

# Relaciones de recurrencias

Ecuaciones en diferencias y análisis en escalas de tiempo

C. Aznarán Laos

F. Cruz Ordoñez

G. Quiroz Gómez

J. Micha Velasque

D. García Fernández

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

21 de junio del 2019

# Índice

## 1 Introducción

- Relación de recurrencia
  - Número de Catalan
  - Con coeficientes constantes
  - Homogénea
- Ecuaciones en diferencias

## 2 Ecuaciones de recurrencia

- Número de Catalan
- Torre de Hanoi
- Número de Ackermann

## 3 Realización numérica

- Discretización
  - Método de Euler
  - Método de Runge-Kutta

## 4 Aplicaciones

- Escalas de tiempo
  - Derivada fraccionaria
- Módulo `timescale`
  - Número de Catalan

# Relación de recurrencia

## Definición

Una **relación de recurrencia** en las incógnitas  $x_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , es una familia de ecuaciones

$$x_n = f_n(x_0, \dots, x_{n-1}), \quad n \geq r, \quad (1)$$

donde  $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ , y  $(f_n)_{n \geq r}$  son funciones

$$f_n: D_n \rightarrow \mathbb{R}, \quad D_n \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \text{o} \quad f_n: D_n \rightarrow \mathbb{C}, \quad D_n \subseteq \mathbb{C}^n.$$

Dependiendo del caso encontrado, las llamaremos **recurrencias reales** o **recurrencias complejas**. Las incógnitas  $x_0, \dots, x_{r-1}$  son llamadas **libres**. Su número  $r$  es el **orden** de la relación.

## Definición

Una sucesión  $(a_n)_n$  es una **solución** de (1), sii

$$(a_0, \dots, a_{n-1}) \in D_n, \quad a_n = f_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \quad \forall n \geq r.$$

# Relación de recurrencia

## Ejemplo

La sucesión real

$$x_0 = 2, x_1 = 1, x_2 = 2^{1/2}, x_3 = 1, \dots, x_{2m-1} = 1, x_{2m} = 2^{1/2^m}, \dots$$

es la solución de la *relación de recurrencia* con coeficientes reales

$$x_n = \sqrt{x_{n-2}}, \quad n \geq 2,$$

y los *valores iniciales*  $x_0 = 2$  y  $x_1 = 1$ .

## Ejemplo

Considere la relación de recurrencia de primer orden definida por

$$x_n = \frac{1}{x_{n-1} - 1}, \quad n \geq 1.$$

- La 1-tupla  $(2) \in D_0$  **no es una tupla de valor inicial de una solución.**
- 1-tupla  $(3)$  **es una tupla de valor inicial de la solución.**

# Relación de recurrencia

## Observación

En muchas ocasiones una relación de recurrencia de orden  $r$  involucra solo los últimos  $r$  términos y es de la forma

$$x_n = g_n(x_{n-r}, \dots, x_{n-1}), \quad n \geq r,$$

donde  $(g_n)_{n \geq r}$  son las funciones definidas en un subconjunto  $E_n$  de  $\mathbb{R}^r$  o  $\mathbb{C}^r$ .

Este último es de hecho una relación de recurrencia: es suficiente para establecer

$$f_n(x_0, \dots, x_{n-1}) := g_n(x_{n-r}, \dots, x_{n-1})$$

para  $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in D_n := \mathbb{R}^{n-r} \times E_n$  (o  $\mathbb{C}^{n-r} \times E_n$ ) a fin de cumplir los requerimientos de la definición (1).

# Ecuaciones en diferencias

Aquí es conveniente representar cualquier sucesión de números reales  $(a_n)_n$  como la función  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por:

$$f(n) = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

## Definición

Una **ecuación en diferencias** es una expresión de la forma:

$$G(n, f(n), f(n+1), \dots, f(n+k)) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

El **orden** de una ecuación en diferencias se halla mediante la diferencia entre los “términos mayor” y “menor” respectivamente. En (2), es  $n+k - n = k$ .

