



Aula 5: Mudança de Bases

Melissa Weber Mendonça

Coordenadas

Para determinarmos as coordenadas de um vetor (isto é, os coeficientes da combinação linear dos elementos da base que o definem) precisamos fazer isso numa certa ordem.

Exemplo:

$$(2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1).$$

Mas se $\overline{e}_1 = (0, 1)$ e $\overline{e}_2 = (1, 0)$, então as coordenadas mudam para

$$(2, 3) = 3\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 = (3, 2)_{(\text{nova base})}$$

Base

Definição

Se E é um espaço vetorial de dimensão finita, uma base ordenada de E é uma *sequência* finita de vetores que é l.i. e que gera E .

Base

Definição

Se E é um espaço vetorial de dimensão finita, uma base ordenada de E é uma *sequência* finita de vetores que é l.i. e que gera E .

Desta forma, dada uma base ordenada $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ de V , então dado $v \in V$, existe uma única n -tupla de escalares x_i tais que

$$v = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i.$$

A base não é única

Frequentemente, ao invés de trabalharmos com as coordenadas de um vetor, vamos precisar trabalhar com a matriz de v relativa à base ordenada \mathcal{B} :

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Isto é útil pois vamos tentar descrever o que acontece quando mudamos de base.

Mudança de base

Teorema

Seja E um espaço vetorial de dimensão n e sejam $\mathcal{B} = \{\alpha_j\}_{j=1,2,\dots,n}$ e $\mathcal{B}' = \{\alpha'_j\}_{j=1,2,\dots,n}$ duas bases ordenadas de E . Então existe uma matriz única P , inversível e $n \times n$, com entradas tais que

$$[v]_{\mathcal{B}} = P[v]_{\mathcal{B}'} \quad \text{e} \quad [v]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[v]_{\mathcal{B}},$$

para todo $v \in E$. As colunas de P são dadas por

$$P_j = [\alpha'_j]_{\mathcal{B}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Demonstração

Considere as bases

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \text{ e } \mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$$

Então, existe um conjunto único de escalares P_{ij} tais que

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i, 1 \leq j \leq n.$$

Demonstração

Considere as bases

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \text{ e } \mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$$

Então, existe um conjunto único de escalares P_{ij} tais que

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i, 1 \leq j \leq n.$$

Sejam agora x_1, \dots, x_n as coordenadas de um vetor v na base ordenada \mathcal{B} e x'_1, \dots, x'_n as coordenadas do mesmo vetor v na base ordenada \mathcal{B}' . Então,

$$\begin{aligned} v &= x'_1 \alpha'_1 + \dots + x'_n \alpha'_n = \sum_{j=1}^n x'_j \alpha'_j \\ &= \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (P_{ij} x'_j) \alpha_i \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n P_{ij} x'_j \right) \alpha_i \end{aligned}$$

Demonstração

(continuação) Como as coordenadas são unicamente determinadas para cada base, isso implica que

$$x_i = \sum_{j=1}^n P_{ij} x'_j, 1 \leq i \leq n$$

Seja então P a matriz formada pelos P_{ij} e X e X' as matrizes coordenadas do vetor v nas bases \mathcal{B} e \mathcal{B}' , respectivamente. Então,

$$X = PX'.$$

Como as duas bases são linearmente independentes, $X = 0$ se e somente se $X' = 0$. Logo, segue de um teorema anterior que P é inversível; ou seja

$$X' = P^{-1}X.$$

Em outras palavras,

$$[v]_{\mathcal{B}} = P[v]_{\mathcal{B}'} \text{ e } [v]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[v]_{\mathcal{B}}$$

Mudança de base

Isto quer dizer que para construirmos P que leva um vetor descrito na base \mathcal{B}' em sua descrição na base \mathcal{B} , devemos escrever cada vetor da base \mathcal{B}' em suas coordenadas na base \mathcal{B} . Podemos denotar também

$$P = I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Teorema

Seja P uma matriz $n \times n$ inversível, e seja V um espaço n -dimensional definido no mesmo corpo; além disso, seja \mathcal{B} uma base ordenada de V . Então existe uma única base ordenada \mathcal{B}' de V tal que P é a matriz de mudança de base de \mathcal{B}' para \mathcal{B} , ou seja,

$$[v]_{\mathcal{B}} = P[v]_{\mathcal{B}'} \text{ e } [v]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[v]_{\mathcal{B}}$$

para qualquer vetor $v \in V$.

