Aula 1: Matrizes

Melissa Weber Mendonça

Introdução

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Introdução

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5. \end{cases}$$

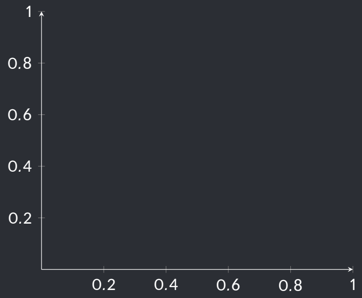

Figure: Resolução gráfica do sistema linear.

Introdução

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5. \end{cases}$$

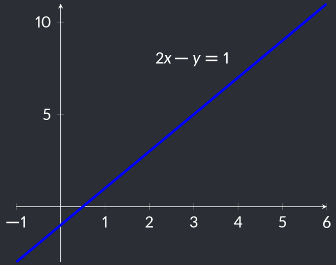

Figure: Resolução gráfica do sistema linear.

Introdução

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5. \end{cases}$$

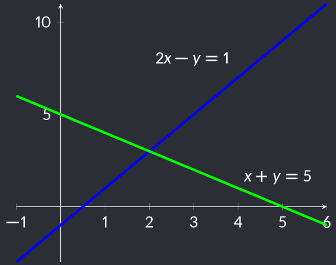

Figure: Resolução gráfica do sistema linear.

Introdução

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5. \end{cases}$$

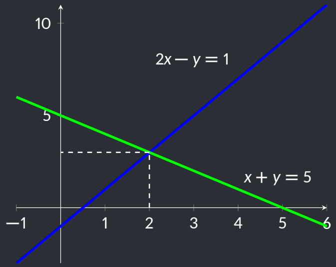

Figure: Resolução gráfica do sistema linear. A solução é $(x, y) = (2, 3)$.

Introdução

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Introdução

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5. \end{cases}$$

- Eliminação de variáveis

Introdução

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5. \end{cases}$$

- Eliminação de variáveis
- Regra de Cramer

Introdução

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5. \end{cases}$$

- Eliminação de variáveis
- Regra de Cramer

Algoritmos

Geometria Analítica

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

pode ser reescrito em uma forma matricial, como sendo

$$Ax = b$$

Sistema matricial

Opções:

Sistema matricial

Opções:

- A quadrada e inversível: $x = A^{-1}b$, ou seja, é possível encontrarmos solução única do sistema para qualquer lado direito b. **Sistema possível e determinado**

Sistema matricial

Opções:

- A quadrada e inversível: $x = A^{-1}b$, ou seja, é possível encontrarmos solução única do sistema para qualquer lado direito b. **Sistema possível e determinado**
- A não é inversível (não é quadrada, ou é quadrada mas não tem inversa): a existência e unicidade de soluções dependem do lado direito b. Para algumas escolhas de b o sistema terá infinitas soluções (**sistema possível e indeterminado**) e para outras o sistema não terá soluções (**sistema impossível**).

O que é uma matriz?

Uma matriz é uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas.

O que é uma matriz?

Uma matriz é uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

O que é uma matriz?

Uma matriz é uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O que é uma matriz?

Uma matriz é uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

O que é uma matriz?

Uma matriz é uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

O que é uma matriz?

Uma matriz é uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas.

$$\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}.$$

Matrizes

Os elementos de uma matriz podem ser números (reais ou complexos), funções, ou ainda outras matrizes. Representamos uma matriz de *m* linhas e *n* colunas por

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}.$$

Tipos especiais de matrizes

Tipos especiais de matrizes

- Matriz Quadrada

Tipos especiais de matrizes

- Matriz Quadrada
- Matriz Nula

Tipos especiais de matrizes

- Matriz Quadrada
- Matriz Nula
- Matriz coluna

Tipos especiais de matrizes

- Matriz Quadrada
- Matriz Nula
- Matriz coluna
- Matriz linha

Tipos especiais de matrizes

- Matriz Quadrada
- Matriz Nula
- Matriz coluna
- Matriz linha
- Matriz simétrica

Tipos especiais de matrizes

- Matriz Quadrada
- Matriz Nula
- Matriz coluna
- Matriz linha
- Matriz simétrica
- Matriz diagonal

Tipos especiais de matrizes

- Matriz Quadrada
- Matriz Nula
- Matriz coluna
- Matriz linha
- Matriz simétrica
- Matriz diagonal
- Matriz triangular (superior ou inferior)