## Ejemplo

- El **orden** de  $f(n+3) - f(n+1) - 5f(n) = n$  es **3**.
- El **orden** de  $f(n+3) - f(n+1) = n^2 - 3$  es **2**.

### Definición

La **solución** de (2) a toda sucesión  $\{f(0), f(1), \dots, f(n), \dots\}$  que la satisfaga, ahora se le llama *solución general* de una E.D al conjunto de todas las soluciones que tendrán tanto parámetros como orden tenga la ecuación. La determinación de estos parámetros, a partir de unas condiciones iniciales, nos proporcionará las distintas soluciones particulares.

### Ejemplo

Sea

$$f(n+1) - f(n) = 3$$

una ecuación en diferencias de orden uno cuya solución general es  $f(n) = 3n + c$ .

Si consideramos las condiciones iniciales, por ejemplo,  $f(0) = 2$ , entonces  $f(0) = 3 \times 0 + c = c$ , por tanto  $c = 2$  y la solución particular es  $f_p(n) = 3n + 2$ . Es decir, la solución es la sucesión  $f_p(n) = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$ .

## Definición

Llamamos ecuación en diferencias lineal de orden  $k$  a toda expresión de la forma:

$$f(n+k) + a_1(n)f(n+k-1) + \cdots + a_{k-1}(n)f(n+1) + a_k(n)f(n) = b(n),$$

donde  $a_k(n) \neq 0$ .

## Clasificación de las ecuaciones de diferencias lineal

- Homogéneas si  $b(n) = 0$ .
- Completas si  $b(n) \neq 0$ .
- De coeficientes constantes si  $a_i(n) = a_i, \forall i$ .
- De coeficientes no constantes si  $a_i(n) \neq a_i$  para algún  $i$ .



## Teorema (De la existencia y la unicidad)

*Dada la ecuación:*

$$f(n+k) + a_1(n)f(n+k-1) + \cdots + a_{n-1}(n)f(n+1) + a_n(n)f(n) = 0,$$

*y dados  $n$  números reales  $k_0, k_1, \dots, k_{n-1}$  existe una única solución que verifica*

$$f(0) = k_0, f(1) = k_1, \dots, f(n-1) = k_{n-1}.$$

## Teorema

*Toda combinación lineal de soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden  $n$  es también una solución.*

## Corolario

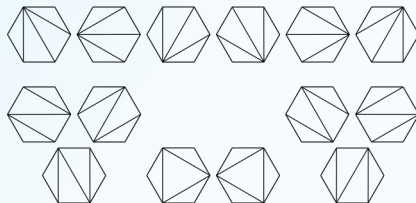
*Las soluciones de una ecuación en diferencia lineal de orden  $n$  forman un espacio vectorial.*

## Teorema

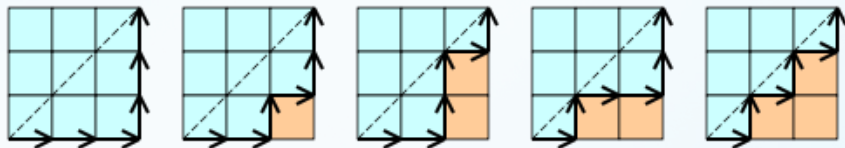
*La dimensión del espacio de soluciones de una ecuación en diferencias lineal de orden  $n$  es  $n$ .*

# Número de Catalan

## Triangulación



## Caminos monótonos



# Ecuación de recurrencia de primer orden

Solución general a la ecuación de recurrencia:

$$S_{n+1} = aS_n + c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se da en dos partes:

$$\begin{array}{ll} \text{Si } a = 1, & S_n = S_0 + nc \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{Si } a \neq 1 & S_n = a^n \left[ S_0 - \frac{c}{1-a} \right] + \frac{c}{1-a} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}$$

# Aplicación

## Torres de Hanói

$$S_n = 2S_{n-1} + 1 \quad \text{para cada } n \geq 2$$



# Ecuación de recurrencia de segundo orden

## Teorema 1

$$S_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n \text{ si } r_1 \neq r_2, \quad // \text{Si } \Delta \neq 0$$

