# Aula 5: Mudança de Bases

Melissa Weber Mendonça

# Coordenadas

Para determinarmos as coordenadas de um vetor (isto é, os coeficientes da combinação linear dos elementos da base que o definem) precisamos fazer isso numa certa ordem.

Exemplo:

$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$.

Mas se $\overline{e_1} = (0,1)$ e $\overline{e_2} = (1,0)$, então as coordenadas mudam para

$$(2,3) = 3\overline{e_1} + 2\overline{e_2} = (3,2)_{\text{(nova base)}}$$

# Base

**Definição**

Se $E$ é um espaço vetorial de dimensão finita, uma base ordenada de $E$ é uma *sequência* finita de vetores que é l.i. e que gera $E$.

# Base

## Definição

Se $E$ é um espaço vetorial de dimensão finita, uma base ordenada de $E$ é uma *sequência* finita de vetores que é l.i. e que gera $E$.

Desta forma, dada uma base ordenada $\mathscr{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ de $V$, então dado $v \in V$, existe uma única $n$-tupla de escalares $x_i$ tais que

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i.$$

# A base não é única

Frequentemente, ao invés de trabalharmos com as coordenadas de um vetor, vamos precisar trabalhar com a matriz de $v$ relativa à base ordenada $\mathscr{B}$:

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

Isto é útil pois vamos tentar descrever o que acontece quando mudamos de base.

# Mudança de base

**Teorema**

Seja $E$ um espaço vetorial de dimensão $n$ e sejam $\mathscr{B} = \{\alpha_j\}_{j=1,2,\ldots,n}$ e $\mathscr{B}' = \{\alpha_j'\}_{j=1,2,\ldots,n}$ duas bases ordenadas de $E$. Então existe uma matriz única $P$, inversível e $n \times n$, com entradas tais que

$$[v]_{\mathscr{B}} = P[v]_{\mathscr{B}'} \quad \text{e} \quad [v]_{\mathscr{B}'} = P^{-1}[v]_{\mathscr{B}},$$

para todo $v \in E$. As colunas de $P$ são dadas por

$$P_j = [\alpha_j']_{\mathscr{B}}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

# Demonstração

Considere as bases

$$\mathscr{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \text{ e } \mathscr{B}' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$$

Então, existe um conjunto único de escalares $P_{ij}$ tais que

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i, 1 \leq j \leq n.$$

# Demonstração

Considere as bases

$$\mathscr{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \text{ e } \mathscr{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$$

Então, existe um conjunto único de escalares $P_{ij}$ tais que

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i,\ 1 \leq j \leq n.$$

Sejam agora $x_1, \dots, x_n$ as coordenadas de um vetor $v$ na base ordenada $\mathscr{B}$ e $x'_1, \dots, x'_n$ as coordenadas do mesmo vetor $v$ na base ordenada $\mathscr{B}'$. Então,

$$\begin{aligned} v = x'_1\alpha'_1 + \dots + x'_n\alpha'_n &= \sum_{j=1}^{n} x'_j\alpha'_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (P_{ij}x'_j)\alpha_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} P_{ij}x'_j \right) \alpha_i \end{aligned}$$

# Demonstração

(continuação) Como as coordenadas são unicamente determinadas para cada base, isso implica que

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} x'_j, \; 1 \leq i \leq n$$

Seja então $P$ a matriz formada pelos $P_{ij}$ e $X$ e $X'$ as matrizes coordenadas do vetor $v$ nas bases $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$, respectivamente. Então,

$$X = PX'.$$

Como as duas bases são linearmente independentes, $X = 0$ se e somente se $X' = 0$. Logo, segue de um teorema anterior que $P$ é inversível; ou seja

$$X' = P^{-1}X.$$

Em outras palavras,

$$[v]_{\mathscr{B}} = P[v]_{\mathscr{B}'} \text{ e } [v]_{\mathscr{B}'} = P^{-1}[v]_{\mathscr{B}}$$

