Aula 2: Sistemas

Melissa Weber Mendonça

Produto entre matrizes

Podemos encarar o produto de duas matrizes de forma monolítica, mas existem outros jeitos de interpretarmos esta operação.

Produto entre matrizes

Podemos encarar o produto de duas matrizes de forma monolítica, mas existem outros jeitos de interpretarmos esta operação.

(i) Cada entrada da matriz-produto AB é o produto entre uma linha e uma coluna:

$$(AB)_{ij} = \text{ linha } i \text{ de } A \text{ vezes a coluna } j \text{ de } B$$

Produto entre matrizes

Podemos encarar o produto de duas matrizes de forma monolítica, mas existem outros jeitos de interpretarmos esta operação.

(i) Cada entrada da matriz-produto AB é o produto entre uma linha e uma coluna:

$$(AB)_{ij} = \text{ linha } i \text{ de } A \text{ vezes a coluna } j \text{ de } B$$

(ii) Cada coluna de AB é o produto entre uma matriz e uma coluna:

$$\text{coluna } j \text{ de } AB = A \text{ vezes coluna } j \text{ de } B$$

Produto entre matrizes

Podemos encarar o produto de duas matrizes de forma monolítica, mas existem outros jeitos de interpretarmos esta operação.

(i) Cada entrada da matriz-produto AB é o produto entre uma linha e uma coluna:

$$(AB)_{ij} = \text{ linha } i \text{ de } A \text{ vezes a coluna } j \text{ de } B$$

(ii) Cada coluna de AB é o produto entre uma matriz e uma coluna:

$$\text{coluna } j \text{ de } AB = A \text{ vezes coluna } j \text{ de } B$$

(iii) Cada linha de AB é o produto entre uma linha e uma matriz:

$$\text{linha } i \text{ de } AB = \text{ linha } i \text{ de } A \text{ vezes } B.$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} =$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Como resolver sistemas lineares quadrados?

Poderíamos resolver um sistema $Ax = b$ encontrando a inversa de A, pois se $Ax = b$, então

$$x = A^{-1}b$$

No entanto, encontrar a inversa de uma matriz não é tarefa fácil; assim, vamos procurar resolver o sistema usando outras estratégias.

Ideia: transformar a matriz (quadrada) geral em uma matriz triangular para resolver o sistema linear por substituição.

Forma escalonada: Exemplo

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 9 \\ 2x + 4y - 3z & = 1 \\ 3x + 6y - 5z & = 0 \end{cases}$$

Forma escalonada: Exemplo

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 9 \\ 2x + 4y - 3z & = 1 \\ 3x + 6y - 5z & = 0 \end{cases}$$

Eliminando x na segunda e terceira equações:

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = 9 \\ & y & -\frac{7z}{2} & = -\frac{17}{2} \\ & -y & +\frac{11z}{3} & = 9 \end{cases}$$

Forma escalonada: Exemplo

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = 9 \\ & y & -\frac{7z}{2} & = -\frac{17}{2} \\ & -y & +\frac{11z}{3} & = 9 \end{cases}$$

Agora, vamos eliminar y na terceira equação:

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = 9 \\ & y & -(7/2)z & = -17/2 \\ & & (1/6)z & = 1/2 \end{cases}$$

Forma escalonada: Exemplo

$$\begin{cases} x \quad +y \qquad +2z & = 9 \\ \qquad\quad y \quad -(7/2)z & = -17/2 \\ \qquad\qquad\quad (1/6)z & = 1/2 \end{cases}$$

Resolvendo para z, temos que

Forma escalonada: Exemplo

Resolvendo para z, temos que

$$z = 3$$

Além disso,

$$2y - 7z = -17 \Leftrightarrow 2y = -17 + 21 = 4 \Leftrightarrow y = 2$$

Por último,

$$x + y + 2z = 9 \Leftrightarrow x = 9 - 2(3) - 2 = 9 - 8 = 1.$$

Sistemas Lineares Homogêneos

Considere o sistema linear

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares Homogêneos

Considere o sistema linear

$$Ax = b \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Se $b = 0$, chamamos este sistema de *homogêneo*.

