Relaciones de recurrencias

Ecuaciones en diferencias y análisis en escalas de tiempo

C. Aznarán Laos

F. Cruz Ordoñez

G. Quiroz Gómez

J. Micha Velasque

D. García Fernández

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

21 de junio del 2019

Índice

- Ecuaciones en diferencias
  - Número de Catalan

1 Introducción
- Ecuaciones en diferencias
  - Número de Catalan
  - Torre de Hanoi
  - Número de Ackermann

2 Realización numérica
- Discretización
  - Método de Euler
  - Método de Runge-Kutta

3 Aplicaciones
- Escalas de tiempo
  - Derivada fraccionaria
- Módulo `timescale`

Ecuaciones en diferencias(E.D)

Definición 1:

Una ecuación en diferencias es una expresión de la forma:

$$G\left(n, f(n), f\left(n+1\right), \ldots, f\left(n+k\right)\right) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Obs: f está definida en $\mathbb{Z}$.

Definición 2:

Se le llama orden de una E.D a la diferencia entre el operador diferencia mayor y menor que aparezcan en la ecuación; es decir, $n+k-n=k$.

Ejemplo

$f\left(n+3\right) - f\left(n+1\right) - 5f(n) = n$ es una E.D de orden 3.
$f\left(n+3\right) - f\left(n+1\right) = n^2 - 3$ es una E.D de orden 2.

Definición 3:

Se le llama *solución* de una E.D a toda sucesión $\{f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots\}$ que la satisfaga, ahora se le llama *solución general* de una E.D al conjunto de todas las soluciones que tendrán tanto parámetros como orden tenga la ecuación. La determinación de estos parámetros, a partir de unas condiciones iniciales, nos proporcionará las distintas soluciones particulares.

Ejemplo 3.1:

$f(n+1) - f(n) = 3$ es una E.D de orden uno cuya solución general es $f(n) = 3n + c$. Si consideramos unas condiciones iniciales, por ejemplo, $f(0) = 2$, entonces $f(0) = 3 \times 0 + c = c$, por tanto $c = 2$ y la solución particular es $f_p(n) = 3n + 2$. Es decir, la solución es la sucesión $f_p(n) = \{2, 5, 8, 11, \ldots\}$.

Ecuaciones en diferencias lineales(E.D.L)

Llamamos ecuación en diferencias lineal de orden k a toda expresión de la forma:

$$f(n+k)+a_1(n)f(n+k-1)+\cdots+a_{k-1}(n)f(n+1)+a_k(n)f(n)=b(n)$$

Obsv: $a_k(n) \neq 0$.

Clasificación:

Las E.D.L se pueden clasificar en:

- Homogéneas si $b(n)=0$.
- Completas si $b(n) \neq 0$.
- De coeficientes constantes si $a_i(n)=a_i$, $\forall i$.
- De coeficientes no constantes si $a_i(n) \neq a_i$ para algún i.

Teorema 1:(Teorema de la existencia y la unicidad)

Dada la ecuación:

$$f(n+k)+a_1(n)f(n+k-1)+\cdots+a_{n-1}(n)f(n+1)+a_n(n)f(n)=0,$$

y dados n números reales k_0, k_1, ..., k_{n-1} existe una única solución que verifica

$$f(0)=k_0, f(1)=k_1, \ldots, f(n-1)=k_{n-1}.$$

Teorema 2:

Toda combinación lineal de soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n es también una solución.

Corolario 1:

Las soluciones de una ecuación en diferencia lineal de orden n forman un espacio vectorial.

Teorema 3:

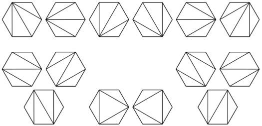
La dimensión del espacio de soluciones de una ecuación en diferencias lineal de orden n es n.

Ecuaciones en diferencias de primer orden

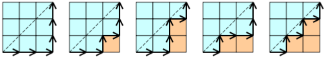
Ecuaciones en diferencias de segundo orden

Número de Catalan

Triangulación



Caminos monótonos



Ecuación de recurrencia de primer orden

Solución general a la ecuación de recurrencia:

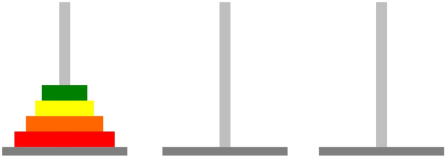
$$S_{n+1} = aS_n + c \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se da en dos partes:
$$\begin{array}{lll} \text{Si } a = 1, & S_n = S_0 + nc & \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{Si } a \neq 1 & S_n = a^n[S_0 - \frac{c}{1-a}] + \frac{c}{1-a} & \forall n \in \mathbb{N} \end{array}$$

Aplicación

Torres de Hanói

$$S_n = 2S_{n-1} + 1 \qquad \textit{para cada } n \geq 2$$



Ecuación de recurrencia de segundo orden

Teorema 1

$S_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$ si $r_1 \neq r_2$, $\qquad$ //Si $\Delta \neq 0$

