Aula 3: Introdução aos Espaços Vetoriais

Melissa Weber Mendonça

Introdução aos espaços vetoriais

A Álgebra Linear é o estudo dos espaços vetoriais sobre corpos arbitrários e das transformações lineares entre esses espaços.

Definição

Um conjunto não-vazio $\mathbb{K}$ é um corpo se em $\mathbb{K}$ pudermos definir duas operações, denotadas por $+$ (soma) e $\cdot$ (multiplicação), satisfazendo:

(i) $a + b = b + a$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$ (comutativa)

(ii) $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ (associativa)

(iii) Existe um elemento em $\mathbb{K}$, denotado por 0 e chamado de *elemento neutro da soma*, que satisfaz $0 + a = a + 0 = a$, $\forall a \in \mathbb{K}$.

(iv) Para cada $a \in \mathbb{K}$, existe um elemento em $\mathbb{K}$ denotado por $-a$ e chamado de *oposto de a* (ou *inverso aditivo de a*) tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

(v) $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$ (comutativa)

(vi) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$

(vii) Existe um elemento em $\mathbb{K}$ denotado por 1 e chamado de *elemento neutro da multiplicação*, tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, $\forall a \in \mathbb{K}$.

(viii) Para cada elemento não-nulo $a \in \mathbb{K}$, existe um elemento em $\mathbb{K}$, denotado por a^{-1} e chamado de *inverso multiplicativo de a*, tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

(ix) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ (distributiva).

Exemplos de corpos

São corpos:

- $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$

Definição

Um conjunto não vazio E é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ se em seus elementos, denominados *vetores*, estiverem definidas duas operações:

- *soma*: A cada $u, v \in E$, associa $u + v \in E$
- *multiplicação por um escalar*: a cada escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e a cada vetor $v \in E$, associa $\alpha v \in E$.

Estas operações devem satisfazer as condições abaixo:

(i) **Comutatividade:** $u + v = v + u, \forall u, v \in E$

(ii) **Associatividade:** $(u + v) + w = u + (v + w)$ e $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v), \forall u, v, w \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

(iii) **Existência do vetor nulo:** existe um vetor $0 \in E$, chamado *vetor nulo*, tal que $v + 0 = 0 + v = v$ para todo $v \in E$.

(iv) **Existência do inverso aditivo:** para cada vetor $v \in E$ existe um vetor $-v \in E$ chamado *inverso aditivo* tal que $-v + v = v + (-v) = 0 \in E$.

(v) **Distributividade:** $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ e $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \forall u, v \in E$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

(vi) **Multiplicação por 1:** $1 \cdot v = v$, em que 1 é o elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{K}$.

Exemplos

- Todo corpo é um espaço vetorial sobre si mesmo.

Exemplos

- Todo corpo é um espaço vetorial sobre si mesmo.

De fato, se $\mathbb{K}$ é um corpo, então as duas operações internas em $\mathbb{K}$ podem ser vistas como a soma de vetores e a multiplicação por escalares.

Exemplos

- Para todo número natural n, o conjunto $\mathbb{K}^n$, definido como
  $$\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K} = \{(u_1, \ldots, u_n) : u_i \in \mathbb{K}, \forall i = 1, \ldots, n\}$$
  é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Exemplos

- Os elementos do espaço vetorial $\mathbb{R}^\infty$ são as sequências infinitas de números reais do tipo

$$u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots).$$

  - O elemento zero é a sequência formada por infinitos zeros $0 = (0, \dots, 0, \dots)$;
  - O inverso aditivo da sequência u é $-u = (-\alpha_1, \dots, -\alpha_n, \dots)$;
  - As operações de adição e multiplicação por escalar são definidas por

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n, \dots)$$
$$\rho u = (\rho\alpha_1, \dots, \rho\alpha_n, \dots).$$

Exemplos

- O conjunto $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ de todas as matrizes $m \times n$ com elementos em $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial?

Exemplos

- O conjunto $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ de todas as matrizes $m \times n$ com elementos em $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial?

Sim, se

- A soma entre duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ é dada por

$$[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

- O produto de uma matriz A pelo escalar $\rho \in \mathbb{K}$ como

$$[\rho A]_{ij} = \rho a_{ij}$$

- A matriz nula $0 \in \mathscr{M}_{m\times n}$ é aquela formada por zeros;
- O inverso aditivo da matriz $A = [a_{ij}]$ é a matriz $-A = [-a_{ij}]$.

