Aula 4: Espaços Vetoriais

Melissa Weber Mendonça

Variedades afins

Definição

Um subconjunto $V \subset E$ chama-se uma *variedade afim* quando a reta que une dois pontos quaisquer de V está contida em V. Assim, $V \subset E$ é uma variedade afim se e somente se cumpre a seguinte condição:

$$x, y \in V,\ t \in \mathbb{R} \Rightarrow (1 - t)x + ty \in V.$$

Variedades afins

Definição

Um subconjunto $V \subset E$ chama-se uma *variedade afim* quando a reta que une dois pontos quaisquer de V está contida em V. Assim, $V \subset E$ é uma variedade afim se e somente se cumpre a seguinte condição:

$$x, y \in V,\ t \in \mathbb{R} \Rightarrow (1 - t)x + ty \in V.$$

Exemplo. Todo subespaço é também uma variedade afim.

Observação

Se $V_1, \ldots, V_m \subset E$ são variedades afins, então a intersecção $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_m$ é ainda uma variedade afim. Todo ponto $p \in E$ é uma variedade afim.

Exemplo

Sejam $a_1, \ldots, a_n, b$ números reais. O conjunto dos pontos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$$

é uma variedade afim, que não contém a origem quando $b \neq 0$. Se os números a_i não forem todos nulos, chamamos esta veriedade $\mathscr{H}$ de *hiperplano*. Se $a_1 = \ldots = a_n = 0$, então $\mathscr{H} = \emptyset$ quando $b \neq 0$ e $\mathscr{H} = \mathbb{R}^n$ quando $b = 0$.

Exemplo

Sejam $a_1, \ldots, a_n, b$ números reais. O conjunto dos pontos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$$

é uma variedade afim, que não contém a origem quando $b \neq 0$. Se os números a_i não forem todos nulos, chamamos esta veriedade $\mathscr{H}$ de *hiperplano*. Se $a_1 = \ldots = a_n = 0$, então $\mathscr{H} = \emptyset$ quando $b \neq 0$ e $\mathscr{H} = \mathbb{R}^n$ quando $b = 0$.

Mais geralmente, o conjunto das soluções de um sistema linear de m equações com n incógnitas é uma variedade afim, intersecção das m variedades afins definidas pelas equações do sistema.

Combinação Linear

Definição

Seja E um espaço vetorial, e sejam $u_1, u_2, \ldots, u_n \in E$ vetores neste espaço. Então uma *combinação linear* destes vetores é um vetor u no espaço E dado por

$$u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n,$$

para $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Espaço Gerado: span

Definição

Uma vez fixados os vetores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ em V, o conjunto $W \subset V$ que contém todas as combinações lineares destes vetores é chamado de *espaço gerado* pelos vetores $v_1, \ldots, v_n$. Denotamos isto por

$$\begin{aligned} W &= \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\} \\ &= \{v \in V : v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n, a_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Espaço Gerado: span

Uma outra caracterização de subespaço gerado é a seguinte:

W é o menor subespaço de V que contém o conjunto de vetores $\{v_1, \dots, v_n\}$ no sentido que qualquer outro subespaço W' de V que contenha estes vetores satisfará $W' \supset W$, já que como $v_1, \dots, v_n \in W'$ e W' é um subespaço vetorial, então qualquer combinação linear destes vetores também está incluida em W'; logo $W \subset W'$.

Independência Linear

Definição

Seja $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset E$ um conjunto de vetores. Se nenhum dos vetores v_i puder ser escrito como combinação linear dos outros vetores, dizemos que este conjunto é linearmente independente (l.i.). Formalmente, o conjunto X é l.i. se e somente se a única combinação linear nula dos vetores de X for aquela cujos coeficientes são todos nulos, ou seja,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Se um conjunto X de vetores em um espaço vetorial E não é l.i., dizemos que ele é linearmente dependente (l.d.).

Independência Linear

Definição

Seja $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset E$ um conjunto de vetores. Se nenhum dos vetores v_i puder ser escrito como combinação linear dos outros vetores, dizemos que este conjunto é linearmente independente (l.i.). Formalmente, o conjunto X é l.i. se e somente se a única combinação linear nula dos vetores de X for aquela cujos coeficientes são todos nulos, ou seja,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Se um conjunto X de vetores em um espaço vetorial E não é l.i., dizemos que ele é linearmente dependente (l.d.).

Evidentemente, todo subconjunto de um conjunto l.i. é também l.i.

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^2$, quaisquer dois vetores que não sejam colineares são l.i.

