Relaciones de recurrencias

Ecuaciones en diferencias y análisis en escalas de tiempo

C. Aznarán Laos

F. Cruz Ordoñez

G. Quiroz Gómez

J. Micha Velasque

D. García Fernández

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

25, 27 de junio del 2019

Índice analítico

Definición

Una **relación de recurrencia** en las incógnitas x_i, $i \in \mathbb{N}$, es una familia de ecuaciones

$$x_n = f_n\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right), \quad \forall n \geq r, \tag{1}$$

donde $r \in \mathbb{N}$, y $(f_n)_{n \geq r}$ son funciones

$$f_n \colon D_n \to \mathbb{R}, \quad D_n \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \text{o} \quad f_n \colon D_n \to \mathbb{C}, \quad D_n \subseteq \mathbb{C}^n.$$

Dependiendo del caso encontrado, las llamaremos **recurrencias reales** o **recurrencias complejas**. Las incógnitas $x_0, \ldots, x_{r-1}$ son llamadas **libres**. Su número r es el **orden** de la relación.

Definición

Una sucesión $(a_n)_n$ es una **solución** de (1), sii

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in D_n, \quad a_n = f_n\left(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\right) \quad \forall\, n \geq r.$$

Ejemplo

La sucesión real definida por

$$x_0 = 2, x_1 = 1, x_2 = 2^{1/2}, x_3 = 1, \ldots, x_{2m-1} = 1, x_{2m} = 2^{1/2^m}, \ldots$$

es la solución de la *relación de recurrencia* con coeficientes reales

$$x_n = \sqrt{x_{n-2}}, \quad \forall n \geq 2,$$

y los *valores iniciales* $x_0 = 2$ y $x_1 = 1$.

Ejemplo

Considere la relación de recurrencia de primer orden definida por

$$x_n = \frac{1}{x_{n-1} - 1}, \quad \forall n \geq 1.$$

- La 1–tupla $(2) \in D_0$ de valor inicial no es una solución.
- La 1–tupla $(3) \in D_0$ de valor inicial es una solución.

Observación

En muchas ocasiones una relación de recurrencia de orden r involucra solo los últimos r términos y es de la forma

$$x_n = g_n\left(x_{n-r}, \ldots, x_{n-1}\right), \quad n \geq r,$$

donde $(g_n)_{n \geq r}$ son las funciones definidas en un subconjunto E_n de $\mathbb{R}^r$ o $\mathbb{C}^r$.

Este último es de hecho una relación de recurrencia: es suficiente establecer

$$f_n\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right) := g_n\left(x_{n-r}, \ldots, x_{n-1}\right)$$

para $\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right) \in D_n := \mathbb{R}^{n-r} \times E_n$ (o $\mathbb{C}^{n-r} \times E_n$) a fin de cumplir los requerimientos de la definición (1).

Aquí es conveniente representar cualquier sucesión de números reales $(a_n)_n$ como la función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(n) = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definición

Una **ecuación en diferencias** es una expresión de la forma:

$$G\left(n, f(n), f\left(n+1\right), \ldots, f\left(n+k\right)\right) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

El **orden** de una ecuación en diferencias se halla mediante la diferencia entre los "términos mayor" y "menor" respectivamente. En (2), su orden es $n+k-n=k$.

Ejemplo

- El orden de $f\left(n+3\right) - f\left(n+1\right) - 5f(n) = n$ es 3.
- El orden de $f\left(n+3\right) - f\left(n+1\right) = n^2 - 3$ es 2.

Definición

Una **ecuación en diferencias** se le llama **lineal** si puede expresarse de la siguiente forma:

$$a_0(n)f\,(n+k)+a_1(n)f\,(n+k-1)+\cdots+a_{k-1}(n)f\,(n+1)+a_k(n)f\,(n)=b\,(n)\,, \tag{3}$$

donde $a_k(n)\neq 0$.

Cuadro: Clasificación de las ecuaciones en diferencias.

