Resolución de singularidades y Equisingularidades

Carlos Alonso Aznarán Laos

Universidad Nacional de Ingeniería

March 8, 2017

Indicaciones

Teoremas importantes

Teorema de los ceros de Hilbert-Rü ckert

Sea $\mathbb{K}$ un campo algebraicamente cerrado e $\mathcal{I} \subset k[x]$ un ideal. Entonces $I(V(I)) = \sqrt{I}$.

Teorema de funciones implícitas

Si $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(U)$, U abierto de $\mathbb{C}^n$, y en un punto $\mathbf{z}_0 = (z_{01}, z_{02}, \ldots, z_{0n}) \in U$ con $f_i(\mathbf{0})$ se tiene

$$rg\left(\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_k)}{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_k)}(\mathbf{z}_0)\right) = k$$

entonces existe una única funció n holomorfa $g = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ definida en un entorno de $(z_{0,k+1}, \ldots, z_{0,n})$ en $\mathbb{C}^{n-k}$, verificando $g_i(z_{0,k+1}, \ldots, z_{0,n}) = z_{0,i}$.

$\boxed{G}$

Definiciones

Radical de un ideal

Sea $\mathcal{R}$ un anillo conmutativo y sea $\mathcal{I}$ un ideal de un anillo. El conjunto $\sqrt{\mathcal{I}} = rad\mathcal{I} := \{r \in \mathcal{R} | \exists n \in \mathbb{N}, r^n \in \mathcal{I}\}$

Germen de conjunto analítica en $(\mathbb{C}^n, 0)$

Es el conjunto de ceros de un ideal $a \subseteq \mathcal{O}_n$

Gérmen analítico reducible

Un germen de conjunto analítico $\mathcal{V}$ se llamada reducible si existen gérmenes $V_i \neq V$, $i = 1, 2$, con $V = V_1 \cup V_2$.

Codimensió n

Si W es un subespacio vectorial finito de V, entonces la codimensió n de W en V es la diferencia entre las dimensiones, es decir: codim(W)=dim(V)-dim(W).

Separatriz

Llamaremos separatriz de $\mathcal{F}$ a una hipersuperficie analítica $V \subseteq (\mathbb{C}^n, 0)$, tal que $V \setminus Sing\mathcal{F}$ es una hoja de foliació n.

Definiciones

Hoja de foliación

Propiedades

Es conexa por caminos

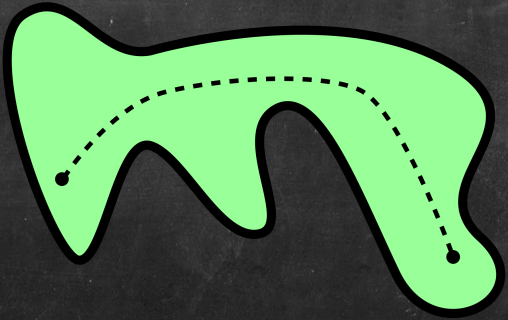

Figure: La imagen no es conexa por caminos

Definiciones

Variedad compleja

Es una variedad topológica que tiene la estructura que nos permite definir la noción de función holomorfa $f : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$.

Atlas foliado

Un atlas foliado de codimensión uno sobre $\mathcal{M}$ (variedad compleja) es un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I} : U_i \to D_i$, disco en $\mathbb{C}^n$, tal que si $U_i \bigcap U_j \neq \emptyset$, la aplicación $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ {\varphi_j}^{-1}$ es de la forma $\varphi_{ij}(z', z_n) = ({\varphi_{ij}}^1(z', z_n), {\varphi_{ij}}^2(z_n)) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$, con $z' = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$. Se llaman cartas distinguidas.

Clasificación de singularidades

Pre-simple: Si al menos un autovalor es no nulo (esto, es, la parte lineal es no nilpotente).

Simple: Si es pre-simple, y si $\lambda_1 \neq 0$, entonces $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{Q}_{>0}$

Definiciones

Gérmen de foliación
Dada una 1-forma diferencial

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(z)dz_i,$$

denotaremos $\mathcal{F}_\omega$ el gérmen de foliación singular definido por ω', donde $\omega = h \cdot \omega'$. $h = mcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$.
Pull-back
Si $f : N \to M$ es un morfismo diferenciable entre variedades analíticas, y ω define una foliación $\mathcal{F}_\omega$ sobre M, denotaremos $f^*\mathcal{F}_\omega$ la foliación sobre N definida por $f^*\omega$. Esta foliación es la contraimagen o pull-back de la foliación $\mathcal{F}_\omega$.

Definiciones

Variedad Analítica

Un ejemplo de variedad analítica es el espacio afín $\mathbb{R}^n$ y el espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$ (pregunta: el plano proyectivo complejo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}$ será una variedad analítica, pero todas las variedades complejas son variedades analíticas).

Explosión

Es la aplicación π que tiene una representación local

$$\pi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$$

en coordenadas (x, t)

$$\pi(x.t) = (x, xt)$$

y una explosión centrada en $0 \in \mathbb{C}^2$ consiste en reemplazar el origen por un espacio proyectivo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ que deje a los otros puntos invariantes en un sentido biholomorfo.

Definiciones

Función biholomorfa

Es aquella función ϕ definida sobre un subconjunto abierto U del espacio complejo n-dimensional $\mathbb{C}^n$ hacia sí mismo. Es holomórfica e inyectiva, ta

Divisor excepcional

Transformada total

Transformado estricto