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^n$, chamamos de vetores canônicos os vetores definidos como, para todos $i, j = 1, \ldots, n$

$$(e_i)_j = \begin{cases} 1, & \text{se } j = i \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

em que o subíndice j denota a coordenada j do i-ésimo vetor canônico. Estes vetores são l.i.

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^{2\times 2}$, as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  são l.i.

Exemplos

- O conjunto $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

  é um subespaço de $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, assim como o conjunto $\mathscr{P}_n$ dos polinômios de grau $\leq n$.

  Qual seria um conjunto l.i. nesse subespaço?

Exemplo

Note que o conjunto dos polinômios de grau n não é um subespaço, pois a soma de dois polinômios de grau n pode ter grau $< n$!

Exemplo

Note que o conjunto dos polinômios de grau n não é um subespaço, pois a soma de dois polinômios de grau n pode ter grau $< n$!

Os monômios $1, x, \ldots, n^n$ em $\mathscr{P}_n$ são l.i., pois $\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha n x^n = p(x)$ é o vetor nulo em $\mathscr{P}_n$ somente quando $p(x)$ é o polinômio identicamente nulo, ou seja, $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto implica que $\alpha_0 = \ldots = \alpha_n = 0$, pois um polinômio não nulo de grau k tem no máximo k raízes reais.

Podemos, além disso, concluir que o conjunto $X = \{1, x, \ldots, x^n, \ldots\} \subset \mathscr{P}$ é um conjunto infinito l.i.

Teorema

Se $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m$ e os vetores $v_1, \ldots, v_m$ são l.i., então $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_m = \beta_m$.

Base de um espaço vetorial

Gostaríamos de encontrar, para um espaço W qualquer, um conjunto de vetores de forma que qualquer outro vetor em W possa ser escrito como combinação linear destes vetores (como i, j, k em $\mathbb{R}^3$, por exemplo)

Definição

Uma *base* de um espaço vetorial E é um conjunto $\mathscr{B} \subset E$ linearmente independente que gera E, ou seja, todo vetor $v \in E$ se exprime, de modo único, como combinação linear $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$ de elementos $v_1, \ldots, v_m$ da base $\mathscr{B}$. Se $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ é uma base de E e $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$, então os números $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ chamam-se as *coordenadas* do vetor v na base $\mathscr{B}$.

Exemplo

- Base canônica no $\mathbb{R}^n$.

Exemplo

- Os monômios $1, x, \ldots, x^n$ formam uma base para o espaço vetorial $\mathscr{P}_n$ dos polinômios de grau $\leq n$. O conjunto

  $$\{1, x, \ldots, x^n, \ldots\}$$

  dos monômios de graus arbitrários constitui uma base (infinita) para o espaço vetorial $\mathscr{P}$ de todos os polinômios reais.

Resultados sobre bases

Lema

Sejam $v_1, \ldots, v_n \neq 0$ que geram um e.v. E. Então dentre estes vetores podemos extrair uma base de E.

Resultados sobre bases

Lema

Sejam $v_1, \ldots, v_n \neq 0$ que geram um e.v. E. Então dentre estes vetores podemos extrair uma base de E.

Demonstração. Se $v_1, \ldots, v_n$ forem l.i., não há nada a fazer. Suponha então que eles sejam l.d. Então,

$$x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n = 0$$

com pelo menos algum $x_i \neq 0$. Sem perda de generalidade, suponha que $x_n \neq 0$ (a ordem não importa). Então, escreva

$$v_n = -\frac{x_1}{x_n} v_i - \ldots - \frac{x_{n-1}}{x_n} v_{n-1}$$

Desta forma, $v_1, \ldots, v_{n-1}$ ainda geram E. Prossiga desta maneira até que todos os elementos l.d. tenham sido eliminados e teremos uma base de E.

Sistemas Homogêneos

Lema

Todo sistema linear homogêneo cujo número de incógnitas é maior do que o número de equações admite uma solução não-trivial.

Sistemas Homogêneos

Lema

Todo sistema linear homogêneo cujo número de incógnitas é maior do que o número de equações admite uma solução não-trivial.

Demonstração. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

de m equações e n incógnitas, onde $m < n$. Vamos provar o resultado por indução no número de equações do sistema.

Sistemas Homogêneos

Lema

Todo sistema linear homogêneo cujo número de incógnitas é maior do que o número de equações admite uma solução não-trivial.