Sistema homogêneo: Exemplo

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & - & 3x_2 & & & = & 0 \\ & - & 2x_2 & & & = & 0 \end{bmatrix}$$

Aqui, podemos ver que, pelas equações acima, $x_2 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$, ou seja x_1 é *livre*, $x_2 = 0$ e $x_3 = -x_1$. Neste caso, o sistema tem infinitas soluções.

E se não fosse homogêneo?

Se, por outro lado, o lado direito for diferente de nulo, teremos:

$$\begin{bmatrix} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & - & 3x_2 & & & = & 1 \\ & - & 2x_2 & & & = & 2 \end{bmatrix}$$

De onde vemos que o valor de x_2 não pode ser encontrado.

Portanto, esse sistema é inconsistente.

No entanto, se tivéssemos

$$\begin{bmatrix} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -3 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & - & 3x_2 & & & = & 9 \\ & - & 2x_2 & & & = & 6 \end{bmatrix}$$

então o sistema seria consistente, mas teria infinitas soluções.

O que deu errado?

Pivôs nulos.

Assim, esse procedimento pode ser usado para identificar classes de sistemas lineares; se o procedimento puder ser realizado até o fim, sabemos que teremos uma solução definida para o sistema.

Forma escalonada

Definição

Uma matriz A está na forma escalonada quando:

- Se uma linha não for inteiramente nula, o primeiro número não-nulo da linha (indo da esquerda para a direita) é 1 (pivô);
- Se uma linha é nula, ela está abaixo de todas as linhas que contém elementos não-nulos;
- Para cada duas linhas não-nulas, o pivô da de baixo está mais à direita que o da de cima;
- Cada coluna que tem pivô é nula no resto. (se utilizarmos o procedimento de Gauss-Jordan até o final)

Esta definição é válida também para sistemas não quadrados, mas por enquanto vamos nos concentrar em sistemas quadrados.

Casos

Para sistemas não-homogêneos:

- Se todos os pivôs forem não nulos:
  - sistema consistente e determinado (caso quadrado)
  - sistema impossível
- Se algum pivô for nulo:
  - sistema consistente indeterminado (infinitas soluções)
  - sistema impossível

Para o caso homogêneo,

- Se todos os pivôs são não-nulos, então a solução trivial é a única solução.
- Senão, temos infinitas soluções (sistema indeterminado).

Operações elementares

Nestes exemplos, resolvemos o sistema ao realizarmos as chamadas operações elementares nas linhas nestas matrizes. As operações elementares são:

- Multiplicar uma linha por um escalar não-nulo;
- Trocar uma linha r do sistema por $r + cs$, onde c é um escalar e s é outra linha do sistema ($r \neq s$);
- Trocar duas linhas de lugar.

Estas operações são importantes pois podem ser revertidas! Vamos analisar essas operações na forma matricial.

Matrizes elementares

Definição

Uma matriz $n \times n$ que pode ser obtida da matriz I_n executando-se uma única operação elementar sobre linhas é uma matriz elementar.

Se E resulta de uma operação elementar em $I_{m \times m}$ e $A_{m \times n}$, então EA realiza as mesmas operações em A.

Exemplo

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

Teorema

Teorema

Toda E elementar é inversível, e E^{-1} também é elementar.

Demonstração

Teorema

Teorema

Toda E elementar é inversível, e E^{-1} também é elementar.

Demonstração Seja E_0 a matriz que resulta da aplicação da operação elementar inversa de E em I (garantida pois estamos em um corpo!!). Então,

$$E_0 E = I = E E_0$$

E_0 também é elementar pois representa também uma operação elementar.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Temos então:

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Temos então:

$$E^{(1)}A = A^{(1)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E^{(1)}b = b^{(1)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Temos então:

$$E^{(2)}A^{(1)} = A^{(2)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E^{(2)}b^{(1)} = b^{(2)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Temos então:

$$E^{(3)}A^{(2)} = A^{(3)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E^{(3)}b^{(2)} = b^{(3)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Temos então:

$$\begin{aligned} E &= E^{(3)}E^{(2)}E^{(1)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Objetivos

