

Resolución de singularidades y equisingularidades

Carlos Alonso Aznarán Laos

caznaranl@uni.pe

<https://www.blogdeoromion.pe.hu>

Universidad Nacional de Ingeniería

24 de julio de 2017

Indicaciones importantes

Teoremas importantes

Definiciones importantes

Indicaciones



Teoremas importantes

Teorema de los ceros de Hilbert-Rückert

Sea \mathbb{K} un campo algebraicamente cerrado e $\mathcal{I} \subset k[x]$ un ideal. Entonces $I(V(\mathcal{I})) = \sqrt{\mathcal{I}}$.

Teorema de funciones implícitas

Si $f_1, f_2, \dots, f_k \in \mathcal{O}(U)$, U abierto de \mathbb{C}^n , y en un punto $z_0 = (z_{01}, z_{02}, \dots, z_{0n}) \in U$ con $f_i(0)$ se tiene

$$\operatorname{rg}\left(\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_k)}{\partial(z_1, z_2, \dots, z_k)}(z_0)\right) = k$$

entonces existe una única función holomorfa $g = (g_1, g_2, \dots, g_k)$ definida en un entorno de $(z_{0,k+1}, \dots, z_{0,n})$ en \mathbb{C}^{n-k} , verificando $g_i(z_{0,k+1}, \dots, z_{0,n}) = z_{0,i}$, y tal que

$$f_i(g_1, g_2, \dots, g_k, z_{k+1}, \dots, z_n) = 0$$

Definiciones

Radical de un ideal

Sea \mathcal{R} un anillo conmutativo y sea \mathcal{I} un ideal de un anillo. El conjunto $\sqrt{\mathcal{I}} = \text{rad}\mathcal{I} := \{r \in \mathcal{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}, r^n \in \mathcal{I}\}$

Germen de conjunto analítica en $(\mathbb{C}^n, 0)$

Es el conjunto de ceros de un ideal $a \subseteq \mathcal{O}_n$

Gérmén analítico reducible

Un germen de conjunto analítico V se llamada reducible si existen gérmenes $V_i \neq V$, $i = 1, 2$, con $V = V_1 \cup V_2$.

Codimensión

Si W es un subespacio vectorial finito de V , entonces la codimensión de W en V es la diferencia entre las dimensiones, es decir: $\text{codim}(W) = \dim(V) - \dim(W)$.

Separatriz

Llamaremos separatriz de \mathcal{F} a una hipersuperficie analítica $V \subseteq (\mathbb{C}^n, 0)$, tal que $V \setminus \text{Sing}\mathcal{F}$ es una hoja de foliación.

Definiciones

Hoja de foliación

Propiedades

Es conexa por caminos

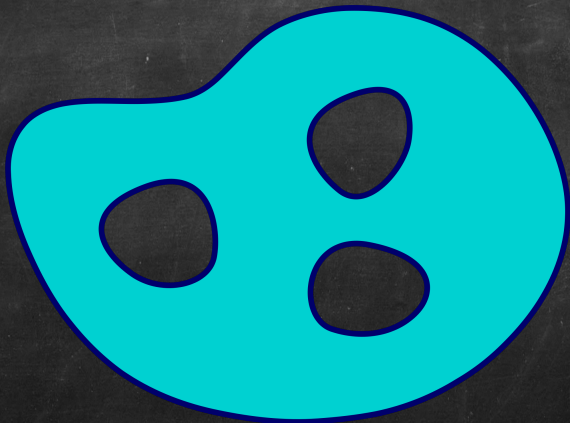


Figura: Conexa por caminos

Definiciones

Variedad compleja

Es una variedad topológica que tiene la estructura que nos permite definir la noción de función holomorfa

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Atlas foliado

Un atlas foliado de codimensión uno sobre \mathcal{M} (variedad compleja) es un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I} : U_i \rightarrow D_i$, disco en \mathbb{C}^n , tal que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, la aplicación $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ es de la forma $\varphi_{ij}(z', z_n) = (\varphi_{ij}^1(z', z_n), \varphi_{ij}^2(z_n)) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$, con $z' = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$. Se llaman cartas distinguidas.

Clasificación de singularidades

Pre-simple: Si al menos un autovalor es no nulo (esto, es, la parte lineal es no nilpotente).

Simple: Si es pre-simple, y si $\lambda_1 \neq 0$, entonces $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{Q}_{>0}$

Definiciones

Gérmén de foliación

Dada una 1-forma diferencial

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i(z) dz_i,$$

denotaremos \mathcal{F}_ω el gérmén de foliación singular definido por ω' , donde $\omega = h \cdot \omega'$. $h = \text{mcd}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Pull-Back

Si $f : N \rightarrow M$ es un morfismo diferenciable entre variedades analíticas, y ω define una foliación \mathcal{F}_ω sobre M , denotaremos $f^*\mathcal{F}_\omega$ la foliación sobre N definida por $f^*\omega$. Esta foliación es la contraimagen o pull-back de la foliación \mathcal{F}_ω .

Definiciones

Variedad Analítica

Un ejemplo de variedad analítica es el espacio afín \mathbb{R}^n y el espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$ (pregunta: el plano proyectivo complejo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}$ será una variedad analítica, pero todas las variedades complejas son variedades analíticas).