Exemplos

- O conjunto de polinômios

$$\mathscr{P}(\mathbb{K}) = \{p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{K} \text{ e } n \geq 0\}$$

é um espaço vetorial com as operações usuais de soma de polinômios e multiplicação por escalar.

Exemplos

- Seja X um conjunto não-vazio qualquer. O símbolo $\mathscr{F}(X;\mathbb{R})$ representa o conjunto de todas as funções reais $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Esse conjunto é um espaço vetorial.

Variando o conjunto X, obtemos:

- Se $X = \{1, \ldots, n\}$, então $\mathscr{F}(X;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$, pois a cada número em X associamos um número real α, gerando assim uma lista de n valores reais para cada elemento do conjunto.
- Se $X = \mathbb{N}$, então $\mathscr{F}(X;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\infty$.
- Se X é o produto cartesiano dos conjuntos $\{1, \ldots, m\}$ e $\{1, \ldots, n\}$ então $\mathscr{F}(X;\mathbb{R}) = \mathscr{M}_{m\times n}$.

Propriedades

Como consequência dos axiomas, valem num espaço vetorial as regras operacionais habitualmente usadas nas manipulações numéricas:

1. Para todos $u, v, w \in E$, temos que $w + u = w + v \Rightarrow u = v$. Em particular, $w + u = w \Rightarrow u = 0$ e $w + u = 0 \Rightarrow u = -w$.
2. Dados $0 \in \mathbb{K}$ e $v \in E$, temos que $0v = 0 \in E$. Analogamente, dados $\alpha \in \mathbb{K}$ e $0 \in E$, temos que $\alpha 0 = 0$.
3. Se $\alpha \neq 0$ e $v \neq 0$ então $\alpha v \neq 0$.
4. $(-1)v = -v$.

Observação

Um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto E de *vetores*, com uma operação de soma que é uma função $+ : E \to E$ e uma operação de produto por escalar, que é uma função $\cdot : \mathbb{K} \times E : E$, satisfazendo os axiomas listados acima. Note que os axiomas não involvem a propriedade de inverso multiplicativo do corpo, e podemos definir uma estrutura semelhante à de espaço vetorial sobre um anel, que chamamos de *módulo* sobre $\mathbb{K}$. No entanto, a maioria dos teoremas provados para espaços vetoriais não seria válida nos módulos; por exemplo, não podemos falar da dimensão de um módulo.

Subespaços vetoriais

Definição

Um subespaço vetorial do espaço vetorial E é um subconjunto $F \subset E$ que, relativamente às operações de E, é ainda um espaço vetorial, ou seja, satisfaz

(i) Para todo $u, v \in F$, $u + v \in F$

(ii) Para todo $u \in F$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha u \in F$.

Observações

- Note que no caso de um subespaço, não é necessário verificar as seis propriedades listadas anteriormente pois elas já são satisfeitas para E, e $F \subset E$. No entanto, um subespaço deve ser *fechado* para a adição e a multiplicação por escalar. Mais geralmente, dados $v_1, \ldots, v_m \in F$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$,
$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$$
deve pertencer a F.

Observações

- O vetor nulo pertence a *todos* os subespaços.

Observações

- O espaço inteiro E é um exemplo trivial de subespaço de E.

Observações

- Todo subespaço é, em si mesmo, um espaço vetorial.

Observações

- O conjunto vazio não pode ser um subespaço vetorial.

Exemplos

- Seja $v \in E$ um vetor não-nulo. O conjunto $F = \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{K}\}$ de todos os múltiplos de v é um subespaço vetorial de E, chamado de *reta que passa pela origem e contém* v.

Exemplos

- Seja $E = \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções reais de uma variável real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto $\mathscr{C}^k(\mathbb{R})$ das funções k vezes continuamente diferenciáveis é um subespaço vetorial de E.

Exemplos

- Sejam $a_1, \ldots, a_n$ números reais. O conjunto $\mathscr{H}$ de todos os vetores $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. No caso trivial em que $a_1 = \ldots = a_n = 0$, o subespaço $\mathscr{H}$ é todo o $\mathbb{R}^n$. Se, ao contrário, pelo menos um dos $a_i \neq 0$, $\mathscr{H}$ chama-se *hiperplano* de $\mathbb{R}^n$ que passa pela origem.