Existem algumas maneiras de representar a matriz depois das operações elementares:

- Se quisermos obter a matriz na forma *escalonada*, realizamos as operações por linhas, de forma que a matriz resultante seja triangular superior com pivôs 1;

Objetivos

Existem algumas maneiras de representar a matriz depois das operações elementares:

- Se quisermos obter a matriz na forma *reduzida por linhas*, realizamos as operações por linhas, de forma que a matriz resultante tenha pivôs 1, e zero no resto de cada coluna com pivô;

Objetivos

Existem algumas maneiras de representar a matriz depois das operações elementares:

- Se quisermos apenas resolver o sistema, realizamos as operações por linhas, de forma que a matriz resultante seja triangular superior com pivôs não-nulos (não necessariamente 1). Neste caso, obtemos a decomposição (ou fatoração) LU da matriz.

Matrizes Elementares

As operações elementares realizadas no momento do escalonamento do sistema podem ser acumuladas em uma matriz E, que é o produto das matrizes elementares utilizadas. Assim,

$$EA = U$$

e ainda,

$$A = E^{-1}U = LU.$$

Como isso se relaciona com o sistema?

Podemos agora fazer

$$Ax = b \Longleftrightarrow LUx = b$$

ou seja,

$$\text{Resolvemos } Ly = b \text{ para } y;$$

$$\text{Resolvemos } Ux = y \text{ para } x.$$

Felizmente, não precisamos montar as matrizes E!

- Reduzir A à forma escalonada U, guardando os multiplicadores;
- Na diagonal de L colocar 1's;
- Abaixo da diagonal de L, colocar o negativo do multiplicador usado para zerar o respectivo elemento de A.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição

Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que A é equivalente por linhas a B se B puder ser obtida através de um número finito de operações elementares efetuadas em A.

Desta forma, é fácil ver que, como cada operação elementar pode ser representada por uma matriz elementar, e como a aplicação sucessiva destas matrizes elementares é representada pelo produto de todas estas matrizes, então

$$\boxed{\begin{array}{c} \textit{A e B são equivalentes por linhas se e somente se} \\ A = PB, \textit{ onde P é um produto de matrizes elementares.} \end{array}}$$

Teorema

Se A e B são equivalentes por linhas, então os sistemas $Ax = 0$ e $Bx = 0$ tem exatamente as mesmas soluções.

Demonstração

Teorema

Se A e B são equivalentes por linhas, então os sistemas $Ax = 0$ e $Bx = 0$ tem exatamente as mesmas soluções.

Demonstração Basta mostrarmos que uma operação elementar não altera o conjunto de soluções. Mas, note que

$$EAx = 0 \Longleftrightarrow Ax = E^{-1}0 = 0.$$

Portanto, $EAx = 0$ tem o mesmo conjunto de soluções que $Ax = 0$. Logo, se cada operação elementar não altera o conjunto solução, e aplicamos uma sequência finita de operações elementares em A para chegarmos a B, então $Ax = 0$ e $Bx = 0$ tem o mesmo conjunto de soluções.

Teorema

Se A é $n \times n$, então sua forma reduzida por linhas escalonada (escalonada, em que cada coluna que contém um pivô é nula em todas as outras entradas) terá ao menos uma linha toda nula, ou será a matriz identidade.

Demonstração

Suponha que B é a forma reduzida por linhas escalonada da matriz. Se B tiver pelo menos uma linha toda nula então não há nada a provar. Suponha desta forma que B não tem uma linha toda nula. Então, toda linha deve ter um 1.

Demonstração

Toda linha tem um 1.

Demonstração

Toda linha tem um 1.
Sabemos que o 1 de uma linha deve estar à esquerda do 1 da linha de baixo. Suponha então que o 1 da primeira linha não está em b_{11}, mas em b_{12}. No melhor caso, cada 1 da linha 2 em diante está uma posição à direita do 1 da linha de cima. Então, na linha 2 o primeiro 1 deve estar pelo menos em b_{23}, e o de baixo em b_{34} e assim por diante, até que, na linha $n-1$, teremos $b_{n-1,n} = 1$. Desta forma, na última linha não teremos a posição $b_{n,n+1}$ para colocar o próximo 1, e esta linha deve ficar nula, o que contradiz nossa hipótese. Se tomarmos um caso pior ainda, em que o 1 de uma linha está mais de uma casa deslocado para a direita, acabaremos com mais linhas nulas, o que também confirma nosso teorema.

