Aula 6: Transformações Lineares

Melissa Weber Mendonça

Transformações Lineares

Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Quando efetuamos um produto entre uma matriz A e um vetor x, estamos levando o espaço $\mathbb{R}^n$ no espaço $\mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto Ax = b \end{aligned}$$

Portanto, podemos encarar uma matriz como uma transformação no espaço.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Exemplo

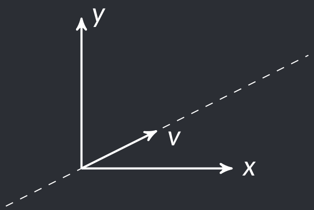
$$A = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Esta transformação (às vezes chamada de *homotetia*) não movimenta um vetor no plano, mas altera seu tamanho. Se $c \in \mathbb{R}$, e $v = (x, y)$, $Av = (cx, cy)$ está sobre a reta que passa pelo vetor v.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Esta transformação (às vezes chamada de *homotetia*) não movimenta um vetor no plano, mas altera seu tamanho. Se $c \in \mathbb{R}$, e $v = (x, y)$, $Av = (cx, cy)$ está sobre a reta que passa pelo vetor v.



Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo

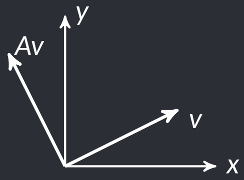
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz rotaciona qualquer vetor por 90 graus no sentido anti-horário:
$A(1, 0) = (0, 1)$,
$A(0, 1) = (-1, 0)$.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz rotaciona qualquer vetor por 90 graus no sentido anti-horário:
$A(1, 0) = (0, 1)$,
$A(0, 1) = (-1, 0)$.



Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo

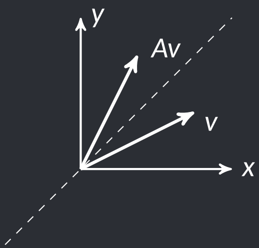
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz reflete todo vetor no eixo de simetria de 45 graus.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz reflete todo vetor no eixo de simetria de 45 graus.



Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo

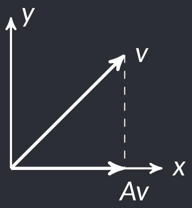
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz toma qualquer vetor do espaço e projeta no subespaço definido por $x_2 = 0$, ou seja, no eixo x_1. Este eixo é o espaço coluna de A, enquanto que seu espaço nulo é o eixo $x_1 = 0$.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz toma qualquer vetor do espaço e projeta no subespaço definido por $x_2 = 0$, ou seja, no eixo x_1. Este eixo é o espaço coluna de A, enquanto que seu espaço nulo é o eixo $x_1 = 0$.



Transformações Lineares

É importante notar, no entanto, que algumas transformações não podem ser realizadas através de matrizes:

(i) É impossível mover a origem, já que $A0 = 0$.

(ii) Se $Ax = x'$, então $A(2x) = 2x'$, ou seja, $A(cx) = cAx$.

(iii) Se $Ax = x'$ e $Ay = y'$, então $A(x + y) = x' + y'$, ou seja, $A(x + y) = Ax + Ay$.

Estas regras vem da definição da multiplicação entre matrizes, e definem o que chamamos de *transformação linear*.

Definição

Sejam E, F espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$. Uma transformação linear T é uma função $T : E \longrightarrow F$ que associa a cada $u \in E$ um vetor $v = T(u) \in F$ e que satisfaz a condição seguinte: para todos $u, w \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ temos que

$$T(\alpha u + w) = \alpha T(u) + T(w).$$

Tranformações Lineares

Para todo número $c, d \in \mathbb{R}$ e vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$, a multiplicação de matrizes satisfaz a regra da linearidade

$$A(cx + dy) = c(Ax) + d(Ay).$$

Toda transformação que satisfaz esta propriedade é uma transformação linear. Portanto, toda matriz define uma transformação linear. Mas, será que toda transformação linear leva a uma matriz? Veremos que, em espaços de dimensão finita, isso é verdadeiro.

