Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Disciplina: MTM5812 - H-Álgebra II
Professora: Melissa Weber Mendonça

5ª Lista de Exercícios

1. Encontre os autovalores e autovetores das matrizes abaixo.

   a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Encontre os autovalores e autovetores de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

   a) Verifique que o traço é igual à soma dos autovalores e que o determinante é igual ao produto deles.

   b) Se mudarmos a matriz para $A - 7I$, quais serão os autovalores e autovetores e como eles se relacionam com os de A?

   c) Considerando $\lambda \neq 0$, mostre que se x é autovetor de A, então x também é autovetor de A^{-1}, e encontre o autovalor correspondente.

3. Dê um exemplo para mostrar que os autovalores podem se alterar quando um múltiplo de uma linha é subtraido de outra linha. Por que um autovalor nulo não é alterado pelas etapas da eliminação gaussiana?

4. a) Construa matrizes 2 por 2 de modo que os autovalores de AB não sejam os produtos dos autovalores de A e B, λ_A e λ_B, respectivamente, e os autovalores de $A + B$ não sejam a soma dos autovalores individuais $\lambda_A + \lambda_B$.

b) Verifique, no entanto, que a soma dos autovalores de $A+B$ é igual à soma de todos os autovalores individuais de A e B, assim como seus produtos. Por que isto é verdadeiro?

5. Os vetores $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (2,-1)$ são autovetores de $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ associados a $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$, respectivamente. Encontre a imagem de $v = (4,1)$ pela transformação A.

6. Suponha que A possui autovalores $0,3,5$ com autovetores independentes u, v, w.

   a) Forneça uma base para o espaço nulo de uma base para o espaço-coluna.

   b) Encontre uma solução particular para $Ax = v + w$. Encontre todas as soluções.

   c) Mostre que $Ax = u$ não possui solução.

7. A partir do vetor unitário $u = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{5}{6})$, construa a matriz de projeção de posto 1 $P = uu^T$.

   a) Mostre que $Pu = u$. Então, u é um autovetor com $\lambda = 1$.

   b) Se v é perpendicular a u, mostre que Pv é o vetor nulo. Então, $\lambda = 0$.

   c) Encontre três autovetores independentes de P, todos com autovalor $\lambda = 0$.

8. Sabe-se que uma matriz B 3 por 3 possui autovalores $0,1,2$. Esta informação é suficiente para encontrar três dos seguintes itens (quais?):

   a) o posto de B;

   b) o determinante de $B^T B$;

   c) os autovalores de $B^T B$;

   d) os autovalores de $(B+I)^{-1}$.

9. Mostre que se u e v são autovalores de uma transformação linear associados a um autovalor λ, então $\alpha u - \beta v$ também é autovetor associado ao mesmo λ.

10. Quando P, matriz de permutação, troca as linhas 1 e 2 ou as colunas 1 e 2 de A, os autovalores de A não se alteram. Encontre os autovetores de A e PAP para $\lambda = 11$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } PAP = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

11. Verificar se cada matriz é diagonalizável, calculando sua diagonalização quando possível.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

12. Se os autovalores de A são 1,1,2, quais das seguintes alternativas são verdadeiras? Justifique ou dê um contra-exemplo.

   a) A é inversível

   b) A é diagonalizável.

13. Verdadeiro ou falso: se as n colunas de S (matriz cujas colunas são autovetores de A) são independentes, então:

   a) A é inversível

   b) A é diagonalizável

   c) S é inversível

   d) S é diagonalizável

14. Se $A = S\Lambda S^{-1}$, então encontre a diagonalização de A^3 e A^{-1}.

15. Se $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, encontre A^{100} diagonalizando A.

16. As potências A^k da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

tendem a um limite quando $k \to \infty$.

a) Encontre este limite.

b) Verifique que $A^2 = \frac{A + A^\infty}{2}$. Por que?

17. Diagonalize A e calcule $S\Lambda^k S^{-1}$ para provar esta fórmula para A^k:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ é tal que } A^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^k + 1 & 3^k - 1 \\ 3^k - 1 & 3^k + 1 \end{pmatrix}.$$

18. Lucas começou a sequência de Fibonacci com $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. A regra $L_{k+2} = L_{k+1} + L_k$ é a mesma, de modo que A ainda é uma matriz de Fibonacci. Some seus dois autovetores:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_0 \end{pmatrix}.$$

Calcule o número de Lucas L_{10} pela regra iterativa, e aproximadamente por λ_1^{10}.

19. Considere todas as matrizes A 4 por 4 que são diagonalizadas pela mesma matriz fixa de autovetores. Mostre que as matrizes A formam um subespaço. Qual é o subespaço quando $S = I$, e qual é sua dimensão nesse caso?

20. Para cada matriz simétrica abaixo, encontrar a sua diagonalização $\Lambda = P^T AP$.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

21. Encontre uma "raiz quadrada matricial" para $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Por que não existe esta raiz quadrada para $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$?

22. Apresente a matriz A^H e calcule $C = A^H A$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Qual é a relação entre C e C^H? Isto continua sendo verdadeiro para qualquer A?

23. Como o determinante de uma matriz A^H está relacionado ao determinante de A? Prove que o determinante de uma matriz hermitiana é real.

24. Verdadeiro ou falso? Justifique ou dê um contra-exemplo:

    a) Se A for hermitiana, então $A + iI$ será inversível.
    b) Se Q for ortogonal, então $Q + \frac{1}{2}I$ será inversível.
    c) Se A for real, então $A + iI$ será inversível.

25. Descreva todas as matrizes 3 por 3 que são simultaneamente hermitianas, unitárias e diagonais. Quantas existem?

26. Como os autovalores de A^H (quadrada) se relacionam com os autovalores de A?

27. Se $A + iB$ é uma matriz hermitiana (A e B reais), mostre que $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ é simétrica.

28. Se $u^H u = 1$, mostre que $I - 2uu^H$ é hermitiana e também unitária. A matriz de posto 1 uu^H é a projeção sobre qual reta em $\mathbb{C}^n$?

29. Uma matriz com autovetores ortonormais tem a forma $A = U\Lambda U^{-1} = U\Lambda U^H$. Prove que $AA^H = A^H A$.