Tipos especiais de matrizes

- Matriz Quadrada
- Matriz Nula
- Matriz coluna
- Matriz linha
- Matriz simétrica
- Matriz diagonal
- Matriz triangular (superior ou inferior)
- Matriz esparsa

Tipos especiais de matrizes

- Matriz Quadrada
- Matriz Nula
- Matriz coluna
- Matriz linha
- Matriz simétrica
- Matriz diagonal
- Matriz triangular (superior ou inferior)
- Matriz esparsa
- Matriz identidade

Operações com matrizes

- Soma

Operações com matrizes

- Soma
  - $A + B = B + A$ (comutatividade)

Operações com matrizes

- Soma
  - $A + B = B + A$ (comutatividade)
  - $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade)

Operações com matrizes

- Soma
  - $A + B = B + A$ (comutatividade)
  - $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade)
  - $A + 0 = A$, onde 0 denota a matriz nula $m \times n$.

Operações com matrizes

- Soma

- Multiplicação por escalar

Operações com matrizes

- Soma

- Multiplicação por escalar
  - $k(A + B) = kA + kB$

Operações com matrizes

- Soma

- Multiplicação por escalar
  - $k(A+B) = kA + kB$
  - $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$

Operações com matrizes

- Soma

- Multiplicação por escalar
  - $k(A+B) = kA + kB$
  - $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
  - $0A = 0$, ou seja, se multiplicarmos o número 0 pela matriz $A_{m\times n}$ obteremos a matriz nula $0_{m\times n}$.[1]

Operações com matrizes

- Soma

- Multiplicação por escalar
  - $k(A+B) = kA + kB$
  - $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
  - $0A = 0$, ou seja, se multiplicarmos o número 0 pela matriz $A_{m\times n}$ obteremos a matriz nula $0_{m\times n}$.[1]
  - $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$.

Operações com matrizes

- Soma
- Multiplicação por escalar
- Transposição

Operações com matrizes

- Soma

- Multiplicação por escalar

- Transposição
  - Uma matriz é *simétrica* se e somente se ela é igual à sua transposta.

Operações com matrizes

- Soma

- Multiplicação por escalar

- Transposição
  - Uma matriz é *simétrica* se e somente se ela é igual à sua transposta.
  - $(A^T)^T = A$.

Operações com matrizes

- Soma

- Multiplicação por escalar

- Transposição
  - Uma matriz é *simétrica* se e somente se ela é igual à sua transposta.
  - $(A^T)^T = A$.
  - $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Operações com matrizes

- Soma

- Multiplicação por escalar

- Transposição
  - Uma matriz é *simétrica* se e somente se ela é igual à sua transposta.
  - $(A^T)^T = A$.
  - $(A + B)^T = A^T + B^T$.
  - $(kA)^T = kA^T$, para todo escalar k.

Produto de matrizes

Vamos supor que temos dois alimentos, com certas quantidades de vitaminas A, B e C, definidas na seguinte tabela.

	A	B	C
Alimento 1	4	3	0
Alimento 2	5	0	1

Se ingerirmos 5 unidades do Alimento 1 e 2 unidades do Alimento 2, quanto teremos consumido de cada tipo de vitamina?

Produto de matrizes

A operação que nos fornecerá a quantidade total de cada vitamina ingerida é o produto definido por

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 & 5 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 30 & 15 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ou seja, serão ingeridas 30 unidades de vitamina A, 15 de vitamina B e 2 de C.

Produto de matrizes

Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$. Definimos $AB = (c_{ij})_{m\times p}$, com

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

OBS. Só podemos efetuar o produto de duas matrizes se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda.

Propriedades do produto de matrizes

Propriedades do produto de matrizes

(i) Em geral, $AB \neq BA$. Além disso, AB pode ser nula sem que A ou B sejam nulas.

Propriedades do produto de matrizes

(i) Em geral, $AB \neq BA$. Além disso, AB pode ser nula sem que A ou B sejam nulas.

(ii) $AI = IA = A$

Propriedades do produto de matrizes

(i) Em geral, $AB \neq BA$. Além disso, AB pode ser nula sem que A ou B sejam nulas.

(ii) $AI = IA = A$

(iii) $0A = 0$ e $A0 = 0$.

Propriedades do produto de matrizes

(i) Em geral, $AB \neq BA$. Além disso, AB pode ser nula sem que A ou B sejam nulas.