Se tivermos apenas uma equação do tipo

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$$

com $n > 1$ incógnitas, devemos ter um dos dos coeficientes $a_{1i} \neq 0$ (caso contrário esta equação não faria sentido). Podemos supor então, sem perda de generalidade, que $a_{1n} \neq 0$. Isolando x_n na equação dada, temos

$$x_n = -\left(\frac{a_{11}}{a_{1n}}x_1 + \ldots + \frac{a_{1,n-1}}{a_{1n}}x_{n-1}\right).$$

Para obtermos uma solução não-trivial para a equação do sistema, basta escolhermos valores quaisquer para os $x_1, \ldots, x_{n-1}$ (que são variáveis livres) e obteremos x_n.

Sistemas Homogêneos

Lema

Todo sistema linear homogêneo cujo número de incógnitas é maior do que o número de equações admite uma solução não-trivial.

Para completar a indução, vamos supor que o lema seja verdadeiro para um sistema com $m - 1$ equações. Podemos primeiramente admitir que, no sistema original, temos $a_{mn} \neq 0$ (caso contrário, o sistema não teria m, mas $m - 1$ equações). Então, a m-ésima equação pode ser reescrita como

$$x_n = -\left(\frac{a_{m1}}{a_{mn}} x_1 + \ldots + \frac{a_{m,n-1}}{a_{mn}} x_{n-1}\right).$$

Substituindo em cada uma das $m - 1$ primeiras equações a incógnita x_n por esta expressão, obtemos um sistema homogêneo de $m - 1$ equações nas $n - 1$ primeiras incógnitas.

Sistemas Homogêneos

Lema

Todo sistema linear homogêneo cujo número de incógnitas é maior do que o número de equações admite uma solução não-trivial.

Pela hipótese de indução, este sistema admite uma solução não-trivial $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$, pois $n-1 > m-1$. Escrevendo então

$$\alpha_n = -\left(\frac{a_{m1}}{a_{mn}}\alpha_1 + \ldots + \frac{a_{m,n-1}}{a_{mn}}\alpha_{n-1}\right),$$

obtemos uma solução não-trivial $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ do sistema proposto.

Usando os lemas anteriores, podemos provar o seguinte resultado.

Teorema

Se o conjunto finito de vetores $\{v_1, \ldots, v_m\}$ gera o espaço vetorial E, então qualquer conjunto com mais de m vetores em E é l.d.

Teorema

Se o conjunto finito de vetores $\{v_1, \ldots, v_m\}$ gera o espaço vetorial E, então qualquer conjunto com mais de m vetores em E é l.d.

Demonstração.

Teorema

Se o conjunto finito de vetores $\{v_1, \ldots, v_m\}$ gera o espaço vetorial E, então qualquer conjunto com mais de m vetores em E é l.d.

Demonstração. Dados os vetores $w_1, \ldots, w_n \in E$, com $n > m$, para cada $j = 1, \ldots, n$ podemos escrever

$$w_j = \alpha_{1j} v_1 + \ldots + \alpha_{mj} v_m,$$

pois os vetores v_j geram E.

Teorema

Se o conjunto finito de vetores $\{v_1, \ldots, v_m\}$ gera o espaço vetorial E, então qualquer conjunto com mais de m vetores em E é l.d.

Demonstração. Dados os vetores $w_1, \ldots, w_n \in E$, com $n > m$, para cada $j = 1, \ldots, n$ podemos escrever

$$w_j = \alpha_{1j} v_1 + \ldots + \alpha_{mj} v_m,$$

pois os vetores v_j geram E.

Para mostrar que os vetores w_j são l.d., devemos achar coeficientes $x_1, \ldots, x_n$, com pelo menos um deles não-nulo, tais que $x_1 w_1 + \ldots + x_n w_n = 0$.

Teorema

Se o conjunto finito de vetores $\{v_1, \ldots, v_m\}$ gera o espaço vetorial E, então qualquer conjunto com mais de m vetores em E é l.d.

Demonstração.

Substituindo os w_j por suas expressões em termos de v_j e reorganizando a soma, esta igualdade significa que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{1j}\right) v_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{2j}\right) v_2 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{mj}\right) v_m = 0.$$

Teorema

Se o conjunto finito de vetores $\{v_1, \ldots, v_m\}$ gera o espaço vetorial E, então qualquer conjunto com mais de m vetores em E é l.d.

Demonstração.

