Álgebra Linear

Melissa Weber Mendonça

2019.2

Conteúdo

CAPÍTULO 1

Matrizes e Sistemas

Nesta unidade, discutiremos tipos especiais de matrizes, operações com matrizes e o escalonamento, também conhecido como eliminação Gaussiana. Discutiremos a fatoração $PA = LU$ e sua implementação, através de uma introdução à linguagem Python.

1.1 Introdução

A álgebra linear se preocupa principalmente com a solução de sistemas lineares. Vamos considerar primeiro o caso mais simples, em que o número de equações é igual ao número de variáveis. Considere o exemplo abaixo:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5. \end{cases} \tag{1.1}$$

É comum aprendermos duas maneiras de resolver esse tipo de problemas. A primeira é a ideia de eliminar variáveis de uma equação para resolver a outra. No exemplo, poderíamos fazer

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x = 5 - y \end{cases}$$

Substituindo o valor de x na primeira equação, teremos que

$$\Rightarrow 2(5 - y) - y = 1 \Rightarrow 10 - 3y = 1 \Rightarrow y = 3.$$

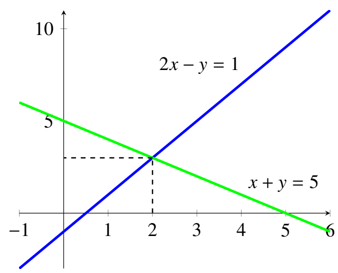


Figura 1.1: Resolução gráfica do sistema linear (1.1). A solução é $(x, y) = (2, 3)$.

Agora, substituindo este valor de y na primeira equação, deduzimos que

$$x = 5 - y = 5 - 3 = 2.$$

Este método é bastante simples em um problema com poucas equações e poucas variáveis, mas não é fácil imaginar a resolução de um problema de grande porte desta forma. Da mesma forma, o segundo método, que envolve determinantes e é normalmente conhecido como *regra de Cramer*, é bastante complicado e, na prática, pouco eficiente.

Felizmente, existe uma maneira inteligente de se aplicar o primeiro método a um sistema de grande porte. O algoritmo que permite a resolução de problemas desta forma e que vamos estudar é conhecido como *eliminação Gaussiana.*

O que é um algoritmo?

Já sabemos (da Geometria Analítica) que um sistema de equações do tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

pode ser reescrito em uma forma matricial, como sendo

$$Ax = b \tag{1.2}$$

e que temos algumas possibilidades para a solução deste sistema:

- Se a matriz A for quadrada e inversível, então $x = A^{-1}b$, ou seja, é possível encontrarmos solução única do sistema para qualquer lado direito b. Em outras palavras, o sistema é possível e determinado.

- Se a matriz A não é inversível (se não for quadrada, ou se for quadrada mas não tiver inversa), então a existência e unicidade de soluções dependem do lado direito b do sistema. Para algumas escolhas de b o sistema terá infinitas soluções (sistema possível e indeterminado) e para outras o sistema não terá soluções (sistema impossível).

Para identificarmos cada um destes casos, estudaremos alguns fatos sobre as matrizes.

1.2 Matrizes

Definição 1. *Uma matriz é uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas.*

Exemplo 2.1. *Alguns exemplos de matrizes de números reais:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}.$$

Os elementos de uma matriz podem ser números (reais ou complexos), funções, ou ainda outras matrizes. Representamos uma matriz de m linhas e n colunas por

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}.$$

1.2.1 Tipos especiais de matrizes

Nos exemplos abaixo, as matrizes só contém números reais. No entanto, estas definições tem equivalentes para matrizes contendo outros tipos de elemento (números complexos, funções etc).

Matriz Quadrada é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas. $(m = n)$.

Exemplo 2.2.

$$\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, dizemos que A é uma matriz de ordem m (ou n).

Matriz Nula é aquela em que $a_{ij} = 0$ para todo i e j.[1]

Exemplo 2.3.

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{3\times 5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Coluna é aquela que possui uma única coluna ($n = 1$).

Matriz Linha é aquela que possui uma única linha ($m = 1$).

Matriz Simétrica é uma matriz quadrada A em que $a_{ij} = a_{ji}$, para $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ ($m = n$).

Exemplo 2.4.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz Diagonal é uma matriz A em que os únicos elementos (possivelmente) não-nulos são os elementos a_{ij} com $i = j$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Exemplo 2.5.

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular é uma matriz quadrada em que todos os elementos abaixo (ou acima) da diagonal são nulos.

Exemplo 2.6 (Matriz Triangular Superior)**.**

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Neste caso, $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.

[1] Aqui, o correto seria dizer que a_{ij} é igual ao elemento neutro da soma do conjunto onde vivem os elementos da matriz.

Exemplo 2.7 (Matriz Triangular Inferior)**.**

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Neste caso, $a_{ij} = 0$ *para todo* $i < j$*.*

Matriz esparsa é uma matriz que contem muitos elementos nulos.

Não existe uma definição precisa de matriz esparsa. Quando falamos de matrizes esparsas, em geral estamos falando de matrizes que possuem menos da metade de seus elementos não-nulos, ou que possuem algum tipo de estrutura especial que concentra seus elementos não-nulos.

Exemplo 2.8. *Matrizes diagonais são esparsas.*

Exemplo 2.9.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de banda é uma matriz esparsa cujos elementos não-nulos estão concentrados próximos à sua diagonal principal.

Exemplo 2.10.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

A largura da banda *desta matriz é 3.*

Exemplo 2.11.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz é uma matriz de banda, de largura 2. Também é uma matriz triangular inferior.

1.3 Operações com matrizes

1.3.1 Adição de matrizes

A soma de duas matrizes de mesma ordem $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e $B_{m\times n} = (b_{ij})$ é uma matriz $m \times n$ denotada por $A + B$ cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de A e de B, ou seja

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

Exemplo 3.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Propriedades A maneira como a adição de matrizes foi definida garante que ela possuirá as mesmas propriedades da adição de números reais. Dadas as matrizes A, B e C de mesma ordem $m \times n$, temos:

(i) $A + B = B + A$ (comutatividade)

(ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade)

(iii) $A + 0 = A$, onde 0 denota a matriz nula $m \times n$.

1.3.2 Multiplicação por escalar

Seja $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e k um escalar (número). Definimos o produto da matriz A pelo escalar k como uma nova matriz

$$kA = (ka_{ij})_{m\times n}.$$

Exemplo 3.2.

$$-2\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 20 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Propriedades Dadas as matrizes A, B de mesma ordem $m \times n$ e números k, k_1, k_2 escalares, temos:

(i) $k(A + B) = kA + kB$

(ii) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$

(iii) $0A = 0$, ou seja, se multiplicarmos o número 0 pela matriz $A_{m\times n}$ obteremos a matriz nula $0_{m\times n}$.[2]

(iv) $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$.

1.3.3 Transposição

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, podemos obter uma outra matriz $A^T = (b_{ij})_{n\times m}$, cujas linhas são as colunas de A, ou seja, $b_{ij} = a_{ji}$. A^T é denominada a *transposta* de A.

Exemplo 3.3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Exemplo 3.4.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^T = (1\;2)\,.$$

Exemplo 3.5.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Propriedades

(i) Uma matriz é *simétrica* se e somente se ela é igual à sua transposta.

(ii) $\left(A^T\right)^T = A$.

(iii) $(A + B)^T = A^T + B^T$.

(iv) $(kA)^T = kA^T$, para todo escalar k.

[2]Novamente, aqui poderíamos substituir o escalar (número) 0 pelo elemento neutro do conjunto que estamos considerando.

1.3.4 Produto de matrizes

Vamos supor que temos dois alimentos, com certas quantidades de vitaminas A, B e C, definidas na seguinte tabela.

	A	B	C
Alimento 1	4	3	0
Alimento 2	5	0	1

Se ingerirmos 5 unidades do Alimento 1 e 2 unidades do Alimento 2, quanto teremos consumido de cada tipo de vitamina?

Podemos representar esse problema em termos de matrizes da seguinte forma. As quantidades de vitamina de cada alimento podem ser representadas pela matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e as unidades do Alimento 1 e do Alimento 2 consumidas podem ser representadas pelo (ou matriz-linha)

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, a operação que nos fornecerá a quantidade total de cada vitamina ingerida é o produto definido por

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 & 5 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 30 & 15 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ou seja, serão ingeridas 30 unidades de vitamina A, 15 de vitamina B e 2 de C.

Esta operação é definida como o produto de duas matrizes, e pode ser expresso formalmente da seguinte maneira: sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$. Definimos $AB = (c_{ij})_{m\times p}$, com

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + \ldots + a_{in} b_{nj}.$$

Só podemos efetuar o produto de duas matrizes se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda.

Exemplo 3.6.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2(-1) + 1\cdot 4 \\ 4\cdot 1 + 2\cdot 0 & 4(-1) + 2\cdot 4 \\ 5\cdot 1 + 3\cdot 0 & 5(-1) + 3\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.7.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Não é possível efetuar este produto.

Propriedades

(i) Em geral, $AB \neq BA$.

Exemplo 3.8.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ BA = \begin{pmatrix} -11 & 6 & 1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Além disso, AB pode ser nula sem que A ou B sejam nulas.

(ii) $AI = IA = A$

(iii) $0A = 0$ e $A0 = 0$.

(iv) Sejam $A_{m\times p}$, $B_{p\times n}$ e $C_{p\times n}$. Então, $A(B + C)$ é uma matriz com elementos dados por

$$\begin{aligned} (A(B+C))_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj} \\ &= (AB)_{ij} + (AC)_{ij}. \end{aligned}$$

Logo, $A(B+C) = AB + AC$ (distributividade à esquerda da multiplicação)

(v) $(A+B)C = AC + BC$ (distributividade à direita da multiplicação) (análogo ao caso anterior)

(vi) Sejam $A_{m\times p}$, $B_{p\times q}$, $C_{q\times n}$. Então, $(AB)C = A(BC)$ (associatividade da multiplicação).

Precisamos mostrar que $((AB)C)_{ij} = (A(BC))_{ij}$. Mas, note que:

$$\begin{aligned}
(A(BC))_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} A_{ik}(BC)_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p} A_{ik} \sum_{\ell=1}^{q} B_{k\ell}C_{\ell j} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{q} A_{ik}B_{k\ell}C_{\ell j} \\
&= \sum_{\ell=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{k\ell}C_{\ell j} \\
&= \sum_{\ell=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} (A_{ik}B_{k\ell})C_{\ell j} \\
&= \sum_{\ell=1}^{q} (AB)_{i\ell}C_{\ell j} \\
&= ((AB)C)_{ij}.
\end{aligned}$$

(vii) $(AB)^T = B^T A^T$ (Exercício!)

1.3.5 4 diferentes formas de se fazer um produto de matrizes

Podemos encarar o produto de duas matrizes como vimos anteriormente, de forma monolítica, mas existem três outros jeitos de interpretarmos esta operação.

(i) Cada entrada da matriz-produto AB é o produto entre uma linha e uma coluna:

$$(AB)_{ij} = \text{ linha } i \text{ de } A \text{ vezes a coluna } j \text{ de } B$$

(ii) Cada coluna de AB é o produto entre uma matriz e uma coluna:

$$\text{coluna } j \text{ de } AB = A \text{ vezes coluna } j \text{ de } B$$

(iii) Cada linha de AB é o produto entre uma linha e uma matriz:

$$\text{linha } i \text{ de } AB = \text{ linha } i \text{ de } A \text{ vezes } B.$$

Exemplo.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 3 & 1\cdot 1 + 0\cdot 4 \\ 2\cdot 2 + 3\cdot 3 & 2\cdot 1 + 3\cdot 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

1.3.6 Matriz Inversa

Matriz Identidade é uma matriz $I_{n\times n}$ tal que para toda matriz $A_{n\times n}$,

$$AI = IA = A.$$

Dada $A_{n\times n}$, se pudermos encontrar uma outra matriz $B_{n\times n}$ tal que

$$AB = BA = I,$$

então diremos que A é inversível e que $B = A^{-1}$. Senão, diremos que A é singular.

Teorema 1. *A inversa de $A_{n\times n}$ é única.*

Demonstração. Suponha que existem duas inversas de A, B e C. Então,

$$BA = I \Leftrightarrow (BA)C = IC = C.$$

No entanto,

$$AC = I \Leftrightarrow B(AC) = BI = B.$$

Logo, como $(BA)C = B(AC)$ pela propriedade associativa do produto de matrizes, temos que $B = C$. $\square$

Teorema 2. *Se A, B são matrizes $n \times n$ inversíveis, então $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Demonstração. Basta verificarmos que $(AB)B^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1}AB$, já que a inversa é única. $\square$

Teorema 3. *Se A é inversível, A^T também o é, e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Demonstração. Basta verificarmos que $(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I$.

Mas $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$. Além disso, $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$. $\square$

1.4 Fatoração $PA = LU$ de uma matriz A.

1.4.1 Sistemas Lineares

Considere o sistema linear

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

em que $A_{m \times n}$ é uma matriz de números reais, x é um vetor com n componentes reais e b é um vetor com m componentes reais. Se $b = 0$, chamamos este sistema de *homogêneo*.

Ideia: transformar a matriz (quadrada) geral em uma matriz triangular para resolver o sistema linear por substituição. Vamos considerar primeiramente sistemas quadrados.

Exemplo.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

1.4.2 Forma matricial: Forma escalonada do sistema

Poderíamos resolver um sistema $Ax = b$ encontrando a inversa de A, pois se $Ax = b$, então

$$x = A^{-1}b$$

No entanto, encontrar a inversa de uma matriz não é tarefa fácil; assim, vamos procurar resolver o sistema usando outras estratégias.

Exemplo.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

Inicialmente, vamos tentar eliminar x na segunda e terceira equações:

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = 9 \\ & y & -\frac{7z}{2} & = -\frac{17}{2} \\ & -y & +\frac{11z}{3} & = 9 \end{cases}$$

Agora, vamos eliminar y na terceira equação:

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = 9 \\ & y & -(7/2)z & = -17/2 \\ & & (1/6)z & = 1/2 \end{cases}$$

Resolvendo para z, temos que

$$z = 3$$

Além disso,

$$2y - 7z = -17 \Leftrightarrow 2y = -17 + 21 = 4 \Leftrightarrow y = 2$$

Por último,

$$x + y + 2z = 9 \Leftrightarrow x = 9 - 2(3) - 2 = 9 - 8 = 1.$$

Exemplo. *Considere o seguinte exemplo: (homogêneo)*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Podemos representar o processo, agora numa forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & - & 3x_2 & & & = & 0 \\ & - & 2x_2 & & & = & 0 \end{pmatrix}$$

Aqui, podemos ver que, pelas equações acima, $x_2 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$, ou seja x_1 é livre, *$x_2 = 0$ e $x_3 = -x_1$. Neste caso, o sistema tem infinitas soluções.*

Se, por outro lado, o lado direito for diferente de nulo, teremos:

$$\begin{pmatrix} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & - & 3x_2 & & & = & 1 \\ & - & 2x_2 & & & = & 2 \end{pmatrix}$$

De onde vemos que o valor de x_2 não pode ser encontrado. Portanto, esse sistema é inconsistente.

No entanto, se tivéssemos

$$\begin{pmatrix} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -3 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & - & 3x_2 & & & = & 9 \\ & - & 2x_2 & & & = & 6 \end{pmatrix}$$

então o sistema seria consistente, mas teria infinitas soluções.

Qual é o problema que podemos encontrar aqui? **Pivôs nulos.** Isso indica problemas no sistema. Assim, esse procedimento pode ser usado para identificar classes de sistemas lineares; se o procedimento puder ser realizado até o fim, sabemos que teremos uma solução definida para o sistema.

1.4.3 Eliminação Gaussiana e a Forma Escalonada

O procedimento que descrevemos acima é chamado de *Eliminação Gaussiana*. O objetivo da eliminação gaussiana é obter a chamada *forma escalonada da matriz.*

Definição 2. *Uma matriz A está na forma escalonada quando:*

- *Se uma linha não for inteiramente nula, o primeiro número não-nulo da linha (indo da esquerda para a direita) é 1 (pivô);*
- *Se uma linha é nula, ela está abaixo de todas as linhas que contém elementos não-nulos;*

- *Para cada duas linhas não-nulas, o pivô da de baixo está mais à direita que o da de cima;*

- *Cada coluna que tem pivô é nula no resto. (se utilizarmos o procedimento de Gauss-Jordan até o final)*

Esta definição é válida também para sistemas não quadrados, mas por enquanto vamos nos concentrar em sistemas quadrados.

Para estes sistemas, temos algumas situações que podem ocorrer.

Para sistemas não-homogêneos:

- Se pudermos realizar o escalonamento até o fim sem encontrarmos pivôs nulos, temos dois casos:
  - se o lado direito for consistente com as equações, então temos um sistema consistente e determinado (caso quadrado)
  - se o lado direito for inconsistente, não poderemos encontrar solução para o sistema.

- Se não pudermos realizar o escalonamento até o fim, também temos duas situações:
  - Se o lado direito for consistente, teremos um sistema consistente indeterminado (infinitas soluções)
  - caso contrário, teremos um sistema inconsistente, sem soluções.

Para o caso homogêneo,

- Se pudermos realizar o escalonamento até o fim sem encontrarmos pivôs nulos, então a solução trivial é solução do sistema.

- Caso contrário, o sistema tem infinitas soluções (indeterminado).

1.4.4 Operações elementares: Matrizes elementares

Nestes exemplos, resolvemos o sistema ao realizarmos as chamadas operações elementares nas linhas nestas matrizes. As operações elementares são:

- Multiplicar uma linha por um escalar não-nulo;

- Trocar uma linha r do sistema por $r + cs$, onde c é um escalar e s é outra linha do sistema ($r \neq s$);
- Trocar duas linhas de lugar.

Estas operações são importantes pois podem ser revertidas! Vamos analisar essas operações na forma matricial.

Definição 3. *Uma matriz $n \times n$ que pode ser obtida da matriz I_n executando-se uma única operação elementar sobre linhas é uma matriz elementar.*

Se E resulta de uma operação elementar em $I_{m\times m}$ e $A_{m\times n}$, então EA realiza as mesmas operações em A.

Exemplo.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = EI.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}; \qquad EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

Teorema 4. *Toda E elementar é inversível, e E^{-1} também é elementar.*

Demonstração. Seja E_0 a matriz que resulta da aplicação da operação elementar inversa de E em I (garantida pois estamos em um corpo!!). Então,

$$E_0E = I = EE_0$$

E_0 também é elementar pois representa também uma operação elementar. □

Exemplo.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Temos então, na sequência:

$$\begin{aligned} E^{(1)}A &= A^{(1)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
E^{(1)}b &= b^{(1)} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Continuando o processo,

$$
\begin{aligned}
E^{(2)}A^{(1)} &= A^{(2)} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
E^{(2)}b^{(1)} &= b^{(2)} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 14 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Por último,

$$
\begin{aligned}
E^{(3)}A^{(2)} &= A^{(3)} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
E^{(3)}b^{(2)} &= b^{(3)} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 14 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Desta forma,

$$
E = E^{(3)}E^{(2)}E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Existem algumas maneiras de representar a matriz depois das operações elementares:

- Se quisermos obter a matriz na forma *escalonada*, realizamos as operações por linhas, de forma que a matriz resultante seja triangular superior com pivôs 1;

- Se quisermos obter a matriz na forma *reduzida por linhas*, realizamos as operações por linhas, de forma que a matriz resultante tenha pivôs 1, e zero no resto de cada coluna com pivô;

- Se quisermos apenas resolver o sistema, realizamos as operações por linhas, de forma que a matriz resultante seja triangular superior com pivôs não-nulos (não necessariamente 1). Neste caso, obtemos a decomposição (ou fatoração) LU da matriz.

As operações elementares realizadas no momento do escalonamento do sistema podem ser acumuladas em uma matriz E, que é o produto das matrizes elementares utilizadas. Assim,

$$EA = U$$

e ainda,

$$A = E^{-1}U = LU.$$

Como isso se relaciona com o sistema?

Podemos agora fazer

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b$$

ou seja,

$$\text{Resolvemos } Ly = b \text{ para } y;$$
$$\text{Resolvemos } Ux = y \text{ para } x.$$

Felizmente, não precisamos montar as matrizes E! Basta fazermos o seguinte procedimento:

- Reduzir A à forma escalonada U, guardando os multiplicadores;

- Na diagonal de L colocar 1's;

- Abaixo da diagonal de L, colocar o negativo do multiplicador usado para zerar o respectivo elemento de A.

Exemplo.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Temos então, na sequência:

$$\begin{aligned} A &= LU \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definição 4. *Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que A é equivalente por linhas a B se B puder ser obtida através de um número finito de operações elementares efetuadas em A.*

Desta forma, é fácil ver que, como cada operação elementar pode ser representada por uma matriz elementar, e como a aplicação sucessiva destas matrizes elementares é representada pelo produto de todas estas matrizes, então

A e B são equivalentes por linhas se e somente se $A = PB$, onde P é um produto de matrizes elementares.

Teorema 5. *Se A e B são equivalentes por linhas, então os sistemas $Ax = 0$ e $Bx = 0$ tem exatamente as mesmas soluções.*

Demonstração. Basta mostrarmos que uma operação elementar não altera o conjunto de soluções. Mas, note que

$$EAx = 0 \Leftrightarrow Ax = E^{-1}0 = 0.$$

Portanto, $EAx = 0$ tem o mesmo conjunto de soluções que $Ax = 0$. Logo, se cada operação elementar não altera o conjunto solução, e aplicamos uma sequência finita de operações elementares em A para chegarmos a B, então $Ax = 0$ e $Bx = 0$ tem o mesmo conjunto de soluções. □

Teorema 6. *Se A é $n \times n$, então sua forma reduzida por linhas escalonada (escalonada, em que cada coluna que contém um pivô é nula em todas as outras entradas) terá ao menos uma linha toda nula, ou será a matriz identidade.*

Demonstração. Suponha que B é a forma reduzida por linhas escalonada da matriz. Se B tiver pelo menos uma linha toda nula então não há nada a provar. Suponha desta forma que B não tem uma linha toda nula. Então, toda linha deve ter um 1.

Agora, sabemos que o 1 de uma linha deve estar à esquerda do 1 da linha de baixo. Suponha então que o 1 da primeira linha não está em b_{11}. Assim, suponha que ele está em b_{12}. Se este for o caso, então vamos supor que o melhor cenário acontece, ou seja, cada 1 da linha 2 em diante está exatamente uma posição à direita do 1 da linha de cima. Então, na linha 2 o primeiro 1 deve estar pelo menos em b_{23}, e o de baixo em b_{34} e assim por diante, até que, na linha $n-1$, teremos $b_{n-1,n} = 1$. Desta forma, na última linha não teremos a posição $b_{n,n+1}$ para colocar o próximo 1, e esta linha deve ficar nula, o que contradiz nossa hipótese.

Se tomarmos um caso pior ainda, em que o 1 de uma linha está mais de uma casa deslocado para a direita, acabaremos com mais linhas nulas, o que também confirma nosso teorema. Desta forma, b_{11} deve ser 1, e assim podemos concluir para todos os outros elementos não nulos da forma reduzida por linhas escalonada de A. $\square$

Corolário 1. *Toda $A_{n\times n}$ pode ser reduzida à forma escalonada (reduzida por linhas, ou reduzida por linhas escalonada).*

Demonstração. Segue direto da definição de matriz reduzida por linhas escalonada, já que podemos ter inclusive linhas nulas. Todas as outras operações estão bem definidas para quaisquer entradas da matriz A. $\square$

Teorema 7. *Se A é uma matriz $n \times n$ então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) A é inversível;

(b) A única solução para o sistema homogêneo $Ax = 0$ é a solução trivial;

(c) A é equivalente por linhas a I;

(d) A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.

Demonstração.

(a) $\Rightarrow$ (b) Suponha que A é inversível, vamos mostrar então que $Ax = 0$ só possui a solução trivial. Suponha que x_0 é uma solução deste sistema. Como A é inversível, basta vermos que $A^{-1}Ax_0 = A^{-1}0 = 0$, ou seja $x_0 = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Primeiramente, escrevemos a matriz aumentada deste sistema, $[A|0]$. Agora, como sabemos que a única solução deste sistema é a solução trivial, então podemos reduzir A à forma reduzida por linhas escalonada que nos dá essa solução, ou seja, A deve ser equivalente por linhas a I.

(c) $\Rightarrow$ (d) Como A é equivalente por linhas a I, sabemos que pode-se escrever

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

Como já mostramos que as matrizes elementares são inversíveis, isto nos dá

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}.$$

(d) $\Rightarrow$ (a) Se A é um produto de matrizes inversíveis, e como mostramos que tal produto é inversível também, então A deve ser inversível.

□

1.4.5 Fatoração $PA = LU$.

Vamos considerar uma situação que não tínhamos considerado antes: a troca de linhas.

Exemplo.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Aqui, o primeiro pivô é zero! Não podemos multiplicar nenhum número pela primeira equação para zerar a segunda. Podemos então usar a operação elementar que não havíamos usado até agora: troca de linhas. Assim:

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que, inclusive, já está na forma escalonada! Portanto, podemos reescrever esta situação como

$$PA = LU.$$

Exemplo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \_ \\ 2 & 2 & 5 & \_ \\ 4 & 6 & 8 & \_ \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \_ \\ 0 & 0 & 3 & \_ \\ 0 & 2 & 4 & \_ \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \_ \\ 0 & 2 & 4 & \_ \\ 0 & 0 & 3 & \_ \end{pmatrix}$$

Exemplo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \_ \\ 2 & 2 & 5 & \_ \\ 4 & 4 & 8 & \_ \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \_ \\ 0 & 0 & 3 & \_ \\ 0 & 0 & 4 & \_ \end{pmatrix}$$

Não há permutação que permita encontrar um pivô.

A matriz de permutação é sempre a identidade com linhas trocadas. Desta forma, uma sequência de permutações consecutivas pode ser encontrada através do produto das permutações, assim como havíamos feito com as operações elementares.

CAPÍTULO 2

Espaços Vetoriais

Nesta unidade, estudaremos as propriedades dos espaços vetoriais e sua relação com os sistemas lineares.

2.1 Introdução aos espaços vetoriais

A Álgebra Linear é o estudo dos espaços vetoriais sobre corpos arbitrários e das transformações lineares entre esses espaços.

Definição 5. *Um conjunto não-vazio* $\mathbb{K}$ *é um* corpo *se em* $\mathbb{K}$ *pudermos definir duas operações, denotadas por* $+$ *(soma) e* $\cdot$ *(multiplicação), satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $a + b = b + a,\ \forall a, b \in \mathbb{K}$ *(comutativa)*

(ii) $a + (b + c) = (a + b) + c,\ \forall a, b, c \in \mathbb{K}$ *(associativa)*

(iii) Existe um elemento em $\mathbb{K}$*, denotado por* 0 *e chamado de* elemento neutro da soma*, que satisfaz* $0 + a = a + 0 = a,\ \forall a \in \mathbb{K}$.

