



Aula 3: Introdução aos Espaços Vetoriais

.....

Melissa Weber Mendonça

Introdução aos espaços vetoriais

A Álgebra Linear é o estudo dos espaços vetoriais sobre corpos arbitrários e das transformações lineares entre esses espaços.

Definição

Um conjunto não-vazio \mathbb{K} é um **corpo** se em \mathbb{K} pudermos definir duas operações, denotadas por $+$ (soma) e \cdot (multiplicação), satisfazendo:

- (i) $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{K}$ (comutativa)
- (ii) $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in \mathbb{K}$ (associativa)
- (iii) Existe um elemento em \mathbb{K} , denotado por 0 e chamado de *elemento neutro da soma*, que satisfaz $0 + a = a + 0 = a, \forall a \in \mathbb{K}$.
- (iv) Para cada $a \in \mathbb{K}$, existe um elemento em \mathbb{K} denotado por $-a$ e chamado de *oposto de a* (ou *inverso aditivo de a*) tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
- (v) $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in \mathbb{K}$ (comutativa)
- (vi) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{K}$
- (vii) Existe um elemento em \mathbb{K} denotado por 1 e chamado de *elemento neutro da multiplicação*, tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall a \in \mathbb{K}$.
- (viii) Para cada elemento não-nulo $a \in \mathbb{K}$, existe um elemento em \mathbb{K} , denotado por a^{-1} e chamado de *inverso multiplicativo de a*, tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.
- (ix) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{K}$ (distributiva).

Exemplos de corpos

São corpos:

- \mathbb{Q}
- \mathbb{R}
- \mathbb{C}

Definição

Um conjunto não vazio E é um **espaço vetorial** sobre um corpo \mathbb{K} se em seus elementos, denominados *vetores*, estiverem definidas duas operações:

- *soma*: A cada $u, v \in E$, associa $u + v \in E$
- *multiplicação por um escalar*: a cada escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e a cada vetor $v \in E$, associa $\alpha v \in E$.

Estas operações devem satisfazer as condições abaixo:

- (i) **Comutatividade**: $u + v = v + u$, $\forall u, v \in E$
- (ii) **Associatividade**: $(u + v) + w = u + (v + w)$ e $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$, $\forall u, v, w \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$
- (iii) **Existência do vetor nulo**: existe um vetor $0 \in E$, chamado *vetor nulo*, tal que $v + 0 = 0 + v = v$ para todo $v \in E$.
- (iv) **Existência do inverso aditivo**: para cada vetor $v \in E$ existe um vetor $-v \in E$ chamado *inverso aditivo* tal que $-v + v = v + (-v) = 0 \in E$.
- (v) **Distributividade**: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ e $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$, $\forall u, v \in E$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
- (vi) **Multiplicação por 1**: $1 \cdot v = v$, em que 1 é o elemento neutro da multiplicação em \mathbb{K} .

Exemplos

- Todo corpo é um espaço vetorial sobre si mesmo.

Exemplos

- Todo corpo é um espaço vetorial sobre si mesmo.

De fato, se \mathbb{K} é um corpo, então as duas operações internas em \mathbb{K} podem ser vistas como a soma de vetores e a multiplicação por escalares.

Exemplos

- Para todo número natural n , o conjunto \mathbb{K}^n , definido como
$$\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K} = \{(u_1, \dots, u_n) : u_i \in \mathbb{K}, \forall i = 1, \dots, n\}$$
é um espaço vetorial sobre \mathbb{K} .

Exemplos

- Os elementos do espaço vetorial \mathbb{R}^∞ são as sequências infinitas de números reais do tipo

$$u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots).$$

- O elemento zero é a sequência formada por infinitos zeros
 $0 = (0, \dots, 0, \dots)$;
- O inverso aditivo da sequência u é $-u = (-\alpha_1, \dots, -\alpha_n, \dots)$;
- As operações de adição e multiplicação por escalar são definidas por

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n, \dots)$$

$$\rho u = (\rho\alpha_1, \dots, \rho\alpha_n, \dots).$$

Exemplos

- O conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ de todas as matrizes $m \times n$ com elementos em \mathbb{K} é um espaço vetorial?

Exemplos

- O conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ de todas as matrizes $m \times n$ com elementos em \mathbb{K} é um espaço vetorial?

Sim, se

- A soma entre duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ é dada por

$$[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

- O produto de uma matriz A pelo escalar $\rho \in \mathbb{K}$ como

$$[\rho A]_{ij} = \rho a_{ij}$$

- A matriz nula $0 \in \mathcal{M}_{m \times n}$ é aquela formada por zeros;
- O inverso aditivo da matriz $A = [a_{ij}]$ é a matriz $-A = [-a_{ij}]$.