Exemplo

Tome como exemplo o espaço $\mathscr{P}_n$, polinômios de grau $\leq n$. Este espaço tem dimensão $n+1$.

A diferenciação, d/dx, é uma transformação linear:

$$\begin{aligned} Ap &= \frac{d}{dx}p(x) = \frac{d}{dx}(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) \\ &= a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}. \end{aligned}$$

A integração de 0 a x também é linear (leva $\mathscr{P}_n$ a $\mathscr{P}_{n+1}$):

$$\begin{aligned} Ap &= \int_0^x p(x)dx = \int_0^x (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)dx \\ &= a_0x + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}. \end{aligned}$$

Definição

Seja $\mathscr{L}(E;F)$ o conjunto das transformações lineares de E em F. Então, $\mathscr{L}(E;F)$ é um espaço vetorial. As transformações lineares $T : E \longrightarrow E$ são chamadas *operadores lineares* em E. Por sua vez, as transformações lineares $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$, com valores numéricos, são chamadas *funcionais* lineares. Escreve-se E^* em vez de $\mathscr{L}(E;\mathbb{R})$ e o conjunto E^* dos funcionais lineares $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se *espaço vetorial dual* de E.

Matriz de uma transformação linear

A linearidade é importante pois nos dá uma propriedade crucial: se conhecermos a ação de uma transformação em todos os vetores da base, conhecemos a ação da transformação em todos os vetores do espaço gerado por esta base, visto que cada vetor do espaço é apenas combinação linear de todos os vetores da base. Depois que sabemos a ação de uma transformação na base, não há mais graus de liberdade possíveis: a transformação fica inteiramente determinada.

Exemplo

Que transformação linear leva

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ em } Ax_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ em } Ax_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}?$$

A resposta deve ser a multiplicação pela matriz

Exemplo

Que transformação linear leva

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ em } Ax_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ em } Ax_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}?$$

A resposta deve ser a multiplicação pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exemplo

Existe matriz da diferenciação e da integração em um intervalo?

Exemplo

Existe matriz da diferenciação e da integração em um intervalo?

Para os polinômios de grau ≤ 3 em $[0, 1]$, existe uma base natural:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = x, \quad p_3 = x^2, \quad p_4 = x^3.$$

Exemplo

Existe matriz da diferenciação e da integração em um intervalo?

Para os polinômios de grau ≤ 3 em $[0, 1]$, existe uma base natural:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = x, \quad p_3 = x^2, \quad p_4 = x^3.$$

Agora, vamos olhar para o efeito da diferenciação nesta base: sejam $q_1 = 1$, $q_2 = x$, $q_3 = x^2$ em $\mathscr{P}_2$. Então

$$Ap_1 =, \quad Ap_2 =,$$

$$Ap_3 =, \quad Ap_4 = .$$

Exemplo

Existe matriz da diferenciação e da integração em um intervalo?

Para os polinômios de grau ≤ 3 em $[0, 1]$, existe uma base natural:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = x, \quad p_3 = x^2, \quad p_4 = x^3.$$

Agora, vamos olhar para o efeito da diferenciação nesta base: sejam $q_1 = 1$, $q_2 = x$, $q_3 = x^2$ em $\mathscr{P}_2$. Então

$$Ap_1 = 0, \quad Ap_2 =,$$

$$Ap_3 =, \quad Ap_4 = .$$

Exemplo

Existe matriz da diferenciação e da integração em um intervalo?

Para os polinômios de grau ≤ 3 em $[0, 1]$, existe uma base natural:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = x, \quad p_3 = x^2, \quad p_4 = x^3.$$

Agora, vamos olhar para o efeito da diferenciação nesta base: sejam $q_1 = 1$, $q_2 = x$, $q_3 = x^2$ em $\mathscr{P}_2$. Então

$$Ap_1 = 0, \quad Ap_2 = 1,$$

$$Ap_3 =, \quad Ap_4 = .$$

Exemplo

Existe matriz da diferenciação e da integração em um intervalo?