(iv) Para cada $a \in \mathbb{K}$*, existe um elemento em* $\mathbb{K}$ *denotado por* $-a$ *e chamado de* oposto de *a (ou* inverso aditivo de *a) tal que* $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

(v) $a \cdot b = b \cdot a,\ \forall a, b \in \mathbb{K}$ *(comutativa)*

(vi) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,\ \forall a, b, c \in \mathbb{K}$

(vii) *Existe um elemento em* $\mathbb{K}$ *denotado por* 1 *e chamado de* elemento neutro da multiplicação*, tal que* $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$*,* $\forall a \in \mathbb{K}$*.*

(viii) *Para cada elemento não-nulo* $a \in \mathbb{K}$*, existe um elemento em* $\mathbb{K}$*, denotado por* a^{-1} *e chamado de* inverso multiplicativo de *a, tal que* $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$*.*

(ix) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$*,* $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ *(distributiva).*

Exemplo. *São corpos:* $\mathbb{Q}$*,* $\mathbb{R}$*,* $\mathbb{C}$*.*

Definição 6. *Um conjunto não vazio E é um* espaço vetorial *sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *se em seus elementos, denominados* vetores*, estiverem definidas duas operações:*

- soma*: A cada* $u, v \in E$*, associa* $u + v \in E$
- multiplicação por um escalar*: a cada escalar* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e a cada vetor* $v \in E$*, associa* $\alpha v \in E$*.*

Estas operações devem satisfazer as condições abaixo, denominadas axiomas *de espaço vetorial:*

(i) **Comutatividade:** $u + v = v + u$*,* $\forall u, v \in E$

(ii) **Associatividade:** $(u + v) + w = u + (v + w)$ *e* $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$*,* $\forall u, v, w \in E$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

(iii) **Existência do vetor nulo:** *existe um vetor* $0 \in E$*, chamado* vetor nulo*, tal que* $v + 0 = 0 + v = v$ *para todo* $v \in E$*.*

(iv) **Existência do inverso aditivo:** *para cada vetor* $v \in E$ *existe um vetor* $-v \in E$ *chamado* inverso aditivo *tal que* $-v + v = v + (-v) = 0 \in E$*.*

(v) **Distributividade:** $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ *e* $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$*,* $\forall u, v \in E$ *e* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

(vi) **Multiplicação por 1:** $1 \cdot v = v$*, em que* 1 *é o elemento neutro da multiplicação em* $\mathbb{K}$*.*

Exemplo 1.1. *Todo corpo é um espaço vetorial sobre si mesmo. De fato, se* $\mathbb{K}$ *é um corpo, então as duas operações internas em* $\mathbb{K}$ *podem ser vistas como a soma de vetores e a multiplicação por escalares.*

Exemplo 1.2. *Para todo número natural n, o conjunto* $\mathbb{K}^n$*, definido como*

$$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n \text{ vezes}} = \{(u_1, \ldots, u_n) : u_i \in \mathbb{K}, \forall i = 1, \ldots, n\}$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$*.*

Por definição, a igualdade vetorial $u = v$ *significa as n igualdades numéricas*

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1 \\ \alpha_2 &= \beta_2 \\ &\vdots \\ \alpha_n &= \beta_n. \end{aligned}$$

Os números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *são chamados de* coordenadas *do vetor u. As operações do espaço vetorial* $\mathbb{K}^n$ *são definidas naturalmente por*

$$\begin{aligned} u + v &= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n) \\ \rho u &= (\rho\alpha_1, \rho\alpha_2, \ldots, \rho\alpha_n). \end{aligned}$$

O vetor zero é, por definição, $(0, 0, \ldots, 0)$*, em que* 0 *é o elemento neutro da soma em* $\mathbb{K}$*.*

O inverso aditivo de $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *é* $-u = (-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n)$*.*

Exemplo 1.3. *Os elementos do espaço vetorial* $\mathbb{R}^\infty$ *são as sequências infinitas* $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$*,* $v = (\beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots)$ *de números reais. O elemento zero é a sequência formada por infinitos zeros* $0 = (0, \ldots, 0, \ldots)$ *e o inverso aditivo da sequência u é* $-u = (-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n, \ldots)$*. As operações de adição e multiplicação por escalar são definidas por*

$$\begin{aligned} u + v &= (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n, \ldots) \\ \rho u &= (\rho\alpha_1, \ldots, \rho\alpha_n, \ldots). \end{aligned}$$

Exemplo 1.4. *Uma matriz* $m \times n$*, definida no corpo* $\mathbb{K}$ *e denotada por* $A = [a_{ij}]$*, é uma lista de elementos* $a_{ij} \in \mathbb{K}$ *com índices duplos, onde* $1 \leq i \leq m$ *e* $1 \leq j \leq n$*. Costuma-se representar a matriz na forma*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

O vetor

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n$$

é o i-ésimo vetor linha da matriz A e o vetor

$$(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \in \mathbb{K}^m$$

é o j-ésimo vetor coluna de A. Quando $m = n$, dizemos que A é uma matriz quadrada. O conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ de todas as matrizes $m \times n$ com elementos em $\mathbb{K}$ torna-se um espaço vetorial quando nele se define a soma das matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ como

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

e o produto de uma matriz A pelo escalar $\rho \in \mathbb{K}$ como

$$\rho A = \begin{pmatrix} \rho a_{11} & \rho a_{12} & \cdots & \rho a_{1n} \\ \rho a_{21} & \rho a_{22} & \cdots & \rho a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho a_{m1} & \rho a_{m2} & \cdots & \rho a_{mn} \end{pmatrix}$$

A matriz nula $0 \in \mathcal{M}_{m\times n}$ é aquela formada por zeros e o inverso aditivo da matriz $A = [a_{ij}]$ é a matriz $-A = [-a_{ij}]$.

Exemplo 1.5. *O conjunto de polinômios*

$$\mathcal{P}(\mathbb{K}) = \{p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{K} \text{ e } n \geq 0\}$$

é um espaço vetorial com as operações usuais de soma de polinômios e multiplicação por escalar.

Exemplo 1.6. *Seja X um conjunto não-vazio qualquer. O símbolo $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ representa o conjunto de todas as funções reais $f : X \to \mathbb{R}$. Ele se torna um espaço vetorial quando se define a soma $f + g$ de duas funções e o produto αf do número α pela função f da maneira natural:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad e \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Variando o conjunto X, obtemos diversos exemplos de espaços vetoriais da forma $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$. Por exemplo, se $X = \{1,\ldots,n\}$, então $\mathcal{F}(X;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$, pois a cada número em X associamos um número real α, gerando assim uma lista de n valores reais para cada elemento do conjunto. Similarmente, se $X = \mathbb{N}$, então $\mathcal{F}(X;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\infty$. Se X é o produto cartesiano dos conjuntos $\{1,\ldots,m\}$ e $\{1,\ldots,n\}$ então $\mathcal{F}(X;\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{m\times n}$.

Como consequência dos axiomas, valem num espaço vetorial as regras operacionais habitualmente usadas nas manipulações numéricas:

1. Para todos $u, v, w \in E$, temos que $w + u = w + v \Rightarrow u = v$. Em particular, $w + u = w \Rightarrow u = 0$ e $w + u = 0 \Rightarrow u = -w$.

2. Dados $0 \in \mathbb{K}$ e $v \in E$, temos que $0v = 0 \in E$. Analogamente, dados $\alpha \in \mathbb{K}$ e $0 \in E$, temos que $\alpha 0 = 0$.

3. Se $\alpha \neq 0$ e $v \neq 0$ então $\alpha v \neq 0$.

4. $(-1)v = -v$.

Observação. Um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto E de *vetores*, com uma operação de soma que é uma função $+ : E \to E$ e uma operação de produto por escalar, que é uma função $\cdot : \mathbb{K} \times E : E$, satisfazendo os axiomas listados acima. Note que os axiomas não involvem a propriedade de inverso multiplicativo do corpo, e podemos definir uma estrutura semelhante à de espaço vetorial sobre um anel, que chamamos de *módulo* sobre $\mathbb{K}$. No entanto, a maioria dos teoremas provados para espaços vetoriais não seria válida nos módulos; por exemplo, não podemos falar da dimensão de um módulo.

2.2 Subespaços vetoriais

Definição 7. *Um subespaço vetorial do espaço vetorial E é um subconjunto $F \subset E$ que, relativamente às operações de E, é ainda um espaço vetorial, ou seja, satisfaz*

(i) Para todo $u, v \in F$, $u + v \in F$

(ii) Para todo $u \in F$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha u \in F$.

Note que no caso de um subespaço, não é necessário verificar as seis propriedades listadas anteriormente pois elas já são satisfeitas para E, e $F \subset E$. No entanto, um subespaço deve ser *fechado* para a adição e a multiplicação por escalar. Mais geralmente, dados $v_1, \ldots, v_m \in F$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$,

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$$

deve pertencer a F.

Observação: O vetor nulo pertence a *todos* os subespaços. Para verificar isto, basta tomarmos $0 \in \mathbb{K}$: $0v$ deve pertencer a F para todo $v \in F$. O espaço inteiro E também é um exemplo trivial de subespaço de E. Todo subespaço é, em si mesmo, um espaço vetorial. O conjunto vazio não pode ser um subespaço vetorial.

Exemplo 2.1. *(i) Seja $v \in E$ um vetor não-nulo. O conjunto $F = \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{K}\}$ de todos os múltiplos de v é um subespaço vetorial de E, chamado de* reta que passa pela origem e contém v.

(ii) Seja $E = \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções reais de uma variável real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto $C^k(\mathbb{R})$ das funções k vezes continuamente diferenciáveis é um subespaço vetorial de E.

(iii) Sejam $a_1, \ldots, a_n$ números reais. O conjunto $\mathcal{H}$ de todos os vetores $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. No caso trivial em que $a_1 = \ldots = a_n = 0$, o subespaço $\mathcal{H}$ é todo o $\mathbb{R}^n$. Se, ao contrário, pelo menos um dos $a_i \neq 0$, $\mathcal{H}$ chama-se hiperplano *de $\mathbb{R}^n$ que passa pela origem.*

(iv) Seja E o espaço das matrizes 3×3: $E = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3}\}$. O conjunto das matrizes triangulares inferiores de dimensão 3 é um subespaço de E, assim como o conjunto das matrizes simétricas.

(v) Dentro do espaço $\mathbb{R}^3$, os subespaços possíveis são: o subespaço nulo, o espaço inteiro, as retas que passam pela origem, e os planos que passam pela origem. Qualquer reta que não passe pela origem não pode ser um subespaço (pois não contem o vetor nulo).

2.3 Interseção e soma de subespaços vetoriais

Teorema 8. *Dados um espaço vetorial E e subespaços $F_1, F_2 \subset E$, a interseção $F_1 \cap F_2$ ainda é um subespaço de E.*

Demonstração. Primeiramente, note que $F_1 \cap F_2$ nunca é vazio, pois $0 \in F_1$ e $0 \in F_2$. Precisamos então verificar as duas condições que definem um subespaço vetorial.

(i) Sejam $u, v \in F_1 \cap F_2$. Então, $u, v \in F_1$ e $u, v \in F_2$. Logo, como F_1 e F_2 são ambos subespaços de E, $u + v \in F_1$ e $u + v \in F_2$, portanto $u + v \in F_1 \cap F_2$.

(ii) Seja $u \in F_1 \cap F_2$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então, $u \in F_1$ e $u \in F_2$. Como ambos F_1 e F_2 são subespaços de E, $\alpha u \in F_1$ e $\alpha u \in F_2$. Portanto, $\alpha u \in F_1 \cap F_2$.

Assim, provamos que a interseção dos dois subespaços é também um subespaço vetorial de E. □

A união de dois subespaços vetoriais *não* é (em geral) um subespaço vetorial.

Exemplo 3.1. *Considere o espaço E das matrizes reais $n \times n$. É fácil verificar que $F_1 = \{$matrizes triangulares superiores$\}$ e $F_2 = \{$matrizes triangulares inferiores$\}$ são ambos subespaços de E. Então, $F_1 \cap F_2 = \{$matrizes diagonais$\}$ também é um subespaço de E. Já a união de F_1 e F_2 é formada pelas matrizes triangulares (superiores e inferiores). Note que se tomarmos uma matriz triangular superior e outra matriz triangular inferior, a soma destas matrizes é uma matriz que não tem estrutura especial, e que portanto não está na união dos dois subespaços.*

Exemplo 3.2. *Considere $E = \mathbb{R}^3$. Sejam F_1, F_2 dois planos em $\mathbb{R}^3$ passando pela origem. Então, $F_1 \cap F_2$ é a reta de interseção de F_1 e F_2 passando pela origem. $F_1 \cup F_2$ é a união dos dois planos.*

Exemplo 3.3. *Considere $E = \mathbb{R}^3$, F_1 e F_2 duas retas que passam pela origem. Ambos F_1 e F_2 são subespaços, mas sua união, representada pelo feixe das duas retas, não o é, pois a soma de dois elementos nesta união pode se encontrar no plano definido pelas duas retas, que não está inteiramente contido no subespaço união.*

Como vimos no último exemplo, a união de dois subespaços vetoriais não é necessariamente um subespaço vetorial. No entanto, podemos construir um conjunto S que contém F_1 e F_2 e que é subespaço de E, como veremos no Teorema a seguir.

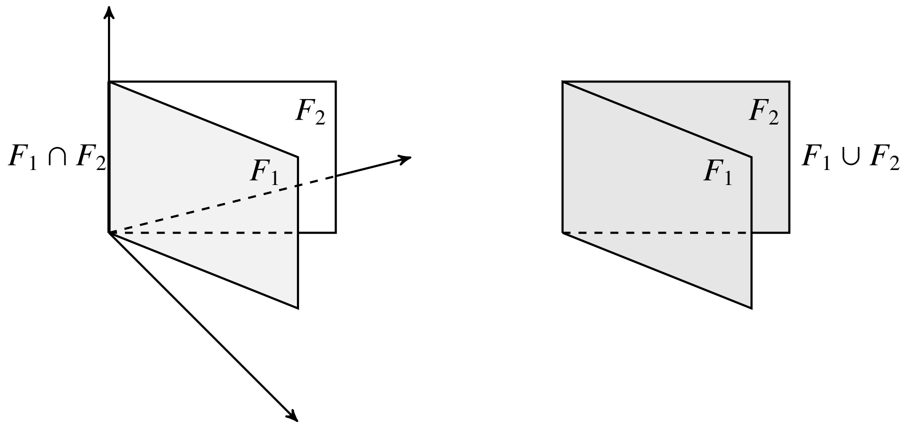


Figura 2.1: Interseção e união de subespaços vetoriais.

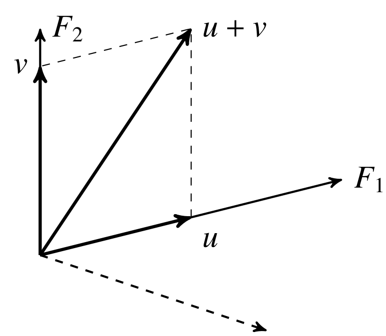


Figura 2.2: União de subespaços vetoriais.

Teorema 9. *Sejam F_1 e F_2 subespaços de um espaço vetorial E. Então o conjunto*

$$S = F_1 + F_2 = \{w \in E : w = w_1 + w_2, w_1 \in F_1, w_2 \in F_2\}$$

é um subespaço de E.

Demonstração. Vamos verificar as condições para que S seja um subespaço de E. Primeiramente, note que $0 \in S$ pois $0 \in F_1$ e $0 \in F_2$.

(i) Sejam $v, w \in S$. Então $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in F_1$, $v_2 \in F_2$ e $w = w_1 + w_2$, $w_1 \in F_1$,

$w_2 \in F_2$. Assim

$$\begin{aligned} v + w &= (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) \\ &= (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) \in S, \end{aligned}$$

pois $v_1 + w_1 \in F_1$ e $v_2 + w_2 \in F_2$ já que ambos são subespaços de E e $v_1, w_1 \in F_1$ e $v_2, w_2 \in F_2$, e a última igualdade segue das propriedades da soma no espaço vetorial E.

(ii) Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $w \in S$. Então,

$$\alpha w = \alpha(w_1 + w_2) = \alpha w_1 + \alpha w_2 \in S$$

já que $\alpha w_1 \in F_1$ e $\alpha w_2 \in F_2$ pois ambos são subespaços de E.

□

Exemplo 3.4. *No Exemplo 3.3, $S = F_1 + F_2$ é o plano que contém as duas retas.*

Considere agora uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Chegamos então ao caso interessante de subespaços ligados à matriz A em um sistema linear $Ax = b$, com $x \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Para relacionarmos o conceito de subespaços vetoriais à resolução de sistemas de equações lineares, precisamos do conceito de combinação linear.

Definição 8. *Seja E um espaço vetorial, e sejam $u_1, u_2, \ldots, u_n \in E$ vetores neste espaço. Então uma* combinação linear *destes vetores é um vetor u no espaço E dado por*

$$u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n,$$

para $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Definição 9. *Uma vez fixados os vetores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ em V, o conjunto $W \subset V$ que contém todas as combinações lineares destes vetores é chamado de* espaço gerado *pelos vetores $v_1, \ldots, v_n$. Denotamos isto por*

$$\begin{aligned} W &= span\{v_1, \ldots, v_n\} \\ &= \{v \in V : v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n, a_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Uma outra caracterização de subespaço gerado é a seguinte: W é o menor subespaço de V que contém o conjunto de vetores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ no sentido que qualquer outro subespaço W' de V que contenha estes vetores satisfará $W' \supset W$, já que como $v_1, \ldots, v_n \in W'$ e W' é um subespaço vetorial, então qualquer combinação linear destes vetores também está incluida em W'; logo $W \subset W'$.

2.4 Dependência linear entre vetores

Definição 10. *Seja $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset E$ um conjunto de vetores. Se nenhum dos vetores v_i puder ser escrito como combinação linear dos outros vetores, dizemos que este conjunto é linearmente independente (l.i.). Formalmente, o conjunto X é l.i. se e somente se a única combinação linear nula dos vetores de X for aquela cujos coeficientes são todos nulos, ou seja,*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Evidentemente, todo subconjunto de um conjunto l.i. é também l.i.

Exemplo 4.1. *Em $\mathbb{R}^2$, quaisquer dois vetores que não sejam colineares são l.i.*

Exemplo 4.2. *Em $\mathbb{R}^n$, chamamos de vetores canônicos os vetores definidos como, para todos $i, j = 1, \ldots, n$*

$$(e_i)_j = \begin{cases} 1, & se\ j = i \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

em que o subíndice j denota a coordenada j do i-ésimo vetor canônico. Estes vetores são l.i.

Exemplo 4.3. *Em $\mathbb{R}^{2\times 2}$, as matrizes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ e\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

são l.i.

Exemplo 4.4. *O conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

é um subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, assim como o conjunto $\mathcal{P}_n$ dos polinômios de grau $\leq n$. Note que o conjunto dos polinômios de grau n não é um subespaço, pois a soma de dois polinômios de grau n pode ter grau $< n$. Então, os monômios $1, x, \ldots, n^n$ em $\mathcal{P}_n$ são l.i., pois $\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha n x^n = p(x)$ é o vetor nulo em $\mathcal{P}_n$ somente quando $p(x)$ é o polinômio identicamente nulo, ou seja, $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto implica que $\alpha_0 = \ldots = \alpha_n = 0$, pois um polinômio não nulo de grau k tem no máximo k raízes reais. Podemos, além disso, concluir que o conjunto $X = \{1, x, \ldots, x^n, \ldots\} \subset \mathcal{P}$ é um conjunto infinito l.i.

Teorema 10. *Se* $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m$ *e os vetores* $v_1, \ldots, v_m$ *são l.i., então* $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_m = \beta_m$.

Se um conjunto X de vetores em um espaço vetorial E não é l.i., dizemos que ele é linearmente dependente (l.d.).

Variedades afins

Definição 11. *Um subconjunto* $V \subset E$ *chama-se uma* variedade afim *quando a reta que une dois pontos quaisquer de* V *está contida em* V*. Assim,* $V \subset E$ *é uma variedade afim se e somente se cumpre a seguinte condição:*

$$x, y \in V,\ t \in \mathbb{R} \Rightarrow (1-t)x + ty \in V.$$

Exemplo 4.5. *Todo subespaço é também uma variedade afim.*

Se $V_1, \ldots, V_m \subset E$ são variedades afins, então a intersecção $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_m$ é ainda uma variedade afim. Todo ponto $p \in E$ é uma variedade afim.

Exemplo 4.6. *Sejam* $a_1, \ldots, a_n, b$ *números reais. O conjunto dos pontos* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *tais que*

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b$$

é uma variedade afim, que não contém a origem quando $b \neq 0$*. Se os números* a_i *não forem todos nulos, chamamos esta veriedade* $\mathcal{H}$ *de* hiperplano*. Se* $a_1 = \ldots = a_n = 0$*, então* $\mathcal{H} = \emptyset$ *quando* $b \neq 0$ *e* $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$ *quando* $b = 0$*. Mais geralmente, o conjunto das soluções de um sistema linear de m equações com n incógnitas é uma variedade afim, intersecção das m variedades afins definidas pelas equações do sistema.*

2.4.1 Base e dimensão de um espaço vetorial

Gostaríamos de encontrar, para um espaço W qualquer, um conjunto de vetores de forma que qualquer outro vetor em W possa ser escrito como combinação linear destes vetores (como i, j, k em $\mathbb{R}^3$, por exemplo)

Definição 12. *Uma* base *de um espaço vetorial* E *é um conjunto* $\mathcal{B} \subset E$ *linearmente independente que gera* E*, ou seja, todo vetor* $v \in E$ *se exprime, de modo único, como combinação linear* $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$ *de elementos* $v_1, \ldots, v_m$ *da base* $\mathcal{B}$*. Se* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ *é uma base de* E *e* $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$*, então os números* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ *chamam-se as* coordenadas *do vetor* v *na base* $\mathcal{B}$*.*

Exemplo 4.7. *Base canônica no* $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 4.8. *Os monômios* $1, x, \ldots, x^n$ *formam uma base para o espaço vetorial* $\mathcal{P}_n$ *dos polinômios de grau* $\leq n$. *O conjunto*

$$\{1, x, \ldots, x^n, \ldots\}$$

dos monômios de graus arbitrários constitui uma base (infinita) para o espaço vetorial $\mathcal{P}$ *de todos os polinômios reais.*

Resultados sobre bases

Lema 1. *Sejam* $v_1, \ldots, v_n \neq 0$ *que geram um e.v.* E. *Então dentre estes vetores podemos extrair uma base de* E.

Demonstração. Se $v_1, \ldots, v_n$ forem l.i., não há nada a fazer. Suponha então que eles sejam l.d. Então,

$$x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n = 0$$

com pelo menos algum $x_i \neq 0$. Sem perda de generalidade, suponha que $x_n \neq 0$ (a ordem não importa). Então, escreva

$$v_n = -\frac{x_1}{x_n} v_i - \ldots - \frac{x_{n-1}}{x_n} v_{n-1}$$

Desta forma, $v_1, \ldots, v_{n-1}$ ainda geram E. Prossiga desta maneira até que todos os elementos l.d. tenham sido eliminados e teremos uma base de E. $\square$

O Lema seguinte nos dá uma amostra da ligação entre os espaços vetoriais e as soluções dos sistemas lineares.

Lema 2. *Todo sistema linear homogêneo cujo número de incógnitas é maior do que o número de equações admite uma solução não-trivial.*

Demonstração. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

de m equações e n incógnitas, onde $m < n$. Vamos provar o resultado por indução no número de equações do sistema.

Se tivermos apenas uma equação do tipo

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$$

com $n > 1$ incógnitas, devemos ter um dos dos coeficientes $a_{1i} \neq 0$ (caso contrário esta equação não faria sentido). Podemos supor então, sem perda de generalidade, que $a_{1n} \neq 0$. Isolando x_n na equação dada, temos

$$x_n = -\left(\frac{a_{11}}{a_{1n}}x_1 + \ldots + \frac{a_{1,n-1}}{a_{1n}}x_{n-1}\right).$$

Para obtermos uma solução não-trivial para a equação do sistema, basta escolhermos valores quaisquer para os $x_1, \ldots, x_{n-1}$ (que são variáveis livres) e obteremos x_n.

Para completar a indução, vamos supor que o lema seja verdadeiro para um sistema com $m - 1$ equações. Podemos primeiramente admitir que, no sistema original, temos $a_{mn} \neq 0$ (caso contrário, o sistema não teria m, mas $m-1$ equações). Então, a m-ésima equação pode ser reescrita como

$$x_n = -\left(\frac{a_{m1}}{a_{mn}}x_1 + \ldots + \frac{a_{m,n-1}}{a_{mn}}x_{n-1}\right).$$

Substituindo em cada uma das $m - 1$ primeiras equações a incógnita x_n por esta expressão, obtemos um sistema homogêneo de $m-1$ equações nas $n-1$ primeiras incógnitas. Pela hipótese de indução, este sistema admite uma solução não-trivial $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$, pois $n - 1 > m - 1$. Escrevendo então

$$\alpha_n = -\left(\frac{a_{m1}}{a_{mn}}\alpha_1 + \ldots + \frac{a_{m,n-1}}{a_{mn}}\alpha_{n-1}\right),$$

obtemos uma solução não-trivial $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ do sistema proposto. □

Usando os lemas anteriores, podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 11. *Se o conjunto finito de vetores* $\{v_1, \ldots, v_m\}$ *gera o espaço vetorial* E*, então qualquer conjunto com mais de* m *vetores em* E *é l.d.*

Demonstração. Dados os vetores $w_1, \ldots, w_n \in E$, com $n > m$, para cada $j = 1, \ldots, n$ podemos escrever

$$w_j = \alpha_{1j}v_1 + \ldots + \alpha_{mj}v_m,$$

pois os vetores v_j geram E. Para mostrar que os vetores w_j são l.d., devemos achar coeficientes $x_1, \dots, x_n$, com pelo menos um deles não-nulo, tais que $x_1 w_1 + \ldots + x_n w_n = 0$. Substituindo os w_j por suas expressões em termos de v_j e reorganizando a soma, esta igualdade significa que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{1j}\right) v_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{2j}\right) v_2 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{mj}\right) v_m = 0.$$

Esta condição será satisfeita se todos os somatórios forem nulos, ou seja,

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n & = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

Tal solução existe pelo Lema 2, pois $n > m$. Portanto, w_j são l.d. e o teorema está provado. □

Corolário 2. *Se os vetores $v_1, \dots, v_m$ geram o espaço vetorial E e os vetores $u_1, \dots, u_n$ são l.i., então $n \leq m$.*

Corolário 3. *Se o espaço vetorial E admite uma base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ com n elementos, então qualquer outra base de E possui também n elementos.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}'$ outra base de E com m elementos. Como $\mathcal{B}'$ gera E e $\mathcal{B}$ é l.i., temos que $n \leq m$, pelo Corolário 2. Como $\mathcal{B}$ gera E e $\mathcal{B}'$ é l.i., do mesmo Corolário segue-se que $m \leq n$. Logo, $m = n$. □

Definição 13. *Diz-se que o espaço vetorial E tem* dimensão finita *quando admite uma base $\mathcal{B}$ com um número finito n de elementos. Este número, que é o mesmo para todas as bases de E, chama-se* dimensão *do espaço vetorial E, $n = dim(E)$. Por extensão, diz-se que o espaço vetorial $E = \{0\}$ tem dimensão zero.*

Corolário 4. *Se a dimensão de E é n, um conjunto com n vetores gera E se e somente se é l.i.*

Demonstração. Se $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ gera E e não é l.i., então um dos seus elementos é combinação dos $n - 1$ vetores restantes. Logo, estes $n - 1$ vetores restantes formariam também um conjunto de geradores de E, o que contradiz o Teorema 11, pois todas as bases de E devem ter n vetores linearmente independentes.