Exemplos

- O conjunto de polinômios

$$\mathcal{P}(\mathbb{K}) = \{p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{K} \text{ e } n \geq 0\}$$

é um espaço vetorial com as operações usuais de soma de polinômios e multiplicação por escalar.

Exemplos

- Seja X um conjunto não-vazio qualquer. O símbolo $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ representa o conjunto de todas as funções reais $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Esse conjunto é um espaço vetorial.

Variando o conjunto X , obtemos:

- Se $X = \{1, \dots, n\}$, então $\mathcal{F}(X; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$, pois a cada número em X associamos um número real α , gerando assim uma lista de n valores reais para cada elemento do conjunto.
- Se $X = \mathbb{N}$, então $\mathcal{F}(X; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^\infty$.
- Se X é o produto cartesiano dos conjuntos $\{1, \dots, m\}$ e $\{1, \dots, n\}$ então $\mathcal{F}(X; \mathbb{R}) = \mathcal{M}_{m \times n}$.

Propriedades

Como consequência dos axiomas, valem num espaço vetorial as regras operacionais habitualmente usadas nas manipulações numéricas:

1. Para todos $u, v, w \in E$, temos que $w + u = w + v \Rightarrow u = v$. Em particular, $w + u = w \Rightarrow u = 0$ e $w + u = 0 \Rightarrow u = -w$.
2. Dados $0 \in \mathbb{K}$ e $v \in E$, temos que $0v = 0 \in E$. Analogamente, dados $\alpha \in \mathbb{K}$ e $0 \in E$, temos que $\alpha 0 = 0$.
3. Se $\alpha \neq 0$ e $v \neq 0$ então $\alpha v \neq 0$.
4. $(-1)v = -v$.

Observação

Um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} é um conjunto E de vetores, com uma operação de soma que é uma função $+$: $E \rightarrow E$ e uma operação de produto por escalar, que é uma função \cdot : $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$, satisfazendo os axiomas listados acima. Note que os axiomas não envolvem a propriedade de inverso multiplicativo do corpo, e podemos definir uma estrutura semelhante à de espaço vetorial sobre um anel, que chamamos de *módulo* sobre \mathbb{K} . No entanto, a maioria dos teoremas provados para espaços vetoriais não seria válida nos módulos; por exemplo, não podemos falar da dimensão de um módulo.

Subespaços vetoriais

Definição

Um subespaço vetorial do espaço vetorial E é um subconjunto $F \subset E$ que, relativamente às operações de E , é ainda um espaço vetorial, ou seja, satisfaz

- (i) Para todo $u, v \in F$, $u + v \in F$
- (ii) Para todo $u \in F$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha u \in F$.

Observações

- Note que no caso de um subespaço, não é necessário verificar as seis propriedades listadas anteriormente pois elas já são satisfeitas para E , e $F \subset E$. No entanto, um subespaço deve ser *fechado* para a adição e a multiplicação por escalar. Mais geralmente, dados $v_1, \dots, v_m \in F$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$,

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$$

deve pertencer a F .

Observações

- O vetor nulo pertence a *todos* os subespaços.

Observações

- O espaço inteiro E é um exemplo trivial de subespaço de E .

Observações

- Todo subespaço é, em si mesmo, um espaço vetorial.

Observações

- O conjunto vazio não pode ser um subespaço vetorial.

Exemplos

- Seja $v \in E$ um vetor não-nulo. O conjunto $F = \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{K}\}$ de todos os múltiplos de v é um subespaço vetorial de E , chamado de *reta que passa pela origem e contém v* .

Exemplos

- Seja $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções reais de uma variável real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ das funções k vezes continuamente diferenciáveis é um subespaço vetorial de E .

Exemplos

- Sejam a_1, \dots, a_n números reais. O conjunto \mathcal{H} de todos os vetores $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n . No caso trivial em que $a_1 = \dots = a_n = 0$, o subespaço \mathcal{H} é todo o \mathbb{R}^n . Se, ao contrário, pelo menos um dos $a_i \neq 0$, \mathcal{H} chama-se *hiperplano* de \mathbb{R}^n que passa pela origem.

Exemplos

- Seja E o espaço das matrizes 3×3 : $E = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}\}$. O conjunto das matrizes triangulares inferiores de dimensão 3 é um subespaço de E , assim como o conjunto das matrizes simétricas.

Exemplos

- Dentro do espaço \mathbb{R}^3 , os subespaços possíveis são: o subespaço nulo, o espaço inteiro, as retas que passam pela origem, e os planos que passam pela origem. Qualquer reta que não passe pela origem não pode ser um subespaço (pois não contem o vetor nulo).

Teorema

Dados um espaço vetorial E e subespaços $F_1, F_2 \subset E$, a interseção $F_1 \cap F_2$ ainda é um subespaço de E .

E a união?

A união de dois subespaços vetoriais *não* é (em geral) um subespaço vetorial.

E a união?

A união de dois subespaços vetoriais *não* é (em geral) um subespaço vetorial.