Para os polinômios de grau ≤ 3 em $[\,0, 1]$, existe uma base natural:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = x, \quad p_3 = x^2, \quad p_4 = x^3.$$

Agora, vamos olhar para o efeito da diferenciação nesta base: sejam $q_1 = 1$, $q_2 = x$, $q_3 = x^2$ em $\mathscr{P}_2$. Então

$$Ap_1 = 0, \quad Ap_2 = 1,$$

$$Ap_3 = 2x, \quad Ap_4 = .$$

Exemplo

Existe matriz da diferenciação e da integração em um intervalo?

Para os polinômios de grau ≤ 3 em $[0, 1]$, existe uma base natural:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = x, \quad p_3 = x^2, \quad p_4 = x^3.$$

Agora, vamos olhar para o efeito da diferenciação nesta base: sejam $q_1 = 1$, $q_2 = x$, $q_3 = x^2$ em $\mathscr{P}_2$. Então

$$Ap_1 = 0, \quad Ap_2 = 1,$$

$$Ap_3 = 2x, \quad Ap_4 = 3x^2.$$

Exemplo

Existe matriz da diferenciação e da integração em um intervalo?

Para os polinômios de grau ≤ 3 em $[0,1]$, existe uma base natural:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = x, \quad p_3 = x^2, \quad p_4 = x^3.$$

Agora, vamos olhar para o efeito da diferenciação nesta base: sejam $q_1 = 1$, $q_2 = x$, $q_3 = x^2$ em $\mathscr{P}_2$. Então

$$Ap_1 = 0, \quad Ap_2 = 1 = q_1,$$
$$Ap_3 = 2x, \quad Ap_4 = 3x^2.$$

Exemplo

Existe matriz da diferenciação e da integração em um intervalo?

Para os polinômios de grau ≤ 3 em $[0, 1]$, existe uma base natural:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = x, \quad p_3 = x^2, \quad p_4 = x^3.$$

Agora, vamos olhar para o efeito da diferenciação nesta base: sejam $q_1 = 1$, $q_2 = x$, $q_3 = x^2$ em $\mathscr{P}_2$. Então

$$Ap_1 = 0, \quad Ap_2 = 1 = q_1,$$
$$Ap_3 = 2x = 2q_2, \quad Ap_4 = 3x^2.$$

Exemplo

Existe matriz da diferenciação e da integração em um intervalo?

Para os polinômios de grau ≤ 3 em $[0, 1]$, existe uma base natural:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = x, \quad p_3 = x^2, \quad p_4 = x^3.$$

Agora, vamos olhar para o efeito da diferenciação nesta base: sejam $q_1 = 1$, $q_2 = x$, $q_3 = x^2$ em $\mathscr{P}_2$. Então

$$Ap_1 = 0, \quad Ap_2 = 1 = q_1,$$
$$Ap_3 = 2x = 2q_2, \quad Ap_4 = 3x^2 = 3q_3.$$

Exemplo

Existe matriz da diferenciação e da integração em um intervalo?

Para os polinômios de grau ≤ 3 em $[0, 1]$, existe uma base natural:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = x, \quad p_3 = x^2, \quad p_4 = x^3.$$

Agora, vamos olhar para o efeito da diferenciação nesta base: sejam $q_1 = 1$, $q_2 = x$, $q_3 = x^2$ em $\mathscr{P}_2$. Então

$$Ap_1 = 0, \quad Ap_2 = 1 = q_1,$$
$$Ap_3 = 2x = 2q_2, \quad Ap_4 = 3x^2 = 3q_3.$$

Note que

$$A : \mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_2, \text{ tal que } A_{\text{diff}} = \left(\quad \right).$$

Exemplo

Existe matriz da diferenciação e da integração em um intervalo?

