Relaciones de recurrencias

Ecuaciones en diferencias y análisis en escalas de tiempo

C. Aznarán Laos

F. Cruz Ordoñez

G. Quiroz Gómez

J. Micha Velasque

D. García Fernández

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

21 de junio del 2019

Índice

Ecuaciones en diferencias(E.D)

Definición (1)

Una ecuación en diferencias es una expresión de la forma:

$$G(n, f(n), f(n+1), \ldots, f(n+k)) = 0, \; \forall n \in \mathbb{Z}$$

Obsv:

f está definida en $\mathbb{Z}$.

Definición (2)

Se le llama orden de una E.D a la diferencia entre el operador diferencia mayor y menor que aparezcan en la ecuación; es decir, $n+k-n=k$

Ejemplo 2.1

$f(n+3) - f(n+1) - 5f(n) = n$ es una E.D de orden 3.
$f(n+3) - f(n+1) = n^2 - 3$ es una E.D de orden 2.

Definición (3)

Se le llama *solución* de una E.D a toda sucesión $\{f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots\}$ que la satisfaga,ahora se le llama *solución general* de una E.D al conjunto de todas las soluciones que tendrán tanto parámetros como orden tenga la ecuación.La determinación de estos parámetros, a partir de unas condiciones iniciales, nos proporcionará las distintas soluciones particulares.

Ejemplo

$f(n+1) - f(n) = 3$ es una E.D de orden uno cuya solución general es $f(n) = 3n + c$.Si consideramos unas condiciones iniciales,por ejemplo ,$f(0) = 2$, entonces $f(0) = 3 \times 0 + c = c$, por tanto $c = 2$ y la solución particular es $f_p(n) = 3n + 2$.Es decir, la solución es la sucesión $f_p(n) = \{2, 5, 8, 11, \ldots\}$

Ecuaciones en diferencias lineales(E.D.L)

Definición (4)

(CASO GENERAL): Llamamos ecuación en diferencias lineal de orden k a toda expresión de la forma:

$$a_0(n)f(n+k) + a_1(n)f(n+k-1) + \cdots + a_k(n)f(n) = b(n),$$

donde los coeficientes a_i son funciones definidas en $\mathbb{Z}$.$(a_k(n) \neq 0)$
(CASO PARTICULAR):Cuando los coeficientes son constantes $a_i(n) = a_i$:

$$f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \cdots + a_{k-1} f(n+1) + a_k f(n) = b(n).$$

Clasificación: Las E.D.L se pueden clasificar en:

- Homogéneas si $b(n) = 0$.
- Completas si $b(n) \neq 0$.
- De coeficientes constantes si $a_i(n) = a_i, \forall i$.
- De coeficientes no constantes si $a_i(n) \neq a_i$ para algún i.

Ejemplo (Homogénea)

Hallar la solución de:

$$f(n+2) - 4f(n+1) + 3f(n) = 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

La ecuación característica es:

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \to r_1 = 3, r_2 = 1.$$

Por tanto:

$$f(n) = c_1 3^n + c_2 1^n = c_1 3^n + c_2.$$

Por otro lado:

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= c_1 + c_2 &= 0 \\ f(1) &= 3c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \to c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -\frac{1}{2}$$

De donde:

$$f(n) = \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2} = \frac{3^n - 1}{2}$$

Ejemplo (Completa)

Hallar la solución general de:

$$f(n+2)-f(n+1)+f(n)=n,\ \forall n\in\mathbb{Z}$$

Ejemplo (Completa)

Hallar la solución de:

$$f(n+1)-2f(n)=2^n,\ \forall n\in\mathbb{Z},$$

$$f(0)=-1.$$

Teorema 1:(Teorema de la existencia y la unicidad)

Dada la ecuación:

$$f(n+k) + a_1(n)f(n+k-1) + \cdots + a_{n-1}(n)f(n+1) + a_n(n)f(n) = 0,$$

y dados n números reales $k_0, k_1, \cdots, k_{n-1}$ existe una única solución que verifica

$$f(0) = k_0, f(1) = k_1, \cdots, f(n-1) = k_{n-1}.$$

Teorema 2:

Toda combinación lineal de soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden k es también una solución.

Corolario 1:

Las soluciones de una ecuación en diferencia lineal de orden k forman un espacio vectorial.

Números de Catalan

¿Qué son?

En combinatoria, los números de Catalan forman una secuencia de números naturales que aparece en varios problemas de conteo donde se ve la recursividad. Obtienen su nombre del matemático belga Eugène Charles Catalan (1814–1894).

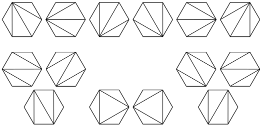
Fórmula explícita

El $n-$ésimo número de Catalán se obtiene de la siguiente fórmula:

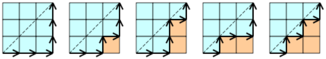
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n};\ n \leq 0$$

Aplicaciones

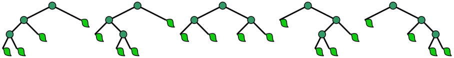
Ejemplo (Triangulación)



Ejemplo (Caminos monótonos)



Ejemplo (Árboles binarios)



Common title, appearing on all slides in one frame

The second frame subtitle

- some text on slide 1
- some text on slide 2

Una escala de tiempo es un conjunto cerrado $\mathbb{T}$ bajo la topología estándar sobre $\mathbb{R}$.
Se define el operador salto posterior $\sigma\colon \ \to \mathbb{T}$ por

$$\sigma\left(T\right) := \text{ínf}\left\{z \in \mathbb{T} : z > t\right\}$$

la granicidad $\mu\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ por

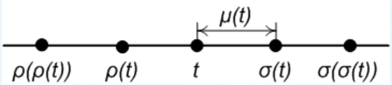
$$\mu\left(t\right) = \sigma\left(t\right) - t$$

y función granicidad minimal $\mu_*\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ por

$$\mu_*\left(s\right) = \underset{\tau\in[s,\infty)\cap\mathbb{T}}{\text{ínf}} \mu\left(t\right).$$

Una función $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ es llamada Δ–diferenciable si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $s \in \left(t-\delta, t+\delta\right) \cap \mathbb{T}$ y existe un número $f^{\Delta}\left(t\right)$ tal que

$$\left|\,\left[f\left(\sigma\left(s\right)\right) - f\left(s\right)\right] f^{\Delta}\left(s\right)\left[\sigma\left(t\right) - s\right]\,\right| \leq \varepsilon\left|\sigma\left(t\right) - s\right|.$$



La integración se define de modo que $\int_t^s f^\Delta(\tau)\,\Delta\tau = f(t) - f(s)$. Si $\mathbb{T}$ consiste únicamente de puntos aislados, entonces

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

y

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)\cap\mathbb{T}} \mu(t) f(t), & \text{si } a < b. \\ 0, & \text{si } a = b. \\ -\sum_{t\in[b,a)\cap\mathbb{T}} \mu(t) f(t), & \text{si } a > b. \end{cases}$$

Content...

text

text

text

text

text