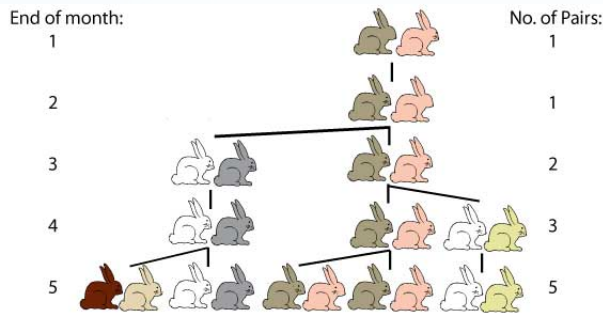
## Teorema 2

$$S_n = A(r)^n + Bn(r)^n \text{ si } r_1 = r_2 = r, \quad // \text{Si } \Delta = 0$$

# Aplicación

## Un modelo de cunicultura (Sucesión de Fibonacci)

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{para cada } n \geq 2$$



# Soluciones

The second frame subtitle

Hola

- some text on slide 1
- some text on slide 2

# Aplicaciones





## Módulo timescale

Aquí es conveniente representar cualquier sucesión de números reales  $(a_n)_n$  como la función  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por:

$$f(n) = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

### Definición

Una **ecuación en diferencias** es una expresión de la forma:

$$G(n, f(n), f(n+1), \dots, f(n+k)) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

El **orden** de una ecuación en diferencias se halla mediante la diferencia entre los “términos mayor” y “menor” respectivamente. En (2), es  $n+k-n=k$ .

### Ejemplo

- El **orden** de  $f(n+3) - f(n+1) - 5f(n) = n$  es **3**.
- El **orden** de  $f(n+3) - f(n+1) = n^2 - 3$  es **2**.

### Definición

La **solución** de (2) a toda sucesión  $\{f(0), f(1), \dots, f(n), \dots\}$  que la satisfaga, ahora se le llama *solución general* de una E.D al conjunto de todas las soluciones que tendrán tanto parámetros como orden tenga la ecuación. La determinación de estos parámetros, a partir de unas condiciones iniciales, nos proporcionará las distintas soluciones particulares.

### Ejemplo

Sea

$$f(n+1) - f(n) = 3$$

una ecuación en diferencias de orden uno cuya solución general es  $f(n) = 3n + c$ .

Si consideramos las condiciones iniciales, por ejemplo,  $f(0) = 2$ , entonces  $f(0) = 3 \times 0 + c = c$ , por tanto  $c = 2$  y la solución particular es  $f_p(n) = 3n + 2$ . Es decir, la solución es la sucesión  $f_p(n) = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$ .

## Definición

Llamamos ecuación en diferencias lineal de orden  $k$  a toda expresión de la forma:

$$f(n+k) + a_1(n)f(n+k-1) + \cdots + a_{k-1}(n)f(n+1) + a_k(n)f(n) = b(n),$$

donde  $a_k(n) \neq 0$ .

## Clasificación de las ecuaciones de diferencias lineal

- Homogéneas si  $b(n) = 0$ .
- Completas si  $b(n) \neq 0$ .
- De coeficientes constantes si  $a_i(n) = a_i, \forall i$ .
- De coeficientes no constantes si  $a_i(n) \neq a_i$  para algún  $i$ .

## Teorema (De la existencia y la unicidad)

*Dada la ecuación:*

$$f(n+k) + a_1(n)f(n+k-1) + \cdots + a_{n-1}(n)f(n+1) + a_n(n)f(n) = 0,$$

*y dados  $n$  números reales  $k_0, k_1, \dots, k_{n-1}$  existe una única solución que verifica*

$$f(0) = k_0, f(1) = k_1, \dots, f(n-1) = k_{n-1}.$$

## Teorema

*Toda combinación lineal de soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden  $n$  es también una solución.*

