Teorema de Camacho-Sad

Liliana Puchuri Medina.*

5 de diciembre de 2005

Resumen

En el presente trabajo desarrollamos el famoso Teorema de la Separatriz, el cual fue probado por los matemáticos César Camacho y Paulo Sad. Ellos probaron la existencia de un conjunto invariante de cualquier foliación, llamada separatriz, en una superficie compleja, este teorema es muy importante ya que a través de tal teorema muchos matemáticos pudieron seguir desarrollando esta área de la matemática. Posteriormente este teorema fue demostrado en una versión mas moderna y algebraica por M. Sebastianni, la cual desarrollaremos a continuación.

1. Teorema de Camacho Sad

1.1. Explosión en un punto

Primeramente definiremos una explosión de $\mathbb{C}^2$ en $0 \in \mathbb{C}^2$, la cual reemplaza un punto por un proyectivo. Se define com el subconjunto de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P(1)$ dado por

$$\mathbb{C}_0^2 = \{(p,[p]) : p \in \mathbb{C}^2, p \neq 0\} \cup (\{0\} \times \mathbb{C}P(1))\}$$

donde $[p] = \{q \in \mathbb{C}^2 - \{0\} : \exists\, t \in \mathbb{C}^* \text{ donde } q = tp\}$.

Observación 1. $\mathbb{C}_0^2$ es una variedad compleja de dimensión compleja 2.

Ahora consideremos

$$\pi_0 : \mathbb{C}_0^2 \to \mathbb{C}^2$$

$$\begin{cases} \pi_0(p, 0_p) & = p \\ \pi_0(0, 0_p) & = 0 \end{cases}$$

Definición 1. Diremos que $(\mathbb{C}_0^2, \mathbb{C}^2, \pi_0)$ es una *explosión* en el punto $0 \in \mathbb{C}^2$.

Los puntos de la explosión en 0 pueden ser representados como en la Figura 1.1.

Sea M una variedad compleja de dimensión 2 y $p \in M$. Sea $\psi : U \to \mathbb{C}^2$ una carta holomorfa en p, tal que $\psi(p) = (0,0) = 0$. Sea además

$$\pi_0 : \mathbb{C}_0^2 \to \mathbb{C}^2$$

una explosión en $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ y $\widetilde{U} = \pi_0^{-1}(\psi(U)) \subseteq \mathbb{C}_0^2$. Evidentemente la aplicación $f = \pi_0^{-1} \circ \psi : M - \{p\} \to \widetilde{U} - \{\pi_0^{-1}(0)\}$ es un biholomorfismo.