Abreviación	Denominación	Condición
E.D.L.H	Homogéneas	$b(n)=0.$
E.D.L.C	Completas	$b(n)\neq 0.$
E.D.C.C.	De coeficientes constantes	$\forall i : a_i(n)=a_i.$
E.D.C.N.	De coeficientes no constantes	$\exists i \ni a_i(n)\neq a_i.$

Definición

Sea una **ecuación en diferencias lineal homogénea** de coeficientes constantes y de orden k, buscaremos soluciones del tipo $f(n) = r^n$, haciendo este cambio en (3) y simplificando resulta

$$a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \cdots + a_k = 0 \tag{4}$$

la **ecuación característica**.

Definición

Llamamos **solución** de una ecuación en diferencias a cualquier sucesión $\{f(1), \ldots, f(k)\}$ que satisfaga (2).

Definición

Se le llama **solución general** de una ecuación en diferencias al conjunto de todas las soluciones, que tendrá tantos parámetros como orden tenga la ecuación (2).

Teorema (De la existencia y la unicidad)

Dada la ecuación (3) y dados n números reales k_0, k_1, . . . , k_{n-1} existe una única solución que verifica

$$f(0) = k_0, f(1) = k_1, \ldots, f(n-1) = k_{n-1}.$$

Demostración.

$\square$

Teorema

Toda combinación lineal de soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n es también una solución.

Demostración.

$\square$

Teorema

Las soluciones de una ecuación en diferencia lineal de orden n forman un espacio vectorial y la dimensión del espacio solución de una ecuación en diferencias lineal de orden k es k.

Demostración.

$\square$

Definición (Raíces simples)

Sean $r_1, r_2, \ldots, r_k$ las k raíces de la ecuación característica. Se definen entonces las funciones:

$$f_j(n) = r_j^n, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Entonces, $f_1, \ldots, f_k$ es un sistema fundamental de soluciones, lo cual nos permite resolver la ecuación.

Definición (Raíces múltiples)

Sea r una raíz de multiplicidad m de la ecuación característica. Esta raíz proporciona m soluciones diferentes del tipo:

$$f_j(n) = n^j r^n, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Por tanto, pasarán a formar parte del sistema fundamental de soluciones las funciones $f_0, \ldots, f_{m-1}$; esto es:

$$r^n, nr^n, n^2 r^n, \ldots, n^{m-1} r^n.$$

Ejemplo

Hallar la solución de la ecuación en diferencias

$$f(n+3) - 7f(n+2) + 15f(n+1) - 9f(n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

con las condiciones iniciales $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ y $f(2) = 17$.

Ejemplo (E.D.L.C)

Hallar la solución de la ecuación en diferencias

$$f(n+1) - 2f(n) = 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

con la condición inicial $f(0) = -1$.

Triangulación

Una triangulación de un polígono es una partición del mismo en triángulos disjuntos cuyos vértices coinciden con los vértices del polígono.

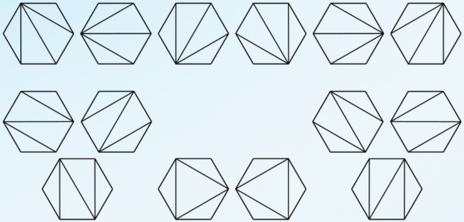


Figura:

Caminos en rejillas

Un camino monótono es aquel que empieza en la esquina inferior izquierda y termina en la esquina superior derecha, y consiste únicamente en tramos que apuntan hacia arriba o hacia la derecha,sin que pase de diagonal.

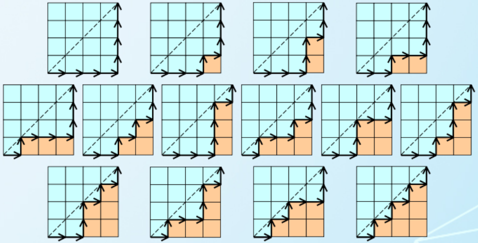


Figura:

Resolver una ecuación de recurrencia significa encontrar una sucesión que satisfaga las ecuaciones de recurrencia.