Reciprocamente, suponha que X seja l.i. Se X não gerasse E, existiria um vetor $v \in E$ que não seria combinação linear dos elementos de X. Então o conjunto $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ seria l.i., em contradição com o Teorema 11, pois uma base de E com n elementos gera todo o espaço E. □

Exemplo 4.9. *Em* $\mathbb{R}^2$*, duas possíveis bases são* $\{(1, 0), (0, 1)\}$ *e* $\{(1, 1), (0, 1)\}$*. Este espaço tem dimensão 2.*

Exemplo 4.10. *O espaço* $\mathbb{R}^n$ *tem dimensão n (basta pensar na base canônica de cada espaço destes, para* $n \in \mathbb{N}$*).*

Exemplo 4.11. *O espaço* $\mathcal{M}_{2\times 2}$ *tem dimensão 4.*

A seguir, demonstramos um resultado que garante que qualquer espaço vetorial (de dimensão finita) admite uma base.

Teorema 12. *Qualquer conjunto l.i. de um espaço vetorial E com dimensão finita pode ser completado para formar uma base.*

Demonstração. Seja n =dim(E) e $v_1, \ldots, v_r$ um conjunto l.i. Pelo Corolário 2, $r \leq n$. Se esse conjunto gera E, então ele é base e $n = r$. Suponha que não. Então existe um $v_{r+1} \in E$ tal que $v_{r+1} \notin \{v_1, \ldots, v_r\}$. Então v_{r+1} não pode ser combinação linear dos v_i, pois caso contrário os v_i seriam base para E. Logo, $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}\}$ é l.i. Se este conjunto gera E, terminamos. Senão, continuamos no mesmo procedimento até que uma base tenha sido encontrada. □

Corolário 5. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita. Se U é subespaço de E, então*

$$dim(U) \leq dim(E).$$

Demonstração. Para isto, basta pensarmos que uma base de U deve estar contida em E, e assim não pode ter mais elementos do que uma base de E. □

Corolário 6. *Se n =dim*(V)*, com* $V \subset W$ *e dim*$(W) = n$*, então* $V = W$*.*

Mais uma vez, o próximo Corolário é um resultado que pode parecer surpreendente, mas que mostra a ligação entre os espaços vetoriais e os sistemas lineares.

Corolário 7. *Seja* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e suponha que as linhas de A formam um conjunto l.i. Então A é inversível.*

Demonstração. Seja para cada $i = 1, \ldots, n$ o vetor $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ (a linha i da matriz A). Suponha que W é o subespaço gerado por estes vetores. Como as linhas são linearmente independentes por hipótese, a dimensão de W é n. Pelo Corolário 6, $W = \mathbb{R}^n$. Portanto, devem existir escalares $b_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$, tais que

$$\begin{aligned}
e_1 &= b_{11}\alpha_1 + b_{12}\alpha_2 + \ldots + b_{1n}\alpha_n \\
e_2 &= b_{21}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \ldots + b_{2n}\alpha_n \\
&\vdots \\
e_n &= b_{n1}\alpha_1 + b_{n2}\alpha_2 + \ldots + b_{nn}\alpha_n
\end{aligned}$$

em que cada e_i é o i-ésimo vetor canônico em $\mathbb{R}^n$. Portanto, se construirmos uma matriz com os b_{ij} teremos que

$$BA = I$$

ou seja, $B = A^{-1}$. □

Finalmente, temos o seguinte resultado.

Teorema 13. *Se U e W são subespaços de E (espaço vetorial com dimensão finita), então*

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

Demonstração. Note que $U \cap W$ e é subespaço de E. Portanto, deve ter dimensão finita e sua dimensão deve ser menor que a dimensão de E. Assim, sua base deve ser um subconjunto $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ da base de U e da base de W. Escreva isso então como

$$\begin{aligned}
U &= \text{span}[\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \ldots, \beta_m] \\
W &= \text{span}[\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_n]
\end{aligned}$$

Assim, o subespaço $U + W$ é gerado pelos vetores $\{\alpha_i, \beta_j, \gamma_p\}$, com $1 \leq i \leq k$, $k + 1 \leq j \leq m$, $k + 1 \leq p \leq n$. Agora, note que estes vetores formam um conjunto linearmente independente, pois caso contrário poderíamos escrever, por exemplo, $\sum x_i\alpha_i + \sum y_j\beta_j + \sum z_p\gamma_p = 0$ e assim teríamos

$$-\sum y_j\beta_j = \sum x_i\alpha_i + \sum z_p\gamma_p$$

o que implicaria que $\beta_j \in W$. Como os $\beta_j \in U$, isso implicaria que poderíamos escrever

$$\sum y_j\beta_j = \sum c_i\alpha_i$$

para escalares c_i. Mas, como a base de U é linearmente independente, cada um dos escalares y_j deve ser igual a zero; logo,

$$0 = -\sum y_j\beta_j = \sum x_i\alpha_i + \sum z_p\gamma_p$$

e como $\{\alpha_i, \gamma_q\}$ também é l.i., todos os x_i e todos os z_p devem ser iguais a zero. Portanto, $\{\alpha_i, \beta_j, \gamma_p\}$ formam uma base para $U + W$.

Além disso,

$$\dim(U) + \dim(W) = m + n = k + (m + n - k) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W).$$

□

Exemplo. *Seja P o espaço dos polinômios em $\mathbb{R}$ (de qualquer grau). Então os vetores deste espaço tem a forma*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

Seja $f_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, \ldots$. O conjunto infinito $\{f_0, f_1, \ldots\}$ é uma base para V. Claramente este conjunto gera V pois as funções f são, como acima,

$$f(x) = a_0f_0 + a_1f_1 + \ldots + a_nf_n$$

Precisamos mostrar então que as funções na base são l.i. Mas para isto basta mostrarmos que todo subconjunto finito deste conjunto infinito é l.i. (para qualquer coleção finita de vetores neste conjunto). Tome então os conjuntos $\{f_0, \ldots, f_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Suponha então que

$$a_0f_0 + a_1f_1 + \ldots + a_nf_n = 0$$

Isto é o mesmo que dizer que

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$$

para cada $x \in \mathbb{R}$; em outras palavras, todo $x \in \mathbb{R}$ seria uma raiz deste polinômio. Mas sabe-se que um polinômio de grau n não pode ter mais do que n raizes distintas; portanto, os coeficientes $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Mostramos então que existe uma base infinita para P. Isto implica que ele não tem dimensão finita, pelo teorema anterior que dizia que um conjunto l.i. não pode ter mais elementos do que a dimensão do espaço.

Uma última observação é que uma base infinita não requer combinações lineares infinitas; de fato, cada vetor no espaço pode ser obtido com uma combinação linear finita *dos elementos da base. Basta vermos que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ não está neste espaço.*

2.4.2 Coordenadas e Mudança de Base

Para determinarmos as coordenadas de um vetor (isto é, os coeficientes da combinação linear dos elementos da base que o definem) precisamos fazer isso numa certa ordem.

Exemplo. $(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$. *Mas se* $\overline{e_1} = (0,1)$ *e* $\overline{e_2} = (1,0)$, *então as coordenadas mudam para*

$$(2,3) = 3\overline{e_1} + 2\overline{e_2} = (3,2)_{\textit{(nova base)}}$$

Definição 14. *Se E é um espaço vetorial de dimensão finita, uma base ordenada de E é uma* sequência *finita de vetores que é l.i. e que gera E.*

Desta forma, dada uma base ordenada $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ de V, então dado $v \in V$, existe uma única n-tupla de escalares x_i tais que

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i.$$

Frequentemente, ao invés de trabalharmos com as coordenadas de um vetor, vamos precisar trabalhar com a matriz de v relativa à base ordenada $\mathcal{B}$:

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Isto é útil pois vamos tentar descrever o que acontece quando mudamos de base.

Teorema 14. *Seja E um espaço vetorial de dimensão n e sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ duas bases ordenadas de E. Então existe uma matriz única P, inversível e $n \times n$, com entradas tais que*

$$[v]_{\mathcal{B}} = P[v]_{\mathcal{B}'} \quad e \quad [v]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[v]_{\mathcal{B}},$$

para todo $v \in E$. As colunas de P são dadas por

$$P_j = [\alpha'_j]_{\mathcal{B}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Demonstração. Sejam as bases

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \text{ e } \mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$$

Então, existe um conjunto único de escalares P_{ij} tais que

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i, 1 \leq j \leq n.$$

Sejam agora $x_1, \dots, x_n$ as coordenadas de um vetor v na base ordenada $\mathcal{B}$ e $x'_1, \dots, x'_n$ as coordenadas do mesmo vetor v na base ordenada $\mathcal{B}'$. Então,

$$\begin{aligned} v = x'_1\alpha'_1 + \dots + x'_n\alpha'_n &= \sum_{j=1}^{n} x'_j\alpha'_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (P_{ij}x'_j)\alpha_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} P_{ij}x'_j \right) \alpha_i \end{aligned}$$

Como as coordenadas são unicamente determinadas para cada base, isso implica que

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}x'_j, 1 \leq i \leq n$$

Seja então P a matriz formada pelos P_{ij} e X e X' as matrizes coordenadas do vetor v nas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, respectivamente. Então,

$$X = PX'.$$

Como as duas bases são linearmente independentes, $X = 0$ se e somente se $X' = 0$. Logo, segue de um teorema anterior que P é inversível; ou seja

$$X' = P^{-1}X.$$

Em outras palavras,
$$[v]_{\mathcal{B}} = P[v]_{\mathcal{B}'} \text{ e } [v]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[v]_{\mathcal{B}}$$

□

Isto quer dizer que para construirmos P que leva um vetor descrito na base $\mathcal{B}'$ em sua descrição na base $\mathcal{B}$, devemos escrever cada vetor da base $\mathcal{B}'$ em suas coordenadas na base B. Podemos denotar também

$$P = I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

Finalmente, podemos mostrar o seguinte:

Teorema 15. *Seja P uma matriz $n \times n$ inversível, e seja V um espaço n-dimensional definido no mesmo corpo; além disso, seja $\mathcal{B}$ uma base ordenada de V. Então existe uma única base ordenada $\mathcal{B}'$ de V tal que P é a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}'$ para $\mathcal{B}$, ou seja,*

$$[v]_{\mathcal{B}} = P[v]_{\mathcal{B}'} \text{ e } [v]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[v]_{\mathcal{B}}$$

para qualquer vetor $v \in V$.

Demonstração. Seja $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Se $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$ for uma base ordenada de V para a qual a primeira igualdade é válida, então devemos ter

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i.$$

Logo, precisamos somente mostrar que estes vetores α'_j formam uma base de V. Mas:

$$\begin{aligned}
\sum_j P^{-1}_{jk}\alpha'_j &= \sum_j P^{-1}_{jk} \sum_i P_{ij}\alpha_i \\
&= \sum_j \sum_i P_{ij}P^{-1}_{jk}\alpha_i \\
&= \alpha_k
\end{aligned}$$

Logo, o subespaço gerado por $\mathcal{B}'$ contém $\mathcal{B}$ e é portanto igual a V. Logo, $\mathcal{B}'$ é base; logo é claro que as duas afirmações são verdadeiras. □

Exemplo. *Seja* $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ *e* $\mathcal{B}' = \{(1,1),(1,0)\}$ *bases de* $\mathbb{R}^2$*. Então*

$$(1,0) = 0(1,1) + 1(1,0)$$
$$(0,1) = 1(1,1) - 1(1,0)$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Exemplo. *Ainda no* $\mathbb{R}^2$*, considere* $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$*,* $\mathcal{B}' = \{(2,3),(-1,2)\}$*. Para construirmos* $I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$*, escrevemos cada vetor da base* $\mathcal{B}'$ *na base* $\mathcal{B}$*:*

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$
$$(-1,2) = -1(1,0) + 2(0,1)$$

Logo,

$$I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Note que, se $v = (1,1)_{\mathcal{B}'}$*, então*

$$v = 1(2,3) + 1(-1,2) = (1,5)_{\mathcal{B}}.$$

De fato:

$$I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} v_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$(1,0) = \frac{2}{7}(2,3) - \frac{3}{7}(-1,2)$$
$$(0,1) = \frac{1}{7}(2,3) + \frac{2}{7}(-1,2)$$

Assim,

$$I_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ 3/7 & 2/7 \end{pmatrix}.$$

De fato,

$$I_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ -3/7 & 2/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Ainda:

$$I_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = I.$$

Exemplo. *Se* $\mathcal{B} = \{(1,2),(3,5)\}$ *e* $\mathcal{B}' = \{(1,-1),(1,-2)\}$*, para encontrarmos* $I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ *devemos escrever os elementos de* $\mathcal{B}'$ *na base* $\mathcal{B}$*. Mas isso pode ser difícil. Considere então a base canônica em* $\mathbb{R}^2$*. Então:*

$$I_{C}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (1,0) &= -5(1,2) + 2(3,5) \\ (0,1) &= 3(1,2) - 1(3,5) \end{aligned}$$

e assim

$$I_{\mathcal{B}}^{C} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Então:

$$I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = I_{\mathcal{B}}^{C} I_{C}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -11 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Note que

$$I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} v_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -8 & -11 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -19 \\ 7 \end{pmatrix}$$

De fato,

$$\begin{aligned} (1,1)_{\mathcal{B}'} &= (1,-1) + (1,-2) = (2,3)_C \\ (-19,7)_{\mathcal{B}} &= -19(1,2) + 7(3,5) = (2,-3)_C. \end{aligned}$$

Exemplo. *Em* $\mathbb{R}^3$*, se consideramos as bases*

$$\begin{aligned} E &= \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \\ S &= \{(1,0,1),(2,1,2),(1,2,2)\} \end{aligned}$$

temos que

$$I_{E}^{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$I_S^E = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, se $v = (1, 1, 1)_E$*, temos*

$$I_S^E v_E = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S .$$

Exemplo. *Seja* $\theta \in \mathbb{R}$*; a matriz*

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

é inversível com inversa

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Logo, para cada θ*, o conjunto* $\mathcal{B}'$ *formado pelos vetores* $(\cos\theta, \sin\theta)$*,* $(-\sin\theta, \cos\theta)$ *é uma base de* $\mathbb{R}^2$*. Intuitivamente esta base é obtida ao rotacionarmos a base canônica num ângulo* θ*. Se* $\alpha = (x_1, x_2)$*, então*

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta \\ x_2' &= -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3

Transformações Lineares

3.1 Introdução

Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Quando efetuamos um produto entre uma matriz A e um vetor x, estamos levando o espaço $\mathbb{R}^n$ no espaço $\mathbb{R}^m$:

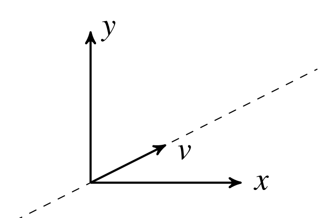
$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto Ax = b \end{aligned}$$

Portanto, podemos encarar uma matriz como uma transformação no espaço.

Exemplo 1.1.

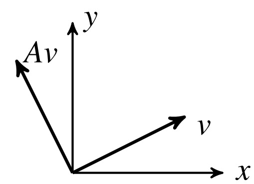
$$A = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Esta transformação (às vezes chamada de homotetia*) não movimenta um vetor no plano, mas altera seu tamanho. Se $c \in \mathbb{R}$, e $v = (x, y)$, $Av = (cx, cy)$ está sobre a reta que passa pelo vetor v.*



Exemplo 1.2.

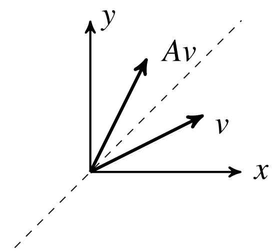
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Esta matriz rotaciona qualquer vetor por 90 graus no sentido anti-horário: $A(1,0) = (0,1)$*,* $A(0,1) = (-1,0)$.

Exemplo 1.3.

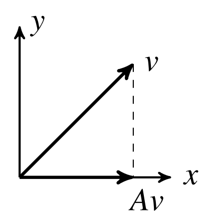
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Esta matriz reflete todo vetor no eixo de simetria de 45 graus.

Exemplo 1.4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Esta matriz toma qualquer vetor do espaço e projeta no subespaço definido por $x_2 = 0$*, ou seja, no eixo* x_1*. Este eixo é o espaço coluna de A, enquanto que seu espaço nulo é o eixo* $x_1 = 0$*.*

É importante notar, no entanto, que algumas transformações não podem ser realizadas através de matrizes:

(i) É impossível mover a origem, já que $A0 = 0$.

(ii) Se $Ax = x'$, então $A(2x) = 2x'$, ou seja, $A(cx) = cAx$.

(iii) Se $Ax = x'$ e $Ay = y'$, então $A(x + y) = x' + y'$, ou seja, $A(x + y) = Ax + Ay$.

Estas regras vem da definição da multiplicação entre matrizes, e definem o que chamamos de *transformação linear*.

Definição 15. *Sejam E, F espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$. Uma transformação linear T é uma função $T : E \to F$ que associa a cada $u \in E$ um vetor $v = T(u) \in F$ e que satisfaz a condição seguinte: para todos $u, w \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ temos que*

$$T(\alpha u + w) = \alpha T(u) + T(w).$$

Para todo número $c, d \in \mathbb{R}$ e vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$, a multiplicação de matrizes satisfaz a regra da linearidade

$$A(cx + dy) = c(Ax) + d(Ay).$$

Toda transformação que satisfaz esta propriedade é uma transformação linear. Portanto, toda matriz define uma transformação linear. Mas, será que toda transformação linear leva a uma matriz? Veremos que, em espaços de dimensão finita, isso é verdadeiro.

Tome como exemplo o espaço $\mathcal{P}_n$, polinômios de grau $\leq n$. Este espaço tem dimensão $n + 1$.

Exemplo 1.5. *A diferenciação, d/dx, é uma transformação linear:*

$$\begin{aligned} Ap &= \frac{d}{dx} p(x) \\ &= \frac{d}{dx}(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) \\ &= a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.6. *A integração de 0 a x também é linear (leva $\mathcal{P}_n$ a $\mathcal{P}_{n+1}$):*

$$\begin{aligned} Ap &= \int_0^x p(x) dx \\ &= \int_0^x (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) dx \\ &= a_0 x + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \end{aligned}$$

A definição abaixo nos dá uma ideia de onde essas transformações lineares vivem e das relações entre elas.

Definição 16. *Seja $\mathcal{L}(E; F)$ o conjunto das transformações lineares de E em F. Então, $\mathcal{L}(E; F)$ é um espaço vetorial. As transformações lineares $T : E \to E$ são chamadas* operadores lineares *em E. Por sua vez, as transformações lineares $\varphi : E \to \mathbb{R}$, com valores numéricos, são chamadas* funcionais *lineares. Escreve-se E^* em vez de $\mathcal{L}(E; \mathbb{R})$ e o conjunto E^* dos funcionais lineares $\varphi : E \to \mathbb{R}$ chama-se* espaço vetorial dual *de E.*

3.2 Matriz de uma transformação linear

A linearidade é importante pois nos dá uma propriedade crucial: se conhecermos a ação de uma transformação em todos os vetores da base, conhecemos a ação da transformação em todos os vetores do espaço gerado por esta base, visto que cada vetor do espaço é apenas combinação linear de todos os vetores da base. Depois que sabemos a ação de uma transformação na base, não há mais graus de liberdade possíveis: a transformação fica inteiramente determinada.

Exemplo 2.1. *Que transformação linear leva*

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ em } Ax_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ em } Ax_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}?$$

A resposta deve ser a multiplicação pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Agora, considere outro problema: encontrar a matriz que representa a diferenciação, e a matriz que representa a integração em um intervalo. Basta, para isto, definirmos uma base para o espaço onde as transformações serão aplicadas. Para os polinômios de grau ≤ 3, cuja dimensão é 4, existe uma base natural que é a base dos monômios,

$$p_1 = 1, \quad p_2 = x, \quad p_3 = x^2, \quad p_4 = x^3.$$

Esta base não é única, mas é bastante conveniente. Agora, vamos olhar para o efeito da diferenciação nesta base: sejam $q_1 = 1$, $q_2 = x$, $q_3 = x^2$ em $\mathcal{P}_2$. Então

$$Ap_1 = 0, \quad Ap_2 = 1 = q_1,$$
$$Ap_3 = 2x = 2q_2, \quad Ap_4 = 3x^2 = 3q_3.$$

Note que

$$A : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2, \text{ tal que } A_{\text{diff}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

A derivada de qualquer outra combinação de polinômios é uma combinação linear dos membros da base, e portanto aplicar a matriz da transformação a este polinômio é equivalente a aplicá-la aos vetores da base e combinar os resultados.

Suponha que os vetores $p_1, \ldots, p_n$ são base para o espaço V, e $q_1, \ldots, q_m$ formam uma base para o espaço W. Então, cada transformação linear A de V para W é representada por uma matriz. A j-ésima coluna é encontrada ao aplicarmos A ao j-ésimo vetor da base de W; o resultado Ap_j é combinação dos q e os coeficientes desta combinação vão na coluna j de A:

$$Ap_j = a_{1,j}q_1 + \ldots + a_{m,j}q_m.$$

Para a matriz de diferenciação, a coluna 1 veio de p_1: sua derivada era zero, então a primeira coluna era nula. A última coluna veio de x^3: a derivada era $3x^2$, e assim o coeficiente 3 está na linha correspondente a $x^2 = p_3$.

Fazendo a mesma coisa para a integração, que vai do espaço $\mathcal{P}_2$ no espaço $\mathcal{P}_3$. Devemos então escolher uma base para $\mathcal{P}_3$. A base mais natural para este espaço é justamente $q_1 = 1, q_2 = x, q_3 = x^2, q_4 = x^3$. Desta forma, teremos, para cada vetor da base do espaço $\mathcal{P}_3$:

$$\begin{aligned} &Ap_1 = x = q_2, \quad Ap_2 = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}q_3, \\ &Ap_3 = \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}q_4. \end{aligned}$$

Assim, a matriz que representa esta transformação linear é

$$A_{\text{int}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Observação: Enxergamos a integração como a operação inversa da diferenciação, isto é, a integração seguida da diferenciação nos dão o resultado original de volta. Se tomarmos a matriz de diferenciação na base das cúbicas, que é uma matriz 3×4, teremos:

$$A_{\text{diff}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ e } A_{\text{diff}}A_{\text{int}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, o operador de diferenciação nesta base é a inversa à esquerda da integração. Como para matrizes retangulares é impossível termos inversas dos dois lados, o produto $A_{\text{int}}A_{\text{diff}}$ não pode ser igual à identidade; mas isto não ocorre de qualquer forma, já que a derivada de uma constante é zero, e a integral de zero nunca pode trazer esta constante de volta (a primeira linha do produto citado é nula).

As transformações lineares aqui representadas (e todas as outras) tem representação matricial, mas uma transformação linear não é uma matriz: uma matriz representa a transformação em uma base dada. Portanto, a matriz usada para representarmos uma transformação linear varia de acordo com a base escolhida para o espaço.

3.2.1 Matriz de uma transformação linear em relação a uma base do domínio e a uma base do contradomínio.

Uma transformação linear $T : E \to F$ é uma função especial que é linear, e vai do espaço vetorial E no espaço vetorial F. Em geral, para definirmos uma função, precisamos definir o valor de $f(x)$ para todo x no domínio de f. No caso das transformações lineares, é bem mais fácil definirmos esta função, pois basta fazê-lo em cada elemento da base.

Sejam E, F espaços vetoriais de dimensão finita e $\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de E. Todo vetor $v \in E$ se exprime, de modo único, como combinação linear

$$v = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$$

de elementos da base β. Para qualquer transformação linear $T : E \to F$ e para qualquer vetor $v \in E$, temos que

$$\begin{aligned} T(v) &= T(x_1u_1 + \ldots + x_nu_n) \\ &= x_1T(u_1) + \ldots + x_nT(u_n), \end{aligned}$$

ou seja, a definição de T depende apenas da aplicação da transformação linear nos vetores $u_i \in \beta$.

Como consequência, se quisermos definir uma transformação linear $T : E \to F$, basta escolhermos uma base γ para F, e para cada $j = 1, \ldots, n$ um vetor

$$v_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})_\gamma \in F$$

e dizer que $v_j = T(u_j)$ é a imagem do j-ésimo vetor da base β pela transformação linear T. A partir daí, fica determinada a imagem $T(v)$ de qualquer vetor $v \in E$, pois se

$$v = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n = (x_1, \ldots, x_n)_\beta,$$

então

$$
\begin{aligned}
y = T(v) = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j u_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j T(u_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(a_{1j}x_j, a_{2j}x_j, \ldots, a_{mj}x_j\right)_\gamma \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum a_{2j}x_j, \ldots, \sum a_{mj}x_j\right)_\gamma,
\end{aligned}
$$

ou seja, cada coordenada y_i do vetor y na base γ é calculada como

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n
\end{aligned}
$$

Portanto, toda transformação linear $T : E \to F$ fica inteiramente determinada por uma matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Os vetores-coluna desta matriz são as coordenadas dos vetores v_j na base γ, em que cada $v_j = T(u_j)$, ou seja, imagem do vetor u_j da base β de E. A imagem de $T(v)$ é o vetor $(y_1, \ldots, y_m)_\gamma \in F$ cujas coordenadas são dadas pelas equações acima.

O resultado a seguir será útil mais à frente.