Exemplos

- Seja E o espaço das matrizes 3×3: $E = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3}\}$. O conjunto das matrizes triangulares inferiores de dimensão 3 é um subespaço de E, assim como o conjunto das matrizes simétricas.

Exemplos

- Dentro do espaço $\mathbb{R}^3$, os subespaços possíveis são: o subespaço nulo, o espaço inteiro, as retas que passam pela origem, e os planos que passam pela origem. Qualquer reta que não passe pela origem não pode ser um subespaço (pois não contem o vetor nulo).

Teorema

Dados um espaço vetorial E e subespaços $F_1, F_2 \subset E$, a interseção $F_1 \cap F_2$ ainda é um subespaço de E.

E a união?

A união de dois subespaços vetoriais *não* é (em geral) um subespaço vetorial.

E a união?

A união de dois subespaços vetoriais *não* é (em geral) um subespaço vetorial.

Contra-exemplo:

$$E = \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$F_1 = \{ \text{ matrizes triangulares superiores } \}$$

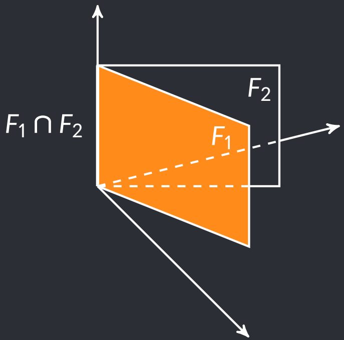
$$F_2 = \{ \text{ matrizes triangulares inferiores } \}$$

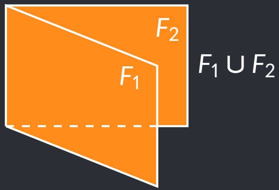
- O que é $F_1 \cap F_2$?
- O que é $F_1 \cup F_2$?

Exemplo

$E = \mathbb{R}^3$, F_1, F_2 dois planos em $\mathbb{R}^3$ passando pela origem.

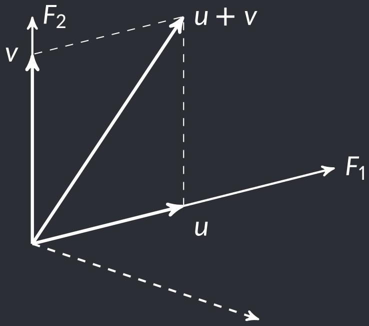
- $F_1 \cap F_2$ é a reta de interseção de F_1 e F_2 passando pela origem;
- $F_1 \cup F_2$ é a união dos dois planos.





Exemplo

$E = \mathbb{R}^3$, F_1 e F_2 duas retas que passam pela origem. Ambos F_1 e F_2 são subespaços, mas sua união, representada pelo feixe das duas retas, não o é.



Será que existe alternativa?

Como vimos no último exemplo, a união de dois subespaços vetoriais não é necessariamente um subespaço vetorial. No entanto, podemos construir um conjunto S que contém F_1 e F_2 e que é subespaço de E, como veremos no Teorema a seguir.

Teorema

Sejam F_1 e F_2 subespaços de um espaço vetorial E. Então o conjunto

$$S = F_1 + F_2 = \{w \in E : w = w_1 + w_2, w_1 \in F_1, w_2 \in F_2\}$$

é um subespaço de E.

Demonstração. Vamos verificar as condições para que S seja um subespaço de E.

Teorema

Sejam F_1 e F_2 subespaços de um espaço vetorial E. Então o conjunto

$$S = F_1 + F_2 = \{w \in E : w = w_1 + w_2, w_1 \in F_1, w_2 \in F_2\}$$

é um subespaço de E.

Demonstração. Vamos verificar as condições para que S seja um subespaço de E.
Primeiramente, note que $0 \in S$ pois $0 \in F_1$ e $0 \in F_2$.

Teorema

Sejam F_1 e F_2 subespaços de um espaço vetorial E. Então o conjunto

$$S = F_1 + F_2 = \{w \in E : w = w_1 + w_2, w_1 \in F_1, w_2 \in F_2\}$$

é um subespaço de E.