Encontrar una "solución general" significa encontrar una fórmula que describe todas las soluciones posibles (todas las sucesiones posibles que satisfacen la ecuación).

Veamos el siguiente ejemplo:

Afirmación

Considere que T_n satisface la siguiente ecuación

$$T_n = 2T_{n-1} + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{5}$$

Ejemplo (Desajustes)

Imagine una fiesta donde las parejas llegan juntas, pero al final de la noche, cada persona se va con una nueva pareja. Para cada $n \in \mathbb{N}$, digamos que D_n es el número de diferentes formas en que las parejas pueden ser "trastornadas", es decir, reorganizadas en parejas, por lo que ni uno está emparejado con la persona con la que llegaron.

Afirmación (D_n para cualquier valor de n)

Para todo $n \geq 4$ tendremos:

$$D_n = (n-1)\left\{D_{n-2} + D_{n-1}\right\}.$$

Y la sucesión definida en $\mathbb{N}$ es

$$S_n = A \times n!.$$

Teorema (Desigualdad para la acotación de D_n)

Para todo $n \geq 2$ tenemos:

$$\left(\frac{1}{3}\right) n! \leq D_n \leq \left(\frac{1}{2}\right) n!.$$

La mejor fórmula para D_n que sabemos utiliza la función de “entero más cercano”.

Definición

Para cualquier número real x, se define **el entero más cercano a** x, $\lceil x \rfloor$:
Si x es escrito como $n + f$ donde n es el entero $\lfloor x \rfloor$, y f es una fracción donde $0 \leq f < 1$:

- Si $0 \leq f < \frac{1}{2}$, entonces $\lceil x \rfloor = n$.
- Si $\frac{1}{2} \leq f < 1$, entonces $\lceil x \rfloor = n + 1$.

Observación

Entonces $D_n = \lceil (n!)/e \rfloor$ cuando $e = 2{,}71828182844\ldots$ es la base del logaritmo natural.
$(n!)/e$ nunca es igual a $\lceil (n!)/e \rfloor + \frac{1}{2}$.

Por los 1920's, el lógico y matemático alemán, discípulo de David Hilbert, Wilhelm Ackermann (1896–1962), inventó una función muy curiosa.

Definición (Ackermann)

Sea $A\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función. Se define recursivamente usando tres reglas:

1. $A(1,n) = 2$, $\forall n \geq 1$.
2. $A(m,1) = 2m$, $\forall m \geq 2$.
3. Cuando $m > 1$ y $n > 1$ se tiene: $A(m,n) = A(A(m-1,n), n-1)$.

Observación

Entonces $A(2,n) = 4, \quad \forall n \geq 1$. Además $A(m,2) = 2^m, \quad \forall m \geq 1$. Seguidamente se puede continuar a calcular $A(m,3) = 2 \uparrow m$ con la función torre definida por $2 \uparrow [k+1] = 2^{2 \uparrow k}$ con valor inicial $2 \uparrow 1 = 2$, por P.I.M.

```python
def ack(n, m):
  if n = 0:
    return m + 1
  elif m = 0:
    return ack(n - 1, 1)
  else
    return ack(n - 1, ack(n, m - 1))
```

Programa 1: Programa `ackermann.py`

Solución general a la ecuación de recurrencia

Considere la ecuación de recurrencia

$$S_{n+1} = aS_n + c, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

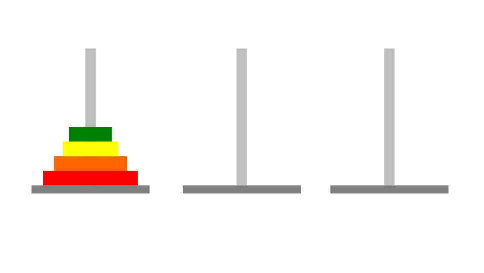
Primer caso Si $a = 1$, entonces $S_n = S_0 + nc$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Segundo caso Si $a \neq 1$, entonces $S_n = a^n \left[S_0 - \frac{c}{1-a}\right] + \frac{c}{1-a}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Considere la ecuación de recurrencia

$$S_n = 2S_{n-1} + 1, \quad \forall n \geq 2,$$

donde n denota el número de discos y S_n es el mínimo número de movimientos necesario para transportar los n discos desde una aguja a otra.