*Universidad Nacional de Ingeniería. e-mail: puchuri.lili@gmail.com

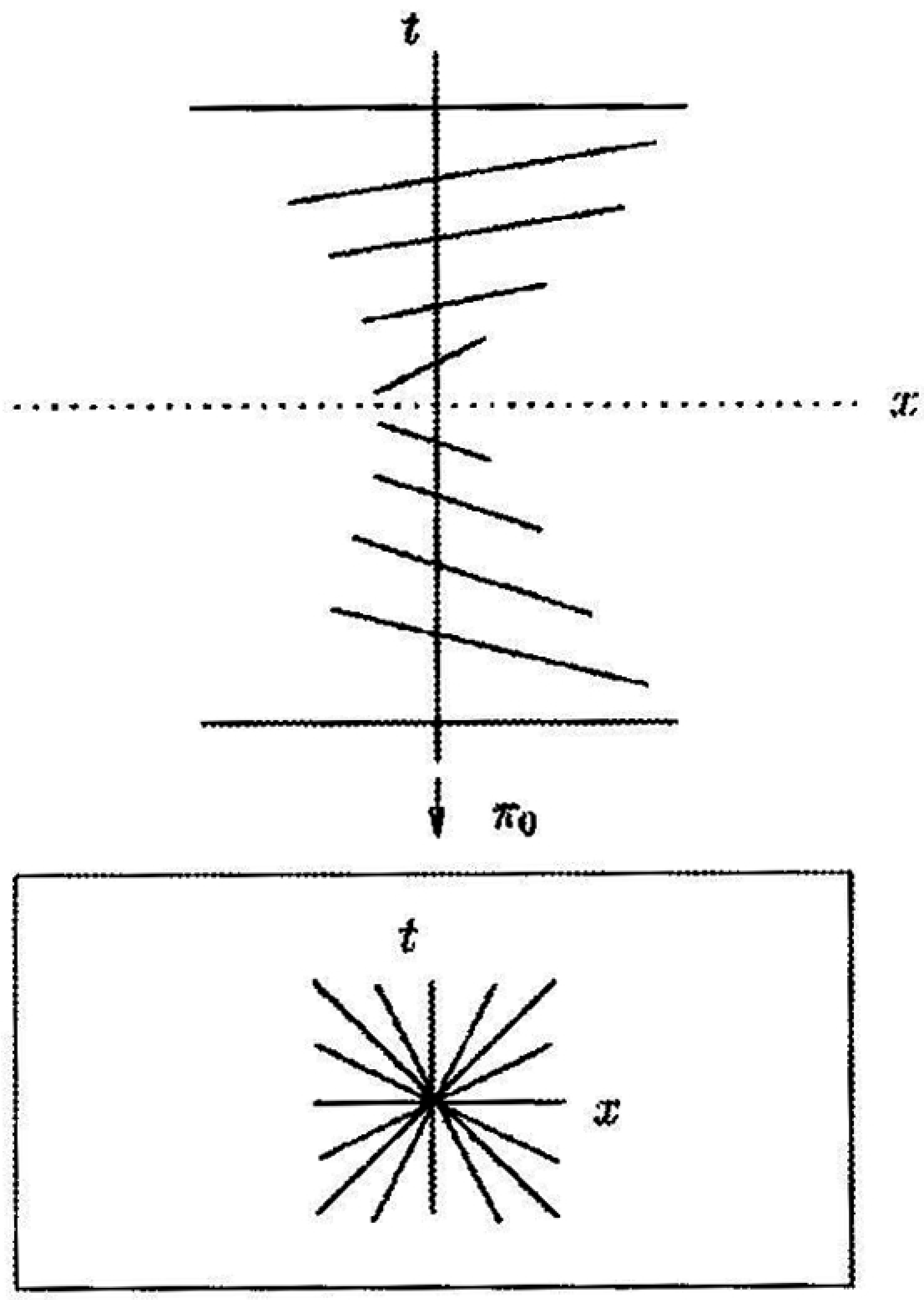

Figura 1: Explosión en un punto

Definición 2. Sea $\widetilde{M} = (M - \{p\}) \cup_f \widetilde{U}$ y la proyección canónica $\rho : (M - \{p\}) \uplus \widetilde{U} \to (M - \{p\}) \cup_f \widetilde{U}$

$$\pi = \pi_p : \widetilde{M} \to M$$

$$\pi_p([z]) = \begin{cases} z & , \text{ si } [(z,0)] \in \rho(M - \{p\}) \\ \psi^{-1} \circ \pi_0(z) & , \text{ si } [(1,z)] \in \rho(\widetilde{U}). \end{cases}$$

Diremos que $(\widetilde{M}, M, \pi_p)$ es una *explosión* en el punto $p \in M$.

Debe de notarse que

i) $\pi : \widetilde{M} - \pi^{-1}(p) \to M - \{p\}$ es un biholomorfismo.

ii) $\pi^{-1}(p) \simeq \mathbb{C}P(1)$

iii) $\pi_0^{-1}(V - \{0\})$ y $U - \{p\}$, son difeomorfos por ii), substituimos el punto p por una linea proyectiva.

Observación 2. Para mayores detalles puede consultar [2].

Definición 3. Decimos que p es una *singularidad reducida* de $\mathcal{F}$ si alguna de las siguientes situaciones ocurre:

1. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ y $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$ (*Singularidad simple*)
2. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ ó $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ (*Silla nodo*)

En el estudio de las ecuaciones diferenciales complejas juega un papel importante ciertos conjuntos llamados Dominios de Siegel y Dominio de Poincaré pues mediante ellos podemos clasificar los campos mediante una conjugación lineal. En [2],[5] , se hace un estudio detallado sobre estos conjuntos.

Definición 4. Los conjuntos de plano complejo $\mathbb{C}^2$

$$P_2 = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 : \lambda_1.\lambda_2 \neq 0 \ y \ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{R}^-\},$$

$$D_2 = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 : \lambda_1.\lambda_2 \neq 0 \ y \ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}^-\}$$

son llamados *Dominio de Poincaré* y *Dominio de Siegel* respectivamente.