Teorema 16. *Para toda matriz $A \in \mathcal{M}(m\times n)$, o número de linhas l.i. de A é igual ao número de colunas l.i. de A.*

Demonstração. Seja p o número de colunas l.i. da matriz A. Então existem p vetores

$$w_k = \begin{pmatrix} w_{1k} \\ \vdots \\ w_{mk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

tais que cada uma das colunas

$$a_{(:,j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, 1 \le j \le n$$

de A é combinação linear dos $w_1, \ldots, w_p$:

$$a_{(:,j)} = \sum_{k=1}^{p} c_{kj} w_k, \qquad 1 \le j \le n.$$

Tomando a i-ésima coordenada de cada um dos membros desta equação, vemos que

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} c_{kj} w_{ik} = \sum_{k=1}^{p} w_{ik} c_{kj}, \tag{3.1}$$

para quaisquer i, j, com $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$. Considerando agora os vetores-linha $a_{(i,:)} = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ da matriz A, juntamente com os vetores $c_k = (c_{k1}, \ldots, c_{kn})$, $1 \le k \le p$, observamos que a igualdade entre o primeiro e o terceiro membros de (3.1) significa que, para todo $i = 1, \ldots, m$ tem-se

$$a_{(i,:)} = \sum_{k=1}^{p} w_{ik} c_k, \qquad 1 \le i \le m.$$

Assim, os vetores linha de A são combinações lineares de $c_1, \ldots, c_p$, portanto o número de linhas l.i. de A é $\le p$. Aplicando este resultado à matriz A^T, que tem como linhas as colunas de A, concluimos que o o número de colunas l.i. de A é menor ou igual ao número de linhas l.i. de A e assim temos o resultado completo. □

3.3 Rotações, projeções e reflexões.

Já vimos que rotações de 90 graus, projeções no eixo x e reflexões com relação à linha de 45 graus em $\mathbb{R}^2$ eram representadas por matrizes simples da forma

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

respectivamente. Mas é lógico pensar que rotações com outros ângulos, reflexões e projeções em outros eixos serão igualmente simples, já que estas são todas transformações lineares que passam pela origem ($A0 = 0$). Assim, vamos primeiramente considerar o plano e seus vetores básicos $(1, 0), (0, 1)$ para tentarmos visualizar estas transformações em geral.

Rotação. Na Figura 3.1, mostramos a rotação por um ângulo θ no sentido anti-horário. Podemos ver o efeito desta rotação nos dois vetores básicos, onde $c = \cos\theta$ e $s = \sin\theta$. A rotação aplicada ao primeiro vetor da base resulta em $(\cos\theta, \sin\theta)$, cujo comprimento é ainda 1. Se aplicada ao segundo vetor, a rotação resulta em $(-\sin\theta, \cos\theta)$. Assim, pela definição da transformação linear que vimos antes, estas são as colunas da matriz da transformação, e assim temos Q_θ. Com esta transformação, podemos exemplificar o comportamento das trans-

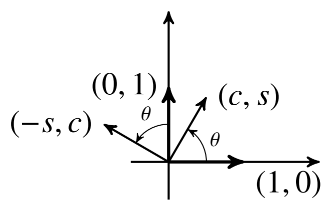


Figura 3.1: Rotação por um ângulo θ.

formações enquanto matrizes.

(i) A inversa de Q_θ equivale à rotação por θ no sentido contrário:

$$Q_\theta Q_{-\theta} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) O quadrado de Q_θ (ou seja, a aplicação desta matriz duas vezes sobre o mesmo vetor) equivale à rotação por um ângulo 2θ:

$$\begin{aligned} Q_\theta^2 &= \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c^2 - s^2 & -2cs \\ 2cs & c^2 - s^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) O produto de Q_θ e Q_φ é equivalente à rotação por $\theta + \varphi$:

$$\begin{aligned} Q_\theta Q_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix} = Q_{\theta+\varphi}. \end{aligned}$$

Estas propriedades não acontecem por acidente: a multiplicação de matrizes é definida para que estas propriedades sejam verdadeiras para as transformações lineares: o produto das matrizes das transformações lineares é o produto das transformações, ou mais exatamente, a composição das transformações.

Projeção Na Figura 3.2 representamos a projeção dos vetores básicos na reta determinada pelo ângulo θ. Note que o comprimento da projeção é $c = \cos\theta$. As-

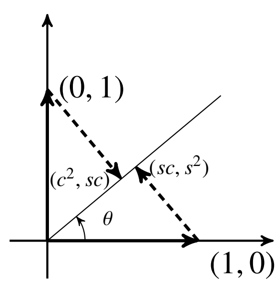


Figura 3.2: Projeção ortogonal na reta que faz ângulo θ com o eixo x.

sim, o ponto de projeção de $(1, 0)$ é exatamente $c(c, s)$. Similarmente, a projeção de $(0, 1)$ é $s(c, s)$.

A matriz desta transformação não pode possuir inversa, pois a projeção não pode ser desfeita. Pontos do tipo $(-s, c)$ são projetados na origem (voltaremos a este fato mais tarde). Ao mesmo tempo, todos os pontos na linha θ são projetados neles mesmos! Em outras palavras, projetar duas vezes é o mesmo que projetar uma vez, e então $P^2 = P$:

$$P^2 = \begin{pmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} c^2(c^2+s^2) & cs(c^2+s^2) \\ cs(c^2+s^2) & s^2(c^2+s^2) \end{pmatrix}.$$

Reflexão Na Figura 3.3, vemos a reflexão de $(1, 0)$ na reta que faz ângulo θ com o eixo x. O comprimento da reflexão é igual ao comprimento do vetor original, assim como na rotação. No entanto, estas transformações são bem diferentes: aqui, a reta definida por θ continua a mesma, e os pontos são apenas refletidos, como que por um espelho.

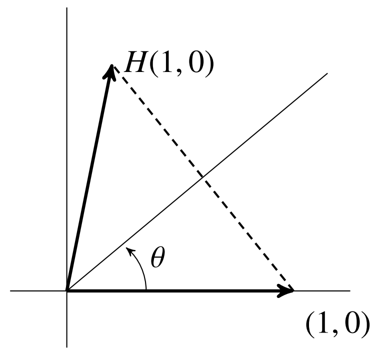


Figura 3.3: Reflexão em torno do eixo que faz ângulo θ com o eixo x.

A matriz desta transformação tem uma propriedade especial: $H^2 = I$, ou seja, duas reflexões trazem de volta o original. Assim, uma reflexão é sua própria inversa. Para vermos isso em termos matriciais, note primeiramente que $H = 2P - I$. Assim, $Hx + x = 2Px$, ou seja, o elemento refletido mais o original é igual a duas vezes sua projeção. Portanto,

$$H^2 = (2P - I)^2 = 4P^2 - 4P + I = I,$$

já que toda projeção satisfaz $P^2 = P$.

3.4 Produto de transformações lineares

Definição 17. *Suponha que T e S são transformações lineares tais que*

$$T : V \to W, \qquad S : U \to V.$$

Então,

$$\begin{aligned} (T \circ S) :& U \to V \to W \\ & u \mapsto S(u) \mapsto T(S(u)). \end{aligned}$$

Logo, a composição $(T \circ S) : U \to W$ também é uma transformação linear.

Observação Sejam $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ projeções ortogonais sobre duas retas do plano, uma das quais é perpendicular à outra. Todo vetor $v \in \mathbb{R}^2$ é a diagonal de um retângulo que tem Pv e Qv como lados. Segue-se então que $v = Pv + Qv$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$, ou seja, $P+Q = I$. Logo, $Q = I-P$ e portanto $PQ = P(I-P) = P-P^2$. Como sabemos que a projeção satisfaz $P^2 = P$, temos que $PQ = 0$ mesmo com $P, Q \neq 0$.

Definição 18. *Um operador A chama-se* nilpotente *quando, para algum $n \in \mathbb{N}$, tem-se $A^n = 0$.*

Exemplo 4.1. *O operador de derivação que vimos anteriormente é nilpotente, pois se ele age de $\mathcal{P}_n$ em $\mathcal{P}_{n-1}$, então $D^{n+1}p = 0$ para todo p, ou seja, $D^{n+1} = 0$.*

3.5 Os Espaços Fundamentais

Imagem

Agora, vamos considerar o exemplo de um sistema de equações lineares de três equações e duas incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Como nesse caso temos mais equações que incógnitas, é bastante provável que o sistema não tenha solução. Um sistema com $m > n$ poderá ser resolvido se o lado direito do sistema (aqui, b) estiver contido em um subespaço vetorial especial: *o sistema $Ax = b$ poderá ser resolvido se e somente se o vetor b puder ser escrito como combinação linear das colunas de A.*

Para ver isto, note que o sistema pode ser reescrito da seguinte forma:

$$u \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Assim, note que o subconjunto dos vetores que podem ser gerados como lado direito do sistema é exatamente o conjunto de todas as combinações lineares das colunas de A. Portanto, $Ax = b$ pode ser resolvido se e somente se b estiver contido no plano que é gerado pelos dois vetores coluna de A. Se b não estiver contido neste plano, então ele não pode ser obtido como combinação linear das colunas de b. Neste caso, o sistema não tem solução.

Se A representa uma transformação linear, este plano definido pelas colunas de A, é um subespaço importante chamado *espaço coluna de* A, ou *imagem* de A (ou ainda, imagem da transformação representada pela matriz A). Por um lado, se $A = 0$ então o espaço coluna de A será formado apenas pelo vetor $b = 0$; no outro extremo, qualquer matriz inversível em $\mathbb{R}^{n\times n}$ terá todo o espaço $\mathbb{R}^n$ como espaço coluna (qualquer lado direito em $\mathbb{R}^n$ define uma solução para o sistema).

Definição 19. *Seja $T : E \to F$ uma transformação linear definida entre espaços vetoriais E, F sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$. Então a* imagem *de T é um subespaço vetorial definido como*

$$\mathcal{I}m(T) = \{y \in F \,|\, y = T(x), \text{ para algum } x \in E\}.$$

Verificamos se esse subconjunto é realmente um subespaço:

(i) Suponha que $y_1, y_2 \in \mathcal{I}m(T)$. Então, existem $x_1, x_2 \in E$ tais que $T(x_1) = y_1$ e $T(x_2) = y_2$. Logo, podemos escrever

$$y_1 + y_2 = T(x_1) + T(x_2) = T(x_1 + x_2),$$

onde a última igualdade é válida pois T é linear. Assim, $y_1 + y_2$ pode ser escrito como $T(w)$, com $w = x_1 + x_2 \in E$ (pois E é espaço vetorial), e assim também pertence à imagem de T.

(ii) Seja $\alpha \in \mathbb{K}$ e $y \in \mathcal{I}m(T)$. Então, $\alpha y = \alpha T(x)$ para algum $x \in E$. Isto implica que $\alpha y = T(\alpha x)$, (já que T é linear) e portanto, αy também pertence à imagem de T.

Portanto, a imagem é, de fato, um subespaço linear.

Definição 20. *Seja $T : E \to F$ uma transformação linear como acima. Então chamamos a dimensão da imagem de T de* posto *de T (ou* rank *de T).*

Se a transformação linear T tem representação como uma matriz A com relação a uma base de E e uma base de F, então podemos falar da imagem de A como sendo

$$\mathcal{I}m(A) = \{b \in F : b = Ax, \text{ para algum } x \in E\}.$$

Isso significa que b está na imagem de A se e somente se o sistema $Ax = b$ tem solução. Neste caso, podemos escrever

$$\begin{aligned} b &= Ax \\ &= A(:,1)x_1 + A(:,2)x_2 + \ldots + A(:,n)x_n, \end{aligned}$$

em que $A(:, j)$ representa a coluna j de A. Desta forma, $b \in \mathcal{I}m(A)$ se e somente se b pode ser escrito como combinação linear das colunas de A (em que os coeficientes da combinação linear são as entradas de x). Com isso, o posto da matriz A é igual ao número de colunas l.i. de A (que é igual ao número de linhas l.i. de A por um teorema anterior).

Como encontrar uma base para a imagem de uma matriz A? Se a matriz U é a matriz na forma escada obtida depois de aplicarmos a A as operações elementares da eliminação gaussiana, então a imagem de A é diferente da imagem de U, mas estes dois espaços têm a mesma dimensão. Para vermos isso, basta observarmos que o número de colunas l.i. de U sempre será igual ao número de colunas l.i. de A, visto que os pivôs aparecem em U justamente nas colunas que eram l.i. em A.

Para recuperarmos uma base para a imagem de A, basta realizarmos a eliminação para obtermos U; os índices das colunas de U que formam uma base para a sua imagem (as colunas que tem os pivôs da eliminação) correspondem aos índices das colunas de A que são base para sua imagem. Isto acontece pois o sistema homogêneo $Ax = 0$ equivale ao sistema homogêneo $Ux = 0$; portanto, $Ax = 0$ determina, assim como $Ux = 0$, a dependência entre os vetores coluna da matriz A (e de U), com coeficientes x, idênticos aos dois sistemas. Se um conjunto de colunas de A é l.i., então as colunas correspondentes de U também são l.i.

Exemplo 5.1. *Finalmente, chegamos ao caso mais fácil, em que o posto é o menor possível (exceto pela matriz nula que possui posto 0).*

Exemplo 5.2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cada linha é um múltiplo da primeira, e assim o espaço gerado pelas linhas de A é unidimensional. De fato, podemos escrever esta matriz como um produto entre *um vetor linha e um vetor coluna:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ao mesmo tempo, as colunas também são múltiplos do mesmo vetor coluna, e assim o espaço gerado pelas colunas também tem dimensão 1.

Teorema 17. *Toda matriz de posto 1 pode ser escrita como* $A = uv^T$.

Núcleo

Agora, queremos analisar as possíveis soluções de um sistema $Ax = 0$. Obviamente, a solução $x = 0$ sempre é possível, mas podem haver outros $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfaçam $Ax = 0$, inclusive infinitas soluções deste tipo (isto sempre acontece quando temos mais variáveis do que equações, ou seja, $n > m$ - Teorema anterior). O conjunto das soluções do sistema homogêneo $Ax = 0$ é também um subespaço vetorial.

Definição 21. *Seja $T : E \to F$ uma transformação linear. Então o* núcleo *de T (ou* espaço nulo*, ou* kernel *de T) é o subespaço vetorial definido como*

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in E \,|\, T(x) = 0\}.$$

Analogamente ao caso da imagem, podemos calcular o núcleo da matriz que representa uma transformação linear encontrando todas as soluções do sistema homogêneo definido por essa matriz.

É fácil encontrarmos o núcleo para a matriz do exemplo anterior: basta tomarmos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para percebermos que, da primeira equação, temos que $u = 0$, e pela segunda equação devemos ter igualmente $v = 0$. Portanto, neste caso, apenas o vetor nulo faz parte do núcleo da matriz.

Vamos supor agora que a matriz do sistema é

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

A imagem desta matriz é igual à imagem de A, já que a terceira coluna é combinação linear das outras duas. No entanto, o núcleo desta matriz contém qualquer múltiplo do vetor $(1, 1, -1)$. Portanto, este subespaço é uma reta que passa pela origem.

3.6 Sistemas Retangulares

Considere a seguinte matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

O primeiro pivô é $a_{11} \neq 0$, e assim teremos

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

O candidato a segundo pivô é zero, e assim vamos procurar embaixo dele por uma entrada não-nula. No entanto, todas as entradas abaixo dele são também nulas, e assim poderíamos parar a eliminação por aqui. Mas como esta matriz é retangular, não precisamos declarar a matriz singular; podemos apenas continuar com a eliminação na próxima coluna. Assim, teremos

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pois na quarta coluna o candidato a pivô é nulo, e não podemos fazer mais nenhuma operação.

Assim, podemos como nas matrizes quadradas decompor $A = LU$; neste caso $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Podemos notar assim que L é uma matriz 3×3, ou seja, quadrada de dimensão igual ao número de linhas das matrizes A e U. Caso seja necessário trocar uma linha pela outra no processo e eliminação para evitarmos um pivô nulo, podemos encontrar uma matriz de permutação P tal que $PA = LU$. Resumimos tudo isso no seguinte resultado.

A qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ correspondem uma matriz de permutação P, uma matriz triangular inferior L com diagonal unitária, e uma matriz $m \times n$ na forma escada U tais que $PA = LU$.

Nosso objetivo no momento é olhar para esta forma final e verificar quais as possibilidades para o sistema $Ax = b$.

Se $b = 0$, então as operações da eliminação não tem efeito algum no vetor b; portanto as soluções de $Ax = b$ são as mesmas de $Ux = 0$:

$$Ux = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

As variáveis x_1, x_2, x_3 e x_4 podem ser concentradas em dois grupos: as variáveis básicas, que correspondem a colunas com pivôs não-nulos (neste caso, x_1 e x_3) e as variáveis livres, correspondentes a colunas sem pivôs (neste caso x_2 e x_4).

Para encontrarmos a solução deste sistema, basta então escolhermos valores arbitrários para as variáveis livres; assim, no nosso exemplo teremos

$$\begin{aligned} x_3 &= -\frac{1}{3}x_4 \\ x_1 &= -3x_2 - x_4. \end{aligned}$$

Portanto, este sistema tem infinitas soluções, e qualquer solução é uma combinação do tipo

$$x = \begin{pmatrix} -3x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -\frac{1}{3}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos ver então que o vetor $(-3, 1, 0, 0)$ é a solução quando $x_2 = 1, x_4 = 0$ e o outro vetor é a solução quando $x_2 = 0, x_4 = 1$. Portanto, qualquer outra solução será combinação linear destes vetores: eles formam a base para o espaço nulo de A (que é igual ao espaço nulo de U). O espaço nulo é um subespaço de mesma dimensão que o número de variáveis livres.

No caso não-homogêneo, a situação é diferente, pois depois da eliminação temos um sistema $Ux = c$ da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - 2b_2 + 5b_1 \end{pmatrix}.$$

É claro que a terceira equação implica que o sistema só pode ser consistente se $b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 0$. Em outras palavras, o conjunto de vetores b gerados por Ax não pode ser todo o espaço, pois já temos uma restrição imposta. Mesmo com mais variáveis do que equações, pode ser que não tenhamos solução. Isto também pode ser visto do fato que o espaço das soluções é gerado pelas colunas de A, e assim é gerado pelos vetores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

No entanto, o segundo vetor é 3 vezes o primeiro, e o quarto vetor equivale ao primeiro mais uma fração do terceiro! Portanto, estes vetores são l.d., e correspondem exatamente às colunas sem pivôs!

Escolhendo um vetor no plano $b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 0$, por exemplo $b = (1, 5, 5)$, veremos que após a eliminação, temos o sistema $Ux = c$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, a última equação pode ser eliminada ($0 = 0$) e as outras nos dão

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 - \frac{1}{3} x_4 \\ x_1 &= -2 - 3x_2 - x_4. \end{aligned}$$

Mais uma vez, x_2, x_4 são variáveis livres, e qualquer solução geral pode ser escrita como

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esta é uma soma do primeiro vetor com a solução de $Ax = 0$. *Toda solução de $Ax = b$ é a soma de uma solução particular (obtida quando tomamos as variáveis livres todas iguais a zero) e de uma solução do sistema homogêneo $Ax = 0$.* Estas soluções gerais estão em um conjunto que não é em um subespaço (pois zero não está contido nele) mas é paralelo ao espaço nulo, transladado pela solução particular. Assim, o cálculo da solução do sistema acima envolve os seguintes passos:

- Reduzir $Ax = b$ a $Ux = c$
- Tomar todas as variáveis livres (associadas a colunas sem pivôs) como zero e encontrar uma solução particular de $Ux = c$
- Tomar $c = 0$ e dar a cada variável livre, uma de cada vez, o valor 1 e zero para todas as outras. Encontrar uma solução homogênea através deste processo (ou seja, um vetor x no espaço nulo).

Vemos então que a eliminação nos revela o número de pivôs, e consequentemente o número de variáveis livres. Se r pivôs são não nulos, então existem r variáveis básicas e $n - r$ variáveis livres. Este número r é chamado *posto* (*rank*) da matriz A.

Resumo: Suponha que através da eliminação transformamos $Ax = b$ em $Ux = c$. Seja o número de pivôs não nulos igual a r, as últimas $m - r$ linhas de U nulas. Então, só existe solução para o sistema se as últimas $m - r$ componentes de c também forem nulas. Se $r = m$, sempre existe solução.

A solução geral é a soma de uma solução particular (com todas as variáveis livres iguais a zero) e de uma solução homogênea (com as $n - r$ variáveis livres como parâmetros independentes). Se $r = n$, não existem variáveis livres e o espaço nulo contém somente o vetor $x = 0$.

Existem dois casos extremos:

- Se $r = n$, então não existem variáveis livres para x. ($\mathcal{N} = \{0\}$)
- Se $r = m$, então não existem linhas nulas em U. ($\mathcal{I}m(A) = \mathbb{R}^m$)

A dimensão do espaço coluna $\mathcal{I}m(A)$ é igual ao posto r, e uma base de $\mathcal{I}m(A)$ é formada pelas r colunas de A que correspondem, em U, às colunas contendo pivôs.

Para ver isso com mais clareza, considere um exemplo:

$$U = \begin{pmatrix} d_1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & d_2 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

É claro que esta matriz tem três linhas independentes. Afirmamos que existem também apenas 3 colunas independentes, não mais, mostrando que as 3 colunas que contém pivôs são L.I. Suponha que existam c_1, c_2, c_3 tais que

$$c_1 \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} * \\ d_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} * \\ * \\ d_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Então, como os pivôs são diferentes de zero, é claro que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Portanto, estas colunas são l.i. e formam uma base para o espaço coluna de A.

O espaço nulo à esquerda de A, que é o espaço nulo de A^T, é um subespaço de $\mathbb{R}^m$. A dimensão deste espaço é fácil de ser encontrada, já que o número de variáveis básicas mais o número de variáveis livres deve ser igual ao número total de colunas: logo, $\mathcal{N}(A^T)$ tem dimensão $m - r$, já que

$$\dim(\mathcal{I}m(A)) = \dim(\mathcal{I}m(A^T)) = r.$$

Vamos ver a importância deste espaço mais à frente.

O espaço linha de A tem a mesma dimensão r do espaço linha de U, e eles tem a mesma base pois são o mesmo espaço. Isto ocorre pois as linhas de U são combinações lineares das linhas de A, e portanto as operações elementares não alteram o espaço, apenas revelam sua base, que é formada pelas linhas não nulas de U.

O espaço nulo de A é o espaço nulo de U, pois as soluções que satisfazem $Ax = 0$ também satisfazem $Ux = 0$. As restrições aos vetores do espaço nulo são dadas pelas linhas não nulas de U, e assim o número de linhas nulas de U indica a dimensão do espaço nulo ($n - r$, se tivermos r linhas não nulas). Esta dimensão é às vezes chamada de *nulidade* de A.

Resumindo todas estas considerações, chegamos ao seguinte resultado.

Teorema 18 (Fundamental da Álgebra Linear, Parte I)**.** *Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com r linhas l.i. (ou r colunas l.i.). Então,*

(i) $\mathcal{I}m(A)$ *tem dimensão* r

(ii) $\mathcal{N}(A)$ *tem dimensão* $n - r$

(iii) $\mathcal{I}m(A^T)$ *tem dimensão* r

(iv) $\mathcal{N}(A^T)$ *tem dimensão* $m - r$.

3.7 Existência de Inversas

Sabemos que se A tem uma inversa à esquerda ($BA = I$) e uma inversa à direita ($AC = I$) então as duas inversas são iguais. Agora, através do posto de uma matriz, podemos decidir se ela tem tais inversas ou não: uma inversa existe somente quando o posto da matriz é o maior possível. Sabemos que o posto satisfaz $r \leq m$ e $r \leq n$. Uma matriz $m \times n$ não pode ter mais do que m linhas l.i. ou n colunas l.i. Queremos mostrar então que, quando $r = n$ existe uma inversa à direita, e que quando $r = m$ existe uma inversa à esquerda. No primeiro caso, $Ax = b$ sempre tem solução; no segundo caso, se a solução existir ela é única. Somente uma matriz quadrada pode ter $r = m = n$, e assim somente uma matriz quadrada pode definir um sistema com solução única e existência garantida.

$$\boxed{\begin{matrix} \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} \star & \star \\ \star & \star \\ \star & \star \\ \star & \star \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} \star & \star \\ \star & \star \end{matrix}}$$

- O sistema $Ax = b$ tem pelo menos uma solução x para cada $b$se e somente se as colunas de A geram $\mathbb{R}^m$, ou seja, $r = m$. Neste caso, existe uma inversa à direita $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tal que $AC = I_m$, a matriz identidade de ordem m. Isto só é possível se $m \leq n$ (caso contrário, existiriam mais colunas l.i. do que n, absurdo).

- O sistema $Ax = b$ tem no máximo uma solução x para cada b se e somente se as colunas de A forem linearmente independentes, ou seja, $r = n$. Neste caso, o sistema homogêneo só tem solução trivial e a solução geral será apenas uma solução particular, que é única (não há variáveis livres). Assim, existe uma inversa à esquerda $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tal que $BA = I_n$. Isto só é possível se $m \geq n$.

No primeiro caso, uma solução possível é $x = Cb$, já que assim teríamos $Ax = ACb = b$. Mas podem existir outras soluções se existirem outras inversas à direita.

No segundo caso, se a solução para $Ax = b$ existir, ela tem que ser $x = BAx = Bb$. Mas a solução pode não existir.

Existem fórmulas simples para as inversas à direita e à esquerda, se elas existirem:

$$B = (A^T A)^{-1} A^T \qquad \text{e} \qquad C = A^T (AA^T)^{-1}.$$

O que pode falhar nestas fórmulas é a existência das inversas de A^TA e de AA^T. Vamos mostrar (mais à frente) que estas inversas existem quando o posto de A for n ou m, respectivamente. Note também que estas inversas (à direita e à esquerda) não são únicas.

Exemplo 7.1 (Strang, p. 97)**.** *Considere a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como o posto de A é 2, nossa análise acima sugere uma inversa à direita C. De fato, note que

$$AC = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De fato, existem infinitas inversas à direita; a última linha de C é totalmente arbitrária. Por outro lado, não existe inversa à esquerda, já que a última coluna de BA será nula para qualquer B, o que nos impede de obter a matriz identidade com esse produto.

Para esse exemplo, se usarmos a fórmula $C = A^T(AA^T)^{-1}$, teremos

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/16 & 0 \\ 0 & 1/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, a transposta de A tem infinitas inversas à esquerda:

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & b_{13} \\ 0 & 1/5 & b_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_{2\times 2}.$$

Para uma matriz retangular, não é possível termos, ao mesmo tempo, existência e unicidade. Se $m \neq n$, não podemos ter $r = m$ e $r = n$. Para uma matriz quadrada, vale o oposto: não é possível termos existência sem unicidade. Pode-se dizer que, para que uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ seja não-singular, cada uma das condições seguintes é necessária e suficiente:

1. As colunas de A geram $\mathbb{R}^n$, de modo que $Ax = b$ tenha ao menos uma solução para cada b.

2. As colunas são independentes, de modo que $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$.

3.8 Transformações lineares inversíveis.

Primeiramente, vamos observar alguns exemplos.