Para os polinômios de grau ≤ 3 em $[0, 1]$, existe uma base natural:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = x, \quad p_3 = x^2, \quad p_4 = x^3.$$

Agora, vamos olhar para o efeito da diferenciação nesta base: sejam $q_1 = 1$, $q_2 = x$, $q_3 = x^2$ em $\mathscr{P}_2$. Então

$$Ap_1 = 0, \quad Ap_2 = 1 = q_1,$$
$$Ap_3 = 2x = 2q_2, \quad Ap_4 = 3x^2 = 3q_3.$$

Note que

$$A : \mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_2, \text{ tal que } A_{\text{diff}} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Exemplo

Existe matriz da diferenciação e da integração em um intervalo?

Para os polinômios de grau ≤ 3 em $[0, 1]$, existe uma base natural:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = x, \quad p_3 = x^2, \quad p_4 = x^3.$$

Agora, vamos olhar para o efeito da diferenciação nesta base: sejam $q_1 = 1$, $q_2 = x$, $q_3 = x^2$ em $\mathscr{P}_2$. Então

$$\begin{aligned} Ap_1 &= 0, \quad Ap_2 = 1 = q_1, \\ Ap_3 &= 2x = 2q_2, \quad Ap_4 = 3x^2 = 3q_3. \end{aligned}$$

Note que

$$A : \mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_2, \text{ tal que } A_{\text{diff}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}.$$

Exemplo

Existe matriz da diferenciação e da integração em um intervalo?

Para os polinômios de grau ≤ 3 em $[0, 1]$, existe uma base natural:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = x, \quad p_3 = x^2, \quad p_4 = x^3.$$

Agora, vamos olhar para o efeito da diferenciação nesta base: sejam $q_1 = 1$, $q_2 = x$, $q_3 = x^2$ em $\mathscr{P}_2$. Então

$$Ap_1 = 0, \quad Ap_2 = 1 = q_1,$$
$$Ap_3 = 2x = 2q_2, \quad Ap_4 = 3x^2 = 3q_3.$$

Note que

$$A : \mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_2, \text{ tal que } A_{\text{diff}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

Exemplo

Existe matriz da diferenciação e da integração em um intervalo?

Para os polinômios de grau ≤ 3 em $[0,1]$, existe uma base natural:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = x, \quad p_3 = x^2, \quad p_4 = x^3.$$

Agora, vamos olhar para o efeito da diferenciação nesta base: sejam $q_1 = 1$, $q_2 = x$, $q_3 = x^2$ em $\mathscr{P}_2$. Então

$$Ap_1 = 0, \quad Ap_2 = 1 = q_1,$$
$$Ap_3 = 2x = 2q_2, \quad Ap_4 = 3x^2 = 3q_3.$$

Note que

$$A : \mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_2, \text{ tal que } A_{\text{diff}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Observação

A derivada de qualquer outra combinação de polinômios é uma combinação linear dos membros da base, e portanto aplicar a matriz da transformação a este polinômio é equivalente a aplicá-la aos vetores da base e combinar os resultados.

Como obter a matriz?

Suponha que os vetores $p_1, \ldots, p_n$ são base para o espaço V, e $q_1, \ldots, q_m$ formam uma base para o espaço W. Então, cada transformação linear A de V para W é representada por uma matriz. A j-ésima coluna é encontrada ao aplicarmos A ao j-ésimo vetor da base de W; o resultado Ap_j é combinação dos q e os coeficientes desta combinação vão na coluna j de A:

$$Ap_j = a_{1,j}q_1 + \ldots + a_{m,j}q_m.$$

Para a matriz de diferenciação, a coluna 1 veio de p_1: sua derivada era zero, então a primeira coluna era nula. A última coluna veio de x^3: a derivada era $3x^2$, e assim o coeficiente 3 está na linha correspondente a $x^2 = p_3$.

