Relaciones de recurrencias

Ecuaciones en diferencias y análisis en escalas de tiempo

C. Aznarán Laos

F. Cruz Ordoñez

G. Quiroz Gómez

J. Micha Velasque

D. García Fernández

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

25 de junio del 2019

Índice

Relación de recurrencia

Definición

Una **relación de recurrencia** en las incógnitas x_i, $i \in \mathbb{N}$, es una familia de ecuaciones

$$x_n = f_n\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right), \quad n \geq r, \tag{1}$$

donde $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, y $(f_n)_{n \geq r}$ son funciones

$$f_n \colon D_n \to \mathbb{R}, \quad D_n \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \text{o} \quad f_n \colon D_n \to \mathbb{C}, \quad D_n \subseteq \mathbb{C}^n.$$

Dependiendo del caso encontrado, las llamaremos **recurrencias reales** o **recurrencias complejas**. Las incógnitas $x_0, \ldots, x_{r-1}$ son llamadas **libres**. Su número r es el **orden** de la relación.

Definición

Una sucesión $(a_n)_n$ es una **solución** de (1), sii

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in D_n, \quad a_n = f_n\left(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\right) \quad \forall\, n \geq r.$$

Relación de recurrencia

Ejemplo

La sucesión real

$$x_0 = 2, x_1 = 1, x_2 = 2^{1/2}, x_3 = 1, \ldots, x_{2m-1} = 1, x_{2m} = 2^{1/2^m}, \ldots$$

es la solución de la *relación de recurrencia* con coeficientes reales

$$x_n = \sqrt{x_{n-2}}, \quad n \geq 2,$$

y los *valores iniciales* $x_0 = 2$ y $x_1 = 1$.

Ejemplo

Considere la relación de recurrencia de primer orden definida por

$$x_n = \frac{1}{x_{n-1} - 1}, \quad n \geq 1.$$

- La 1–tupla $(2) \in D_0$ no es una tupla de valor inicial de una solución.
- 1–tupla (3) es una tupla de valor inicial de la solución.

Relación de recurrencia

Observación

En muchas ocasiones una relación de recurrencia de orden r involucra solo los últimos r términos y es de la forma

$$x_n = g_n\left(x_{n-r}, \ldots, x_{n-1}\right), \quad n \geq r,$$

donde $(g_n)_{n\geq r}$ son las funciones definidas en un subconjunto E_n de $\mathbb{R}^r$ o $\mathbb{C}^r$.

Este último es de hecho una relación de recurrencia: es suficiente para establecer

$$f_n\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right) := g_n\left(x_{n-r}, \ldots, x_{n-1}\right)$$

para $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in D_n := \mathbb{R}^{n-r} \times E_n$ (o $\mathbb{C}^{n-r} \times E_n$) a fin de cumplir los requerimientos de la definición (1).

Ecuaciones en diferencias

Aquí es conveniente representar cualquier sucesión de números reales $(a_n)_n$ como la función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(n) = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definición

Una **ecuación en diferencias** es una expresión de la forma:

$$G\left(n, f(n), f\left(n+1\right), \ldots, f\left(n+k\right)\right) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

El **orden** de una ecuación en diferencias se halla mediante la diferencia entre los "términos mayor" y "menor" respectivamente. En (2), es $n + k - n = k$.

Ejemplo

- El orden de $f\left(n+3\right) - f\left(n+1\right) - 5f(n) = n$ es 3.
- El orden de $f\left(n+3\right) - f\left(n+1\right) = n^2 - 3$ es 2.

Definición

Una **ecuación en diferencias** se le llama **lineal** si puede expresarse de la siguiente forma:

$$a_0(n)f(n+k)+a_1(n)f(n+k-1)+\cdots+a_{k-1}(n)f(n+1)+a_k(n)f(n)=b(n), \tag{3}$$

donde $a_k(n)\neq 0$.

Clasificación

NOMBRE	CONDICIÓN
Homogéneas(E.D.L.H)	si $b(n)=0$.
Completas (E.D.L.C)	si $b(n)\neq 0$.
De coeficientes constantes	$a_i(n)=a_i$, $\forall i$.
De coeficientes no constantes	si $a_i(n)\neq a_i$ para algún i.