Demonstração. Seja $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Se $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ for uma base ordenada de V para a qual a primeira igualdade é válida, então devemos ter

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i.$$

Logo, precisamos somente mostrar que estes vetores α'_j formam uma base de V .

Teorema

Seja P uma matriz $n \times n$ inversível, e seja V um espaço n -dimensional definido no mesmo corpo; além disso, seja \mathcal{B} uma base ordenada de V . Então existe uma única base ordenada \mathcal{B}' de V tal que P é a matriz de mudança de base de \mathcal{B}' para \mathcal{B} , ou seja,

$$[v]_{\mathcal{B}} = P[v]_{\mathcal{B}'} \text{ e } [v]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[v]_{\mathcal{B}}$$

para qualquer vetor $v \in V$.

Demonstração.

Mas:

$$\sum_j P_{jk}^{-1} \alpha'_j = \sum_j P_{jk}^{-1} \sum_i P_{ij} \alpha_i = \sum_j \sum_i P_{ij} P_{jk}^{-1} \alpha_i = \alpha_k$$

Logo, o subespaço gerado por \mathcal{B}' contém \mathcal{B} e é portanto igual a V .

Logo, \mathcal{B}' é base; assim, as duas afirmações são verdadeiras.

Exemplo

Seja $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, 0)\}$ bases de \mathbb{R}^2 .

Então

$$(1, 0) =$$

$$(0, 1) =$$

Exemplo

Seja $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, 0)\}$ bases de \mathbb{R}^2 .
Então

$$(1, 0) = 0(1, 1) + 1(1, 0)$$

$$(0, 1) = 1(1, 1) - 1(1, 0)$$

Exemplo

Seja $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, 0)\}$ bases de \mathbb{R}^2 .
Então

$$(1, 0) = 0(1, 1) + 1(1, 0)$$

$$(0, 1) = 1(1, 1) - 1(1, 0)$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Exemplo

Seja $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, 0)\}$ bases de \mathbb{R}^2 .
Então

$$(1, 0) = 0(1, 1) + 1(1, 0)$$

$$(0, 1) = 1(1, 1) - 1(1, 0)$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Exemplo

Seja $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, 0)\}$ bases de \mathbb{R}^2 .

Então

$$(1, 0) = 0(1, 1) + 1(1, 0)$$

$$(0, 1) = 1(1, 1) - 1(1, 0)$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Exemplo

Considere $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(2, 3), (-1, 2)\}$. Para construirmos ${}_{\mathcal{B}}^{|\mathcal{B}'|}$, escrevemos cada vetor da base \mathcal{B}' na base \mathcal{B} :

$$(2, 3) =$$

$$(-1, 2) =$$

Exemplo

Considere $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(2, 3), (-1, 2)\}$. Para construirmos ${}_{\mathcal{B}}^{|\mathcal{B}'|}$, escrevemos cada vetor da base \mathcal{B}' na base \mathcal{B} :

$$(2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)$$

$$(-1, 2) = -1(1, 0) + 2(0, 1)$$

Exemplo

Considere $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(2, 3), (-1, 2)\}$. Para construirmos $I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, escrevemos cada vetor da base \mathcal{B}' na base \mathcal{B} :

$$(2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)$$

$$(-1, 2) = -1(1, 0) + 2(0, 1)$$

Logo,

$$I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} =$$

Exemplo

Considere $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(2, 3), (-1, 2)\}$. Para construirmos $I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, escrevemos cada vetor da base \mathcal{B}' na base \mathcal{B} :