## Mudança de base

Isto quer dizer que para construirmos $P$ que leva um vetor descrito na base $\mathscr{B}'$ em sua descrição na base $\mathscr{B}$, devemos escrever cada vetor da base $\mathscr{B}'$ em suas coordenadas na base $\mathscr{B}$. Podemos denotar também

$$P = I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.$$

## Teorema

Seja $P$ uma matriz $n \times n$ inversível, e seja $V$ um espaço $n$-dimensional definido no mesmo corpo; além disso, seja $\mathscr{B}$ uma base ordenada de $V$. Então existe uma única base ordenada $\mathscr{B}'$ de $V$ tal que $P$ é a matriz de mudança de base de $\mathscr{B}'$ para $\mathscr{B}$, ou seja,

$$[v]_{\mathscr{B}} = P[v]_{\mathscr{B}'} \text{ e } [v]_{\mathscr{B}'} = P^{-1}[v]_{\mathscr{B}}$$

para qualquer vetor $v \in V$.

Demonstração. Seja $\mathscr{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Se $\mathscr{B}' = \{\alpha_1', \ldots, \alpha_n'\}$ for uma base ordenada de $V$ para a qual a primeira igualdade é válida, então devemos ter

$$\alpha_j' = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i.$$

Logo, precisamos somente mostrar que estes vetores $\alpha_j'$ formam uma base de $V$.

## Teorema

Seja $P$ uma matriz $n \times n$ inversível, e seja $V$ um espaço $n$-dimensional definido no mesmo corpo; além disso, seja $\mathscr{B}$ uma base ordenada de $V$. Então existe uma única base ordenada $\mathscr{B}'$ de $V$ tal que $P$ é a matriz de mudança de base de $\mathscr{B}'$ para $\mathscr{B}$, ou seja,

$$[v]_{\mathscr{B}} = P[v]_{\mathscr{B}'} \text{ e } [v]_{\mathscr{B}'} = P^{-1}[v]_{\mathscr{B}}$$

para qualquer vetor $v \in V$.

**Demonstração.**

Mas:

$$\sum_j P_{jk}^{-1}\alpha_j' = \sum_j P_{jk}^{-1}\sum_i P_{ij}\alpha_i = \sum_j\sum_i P_{ij}P_{jk}^{-1}\alpha_i = \alpha_k$$

Logo, o subespaço gerado por $\mathscr{B}'$ contém $\mathscr{B}$ e é portanto igual a $V$.

Logo, $\mathscr{B}'$ é base; assim, as duas afirmações são verdadeiras.

## Exemplo

Seja $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\mathscr{B}' = \{(1,1),(1,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$.
Então

$$
\begin{aligned}
(1,0) &= \\
(0,1) &=
\end{aligned}
$$

## Exemplo

Seja $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\mathscr{B}' = \{(1,1),(1,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$.
Então

$$
\begin{aligned}
(1,0) &= 0(1,1) + 1(1,0) \\
(0,1) &= 1(1,1) - 1(1,0)
\end{aligned}
$$

# Exemplo

Seja $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\mathscr{B}' = \{(1,1),(1,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Então

$$(1,0) = 0(1,1) + 1(1,0)$$
$$(0,1) = 1(1,1) - 1(1,0)$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

## Exemplo

Seja $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\mathscr{B}' = \{(1,1),(1,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Então

$$(1,0) = 0(1,1) + 1(1,0)$$
$$(0,1) = 1(1,1) - 1(1,0)$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

# Exemplo

Seja $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\mathscr{B}' = \{(1,1),(1,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$.
Então

$$
\begin{aligned}
(1,0) &= 0(1,1) + 1(1,0)\\
(0,1) &= 1(1,1) - 1(1,0)
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}.$$

# Exemplo

Considere $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathscr{B}' = \{(2,3),(-1,2)\}$. Para construirmos $I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, escrevemos cada vetor da base $\mathscr{B}'$ na base $\mathscr{B}$:

$$(2,3) =$$

$$(-1,2) =$$

# Exemplo

Considere $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathscr{B}' = \{(2,3),(-1,2)\}$. Para construirmos $I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, escrevemos cada vetor da base $\mathscr{B}'$ na base $\mathscr{B}$:

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$

$$(-1,2) = -1(1,0) + 2(0,1)$$

## Exemplo

Considere $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathscr{B}' = \{(2,3),(-1,2)\}$. Para construirmos $I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, escrevemos cada vetor da base $\mathscr{B}'$ na base $\mathscr{B}$:

