Resolución de singularidades y Equisingularidades

Carlos Alonso Aznarán Laos

Universidad Nacional de Ingeniería

March 9, 2017

Indicaciones

Teoremas importantes

Teorema de los ceros de Hilbert-Rückert

Sea $\mathbb{K}$ un campo algebraicamente cerrado e $\mathcal{I} \subset k[x]$ un ideal. Entonces $I(V(I)) = \sqrt{I}$.

Teorema de funciones implícitas

Si $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(U)$, U abierto de $\mathbb{C}^n$, y en un punto $\mathbf{z}_0 = (z_{01}, z_{02}, \ldots, z_{0n}) \in U$ con $f_i(\mathbf{0})$ se tiene

$$rg\left(\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_k)}{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_k)}(\mathbf{z}_0)\right) = k$$

entonces existe una única función holomorfa $g = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ definida en un entorno de $(z_{0,k+1}, \ldots, z_{0,n})$ en $\mathbb{C}^{n-k}$, verificando $g_i(z_{0,k+1}, \ldots, z_{0,n}) = z_{0,i}$, y tal que

$$f_i(g_1, g_2, \ldots, g_k, z_{k+1}, \ldots, z_n) = 0$$

Definiciones

Radical de un ideal

Sea $\mathcal{R}$ un anillo conmutativo y sea $\mathcal{I}$ un ideal de un anillo. El conjunto $\sqrt{\mathcal{I}} = rad\mathcal{I} := \{r \in \mathcal{R} | \exists n \in \mathbb{N}, r^n \in \mathcal{I}\}$

Germen de conjunto analítica en $(\mathbb{C}^n, 0)$

Es el conjunto de ceros de un ideal $a \subseteq \mathcal{O}_n$

Gérmen analítico reducible

Un germen de conjunto analítico $\mathcal{V}$ se llamada reducible si existen gérmenes $V_i \neq V$, $i = 1, 2$, con $V = V_1 \cup V_2$.

Codimensión

Si W es un subespacio vectorial finito de V, entonces la codimensión de W en V es la diferencia entre las dimensiones, es decir: codim(W)=dim(V)-dim(W).

Separatriz

Llamaremos separatriz de $\mathcal{F}$ a una hipersuperficie analítica $V \subseteq (\mathbb{C}^n, 0)$, tal que $V \setminus Sing\mathcal{F}$ es una hoja de foliación.

Definiciones

Hoja de foliación

Propiedades

Es conexa por caminos

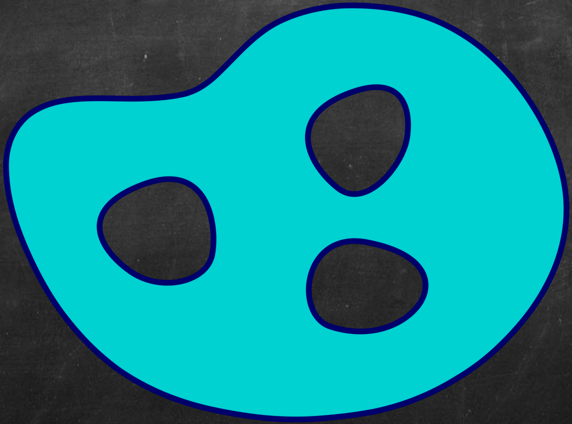

Figure: Conexa por caminos

Definiciones

Variedad compleja

Es una variedad topológica que tiene la estructura que nos permite definir la noción de función holomorfa $f : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$.

Atlas foliado

Un atlas foliado de codimensión uno sobre $\mathcal{M}$ (variedad compleja) es un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I} : U_i \to D_i$, disco en $\mathbb{C}^n$, tal que si $U_i \bigcap U_j \neq \emptyset$, la aplicación $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ {\varphi_j}^{-1}$ es de la forma $\varphi_{ij}(z', z_n) = ({\varphi_{ij}}^1(z', z_n), {\varphi_{ij}}^2(z_n)) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$, con $z' = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$. Se llaman cartas distinguidas.

Clasificación de singularidades

Pre-simple: Si al menos un autovalor es no nulo (esto, es, la parte lineal es no nilpotente).

Simple: Si es pre-simple, y si $\lambda_1 \neq 0$, entonces $\lambda_2 / \lambda_1 \notin \mathbb{Q}_{>0}$

Definiciones

Gérmen de foliación
Dada una 1-forma diferencial

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(z) dz_i,$$

denotaremos $\mathcal{F}_\omega$ el gérmen de foliación singular definido por ω', donde $\omega = h \cdot \omega'$. $h = mcd(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Pull-back
Si $f : N \to M$ es un morfismo diferenciable entre variedades analíticas, y ω define una foliación $\mathcal{F}_\omega$ sobre M, denotaremos $f^*\mathcal{F}_\omega$ la foliación sobre N definida por $f^*\omega$. Esta foliación es la contraimagen o pull-back de la foliación $\mathcal{F}_\omega$.

Definiciones

Variedad Analítica

Un ejemplo de variedad analítica es el espacio afín $\mathbb{R}^n$ y el espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$ (pregunta: el plano proyectivo complejo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}$ será una variedad analítica, pero todas las variedades complejas son variedades analíticas).