## Corolario

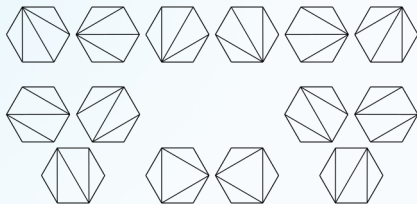
*Las soluciones de una ecuación en diferencia lineal de orden  $n$  forman un espacio vectorial.*

## Teorema

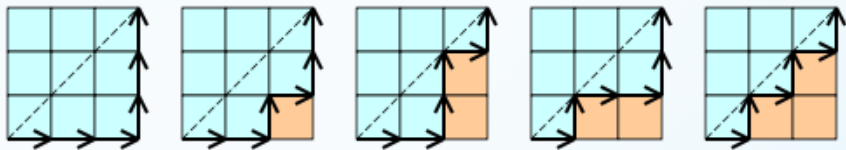
*La dimensión del espacio de soluciones de una ecuación en diferencias lineal de orden  $n$  es  $n$ .*

# Número de Catalan

## Triangulación



## Caminos monótonos



## Módulo timescale

Aquí es conveniente representar cualquier sucesión de números reales  $(a_n)_n$  como la función  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por:

$$f(n) = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

### Definición

Una **ecuación en diferencias** es una expresión de la forma:

$$G(n, f(n), f(n+1), \dots, f(n+k)) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

El **orden** de una ecuación en diferencias se halla mediante la diferencia entre los “términos mayor” y “menor” respectivamente. En (2), es  $n+k-n=k$ .

### Ejemplo

- El **orden** de  $f(n+3) - f(n+1) - 5f(n) = n$  es **3**.
- El **orden** de  $f(n+3) - f(n+1) = n^2 - 3$  es **2**.

### Definición

La **solución** de (2) a toda sucesión  $\{f(0), f(1), \dots, f(n), \dots\}$  que la satisfaga, ahora se le llama *solución general* de una E.D al conjunto de todas las soluciones que tendrán tanto parámetros como orden tenga la ecuación. La determinación de estos parámetros, a partir de unas condiciones iniciales, nos proporcionará las distintas soluciones particulares.

### Ejemplo

Sea

$$f(n+1) - f(n) = 3$$

una ecuación en diferencias de orden uno cuya solución general es  $f(n) = 3n + c$ .

Si consideramos las condiciones iniciales, por ejemplo,  $f(0) = 2$ , entonces  $f(0) = 3 \times 0 + c = c$ , por tanto  $c = 2$  y la solución particular es  $f_p(n) = 3n + 2$ . Es decir, la solución es la sucesión  $f_p(n) = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$ .

## Definición

Llamamos ecuación en diferencias lineal de orden  $k$  a toda expresión de la forma:

$$f(n+k) + a_1(n)f(n+k-1) + \cdots + a_{k-1}(n)f(n+1) + a_k(n)f(n) = b(n),$$

donde  $a_k(n) \neq 0$ .

## Clasificación de las ecuaciones de diferencias lineal

- Homogéneas si  $b(n) = 0$ .
- Completas si  $b(n) \neq 0$ .
- De coeficientes constantes si  $a_i(n) = a_i, \forall i$ .
- De coeficientes no constantes si  $a_i(n) \neq a_i$  para algún  $i$ .



## Teorema (De la existencia y la unicidad)

*Dada la ecuación:*

$$f(n+k) + a_1(n)f(n+k-1) + \cdots + a_{n-1}(n)f(n+1) + a_n(n)f(n) = 0,$$

*y dados  $n$  números reales  $k_0, k_1, \dots, k_{n-1}$  existe una única solución que verifica*

$$f(0) = k_0, f(1) = k_1, \dots, f(n-1) = k_{n-1}.$$

## Teorema

*Toda combinación lineal de soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden  $n$  es también una solución.*

## Corolario

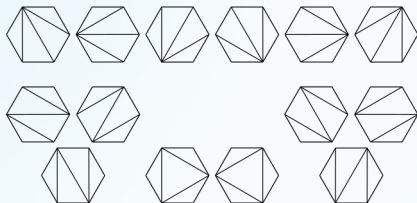
*Las soluciones de una ecuación en diferencia lineal de orden  $n$  forman un espacio vectorial.*