Definición

Sea una **ecuación en diferencias lineal homogénea** de coeficientes constantes y de orden k,buscaremos soluciones del tipo $f(n) = r^n$,haciendo este cambio y simplificando tenemos:

$$r^n(a_0r^k + a_1r^{k-1} + \cdots + a_k) = 0$$

$$\rightarrow (a_0r^k + a_1r^{k-1} + \cdots + a_k) = 0,$$

a la expresión anterior llamaremos **ecuación característica.**

Definición

Llamamos **solución** de una E.D. a toda sucesión $\{f(1), \ldots, f(k)\}$ que la satisfaga.

Definición

Se le llama **solución general** de una E.D. al conjunto de todas las soluciones, que tendráa tantos parámetros como orden tenga la ecuacióňon

Teorema (De la existencia y la unicidad)

Dada la ecuación (3) y dados n números reales k_0, k_1, ..., k_{n-1} existe una única solución que verifica

$$f(0) = k_0, f(1) = k_1, \ldots, f(n-1) = k_{n-1}.$$

Teorema

Toda combinación lineal de soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n es también una solución.

Teorema

Las soluciones de una ecuación en diferencia lineal de orden n forman un espacio vectorial,cuya dimensión del espacio de soluciones de una ecuación en diferencias lineal de orden k es k.

Raíces simples

Sean $r_1, r_2, \ldots, r_k$ las k raíces de la ecuación característica. Se definen entonces las funciones:

$$f_j(n) = r_j^n,\ j = 1, \ldots, k.$$

Entonces $f_1, \ldots, f_k$ es un sistema fundamental de soluciones, lo cual nos permite resolver la ecuación.

Raíces múltiples

Sea r una raíz de multiplicidad m de la ecuación característica. Esta raíz proporciona m soluciones diferentes del tipo:

$$f_j(n) = n^j r^n; j = 0, \ldots, m-1.$$

Por tanto, pasarán a formar parte del sistema fundamental de soluciones las funciones $f_0, \ldots, fm-1$; esto es:

$$r^n, nr^n, n^2 r^n, \ldots, n^{m-1} r^n.$$

Ejemplo

Hallar la solución de:

$$f(n+3) - 7f(n+2) + 15f(n+1) - 9f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

$$f(0) = -1; f(1) = 2; f(2) = 17.$$

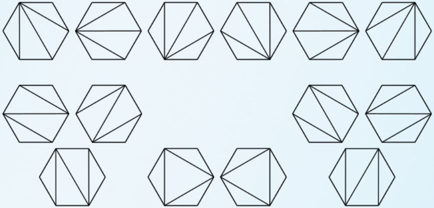
Ejemplo (E.D.L.C)

Hallar la solución de:

$$f(n+1) - 2f(n) = 2^n,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

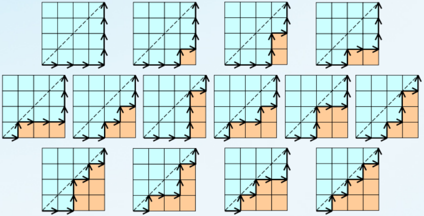
$$f(0) = -1.$$

Número de Catalan



Triangulación

Una triangulación de un polígono es una partición del mismo en triángulos disjuntos cuyos vértices coinciden con los vértices del polígono.



Caminos en rejillas

Un camino monótono es aquél que empieza en la esquina inferior izquierda y termina en la esquina superior derecha, y consiste únicamente en tramos que apuntan hacia arriba o hacia la derecha,sin que pase de diagonal.

Ecuación de recurrencia de primer orden

Solución general a la ecuación de recurrencia:

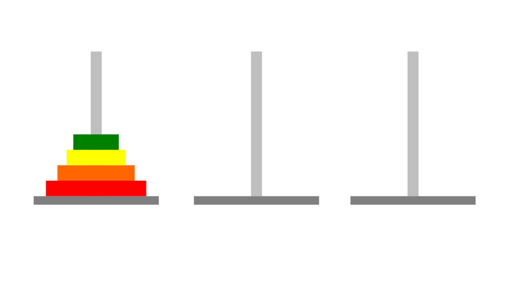
$$S_{n+1} = aS_n + c \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se da en dos partes:
$$\begin{array}{lll} \text{Si } a = 1, & S_n = S_0 + nc & \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{Si } a \neq 1 & S_n = a^n[S_0 - \frac{c}{1-a}] + \frac{c}{1-a} & \forall n \in \mathbb{N} \end{array}$$