Observación 3. Geométricamente $(\lambda_1, \lambda_2) \in P_2$, si 0 no pertenece a la cápsula convexa formada por λ_1 y λ_2.

Proposición 1 (Forma Normal de Poincaré). Sean $(\lambda_1, \lambda_2) \in P_2$ tal que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \notin \mathbb{Z}$ ó $\lambda_1 = \lambda_2$. Si

$$w = (\lambda_1 x + A_1(x,y))dx + (\lambda_2 y + A_2(x,y))dy$$

entonces existe un biholomorfismo local Φ en una vecindad de p y una vecindad de $(0,0)$ tal que

$$w = \Phi^* \widetilde{w} \ y \ \widetilde{w} = \lambda_1 x dy - \lambda_2 y dx \tag{1}$$

Proposición 2 (Forma Normal de Siegel). Si $(\lambda_1, \lambda_2) \in D_2$. Entonces existe un biholomorfismo local Φ en una vecindad de p y una vecindad de $(0,0)$ tal que

$$w = \Phi^* \widetilde{w} \ y \ \widetilde{w} = (\lambda_1 x + xyf(x,y))dy - (\lambda_2 y + xyg(x,y))dx \tag{2}$$

donde f y g son funciones holomorfas.

Definición 5 (Resolución de una foliación $\mathcal{F}$). Sea $p \in Sing(\mathcal{F})$, y consideramos la sucesión de explosiones π en p, tal que todas las singularidades son simples, entonces diremos que π es una resolución de $\mathcal{F}$ en p.

Teorema 1 (Seindenberg). Sea $\mathcal{F}$ una foliación en una superficie y $p \in Sing(\mathcal{F})$. Entonces existe una sucesión finita de explosiones $\pi = (\pi_n \circ \pi_{n-1} \circ \cdots \circ \pi_1)^{-1}(p)$, donde π_1 es una explosión en p y π_i es una explosión en un punto de $(\pi_i \circ \pi_{i-1} \circ \cdots \circ \pi_1)^{-1}(p)$, tal que todas las singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ sobre $\pi^{-1}(p)$ son reducidas.

Definición 6 (Resolución de una foliación $\mathcal{F}$). Sea $p \in Sing(\mathcal{F})$, y consideramos la sucesión de explosiones π en p, tal que todas las singularidades son simples, entonces diremos que π es una resolución de $\mathcal{F}$ en p.

Ejemplo 1. Consideremos la foliación cuyas hojas son las curvas de nivel de $f = x^3 - y^2$, es decir la foliación inducida por $df = 3x^2dx - 2ydy$.

La figura 1,2 nos muestra la resolución de la foliación definida por df en 0.