Exemplo. *A transformação linear definida pela diferenciação de um polinômio de $\mathcal{P}_n$ e que resulta em um polinômio em $\mathcal{P}_{n-1}$ tem como núcleo o espaço unidimensional de polinômios constantes: $\frac{da_0}{dx} = 0$. Sua imagem é o espaço n dimensional $\mathcal{P}_{n-1}$. A soma da dimensão do núcleo (1) e do posto (n) nos dá a dimensão do espaço original.*

Exemplo. *A integração de 0 a x, vista como transformação linear de $\mathcal{P}_n$ a $\mathcal{P}_{n+1}$ tem núcleo $\{0\}$. Note que a integração não produz polinômios constantes, e portanto não gera todo o $\mathcal{P}_{n+1}$ (ou seja, sua imagem não é todo o espaço de chegada).*

Exemplo 8.1. *A multiplicação por um polinômio fixo como $2 + 3x$ é uma transformação linear:*

$$Ap = (2 + 3x)(a_0 + \ldots + a_n x^n) = 2a_0 + \ldots + 3a_n x^{n+1}.$$

Esta transformação leva $\mathcal{P}_n$ em $\mathcal{P}_{n+1}$, com núcleo contendo apenas $p = 0$.

Se quisermos investigar, agora de maneira teórica, como decidir se uma transformação linear possui inversa ou não, precisamos refinar alguns conceitos.

Definição 22. *Seja T uma transformação linear de E em F.*

- *Se $Im(T) = F$, dizemos que T é* sobrejetora.
- *Se o núcleo de T contiver apenas o vetor nulo, dizemos que esta transformação é* injetora. *Isto é equivalente a dizermos que se $T(u) = T(v)$ então $T(u - v) = 0 \Rightarrow u - v = 0$.*

Teorema 19. *Para que $T : E \to F$ seja inversível, é necessário e suficiente que T seja injetora e sobrejetora.*

Demonstração. Primeiramente, observe que T possui inversa à direita $Q : F \to E$ se e somente se pudermos escrever

$$T(Q(v)) = v, \quad \forall\, v \in F. \tag{3.2}$$

Além disso, T possui inversa à esquerda $S : F \to E$ se e somente se pudermos escrever

$$S(T(u)) = u, \quad \forall\, u \in E. \tag{3.3}$$

- **Afirmação: T é sobrejetora se e somente se possui inversa à direita.** Se T for sobrejetora, então $\mathcal{I}m(T) = F$. Desta forma, todos os vetores de F podem ser escritos como resultado da aplicação de T em algum vetor de E. Em particular, se tomamos uma base $\beta \subset F$, podemos escolher vetores u_i em E tais que $T(u_i) = v_i$, para cada $v_i \in \beta \subset F$. Como vimos que para definir uma transformação linear basta definirmos o resultado da sua aplicação em elementos de uma base do domínio, basta escolhermos a transformação Q que a cada v_i associa u_i como inversa à direita de T; desta forma, $T(Q(v_i)) = T(u_i) = v_i$ para todo $v_i \in F$. Por outro lado, se T admitir inversa à direita $Q : F \to E$, então para todo $v \in F$, $T(Q(v)) = v$, ou seja, $v = T(w)$ para todo $v \in F$ (com $w = Q(v)$) e assim T é sobrejetora (a imagem de T é todo o F).

- **Afirmação: T é injetora se e somente se possui inversa à esquerda.** Se T é injetora, então ela leva um conjunto de vetores l.i. em um conjunto de vetores l.i.: Sejam $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset E$ l.i. Então,

  $$\begin{aligned} \alpha_1 T(u_1) + \ldots + \alpha_n T(u_n) = 0 \\ \Leftrightarrow T(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = 0 \end{aligned}$$

  Como T é injetora, $T(u) = 0 \Rightarrow u = 0$ e assim

  $$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$$

  Agora, como o conjunto $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é l.i., isso implica que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Logo, $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ formam um conjunto l.i. em F.

  Assim, se tomarmos uma base $\{u_i\} \subset E$, podemos definir uma base para F se tomarmos $\{T(u_i), v_i\}$, onde os v_i são acrescentados ao conjunto l.i. Av_i se necessário para completar a base; logo, para definirmos uma inversa à esquerda basta tomarmos $S : F \to E$ tal que $S(T(u_i)) = u_i$ e $S(v_i) = 0$ para todo i.

  Finalmente, se T possui inversa à esquerda $S : F \to E$, então $T(u) = 0 \Rightarrow u = S(T(u)) = S(0) = 0$, ou seja, T é injetora.

□

Se $T : E \to F$ é inversível, dizemos que ela é uma *bijeção* ou um *isomorfismo* entre E e F, e que E e F são isomorfos. Um isomorfismo $T : E \to F$ transforma uma base de E em uma base de F e se uma transformação linear leva uma base de E numa base de F, então ela é um isomorfismo. Desta forma, dois espaços vetoriais de dimensão finita isomorfos tem a mesma dimensão; por outro lado, suponha que E é um espaço vetorial de dimensão n. Se fixarmos uma base $\{v_i\} \subset E$, podemos definir $T : \mathbb{R}^n \to E$ tal que se $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $T(u) = T(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. Desta forma, $Ae_1 = v_1, \ldots, Ae_n = v_n$, em que os $e_i \in \mathbb{R}^n$ são os elementos da base canônica do $\mathbb{R}^n$. Portanto, T transforma a base canônica do $\mathbb{R}^n$ na base de E e portanto define um isomorfismo entre E e $\mathbb{R}^n$: em outras palavras, *todo espaço vetorial de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 8.2. *O espaço $\mathcal{P}_n$ tem dimensão $n + 1$ e portanto é isomorfo a $\mathbb{R}^{n+1}$. O espaço das matrizes $\mathcal{M}(m \times p)$ é isomorfo a $\mathbb{R}^{mp}$.*

3.8.1 Teorema do núcleo e da imagem de uma transformação linear.

Teorema 20 (do Núcleo e da Imagem)**.** *Sejam E, F espaços vetoriais de dimensão finita. Para toda transformação linear $T : E \to F$ temos que*

$$dim(E) = dim\mathcal{N}(T) + dim\mathcal{I}m(T).$$

Demonstração. Vamos mostrar que se $\{T(u_i)\}$ é uma base de $\mathcal{I}m(T)$ e $\{v_i\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, então $\{u_i, v_i\}$ é uma base de E.

Para isto, considere que se tivermos

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_q v_q = 0 \tag{3.4}$$

então aplicando T dos dois lados da equação, teríamos que $\alpha_1 T(u_1) + \ldots + \alpha_p T(u_p) = 0$, já que $v_i \in \mathcal{N}(T)$. Mas, como $\{T(u_i)\}$ é uma base de $\mathcal{I}m(T)$, estes vetores são l.i., e assim $\alpha_i = 0$. Portanto, em (3.4) teríamos apenas $\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_q v_q = 0$. No entanto, como $\{v_i\}$ é base de $\mathcal{N}(T)$, estes vetores são l.i. e logo $\beta_i = 0$. Portanto, $\{u_i, v_i\}$ são l.i.

Em seguida, considere um vetor arbitrário $w \in E$. Como $T(w) \in \mathcal{I}m(T)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} T(w) &= \alpha_1 T(u_1) + \ldots + \alpha_p T(u_p) \\ &\Leftrightarrow T(w - (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_p u_p)) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $w - (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_p u_p) \in \mathcal{N}(A)$, e portanto podemos escrever

$$w - (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_p u_p) = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_q v_q,$$

o que implica que $w = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_q v_q$, e assim estes vetores geram E. □

Corolário 8. *Sejam E, F espaços vetoriais de mesma dimensão finita n. Uma transformação linear $T : E \to F$ é injetiva se e somente se é sobrejetiva e portanto, é um isomorfismo.*

Demonstração. Com efeito, temos

$$n = dim\mathcal{N}(T) + dim\mathcal{I}m(T).$$

Logo, $dim\mathcal{N}(T) = 0 \Leftrightarrow dim\mathcal{I}m(T) = n$. □

Exemplo 8.3. *Descrever a imagem e o núcleo de*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Note que $\mathcal{I}m(A) = span\{(1,0)\}$ e $\mathcal{N}(A) = span\{(x_1, x_1)\} = span\{(1,1)\}$. A dimensão de cada um dos espaços é 1 e sua soma é 2.

Para B, lembre que $\mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(U)$ (em que U é a matriz obtida depois que escalonamos a matriz B) e que $\mathcal{I}m(B)$ não é igual a $\mathcal{I}m(U)$, mas as colunas que geram a imagem de B são as colunas correspondentes às colunas em que aparecem os pivôs de U. Logo, para resolver este problema primeiro escalonamos a matriz B. Assim, $\mathcal{N}(B) = span\{(1,1,-1)\} = span\{(-1,-1,1)\}$ e $\mathcal{I}m(B) = span\{(1,0,0),(0,1,1)\}$. Note ainda que $dim(\mathcal{N}(B)) + dim(\mathcal{I}m(B)) = 1 + 2 = 3$.

Exemplo 8.4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Observação Toda solução de um sistema $Ax = b$ é soma de uma solução particular (onde todas as variáveis livres valem 0) e de uma solução ao sistema homogêneo $Ax = 0$. Isto é equivalente a dizermos que o núcleo e a imagem de A se completam em dimensão para formar o espaço de saída.

Exemplo 8.5.

$$Ax = b : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

solução geral = solução particular + solução homogênea:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.9 Mudança de base

Sejam $U = \{u_1, \dots, u_n\} \subset E$ e $W = \{w_1, \dots, w_m\} \subset F$ bases em relação às quais a matriz da transformação linear $T : E \to F$ é definida. Isto significa que para cada $u_j \in U$ definimos a transformação T como sendo $T(u_j) = v_j$, em que $v_j \in F$. Assim, v_j pode ser escrito como combinação linear dos elementos de W (pois W é base de F) e assim existem $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tais que

$$T(u_j) = v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i, \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Tomando novas bases $U' = \{u'_1, \dots, u'_n\} \subset E$ e $W' = \{w'_1, \dots, w'_m\} \subset F$, a transformação linear T tem uma nova matriz A' definida por

$$T(u'_j) = \sum_{r=1}^{m} a'_{rj} w'_r, \qquad (j = 1, \dots, n). \tag{3.5}$$

Para obtermos a relação entre as matrizes A e A', consideramos as matrizes de mudança de base $P = I_U^{U'} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ e $Q = I_W^{W'} \in \mathbb{K}^{m \times m}$ definidas pelas igualdades

$$u'_j = \sum_{k=1}^{n} p_{kj} u_k \qquad \text{e} \qquad w'_r = \sum_{i=1}^{m} q_{ir} w_i.$$

Agora, podemos escrever cada um dos membros de (3.5) em termos da base W, fazendo

$$\begin{aligned}
T(u'_j) = \sum_{k=1}^{n} p_{kj} T(u_k) &= \sum_{k=1}^{n} p_{kj} \sum_{i=1}^{m} a_{ik} w_i \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_{kj} a_{ik} w_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_{kj} \right) w_i,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{m} a'_{rj} w'_r &= \sum_{r=1}^{m} a'_{rj} \sum_{i=1}^{m} q_{ir} w_i \\
&= \sum_{r=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} a'_{rj} q_{ir} w_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{r=1}^{m} q_{ir} a'_{rj} \right) w_i.
\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de w_i, temos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_{kj} = \sum_{r=1}^{m} q_{ir} a'_{rj},$$

ou seja, $AP = QA'$.

Observe agora que toda matriz de mudança de base é inversível: leva uma base numa base. Assim, podemos concluir que

$$A' = Q^{-1} A P.$$

É útil também observar que se U é uma base de $\mathbb{R}^n$, então a matriz de mudança de base da base canônica para U é aquela cujas n colunas são os vetores $u_1, \ldots, u_n$.

No caso particular de um operador $T : E \to E$ e de suas matrizes A e A' relativas às bases U e U', temos uma única matriz de mudança de base P, o que nos dá

$$A' = P^{-1} A P.$$

3.10 Soma direta

Como vimos que a imagem e o núcleo de uma transformação linear são complementares com relação à dimensão do espaço vetorial em que estão contidos, podemos imaginar uma decomposição do espaço nestes dois subespaços.

Vimos anteriormente que se F_1 e F_2 são subespaços do espaço vetorial E, o subespaço vetorial de E formado pela conjunção dos elementos de F_1 e de F_2 é o conjunto $F_1 + F_2$ de todas as somas $u+v$, onde $u \in F_1$ e $v \in F_2$. No caso particular em que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, escrevemos $F_1 \oplus F_2$ e chamamos esta operação de *soma direta*.

Existe uma noção análoga à de soma direta, que é o produto cartesiano de dois espaços vetoriais E_1 e E_2. Estes dois espaços não precisam fazer parte do mesmo espaço E. Os elementos do conjunto $E_1 \times E_2$ são pares ordenados (u, v), $u \in E_1$, $v \in E_2$. As operações que tornam este novo espaço um espaço vetorial são

$$
\begin{aligned}
&(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v'),\\
&\alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v).
\end{aligned}
$$

O vetor nulo é $(0, 0)$ e o inverso aditivo é $(-u, -v)$.

Se $\{u_1, \dots, u_m\} \subset E_1$ e $\{v_1, \dots, v_k\} \subset E_2$, é imediato observarmos que

$$\{(u_1, 0), \dots, (u_m, 0), (0, v_1), \dots, (0, v_k)\} \subset E_1 \times E_2$$

é uma base, de modo que $dim(E_1 \times E_2) = dimE_i + dimE_2$.

Se F_1, F_2 são subespaços de E com $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, então a transformação linear

$$A : F_1 \times F_2 \to F_1 \oplus F_2$$

definida por $A(u, v) = u + v, u \in F_1, v \in F_2$ é um isomorfismo, pois se

$$\{u_1, \dots, u_m\} \subset F_1$$

e

$$\{v_1, \dots, v_n\} \subset F_2$$

são bases, então a base

$$\{(u_1, 0), \dots, (u_m, 0), (0, v_1), \dots, (0, v_n)\} \subset F_1 \times F_2$$

é transformada por A no conjunto

$$\{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\}$$

que é, por sua vez, uma base de $F_1 \oplus F_2$. Segue-se que $dim(F_1 \oplus F_2) = dimF_1 + dimF_2 = m + n$.

No caso mais geral, em que a interseção $F_1 \cap F_2$ não se reduz necessariamente ao vetor nulo, a soma $F_1 + F_2$ pode não ser mais uma soma direta, mas ainda podemos definir a transformação linear

$$A : F_1 \times F_2 \to F_1 + F_2$$

de forma que $A(u, v) = u + v$. Obviamente, A é sobrejetiva: todo elemento de $F_1 + F_2$ pode ser representado como imagem por A de um vetor em $F_1 \times F_2$. Seu núcleo é formado pelos pares (u, v) tais que $u + v = 0$, ou seja $v = -u$. Neste caso, ambos $u, v \in F_1 \cap F_2$. A correspondência $u \mapsto (u, -u)$ é um isomorfismo entre $F_1 \cap F_2$ e $\mathcal{N}(A)$. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos então que

$$\begin{aligned} dimF_1 + dimF_2 &= dim(F_1 \times F_2) \\ &= dim\mathcal{N}(A) + dim(F_1 + F_2) \\ &= dim(F_1 \cap F_2) + dim(F_1 + F_2). \end{aligned}$$

Assim, enunciamos o seguinte teorema.

Teorema 21. *Sejam F_1, F_2 subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial E. Temos que*

$$dimF_1 + dimF_2 = dim(F_1 \cap F_2) + dim(F_1 + F_2).$$

A noção de soma direta está intimamente ligada à noção de projeção. Se $E = F_1 \oplus F_2$ é a decomposição do espaço vetorial E como soma direta destes subespaços, definimos o operador $P : E \to E$, projeção de E sobre F_1 paralelamente a F_2 da seguinte maneira: todo vetor $w \in E$ se escreve, de modo único, como soma $w = u + v$ de $u \in F_1, v \in F_2$. Escolha então $Pw = u$.

O operador linear assim definido tem imagem F_1 e núcleo F_2. Além disso é fácil ver que P é idempotente (ou seja, $P^2 = P$). Vamos mostrar a seguir que todo operador linear idempotente é uma projeção. Note primeiramente que se $P^2 = P$, então para todo $w \in \mathcal{I}m(P)$, temos que $P(w) = w$ pois $w \in \mathcal{I}m(P) \Rightarrow w = P(v) \Rightarrow P(w) = P(P(v)) = P(v) = w$.

Teorema 22. *Seja $P : E \to E$ um operador linear. Se $P^2 = P$, então E é a soma direta do núcleo com a imagem de P. Além disso, P é a projeção sobre $\mathcal{I}m(P)$ paralelamente a $\mathcal{N}(P)$.*

Demonstração. Todo $v \in E$ se escreve como soma $v = (v - P(v)) + P(v)$, onde $P(v) \in \mathcal{I}m(P)$ e, como $P(v - P(v)) = P(v) - P(P(v)) = P(v) - P(v) = 0$, vemos que $v - P(v) \in \mathcal{N}(P)$. Portanto, $E = \mathcal{N}(P) + \mathcal{I}m(P)$. Se $w \in \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{I}m(P)$, por um lado temos que $P(w) = 0$, e por outro $P(w) = w$; logo, $w = 0$. Assim, $\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{I}m(P) = \{0\}$ e temos que $E = \mathcal{I}m(P) \oplus \mathcal{N}(P)$. O resto é óbvio. □

Exemplo 10.1. *Para todo operador linear $T : E \to E$ num espaço vetorial de dimensão finita vale a relação $dim(E) = dim\mathcal{N}(T) + dim\mathcal{I}m(T)$, mas não temos sempre que esta soma é direta: por exemplo, se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definido por $T(x, y) = (x - y, x - y)$ então tomando $w = (1, 1)$ temos que $w = T(v)$ com $v = (2, 1)$ e $T(w) = 0$, portanto $w \in \mathcal{I}m(T) \cap \mathcal{N}(T)$.*

Definição 23. *Uma* involução *é um operador linear $S : E \to E$ tal que $S^2 = I$, ou seja $S(S(v)) = v$ para todo $v \in E$.*

Em outras palavras, uma involução é um operador inversível, igual ao seu próprio inverso. Um exemplo é a reflexão (ortogonal) no plano em torno de uma reta que passa pela origem. Veremos agora que toda involução é a reflexão em torno de um subespaço, paralelamente a outro.

Teorema 23. *Seja $S : E \to E$ uma involução. Os conjuntos $F_1 = \{u \in E : S(u) = u\}$ e $F_2 = \{v \in E : S(v) = -v\}$ são subespaços vetoriais e $E = F_1 \oplus F_2$. Para todo $w = u + v$ com $u \in F_1, v \in F_2$ tem-se $S(w) = u - v$. Além disso, $P = \frac{1}{2}(S + I)$ é a projeção sobre F_1 paralelamente a F_2.*

Demonstração. Para todo $w \in E$, podemos escrever $w = u + v$, onde $u = \frac{(w+S(w))}{2}$ e $v = \frac{(w-S(w))}{2}$. Como $S^2 = I$, é claro que $S(u) = u$ e $S(v) = -v$, ou seja, $u \in F_1, v \in F_2$. É claro também que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, e que $w = u + v \Rightarrow S(w) = u - v$ se $u \in F_1$ e $v \in F_2$. Finalmente,

$$\begin{aligned} P = \frac{1}{2}(S + I) \Rightarrow P^2 &= \frac{1}{4}(S^2 + 2S + I) \\ &= \frac{1}{4}(2S + 2I) \\ &= \frac{1}{2}(S + I) = P. \end{aligned}$$

Pode-se ver facilmente que o núcleo de P é F_2 e a imagem de P é F_1. □

O caso mais comum de reflexão é aquele em que se tem $dim(E) = n$, $dim(F_1) = n - 1$ e $dim(F_2) = 1$, de modo que S é a reflexão em torno do hiperplano F_1 paralelamente à reta F_2.

CAPÍTULO 4

Ortogonalidade

Nesta unidade, discutiremos as propriedades que caracterizam a ortogonalidade, exemplos de espaços e transformações ortogonais, e algumas aplicações.

4.1 Produtos internos

Os axiomas de espaço vetorial não são suficientes para abordar certas noções geométricas como ângulo, perpendicularismo, comprimento, distância. Para isso, precisamos introduzir a noção de produto interno.

Observamos aqui que, dependendo do espaço vetorial em que estamos trabalhando, precisamos tomar cuidado na definição do produto interno. Por isso, lembramos que no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, definimos para cada número $x \in \mathbb{C}$, com $x = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ o *conjugado* de x como sendo o número $\overline{x} = a - bi$.

Definição 24. *Um* produto interno *num espaço vetorial* ***real*** *E é uma forma bilinear simétrica e positiva em E, ou seja, uma função de $E \times E$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada par de vetores $u, v \in E$ um escalar $\langle u, v\rangle$ chamado o produto interno de u por v de modo que sejam válidas as seguintes propriedades, para quaisquer $u, u', v, v' \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:*

Bilinearidade

$$\begin{aligned}\langle u + u', v\rangle &= \langle u, v\rangle + \langle u', v\rangle,\\ \langle \alpha u, v\rangle &= \alpha\langle u, v\rangle,\\ \langle u, v + v'\rangle &= \langle u, v\rangle + \langle u, v'\rangle,\\ \langle u, \alpha v\rangle &= \alpha\langle u, v\rangle.\end{aligned}$$

Comutatividade $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

Positividade $\langle u, u\rangle > 0$ *para todo* $u \neq 0$*. Como* $\langle 0, v\rangle = \langle 0+0, v\rangle = \langle 0, v\rangle + \langle 0, v\rangle$*, segue-se que* $\langle 0, v\rangle = \langle v, 0\rangle = 0$ *para todo* $v \in E$*.*

Definição 25. *Um* produto interno *num espaço vetorial* ***complexo*** *V é uma forma sesquilinear positiva em V, ou seja, uma função de* $V \times V$ *em* $\mathbb{C}$ *tal que*

- *É* antilinear *na primeira coordenada, ou seja,* $\langle(\lambda u + v, w\rangle = \bar{\lambda}\langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$*, em que* $\bar{\lambda}$ *representa a conjugação complexa.*
- *É linear na segunda coordenada, ou seja,* $f(u, \lambda v + w) = \lambda f(u, v) + f(u, w)$*; Em alguns contextos, f é linear na primeira coordenada e antilinear na segunda; isso não tem consequência nos nossos resultados,* desde que sejamos coerentes e cuidadosos nas conclusões e definições a seguir.

Segue da definição para espaços vetoriais complexos que

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}.$$

Da positividade resulta que se $\langle u, v\rangle = 0$ para todo $v \in E$, então $u = 0$. Com efeito, se $u \neq 0$ teríamos $\langle u, v\rangle \neq 0$ pelo menos quando $v = u$.

Segue-se desta observação que se $u, u' \in E$ são vetores tais que $\langle u, v\rangle = \langle u', v\rangle$ para todo $v \in E$ então $u = u'$, pois isto implica que $\langle u - u', v\rangle = 0$ para todo $v \in E$, logo $u - u' = 0$ e $u = u'$.

Definição 26. *O número não-negativo*

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

chama-se a norma *ou* comprimento *do vetor u (induzida pelo produto interno).*

Com esta notação, temos que $||u||^2 = \langle u, u\rangle$ e a igualdade

$$\langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle$$

lê-se $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\mathrm{Re}(\langle u, v\rangle)$.

Quando $||u|| = 1$, diz-se que $u \in E$ é um *vetor unitário*. Todo vetor $u \neq 0$ se escreve como $u = ||u|| \cdot u'$, onde u' é um vetor unitário. Para isto, basta definirmos $u' = u/||u||$.

Exemplo 1.1. *No $\mathbb{R}^n$, o produto interno canônico dos vetores $u = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ e $v = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ é definido por $\langle u, v\rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n$.*

Com isso, pode-se ver que o produto interno pode ser representado, quando lidamos com matrizes, pelo produto

$$\langle u, v\rangle = u^T v.$$

Já em $\mathbb{C}^n$, o produto interno canônico entre $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$ é dado por

$$\langle u, v\rangle = \overline{u}^T v$$

o que motiva a definição a seguir.

Definição 27. *Para $M \in \mathbb{C}^{m\times n}$, definimos a* hermitiana *de M como sendo a matriz transposta e conjugada de M, ou seja,*

$$M^H = \overline{M}^T$$

Definição 28. *Seja $M \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Dizemos que M é* hermitiana *se $M = M^H$.*

Desta definição segue que uma matriz hermitiana M tem todas as suas entradas diagonais reais.

Exemplo 1.2 (Lei dos Cossenos)**.** *Considere $\mathbb{R}^2$ com o sistema de coordenadas cartesianas. Dados $u = (\alpha_1, \alpha 2)$ e $v = (\beta_1, \beta_2)$, os números*

$$||u|| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \qquad ||v|| = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}$$

medem o comprimento dos vetores definidos por estas coordenadas. Suponha agora que $u, v \neq 0$ e chame de θ o ângulo formado pelos dois vetores. Afirmamos que o produto interno $\langle u, v\rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$ acima definido satisfaz

$$\langle u, v\rangle = ||u||||v|| \cos\theta.$$

Para isto, consideraremos 3 casos.

(i) *Note primeiramente que se u e v são perpendiculares, então*

$$\langle u, v\rangle = ||u||||v|| \cos 90^\circ.$$

De fato, por um lado temos que

$$||u + v||^2 = \langle u + v, u + v\rangle = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\langle u, v\rangle$$

e por outro lado, pelo Teorema de Pitágoras,

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2.$$

Logo, $\langle u, v\rangle = 0$.

(ii) *Agora, note que se* $||u|| = ||v|| = 1$, *então* $\langle u, v\rangle = \cos\theta$. *Com efeito, tomando o vetor unitário* u^* *perpendicular a u (conforme a Figura 4.1) temos, pela definição de seno e cosseno, que*

$$v = (\cos\theta)u + (\sin\theta)u^*.$$

Tomando o produto interno de ambros os membros desta igualdade por u,

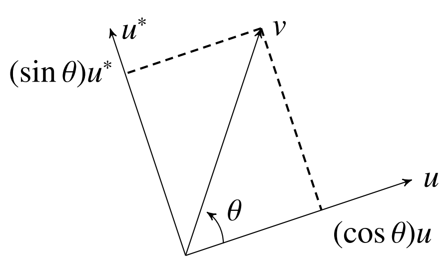


Figura 4.1: Caso (ii) da Lei dos Cossenos em $\mathbb{R}^2$.

temos que

$$\langle u, v\rangle = \cos\theta\langle u, u\rangle + \sin\theta\langle u, u^*\rangle.$$

Como $\langle u, u\rangle = 1$ *e* $\langle u, u^*\rangle = 0$ *pela primeira observação, temos que* $\langle u, v\rangle = \cos\theta$.

