**Universidade Federal de Santa Catarina**
**Centro de Ciências Físicas e Matemáticas**
**Departamento de Matemática**

**Disciplina:** MTM5812 - H-Álgebra II
**Professora:** Melissa Weber Mendonça

# 3ª Lista de Exercícios

1. Prove que se $A, B : E \to F$ são transformações lineares e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $A + B$ e $\alpha A$ são transformações lineares.

2. Seja $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projeção sobre o eixo $x$, paralelamente à reta $y = ax$ ($a \neq 0$). Isto significa que, para todo $v = (x, y)$, temos que $Av = (x', 0)$, tal que $Av - v$ pertence à reta $y = ax$. Exprima $x'$ em função de $x$ e $y$ e escreva a matriz de $A$ relativamente à base canônica do $\mathbb{R}^2$.

3. Dados os vetores $u_1 = (2, -1)$, $u_2 = (1, 1)$ $u_3 = (-1, -4)$, $v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (2, 3)$ e $v_3 = (-5, -6)$, decida se existe ou não um operador linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Au_1 = v_1$, $Au_2 = v_2$ e $Au_3 = v_3$. Mesma pergunta com $v_3 = (5, -6)$ e $v_3 = (5, 6)$.

4. Seja $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $A(-1, 1) = (1, 2, 3)$ e $A(2, 3) = (1, 1, 1)$. Encontre a matriz de $A$ relativamente às bases canônicas do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

5. Quais das transformações abaixo são lineares?

   a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, 2^y, 2^z)$

   b) $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z, w) \mapsto (x - w, y - w, x + z)$

   c) $A : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

   d) $A : \mathscr{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

   e) $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$.

6. Se $R(x, y) = (2x, x - y, y)$ e $S(x, y, z) = (y - z, z - x)$, ache $R \circ S$ e $S \circ R$.

7. Seja $A:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $A(x,y,z) = (ay+bz, cz, 0)$. Mostre que $A^3 = 0$.

8. Dado o operador $A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $A(x,y) = (3x-2y, 2x+7y)$, ache um vetor não nulo $v = (x,y)$ tal que $Av = 5v$.

9. Sejam $A, B : E \to E$ operadores lineares. Suponha que existam vetores $u, v \in E$ tais que $Au$ e $Av$ sejam linearmente dependentes. Prove que $BAu$ e $BAv$ também são linearmente dependentes.

10. Seja $A : E \to E$ um operador linear. Para quaisquer vetores $u \in \mathcal{N}(A)$ e $v \in \mathrm{Im}(A)$, prove que se tem $Au \in \mathcal{N}(A)$ e $Av \in \mathrm{Im}(A)$.

11. Escreva a expressão de um operador $A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $y = x$ e cuja imagem seja a reta $y = 2x$.

12. Defina um operador $A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tenha como núcleo e imagem o eixo $x$.

13. Considere a transformação linear $A:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$A(x,y,z,t) = (x+y+z+2t, x-y+2z, 4x+2y+5z+6t).$$

Encontre um vetor $b \in \mathbb{R}^3$ que não pertença à imagem de $A$ e com isso exiba um sistema linear de três equações com quatro incógnitas que não tem solução.

14. Determine uma base para a imagem e uma base para o núcleo de cada uma das transformações lineares abaixo e indique quais são sobrejetivas:

    (a) $A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x,y) = (x-y, x-y)$
    (b) $B:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $B(x,y,z,t) = (x+y, z+t, x+z, y+t)$
    (c) $C:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $C(x,y,z) = (x+\frac{y}{2}, y+\frac{z}{2}, z+\frac{x}{2})$
    (d) $E:\mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_{n+1}$, $E(p(x)) = xp(x)$.

15. Dê, quando possível, exemplos de transformações lineares satisfazendo:

    a) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sobrejetora
    b) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $\mathcal{N}(T) = \{0\}$
    c) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $\mathrm{Im}(T) = \{0\}$

d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $\mathcal{N}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$

e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $\mathcal{N}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x\}$

16. Sem fazer hipóteses sobre as dimensões de $E$ e $F$, sejam $A : E \to F$ e $B : F \to E$ transformações lineares. Se $AB$ é inversível, prove que $A$ é sobrejetiva e $B$ é injetiva.

17. Prove ou dê um contra-exemplo: Se $A, B : E \to F$ são operadores de mesmo posto $r$, então o produto $BA$ tem posto $r$.

18. Seja $A : E \to E$ fixo, e seja $C(A)$ o conjunto de todos os operadores lineares $X : E \to E$ que comutam com $A$ (ou seja, $AX = XA$). Prove que $C(A)$ é um subespaço vetorial e que se $X, Y \in C(A)$, então $XY \in C(A)$.

19. Seja $E = C^0(\mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Defina o operador linear $A : E \to E$ que associa, a cada $f \in E$, $Af = \varphi$, onde
$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Determine o núcleo e a imagem do operador $A$.

20. Prove que os operadores lineares $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definidos por $E_{11}(x, y) = (x, 0)$, $E_{12}(x, y) = (0, x)$, $E_{21}(x, y) = (y, 0)$ e $E_{22}(x, y) = (0, y)$ constituem uma base para o espaço vetorial $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$. Prove ainda que outra base deste espaço pode ser formada com os operadores $A, B, C, I$, onde $A(x, y) = (x + 3y, y)$, $B(x, y) = (x, 0)$, $C(x, y) = (x + y, x - y)$ e $I(x, y) = (x, y)$.

21. Seja $v$ um vetor não nulo de um espaço vetorial $E$, de dimensão finita. Dado qualquer espaço vetorial $F \neq \{0\}$, mostre que existe uma transformação linear $A : E \to F$ tal que $Av \neq 0$.

22. Seja $A : E \to E$ um operador nilpotente (isto é, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$ para todo $k \geq k_0$). Prove que existe algum vetor $v \neq 0$ em $E$ tal que $Av = 0$.

23. Seja $0_{k\times\ell}$ a matriz nula em $\mathbb{R}^{k\times\ell}$. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ uma matriz de posto $r$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz de posto $s$. Prove que a matriz
$$\begin{pmatrix} A & 0_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}$$
tem posto $r + s$.