero } y \text{ y } S_2 = 2y,\\
S_2 &= 3z + 1 \text{ para algún número entero} z \text{ y } S_3 = 2z,
\end{aligned}$$

y

$$S_3 = 3w + 1 \text{ para algún número entero } w.$$

¿Hay una ecuación de recurrencia aquí?

$$\begin{aligned}
S_1 &= 2x \text{ donde } x = (S_0 - 1)/3, \text{ entonces } S_1 = (2/3)S_0 - (2/3)\\
S_2 &= 2y \text{ donde } y = (S_1 - 1)/3, \text{ entonces } S_2 = (2/3)S_1 - (2/3)\\
S_3 &= 2z \text{ donde } z = (S_2 - 1)/3, \text{ entonces } S_3 = (2/3)S_2 - (2/3).
\end{aligned}$$

La ecuación de recurrencia satisfecha por los primeros $S_j's$ es

$$S_{j+1} = (2/3)S_j - (2/3). \tag{1.13}$$

Si ahora tenemos $S_4 = (2/3)S_3 - (2/3)$, entonces $S_4 = 2[S_3 - 1]/3 = 2w$ para algún número entero w. Queremos saber qué valor (o valores) de S_0 producirá un número entero par para S_4 cuando aplicamos el RE (1). En (1), $a = 2/3$ y $c = -2/3$, entonces $c/(1 - a) = -2$, y así la solución general de (1) es

$$S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n [S_0 + 2] - 2.$$

Por lo tanto, $S_4 = (2/3)^4[S_0 + 2] - 2 = (16/81)\,[S_0 + 2] - 2$.

S_4 será un número entero

$\Leftrightarrow$ $S_4 + 2$ es (un aún) el número entero

$\Leftrightarrow$ $81 \mid [S_0 + 2]$

$\Leftrightarrow$ $[S_0 + 2] = 81k$ para algún número entero k

$\Leftrightarrow$ $S_0 = 81k - 2$ para algún número entero k.

S_0 debe ser un número entero positivo, pero hay un número infinito de respuestas posibles:

$$79 \vee 160 \vee 241 \vee 322 \vee \cdots$$

Necesitamos más información para determinar S_0. Si nos hubieran dicho que el primer día los piratas recolectaron entre 200 y 300 cocos, ahora podríamos decir “el número que recogieron el primer día fue exactamente 241”.

1.6.3 Interés compuesto

Supongamos que se le ofrecen dos planes de ahorro para la jubilación. En el plan A, empiezas con $\$1,000$, y cada año (en el aniversario del plan), te pagan un 11% de interés simple, y agregas $\$1,000$. En el plan B, empiezas con $100, y cada mes, te pagan una-duodécima parte del 10% de interés simple (anual), y agregas $100. ¿Qué plan será más grande después de 40 años?. ¿Podemos aplicar una ecuación de recurrencia? Considere el plan A y deje que S_n denote el número de dólares en el plan después de (exactamente) n años de operación. Entonces $S_0 = \$1,000$ y

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + \text{ interés sobre } S_n + \$1000\\
S_{n+1} &= S_n + 11\% \text{ de } S_n + \$1000\\
S_{n+1} &= S_n(1+0.11) + \$1000.
\end{aligned}$$

En esta RE, $a = 1.11$, $c = 1000$, entonces $\frac{c}{1-a} = \frac{1000}{-0.11}$ y

$$\begin{aligned}
S_n &= (1.11)^n \left[1000 - \frac{1000}{-0.11}\right] + \frac{1000}{+0.11}\\
S_n &= (1.11)^n \left[\frac{1110}{+0.11}\right] - \frac{1000}{+0.11}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
S_{40} &= (1.11)^{40}(10090.090909\ldots) - (-9090.909090\ldots)\\
S_{40} &= (65.000867\ldots)(10090.090909\ldots) - (9090.909090\ldots)\\
S_{40} &= 655917.842\ldots - (9090.909090\ldots)\\
S_{40} &\approx \$646826.
\end{aligned}$$

¿Puede ser cierto? Pusiste $40000 y sacaste mayor que $600000 en intereses. Ahora considere el plan B y sea T_n denota el número de dólares en el plan después de (exactamente) n meses de funcionamiento. Entonces $T_0 = \$100$ y