(iii) *Finalmente, consideramos o caso geral: seja* $u = ||u||u'$ *e* $v = ||v||v'$, *onde* $u' = (1/||u||)u$ *e* $v' = (1/||v||)v$. *Então,*

$$\langle u, v\rangle = ||u||||v||\langle u', v'\rangle = ||u||||v|| \cos\theta.$$

(pois u', v' *são unitários.)*

Exemplo 1.3. *Seja $E = C^0([a,b])$ o espaço vetorial cujos elementos são as funções contínuas $g, f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Um produto interno em E pode ser definido por*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

Neste caso, a norma da função f é

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx}.$$

Observação: Todo espaço vetorial E de dimensão finita pode ter produto interno. Para isto, dada uma base $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset E$ e $u = \sum \alpha_i u_i$, $v = \sum \beta_i u_i$, basta definirmos $\langle u, v\rangle = \sum \alpha_i \beta_i$.

4.1.1 Vetores ortogonais.

Seja E um espaço vetorial com produto interno. Dois vetores $u, v \in E$ chamam-se *ortogonais* (ou *perpendiculares*) quando $\langle u, v\rangle = 0$. Em particular, 0 é perpendicular a qualquer outro vetor.

Um conjunto $X \subset E$ é ortogonal quando dois vetores distintos quaisquer em X são ortogonais. Se, além disso, todos os vetores de X são unitários então X chama-se conjunto *ortonormal*.

Teorema 24. *Num espaço vetorial E com produto interno, todo conjunto ortogonal X de vetores não-nulos é l.i.*

Demonstração. Sejam $v_1, \ldots, v_n \in X$. Temos $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ se $i \neq j$. Se $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$ é uma combinação linear nula destes vetores, então para cada $i = 1, \ldots, n$ tomamos o produto interno de ambos os lados da igualdade com v_i. Assim,

$$\langle v_i, \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n\rangle = \alpha_1\langle v_i, v_1\rangle + \ldots + \alpha_n\langle v_i, v_n\rangle = 0,$$

ou seja, $\alpha_i\langle v_i, v_i\rangle = \alpha_i\|v_i\|^2 = 0$. Como $v_i \neq 0$ para todo i, $\alpha_i = 0$. Assim, $\sum \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$ para todo i. Portanto, o conjunto é l.i. $\square$

Exemplo 1.4. *A base canônica no $\mathbb{R}^n$ é ortonormal.*

Quando u e v são ortogonais, a igualdade $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle u, v\rangle)$ torna-se

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Esta é a versão do Teorema de Pitágoras para um espaço vetorial geral com produto interno.

Teorema 25. *Suponha que* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *seja uma base ortonormal de V, um espaço vetorial com produto interno de dimensão finita. Então, para todo* $v \in V$*, temos que*

$$v = \langle u_1, v\rangle u_1 + \ldots + \langle u_n, v\rangle u_n.$$

Demonstração. Seja $v \in V$. Sabemos que existem escalares $x_1, \ldots, x_n$ tais que

$$v = x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n.$$

Tomando o produto interno de v com u_i, temos que

$$\langle u_i, v\rangle = x_1\langle u_i, u_1\rangle + \ldots + x_n\langle u_i, u_n\rangle = x_i,$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. □

4.1.2 Adjunta

Teorema 26 (Representação de Riesz, dimensão finita)**.** *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno com* $dim(V) = n$ *e* $f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$*. Então existe único* $v \in V$ *tal que*

$$f(u) = \langle v, u\rangle, \quad \forall u \in V.$$

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que existe um vetor $v \in V$ tal que $f(u) = \langle v, u\rangle$ para todo $u \in V$. Seja $\{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal[1] de V. Então, para todo $u \in V$, podemos escrever

$$u = x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n.$$

Logo, como f é linear,

$$f(u) = x_1 f(u_1) + \ldots + x_n f(u_n).$$

Assim, tome

$$v \overset{\text{def}}{=} \overline{f(u_1)} u_1 + \ldots + \overline{f(u_n)} u_n.$$

Então

$$\begin{aligned}
\langle v, u\rangle &= \langle \overline{f(u_1)} u_1 + \ldots + \overline{f(u_n)} u_n, x_1 u_1 + \ldots + u_n x_n\rangle \\
&= x_1\langle \overline{f(u_1)} u_1 + \ldots + \overline{f(u_n)} u_n, u_1\rangle + \ldots + x_n\langle \overline{f(u_1)} u_1 + \ldots + \overline{f(u_n)} u_n, u_n\rangle \\
&= x_1 f(u_1) + \ldots + x_n f(u_n) \\
&= f(u).
\end{aligned}$$

[1] Veremos mais à frente que sempre é possível obtermos tal base.

Agora, para mostrarmos que v é único, suponha que tenhamos v_1 e v_2 tais que

$$f(u) = \langle v_1, u\rangle = \langle v_2, u\rangle$$

para todo $u \in V$. Então,

$$0 = \langle v_1, u\rangle - \langle v_2, u\rangle = \langle v_1 - v_2, u\rangle$$

para todo $u \in V$. Tomando $u = v_1 - v_2$ concluimos que $v_1 - v_2 = 0$. □

O teorema acima nos diz que, assim como usamos uma matriz para representar uma transformação linear entre dois espaços vetoriais, podemos usar uma representação para um funcional através do produto interno. Em particular, se $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$, então existe $v \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$f(u) = \langle v, u\rangle = v^H u,$$

ou seja, podemos representar a aplicação de f em um vetor u qualquer de $\mathbb{C}^n$ como sendo a multiplicação de uma matriz $1 \times n$ (v^H) por u.

Definição 29. *Seja $T : E \to F$ uma transformação linear do espaço vetorial E no espaço vetorial F (ambos com dimensão finita). Então a adjunta de T, denotada por $T^\star$, é a transformação linear $T^\star : F \to E$ definida da seguinte maneira. Fixe um $v \in F$. Considere o funcional linear $\varphi_v : E \to \mathbb{K}$ tal que*

$$\varphi_v(u) = \langle v, T(u)\rangle$$

definido para todo $u \in E$. Pelo Teorema 26, existe um único vetor $w \in F$ (w depende de v) tal que $\varphi_v(u) = \langle w, u\rangle$. Defina agora $T^\star : F \to E$ uma função tal que

$$T^\star(v) = w.$$

Então

$$\langle v, T(u)\rangle = \langle w, u\rangle = \langle T^\star(v), u\rangle.$$

Finalmente, resta-nos mostrar que $T^\star$ é linear. Mas, para todo $x \in E$,

$$\begin{aligned}
\langle T^\star(\alpha y + z), x\rangle &= \langle \alpha y + z, T(x)\rangle \\
&= \overline{\alpha}\langle y, T(x)\rangle + \langle z, T(x)\rangle \\
&= \overline{\alpha}\langle T^\star(y), x\rangle + \langle T^\star(z), x\rangle \\
&= \langle \alpha T^\star(y) + T^\star(z), x\rangle.
\end{aligned}$$

Por uma das propriedades do produto interno, concluimos que

$$T^\star(\alpha y + z) = \alpha T^\star(y) + T^\star(z)$$

e assim $T^\star$ é uma transformação linear.

Note então que, se A for a matriz de uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, temos que

$$\langle Av, w\rangle = (Av)^T w = v^T(A^T w) = \langle v, A^T w\rangle.$$

Logo, nestes casos, $A^\star = A^T$.

Por outro lado, se M for a matriz de uma transformação linear de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^m$, então

$$\langle Mv, w\rangle = (Mv)^H w = v^H(M^H w) = \langle v, M^H w\rangle.$$

Portanto, nos espaços vetoriais complexos temos que a adjunta é a hermitiana da matriz M.

Exemplo. *Considere o espaço das matrizes reais $m \times n$, $\mathbb{R}^{m\times n}$. Defina para todo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ o funcional*

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

O produto interno no espaço das matrizes reais $m \times n$ é dado por

$$\langle A, B\rangle = tr(B^T A).$$

Note que com esta definição estamos interpretando o espaço das matrizes como o espaço $\mathbb{R}^{mn}$ isomorfo ao espaço original, de forma que cada matriz A pode ser vista como um vetor em que se colocam as colunas de A em sequência e se aplica o produto interno canônico em $\mathbb{R}^{mn}$.

4.2 Complemento ortogonal de um subespaço.

As noções de retas e planos perpendiculares da geometria se estendem em álgebra linear ao conceito de complemento ortogonal, o qual ajuda a entender as relações entre uma transformação linear e sua adjunta.

Seja E um espaço vetorial. Um subespaço $X \subset E$ é ortogonal a outro subespaço $Y \subset E$ quando todo vetor $v \in X$ é ortogonal a todo vetor $w \in Y$.

Definição 30. *Seja E um espaço vetorial com produto interno. O* complemento ortogonal *de um conjunto não-vazio $X \subset E$ é o conjunto $X^{\perp}$ formado pelos vetores $v \in E$ que são ortogonais a todos os vetores $x \in X$. Portanto,*

$$v \in X^{\perp} \Leftrightarrow \langle v, x \rangle = 0 \qquad \textit{para todo } x \in X.$$

Note que:

- Dado $X \subset E$, temos que $\langle 0, x \rangle = 0$ para todo $x \in X$. Logo, $0 \in X^{\perp}$;
- Se $v \in X^{\perp}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então $\langle \alpha v, x \rangle = 0$ para todo $x \in X$, e assim $\alpha v \in X^{\perp}$;
- Se $u, v \in X^{\perp}$, então $\langle u + v, x \rangle = \langle u, x \rangle + \langle v, x \rangle = 0$ para todo $x \in X$. Logo, $u + v \in X^{\perp}$.

Portanto, $X^{\perp}$ é um subespaço vetorial de E (mesmo que X não seja!).

Note também que $X \subset Y \Rightarrow Y^{\perp} \subset X^{\perp}$: seja $y \in Y^{\perp}$. Então, $\langle u, y \rangle = 0 \forall u \in Y$. Como $X \subset Y$, para todo $x \in X$ também temos que $x \in Y$. Assim,

$$\langle x, y \rangle = 0, \forall x \in X, \forall y \in Y^{\perp}.$$

Logo, $y \in X^{\perp} \Rightarrow Y^{\perp} \subset X^{\perp}$.

O contrário não vale. Basta ver para isso que $(Y^{\perp})^{\perp} \neq Y$.

Além disso, $x \in X \cap X^{\perp} \Rightarrow x = 0$, e se v é ortogonal aos vetores $x_1, \ldots, x_m$ então v é ortogonal a qualquer combinação linear deles, pois

$$\left\langle v, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \langle v, x_i \rangle.$$

Portanto, o complemento ortogonal $X^{\perp}$ do conjunto X coincide com o complemento ortogonal $S(X)^{\perp}$ do subespaço vetorial $S(X)$ gerado por X.

Exemplo 2.1. $\{0\}^{\perp} = E$ *e* $E^{\perp} = \{0\}$. *Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é o subespaço vetorial gerado pelo vetor não-nulo $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (reta que passa pela origem), o seu complemento ortogonal $F^{\perp}$ é o hiperplano definido pela equação $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$.*

Atenção: V e W podem ser ortogonais sem que sejam o complemento um do outro no caso em que as dimensões são pequenas. Duas retas contidas no espaço $\mathbb{R}^3$ podem ser ortogonais uma à outra, mas não são o complemento ortogonal uma da outra neste espaço (para isto, precisaríamos de um plano ortogonal).

Teorema 27. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita, munido de produto interno. Para todo subespaço vetorial $F \subset E$ tem-se a decomposição em soma direta $E = F \oplus F^{\perp}$.*

Demonstração. Seja $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset E$ uma base ortonormal cujos primeiros m elementos $u_1, \ldots, u_m$ formam uma base (ortonormal) de F. (veremos depois que isto é possível de se fazer começando com uma base qualquer de F, estendendo-se a base até uma base de E, e depois aplicando um processo de ortonormalização a esta base). Para todo vetor $v \in E$ temos que $v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = z + w$, onde $z = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m \in F$ e $w = \alpha_{m+1} u_{m+1} + \ldots + \alpha_n u_n \in E \backslash F$. Agora, note que, como os $\{u_i\}$ são ortonormais, $\langle z, w \rangle = 0$, e assim $E \backslash F = F^{\perp}$. Portanto, $E = F + F^{\perp}$. Como $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, segue-se que $E = F \oplus F^{\perp}$. □

Corolário 9. *$dim(F)$+$dim(F^{\perp})$ =$dim(E)$.*

Corolário 10. *Para todo subespaço vetorial $F \subset E$, tem-se $(F^{\perp})^{\perp} = F$.*

A divisão de E em partes ortogonais F e $F^{\perp}$ dividirá cada vetor em $x = v + w$, $v \in F$ e $w \in F^{\perp}$; v é a projeção de x em F e w é a projeção de x em $F^{\perp}$. Veremos daqui pra frente como obter essas projeções.

4.3 Segunda parte do Teorema Fundamental da Álgebra Linear

Vamos relembrar o Teorema Fundamental da Álgebra Linear:

Teorema 28 (Fundamental da Álgebra Linear, Parte I)**.** *Se $T : E \to F$, então*

$$dim(E) = dim(\mathcal{N}(T)) + dim(\mathcal{I}m(T))$$

Além disso, se $T : E \to F$, então $T^{\star} : F \to E$ e

$$dim(F) = dim(\mathcal{N}(T^{\star})) + dim(\mathcal{I}m(T^{\star})).$$

Podemos agora provar a segunda parte do Teorema Fundamental da Álgebra Linear.

Teorema 29. *Dada a transformação linear $T : E \to F$, entre espaços vetoriais de dimensão finita munidos de produto interno, temos que*

- $\mathcal{N}(T^\star) = \mathcal{I}m(T)^\perp$
- $\mathcal{I}m(T^\star) = \mathcal{N}(T)^\perp$

Demonstração. Basta provar a primeira igualdade, pois a segunda segue substituindo-se T por $T^\star$. Mas note que

$$v \in \mathcal{N}(T^\star) \Leftrightarrow T^\star(v) = 0 \Leftrightarrow \langle T^\star v, u\rangle = 0 \forall u \in E \Leftrightarrow \langle v, T(u)\rangle = 0 \forall u \in E \Leftrightarrow v \in \mathcal{I}m(T)^\perp.$$

□

Exemplo 3.1. *Seja* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

A tem posto 1, e tanto seu espaço linha quanto seu espaço coluna são retas.

As linhas são múltiplos de $(1,3)$*, e o espaço nulo contém* $(3,-1)$*, sendo ortogonal a todas as linhas. O espaço linha e o espaço nulo são retas perpendiculares em* $\mathbb{R}^2$.

Em contraste, os outros dois subespaços estão em $\mathbb{R}^3$*. O espaço coluna é a reta que passa por* $(1,2,3)$*, e o espaço nulo à esquerda é o plano perpendicular* $y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0$*, que representa justamente* $y^T A = 0$.

Corolário 11 (Alternativa de Fredholm)**.** *Para que o sistema linear* $Ax = b$ *(*$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$*) tenha solução, é necessário e suficiente que o vetor* b *seja perpendicular a toda solução* $y \in \mathbb{R}^m$ *do sistema homogêneo*

$$y^T A = 0,$$

ou seja, $b^T y = 0$.

4.4 Projeção de um vetor sobre um espaço.

Num espaço vetorial E com produto interno, seja u um vetor unitário. Dado qualquer $v \in E$, o vetor $\langle u, v\rangle u$ chama-se a *projeção ortogonal de* v *sobre o eixo que contém* u. Isso se justifica pois, escrevendo $w = v - \langle u, v\rangle u$, tem-se que

$$v = \langle u, v\rangle u + w$$

onde w é perpendicular a u, pois

$$\langle u, w\rangle = \langle u, v\rangle - \langle u, v\rangle\langle u, u\rangle = \langle u, v\rangle - \langle u, v\rangle = 0,$$

já que $\langle u, u\rangle = 1$. (ou seja, $w \in \text{span}\{u\}^{\perp}$.)(figura em construção)

Quando u não é unitário mas é não-nulo, o eixo que contém u é o mesmo que contém o vetor unitário $u' = u/\|u\|$. Portanto, a projeção ortogonal de v sobre este eixo é

$$\mathrm{Pr}_u(v) = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} \cdot u.$$

Em particular, se estivermos trabalhando no $\mathbb{R}^n$, podemos definir a partir desta operação uma *matriz de projeção ortogonal de v na reta contendo u* como sendo

$$P = \frac{uu^T}{u^T u},$$

de forma que $Pv = \frac{uu^T}{u^T u}v = \frac{u^T v}{u^T u}u$. Esta matriz é obviamente uma matriz quadrada de posto 1. Analogamente, se estivermos trabalhando no $\mathbb{C}^n$, a matriz de projeção ortogonal de v na reta contendo u será

$$P = \frac{uu^H}{u^H u},$$

de forma que $Pv = \frac{uu^H}{u^H u}v = \frac{u^H v}{u^H u}u$.

Exemplo 4.1. *A matriz que projeta na reta que passa por $a = (1, 1, 1)$ é*

$$P = \frac{aa^T}{a^T a} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1\ 1\ 1) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tem duas propriedades típicas de projeções: P é simétrica ($P^T = P$) e $P^2 = P$. Além disso, note que o espaço coluna de P consiste da linha que passa por $a = (1, 1, 1)$, e que o espaço nulo de P consiste no plano perpendicular a a:

$$Pv = 0 \Leftrightarrow \frac{aa^T}{a^T a}v = 0 \Leftrightarrow \frac{a^T v}{a^T a}a = 0 \Leftrightarrow a^T v = 0.$$

Teorema 30. *Sejam $x, y \in E$ ortonormais. Então a projeção de $b \in E$ no espaço gerado por x e y é igual à soma das projeções de b no espaço gerado por x e por y.*

Demonstração. Queremos mostrar que

$$\mathrm{Pr}_{\mathrm{span}\{x,y\}} = \mathrm{Pr}_x + \mathrm{Pr}_y.$$

Se $\|x\| = \|y\| = 1$, então

$$\mathrm{Pr}_x(v) = \langle x, v\rangle x, \text{ e } \mathrm{Pr}_y(v) = \langle y, v\rangle y.$$

Então defina a transformação $P : E \to E$ dada por

$$P(v) = \mathrm{Pr}_x(v) + \mathrm{Pr}_y(v).$$

Note primeiramente que P é linear, pois se $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos que

$$\begin{aligned}
P(\alpha u + v) &= \mathrm{Pr}_x(\alpha u + v) + \mathrm{Pr}_y(\alpha u + v) \\
&= \langle x, \alpha u + v\rangle x + \langle y, \alpha u + v\rangle y \\
&= \alpha\langle x, u\rangle + \langle x, v\rangle + \alpha\langle y, u\rangle + \langle y, v\rangle \\
&= \alpha\left(\mathrm{Pr}_x(u) + \mathrm{Pr}_y(u)\right) + \mathrm{Pr}_x(v) + \mathrm{Pr}_y(v) \\
&= \alpha P(u) + P(v).
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que $P = \mathrm{Pr}_{\mathrm{span}\{x,y\}}$:

(i) $P^2 = P$, pois observe que

$$\begin{aligned}
P(P(v)) &= P(\mathrm{Pr}_x(v) + \mathrm{Pr}_y(v)) \\
&= P(\langle x, v\rangle x + \langle y, v\rangle y) \\
&= \mathrm{Pr}_x(\langle x, v\rangle x + \langle y, v\rangle y) + \mathrm{Pr}_y(\langle x, v\rangle x + \langle y, v\rangle y) \\
&= \langle x, \langle x, v\rangle x + \langle y, v\rangle y\rangle x + \langle y, \langle x, v\rangle x + \langle y, v\rangle y\rangle y \\
&= \langle x, v\rangle\langle x, x\rangle x + \langle y, v\rangle\langle x, y\rangle x + \langle x, v\rangle\langle y, x\rangle y + \langle y, v\rangle\langle y, y\rangle y \\
&= \langle x, v\rangle x + \langle y, v\rangle y \\
&= P(v).
\end{aligned}$$

(ii) A imagem de P é formada por vetores y que se escrevem como $y = P(v) = \mathrm{Pr}_x(v) + \mathrm{Pr}_y(v)$ para algum $v \in E$. Agora, como $\mathrm{Pr}_x(v) \in \mathrm{span}\{x\}$ e $\mathrm{Pr}_y(v) \in \mathrm{span}\{y\}$ para todo $v \in E$, temos que $y \in \mathrm{span}\{x\} + \mathrm{span}\{y\}$, que é igual a $\mathrm{span}\{x, y\}$ já que x e y são l.i. (pois são ortogonais).

(iii) O núcleo de P é formado por todos os vetores $v \in E$v que satisfazem $P(v) = 0$. Assim, $v \in \mathcal{N}(P)$ se e somente se

$$\Pr_x(v) = -\Pr_y(v).$$

No entanto, como x e y são ortogonais, isso só ocorre se $v = 0$; caso contrário poderíamos escrever um vetor de span$\{x\}$ como múltiplo de um vetor em span$\{y\}$.

Desta forma, P é a projeção ortogonal sobre span$\{x, y\}$. □

O resultado acima pode ser estendido para um conjunto com qualquer número finito de vetores. Assim, podemos descrever a projeção ortogonal no espaço gerado por um conjunto de vetores ortonormais facilmente. Precisamos então encontrar uma maneira de construir bases ortonormais para qualquer espaço vetorial.

4.4.1 Processo de Gram-Schmidt

Suponha que $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset E$ seja uma base de E, espaço vetorial com produto interno. Então os vetores da base são l.i. Gostaríamos de, a partir dessa base, construir uma base ortonormal para E.

Para começar, podemos observar que é possível transformar qualquer vetor em um vetor unitário dividindo-o pela sua norma. Assim, tomamos inicialmente

$$q_1 = \frac{u_1}{||u_1||}.$$

Se quisermos gerar um vetor q_2 ortogonal a q_1, precisamos subtrair de u_2 qualquer componente dele que esteja na direção de q_1:

$$q_2 = \frac{u_2 - \Pr_{q_1}(u_2)}{||u_2 - \Pr_{q_1}(u_2)||}.$$

Observe que, de fato,

$$\begin{aligned}
\langle q_1, q_2 \rangle &= \langle q_1, \frac{u_2 - \Pr_{q_1}(u_2)}{||u_2 - \Pr_{q_1}(u_2)||} \rangle \\
&= \frac{1}{||u_2 - \Pr_{q_1}(u_2)||} \left(\langle q_1, u_2 \rangle - \langle q_1, \langle q_1, u_2 \rangle q_1 \rangle \right) \\
&= \frac{1}{||u_2 - \Pr_{q_1}(u_2)||} \left(\langle q_1, u_2 \rangle - \langle q_1, u_2 \rangle \langle q_1, q_1 \rangle \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para o terceiro vetor, vamos mais uma vez eliminar a componente de u_3 que esteja no plano definido por q_1 e q_2:

$$q_3 = \frac{u_3 - \mathrm{Pr}_{q_1}(u_3) - \mathrm{Pr}_{q_2}(u_3)}{||u_3 - \mathrm{Pr}_{q_1}(u_3) - \mathrm{Pr}_{q_2}(u_3)||}.$$

Processo de Gram-Schmidt: Começando com um conjunto de vetores independentes $\{u_1, \dots, u_n\}$, obteremos um conjunto de vetores ortonormais $\{q_1, \dots, q_n\}$ ao final do seguinte procedimento:

- $q_1 = \dfrac{u_1}{||u_1||}$
- Para $j = 2, \dots, n$, repita:
  - $q'_j = u_j - \sum_{k=1}^{j-1} \mathrm{Pr}_{q_k}(u_j)$
  - $q_j = \dfrac{q'_j}{||q'_j||}$

4.4.2 A fatoração QR

Suponha que A é uma matriz $m \times n$, com $m \geq n$. Se A tiver posto completo, então isso significa que todas as suas colunas são l.i. Então, através do processo de Gram-Schmidt, podemos transformar o conjunto das colunas de A em um conjunto ortonormal. Suponha que o conjunto ortonormal assim obtido seja armazenado nas colunas de uma matriz Q. Qual é a relação entre estas matrizes?

Se A é $m \times n$, com $m > n$, então Q deve ser uma matriz de mesma dimensão, pois não mudamos o espaço gerado nem a dimensão dos vetores ao aplicarmos Gram-Schmidt. A ideia então é escrever os vetores coluna de A (que chamaremos de a_i) como combinações dos vetores coluna de Q (que chamaremos de q_i). No exemplo anterior, vimos que q_1 era simplesmente a_1 normalizado, enquanto que

$$q'_2 = a_2 - \mathrm{Pr}_{q_1}(a_2)$$

Ainda, como $q_2 = \frac{q'_2}{||q'_2||}$, e pela definição de projeção, temos

$$a_2 = q_2||q'_2|| + \langle q_1, a_2 \rangle q_1.$$

Já para a_3, teremos:

$$a_3 = q_3||q'_3|| + \langle q_2, a_3 \rangle q_2 + \langle q_1, a_3 \rangle q_1.$$

Portanto, podemos escrever em termos matriciais que

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_3 \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle q_1, a_1 \rangle & \langle q_1, a_2 \rangle & \cdots & \langle q_1, a_n \rangle \\ 0 & \langle q_2, a_2 \rangle & \cdots & \langle q_2, a_n \rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \langle q_n, a_n \rangle \end{pmatrix} \\
&= QR
\end{aligned}
$$

em que R é uma matriz triangular superior $n \times n$ inversível.

A fatoração QR é parecida com a LU mas com as colunas de Q ortogonais. Toda matriz m por n com colunas independentes pode ser fatorada em $A = QR$. As colunas de Q são ortonormais entre si.

4.5 Transformações Unitárias; Matrizes Ortogonais

Uma base ortogonal tem todos os vetores ortogonais entre si; uma base ortonormal tem todos os vetores, além de ortogonais, unitários.

Observe que, se $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tem colunas ortonormais entre si, então

$$
\begin{aligned}
Q^T Q &= \begin{pmatrix} - & q_1^T & - \\ - & q_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & q_n^T & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} q_1^T q_1 & q_1^T q_2 & \cdots & q_1^T q_n \\ q_2^T q_1 & q_2^T q_2 & \cdots & q_2^T q_n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ q_n^T q_1 & q_n^T q_2 & \cdots & q_n^T q_n \end{pmatrix} \\
&= I_n.
\end{aligned}
$$

Se $m = n$, então isso significa que Q é inversível e que $Q^T = Q^{-1}$. Se $m > n$ podemos dizer que Q^T é uma inversa à esquerda de Q.

Similarmente, se $C \in \mathbb{C}^{m \times n}$, temos que

$$
C^H C = I_n.
$$

Novamente, se $m = n$, então isso significa que C é inversível e que $C^H = C^{-1}$, e se $m > n$ então C^H é uma inversa à esquerda de C.