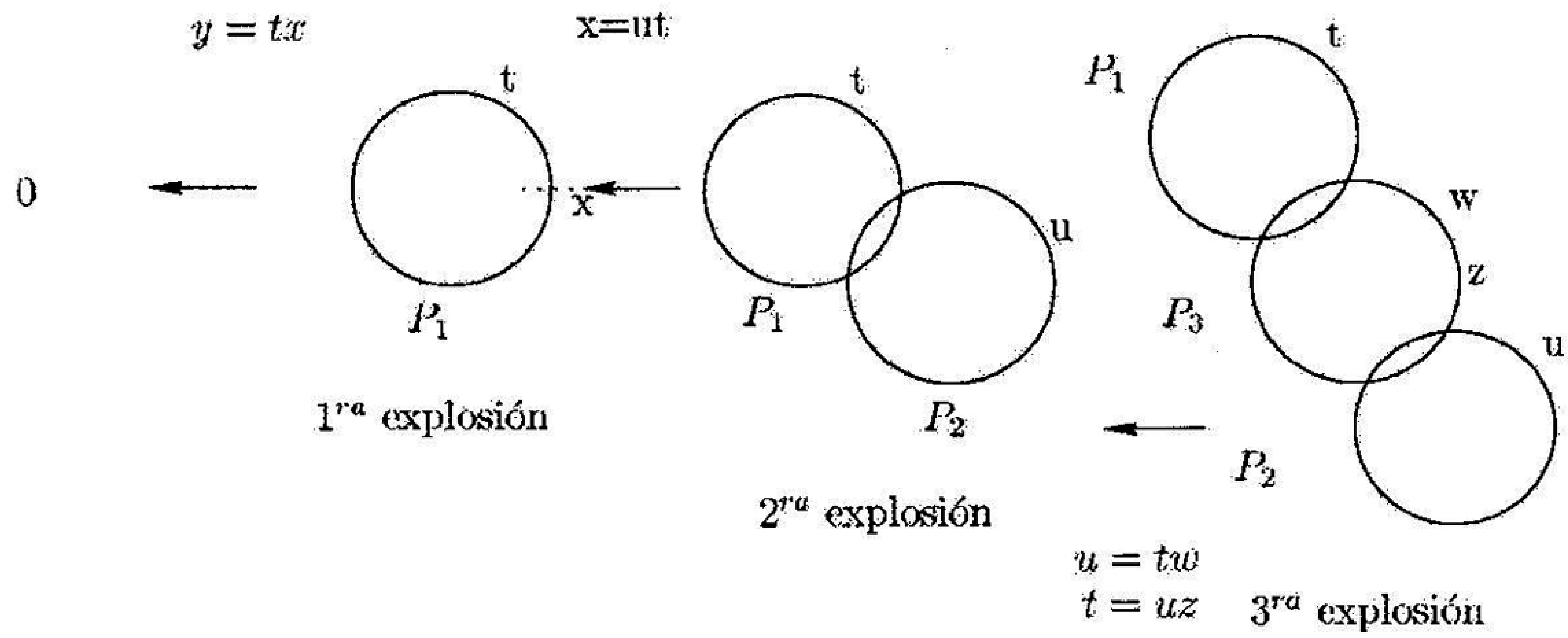

Figura 2: Resolución de la foliación df

1.2. Indice de Camacho Sad

Sea M una variedad compleja y w 1-un forma en una vecindad U de p tal que $w(p) = 0$, así $w = 0$ define una $\mathcal{F}$ una foliación([?]) en U. Consideremos la explosión en p, $\pi : \widetilde{M} \to M$ y $P = \pi^{-1}(p)$. Como $\pi : \widetilde{U} - P \to U - \{p\}$ es un biholomorfismo, entonces la foliación $\mathcal{F}|_{U-\{p\}}$ en $M - \{p\}$, puede ser llevada a una foliación en $\widetilde{U} - P$, la cual lo denotaremos por $\widetilde{\mathcal{F}}$, se prueba que la foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$ puede ser extendida a todo $\widetilde{U}$, esta extensión es denotada por $\pi^*\mathcal{F}$ y llamada la *Transformada estricta* de $\mathcal{F}$.

Sean $\mathcal{F}$ una foliación singular de dimensión 1 en una superficie holomorfa M y sea p una singularidad de $\mathcal{F}$. Sabemos que $\mathcal{F}$ puede ser ser representado en una vecindad U de p, por una ecuación $\omega = 0$, donde ω es 1-forma holomorfa en U. Tomando $\varphi : U \to \mathbb{C}^2$, un sistema de coordenadas en U tal que $\varphi(p) = 0$, induce en $\mathbb{C}^2$ la 1-forma holomorfa $(\varphi^{-1})^*\omega$ puede ser expresado como:

$$(\varphi^{-1})^*\omega = adx + bdy$$

donde a y b son funciones holomorfas en $\varphi(U)$ y $a(p) = b(p) = 0$. El campo holomorfo X dual a ω, esto es, $\omega(X) = 0$, está dado en las coordenadas de (x, y) por:

$$\varphi^* X = b\frac{\partial}{\partial x} - a\frac{\partial}{\partial y}.$$

Definición 7. Una curva analítica S pasando por p es llamado *separatriz* de $\mathcal{F}$ en p si $S - \{p\}$ es $\mathcal{F}$-invariante, es decir, si $S - \{p\}$ es una unión finita de hojas de $\mathcal{F}$.

Proposición 3. Una curva analítica $S = \{f = 0\}$ con f reducida es una separatriz de $\mathcal{F}$ si y sólo si existen gérmenes de funciones holomorfas g, h, una 1-forma holomorfa α que satisfacen ladescomposición

$$g\omega = hdf + f\alpha \tag{3}$$

tal que $(h, f) = 1, (g, f) = 1$.

Para la prueba vea [9] pag.127. A continuación consideremos una separatriz S de la foliación $\mathcal{F}$ y la descomposición dada en (3).