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= T_n + \text{ interés sobre } T_n + \$100\\
T_{n+1} &= T_n + \left(\frac{1}{2}\right) \text{ de } 10\% \text{ de } T_n + \$100\\
T_{n+1} &= T_n \left[1 + \frac{0.1}{12}\right] \$100
\end{aligned}$$

En esta RE, $a = 12.1/12$, $c = 100$, entonces $\frac{c}{1-a} = \frac{100}{-0.1/12} = -12000$ y

$$T_n = \left(\frac{12.1}{12}\right)^n [100 + 12000] - 12000.$$

De ahí, después 40×12 meses,

$$
\begin{aligned}
T_{480} &= \left(\frac{12.1}{12}\right)^{480}(12100) - (12000) \\
T_{480} &= (1.008333\ldots)^{480}(12100) - (12000) \\
T_{480} &= (53.700663\ldots)(12100) - (12000) \\
T_{480} &= 649778.0234\ldots - (12000) \\
T_{480} &\approx \$637778.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el plan A tiene un valor ligeramente mayor después de 40 años.

1.7 Resolución de ecuaciones de recurrencia lineal de segundo orden

Una *ecuación de recurrencia lineal de segundo orden* relaciona entradas consecutivas en una secuencia por una ecuación de la forma

$$S_{n+2} = aS_{n+1} + bS_n + c \quad \forall n \text{ en el dominio de } S. \tag{1.14}$$

Pero vamos a asumir que el dominio de S es $\mathbb{N}$. Supongamos también que $ab \neq 0$, de lo contrario, $S_n = c$ para $\forall n \in \{2\ldots\}$, y las soluciones de (**??**) no son muy interesantes.

Observación 1.4 La ecuación de recurrencia de primer orden es solo un caso especial de la ecuación de recurrencia de segundo orden (**??**) cuando $b = 0$.

Cuando $c = 0$, se dice que la RE es **homogénea** (todos los términos lucen igual a una constante multiplicada por una sucesión).

Observación 1.5 La ecuación de recurrencia de Fibonacci es homogénea.

Vamos a restringir también nuestra atención (por el momento) a una *lineal de segundo orden*, la *ecuación de recurrencia homogénea*

$$S_{n+2} = aS_{n+1} + bS_n \text{ para } \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.15}$$

Tal como hicimos para la ecuación de la recurrencia de Fibonacci, supongamos que existe una secuencia geométrica, $S_n = r^n$, que satisface (1.15). Si lo hubiera, entonces

$$r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cuando $n = 0$,

$$r^2 = ar + b.$$

La "ecuación característica" de (1.15) es $x^2 - ax - b = 0$, cuyas "raíces" son

$$r = \frac{-(-a) \pm \sqrt{(-a)^2 - 4(1)(-b)}}{2(1)} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Sean $\Delta = \sqrt{a^2 + 4b}$, $r_1 = \frac{a+\Delta}{2}$, y $r_2 = \frac{a-\Delta}{2}$, entonces $r_1 + r_2 = a$, $r_1 \times r_2 = -b$, y $r_1 - r_2 = \Delta$. Tanto r_1 como r_2 satisfacen la ecuación $x^2 = ax + b$, y son las únicas soluciones.

Ejemplo 1.15 Si $S_{n+2} = 10S_{n+1} - 21S_n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$, la ecuación característica es $x^2 - 10x + 21 = 0$ o $(x-7)(x-3) = 0$.

Aquí $a = 10$, $b = -21$, $a^2 + 4b = 100 - 84 = 16$, $\Delta = 4$, entonces $r_1 = 7$ y $r_2 = 3$.

Ejemplo 1.16 Si $S_{n+2} = 3S_{n+1} - 2S_n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$, la ecuación característica es $x^2 - 3x + 2 = 0$ o $(x-2)(x-1) = 0$.

Aquí, $a = 3$, $b = -2$, $a^2 + 4b = 9 - 8 = 1$, $\Delta = 1$, entonces $r_1 = 2$ y $r_2 = 1$.

Ejemplo 1.17 Si $S_{n+2} = 2S_{n+1} - S_n$ para $\forall\, n \in \mathbb{N}$, la ecuación característica es $x^2 - 2x + 1 = 0$ o $(x-1)(x-1) = 0$.

Aquí, $a = 2$, $b = -1$, $a^2 + 4b = 4 - 4 = 0$, $\Delta = 0$, entonces $r_1 = 1$ y $r_2 = 1$.