Definição 31. *Se $T : E \to E$ é uma transformação linear que satisfaz*

$$T^*(T(u)) = T(T^*(u)) = u, \forall u \in E,$$

então $T^{-1} = T^*$ e dizemos que T é unitária.

A matriz da transformação unitária também é dita matriz unitária; no caso real, dizemos que a matriz é ortogonal.

Exemplo 5.1.

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} . Q^T = Q^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Q gira vetores pelo ângulo θ, e Q^T os gira de volta. As colunas são ortonormais e Q e Q^T também são ortogonais.

Exemplo 5.2. *Não são somente as matrizes de rotação que são ortogonais; as matrizes de permutação (que representam reflexões) também são ortogonais. Exemplo:*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

reflete cada ponto (x, y) no ponto (y, x). Geometricamente, uma Q ortogonal é o produto entre uma rotação e uma reflexão.

As transformações unitárias possuem algumas propriedades que listamos a seguir.

Teorema 31. *Se $T : E \to E$ é unitária, então*

$$||T(u)|| = ||u||$$

para todo $u \in E$. Além disso, os produtos escalares e os ângulos também são preservados:

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

para todos $u, v \in E$.

Demonstração. Pela definição,

$$\begin{aligned}\|T(u)\|^2 &= \langle T(u), T(u)\rangle \\ &= \langle u, T^*(T(u))\rangle \\ &= \langle u, u\rangle = \|u\|^2.\end{aligned}$$

Ainda:

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, T^*(T(u))\rangle = \langle u, u\rangle.$$

□

Isso é intuitivamente verdade pois girar ou refletir o espaço não altera os ângulos entre os vetores.

4.6 Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Se $z = \mathrm{Pr}_u(v)$, temos que $v = z + w$, com $w \perp z$. Pelo Teorema de Pitágoras, teremos que $\|v\|^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2$. Em particular, $\|z\| \leq \|v\|$, ou seja, o comprimento da projeção é menor ou igual ao comprimento de v.

Por outro lado, sabemos que

$$\|\mathrm{Pr}_u(v)\| = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|}.$$

Segue-se então que para quaisquer $u, v \in E$ temos a *Desigualdade de Schwarz*:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

O argumento acima só serve para $u \neq 0$, mas no caso em que $u = 0$ esta prova é óbvia e a desigualdade de Schwarz também é válida.

Um importante caso especial é que $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|$ somente quando u, v forem múltiplos um do outro (ou seja, colineares). Pode-se ver isto pois, no Teorema de Pitágoras, $\|v\|^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2$, então se $\|v\| = \|z\|$ implica que $w = 0$, ou seja, v é múltiplo de u.

Da desigualdade de Schwarz, podemos então provar a desigualdade triangular. Para isto, basta mostrarmos que $\|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$. Mas

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v\rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2.\end{aligned}$$

Logo, a desigualdade triangular é válida também em qualquer espaço vetorial com produto interno.

4.7 O problema de mínimos quadrados

Até agora, consideramos que a solução de um sistema linear $Ax = b$ ou pode ser encontrada, caso $b \in \mathcal{I}m(A)$, ou não pode ser encontrada, caso contrário. Por exemplo, o sistema

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x & = b_1 \\ 3x & = b_2 \\ 4x & = b_3 \end{cases}$$

só tem solução se os lados direitos estiverem na proporção $2 : 3 : 4$. A solução é única se existir, mas só existe se b estiver na mesma reta que o vetor

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Sistemas inconsistentes aparecem com frequência na prática e devem ser resolvidos, ainda que aproximadamente. Desta forma, a melhor solução é quase sempre encontrar uma solução que minimize o erro encontrado em cada componente, ou seja, minimizar o erro em cada uma das m equações. Existem muitas maneiras de se definir esta média do erro, mas a mais adequada é a soma dos quadrados:

$$E^2 = \|ax - b\|^2 = (2x - b_1)^2 + (3x - b_2)^2 + (4x - b_3)^2$$

Se existir uma solução exata para $ax = b$, o erro mínimo é $E = 0$. No caso mais provável em que $b \notin \mathcal{I}m(a)$, a função E^2 é uma função quadrática (parábola) com mínimo no ponto onde

$$\frac{dE^2}{dx} = 2[2(2x - b_1) + 3(3x - b_2) + 4(4x - b_3)] = 0$$

ou seja, a solução *em mínimos quadrados* para o sistema $ax = b$ é

$$\overline{x} = \frac{2b_1 + 3b_2 + 4b_3}{2^2 + 3^2 + 4^2} = \frac{a^T b}{a^T a}.$$

No caso geral, em que $a \in \mathbb{R}^m$, o resultado é o mesmo. Vamos *resolver* o sistema de m equações $ax = b$ através da minimização do erro quadrático definido por

$$E^2(x) = \|ax - b\|^2 = (a_1 x - b_1)^2 + \ldots + (a_m x - b_m)^2.$$

A derivada desta função é nula no ponto onde

$$(a_1 \hat{x} - b_1)a_1 + \ldots (a_m \hat{x} - b_m)a_m = 0$$

Assim, estamos minimizando a distância de b até a reta definida por a, e assim

$$\hat{x} = \frac{a^T b}{a^T a}.$$

Note que $a^T(b - a\hat{x}) = a^T b - \frac{a^T b}{a^T a} a^T a = 0$. Isto significa que *o erro $b - a\hat{x}$ é ortogonal ao espaço gerado por a.*

4.7.1 Quadrados mínimos em várias variáveis

Se estendermos este problema de solução de um sistema sobredeterminado para o caso de várias variáveis, queremos encontrar $\hat{x}$ de forma que a distância

$$E^2 = \|b - A\hat{x}\|^2$$

seja minimizada, ou seja, queremos encontrar

$$p = A\hat{x} \in \mathcal{I}m(A)$$

o mais próximo possível de b. Isso equivale a projetar b no espaço coluna de A. Além disso, a projeção deve ser ortogonal, já que o erro $b - A\hat{x}$ deve ser ortogonal ao espaço coluna de A.

Sabemos que todos os vetores perpendiculares ao espaço coluna estão no núcleo de A^T. Assim:

$$v \in \mathcal{I}m(A) \Leftrightarrow v \in \mathcal{N}(A^T)^\perp$$

Logo, $e = b - A\hat{x}$ deve estar no espaço nulo de A^T, e assim

$$A^T(b - A\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow A^T b = A^T A\hat{x}.$$

Isso pode ser facilmente verificado se derivarmos $E^2(x) = (Ax - b)^T(Ax - b)$, ou seja, $\nabla E^2(\hat{x})$ se e somente se

$$A^T A\hat{x} = A^T b. \tag{4.1}$$

Note então que $A^T A$ é quadrada e simétrica. Chamamos as equações definidas por (4.1) de *equações normais*. Se $A^T A$ for inversível, então

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

A projeção de b na imagem de A é

$$p = A\hat{x} = A(A^T A)^{-1} A^T b.$$

Observações:

- Se b já estiver na imagem de A, então b pode ser escrito como Ax, logo

$$p = A(A^T A)^{-1} A^T Ax = Ax = b.$$

(obviamente, o ponto p mais próximo de b é simplesmente o ponto b)

- No outro extremo, considere que b é perpendicular a todas as colunas, de forma que $A^T b = 0$. Assim, b se projeta sobre o vetor nulo:

$$p = A(A^T A)^{-1} A^T b = A(A^T A)^{-1} 0 = 0.$$

- Quando A for quadrada e inversível, a imagem equivale a todo o espaço. Cada vetor é projetado sobre si mesmo:

$$p = A(A^T A)^{-1} A^T b = AA^{-1}(A^T)^{-1} A^T b = b.$$

Observe que só é possível escrever A^{-1} neste caso!

- Se pudermos fazer a fatoração QR de A, podemos escrever o sistema definido pelas equações normais como

$$\begin{aligned} A^T A = (QR)^T (QR) = R^T Q^T QR = R^T R. \\ A^T A\overline{x} = A^T b \Leftrightarrow R^T R\overline{x} = R^T Q^T b \\ \Leftrightarrow R\overline{x} = Q^T b. \end{aligned}$$

O último sistema pode ser resolvido por retrosubstituição.

4.7.2 O produto A^TA e as matrizes de projeção

A matriz A^TA é simétrica: $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$.

Além disso, temos o seguinte:

Lema 3. *Seja $T : E \to F$ uma transformação linear e $T^* : F \to E$ sua adjunta. Então o núcleo de $T^* \circ T$ é o mesmo que o núcleo de T.*

Demonstração. Se $x \in \mathcal{N}(T)$, então $T(x) = 0$. Logo, $T^*(T(x)) = T^*(0) = 0$, o que implica que $x \in \mathcal{N}(T^* \circ T)$.

Por outro lado, se $x \in \mathcal{N}(T^* \circ T)$, então $T^*(T(x)) = 0$ e assim

$$\langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, T^*(T(x))\rangle = \langle x, 0\rangle = 0.$$

Isto implica que $T(x) = 0$, e portanto, $x \in \mathcal{N}(T)$. $\square$

Assim, se $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, então $\mathcal{N}(A^TA) = \{0\}$ e assim A^TA é inversível. Isto acontece sempre que $\dim(\mathcal{I}m(A)) = \dim(E) - \dim(\mathcal{N}(A)) = \dim(E)$, ou seja, A tem todas as colunas l.i. Note que $\mathcal{I}m(A)$ não é o espaço de chegada inteiro! Apenas estamos dizendo que A tem posto completo (se A tem mais linha do que colunas, como é o caso aqui, a imagem de A tem dimensão igual ao número de colunas l.i.)

Portanto, se todas as colunas de A forem linearmente independentes, então A^TA será uma matriz quadrada, simétrica e inversível.

Neste caso, definimos a matriz de projeção (analogamente ao que havíamos feito no caso de uma variável) como sendo

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T.$$

Esta matriz projeta qualquer vetor b no espaço coluna de A. Em outras palavras, $p = Pb$ é o componente de b no espaço coluna de A, enquanto que $e = b - Pb$ é o componente no complemento ortogonal deste espaço. Note também que $I - P$ também é uma matriz de projeção: ela projeta b no complemento ortogonal do espaço coluna de A.

Exemplo. *Sejam*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ e \ b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

O sistema $Ax = b$ não tem solução. Vamos encontrar a solução de $A^TA\hat{x} = A^Tb$.

$$A^TA = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}; A^Tb = \begin{pmatrix} 9 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Solução: $\hat{x} = (2, 1)$.

Se calcularmos a projeção de b na imagem de A, temos $p = A\hat{x} = (4, 5, 0)$*, o que faz sentido já que a imagem de A é o plano em* $\mathbb{R}^3$*. Note ainda que o erro* $e = b - Ax = (0, 0, 6)$ *é ortogonal à imagem de A.*

Suponha então que queremos resolver o problema $Ax = b$ quando $m > n$, e que aplicamos o método de Gram-Schmidt nas colunas de A para obter sua decomposição QR, ou seja, $A = QR$. Neste caso, temos

$$A^TA\hat{x} = A^Tb \Leftrightarrow R^TQ^TQR\hat{x} = R^TQ^Tb \Leftrightarrow \hat{x} = (R^TR)^{-1}R^TQ^Tb = R^{-1}Q^Tb.$$

Assim, a projeção de b na imagem de A é simplesmente $p = A\overline{x} = QQ^Tb$, ou seja, a matriz de projeção no espaço coluna de Q é $P = QQ^T$.

4.7.3 Representação de dados por mínimos quadrados

Suponha que temos várias medições (dados) e que queremos aproximar estes dados por uma função linear (reta) $b = C + Dt$. Se não houver erro experimental e a função que queremos encontrar for de fato linear, duas medições bastam para que obtenhamos C e D. No entanto, caso haja erro, precisamos ajustar os experimentos e descobrir uma reta que minimize os erros de medição. Atenção: esta reta *não* é a reta definida por a que comentamos na seção passada! A partir do momento que queremos descobrir C e D, temos um problema bidimensional. Se tivermos m medições, C e D deveriam satisfazer as m equações lineares

$$\begin{aligned} C + Dt_1 &= b_1 \\ C + Dt_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ C + Dt_m &= b_m \end{aligned}$$

o que é equivalente ao sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad Ax = b.$$

Este sistema é sobredeterminado, com m equações e apenas duas variáveis ($m > 2$). Se todas as medições não estiverem na mesma reta, o sistema não terá solução. Assim, como vimos anteriormente, a melhor solução $\hat{x} = (\hat{C}, \hat{D})$ é aquela que minimiza o erro ao quadrado:

$$\hat{x} = \arg \min_{x=(C,D)} \|b - Ax\|^2 = \arg \min_{x=(C,D)} (b_1 - C - Dt_1)^2 + \ldots + (b_m - C - Dt_m)^2.$$

Assim, o vetor $p = A\hat{x}$ está o mais próximo possível de b.

4.7.4 Espaços de Função e Séries de Fourier

Espaço de Hilbert

Vamos considerar o espaço vetorial de dimensão infinita $\mathbb{R}^\infty$. Este espaço contém todos os vetores com infinitas componentes $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots)$, cuja norma ao quadrado é finita. Podemos definir a norma como a soma das componentes ao quadrado, como no caso finito, obtendo assim

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} v_i < \infty.$$

Assim, é possível calcularmos a soma de vetores com normas finitas (pois $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$) e a multiplicação por escalar, de modo que este espaço é um espaço vetorial chamado Espaço de Hilbert.

Neste espaço, os vetores v e w são ortogonais quando seu produto escalar é nulo, ou seja

$$v \perp w \Leftrightarrow \langle v, w \rangle = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n + \ldots = 0.$$

Para quaisquer dois vetores neste espaço, a desigualdade de Schwarz ainda é satisfeita ($|v^T w| \leq \|v\| \|w\|$).

Espaço de funções

Considere o espaço vetorial E das funções contínuas definidas em um intervalo $[a, b]$ dos reais. Suponha que $f \in E$. Esta função pode ser vista como um vetor com infinitas componentes $f(x)$ calculado em todos os valores do intervalo. Para descobrir a norma deste vetor, não podemos usar a regra da soma dos quadrados dos componentes; vamos definir então o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx,$$

e a norma

$$||f||^2 = \int_a^b f(x)^2\,dx.$$

Por exemplo, se $f(x) = \sin x$ no intervalo $[0, 2\pi]$, então

$$||\sin x||^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \pi.$$

O espaço E contém todas as funções cuja norma é finita, exceto por exemplo $f(x) = \frac{1}{x}$, já que a integral de $\frac{1}{x^2}$ é infinita. Perceba que o valor da norma depende da escolha do intervalo de definição da função; se tivéssemos escolhido calcular a norma de $\sin x$ no intervalo $[0, \pi]$, teríamos

$$||\sin x||^2 = \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Definimos igualmente a ortogonalidade entre duas funções f e g do espaço quando $\langle f, g\rangle = 0$, e ainda obtemos a desigualdade de Schwarz. Note que as funções podem inclusive ser normalizadas, se dividirmos pela sua norma. Além disso, observe que o seno e o cosseno são ortogonais neste espaço entre $[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}
\langle \sin x, \cos x\rangle &= \int_0^{2\pi} \sin x \cos x\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2x\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin u\,du \\
&= \frac{1}{4}(\cos 2\pi - \cos 0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Mostra-se que

$$\begin{aligned}
\langle \sin mx, \sin nx\rangle &= 0, \quad \forall m \neq n. \\
\langle \cos mx, \cos nx\rangle &= 0, \quad \forall m \neq n. \\
\langle \sin mx, \cos nx\rangle &= 0, \quad \forall m, n.
\end{aligned}$$

Série de Fourier

A série de Fourier de $f(x)$ é uma expansão infinita em senos e cossenos

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

Assim como fizemos antes para vetores em dimensão finita, se quisermos escrever f numa base definida pelos senos e cossenos acima, para descobrirmos cada coeficiente a_i ou b_i basta tomarmos o produto interno nos dois lados da igualdade pela função correspondente a este coeficiente. Por exemplo, para calcularmos b_1 basta multiplicarmos por $\sin x$ em ambos os lados, obtendo

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin x \, dx = a_0 \int_0^{2\pi} \sin x \, dx + a_1 \int_0^{2\pi} \cos x \sin x \, dx + b_2 \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx + \dots$$

Do lado direito, todas as integrais são nulas exceto aquela em que o seno é multiplicado por ele mesmo, visto que as funções são todas ortogonais umas às outras (notando que $\int_0^{2\pi} \sin x \sin nx \, dx = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ exceto $n = 1$). Portanto,

$$b_1 = \frac{\int_0^{2\pi} f(x) \sin x \, dx}{\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx} = \frac{\langle f, \sin x \rangle}{\langle \sin x, \sin x \rangle} = \frac{\langle f, \sin x \rangle}{\pi}.$$

Assim, é fácil ver que a série de Fourier projeta $f(x)$ no $\sin x$. Nessa direção, seu componente é exatamente $b_1 \sin x$. Ao mesmo tempo, o coeficiente b_1 é a solução em mínimos quadrados da equação inconsistente $b_1 \sin x = f(x)$, o que aproxima $f(x)$. Assim, a série de Fourier fornece as coordenatas do vetor $f(x)$ em relação ao conjunto infinito de eixos perpendiculares dos senos e cossenos.

Gram-Schmidt para funções

Vamos supor agora que temos um conjunto de funções simples que gostaríamos de usar como base do espaço de funções, mas que estas funções não são ortogonais entre si. Por exemplo, gostaríamos de escrever uma função qualquer definida no intervalo $[0, 1]$ como combinação linear dos monômios $1, x, x^2, \dots$ Se usarmos para isso o processo de quadrados mínimos, veremos que a matriz $A^T A$ será dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = f(x) \Rightarrow A^T A = \begin{pmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, x \rangle & \langle 1, x^2 \rangle \\ \langle x, 1 \rangle & \langle x, x \rangle & \langle x, x^2 \rangle \\ \langle x^2, 1 \rangle & \langle x^2, x \rangle & \langle x^2, x^2 \rangle \end{pmatrix}.$$

Esta matriz é bastante mal condicionada e resolver o sistema $A^T Ax = A^T b$, neste caso, é muito difícil. Portanto, a alternativa é aplicar o procedimento de Gram-Schmidt aos monômios de forma que estas funções sejam ortogonais, e assim a matriz do sistema será ortogonal e, como já vimos, resolver este sistema por mínimos quadrados torna-se trivial.

Desta forma, tomamos inicialmente o intervalo $-1 \leq x \leq 1$ que é simétrico e torna todas as potências ímpares de x ortogonais a todas as potências pares:

$$\langle 1, x\rangle = \int_{-1}^{1} x\, dx = 0, \qquad \langle x, x^2\rangle = \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0.$$

Assim, basta tomarmos $v_1 = 1$ e $v_2 = x$ como sendo os dois primeiros eixos perpendiculares. Além disso, uma vez que $\langle x, x^2\rangle = 0$, teremos somente que corrigir o ângulo entre 1 e x^2. Usando a fórmula de Gram-Schmidt, o terceiro polinômio ortogonal será

$$v_3 = x^2 - \frac{\langle 1, x^2\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 - \frac{\langle x, x^2\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot x = x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2\, dx}{\int_{-1}^{1} 1\, dx} = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Se seguirmos construindo os polinômios através deste procedimento, obteremos um conjunto de polinômios denominado *Polinômios de Legendre*, que são ortogonais a si mesmos no intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

CAPÍTULO 5

Autovalores

Nesta unidade, discutiremos a definição e as propriedades dos autovalores e autovetores de uma matriz. Para tanto, discutiremos inicialmente a definição e algumas propriedades do determinante. Estudaremos também o caso especial das matrizes simétricas e das matrizes diagonalizáveis.

5.1 Determinantes

Até agora, não utilizamos o conceito de determinantes. Em geral, esse assunto é tratado de forma superficial na geometria analítica, apenas para matrizes 2×2 ou 3×3.

Para que a função determinante seja útil, exigimos que esta função satisfaça certas propriedades listadas abaixo. É claro que esta definição não é *construtiva*, porém é suficiente para o escopo deste curso.

Seja E um espaço vetorial de dimensão finita e considere $\mathcal{L}(E)$, o espaço vetorial dos operadores lineares em E. Como já vimos, fixada uma base em E, podemos representar cada transformação linear em $\mathcal{L}(E)$ por uma matriz. Observe que a escolha da base é arbitrária. Assim, podemos encarar as funções $\phi : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K}$ como funções $\phi : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$, em que n é a dimensão de E.

Definição 32. *O determinante é uma função de $\mathcal{L}(E)$ em $\mathbb{K}$, ou seja,* $\det : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K}$*, satisfazendo as seguintes propriedades:*

- *O determinante muda de sinal quando duas linhas da matriz da transformação são trocadas de lugar;*

- *O determinante é linear em cada linha da matriz;*
- $\det(I) = 1$.

Observamos que, inicialmente, pode parecer que o determinante depende da escolha da base do espaço. Porém, como veremos mais à frente, o valor do determinante será o mesmo independente da base escolhida (ou seja, se duas matrizes representam a mesma transformação linear, mas em bases diferentes do espaço, estas duas matrizes tem o mesmo determinante). Desta forma, podemos interpretar a função determinante como sendo uma função com n entradas (as linhas da matriz). Assim, chame de $a_1, \ldots, a_n$ as linhas da matriz A. Então,

$$\begin{aligned}\det : \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K}\\ \det(A) &= \det(a_1, \ldots, a_n).\end{aligned}$$

Desta forma, as propriedades que definem o determinante podem ser assim reescritas: se que $a_1, \ldots, a_n$ são as linhas de A, então

(i) $\det(I) = 1$;

(ii) O determinante muda de sinal quando duas linhas são trocadas:

$$\det(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n) = -\det(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$$

(iii) O determinante é linear em cada linha separadamente: se a e a' são vetores em $\mathbb{K}^n$ e $k \in \mathbb{K}$, então

$$\det(ka + a', a_2, \ldots, a_n) = k\det(a, a_2, \ldots, a_n) + \det(a', a_2, \ldots, a_n).$$

Como já mencionamos, esta definição para o determinante não é construtiva, porém uma definição mais precisa exigiria um conhecimento prévio de álgebra que ainda não temos. Vamos aceitar então que o determinante é **é a única forma n-linear alternada que satisfaz** $\det(I) = 1$. Vamos nos concentrar nas propriedades dos determinantes.

Seja $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ com linhas $a_1, \ldots, a_n$.

(iv) Se duas linhas de A são iguais, $\det(A) = 0$. Isto decorre da regra (ii), já que se as linhas iguais forem trocadas, o determinante deve mudar de sinal, mas ele também deve continuar o mesmo, pois as linhas são iguais; logo o determinante deve ser nulo.

(v) Subtraindo-se o múltiplo de uma linha de uma outra linha, obtém-se o mesmo determinante. Isto segue direto da regra (iii): chame de A' a matriz obtida a partir de A, em que se efetua a substituição de uma linha a_i por $a_i - ca_j$, com $i \neq j$ e $c \neq 0$. Então

$$\begin{aligned}
\det(A') &= \det(a_1, \ldots, a_i - ca_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n) \\
&= \det(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n) - c\det(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n) \\
&= \det(A)
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue da propriedade (iv). Assim, concluimos que *as operações da eliminação gaussiana não afetam o determinante*. (observe que devemos cuidar das trocas de linha!)

(vi) Se A possui uma linha nula, então $\det(A) = 0$. Uma maneira da mostrar isso é somar uma outra linha à linha nula; desta forma o determinante ficaria inalterado pela regra acima, mas a matriz terá duas linhas idênticas, e assim $\det(A) = 0$.

(vii) Se A for triangular, então $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

Primeiramente, note que se A for diagonal, isto é verdade, já que se chamarmos de $e_1, \ldots, e_n$ os vetores da base canônica em $\mathbb{K}^n$, então

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(a_{11}e_1, \ldots, a_{nn}) \\
&= a_{11} \cdots a_{nn} \det(I) \\
&= a_{11} \cdots a_{nn}
\end{aligned}$$

pela propriedade (i). Agora, suponha que A é triangular. Se

Agora, se A for triangular com elementos não nulos fora da diagonal, pela propriedade (iii) podemos observar que

$$\begin{aligned}
\det(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= \det(a_{11}e_1, a_2, \ldots, a_n) + \det(a_1 - a_{11}e_1, a_2, \ldots, a_n) \\
&= a_{11} \det(e_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \\
&= a_{11}(\det(e_1, a_{22}e_2, a_3, \ldots, a_n) + \det(e_1, a_2 - a_{22}e_2, a_3, \ldots, a_n)) \\
&= a_{11}a_{22} \det(e_1, e_2, a_3, \ldots, a_n) \\
&\vdots \\
&= a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \det(I) \\
&= a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}
\end{aligned}$$

já que cada uma das matrizes que contém um termo do tipo $a_i - a_{ii}e_i$ tem determinante nulo, pois contém uma coluna de zeros.

(viii) Se A é singular (não-inversível), então $\det(A) = 0$.

Se A for singular, então a eliminação gaussiana gera ao menos uma linha nula em U. Então $\det(U) = 0$. No entanto, U é obtida a partir de A através de operações que não alteram o determinante, e/ou de troca de linhas (que apenas alteram o sinal do determinante). Assim, se U tiver linhas nulas, $\det(A) = 0$.

(ix) O determinante de AB é o produto de $\det(A)$ por $\det(B)$.

Suponha primeiramente que B é singular. Então B não é injetora, ou seja, existe $x \in \mathbb{K}^n$, $x \neq 0$, tal que $Bx = 0$. Então AB não é injetora, pois $x \in \mathcal{N}(AB)$. Assim, $\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B)$, não importando o valor de $\det(A)$.

Suponha agora que B é inversível, ou seja, $\det(B) \neq 0$. Então vamos mostrar que a função d definida como

$$d(A) \doteq \frac{\det(AB)}{\det(B)}$$

apresenta as propriedades (i), (ii) e (iii), e portanto, é o determinante de A.

Primeiramente, observe que

$$d(I) = \frac{\det(B)}{\det(B)} = 1,$$

e assim a propriedade (i) é satisfeita. Além disso, se duas linhas de A forem trocadas, as mesmas linhas de AB também serão trocadas; para ver isto, note que

$$\begin{pmatrix} -a_2- \\ -a_1- \\ -a_3- \\ \vdots \\ -a_n- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2B- \\ -a_1B- \\ -a_3B- \\ \vdots \\ -a_nB- \end{pmatrix}$$

Assim, o sinal de d vai mudar conforme a propriedade (ii). Uma combinação linear em uma linha de A resulta na mesma combinação linear, na mesma linha de AB:

$$\begin{pmatrix} - ka + a' - \\ - a_2 - \\ \vdots \\ - a_n - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - kaB - \\ - a_2B - \\ \vdots - a_nB - \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} - a'B - \\ - a_2B - \\ \vdots - a_nB - \end{pmatrix}$$

Então, a propriedade (iii) para o determinante de AB implica que a mesma propriedade também é válida para a função $d(A)$. Portanto, $d(A) = \det(A)$.