Ecuación de recurrencia de segundo orden

Teorema

$S_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$ *si* $r_1 \neq r_2$, *siempre que* $\Delta \neq 0$.

Teorema

$S_n = A(r)^n + Bn(r)^n$ *si* $r_1 = r_2 = r$, *siempre que* $\Delta = 0$.

Un modelo de la cunicultura

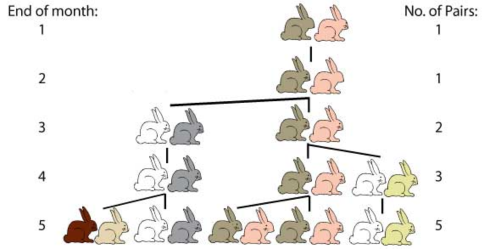
Considere la ecuación de recurrencia

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 2,$$

llamada **ecuación de Fibonacci**.

Fibonacci partía de ciertas hipótesis, a saber:

- Los conejos viven eternamente.
- Cada mes, un par de adultos de distinto sexo da lugar a un nuevo par de conejos de distinto sexo.
- Cada conejo se hace adulto a los dos meses de vida, momento en el que comienza a tener descendencia.



Una escala de tiempo es un conjunto cerrado $\mathbb{T}$ bajo la topología estándar sobre $\mathbb{R}$.
Se define el operador salto posterior $\sigma\colon \ \to \mathbb{T}$ por

$$\sigma\left(T\right) := \text{ínf}\left\{z \in \mathbb{T} : z > t\right\}$$

la granicidad $\mu\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ por

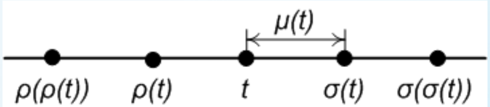
$$\mu\left(t\right) = \sigma\left(t\right) - t$$

y función granicidad minimal $\mu_*\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ por

$$\mu_*\left(s\right) = \underset{\tau\in[s,\infty)\cap\mathbb{T}}{\text{ínf}} \mu\left(t\right).$$

Una función $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ es llamada Δ–diferenciable si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $s \in \left(t-\delta, t+\delta\right) \cap \mathbb{T}$ y existe un número $f^{\Delta}\left(t\right)$ tal que

$$\left|\left[f\left(\sigma\left(s\right)\right) - f\left(s\right)\right] f^{\Delta}\left(s\right)\left[\sigma\left(t\right) - s\right]\right| \leq \varepsilon\left|\sigma\left(t\right) - s\right|.$$



La integración se define de modo que $\int_t^s f^{\Delta}(\tau)\,\Delta\tau = f(t) - f(s)$.
Si $\mathbb{T}$ consiste únicamente de puntos aislados, entonces

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

y

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)\cap\mathbb{T}} \mu(t) f(t), & \text{si } a < b. \\ 0, & \text{si } a = b. \\ -\sum_{t\in[b,a)\cap\mathbb{T}} \mu(t) f(t), & \text{si } a > b. \end{cases}$$

Referencias

The second frame subtitle

- Libros

J. Pelikán Lovácz L y K. Vesztergombi. *Discrete mathematics, elementary and beyond*. Springer Undergraduate Text in Mathematics, 2003, págs. 189-218.

- Artículos matemáticos

Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour y Robin Thomas. “The four-colour theorem”. En: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 70.1 (1997), págs. 2-44.

- Sitios web

Combinatorics y Optimization University of Waterloo. *SiGMa 2017 László Miklós Lovász, Extremal graph theory and finite forcibility*. 2017. URL: https://www.youtube.com/watch?v=0fPf4qA1x_k (visitado 05-06-2018).