Substituindo os w_j por suas expressões em termos de v_j e reorganizando a soma, esta igualdade significa que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{1j}\right) v_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{2j}\right) v_2 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{mj}\right) v_m = 0.$$

Esta condição será satisfeita se todos os somatórios forem nulos, ou seja,

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n &= 0\\
\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n &= 0\\
&\vdots\\
\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}$$

Teorema

Se o conjunto finito de vetores $\{v_1, \ldots, v_m\}$ gera o espaço vetorial E, então qualquer conjunto com mais de m vetores em E é l.d.

Demonstração.

Esta condição será satisfeita se todos os somatórios forem nulos, ou seja,

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n &= 0 \\
\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}$$

Mas tal solução existe pelo Lema anterior, pois $n > m$. Portanto, w_j são l.d. e o teorema está provado.

Corolário

Se os vetores $v_1, \ldots, v_m$ geram o espaço vetorial E e os vetores $u_1, \ldots, u_n$ são l.i., então $n \leq m$.

Corolário

Se o espaço vetorial E admite uma base $\mathscr{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ com n elementos, então qualquer outra base de E possui também n elementos.

Dimensão

Definição

Diz-se que o espaço vetorial E tem *dimensão finita* quando admite uma base $\mathscr{B}$ com um número finito n de elementos. Este número, que é o mesmo para todas as bases de E, chama-se *dimensão* do espaço vetorial E, $n =$dim(E). Por extensão, diz-se que o espaço vetorial $E = \{0\}$ tem dimensão zero.

Corolário

Se a dimensão de E é n, um conjunto com n vetores gera E se e somente se é l.i.

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^2$, duas possíveis bases são $\{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\{(1, 1), (0, 1)\}$. Este espaço tem dimensão 2.

Exemplos

- O espaço $\mathbb{R}^n$ tem dimensão n (basta pensar na base canônica de cada espaço destes, para $n \in \mathbb{N}$).

Exemplos

- O espaço $\mathscr{M}_{2\times 2}$ tem dimensão

Exemplos

- O espaço $\mathscr{M}_{2\times 2}$ tem dimensão 4

Teorema

Qualquer conjunto l.i. de um espaço vetorial E com dimensão finita pode ser completado para formar uma base.

Teorema

Qualquer conjunto l.i. de um espaço vetorial E com dimensão finita pode ser completado para formar uma base.

Demonstração. Seja $n = \dim(E)$ e $v_1, \ldots, v_r$ um conjunto l.i.

Teorema

Qualquer conjunto l.i. de um espaço vetorial E com dimensão finita pode ser completado para formar uma base.

Demonstração. Seja $n = \dim(E)$ e $v_1, \ldots, v_r$ um conjunto l.i.
Por um Corolário anterior, $r \leq n$.

Teorema

Qualquer conjunto l.i. de um espaço vetorial E com dimensão finita pode ser completado para formar uma base.

Demonstração. Seja $n = \dim(E)$ e $v_1, \ldots, v_r$ um conjunto l.i.
Por um Corolário anterior, $r \leq n$. Se esse conjunto gera E, então ele é base e $n = r$. Suponha que não.

Teorema

Qualquer conjunto l.i. de um espaço vetorial E com dimensão finita pode ser completado para formar uma base.

Demonstração. Seja $n =$dim(E) e $v_1, \dots, v_r$ um conjunto l.i.
Por um Corolário anterior, $r \leq n$. Se esse conjunto gera E, então ele é base e $n = r$. Suponha que não.
Então existe um $v_{r+1} \in E$ tal que $v_{r+1} \notin \{v_1, \dots, v_r\}$. Então v_{r+1} não pode ser combinação linear dos v_i, pois caso contrário os v_i seriam base para E. Logo, $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}\}$ é l.i. Se este conjunto gera E, terminamos. Senão, continuamos no mesmo procedimento até que uma base tenha sido encontrada.

Corolário

Seja E um espaço vetorial de dimensão finita. Se U é subespaço de E, então

$$\dim(U) \leq \dim(E).$$

Corolário

Seja E um espaço vetorial de dimensão finita. Se U é subespaço de E, então

$$\dim(U) \leq \dim(E).$$

Demonstração. Para isto, basta pensarmos que uma base de U deve estar contida em E, e assim não pode ter mais elementos do que uma base de E.

Corolário

Se $n =$dim(V), com $V \subset W$ e dim$(W) = n$, então $V = W$.

Surpreendente?

Corolário

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e suponha que as linhas de A formam um conjunto l.i. Então A é inversível.

Surpreendente?

Corolário

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e suponha que as linhas de A formam um conjunto l.i. Então A é inversível.