Consequências:

- Se A for inversível, então $\det(A) \neq 0$. Se A for não-singular, a eliminação coloca o pivô d_i na diagonal principal, e assim podemos calcular o determinante de A através desta diagonal.

  $$\det(A) = \pm \det(U) = \pm d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n.$$

  (onde o sinal depende do número de trocas de linhas efetuadas na eliminação).
- Um caso particular desta regra nos diz que

  $$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)},$$

  pois $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I) = 1$.
- O valor do determinante de uma transformação não depende da base escolhida no espaço para escrevermos a matriz desta transformação. De fato, se A é a matriz da transformação em uma base β e A' é a matriz da mesma transformação em uma base β', então

  $$A' = SAS^{-1},$$

  em que S é a matriz de mudança de base de β para β'. Assim,

  $$\begin{aligned} \det(A') &= \det(S)\det(A)\det(S^{-1}) \\ &= \det(S)\det(A)\frac{1}{\det(S)} \\ &= \det(A). \end{aligned}$$

10. $\det(A^T) = \det(A)$. Se A não for singular (novamente, o caso singular é óbvio) então podemos fatorá-la em $PA = LU$. Assim,

$$\det(P)\det(A) = \det(L)\det(U),$$

e assim

$$\det(A^T)\det(P^T) = \det(U^T)\det(L^T)$$

Agora, L, L^T são triangulares com diagonal unitária, e assim seus determinantes são iguais a 1. Além disso, U e U^T são triangulares e assim $\det(U) = \det(U^T)$. Basta assim mostrarmos que $\det(P) = \det(P^T)$. Mas sabemos que $\det(P) = 1$ ou $\det(P) = -1$; observe também que $PP^T = I$ (P é ortogonal). Logo,

$$\det(P)\det(P^T) = I,$$

ou seja, os determinantes devem ter o mesmo sinal. Portanto, $\det(P) = \det(P^T)$. Assim, $\det(A) = \det(A^T)$.

Observação! Agora, podemos aplicar todas as regras para as linhas nas colunas: o determinante muda de sinal quando duas colunas são trocadas; duas colunas iguais ou uma coluna nula produzem um determinante nulo; o determinante depende linearmente de cada coluna.

Terminamos essa seção com um resultado interessante do ponto de vista histórico, ainda que inútil na prática, já que, como veremos na seção a seguir, o cálculo de determinantes é computacionalmente muito caro.

Proposição 1 (Regra de Cramer)**.** *Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz inversível. Dado $b \in \mathbb{R}^n$, chame $A(i; b)$ a matriz obtida substituindo-se a coluna i de A por b. Então a solução do sistema linear $Ax = b$ é o vetor $x = (x_1, \dots, x_n)$ dado por*

$$x_i = \frac{\det(A(i; b))}{\det(A)}.$$

Demonstração. Se $A = (a_1, \dots, a_n)$ com A inversível, então $Ax = b$ quer dizer que b pode ser escrito como combinação linear das colunas de A:

$$b = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$$

Assim, para cada $i = 1, \dots, n$, teremos que

$$\begin{aligned} \det(A(i; b)) &= \det(A(i; x_1 a_1 + \dots + x_n a_n)) \\ &= x_i \det(A), \end{aligned}$$

em que a última igualdade segue do fato que o determinante de uma matriz que tem duas colunas iguais é zero. □

A seguir, queremos encontrar uma fórmula definitiva para o determinante.

5.1.1 Fórmulas para os determinantes

A primeira fórmula possível para o cálculo de determinantes para matrizes gerais é resultado da eliminação gaussiana. Se A for não-singular, então já mencionamos que podemos escrever $A = P^{-1}LU$, e assim

$$\det(A) = \det(P^{-1})\det(L)\det(U) = (-1)^k \text{o produto dos pivôs}$$

em que k é o número de trocas de linhas realizadas em P a partir da identidade.

Nosso objetivo agora é definir uma fórmula geral para o determinante a partir das entradas a_{ij} da matriz diretamente, sem olhar para os pivôs, ou seja, sem efetuar o escalonamento da matriz. Neste caso, vamos tentar obter esta fórmula a partir das três propriedades fundamentais dos determinantes.

Para isto, considere primeiramente o caso 2 por 2. Neste caso, podemos decompor cada linha em dois vetores que representam as duas direções coordenadas:

$$(a \quad b) = (a \quad 0) + (0 \quad b) \qquad \text{e} \qquad (c \quad d) = (c \quad 0) + (0 \quad d)\,.$$

Agora, podemos aplicar a propriedade da linearidade do determinante nas linhas em sequência:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Observe que os termos que contém colunas nulas terão determinantes nulos, como consequência das propriedades dos determinantes. Assim, só precisamos nos preocupar com termos onde as entradas não nulas de cada linha aparecem em colunas diferentes. Portanto, no caso 2×2, os termos resultantes são uma matriz diagonal, e outra matriz que pode ser obtida a partir de uma permutação de linhas de uma matriz diagonal Assim, obtemos a fórmula conhecida:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

No caso 3x3, teremos algo do tipo

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} & a_{12} & \\ & & a_{23} \\ a_{31} & & \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} & & a_{13} \\ a_{21} & & \\ & a_{32} & \end{pmatrix}$$
$$+ \det\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & & a_{23} \\ & a_{32} & \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} & a_{12} & \\ a_{21} & & \\ & & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} & & a_{13} \\ & a_{22} & \\ a_{31} & & \end{pmatrix}.$$

Para cada termo, podemos calcular o determinante após fazer as permutações necessárias para obtermos matrizes diagonais em cada termo. Assim, obtemos a conhecida fórmula de Sarrus para o determinante 3×3:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Para uma matriz n por n, teremos cada linha decomposta em n direções coordenadas. Esta expansão terá n^n termos. Felizmente, a maioria terá determinante nulo automaticamente (como nos casos acima). Em geral, a expressão conterá apenas $n!$ termos não-nulos; teríamos n escolhas para a primeira coluna, $n - 1$ possibilidades para a segunda coluna, e assim por diante.

Podemos então escrever uma fórmula geral para $A_{n\times n}$ como

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \epsilon_{\sigma} \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \tag{5.1}$$

em que σ é cada uma das permutações possíveis dos índices de 1 até n, $\sigma(i)$ é a i-ésima entrada desta permutação, e ϵ_{σ} é o determinante da matriz de permutação usado em cada termo (1 para permutações pares, -1 para permutações ímpares).

Esta fórmula satisfaz a primeira condição para o determinante ($\det(I) = 1$) e a segunda também (mas não vamos aqui verificar isto agora). O mais importante é verificar a terceira condição: o determinante deve depender linearmente de cada linha.

Exemplo 1.1. *Para uma matriz* 3×3*, isto resultaria em*

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Observe então que podemos escrever isso como

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} & a_{12} & \\ a_{21} & & a_{23} \\ a_{31} & & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} & & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & \end{pmatrix}.$$

Note que para cada termo da soma (5.1) podemos agrupar os termos que acompanham, por exemplo, a_{1j} em um coeficiente C_{1j} que é também um determinante:

$$\begin{aligned} \det(A) = & \sum_{\sigma(1)=1} \epsilon_\sigma a_{11}(a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}) + \sum_{\sigma(1)=2} \epsilon_\sigma a_{12}(a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}) \\ & + \ldots + \sum_{\sigma(1)=n} \epsilon_\sigma a_{1n}(a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}) \\ = & \ a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n} \end{aligned}$$

Os C_{ij} são chamados cofatores de a_{ij}. Além disso, agora fica fácil ver que o determinante de A depende linearmente de cada uma de suas linhas: para qualquer linha i,

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}.$$

O cofator C_{ij} é o determinante de M_{ij} (M_{ij} obtida de A, deletando-se a linha i e a coluna j) com o sinal correto:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij}).$$

Esta equação nos dá, na verdade, a matriz cofatora de A, cujos elementos i, j estão definidos como

$$(\mathrm{cof}(A))_{ij} = C_{ij}.$$

Além disso, podemos chamar de *adjunta clássica* de A a matriz $cof(A)^T$. Com isso, recuperamos a fórmula tradicional para a inversa de uma matriz $A_{n\times n}$ inversível:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A).$$

Esta fórmula, embora historicamente relevante, não é usada na prática devido à dificuldade no cálculo de determinantes e de instabilidades numéricas que podem surgir neste cálculo.

Uma última observação é a seguinte:

Teorema 32. *O posto de A é o maior número r tal que A possui uma submatriz $r \times r$ com determinante não nulo.*

Demonstração. Observando primeiramente que o número de linhas l.i. e o número de colunas l.i. é igual, basta selecionarmos para esta submatriz a matriz quadrada formada pelas r linhas e r colunas l.i. de A. Esta submatriz deve ter posto r e nenhuma submatriz de A maior que esta pode ter posto maior que r (pois senão A teria posto $> r$.) □

5.2 O problema de autovalores e o cálculo do autoespaço.

Considere o seguinte problema: dada uma transformação $T : E \to E$, em que E é um espaço vetorial definido sobre um corpo $\mathbb{K}$, gostaríamos de encontrar um vetor $v \in E$ não nulo e um número $\lambda \in \mathbb{K}$ tais que

$$T(v) = \lambda v. \tag{5.2}$$

Se pudermos encontrar esta solução, isto significa que existe um subespaço do espaço vetorial E no qual a transformação T age como uma multiplicação por escalar.

Para entendermos melhor este problema, vamos redefini-lo com respeito à matriz da transformação $A_{n\times n}$. Assim, queremos encontrar um vetor x não nulo, e um número λ que satisfaça a equação

$$Ax = \lambda x. \tag{5.3}$$

Podemos reescrever esta equação como

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Assim, o vetor x está no espaço nulo de $A - \lambda I$. Portanto, encontraremos $x \neq 0$ satisfazendo essa equação somente nos casos em que λ torna $A - \lambda I$ uma matriz singular, pois neste caso A não será injetora. Logo, para que λ e x sejam autovalores e autovetores de A, devem satisfazer as seguintes condições.

Definição 33. *O número λ é um autovalor de A se e somente se $A - \lambda I$ for singular, ou seja,*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Está é a equação característica (também chamada polinômio característico). Todo λ é associado a (um ou mais) autovetores x, que satisfazem

$$(A - \lambda I)x = 0, \ \textit{ou}\ Ax = \lambda x.$$

Assim, para resolvermos o problema de autovalores (5.4), vamos resolver dois subproblemas:

1. Encontrar todas as raizes λ do polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

2. Para cada λ encontrado no primeiro passo, determinar uma base para o núcleo de $A - \lambda I$.

Aqui, devemos fazer algumas observações:

(i) Observe que, para cada λ encontrado na parte 1 do problema de autovalores, qualquer vetor de uma base de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ é autovetor associado. De fato, um autovetor define um *autoespaço*:

   – Se $Av = \lambda v$, $A(\alpha v) = \alpha\lambda v = \beta v$.
   – Se $Au = \gamma u$, $A(v + u) = Av + Au = \lambda v + \gamma u = (\lambda + \gamma)(v + u) = \beta(v + u)$.

- Como o polinômio característico, para uma matriz $n \times n$, é um polinômio de grau n com coeficientes reais ou complexos (dependendo da composição da matriz), podemos observar os seguintes resultados:

  Teorema 33 (Fundamental da Álgebra)**.** *Todo polinômio de uma variável não-constante com coeficientes complexos tem pelo menos uma raiz complexa.*

  Corolário 12. *Todo polinômio em uma variável com coeficientes reais pode ser decomposto em polinômios mônicos irredutíveis de grau 1 ou 2. (um polinômio real mônico irredutível de grau 2 não tem raizes reais).*

  Isto quer dizer que mesmo que a matriz A seja uma matriz real, seus autovalores (e, consequentemente, seus autovetores) podem ser complexos. Assim, o problema (5.4) será equivalente ao problema (5.2) apenas quando E for um espaço vetorial complexo. Vamos, portanto, considerar daqui pra frente que nosso espaço vetorial é sempre complexo.[1]

[1]É importante observar que alguns autores fazem um tratamento diferente deste problema, dizendo que uma matriz real só pode ter autovalores reais, e que as raízes complexas do polinômio característico não definem autovalores. Não faremos esta restrição aqui.

(iii) É importante observar que os autovalores e autovetores de um operador linear não dependem da base de E escolhida para escrevermos a matriz da transformação.

Como consequência destas observações, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 34. *Todo operador linear complexo possui autovetor.*

5.2.1 Exemplos

Exemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 2,\ v_1 = (1,0);\ \lambda_2 = 3,\ v_2 = (1,1).$

Exemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1,\ v_1 = (1,0);\ \lambda_2 = 1,\ v_2 = (0,1).$

Exemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1,\ v_1 = (0,1);\ \lambda_2 = 1,\ v_2 = ?.$

Exemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3;\ v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (0,1,0),\ v_3 = (0,0,1).$

Exemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 3 = \lambda_2 = \lambda_3;\ v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (0,1,0),\ v_3 = (0,0,1).$

Exemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & 7 & -3 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$; $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (1, 1, 2)$.

Exemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$-1 + i$, $-1 - i$. $(1, 2 - i)$, $(1, 2 + i)$.

Exemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

5.3 Matrizes diagonalizáveis.

Uma vez que calculamos todos os autovalores e autovetores de uma matriz, é possível, em alguns casos, decompor a matriz em sua forma diagonal. Vamos aqui analisar em que condições isso é possível e porque.

Teorema 35. *Suponha que a matriz $A_{n\times n}$ possui n autovalores distintos. Então,*

(i) A possui n autovetores linearmente independentes;

(ii) A pode ser diagonalizada: existe $S_{n\times n}$

$$S^{-1}AS = \Lambda,$$

onde S é a matriz cujas colunas são os autovetores de A, e Λ é uma matriz diagonal cujas entradas são os autovalores de A.

Demonstração. Suponha que $v_1, \ldots, v_n$ são os autovetores (e portanto, não-nulos) de A, ou seja, $Av_i = \lambda_i v_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Vamos provar que estes vetores são l.i. por indução. A afirmação é óbvia quando $n = 1$. Vamos supor então que ela é verdadeira para $n - 1$ vetores. Dada a combinação linear nula

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0, \tag{5.4}$$

vamos aplicar o operador A a ambos os lados, obtendo

$$\alpha_1 A v_i + \ldots + \alpha_n A v_n = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_n \lambda_n v_n = 0.$$

Multiplicando a primeira destas igualdades por λ_n e subtraindo da segunda, obtemos

$$(\lambda_1 - \lambda_n)\alpha_1 v_1 + \ldots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\alpha_{n-1} v_{n-1} = 0.$$

Pela hipótese de indução, todos estes vetores são l.i., logo,

$$(\lambda_1 - \lambda_n)\alpha_1 = \ldots = (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\alpha_{n-1} = 0.$$

Como os autovalores são todos diferentes, os termos $\lambda_i - \lambda_n$ são todos diferentes de zero; logo, $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Portanto, a equação (5.4) se resume a $\alpha_n v_n = 0$. Como $v_n \neq 0$, devemos ter $\alpha_n = 0$ o que prova nossa afirmação (i).

Para (ii), basta escrevermos $AS = S\Lambda$. □

A matriz de diagonalização não é única, já que os autovetores definem autoespaços.

Exemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$; $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. *($AS = S\Lambda$)*

Exemplo. *Se* $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, *quem é* A^{100}*?* $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$, $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (3, 1)$.

Exemplo. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *não é diagonalizável;* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $v_1 = (1, 0)$.

5.3.1 Potências e Produtos

Note que os autovalores de $A^2 = AA$ são exatamente λ_i^2, onde $Au_i = \lambda_i u_i$, e todo autovetor de A é também autovetor de A^2:

Seja $Au_i = \lambda_i u_i$. Então,

$$A(Au_i) = A^2 u_i = \lambda_i (Au_i) = \lambda_i^2 u_i.$$

É fácil ver que isso é verdadeiro para qualquer k; além disso, podemos ver o resultado também através da diagonalização de A: se esta for diagonalizável, então

$$(S^{-1}AS)(S^{-1}AS) = \Lambda^2 \Leftrightarrow S^{-1}A^2S = \Lambda^2.$$

Teorema 36. *Os autovalores de A^k são λ_i^k, $i = 1, \dots, n$ e todo autovetor de A é ainda um autovetor de A^k. Quando S diagonaliza A, ela também diagonaliza A^k:*

$$\Lambda^k = (S^{-1}AS)(S^{-1}AS)\dots(S^{-1}AS) = S^{-1}A^kS.$$

Se A for inversível, essa regra se aplica também à sua inversa: $k = -1$. Portanto, os autovalores de A^{-1} são $1/\lambda_i$:

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow x = \lambda A^{-1}x \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x.$$

Para um produto de duas matrizes, podemos nos perguntar sobre os autovalores de AB. Se λ é um autovalor de A e μ é um autovalor de B, então

$$ABx = A\mu x = \mu Ax = \mu\lambda x.$$

Esta equação está errada! *A e B não compartilham o mesmo autoespaço!*

Exemplo 3.1.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A e B tem todos os autovalores nulos, enquanto que AB tem um autovalor $\lambda = 1$. Os autovetores são completamente diferentes.

Pelos mesmos motivos, em geral o autoespaço de $A + B$ não tem relação direta com os autoespaços de A e B. Felizmente, podemos provar o seguinte:

Teorema 37. *Matrizes diagonalizáveis compartilham a mesma matriz de autovetores S se e somente se $AB = BA$.*

Demonstração. Se a mesma matriz S diagonaliza ambas A e B, temos que

$$AB = S^{-1}\Lambda_A SS^{-1}\Lambda_B S = S^{-1}\Lambda_A\Lambda_B S \quad \text{e} \quad BA = S^{-1}\Lambda_B SS^{-1}\Lambda_A S = S^{-1}\Lambda_B\Lambda_A S.$$

Como matrizes diagonais sempre comutam, temos que $AB = BA$.

Por outro lado, suponha que $AB = BA$. Então

$$Ax = \lambda x \Rightarrow ABx = BAx = \lambda Bx.$$

Desta forma, ambos x e Bx são autovetores de A, compartilhando o mesmo λ (caso contrário, $Bx = 0$. Se supormos que A possui n autovalores distintos, então Bx deve ser múltiplo de x (pois a cada autovalor fica associado um subespaço de dimensão no máximo 1). Em outras palavras, $Bx = \mu x$ e assim x é também autovetor de B. O caso de multiplicidade algébrica maior que 1 não será demonstrado. $\square$

5.3.2 Interpretação como subespaços invariantes

Segundo a definição do problema (5.2), podemos fazer a seguinte definição.

Definição 34. *Diz-se que $F \subset E$ é um subespaço invariante por $T : E \to E$ quando $T(F) \subset F$, ou seja, $\forall v \in F$, $T(v) \in F$.*

Assim, achar um autovetor (ou, equivalentemente, achar um autovalor) de um operador T é o mesmo que achar um subespaço de dimensão 1 invariante por T, sempre que o polinômio característico de T tiver solução no corpo sobre o qual E está definido.

Teorema 38. *Se o subespaço $F \subset E$ é invariante pelo operador linear $T : E \to E$ então seu complemento ortogonal $F^\perp$ é invariante pelo seu adjunto T^*.*

Demonstração. Sejam $u \in F$, $v \in F^\perp$. Então $T(u) \in F$ e portanto $\langle T(u), v\rangle = 0$. Mas então $0 = \langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle$. Portanto, $T^*(v) \in F^\perp$ para todo $v \in F^\perp$, logo $F^\perp$ é invariante por T^*. □

5.4 Matrizes simétricas e autovalores

Vamos aqui mostrar que as matrizes simétricas possuem propriedades bastante desejáveis quando se trata de autovalores e autovetores.

Primeiramente, vamos mostrar que o conjunto de autovetores de uma matriz simétrica de um operador linear auto-adjunto $T : E \to E$ forma uma base ortonormal para o espaço E (ou seja, é um conjunto ortonormal que gera E). Para isto, vamos precisar de vários lemas.

Definição 35. *Seja $T : E \to E$ um operador linear. Se $T = T^*$ dizemos que T é auto-adjunto.*

No caso real, T é auto-adjunto se for representado por uma matriz simétrica; no caso complexo, T é auto-adjunto se for representado por uma matriz hermitiana.

Lema 4. *Um operador $T : E \to E$ é auto-adjunto se e somente se sua matriz $A = [a_{ij}]$ relativamente a uma (e portanto a qualquer) base ortonormal $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de E é hermitiana.*

Demonstração. A i-ésima coordenada do vetor $T(u_j)$ na base $\mathcal{U}$ é $a_{ij} = \langle u_i, T(u_j)\rangle$ (pelo Teorema 2 da parte sobre Ortogonalidade). Portanto, a matriz é hermitiana se e somente se $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Mas, como T é auto-adjunto,

$$a_{ij} = \langle u_i, T(u_j)\rangle = \langle T(u_i), u_j\rangle = \overline{\langle u_j, T(u_i)\rangle} = \overline{a_{ji}}.$$

□

Corolário 13 (do Teorema 38)**.** *Seja $T : E \to E$ um operador auto-adjunto. Se o subespaço $F \subset E$ é invariante por T, seu complemento ortogonal $F^{\perp}$ também o é.*

Teorema 39. *Os autovalores de um operador auto-adjunto são todos reais.*

Demonstração. De fato, observe que se λ é autovalor associado ao autovetor v de T, então $T(u) = \lambda u$. Daí,

$$\langle u, T(u)\rangle = \langle u, \lambda u\rangle = \lambda\langle u, u\rangle.$$

Por outro lado,

$$\langle T(u), u\rangle = \langle \lambda u, u\rangle = \overline{\lambda}\langle u, u\rangle.$$

Como u é autovetor de T, então $u \neq 0$ e $\langle u, u\rangle \neq 0$. Assim, $\lambda = \overline{\lambda}$, o que só é verdadeiro se λ for real. □

Já vimos que toda matriz que possui n autovalores distintos possui n autovetores linearmente independentes. Para as matrizes simétricas, ou seja, operadores auto-adjuntos, podemos mostrar ainda mais.

Teorema 40. *Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são autovalores distintos do operador auto-adjunto $T : E \to E$, os autovetores correspondentes $v_1, \ldots, v_m$ são ortogonais.*

Demonstração. Para $i \neq j$ quaisquer, temos que

$$\begin{aligned}(\lambda_i - \lambda_j)\langle v_i, v_j\rangle &= \langle \lambda_i v_i, v_j\rangle - \langle v_i, \lambda_j v_j\rangle \\ &= \langle T(v_i), v_j\rangle - \langle v_i, T(v_j)\rangle \\ &= \langle T(v_i), v_j\rangle - \langle T^*(v_i), v_j\rangle \\ &= \langle T(v_i), v_j\rangle - \langle T(v_i), v_j\rangle = 0,\end{aligned}$$

pois T é auto-adjunto. Como $\lambda_i \neq \lambda_j$, devemos ter $\langle v_i, v_j\rangle = 0$. □

Nosso objetivo agora é demonstrar que, para todo operador auto-adjunto T, mesmo que existam autovalores repetidos, seus autovetores formam uma base (ortonormal) para o espaço E.

Teorema 41 (Espectral)**.** *Seja E um espaço vetorial com produto interno de dimensão finita. Se $T : E \to E$ é auto-adjunto, então existe uma base ortonormal de E cujos vetores são autovetores de T.*

Demonstração. Vamos supor que $\dim(E) = n \geq 1$. Sabemos que T possui ao menos um autovetor, v. Se $\dim(E) = 1$, então $\{v_1 = \frac{v}{\|v\|}\}$ é uma base ortonormal de E, o que prova o teorema. Suponha então que $n > 1$ e que o resultado seja válido para todo espaço vetorial com dimensão $n - 1$. Seja W =span$\{v_1\}$. É imediato que W é invariante por T, e que então $W^{\perp}$ é invariante por T (pelo Teorema 13). Agora, como $W^{\perp}$ é um subespaço de dimensão $n-1$, segue da hipótese de indução que existe uma base de W formada por autovetores de T; logo, $\{v_1, v_2 \dots, v_n\}$ é um conjunto ortonormal com n elementos, e portanto é base de E. $\square$

Podemos reescrever o Teorema Espectral da seguinte maneira:
Se $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ é hermitiana, então $\exists Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ unitária tal que

$$Q^H A Q = \Lambda.$$

5.5 Operadores Normais

Definição 36. *Sejam E um espaço vetorial com produto interno e $T : E \to E$. Dizemos que T é normal se $T(T^*(v)) = T^*(T(v))$ para todo $v \in E$.*

Assim, T é normal se a matriz de T comuta com a matriz da sua adjunta.

- Todo operador auto-adjunto é normal.
- Todo múltiplo escalar de um operador normal é normal.
- A soma de operadores normais não é normal.

Exemplo 5.1.

$$T(z, w) = (z + iw, z - iw)$$

Teorema 42. *Sejam E um espaço vetorial com produto interno e $T : E \to E$ normal. Então* *(i)* $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|, \forall v \in E$

(ii) *Se* $T(v) = \lambda v$ *para* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e* $v \in E$*, então* $T^*(v) = \overline{\lambda} v$.

(iii) *Se* $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ *e* $T(v_2) = \lambda_2 v_2$*, para* $v_1, v_2 \in E$ *e* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$*, com* $\lambda_1 \neq \lambda_2$*, então* $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Demonstração. (i) Se $v \in E$, então

$$\begin{aligned} \|T(v)\|^2 &= \langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, T^*(T(v)) \rangle = \langle v, T(T^*(v)) \rangle = \langle T^*(v), T^*(v) \rangle \\ &= \|T^*(v)\|^2. \end{aligned}$$

(ii) Se $T(v) = \lambda v$, então $(T - \lambda I)(v) = 0$. Logo, $\|(T - \lambda I)(v)\| = 0$. Usando o item (i), concluimos que $\|(T - \lambda I)^*(v)\| = 0$. Então $T^*(v) = \overline{\lambda} v$.

(iii) Observe que

$$\langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T^*(v_2) \rangle = \langle v_1, \overline{\lambda_2} v_2 \rangle = \lambda \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Por outro lado,

$$\langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \lambda \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Daí, $\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$, e portanto $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, já que $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

□

Teorema 43. *Sejam E um espaço vetorial complexo com produto interno de dimensão finita e* $T : E \to E$*. Então T será um operador normal se e somente se existir uma base ortonormal de E cujos vetores sejam autovetores de T.*

Demonstração. Usando os teoremas anteriores é possível mostrarmos que se v_1 é autovetor de T, então $W = \text{span}\{v_1\}$ é invariante por T^*; pelo mesmo lema que usamos para a demonstração do teorema espectral, concluimos que $W^\perp$ é invariante também por $T^{**} = T$. O resto da demonstração é análogo à demonstração do teorema espectral. □