Integração

Para a integração, de $\mathscr{P}_2$ em $\mathscr{P}_3$:

$$Ap_1 =, \quad Ap_2 =,$$
$$Ap_3 = .$$

Integração

Para a integração, de $\mathscr{P}_2$ em $\mathscr{P}_3$:

$$Ap_1 = x, \quad Ap_2 =,$$
$$Ap_3 = .$$

Integração

Para a integração, de $\mathscr{P}_2$ em $\mathscr{P}_3$:

$$Ap_1 = x, \quad Ap_2 = \frac{1}{2}x^2,$$
$$Ap_3 = .$$

Integração

Para a integração, de $\mathscr{P}_2$ em $\mathscr{P}_3$:

$$Ap_1 = x, \quad Ap_2 = \frac{1}{2}x^2,$$
$$Ap_3 = \frac{1}{3}x^3.$$

Integração

Para a integração, de $\mathscr{P}_2$ em $\mathscr{P}_3$:

$$Ap_1 = x = q_2, \quad Ap_2 = \frac{1}{2}x^2,$$
$$Ap_3 = \frac{1}{3}x^3.$$

Integração

Para a integração, de $\mathscr{P}_2$ em $\mathscr{P}_3$:

$$Ap_1 = x = q_2, \quad Ap_2 = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}q_3,$$
$$Ap_3 = \frac{1}{3}x^3.$$

Integração

Para a integração, de $\mathscr{P}_2$ em $\mathscr{P}_3$:

$$Ap_1 = x = q_2, \quad Ap_2 = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}q_3,$$
$$Ap_3 = \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}q_4.$$

Integração

Para a integração, de $\mathscr{P}_2$ em $\mathscr{P}_3$:

$$Ap_1 = x = q_2, \quad Ap_2 = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}q_3,$$
$$Ap_3 = \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}q_4.$$

Assim, a matriz que representa esta transformação linear é

$$A_{\text{int}} = \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \end{pmatrix}.$$

Integração

Para a integração, de $\mathscr{P}_2$ em $\mathscr{P}_3$:

$$Ap_1 = x = q_2, \quad Ap_2 = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}q_3,$$
$$Ap_3 = \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}q_4.$$

Assim, a matriz que representa esta transformação linear é

$$A_{\text{int}} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & & \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

Integração

Para a integração, de $\mathscr{P}_2$ em $\mathscr{P}_3$:

$$Ap_1 = x = q_2, \quad Ap_2 = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}q_3,$$
$$Ap_3 = \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}q_4.$$

Assim, a matriz que representa esta transformação linear é

$$A_{\text{int}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ 1 & 0 & \\ 0 & \frac{1}{2} & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

Integração

Para a integração, de $\mathscr{P}_2$ em $\mathscr{P}_3$:

$$Ap_1 = x = q_2, \quad Ap_2 = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}q_3,$$
$$Ap_3 = \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}q_4.$$

Assim, a matriz que representa esta transformação linear é

$$A_{\text{int}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Observação

Enxergamos a integração como a operação inversa da diferenciação, isto é, a integração seguida da diferenciação nos dão o resultado original de volta. Se tomarmos a matriz de diferenciação na base das cúbicas, que é uma matriz 3×4, teremos:

$$A_{\text{diff}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ e } A_{\text{diff}}A_{\text{int}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, o operador de diferenciação nesta base é a inversa à esquerda da integração. Como para matrizes retangulares é impossível termos inversas dos dois lados, o produto $A_{\text{int}}A_{\text{diff}}$ não pode ser igual à identidade; mas isto não ocorre de qualquer forma, já que a derivada de uma constante é zero, e a integral de zero nunca pode trazer esta constante de volta (a primeira linha do produto citado é nula).

Observação

As transformações lineares aqui representadas (e todas as outras) tem representação matricial, mas uma transformação linear não é uma matriz: uma matriz representa a transformação em uma base dada. Portanto, a matriz usada para representarmos uma transformação linear varia de acordo com a base escolhida para o espaço.

Matriz de uma transformação linear

Uma transformação linear $T : E \longrightarrow F$ é uma função especial que é linear, e vai do espaço vetorial E no espaço vetorial F. Em geral, para definirmos uma função, precisamos definir o valor de $f(x)$ para todo x no domínio de f. No caso das transformações lineares, é bem mais fácil definirmos esta função, pois basta fazê-lo em cada elemento da base.