Demonstração. Seja para cada $i = 1, \ldots, n$ o vetor $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ (a linha i da matriz A). Suponha que W é o subespaço gerado por estes vetores.

Surpreendente?

Corolário

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e suponha que as linhas de A formam um conjunto l.i. Então A é inversível.

Demonstração. Seja para cada $i = 1, \ldots, n$ o vetor $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ (a linha i da matriz A). Suponha que W é o subespaço gerado por estes vetores. Como as linhas são linearmente independentes por hipótese, a dimensão de W é n.

Surpreendente?

Corolário

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e suponha que as linhas de A formam um conjunto l.i. Então A é inversível.

Demonstração. Seja para cada $i = 1, \ldots, n$ o vetor $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ (a linha i da matriz A). Suponha que W é o subespaço gerado por estes vetores. Como as linhas são linearmente independentes por hipótese, a dimensão de W é n. Pelo Corolário, $W = \mathbb{R}^n$. Portanto, devem existir escalares $b_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$, tais que

$$\begin{cases} e_1 & = b_{11}\alpha_1 + b_{12}\alpha_2 + \ldots + b_{1n}\alpha_n \\ e_2 & = b_{21}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \ldots + b_{2n}\alpha_n \\ \vdots & \\ e_n & = b_{n1}\alpha_1 + b_{n2}\alpha_2 + \ldots + b_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

em que cada e_i é o i-ésimo vetor canônico em $\mathbb{R}^n$. Portanto, se construirmos uma matriz com os b_{ij} teremos que $BA = I$, ou seja, $B = A^{-1}$.

Finalmente...

Teorema

Se U e W são subespaços de E (espaço vetorial com dimensão finita), então

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

Demonstração

Note que $U \cap W$ e é subespaço de E. Portanto, deve ter dimensão finita e sua dimensão deve ser menor que a dimensão de E. Assim, sua base deve ser um subconjunto $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ da base de U e da base de W. Escreva isso então como

$$U = \operatorname{span}[\, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_m \,]$$
$$W = \operatorname{span}[\, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_n \,]$$

Demonstração

Note que $U \cap W$ e é subespaço de E. Portanto, deve ter dimensão finita e sua dimensão deve ser menor que a dimensão de E. Assim, sua base deve ser um subconjunto $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ da base de U e da base de W. Escreva isso então como

$$U = \text{span}[\,\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \ldots, \beta_m\,]$$
$$W = \text{span}[\,\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_n\,]$$

Assim, o subespaço $U + W$ é gerado pelos vetores $\{\alpha_i, \beta_j, \gamma_p\}$, com $1 \leq i \leq k$, $k+1 \leq j \leq m$, $k+1 \leq p \leq n$.

Demonstração

O subespaço $U + W$ é gerado pelos vetores $\{\alpha_i, \beta_j, \gamma_p\}$, com $1 \leq i \leq k$, $k+1 \leq j \leq m$, $k+1 \leq p \leq n$.

Demonstração

O subespaço $U + W$ é gerado pelos vetores $\{\alpha_i, \beta_j, \gamma_p\}$, com $1 \leq i \leq k$, $k+1 \leq j \leq m$, $k+1 \leq p \leq n$.
Agora, note que estes vetores formam um conjunto linearmente independente, pois caso contrário poderíamos escrever, por exemplo, $\sum x_i\alpha_i + \sum y_j\beta_j + \sum z_p\gamma_p = 0$ e assim teríamos

$$-\sum y_j\beta_j = \sum x_i\alpha_i + \sum z_p\gamma_p$$

o que implicaria que $\beta_j \in W$.

Demonstração

O subespaço $U + W$ é gerado pelos vetores $\{\alpha_i, \beta_j, \gamma_p\}$, com $1 \leq i \leq k$, $k+1 \leq j \leq m$, $k+1 \leq p \leq n$.

Agora, note que estes vetores formam um conjunto linearmente independente, pois caso contrário poderíamos escrever, por exemplo, $\sum x_i\alpha_i + \sum y_j\beta_j + \sum z_p\gamma_p = 0$ e assim teríamos

$$-\sum y_j\beta_j = \sum x_i\alpha_i + \sum z_p\gamma_p$$

o que implicaria que $\beta_j \in W$.

Como os $\beta_j \in U$, isso implicaria que poderíamos escrever

$$\sum y_j\beta_j = \sum c_i\alpha_i$$

para escalares c_i. Mas, como a base de U é linearmente independente, cada um dos escalares y_j deve ser igual a zero; logo,

$$0 = -\sum y_j\beta_j = \sum x_i\alpha_i + \sum z_p\gamma_p$$

e como $\{\alpha_i, \gamma_q\}$ também é l.i., todos os x_i e todos os z_p devem ser iguais a zero.

