1. Definiciones básicas y modelos

En esta sección presentamos a nuestros lectores las nociones básicas subyacentes de las relaciones de recurrencia, así como varios ejemplos de tales relaciones.

1.1. Primeras definiciones.

1.1. Primeras definiciones. Una relación de recurrencia es una familia numerable de ecuaciones que defina sucesiones en modo recursivo. Las sucesiones que así surgen se llaman *soluciones de la recurrencia*, dependiendo de uno o más de los datos iniciales: cada término que sigue el dato inicial en tales sucesiones es definida como una función de los términos anteriores.

Definición 1. *Una* ***relación de recurrencia*** *en las incógnitas* x_i*,* $i \in \mathbb{N}$*, es una familia de ecuaciones*

$$x_n = f_n\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right), \quad n \geq r,$$

donde $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$*, y* $\left(f_n\right)_{n \geq r}$ *son funciones*

$$f_n \colon D_n \to \mathbb{R}, \quad D_n \subseteq \mathbb{R}^n, \text{ o } f_n \colon D_n \to \mathbb{C}, \quad D_n \subseteq \mathbb{C}^n.$$

Dependiendo en el caso encontrado, hablaremos de ***recurrencias reales*** *o* ***recurrencias complejas****. Las incógnitas* $x_0, \ldots, x_{r-1}$ *son llamadas* ***libres****. Su número* r *es el* ***orden*** *de la relación.*

Al reemplazar x *con* y*, la relación de recurrencia de orden* r

$$x_n = f_n\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right), \quad n \geq r,$$

puede también escribirse como

$$x_{n+r} = f_{n+r}\left(x_0, \ldots, x_{n+r-1}\right), \quad n \geq 0.$$

Definición 2. *Una sucesión* $\left(a_n\right)_n$ *es una* ***solución*** *de la relación de recurrencia de orden* r

$$x_n = f_n\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right), \quad n \geq r, \tag{1}$$

con $f_n \colon D_n \to \mathbb{R}$*,* $D_n \in \mathbb{R}^n$*, si*

$$\left(a_0, \ldots, a_{n-1}\right) \in D_n, \quad a_n = f_n\left(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\right) \quad \forall\, n \geq r.$$

La sucesión $\left(a_0, \ldots, a_{n-1}\right)$ de valores asignados para las r incógnitas libres es llamado la r–sucesión de **valor inicial** o de las **condiciones iniciales** de la solución. Definimos la **solución general real** (**respectivamente compleja**) de la sucesión como la familia de todas las soluciones con elementos que están en R (respectivamente, en C).

Considere la relación de recurrencia de primer orden definida por

$$x_n = \frac{1}{x_{n-1} - 1}, \quad n \geq 1.$$

La 1–sucesión (2) no es una sucesión de valor inicial de una solución, en efecto, 2 pertenece al dominio de $f_0\left(x\right) = \frac{1}{x-1}$, pero $\left(2, f_0(2)\right) = (2, 1)$ no pertenece al dominio de $f_1\left(x_0, x_1\right) = \frac{1}{x-1}$. Por otra parte, la 1–sucesión (3) es en efecto la sucesión de valor inicial de la solución (sucesión)

$$\left(a_n\right)_n \left(3, 1/2, -2, -1/3, -3/4, -4/7, -7/11, \ldots\right).$$

Note que para $n \geq 2$ uno tiene $a_n < 0$ y así $a_{n+1} = \frac{1}{a_n - 1} < 0$ es distinto de 1.

En muchas ocasiones una relación de recurrencia de orden r involucra solo los últimos r términos y es de la forma

$$x_n = g_n\left(x_{n-r}, \ldots, x_{n-1}\right), \quad n \geq r,$$

donde $(g_n)_{n \geq r}$ son las funciones definidas en un subconjunto E_n de R^r o C^r. Este último es de hecho una relación de recurrencia: es suficiente para establecer $f_n\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right)$ $\mathrm{g}_n(x_{n-r}, \ldots, x_{n-1})$ para $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in D_n R^{n-r} \times E_n$ (o $C^{n-r} \times E_n$) a fin de cumplir los requerimientos de la definición

1.2. **Algunos modelos de recurrencias lineales.** Ahora damos una serie de ejemplos que ilustran cómo reducir la solución de un problema en el que la búsqueda de las soluciones de una relación de recurrencia apropiada. Un niño decide escalar una escalera con $n \geq 1$ de tal manera que cada paso que él despeja uno o dos de los pasos de la escalera Encuentre la relación de recurrencia que sirva para calcular el número de diferentes maneras posibles de escalar la escalera.

Solución. Usamos la variable desconocida x_n para denotar el número de maneras en las cuales el niño puede escalar la escalera de $n \geq 1$ pasos. Es fácil de observar que $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$ (dos pasos cada uno de longitud uno, o un paso de longitud dos escalones). Ahora sea $n \geq 3$: si con el primer paso el niño mueve solo el primer escalón; existen claramente x_{n-1} posibles maneras de escalar los que quedan. Si en cambio con el primer lugar, se suben dos peldaños de escalera. $\square$