



Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Disciplina: MTM5812 - H-Álgebra II
Professora: Melissa Weber Mendonça

1ª Lista de Exercícios

1 Matrizes

1. Considere cada um dos pares de sistemas lineares abaixo. Eles são equivalentes? Em caso positivo, escreva (em cada item) cada uma das equações de um sistema como combinação linear das equações do outro sistema.

(a)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0 \\ \frac{x_1}{2} + x_2 + \frac{5}{2}x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

2. Se

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Encontre todas as soluções do sistema $Ax = 0$ através do escalonamento de A .
(b) Para quais vetores $y = (y_1, y_2, y_3)$ o sistema $Ax = y$ tem solução?

3. Se

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

encontre todas as soluções dos sistemas $Ax = 2x$ e $Ax = 3x$.

4. Considere o sistema $Ax = 0$, em que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Mostre que

- (a) Se todos os elementos de A são nulos, então qualquer par (x_1, x_2) é solução do sistema $Ax = 0$.
 - (b) Se $ad - bc \neq 0$, o sistema $Ax = 0$ só tem solução trivial $(0, 0)$.
 - (c) Se $ad - bc = 0$ e um elemento de A for não-nulo, então existe uma solução (x_1, x_2) tal que todas as outras soluções são múltiplos desta.
5. Dê um exemplo de um sistema com duas equações e duas incógnitas que não tenha solução.
6. Mostre que o sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

não tem soluções.

7. Encontre duas matrizes em $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ diferentes, tais que $A^2 = 0$ mas $A \neq 0$.

8. Seja

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Sob quais condições é possível encontrar matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tais que

$$C = AB - BA.$$

Prove que estas matrizes podem ser encontradas se e somente se

$$C_{11} + C_{22} = 0.$$

9. Suponha que $A \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ e que $B \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$. Prove que $C = AB$ não é inversível.

10. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Prove as afirmações seguintes:

- (a) Se A é inversível e $AB = 0$ para alguma $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, então $B = 0$.
- (b) Se A não é inversível, então existe $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $AB = 0$ mas $B \neq 0$.