

# Un estudio de la dinámica no lineal en el circuito caótico de Chua

FERIA DE PROYECTOS ESTUDIANTILES

CATEGORÍA II

GRUPO N° 3

Carlos A. Aznarán Laos

André G. Santos Félix

Alejandro Vásquez Gavancho

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

23 de agosto del 2022



# Plan de la charla

## ① Descripción del modelo del circuito

Círculo de Chua

Sistema de Chua adimensional

## ② Método para determinar el caos

Mapa de Poincaré

Exponentes de Lyapunov

## ③ Simulaciones numéricas

## ④ Programas

## ⑤ Conclusiones

## Círculo de Chua

- (1) es un sistema EDO no lineal autónomo. Comprobado experimentalmente en 1984 por Zhong y Ayrom.
- Considere el circuito de la Figura 1 con una resistencia no lineal  $N_R$  de tres segmentos lineal por tramos.
- En el trabajo “A chaotic attractor from Chua’s circuit” estudiamos el comportamiento caótico del circuito y el **método de convergencia de órbitas** que nos ayudará a estabilizar el mismo.

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} \frac{dV_{C_1}}{dt} &= \frac{1}{RC_1}(V_{C_2} - V_{C_1} - g(V_{C_1})) \\ \frac{dV_{C_2}}{dt} &= \frac{1}{RC_2}(V_{C_1} - V_{C_2} + Ri_L) \\ \frac{di_L}{dt} &= -\frac{1}{L}V_{C_2} \end{aligned} \right\} \text{Sistema de Chua}$$

donde

- $V_{C_1}$ ,  $V_{C_2}$  son los voltajes en los capacitores  $C_1$ ,  $C_2$ , y
- $g(V_{C_1})$  es la curva característica del *diodo de Chua*.

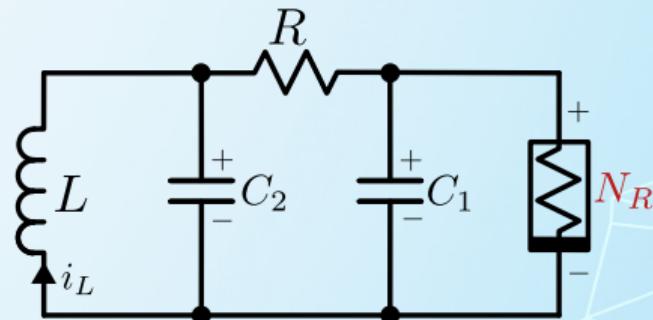


Figura 1: Circuito de Chua conformado por la resistencia lineal  $R$ , inductancia lineal  $L$  e  $i_L$  es la intensidad de corriente.

## Sistema de Chua adimensional

(2)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - x - g(x)) \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = -\beta y \end{cases}$$

y cuyos puntos de equilibrio son

$$P^+ = (1, 0, -1)$$

$$O = (0, 0, 0)$$

$$P^- = (-1, 0, 1)$$

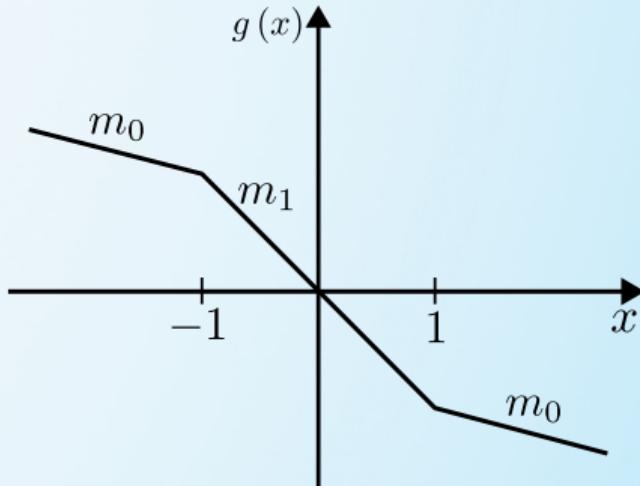


Figura 2: Curva caracterísitica de la resistencia no lineal  $g(x)$  definida como

$$g(x) = \begin{cases} m_0x + m_0 + m_1 & \text{si } x \leq -1, \\ m_1x & \text{si } -1 < x < 1, \\ m_0x + m_1 - m_0 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