¿Pero qué hay de una fórmula que da la solución general?

Teorema 1.5 *La solución general de la RE homogénea* (1.15) *es*

$$S_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n, \qquad \textit{si } r_1 \neq r_2\ (\Delta \neq 0)$$

y

$$S_n = A(r)^n + Bn(r)^n, \qquad \textit{si } r_1 = r_2 = r\ (\Delta = 0)\,.$$

Prueba Supongamos que T es cualquier solución particular de la RE homogénea. Nos ocupamos de los dos casos por separado.

Caso 1 Si $\Delta \neq 0$, entonces las dos raíces son distintas (pero pueden ser números “complejos”). Encontraremos valores para A y B, luego probaremos que $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$ para $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Mostraremos que $A(r_1)^n + B(r_2)^n$ inicia correctamente para valores especialmente elegidos de A y B, y luego mostraremos que $A(r_1)^n + B(r_2)^n$ continúa correctamente.

Vamos a resolver las ecuaciones (para A y B) que garantizaría $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$, entonces $n = 0$ y $n = 1$. Si

$$T_0 = A(r_1)^0 + B(r_2)^0 = A + B \tag{1.16}$$

y

$$T_1 = A(r_1)^1 + B(r_2)^1 = A(r_1) + B(r_2), \tag{1.17}$$

entonces $(r_1)T_0 = A(r_1) + B(r_1)$. multiplicamos (**??**) por r_1 y $T_1 = A(r_1) + B(r_2)$// (2) otra vez restamos, obtenemos $(r_1)T_0 - T_1 = B(r_1 - r_2) = B\Delta//r_1 - r_2 = \Delta \neq 0$ entonces $B = \frac{(r_1)T_0 - T_1}{\Delta}$. Tenemos, $A = T_0 - B = \frac{\Delta T_0}{\Delta} - \frac{(r_1)T_0 - T_1}{\Delta} = \frac{-(r_2)T_0 + T_1}{\Delta}$. No importa cómo comience la sucesión T (no importa cuáles sean los valores para T_0 y T_1). Hay números únicos A y B tales que $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$ para $n = 0$ y 1. Continuando la prueba por la inducción matemática que $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$.

Paso 1 Si $n = 0$ o $n = 1$, entonces $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$, por nuestra “opción” A y B.
Paso 2 Asuma que $\exists k \geq 1$ tal que si $0 \leq n \leq k$, entonces $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$.
Paso 3 Si $n = k + 1$, entonces $n \geq 2$ entonces, porque T satisface la RE homogénea (3).

$$
\begin{aligned}
T_{k+1} &= aT_k + bT_{k-1} \\
T_{k+1} &= a\left[A(r_1)^k + B(r_2)^k\right] + b\left[A(r_1)^{k-1} + B(r_2)^{k-1}\right] \text{por el paso 2} \\
T_{k+1} &= \left[aA(r_1)^k + bA(r_1)^{k-1}\right] + [aB(r_2)^k + bB(r_2)^{k-1}] \\
T_{k+1} &= A(r_1)^{k-1}[a(r_1) + b] + B(r_2)^{k-1}[a(r_2) + n] \\
T_{k+1} &= A(r_1)^{k+1} + B(r_2)^{k+1}
\end{aligned}
$$

Así, si $r_1 \neq r_2$, $T_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$ para $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.18 Si $S_{n+2} = 10S_{n+1} - 21S_n$ para $\forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces $r_1 = 7$ y $r_2 = 3$. Tenemos, la solución general de la RE es $S_n = A7^n + B3^n$. □

Ejemplo 1.19 Si $S_{n+2} = 3S_{n+1} - 2S_n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $r_1 = 2$ y $r_2 = 1$. Tenemos, la solución general de la RE es $S_n = A2^n + B1^n = A2^n + B$. □

Caso 2 Si $\Delta = 0$, entonces las raíces son (ambos) iguales a r donde $r = a/2$. También, $b = -a^2/4 = -r^2$. Si a eran 0, entonces $b = 0$, pero asumimos que no tanto a y b son 0. De ahí, $r \neq 0$. Vamos a resolver las ecuaciones (para A y B) que garantizarían $T_n = A(r)^n + nB(r)^n$ cuando $n = 0$ y $n = 1$. Si

$$T_0 = A(r)^0 + 0B(r)^0 = A \tag{1.18}$$

y

$$T_1 = A(r)^1 + 1B(r)^1 = Ar + Br \tag{1.19}$$

entonces $A = T_0$ y $B = (T_1 - Ar)/r$. No importa cómo comience la sucesión T (no importa cuáles sean los valores para T_0 y T_1). Hay números únicos A y B tales que $T_n = A(r)^n + B(r)^n$ para $n = 0$ y 1. Continuando la prueba por la inducción matemática que $T_n = A(r)^n + B(r)^n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$.