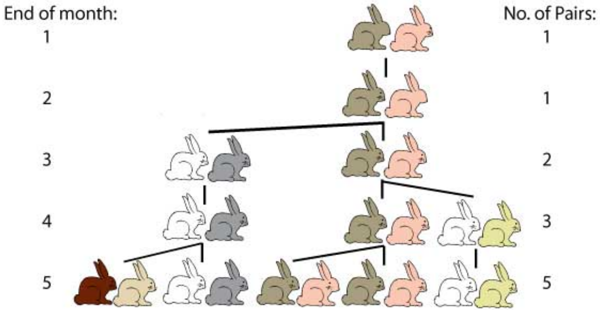
Teorema 2

$S_n = A(r)^n + Bn(r)^n$ si $r_1 = r_2 = r$, $\qquad$ //Si $\Delta = 0$

Aplicación

Un modelo de cunicultura (Sucesión de Fibonacci)

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \textit{para cada } n \geq 2$$



Soluciones

The second frame subtitle

Hola

- some text on slide 1
- some text on slide 2

Aplicaciones

Ecuaciones en diferencias(E.D)

Definición 1:

Una ecuación en diferencias es una expresión de la forma:

$$G\left(n, f(n), f\left(n+1\right), \ldots, f\left(n+k\right)\right) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Obs: f está definida en $\mathbb{Z}$.

Definición 2:

Se le llama orden de una E.D a la diferencia entre el operador diferencia mayor y menor que aparezcan en la ecuación; es decir, $n+k-n=k$.

Ejemplo

$f\left(n+3\right) - f\left(n+1\right) - 5f(n) = n$ es una E.D de orden 3.
$f\left(n+3\right) - f\left(n+1\right) = n^2 - 3$ es una E.D de orden 2.

Definición 3:

Se le llama *solución* de una E.D a toda sucesión $\{f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots\}$ que la satisfaga, ahora se le llama *solución general* de una E.D al conjunto de todas las soluciones que tendrán tanto parámetros como orden tenga la ecuación. La determinación de estos parámetros, a partir de unas condiciones iniciales, nos proporcionará las distintas soluciones particulares.

Ejemplo 3.1:

$f(n+1) - f(n) = 3$ es una E.D de orden uno cuya solución general es $f(n) = 3n + c$. Si consideramos unas condiciones iniciales, por ejemplo, $f(0) = 2$, entonces $f(0) = 3 \times 0 + c = c$, por tanto $c = 2$ y la solución particular es $f_p(n) = 3n + 2$. Es decir, la solución es la sucesión $f_p(n) = \{2, 5, 8, 11, \ldots\}$.

Ecuaciones en diferencias lineales(E.D.L)

Llamamos ecuación en diferencias lineal de orden k a toda expresión de la forma:

$$f(n+k)+a_1(n)f(n+k-1)+\cdots+a_{k-1}(n)f(n+1)+a_k(n)f(n)=b(n)$$

Obsv: $a_k(n)\neq 0$.

Clasificación:

Las E.D.L se pueden clasificar en:

- Homogéneas si $b(n)=0$.
- Completas si $b(n)\neq 0$.
- De coeficientes constantes si $a_i(n)=a_i$, $\forall i$.
- De coeficientes no constantes si $a_i(n)\neq a_i$ para algún i.

Teorema 1:(Teorema de la existencia y la unicidad)

Dada la ecuación:

$$f(n+k) + a_1(n)f(n+k-1) + \cdots + a_{n-1}(n)f(n+1) + a_n(n)f(n) = 0,$$

y dados n números reales k_0, k_1, ..., k_{n-1} existe una única solución que verifica

$$f(0) = k_0, f(1) = k_1, \ldots, f(n-1) = k_{n-1}.$$

Teorema 2:

Toda combinación lineal de soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n es también una solución.

Corolario 1:

Las soluciones de una ecuación en diferencia lineal de orden n forman un espacio vectorial.

Teorema 3:

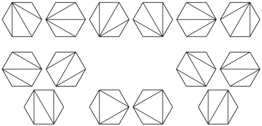
La dimensión del espacio de soluciones de una ecuación en diferencias lineal de orden n es n.

Ecuaciones en diferencias de primer orden

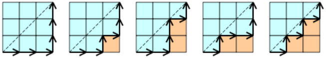
Ecuaciones en diferencias de segundo orden

Número de Catalan

Triangulación



Caminos monótonos



Una escala de tiempo es un conjunto cerrado $\mathbb{T}$ bajo la topología estándar sobre $\mathbb{R}$.
Se define el operador salto posterior $\sigma\colon \ \to \mathbb{T}$ por

$$\sigma(T) := \text{ínf}\{z \in \mathbb{T} : z > t\}$$

la granicidad $\mu\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ por

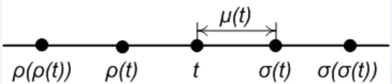
$$\mu(t) = \sigma(t) - t$$

y función granicidad minimal $\mu_*\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ por

$$\mu_*(s) = \underset{\tau \in [s,\infty)\cap\mathbb{T}}{\text{ínf}} \mu(t).$$

Una función $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ es llamada Δ–diferenciable si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $s \in (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ y existe un número $f^{\Delta}(t)$ tal que

$$|\,[f(\sigma(s)) - f(s)]f^{\Delta}(s)[\sigma(t) - s]\,| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|.$$



La integración se define de modo que $\int_t^s f^\Delta(\tau)\,\Delta\tau = f(t) - f(s)$. Si $\mathbb{T}$ consiste únicamente de puntos aislados, entonces

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

y

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)\cap\mathbb{T}} \mu(t) f(t), & \text{si } a < b. \\ 0, & \text{si } a = b. \\ -\sum_{t\in[b,a)\cap\mathbb{T}} \mu(t) f(t), & \text{si } a > b. \end{cases}$$

text