$$(2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)$$

$$(-1, 2) = -1(1, 0) + 2(0, 1)$$

Logo,

$$I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo

Considere $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(2, 3), (-1, 2)\}$. Para construirmos $I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, escrevemos cada vetor da base \mathcal{B}' na base \mathcal{B} :

$$(2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)$$

$$(-1, 2) = -1(1, 0) + 2(0, 1)$$

Logo,

$$I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Note que, se $v = (1, 1)_{\mathcal{B}'}$, então em \mathcal{B}' teremos

Exemplo

Considere $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(2, 3), (-1, 2)\}$. Para construirmos $I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, escrevemos cada vetor da base \mathcal{B}' na base \mathcal{B} :

$$(2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)$$

$$(-1, 2) = -1(1, 0) + 2(0, 1)$$

Logo,

$$I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Note que, se $v = (1, 1)_{\mathcal{B}'}$, então em \mathcal{B}' teremos

$$v = 1(2, 3) + 1(-1, 2) = (1, 5)_{\mathcal{B}}.$$

Exemplo

Considere $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(2, 3), (-1, 2)\}$. Para construirmos $I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, escrevemos cada vetor da base \mathcal{B}' na base \mathcal{B} :

$$(2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)$$

$$(-1, 2) = -1(1, 0) + 2(0, 1)$$

Logo,

$$I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Note que, se $v = (1, 1)_{\mathcal{B}'}$, então em \mathcal{B}' teremos

$$v = 1(2, 3) + 1(-1, 2) = (1, 5)_{\mathcal{B}}.$$

De fato:

$$I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} v_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Exemplo: continuação

Por outro lado,

$$(1, 0) = \frac{2}{7}(2, 3) - \frac{3}{7}(-1, 2)$$

$$(0, 1) = \frac{1}{7}(2, 3) + \frac{2}{7}(-1, 2)$$

Assim,

$$I_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

De fato,

$$I_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}, v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Ainda:

$$I_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}, I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = I.$$

Exemplo

Se $\mathcal{B} = \{(1, 2), (3, 5)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, -1), (1, -2)\}$, para encontrarmos $I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ devemos escrever os elementos de \mathcal{B}' na base \mathcal{B} . Mas isso pode ser difícil. Considere então a base canônica em \mathbb{R}^2 .

Então:

$$I_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Além disso,

$$(1, 0) = -5(1, 2) + 2(3, 5)$$

$$(0, 1) = 3(1, 2) - 1(3, 5)$$

e assim

$$I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo: continuação

Então:

$$I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = I_{\mathcal{B}}^C I_C^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -11 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Note que

$$I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} v_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -8 & -11 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -19 \\ 7 \end{pmatrix}$$

De fato,

$$\begin{aligned} (1, 1)_{\mathcal{B}'} &= (1, -1) + (1, -2) = (2, 3)_C \\ (-19, 7)_{\mathcal{B}} &= -19(1, 2) + 7(3, 5) = (2, -3)_C. \end{aligned}$$

Exemplo

Em \mathbb{R}^3 , se consideramos as bases

$$E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$S = \{(1, 0, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2)\}$$

temos que

$$I_E^S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I_S^E = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, se $v = (1, 1, 1)_E$, temos

$$I_S^E v_E = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S.$$

Exemplo

Seja $\theta \in \mathbb{R}$; a matriz

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

é inversível com inversa

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Logo, para cada θ , o conjunto \mathcal{B}' formado pelos vetores $(\cos \theta, \sin \theta)$, $(-\sin \theta, \cos \theta)$ é uma base de \mathbb{R}^2 . Intuitivamente esta base é obtida ao rotacionarmos a base canônica num ângulo θ . Se $\alpha = (x_1, x_2)$, então

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ou ainda

$$x'_1 = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta$$

$$x'_2 = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta$$