Demonstração. Vamos verificar as condições para que S seja um subespaço de E.

(i) Sejam $v, w \in S$. Então $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in F_1$, $v_2 \in F_2$ e $w = w_1 + w_2$, $w_1 \in F_1$, $w_2 \in F_2$. Assim

$$\begin{aligned} v + w &= (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) \\ &= (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) \in S, \end{aligned}$$

pois $v_1 + w_1 \in F_1$ e $v_2 + w_2 \in F_2$ já que ambos são subespaços de E e $v_1, w_1 \in F_1$ e $v_2, w_2 \in F_2$, e a última igualdade segue das propriedades da soma no espaço vetorial E.

Teorema

Sejam F_1 e F_2 subespaços de um espaço vetorial E. Então o conjunto

$$S = F_1 + F_2 = \{w \in E : w = w_1 + w_2, w_1 \in F_1, w_2 \in F_2\}$$

é um subespaço de E.

Demonstração. Vamos verificar as condições para que S seja um subespaço de E.

(ii) Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $w \in S$. Então,

$$\alpha w = \alpha(w_1 + w_2) = \alpha w_1 + \alpha w_2 \in S$$

já que $\alpha w_1 \in F_1$ e $\alpha w_2 \in F_2$ pois ambos são subespaços de E.

Exemplo

No Exemplo da união dos subespaços, $S = F_1 + F_2$ é o plano que contém as duas retas.

Subespaços de uma matriz

Considere agora uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Chegamos então ao caso interessante de subespaços ligados à matriz A em um sistema linear $Ax = b$, com $x \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Para relacionarmos o conceito de subespaços vetoriais à resolução de sistemas de equações lineares, precisamos do conceito de combinação linear.

Combinação Linear

Definição

Seja E um espaço vetorial, e sejam $u_1, u_2, \dots, u_n \in E$ vetores neste espaço. Então uma *combinação linear* destes vetores é um vetor u no espaço E dado por

$$u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n,$$

para $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Espaço Gerado: span

Definição

Uma vez fixados os vetores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ em V, o conjunto $W \subset V$ que contém todas as combinações lineares destes vetores é chamado de *espaço gerado* pelos vetores $v_1, \ldots, v_n$. Denotamos isto por

$$
\begin{aligned}
W &= \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\} \\
&= \{v \in V : v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n, a_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n\}.
\end{aligned}
$$

Espaço Gerado: span

Uma outra caracterização de subespaço gerado é a seguinte: W é o menor subespaço de V que contém o conjunto de vetores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ no sentido que qualquer outro subespaço W' de V que contenha estes vetores satisfará $W' \supset W$, já que como $v_1, \ldots, v_n \in W'$ e W' é um subespaço vetorial, então qualquer combinação linear destes vetores também está incluida em W'; logo $W \subset W'$.

Independência Linear

Definição

Seja $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset E$ um conjunto de vetores. Se nenhum dos vetores v_i puder ser escrito como combinação linear dos outros vetores, dizemos que este conjunto é linearmente independente (l.i.). Formalmente, o conjunto X é l.i. se e somente se a única combinação linear nula dos vetores de X for aquela cujos coeficientes são todos nulos, ou seja,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Independência Linear

Definição

Seja $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset E$ um conjunto de vetores. Se nenhum dos vetores v_i puder ser escrito como combinação linear dos outros vetores, dizemos que este conjunto é linearmente independente (l.i.). Formalmente, o conjunto X é l.i. se e somente se a única combinação linear nula dos vetores de X for aquela cujos coeficientes são todos nulos, ou seja,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Evidentemente, todo subconjunto de um conjunto l.i. é também l.i.

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^2$, quaisquer dois vetores que não sejam colineares são l.i.

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^n$, chamamos de vetores canônicos os vetores definidos como, para todos $i, j = 1, \ldots, n$

$$(e_i)_j = \begin{cases} 1, & \text{se } j = i \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

em que o subíndice j denota a coordenada j do i-ésimo vetor canônico. Estes vetores são l.i.

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^{2\times 2}$, as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  são l.i.

Exemplos

- O conjunto $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios

$$p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

  é um subespaço de $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, assim como o conjunto $\mathscr{P}_n$ dos polinômios de grau $\leq n$.