Demonstração

Toda linha tem um 1.

O 1 da primeira linha em que estar em b_{11}.

Demonstração

Toda linha tem um 1.

O 1 da primeira linha em que estar em b_{11}.

Podemos concluir o mesmo para todos os outros elementos não nulos da forma reduzida por linhas escalonada de A.

Corolário

Toda $A_{n \times n}$ pode ser reduzida à forma escalonada (reduzida por linhas, ou reduzida por linhas escalonada).

Demonstração Segue direto da definição de matriz reduzida por linhas escalonada, já que podemos ter inclusive linhas nulas. Todas as outras operações estão bem definidas para quaisquer entradas da matriz A.

Teorema

Se A é uma matriz $n \times n$ então as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) A é inversível;

(b) A única solução para o sistema homogêneo $Ax = 0$ é a solução trivial;

(c) A é equivalente por linhas a I;

(d) A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.

Demonstração

(a) $\Rightarrow$ (b) Suponha que A é inversível, vamos mostrar então que $Ax = 0$ só possui a solução trivial. Suponha que x_0 é uma solução deste sistema. Como A é inversível, basta vermos que $A^{-1}Ax_0 = A^{-1}0 = 0$, ou seja $x_0 = 0$.

Teorema

Se A é uma matriz $n \times n$ então as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) A é inversível;

(b) A única solução para o sistema homogêneo $Ax = 0$ é a solução trivial;

(c) A é equivalente por linhas a I;

(d) A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.

Demonstração

(b) $\Rightarrow$ (c) Primeiramente, escrevemos a matriz aumentada deste sistema, $[A|0]$. Agora, como sabemos que a única solução deste sistema é a solução trivial, então podemos reduzir A à forma reduzida por linhas escalonada que nos dá essa solução, ou seja, A deve ser equivalente por linhas a I.

Teorema

Se A é uma matriz $n \times n$ então as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) A é inversível;

(b) A única solução para o sistema homogêneo $Ax = 0$ é a solução trivial;

(c) A é equivalente por linhas a I;

(d) A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.

Demonstração

(c) $\Rightarrow$ (d) Como A é equivalente por linhas a I, sabemos que pode-se escrever

$$E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = I$$

Como já mostramos que as matrizes elementares são inversíveis, isto nos dá

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}.$$

Teorema

Se A é uma matriz $n \times n$ então as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) A é inversível;

(b) A única solução para o sistema homogêneo $Ax = 0$ é a solução trivial;

(c) A é equivalente por linhas a I;

(d) A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.

Demonstração

(d) $\Rightarrow$ (a) Se A é um produto de matrizes inversíveis, e como mostramos que tal produto é inversível também, então A deve ser inversível.

Fatoração *LU*

Vamos considerar uma situação que não tínhamos considerado antes: a troca de linhas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Temos:

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

que, inclusive, já está na forma escalonada! Portanto, podemos reescrever esta situação como

$$PA = LU.$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \_ \\ 2 & 2 & 5 & \_ \\ 4 & 6 & 8 & \_ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \_ \\ 0 & 0 & 3 & \_ \\ 0 & 2 & 4 & \_ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \_ \\ 0 & 2 & 4 & \_ \\ 0 & 0 & 3 & \_ \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \_ \\ 2 & 2 & 5 & \_ \\ 4 & 4 & 8 & \_ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \_ \\ 0 & 0 & 3 & \_ \\ 0 & 0 & 4 & \_ \end{bmatrix}$$

Não há permutação que permita encontrar um pivô.

Observação

A matriz de permutação é sempre a identidade com linhas trocadas. Desta forma, uma sequência de permutações consecutivas pode ser encontrada através do produto das permutações, assim como havíamos feito com as operações elementares.