Definición 8. Sea $\mathcal{F}$ una foliación y S una separatriz reducida $\mathcal{F}$, el *índice de Camacho-Sad de $\mathcal{F}$ con respecto a S en p* está dado por:

$$CS(\mathcal{F}, S, p) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\partial S}\frac{\alpha}{h}.$$

Debemos de enfatizar que $\partial S = S \cap S^3_\epsilon$, donde S^3_ϵ es una esfera de radio ϵ suficientemente pequeño, además se prueba en [3] que ∂S es una curva.

Ejemplo 2.
Supongamos que la foliación $\mathcal{F}$ inducida en una vecindad de $(0,0)$ es de la 1-forma

$$\omega(x,y) = x(\lambda_1 + yf(x,y))dy - y(\lambda_2 + xg(x,y))dx,$$

donde $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$. Luego vemos que la foliación admite como separatrices a $S_1 = \{x = 0\}$ y $S_2 = \{y = 0\}$, las cuales no tienen componentes en común, entonces de la

$$CS(\mathcal{F}, S_1, 0) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\partial S_1}\frac{(\lambda_1 + yf)dy}{-y(\lambda_2 + xg)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_1}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{dy}{y} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_1}\frac{f}{\lambda_2}dy.$$

como $\partial S_1 = \{(0,y) : |y| = 1\}$

$$CS(\mathcal{F}, S_1, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Análogamente se prueba que :

$$CS(\mathcal{F}, S_1, 0) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Sea M una variedad compleja y $D = S_1 \cup S_2 \cdots S_n$ una unión de curvas analíticas compactas en M. Sea $M_D = (m_{ij}) \in M(n, \mathbb{Z})$, donde $m_{ij} = S_i \cdot S_j$ denominada matriz de intersección.

Lema 1. Sea π una sucesión finita de explosiones en $p \in M$ y $\pi^{-1}(p) = D = P_1 \cup \cdots \cup P_n$, donde cada P_j es una recta proyectiva. Entonces M_D es negativa definida.

Una demostración detallada de este resultado se encuentra en [9] pag. 134.

Teorema 2. (**Teorema de la Separatriz**) Sea $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa en una superficie compleja M. Si $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, entonces $\mathcal{F}$ admite una separatriz en p.

Prueba: Por contradicción, suponga que el resultado sea falso. De los items (i) y (ii) de la página 103, p no es reducida. Sea π una sucesión finita de explosiones que resuelve $\mathcal{F}$ en p. Escribimos $\pi^{-1}(p) = P_1 \cup \cdots \cup P_n$, donde $P_1, \ldots, P_n$ son rectas proyectivas. Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ cuya base es $P_1, \ldots, P_n$, entonces V tiene dimensión n y admite una forma cuadratica Ψ definida por

$$\Psi(P_i, P_j) = P_i \cdot P_j.$$

Ψ es negativa definida por el lema 8.2.1.

Referencias

[1] C. Camacho, A, Lins Neto y P. Sad, *Topological invariants ans equidesingularization for holomorphic vector fields, J. Differential Geometry* , J. Differential Geometry 20 1984.

[2] C. Camacho y P. Sad, *Puntos singulares de ecuaciones diferenciales abalíticas, 16 Coloquio Brasilero de Matematica*,IMPA,Rio de Janerio, 1987.

[3] P. Fernandez y A. Hefez, *Topología de las Singularidades de Curvas Analíticas Irreducibles Planas* , Publicaciones de la UFF. 1998.

[4] P. Griffiths y J. Harris, *Principles of algebraic geometric* , John Wiley y Sons, New York, 1978

[5] S. Ramirez, *Tópicos de la Teoría Cualitativa de ecuaciones diferenciales complejas* ,Tesis de Licenciatura,2001, UNMS.

[6] Robert C. Gunning, *Introduction to Function of Several Variables (Vol. III), Homological Teory*, Princeton, New Jersey,1990.

[7] Jhon Milnor, *Singular Point of complex hypersurfaces*, Princeton, New Jersey,1968.

[8] B.V. Shabat,*Introduction to Complex Analysis (Parte II), Function of Several Variables* , AMS,1992.

[9] M.G. Soares, *Índices de Campos Holomorfos y Aplicaciones, 23 Coloquio Brasilero de Matematica*,IMPA,Rio de Janerio, 2001

[10] M.G. Soares, *Lectures on Point Residues, Monografías del IMCA*, IMCA, Lima,2002.