Matriz de uma transformação linear

Sejam E, F espaços vetoriais de dimensão finita e $\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de E. Todo vetor $v \in E$ se exprime, de modo único, como combinação linear

$$v = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$$

de elementos da base β. Para qualquer transformação linear $T : E \to F$ e para qualquer vetor $v \in E$, temos que

$$\begin{aligned} T(v) &= T(x_1u_1 + \ldots + x_nu_n) \\ &= x_1T(u_1) + \ldots + x_nT(u_n), \end{aligned}$$

ou seja, a definição de T depende apenas da aplicação da transformação linear nos vetores $u_i \in \beta$.

Matriz de uma transformação linear

Como consequência, se quisermos definir uma transformação linear $T : E \to F$, basta escolhermos uma base γ para F, e para cada $j = 1, \ldots, n$ um vetor

$$v_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})_\gamma \in F$$

e dizer que $v_j = T(u_j)$ é a imagem do j-ésimo vetor da base β pela transformação linear T.

Matriz de uma transformação linear

A partir daí, fica determinada a imagem $T(v)$ de qualquer vetor $v \in E$, pois se

$$v = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n = (x_1, \ldots, x_n)_\beta,$$

então

$$\begin{aligned} y = T(v) = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j u_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} x_j T(u_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(a_{1j}x_j, a_{2j}x_j, \ldots, a_{mj}x_j\right)_\gamma \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum a_{2j}x_j, \ldots, \sum a_{mj}x_j\right)_\gamma \end{aligned}$$

Matriz de uma transformação linear

Ou seja, cada coordenada y_i do vetor y na base γ é calculada como

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n
\end{aligned}
$$

Portanto, toda transformação linear $T : E \longrightarrow F$ fica inteiramente determinada por uma matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Os vetores-coluna desta matriz são as coordenadas dos vetores v_j na base γ, em que cada $v_j = T(u_j)$, ou seja, imagem do vetor u_j da base β de E. A imagem de $T(v)$ é o vetor $(y_1, \ldots, y_m)_\gamma \in F$ cujas coordenadas são dadas pelas equações acima.

Teorema

Para toda matriz $A \in \mathscr{M}(m \times n)$, o número de linhas l.i. de A é igual ao número de colunas l.i. de A.

Demonstração. Seja p o número de colunas l.i. da matriz A. Então existem p vetores

$$w_k = \begin{pmatrix} w_{1k} \\ \vdots \\ w_{mk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

tais que cada uma das colunas

$$a_{(:,j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, 1 \leq j \leq n$$

de A é combinação linear dos $w_1, \ldots, w_p$.

(continuação)

$$a_{(:,j)} = \sum_{k=1}^{p} c_{kj} w_k, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Tomando a *i*-ésima coordenada de cada um dos membros desta equação, vemos que

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} c_{kj} w_{ik} = \sum_{k=1}^{p} w_{ik} c_{kj}, \tag{1}$$

para quaisquer i, j, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

(continuação) Considerando agora os vetores-linha $a_{(i,:)} = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ da matriz A, juntamente com os vetores $c_k = (c_{k1}, \dots, c_{kn})$, $1 \leq k \leq p$, observamos que a igualdade entre o primeiro e o terceiro membros de (1) significa que, para todo $i = 1, \dots, m$ tem-se

$$a_{(i,:)} = \sum_{k=1}^{p} w_{ik} c_k, \qquad 1 \leq i \leq m.$$

Assim, os vetores linha de A são combinações lineares de $c_1, \dots, c_p$, portanto o número de linhas l.i. de A é $\leq p$. Aplicando este resultado à matriz A^T, que tem como linhas as colunas de A, concluimos que o o número de colunas l.i. de A é menor ou igual ao número de linhas l.i. de A e assim temos o resultado completo.