Portanto, $\{\alpha_i, \beta_j, \gamma_p\}$ formam uma base para $U + W$.

Demonstração

O subespaço $U + W$ é gerado pelos vetores $\{\alpha_i, \beta_j, \gamma_p\}$, com $1 \leq i \leq k$, $k+1 \leq j \leq m$, $k+1 \leq p \leq n$.

Agora, note que estes vetores formam um conjunto linearmente independente, pois caso contrário poderíamos escrever, por exemplo, $\sum x_i\alpha_i + \sum y_j\beta_j + \sum z_p\gamma_p = 0$ e assim teríamos

$$-\sum y_j\beta_j = \sum x_i\alpha_i + \sum z_p\gamma_p$$

o que implicaria que $\beta_j \in W$.

Como os $\beta_j \in U$, isso implicaria que poderíamos escrever

$$\sum y_j\beta_j = \sum c_i\alpha_i$$

para escalares c_i. Mas, como a base de U é linearmente independente, cada um dos escalares y_j deve ser igual a zero; logo,

$$0 = -\sum y_j\beta_j = \sum x_i\alpha_i + \sum z_p\gamma_p$$

e como $\{\alpha_i, \gamma_q\}$ também é l.i., todos os x_i e todos os z_p devem ser iguais a zero.

Portanto, $\{\alpha_i, \beta_j, \gamma_p\}$ formam uma base para $U + W$.

Além disso,

$$\dim(U) + \dim(W) = m + n = k + (m + n - k) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W).$$

Exemplo

Seja P o espaço dos polinômios em $\mathbb{R}$ (de qualquer grau). Então os vetores deste espaço tem a forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

Seja $f_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, \ldots$. O conjunto infinito $\{f_0, f_1, \ldots\}$ é uma base para V. (Basta mostrarmos que todo subconjunto finito deste conjunto infinito é l.i.) Isto implica que ele não tem dimensão finita, pelo teorema anterior que dizia que um conjunto l.i. não pode ter mais elementos do que a dimensão do espaço.

Observação. Uma base infinita não requer combinações lineares infinitas; $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ não está neste espaço.

Coordenadas

Para determinarmos as coordenadas de um vetor (isto é, os coeficientes da combinação linear dos elementos da base que o definem) precisamos fazer isso numa certa ordem.

Exemplo:

$(2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)$.

Mas se $\overline{e_1} = (0, 1)$ e $\overline{e_2} = (1, 0)$, então as coordenadas mudam para

$$(2, 3) = 3\overline{e_1} + 2\overline{e_2} = (3, 2)_{\text{(nova base)}}$$

Base

Definição

Se E é um espaço vetorial de dimensão finita, uma base ordenada de E é uma *sequência* finita de vetores que é l.i. e que gera E.

Base

Definição

Se E é um espaço vetorial de dimensão finita, uma base ordenada de E é uma *sequência* finita de vetores que é l.i. e que gera E.

Desta forma, dada uma base ordenada $\mathscr{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ de V, então dado $v \in V$, existe uma única n-tupla de escalares x_i tais que

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i.$$

A base não é única

Frequentemente, ao invés de trabalharmos com as coordenadas de um vetor, vamos precisar trabalhar com a matriz de v relativa à base ordenada $\mathscr{B}$:

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

Isto é útil pois vamos tentar descrever o que acontece quando mudamos de base.

Mudança de base

Teorema

Seja E um espaço vetorial de dimensão n e sejam $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ duas bases ordenadas de E. Então existe uma matriz única P, inversível e $n \times n$, com entradas tais que

$$[v]_{\mathscr{B}} = P[v]_{\mathscr{B}'} \quad \text{e} \quad [v]_{\mathscr{B}'} = P^{-1}[v]_{\mathscr{B}},$$

para todo $v \in E$. As colunas de P são dadas por

$$P_j = [\alpha_j']_{\mathscr{B}}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Demonstração

Demonstração. Considere as bases

$$\mathscr{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \text{ e } \mathscr{B}' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$$

Então, existe um conjunto único de escalares P_{ij} tais que

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i, 1 \leq j \leq n.$$

Demonstração

Demonstração. Considere as bases

$$\mathscr{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \text{ e } \mathscr{B}' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$$