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$

$$(-1,2) = -1(1,0) + 2(0,1)$$

Logo,

$$I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} =$$

## Exemplo

Considere $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathscr{B}' = \{(2,3),(-1,2)\}$. Para construirmos $I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, escrevemos cada vetor da base $\mathscr{B}'$ na base $\mathscr{B}$:

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$

$$(-1,2) = -1(1,0) + 2(0,1)$$

Logo,

$$I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

# Exemplo

Considere $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathscr{B}' = \{(2,3),(-1,2)\}$. Para construirmos $I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, escrevemos cada vetor da base $\mathscr{B}'$ na base $\mathscr{B}$:

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$

$$(-1,2) = -1(1,0) + 2(0,1)$$

Logo,

$$I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Note que, se $v = (1,1)_{\mathscr{B}'}$, então em $\mathscr{B}'$ teremos

# Exemplo

Considere $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathscr{B}' = \{(2,3),(-1,2)\}$. Para construirmos $I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, escrevemos cada vetor da base $\mathscr{B}'$ na base $\mathscr{B}$:

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$

$$(-1,2) = -1(1,0) + 2(0,1)$$

Logo,

$$I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Note que, se $v = (1,1)_{\mathscr{B}'}$, então em $\mathscr{B}'$ teremos

$$v = 1(2,3) + 1(-1,2) = (1,5)_{\mathscr{B}}.$$

# Exemplo

Considere $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathscr{B}' = \{(2,3),(-1,2)\}$. Para construirmos $I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, escrevemos cada vetor da base $\mathscr{B}'$ na base $\mathscr{B}$:

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$

$$(-1,2) = -1(1,0) + 2(0,1)$$

Logo,

$$I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Note que, se $v = (1,1)_{\mathscr{B}'}$, então em $\mathscr{B}'$ teremos

$$v = 1(2,3) + 1(-1,2) = (1,5)_{\mathscr{B}}.$$

De fato:

$$I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} v_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

## Exemplo: continuação

Por outro lado,

$$(1,0) = \frac{2}{7}(2,3) - \frac{3}{7}(-1,2)$$

$$(0,1) = \frac{1}{7}(2,3) + \frac{2}{7}(-1,2)$$

Assim,

$$I_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

De fato,

$$I_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} v_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}.$$

Ainda:

$$I_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = I.$$

## Exemplo

Se $\mathscr{B} = \{(1,2),(3,5)\}$ e $\mathscr{B}' = \{(1,-1),(1,-2)\}$, para encontrarmos $I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ devemos escrever os elementos de $\mathscr{B}'$ na base $\mathscr{B}$. Mas isso pode ser difícil. Considere então a base canônica em $\mathbb{R}^2$. Então:

$$I_C^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Além disso,

$$(1,0) = -5(1,2) + 2(3,5)$$
$$(0,1) = 3(1,2) - 1(3,5)$$

e assim

$$I_{\mathscr{B}}^C = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

# Exemplo: continuação

Então:

$$I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = I_{\mathscr{B}}^{C} I_{C}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -11 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Note que

$$I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} v_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -8 & -11 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -19 \\ 7 \end{pmatrix}$$

De fato,

$$(1,1)_{\mathscr{B}'} = (1,-1) + (1,-2) = (2,3)_C$$
$$(-19,7)_{\mathscr{B}} = -19(1,2) + 7(3,5) = (2,-3)_C.$$

## Exemplo

Em $\mathbb{R}^3$, se consideramos as bases

$$E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$
$$S = \{(1,0,1),(2,1,2),(1,2,2)\}$$

temos que

$$I_E^S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad I_S^E = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, se $v = (1,1,1)_E$, temos

$$I_S^E v_E = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S .$$

# Exemplo

Seja $\theta \in \mathbb{R}$; a matriz

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

é inversível com inversa

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Logo, para cada $\theta$, o conjunto $\mathscr{B}'$ formado pelos vetores $(\cos\theta, \sin\theta)$, $(-\sin\theta, \cos\theta)$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Intuitivamente esta base é obtida ao rotacionarmos a base canônica num ângulo $\theta$. Se $\alpha = (x_1, x_2)$, então

$$[\alpha]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ou ainda

$$x_1' = x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta$$
$$x_2' = -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta$$