## Teorema

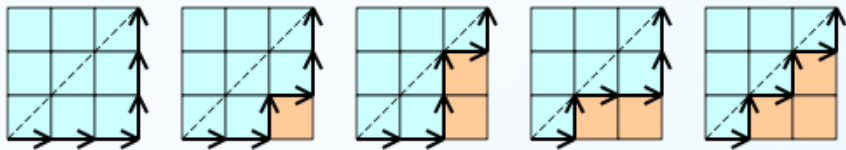
*La dimensión del espacio de soluciones de una ecuación en diferencias lineal de orden  $n$  es  $n$ .*

# Número de Catalan

## Triangulación



## Caminos monótonos



# Ejemplos Definidos Por Ecuaciones de Recurrencia.

*Resolver una ecuación de recurrencia* significa encontrar una secuencia que satisfaga la ecuación de recurrencia. Encontrar una “solución general” significa encontrar una fórmula que describe todas las soluciones posibles (todas las secuencias posibles que satisfacen la ecuación).

Veamos el siguiente ejemplo:

## Solución al Ejemplo.

- Considere  $T_n$  que satisface la siguiente ecuación para todo  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ :

$$T_n = 2T_{n-1} + 1.$$

## Ejemplo 1. [Desajustes]

Imagina una fiesta donde las parejas llegan juntas, pero al final de la noche, cada persona se va con una nueva pareja. Para cada  $n \in P$ , digamos que  $D_n$  es el número de diferentes formas en que las parejas pueden ser “trastornadas”, es decir, reorganizadas en parejas, por lo que ni uno está emparejado con la persona con la que llegaron.

$D_n$  para cualquier valor de  $n$

- Para todo  $n \geq 4$  tendremos:

$$D_n = (n - 1) \{D_{n-2} + D_{n-1}\}.$$

Y la sucesión definida en  $P$  es

$$S_n = A \times n!.$$

# Teorema Acotación para $D_n$

## Desigualdad para la acotación de $D_n$

- Para todo  $n \geq 2$  tenemos:

$$\left(\frac{1}{3}\right)n! \leq D_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)n!.$$

La mejor fórmula para  $D_n$  que sabemos utiliza la función de “entero más cercano”. Para cualquier número real  $x$ , sea  $\lceil x \rceil$  que denote **el entero más cercano a  $x$** , definido:

Si  $x$  es escrito como  $n + f$  donde  $n$  es el entero  $\lfloor x \rfloor$ , y  $f$  es una fracción donde  $0 \leq f < 1$ :

Si  $0 \leq f < \frac{1}{2}$ , entonces  $\lceil x \rceil = n$ .

Si  $\frac{1}{2} \leq f < 1$ , entonces  $\lceil x \rceil = n + 1$ .

Entonces  $D_n = \lceil (n!)/e \rceil$  cuando  $e = 2,71828182844$  es la base del logaritmo natural.  $(n!)/e$  nunca es igual a  $\lceil (n!)/e \rceil + \frac{1}{2}$ .

## Ejemplo 2.[Números de Ackermann.]

Por los 1920s, un lógico y matemático alemán, Wilhelm Ackermann (1896–1962), inventó una función muy curiosa.

### Ackerman

- Sea  $A: P \times P \rightarrow P$ , se define recursivamente usando tres reglas:
  1.  $A(1, n) = 2$  para  $n = 1, 2, \dots$ ,
  2.  $A(m, 1) = 2m$  para  $m = 2, 3, \dots$ ,
  3. Cuando  $m > 1$  y  $n > 1$  se tiene:  $A(m, n) = A(A(m-1, n), n-1)$ .

Entonces  $A(2, n) = 4, \forall n \geq 1$ . Además  $A(m, 2) = 2^m, \forall m \geq 1$ . Seguidamente se puede continuar a calcular  $A(m, 3) = 2 \uparrow m$  con la función torre definida por  $2 \uparrow [k+1] = 2^{2 \uparrow k}$  con valor inicial  $2 \uparrow 1 = 2$ , por PIM.