Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Disciplina: MTM5812 - H-Álgebra II
Professora: Melissa Weber Mendonça

2ª Lista de Exercícios

1 Espaços Vetoriais

1. Seja $V = \mathbb{R}^2$. Então defina as seguintes operações:

$$\begin{aligned} (x, y) + (x_1, y_1) &= (x + x_1, y + y_1) \\ c(x, y) &= (cx, y) \qquad (c \in \Re) \end{aligned}$$

   Verifique se V com estas operações é um espaço vetorial.

2. Em $\mathbb{R}^n$, defina duas operações

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \alpha - \beta \\ c\alpha &= -c\alpha \end{aligned}$$

   onde as operações à direita são as operações usuais em $\mathbb{R}$. Quais axiomas dos espaços vetoriais são satisfeitos para este conjunto com estas operações?

3. Seja $V = \mathbb{R}^2$ e considere

$$\begin{aligned} (x, y) + (x_1, y_1) &= (x + x_1, 0) \\ c(x, y) &= (cx, 0) \qquad (c \in \Re) \end{aligned}$$

   Verifique se V com estas operações é um espaço vetorial.

4. Quais dos seguintes conjuntos de vetores $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ são subespaços de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$?

   (a) $\{\alpha \in \mathbb{R}^n : \alpha_1 \geq 0\}$

(b) $\{\alpha \in \mathbb{R}^n : \alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_3\}$

(c) $\{\alpha \in \mathbb{R}^n : \alpha_2 = \alpha_1^2\}$

(d) $\{\alpha \in \mathbb{R}^n : \alpha_1\alpha_2 = 0\}$

5. Seja V o espaço de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços de V?

   (a) $\{f \in V : f(x^2) = f(x)^2\}$

   (b) $\{f \in V : f(0) = f(1)\}$

   (c) $\{f \in V : f(3) = 1 + f(-5)\}$

   (d) $\{f \in V : f(-1) = 0\}$

6. Seja $V = \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$. Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços de V?

   (a) $\{A \in V : A$ é inversível$\}$

   (b) $\{A \in V : A$ não é inversível$\}$

   (c) $\{A \in V : AB = BA$, onde B é uma matriz fixa em $V\}$

   (d) $\{A \in V : A^2 = A\}$

7. Seja V o espaço de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Seja V_p o subconjunto de todas as funções pares, e V_i o subconjunto de todas as funções ímpares.

   (a) Mostre que V_p e V_i são subespaços de V.

   (b) Mostre que $V_p + V_i = V$

   (c) Mostre que $V_p \cap V_i = \{0\}$.

8. Verifique se os vetores

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= (1,1,2,4)\\
\alpha_2 &= (2,-1,-5,2)\\
\alpha_3 &= (1,-1,-4,0)\\
\alpha_4 &= (2,1,1,6)
\end{aligned}
$$

   são linearmente independentes em $\mathbb{R}^4$. Em seguida, encontre uma base para o subespaço gerado por estes vetores.

9. Seja $V \subseteq \Re$ um espaço vetorial e suponha que $\alpha, \beta, \gamma \in V$ são l.i. Prove que $(\alpha+\beta)$, $(\beta+\gamma)$, $(\gamma+\alpha)$ são l.i.

10. Mostre que os vetores

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (1,1,0,0)\\ \alpha_2 &= (0,0,1,1)\\ \alpha_3 &= (1,0,0,4)\\ \alpha_4 &= (0,0,0,2)\end{aligned}$$

formam uma base para $\mathbb{R}^4$. Encontre as coordenadas de cada um dos vetores da base canônica nesta nova base ordenada $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$.

11. Seja W o subespaço de $\mathscr{M}(3,2)$ gerado por

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

O vetor $\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 0\end{bmatrix}$ pertence a W?

12. Seja $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\begin{aligned}x_1 y_1 + x_2 y_2 = &\quad 0\\ x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = &\quad 1.\end{aligned}$$

Mostre que $\mathscr{B} = \{x, y\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$. Encontre as coordenadas de um vetor (a, b) nesta nova base ordenada. O que querem dizer geometricamente estas condições impostas a x e y?

13. Seja $\mathscr{P}_2$ o conjunto de todos os polinômios reais a coeficientes reais de grau menor ou igual a 2. Seja $t \in \mathbb{R}$ um número real fixo e defina

$$\begin{aligned}q_1(x) &= 1\\ q_2(x) &= x + t\\ q_3(x) &= (x+t)^2\end{aligned}$$

Prove que $\mathscr{B} = \{q_1, q_2, q_3\}$ é uma base para $\mathscr{P}_2$. Se

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

quais são as coordenadas de f na base $\mathscr{B}$?

14. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 & = a \\ x_1 - x_2 + 4x_3 & = b \\ 6x_2 - 14x_3 & = c \end{cases}$$

Seja

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \text{ é solução do sistema.}\}.$$

Isto é, W é o conjunto solução do sistema.

a) Que condições devemos impor a a, b e c para que W seja subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$?

b) Nas condições determinadas em a), encontre uma base para W.

c) Que relação existe entre a dimensão de W e o grau de liberdade do sistema? Seria este resultado válido para quaisquer sistemas homogêneos?

15. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $(1,0,0)$, e W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $(1,1,0)$ e $(0,1,1)$. Mostre que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

16. Sejam

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$$
$$W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z + t = 0\}$$

subespaços de $\mathbb{R}^4$.

a) Determine $W_1 \cap W_2$.

b) Exiba uma base para $W_1 \cap W_2$.

c) Determine $W_1 + W_2$.

d) $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique.

e) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$?

17. Sejam

$$\beta = \{(1,0),(0,1)\}$$
$$\gamma = \{(-1,1),(1,1)\}$$
$$\rho = \{(\sqrt{3},1),(\sqrt{3},-1)\}$$
$$\nu = \{(2,0),(0,2)\}$$

bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

a) Ache as matrizes de mudança de base $[I]^{\gamma}_{\beta}$, $[I]^{\beta}_{\gamma}$, $[I]^{\beta}_{\rho}$, $[I]^{\beta}_{\nu}$.

b) Quais são as coordenadas do vetor $v = (3,-2)$ em relação às quatro bases?

c) As coordenadas de um vetor v em relação à base γ são dadas por

$$[v]_{\gamma} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quais são as coordenadas de v em relação às outras bases?

18. Sejam $\beta_1 = \{(1,0),(0,2)\}$, $\beta_2 = \{(-1,0),(1,1)\}$ e $\beta_3 = \{(-1,-1),(0,-1)\}$ três bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

a) Ache $[I]^{\beta_2}_{\beta_1}$, $[I]^{\beta_3}_{\beta_2}$, $[I]^{\beta_3}_{\beta_1}$ e $[I]^{\beta_2}_{\beta_1} \cdot [I]^{\beta_3}_{\beta_2}$.

b) Se for possível, ache uma relação entre estas matrizes de mudança de base.