Contra-exemplo:

$$E = \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$F_1 = \{ \text{matrizes triangulares superiores} \}$$

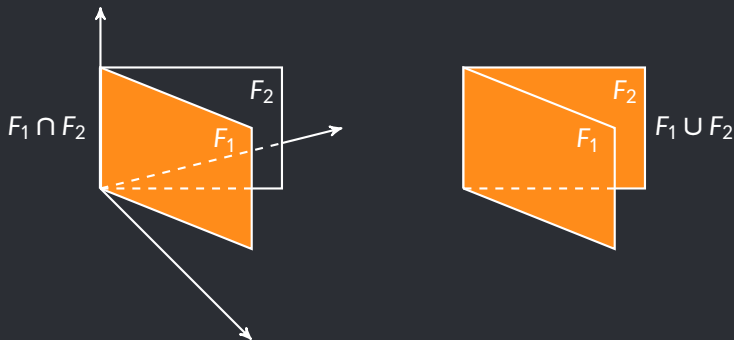
$$F_2 = \{ \text{matrizes triangulares inferiores} \}$$

- O que é $F_1 \cap F_2$?
- O que é $F_1 \cup F_2$?

Exemplo

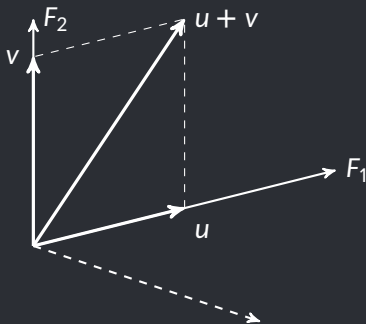
$E = \mathbb{R}^3$, F_1, F_2 dois planos em \mathbb{R}^3 passando pela origem.

- $F_1 \cap F_2$ é a reta de interseção de F_1 e F_2 passando pela origem;
- $F_1 \cup F_2$ é a união dos dois planos.



Exemplo

$E = \mathbb{R}^3$, F_1 e F_2 duas retas que passam pela origem. Ambos F_1 e F_2 são subespaços, mas sua união, representada pelo feixe das duas retas, não o é.



Será que existe alternativa?

Como vimos no último exemplo, a união de dois subespaços vetoriais não é necessariamente um subespaço vetorial. No entanto, podemos construir um conjunto S que contém F_1 e F_2 e que é subespaço de E , como veremos no Teorema a seguir.

Teorema

Sejam F_1 e F_2 subespaços de um espaço vetorial E . Então o conjunto

$$S = F_1 + F_2 = \{w \in E : w = w_1 + w_2, w_1 \in F_1, w_2 \in F_2\}$$

é um subespaço de E .

Demonstração. Vamos verificar as condições para que S seja um subespaço de E .

Teorema

Sejam F_1 e F_2 subespaços de um espaço vetorial E . Então o conjunto

$$S = F_1 + F_2 = \{w \in E : w = w_1 + w_2, w_1 \in F_1, w_2 \in F_2\}$$

é um subespaço de E .

Demonstração. Vamos verificar as condições para que S seja um subespaço de E .

Primeiramente, note que $0 \in S$ pois $0 \in F_1$ e $0 \in F_2$.

Teorema

Sejam F_1 e F_2 subespaços de um espaço vetorial E . Então o conjunto

$$S = F_1 + F_2 = \{w \in E : w = w_1 + w_2, w_1 \in F_1, w_2 \in F_2\}$$

é um subespaço de E .

Demonstração. Vamos verificar as condições para que S seja um subespaço de E .

(i) Sejam $v, w \in S$. Então $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in F_1$, $v_2 \in F_2$ e

$w = w_1 + w_2$, $w_1 \in F_1$, $w_2 \in F_2$. Assim

$$v + w = (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2)$$

$$= (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) \in S,$$

pois $v_1 + w_1 \in F_1$ e $v_2 + w_2 \in F_2$ já que ambos são subespaços de E e $v_1, w_1 \in F_1$ e $v_2, w_2 \in F_2$, e a última igualdade segue das propriedades da soma no espaço vetorial E .

Teorema

Sejam F_1 e F_2 subespaços de um espaço vetorial E . Então o conjunto

$$S = F_1 + F_2 = \{w \in E : w = w_1 + w_2, w_1 \in F_1, w_2 \in F_2\}$$

é um subespaço de E .

Demonstração. Vamos verificar as condições para que S seja um subespaço de E .

(ii) Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $w \in S$. Então,

$$\alpha w = \alpha(w_1 + w_2) = \alpha w_1 + \alpha w_2 \in S$$

já que $\alpha w_1 \in F_1$ e $\alpha w_2 \in F_2$ pois ambos são subespaços de E .

Exemplo

No Exemplo da união dos subespaços, $S = F_1 + F_2$ é o plano que contém as duas retas.