Aplicación

Torres de Hanói

$$S_n = 2S_{n-1} + 1 \qquad \textit{para cada } n \geq 2$$



Ecuación de recurrencia de segundo orden

Teorema 1

$S_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$ si $r_1 \neq r_2$, //Si $\Delta \neq 0$

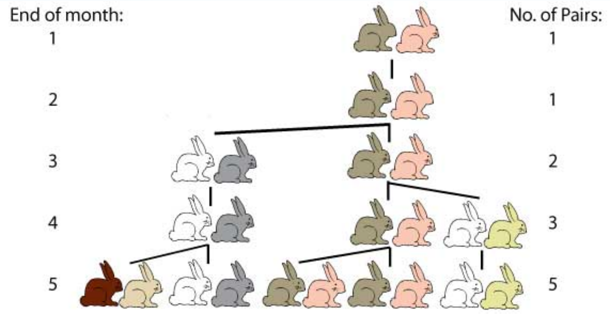
Teorema 2

$S_n = A(r)^n + Bn(r)^n$ si $r_1 = r_2 = r$, //Si $\Delta = 0$

Aplicación

Un modelo de cunicultura (Sucesión de Fibonacci)

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \textit{para cada } n \geq 2$$



Soluciones

The second frame subtitle

Hola

- some text on slide 1
- some text on slide 2

Aplicaciones

Ejemplos Definidos Por Ecuaciones de Recurrencia.

Resolver una ecuación de recurrencia significa encontrar una secuencia que satisfaga las ecuación de recurrencia. Encontrar una "solución general" significa encontrar una fórmula que describe todas las soluciones posibles (todas las secuencias posibles que satisfacen la ecuación).
Veamos el siguiente ejemplo:

Solución al Ejemplo.

- Considere T_n que satisface la siguiente ecuación para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

$$T_n = 2T_{n-1} + 1.$$

Ejemplo 1. [Desajustes]

Imagina una fiesta donde las parejas llegan juntas, pero al final de la noche, cada persona se va con una nueva pareja. Para cada $n \in P$, digamos que D_n es el número de diferentes formas en que las parejas pueden ser "trastornadas", es decir, reorganizadas en parejas, por lo que ni uno está emparejado con la persona con la que llegaron.

D_n para cualquier valor de n

- Para todo $n \geq 4$ tendremos:

$$D_n = (n-1)\left\{D_{n-2} + D_{n-1}\right\}.$$

Y la sucesión definida en P es

$$S_n = A \times n!.$$

Teorema Acotación para D_n

Desigualdad para la acotación de D_n

- Para todo $n \geq 2$ tenemos:

$$\frac{1}{3})n! \leq D_n \leq (\frac{1}{2})n!.$$

La mejor fórmula para D_n que sabemos utiliza la función de “entero más cercano”. Para cualquier número real x, sea $\lceil x \rfloor$ que denote **el entero más cercano a** x, definido:

Si x es escrito como $n+f$ donde n es el entero $\lfloor x \rfloor$, y f es una fracción donde $0 \leq f < 1$:

Si $0 \leq f < \frac{1}{2}$, entonces $\lceil x \rfloor = n$.

Si $\frac{1}{2} \leq f < 1$, entonces $\lceil x \rfloor = n+1$.

Entonces $D_n = \lceil (n!)/e \rfloor$ cuando $e = 2{,}71828182844$ es la base del logaritmo natural. $(n!)/e$ nunca es igual a $\lceil (n!)/e \rfloor + \frac{1}{2}$.

Ejemplo 2.[Números de Ackermann.]

Por los 1920s, un lógico y matemático alemán, Wilhelm Ackermann (1896–1962), inventó una función muy curiosa.

Akckerman

- Sea $A\colon P \times P \to P$, se define recursivamente usando tres reglas:
  1. $A(1,n) = 2$ para $n = 1, 2, \ldots$,
  2. $A(m,1) = 2m$ para $m = 2, 3, \ldots$,
  3. Cuando $m > 1$ y $n > 1$ se tiene: $A\left(m,n\right) = A\left(A(m-1,n), n-1\right)$.

Entonces $A(2,n) = 4, \forall n \geq 1$. Además $A(m,2) = 2^m, \forall m \geq 1$. Seguidamente se puede continuar a calcular $A\left(m,3\right) = 2 \uparrow m$ con la función torre definida por $2 \uparrow [k+1] = 2^{2\uparrow k}$ con valor inicial $2 \uparrow 1 = 2$, por PIM.