0.1. Ejercicios

1. Supongamos que E_n es definido recursivamente en $\mathbb{Z}^+$ por

$$E_0 = 0,\ E_1 = 2 \text{ y } E_{n+1} = 2n\{E_n + E_{n-1}\} \text{ para } n \geq 1.$$

Determine el valor de E_{10}.

2. Supongamos que la función f es definida recursivamente en $\mathbb{Z}^+$ por

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2^k \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \\ f(n/2) & \text{si } n \text{ es par pero no una potencia de 2} \\ f(3n+1) & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(3) =& f(10) \quad \text{porque 3 es impar} \\ =& f(5) \quad \text{porque } 10 = 2 \times 5 \\ =& f(16) \quad \text{porque 5 es impar} \\ =& 1 \quad \text{porque } 16 = 2^4. \end{aligned}$$

a) Mostrar que $f(11)$ también es igual a 1.

b) Mostrar que $f(9)$, $f(14)$, Y $f(25)$ son todos iguales a $f(11)$ y, por lo tanto, todos iguales a 1.

c) Escriba un programa para hallar $f(27)$.

// ¿Crees que esta función siempre dará el valor de 1, sin importar con qué n comiences?
// Busque la "Conjetura de Collatz" o el "Problema del granizo".

3. Podríamos definir una degeneración como una $n-$permutación S de $\{1..n\}$ donde cada $S_j \neq j$ y luego definir $\mathbf{D_n}$ como el número de degeneraciones de $\{1..n\}$. Entonces $\mathbf{D_n}$ es la única sucesión que satisface la ecuación de recurrencia

$$\mathbf{D_n} = (n-1)\{\mathbf{D_{n-1}} + \mathbf{D_{n-2}}\} \quad \text{para } n = 3, 4, 5, ... \tag{1}$$

con $\mathbf{D_1} = 0$ y $\mathbf{D_2} = 1$.

a) Mostar que $\mathbf{D_2} = (2)(\mathbf{D_1}) + (-1)^2$.

b) Use la inducción matemática para probar que para todo entero $n \geq 2$,

$$\mathbf{D_n} = (n)(\mathbf{D_{n-1}}) + (-1)^n.$$

4. Use la inducción matemática y la ecuación (1) para probar que

$$\text{para todo entero positivo } n,\ \mathbf{D_n} = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

5. Supongamos que (o busque estos dos resultados de cálculo)

$$\text{A. para todo número real } x,\ e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!},\ \text{ y también } e^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!},$$

y B. para algún n entero positivo,

$$e^{-1} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} + E_n \text{ donde } |E_n| < \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{1}{(n+1)!}.$$

a) Use el resultado de la pregunta anterior para mostrar

$$\frac{n!}{e} = \mathbf{D_n} + n!E_n \text{ donde } |n!E_n| < \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \leq 1/2.$$

b) Explique por qué $\mathbf{D_n} - \frac{1}{2} \leq n!/e \leq \mathbf{D_n} + \frac{1}{2}$.

c) ¿Es $\lceil n!/e \rfloor = \mathbf{D_n}$?

6. La **función de Ackermann** a veces es definida recursivamente en una forma ligeramente diferente

7. Supongamos que **A** es un conjunto de $2n$ objetos. Sea $\mathbf{P_n}$ el número de diferentes maneras que los objetos en **A** pueden ser 'emparejados'(el número de diferentes particiones de **A** en 2-subconjuntos). // Supongamos que n es un entero positivo.

Si $n = 2$, entonces A tiene cuatro elementos, $\mathbf{A} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.
Los tres posibles emparejamientos son
1. x_1 con x_2 y x_3 con x_4,
2. x_1 con x_3 y x_2 con x_4,
3. x_1 con x_4 y x_2 con x_3, // Así $\mathbf{P_2} = 3$

a) Mostrar que si $n = 3$ y $\mathbf{A} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, hay 15 posibles emparejamientos enumerándolos todos:
1.x_1 con x_2 y x_3 con x_4 y x_5 con x_6
2. ... // Así $\mathbf{P_3} = 15$.

b) Mostrar que $\mathbf{P_n}$ debe satisfacer la ER $\mathbf{P_n} = (2n-1)\mathbf{P_{n-1}}$ para $\forall n \geq 2$.

c) Use la ecuación de recurrencia y la inducción matemática para probar

$$\mathbf{P_n} = (2n)!/[2^n \times n!] \text{ para } \forall n \geq 1.$$

8. Mostrar que $y_n = \frac{n(n-1)}{2} + c$ para $n > 0$ es una solución de la relación de recurrencia

$$y_{n+1} = y_n + n.$$

9. Supongamos que una sucesión es definida por:

$$f(0) = 5 \text{ y}$$

$$f(n+1) = 2 \times f(n) + 1 \text{ para } n = 0, 1, 2, ...$$

a) Halle el valor de $f(10)$.

b) Probar que la sucesión no es una sucesión arimética ni una sucesión geométrica.

10. *a*) Encuentre la Solución General de la ecuación de recurrencia

$$S_n = 3S_{n-1} - 10 \text{ para } n = 1, 2, ...$$

b) Determine la solución particular donde $S_0 = 15$.

c) Use la fórmula en (10*b*) para evaluar S_6 y verifique su respuesta usando la ecuación de recurrencia en sí.

11. Suponga $s_0 = 60$ y $s_{n+1} = (1/5)s_n - 8$ para $n = 0, 1, ...$

   a) Halle s_1, s_2, y s_3.
   b) Resuelva la relación de recurrencia para dar una fórmula para s_n.
   c) ¿Es esa suceción convergente? Si es así, ¿Cuál es el límite?
   d) ¿La serie correspondiente converge? Si es así, ¿Cuál es límite?

12. Supongamos $s_0 = 75$ y $s_{n+1} = (1/3)s_n - 6$ para $n = 0, 1, ...$
   a) Halle s_1, s_2, y s_3.
   b) Resuelva la relación de recurrencia para dar una fórmula para s_n.
   c) ¿Es esa suceción convergente? Si es así, ¿Cuál es el límite?
   d) ¿La serie correspondiente converge? Si es así, ¿Cuál es límite?

13. *a*) Mostrar que $f_n = A \times 3^n + B \times 2^n$ satisface la ecuación de recurrencia

$$f_n = 5f_{n-1} - 6f_{n-2} \text{ para } n \geq 2.$$

   b) Encuentre la solución particular (valores para A y B) para que

$$f_0 = 4 \text{ y } f_1 = 17.$$

14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.