**Universidade Federal de Santa Catarina**
**Centro de Ciências Físicas e Matemáticas**
**Departamento de Matemática**

**Disciplina:** MTM5812 - H-Álgebra II
**Professora:** Melissa Weber Mendonça

# 4ª Lista de Exercícios

1. Encontre a norma e o produto interno entre os pares de vetores abaixo:

   a) $x = (2,3)$, $y = (-2,1)$.
   b) $x = (1,-1,0)$, $y = (3,1,-2)$
   c) $x = (1,4,0,2)$, $y = (2,-2,1,3)$

2. Encontre um exemplo em $\mathbb{R}^2$ de dois vetores linearmente independentes que não são ortogonais entre si.

3. Encontre todos os vetores ortogonais a $(1,1,1)$ e $(1,-1,0)$.

4. Encontre um vetor ortogonal ao espaço linha e um vetor ortogonal ao espaço coluna de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Entre os vetores abaixo, quais pares são ortogonais?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

   encontre um vetor ortogonal ao espaço linha de $A$ ($\mathscr{I}m(A^T)$), um vetor ortogonal ao espaço coluna de $A$ ($\mathscr{I}m(A)$) e um vetor ortogonal ao espaço nulo de $A$ ($\mathscr{N}(A)$).

7. Dê um exemplo, em $\mathbb{R}^2$, de vetores linearmente independentes que não são ortogonais, e um outro exemplo de vetores ortogonais que não são linearmente independentes.

8. Por que as seguintes afirmações são falsas?

   (a) Se $V$ é ortogonal a $W$, então $V^{\perp}$ é ortogonal a $W^{\perp}$.

   (b) $V$ ortogonal a $W$ e $W$ ortogonal a $Z$ implica em $V$ ser ortogonal a $Z$.

9. Encontre uma base para o complemento ortogonal do espaço linha de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Em seguida, decomponha o vetor $(3,3,3)$ em um componente no espaço linha de $A$ e um componente no complemento ortogonal deste espaço.

10. Seja $P$ o plano em $\mathbb{R}^3$ com a equação $x + 2y - z = 0$. Encontre um vetor perpendicular a $P$. Qual matriz possui o plano $P$ como seu espaço nulo? Qual matriz possui $P$ como seu espaço linha?

11. Encontre o complemento ortogonal do plano gerado pelos vetores $(1,1,2)$ e $(1,2,3)$, construindo uma matriz $A$ com estes vetores como linhas e encontrando a solução de $Ax = 0$.

12. Demonstre que $x - y$ é ortogonal a $x + y$ se e somente se $\|x\| = \|y\|$.

13. Para cada item abaixo, crie uma matriz com as propriedades pedidas. Se não for possível, justifique:

    (a) O espaço coluna contém $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, e o espaço nulo contém $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    (b) O espaço linha contém $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, e o espaço nulo contém $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    (c) $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tem uma solução e $A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

    (d) Cada linha é ortogonal a cada coluna (com $A$ não nula).

(e) As colunas somam-se a uma coluna de zeros, as linhas somam-se a uma linha de números 1.

14. Dois planos em $\mathbb{R}^3$ não podem ser ortogonais: basta pensar no piso e na parede de um quarto para ver que eles compartilham toda uma reta. Encontre um vetor que pertença às imagens de $A$ e $B$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

15. Seja $P$ o plano de vetores em $\mathbb{R}^4$ que satisfaz $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Escreva uma base para $P^\perp$. Crie uma matriz que tenha $P$ como seu espaço nulo.

16. Se todas as colunas de $A$ forem vetores unitários, todos simultaneamente perpendiculares, quem é $A^T A$?

17. Eleve ao quadrado a matriz $P = \dfrac{aa^T}{a^T a}$, que projeta qualquer vetor na reta que contém $a$, e demonstre que $P^2 = P$.

18. Encontre a matriz de projeção $P_1$ sobre a reta na direção de $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Encontre também a matriz $P_2$ que projeta sobre a reta perpendicular a $a$. Em seguida, calcule $P_1 + P_2$ e $P_1 P_2$. Explique.

19. Prove que o traço de $P = \frac{aa^T}{a^T a}$ (que é a soma dos elementos da diagonal desta matriz) sempre é igual a 1.

20. Qual múltiplo de $a = (1,1,1)$ está mais próximo de $b = (2,4,4)$?

21. Demonstre que a norma de $Ax$ é igual à norma de $A^T x$ caso $AA^T = A^T A$.

22. Encontre a matriz de projeção na reta gerada por $a$ nos dois itens abaixo. Faça também a projeção do vetor $b$ sobre a reta que passa por $a$. Certifique-se de que o erro $e = b - \mathrm{pr}_a(b)$ seja perpendicular a $a$:

(a) $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $a = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

23. Se os vetores $a_1, a_2$ e $b$ são ortogonais, o que são $A^T A$ e $A^T b$? Qual é a projeção de $b$ no plano gerado por $a_1$ e $a_2$?

24. Encontre a projeção de $b = (1,2)$ nos dois vetores (que não são ortogonais entre si) $a_1 = (1,0)$ e $a_2 = (1,1)$. Mostre que, diferentemente do caso ortogonal, a projeção de $b$ no espaço gerado por $a_1$ e $a_2$ não é igual à soma das projeções de $b$ nas retas que passam por $a_1$ e $a_2$.

25. Sendo $u$ um vetor unitário, demonstre que $Q = I - 2uu^T$ é uma matriz ortogonal simétrica (essa matriz é chamada *transformação de Householder*). Calcule $Q$ quanto $u = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

26. Partindo dos vetores não ortogonais

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

encontre os vetores ortonormais $q_1, q_2$ e $q_3$.

27. Encontre uma base ortonormal para o espaço gerado pelos vetores $a_1 = (1,-1,0,0)$, $a_2 = (0,1,-1,0)$, $a_3 = (0,0,1,-1)$.

28. Aplique o processo de Gram-Schmidt nos vetores $(1,-1,0)$, $(0,1,-1)$ e $(1,0,-1)$ para encontrar um conjunto ortonormal. Qual é a dimensão do subespaço gerado por estes vetores?

29. Encontre a melhor representação com uma reta (por mínimos quadrados) para as medidas: $\begin{matrix} b=4 & \text{em} & t=-2 \\ b=1 & \text{em} & t=0 \\ b=3 & \text{em} & t=-1 \\ b=0 & \text{em} & t=2 \end{matrix}$ Depois, encontre a projeção de $b = (4,3,1,0)$ no espaço coluna de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

30. Resolva $Ax = b$ aproximadamente, usando mínimos quadrados, e depois encontre $p = A\overline{x}$ se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Certifique-se de que o erro $b - p$ seja perpendicular às colunas de $A$.