Então, existe um conjunto único de escalares P_{ij} tais que

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i, 1 \leq j \leq n.$$

Sejam agora $x_1, \ldots, x_n$ as coordenadas de um vetor v na base ordenada $\mathscr{B}$ e $x'_1, \ldots, x'_n$ as coordenadas do mesmo vetor v na base ordenada $\mathscr{B}'$. Então,

$$\begin{aligned} v = x'_1\alpha'_1 + \ldots + x'_n\alpha'_n &= \sum_{j=1}^{n} x'_j\alpha'_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (P_{ij}x'_j)\alpha_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} P_{ij}x'_j \right) \alpha_i \end{aligned}$$

Demonstração

Demonstração. Como as coordenadas são unicamente determinadas para cada base, isso implica que

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} x'_j, \, 1 \leq i \leq n$$

Seja então P a matriz formada pelos P_{ij} e X e X' as matrizes coordenadas do vetor v nas bases $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$, respectivamente. Então,

$$X = PX'.$$

Como as duas bases são linearmente independentes, $X = 0$ se e somente se $X' = 0$. Logo, segue de um teorema anterior que P é inversível; ou seja

$$X' = P^{-1}X.$$

Em outras palavras,

$$[v]_{\mathscr{B}} = P[v]_{\mathscr{B}'} \text{ e } [v]_{\mathscr{B}'} = P^{-1}[v]_{\mathscr{B}}$$

Mudança de base

Isto quer dizer que para construirmos P que leva um vetor descrito na base $\mathscr{B}'$ em sua descrição na base $\mathscr{B}$, devemos escrever cada vetor da base $\mathscr{B}'$ em suas coordenadas na base B. Podemos denotar também

$$P = I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.$$

Teorema

Seja P uma matriz $n \times n$ inversível, e seja V um espaço n-dimensional definido no mesmo corpo; além disso, seja $\mathscr{B}$ uma base ordenada de V. Então existe uma única base ordenada $\mathscr{B}'$ de V tal que P é a matriz de mudança de base de $\mathscr{B}'$ para $\mathscr{B}$, ou seja,

$$[v]_{\mathscr{B}} = P[v]_{\mathscr{B}'} \text{ e } [v]_{\mathscr{B}'} = P^{-1}[v]_{\mathscr{B}}$$

para qualquer vetor $v \in V$.

Demonstração. Seja $\mathscr{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Se $\mathscr{B}' = \{\alpha_1', \ldots, \alpha_n'\}$ for uma base ordenada de V para a qual a primeira igualdade é válida, então devemos ter

$$\alpha_j' = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i.$$

Logo, precisamos somente mostrar que estes vetores α_j' formam uma base de V.

Teorema

Seja P uma matriz $n \times n$ inversível, e seja V um espaço n-dimensional definido no mesmo corpo; além disso, seja $\mathscr{B}$ uma base ordenada de V. Então existe uma única base ordenada $\mathscr{B}'$ de V tal que P é a matriz de mudança de base de $\mathscr{B}'$ para $\mathscr{B}$, ou seja,

$$[v]_{\mathscr{B}} = P[v]_{\mathscr{B}'} \text{ e } [v]_{\mathscr{B}'} = P^{-1}[v]_{\mathscr{B}}$$

para qualquer vetor $v \in V$.

Demonstração.

Mas:

$$\sum_j P_{jk}^{-1}\alpha_j' = \sum_j P_{jk}^{-1} \sum_i P_{ij}\alpha_i = \sum_j \sum_i P_{ij}P_{jk}^{-1}\alpha_i = \alpha_k$$

Logo, o subespaço gerado por $\mathscr{B}'$ contém $\mathscr{B}$ e é portanto igual a V.

Logo, $\mathscr{B}'$ é base; assim, as duas afirmações são verdadeiras.

Exemplo

Seja $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\mathscr{B}' = \{(1,1),(1,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Então

$$(1,0) = 0(1,1) + 1(1,0)$$
$$(0,1) = 1(1,1) - 1(1,0)$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}.$$

Exemplo

Considere $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathscr{B}' = \{(2,3),(-1,2)\}$. Para construirmos $I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, escrevemos cada vetor da base $\mathscr{B}'$ na base $\mathscr{B}$:

$$(2,3) =$$

$$(-1,2) =$$

Exemplo

Considere $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathscr{B}' = \{(2,3),(-1,2)\}$. Para construirmos $I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, escrevemos cada vetor da base $\mathscr{B}'$ na base $\mathscr{B}$:

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$

$$(-1,2) = -1(1,0) + 2(0,1)$$

Exemplo

Considere $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathscr{B}' = \{(2,3),(-1,2)\}$. Para construirmos $I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, escrevemos cada vetor da base $\mathscr{B}'$ na base $\mathscr{B}$:

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$

$$(-1,2) = -1(1,0) + 2(0,1)$$

Logo,

$$I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} =$$

Exemplo

Considere $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathscr{B}' = \{(2,3),(-1,2)\}$. Para construirmos $I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, escrevemos cada vetor da base $\mathscr{B}'$ na base $\mathscr{B}$:

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$

$$(-1,2) = -1(1,0) + 2(0,1)$$

Logo,

$$I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo

Considere $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathscr{B}' = \{(2,3),(-1,2)\}$. Para construirmos $I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, escrevemos cada vetor da base $\mathscr{B}'$ na base $\mathscr{B}$:

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$

$$(-1,2) = -1(1,0) + 2(0,1)$$

Logo,

$$I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Note que, se $v = (1,1)_{\mathscr{B}'}$, então em $\mathscr{B}'$ teremos

Exemplo

Considere $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathscr{B}' = \{(2,3),(-1,2)\}$. Para construirmos $I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, escrevemos cada vetor da base $\mathscr{B}'$ na base $\mathscr{B}$:

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$

$$(-1,2) = -1(1,0) + 2(0,1)$$

Logo,

$$I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Note que, se $v = (1,1)_{\mathscr{B}'}$, então em $\mathscr{B}'$ teremos

$$v = 1(2,3) + 1(-1,2) = (1,5)_{\mathscr{B}}.$$

Exemplo

Considere $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathscr{B}' = \{(2,3),(-1,2)\}$. Para construirmos $I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, escrevemos cada vetor da base $\mathscr{B}'$ na base $\mathscr{B}$:

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$

$$(-1,2) = -1(1,0) + 2(0,1)$$

Logo,

$$I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Note que, se $v = (1,1)_{\mathscr{B}'}$, então em $\mathscr{B}'$ teremos

$$v = 1(2,3) + 1(-1,2) = (1,5)_{\mathscr{B}}.$$

De fato:

$$I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} v_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Exemplo: continuação

Por outro lado,

$$(1,0) = \frac{2}{7}(2,3) - \frac{3}{7}(-1,2)$$
$$(0,1) = \frac{1}{7}(2,3) + \frac{2}{7}(-1,2)$$

Assim,

$$I_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

De fato,

$$I_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} v_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}.$$

Ainda:

$$I_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = I.$$

Exemplo

Se $\mathscr{B} = \{(1, 2), (3, 5)\}$ e $\mathscr{B}' = \{(1, -1), (1, -2)\}$, para encontrarmos $I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ devemos escrever os elementos de $\mathscr{B}'$ na base $\mathscr{B}$. Mas isso pode ser difícil. Considere então a base canônica em $\mathbb{R}^2$. Então:

$$I_{C}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Além disso,

$$(1, 0) = -5(1, 2) + 2(3, 5)$$
$$(0, 1) = 3(1, 2) - 1(3, 5)$$

e assim

$$I_{\mathscr{B}}^{C} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo: continuação

Então:

$$I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = I_{\mathscr{B}}^{C} I_{C}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -11 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Note que

$$I_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} v_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -8 & -11 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -19 \\ 7 \end{pmatrix}$$

De fato,

$$(1,1)_{\mathscr{B}'} = (1,-1) + (1,-2) = (2,3)_C$$
$$(-19,7)_{\mathscr{B}} = -19(1,2) + 7(3,5) = (2,-3)_C.$$

Exemplo

Em $\mathbb{R}^3$, se consideramos as bases

$$E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$
$$S = \{(1,0,1),(2,1,2),(1,2,2)\}$$

temos que

$$I_E^S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad I_S^E = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, se $v = (1,1,1)_E$, temos

$$I_S^E v_E = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S .$$

Exemplo

Seja $\theta \in \mathbb{R}$; a matriz

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

é inversível com inversa

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Logo, para cada θ, o conjunto $\mathscr{B}'$ formado pelos vetores $(\cos\theta, \sin\theta)$, $(-\sin\theta, \cos\theta)$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Intuitivamente esta base é obtida ao rotacionarmos a base canônica num ângulo θ. Se $\alpha = (x_1, x_2)$, então

$$[\alpha]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ou ainda

$$x_1' = x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta$$
$$x_2' = -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta$$