(ii) $AI = IA = A$

(iii) $0A = 0$ e $A0 = 0$.

(iv) Sejam $A_{m\times p}$, $B_{p\times n}$ e $C_{p\times n}$. Então, $A(B + C) = AB + AC$ (distributividade à esquerda da multiplicação)

Propriedades do produto de matrizes

(i) Em geral, $AB \neq BA$. Além disso, AB pode ser nula sem que A ou B sejam nulas.

(ii) $AI = IA = A$

(iii) $0A = 0$ e $A0 = 0$.

(iv) Sejam $A_{m\times p}$, $B_{p\times n}$ e $C_{p\times n}$. Então, $A(B + C) = AB + AC$ (distributividade à esquerda da multiplicação)

(v) $(A + B)C = AC + BC$ (distributividade à direita da multiplicação)

Propriedades do produto de matrizes

(i) Em geral, $AB \neq BA$. Além disso, AB pode ser nula sem que A ou B sejam nulas.

(ii) $AI = IA = A$

(iii) $0A = 0$ e $A0 = 0$.

(iv) Sejam $A_{m\times p}$, $B_{p\times n}$ e $C_{p\times n}$. Então, $A(B + C) = AB + AC$ (distributividade à esquerda da multiplicação)

(v) $(A + B)C = AC + BC$ (distributividade à direita da multiplicação)

(vi) Sejam $A_{m\times p}$, $B_{p\times q}$, $C_{q\times n}$. Então, $(AB)C = A(BC)$ (associatividade da multiplicação).

Propriedades do produto de matrizes

(i) Em geral, $AB \neq BA$. Além disso, AB pode ser nula sem que A ou B sejam nulas.

(ii) $AI = IA = A$

(iii) $0A = 0$ e $A0 = 0$.

(iv) Sejam $A_{m\times p}$, $B_{p\times n}$ e $C_{p\times n}$. Então, $A(B + C) = AB + AC$ (distributividade à esquerda da multiplicação)

(v) $(A + B)C = AC + BC$ (distributividade à direita da multiplicação)

(vi) Sejam $A_{m\times p}$, $B_{p\times q}$, $C_{q\times n}$. Então, $(AB)C = A(BC)$ (associatividade da multiplicação).

(vii) $(AB)^T = B^T A^T$ (Exercício!)

Matriz Inversa

Dada $A_{n\times n}$, se pudermos encontrar uma outra matriz $B_{n\times n}$ tal que

$$AB = BA = I,$$

então diremos que A é inversível e que $B = A^{-1}$. Senão, diremos que A é singular.

Matriz inversa

Teorema

A inversa de $A_{n\times n}$ é única.

Demonstração.

Matriz inversa

Teorema

A inversa de $A_{n\times n}$ é única.

Demonstração. Suponha que existem duas inversas de A, B e C. Então,

Matriz inversa

Teorema

A inversa de $A_{n\times n}$ é única.

Demonstração. Suponha que existem duas inversas de A, B e C. Então,

$$BA = I \Leftrightarrow (BA)C = IC = C.$$

Matriz inversa

Teorema

A inversa de $A_{n\times n}$ é única.

Demonstração. Suponha que existem duas inversas de A, B e C. Então,

$$BA = I \Leftrightarrow (BA)C = IC = C.$$

No entanto,

$$AC = I \Leftrightarrow B(AC) = BI = B.$$

Matriz inversa

Teorema

A inversa de $A_{n\times n}$ é única.

Demonstração. Suponha que existem duas inversas de A, B e C. Então,

$$BA = I \Longleftrightarrow (BA)C = IC = C.$$

No entanto,

$$AC = I \Longleftrightarrow B(AC) = BI = B.$$

Logo, como $(BA)C = B(AC)$ pela propriedade associativa do produto de matrizes, temos que $B = C$.

Teorema

Se A, B são matrizes $n \times n$ inversíveis, então $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demonstração.

Teorema

Se A, B são matrizes $n \times n$ inversíveis, então $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demonstração. Basta verificarmos que $(AB)B^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1}AB$, já que a inversa é única.

Teorema

Se A é inversível, A^T também o é, e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Demonstração.

Teorema

Se A é inversível, A^T também o é, e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Demonstração. Basta verificarmos que $(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I$.

Teorema

Se A é inversível, A^T também o é, e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Demonstração. Basta verificarmos que $(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I$. Mas $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$. Além disso, $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$.