Explosión

Es la aplicación π que tiene una representación local

$$\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

en coordenadas (x, t)

$$\pi(x, t) = (x, xt)$$

y una explosión centrada en $0 \in \mathbb{C}^2$ consiste en reemplazar el origen por un espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ que deje a los otros puntos invariantes en un sentido biholomorfo.

Definiciones

Función biholomorfa

Es aquella función ϕ definida sobre un subconjunto abierto U del espacio complejo n -dimensional \mathbb{C}^n hacia sí mismo. Es holomorfa e inyectiva, ta

Divisor excepcional

El conjunto $\pi^{-1}(0) \subseteq \tilde{M}$ se denominará divisor excepcional: es una subvariedad de \tilde{M} isomorfa a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$.

Transformado total de V

Si V es una variedad analítica que pasa por el origen, $\pi^{-1}(V)$, se denominará el transformado total de V .

Definiciones

Transformado estricto de V

Y si $V': \pi^{-1}(V \setminus \{0\})$, entonces V' es el transformado estricto de V .

Difeomorfismo

Dadas dos variedades M y N , una aplicación diferenciable $f: M \rightarrow N$ es un difeomorfismo si es una aplicación biyectiva y su inversa $f^{-1}: N \rightarrow M$ también es diferenciable.

Nota: Si estas funciones son r veces diferenciables con continuidad, entonces f es un C^r - difeomorfismo o difeomorfismo de clase C^r .

Ejemplo

Definição

Difeomorfismo

Seja $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação diferenciável, onde $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto. Dizemos que f é um difeomorfismo sobre $f(U)$, se $f(U)$ for aberto e se $f: U \rightarrow f(U)$ for um homeomorfismo cuja inversa $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ é diferenciável. No caso em que f e f^{-1} são holomorfas, dizemos que f é um difeomorfismo holomorfo ou um bi-holomorfismo. Se f e f^{-1} forem conformes, diremos que f é uma equivalência conforme entre U e $f(U)$.

Definição

Séries de Potências

Funções definidas por séries de potências

Uma série de potências é uma sequência de funções $(S_n)_{n \geq 0}$, definida inductivamente por $S_0(z) = a_0 \in \mathbb{C}$ e para $n \geq 1$ por $S_n(z) = S_{n-1}(z) + a_n z^n$, onde $a_n \in \mathbb{C}$. O número a_0 é chamado de termo constante e a_n de coeficiente de ordem n da série. Decorre imediatamente da definição que

$$S_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = \sum_{j=0}^n a_j z^j,$$

logo, S_n é em particular um polinômio. Este polinômio é chamado de reduzida de ordem n da série. Vamos usar também a notação $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ para designar a série $(S_n)_{n \geq 0}$.

Formas diferenciais

Definição e exemplos

Uma forma diferencial complexa de grau 1 ou 1-forma diferencial é uma aplicação ω definida num aberto $U \subset \mathbb{C}$, que a cada ponto $z \in U$ associa uma função \mathbb{R} -linear $\omega(z): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$. O contra domínio de ω é por tanto o conjunto de todas as aplicação \mathbb{R} -lineares de \mathbb{R}^2 em \mathbb{C} , o qual denotaremos por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. O conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ tem uma estrutura natural de espaço vetorial sobre \mathbb{C} , com as operações de soma de aplicações lineares e producto de uma aplicação linear por um escalar.

Soma- Dados $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, a sua soma $T_1 + T_2$ é definida por

$$(T_1 + T_2)(p) = T_1(p) + T_2(p), p \in \mathbb{R}^2$$

Produto por escalar- Dados $\lambda \in \mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, o produto λT é definido por

$$(\lambda T)(p) = \lambda \cdot T(p), p \in \mathbb{R}^2$$

Derivada complexa

Funções holomorfas

Seja $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua, onde U é um aberto de \mathbb{C} . Dizemos que f é holomorfa em $z_0 \in U$, se existe o limite

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad (3.1)$$

O número complexo $f'(z_0)$ é chamado de derivada de f em z_0 . Se f for holomorfa em todos os pontos de um subconjunto X de U , diremos que f é holomorfa em X .

Homotopia e Integração

Homotopia de caminhos

Uma homotopia de caminhos em U , é uma aplicação contínua $F : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$. Dizemos que a homotopia é com extremos fixos se para todo $s \in [0, 1]$, temos $F(a, s) = F(a, 0)$ e $F(b, s) = F(b, 0)$. Usaremos a notação F_s para denotar o caminho $F_s(t) = F(t, s)$.



Índice de Camacho - Sad

Teorema de Camacho - Sad

El Teorema de Camacho - Sad garantiza que toda foliación holomorfa en una superficie admite separatriz. Liliana Puchuri Medina.

¿Qué entendemos por índice de um caminho fechado?

Este número pode ser interpretado geometricamente como .º número de voltas efetivas que o vetor $\alpha(t)$ dá em torno da origem, quanto t varia entre 0 e 1".

Projeção estereográfica

Veremos que S^2 es homeomorfa a $\overline{\mathbb{C}}$.

Importante