Paso 1 Si $n = 0$ o $n = 1$, entonces $T_n = A(r)^n + B(r)^n$, por nuestra "opción" A y B.
Paso 2 Asuma que $\exists k \geq 1$ tal que si $0 \leq n \leq k$, entonces $T_n = A(r)^n + B(r)^n$.
Paso 3 Si $n = k + 1$, entonces $n \geq 2$ entonces, porque T satisface la RE homogénea (3).

$$
\begin{aligned}
T_{k+1} &= aT_k + bT_{k-1} \\
T_{k+1} &= a[A(r)^k + kB(r)^k] + b[A(r)^{k-1} + (k-1)B(r)^{k-1}] // \text{ por el paso 2} \\
T_{k+1} &= [aAr^k + bAr^{k-1}] + [akBr^k + b(k-1)Br^{k-1}] \\
T_{k+1} &= Ar^{k-1}[ar + b] + Br^{k-1}[akr + b(k-1)] \\
T_{k+1} &= Ar^{k-1}[r^2] + Br^{k-1}[k(r^2) + r^2] // r^2 = ar + b \\
T_{k+1} &= Ar^{k+1} + Br^{k-1}[k(r^2) + r^2] // -b = r^2 \\
T_{k+1} &= Ar^{k+1} + (k+1)Br^{k+1}
\end{aligned}
$$

Así, si $r_1 = r_2 = r$, $T_n = A(r)^n + nB(r)^n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$.

Referencias bibliográficas

1. Agarwal, R., Bohner, M., O'Regan, D., Peterson, A.: Dynamic equations on time scales: a survey. Journal of Computational and Applied Mathematics **141**(1), 1–26 (2002)
2. Ayars, E.: Computational Physics With Python (2013)
3. Benkhettou, N., Brito da Cruz, A.M.C., F.M. Torres, D.: A fractional calculus on arbitrary time scales: Fractional differentiation and fractional integration. Signal Processing **107**, 230–237 (2015)
4. Bohner, M., Peterson, A.: Dynamic equations on time scales: An introduction with applications (2012)
5. Denlinger, C.: Elements of real analysis. Jones & Bartlett Learning (2011)
6. Epperson, J.F.: An introduction to numerical methods and analysis, second edn. John Wiley & Sons (2013)
7. Gillis, J.: The statistics of derangement—A survey. Journal of Statistical Physics pp. 575–578 (1990)
8. Hilger, S.: Analysis on Measure Chains — A Unified Approach to Continuous and Discrete Calculus. Results in Mathematics **18**(1), 18–56 (1990)
9. Jenkyns, T., Stephenson, B.: Fundamentals of Discrete Math for Computer Science: A Problem-Solving Primer, second edn. Undergraduate Topics in Computer Science. Springer International Publishing AG, part of Springer Nature (2018)
10. Langtangen, H.P.: A primer on scientific programming with Python. Texts in Computational Science and Engineering. Springer Heidelberg Dordrecht London New York (2016)
11. Langtangen, H.P., Linge, S.: Finite Difference Computing with PDEs: A Modern Software Approach, *Texts in Computational Science and Engineering*, vol. 16, first edn. Springer International Publishing (2017)
12. Mariconda, C., Tonolo, A.: Discrete calculus, *UNITEXT - La Matematica per il 3+2*, vol. 103. Springer International Publishing (2016). DOI 10.1007/978-3-319-03038-8
13. Sigler, L.: Fibonaccis Liber Abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisanos book of calculation. Springer Science & Business Media (2003)
14. Spiegel, M.R.: Calculus of Finite Differences and Difference Equations. McGraw-Hill Inc. (1971)
15. Zhao, D., Li, T.: On conformable delta fractional calculus on time scales. Journal of Mathematics and Computer Science pp. 324–335 (2016)
16. Zill, D.G.: A first course in differential equations with modeling applications, tenth edn. Cengage Learning (2013)

Índice