Explosión

Es la aplicación π que tiene una representación local

$$\pi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$$

en coordenadas (x, t)

$$\pi(x.t) = (x, xt)$$

y una explosión centrada en $0 \in \mathbb{C}^2$ consiste en reemplazar el origen por un espacio proyectivo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ que deje a los otros puntos invariantes en un sentido biholomorfo.

Definiciones

Función biholomorfa

Es aquella función ϕ definida sobre un subconjunto abierto U del espacio complejo n-dimensional $\mathbb{C}^n$ hacia sí mismo. Es holomórfica e inyectiva, ta

Divisor excepcional

El conjunto $\pi^{-1}(\mathbf{0}) \subseteq \tilde{M}$ se denominará divisor excepcional: es una subvariedad de $\tilde{M}$ isomorfa a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$.

Transformado total de V

Si V es una variedad analítica que pasa por el origen, $\pi^{-1}(V)$, se denominará el transformado total de V.

Definiciones

Transformado estricto de V

Y si $V' : \overline{\pi^{-1}(V \setminus \{0\})}$, entonces V es el transformado estricto de V.

Difeomorfismo

Dadas dos variedades $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, una aplicación diferenciable $\mathrm{f}: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es un difeomorfismo si es una aplicación biyectiva y su inversa $\mathrm{f}^{-1}: \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ también es diferenciable.

Nota: Si estas funciones son r veces diferenciables con continuidad, entonces f es un C^{r} – difeomorfismo o difeomorfismo de clase C^{r}.

Ejemplo

Definição

Difeomorfismo

Seja $f\colon U \to \mathbb{C}$ uma aplicação diferenciável, onde $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto. Dizemos que f é um difeomorfismo sobre $f(U)$, se $f(U)$ for aberto e se $f\colon U \to f(U)$ for um homeomorfismo cuja inversa $f^{-1}\colon f(U) \to U$ é diferenciável. No caso em que fef^{-1} são holomorfas, dizemos que f é un difeomorfismo holomorfo o u um bi-hilomorfismo. Se f e f^{-1} forem conformes, diremos que f é uma equivalência conforme entre U e $f(U)$.

Definição

Séries de Potências

Funções definidas por séries de potências

Uma série de potências é uma seqüencia de funções $(S_n)_{n\geq 0}$, definida inductivamente por $S_0(z) = a_0 \in \mathbb{C}$ e para $n \geq 1$ por $S_n(z) = S_{n-1}(z) + a_n z^n$, onde $a_n \in \mathbb{C}$. O número a_0 é chamado de termo constante e a_n de coeficiente de ordem n da série. Decorre imediatamente da definição que

$$S_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j,$$

logo, S_n é em particular um polinômio. Este polinômio é chamado de reduzida de ordem n da série. Vamos usar também a notação $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ para designar a série $(S_n)_{n\geq 0}$.

Formas diferenciais

Definição e exemplos

Uma forma diferencial complexa de grau 1 ou 1-forma diferencial é uma aplicação ω definida num aberto $U \subset \mathbb{C}$, que a cada ponto $z \in U$ associa uma função $\mathbb{R}$ -linear $\omega(z) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$. O contra domínio de ω é por tanto o conjunto de todas as aplicação $\mathbb{R}$ -lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{C}$, o qual denotaremos por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. O conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ tem uma estutura natural de espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, com as operaçõ es de soma de aplicaçõ es lineares e producto de uma aplicação linear por um escalar.

Soma- Dados $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, a sua soma $T_1 + T_2$ é definida por

$$(T_1 + T_2)(p) = T_1(p) + T_2(p), p \in \mathbb{R}^2$$

Produto por escalar- Dados $\lambda \in \mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, o produto λT é definido por

$$(\lambda T)(p) = \lambda \cdot \mathbf{T}(p), p \in \mathbb{R}^2$$

Derivada complexa

Funções holomorfas

Seja $f\colon U \to \mathbb{C}$ uma função contínua, onde U é um aberto de $\mathbb{C}$. Dizemos que f é holomorfa em $z_0 \in U$, se existe o limite

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \tag{0.1}$$

O número complexo $f'(z_0)$ é chamado de derivada de f em z_0. Se f for holomorfa em todos os pontos de um subconjunto X de U, diremos que f é holomorfa em X.

Homotopia e Integração

Homotopia da caminhos

Uma homotopia de caminhos em U, é uma aplicação contínua $F : [a, b] \times [0, 1] \to U$. Dizemos que a homotopia é com extremos fixos se para todo $s \in [0, 1]$, temos $F(a, s) = F(a, 0) e F(b, s) = F(b, 0)$. Usaremos a notação F_s para denotar o caminho $F_s(t) = F(t, s)$.

Índice de Camacho - Sad

Teorema de Camacho - Sad
El Teorema de Camacho - Sad garantiza que toda foliació n holomorfa en una superficie admite separatriz. Liliana Puchuri Medina.
¿Qué entedemos por índice de um caminho fechado?
Este número pode ser interpretado geometricamente como "o número de voltas efetivas que o vetor $\alpha(t)$ dá em torno da origem, quanto t varia entre 0 e 1".

Projeção estereográfica

Veremos que S^2 es homeomorfa a $\overline{\mathbb{C}}$

Importante