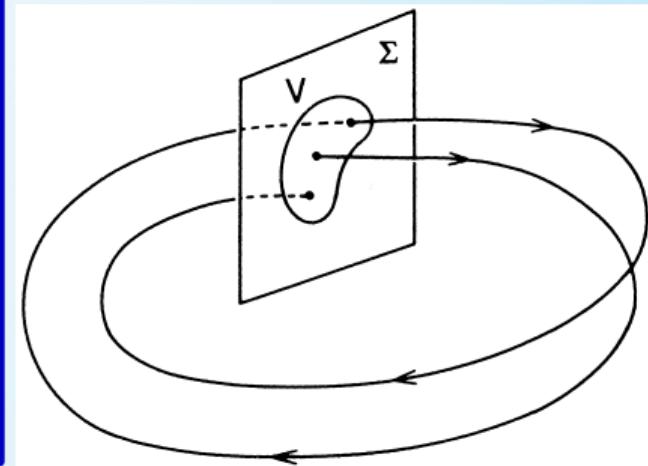
## Definición 1: Mapa de Poincaré

Es la aplicación que asocia los puntos en  $V \subset \Sigma$  abierto tal que las trayectorias que inician en  $V$  retornan a  $\Sigma$

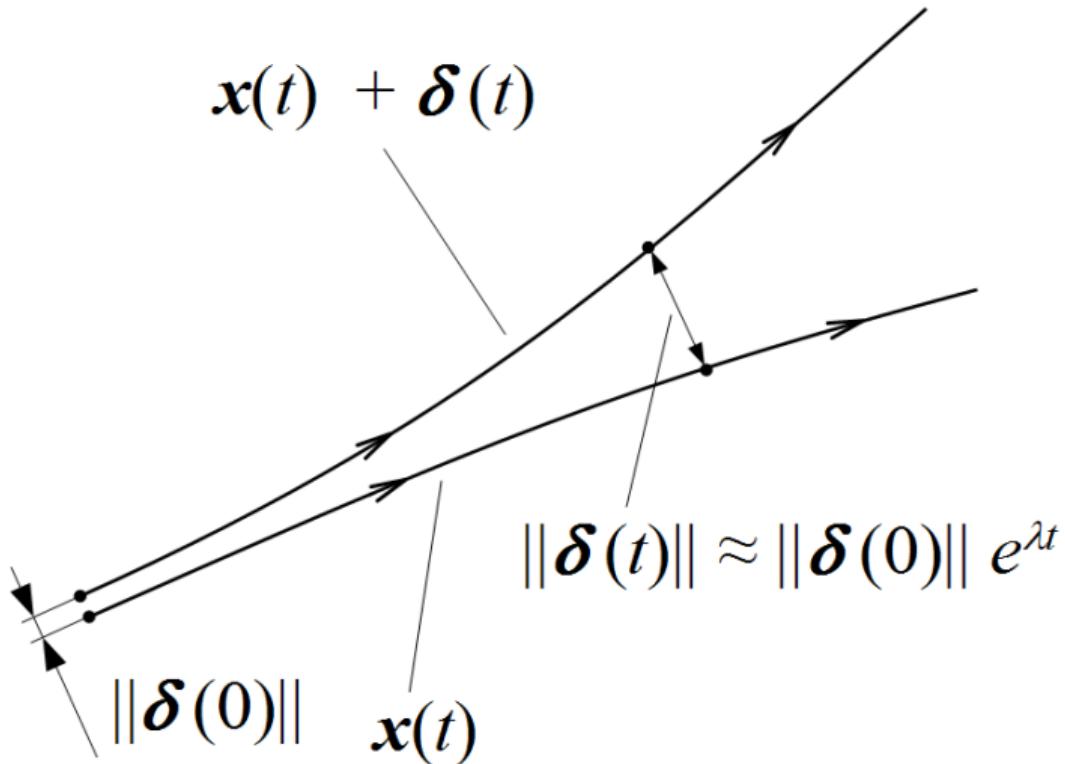
$$P: V \rightarrow \Sigma$$

$$x \mapsto \phi(\tau(x), x),$$

donde  $\tau(x)$  es el primer retorno del punto  $x$  a  $\Sigma$ . Además, decimos que  $\Sigma$  es la sección transversal al campo vectorial  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ .



## Exponentes de Lyapunov



## Simulaciones numéricas

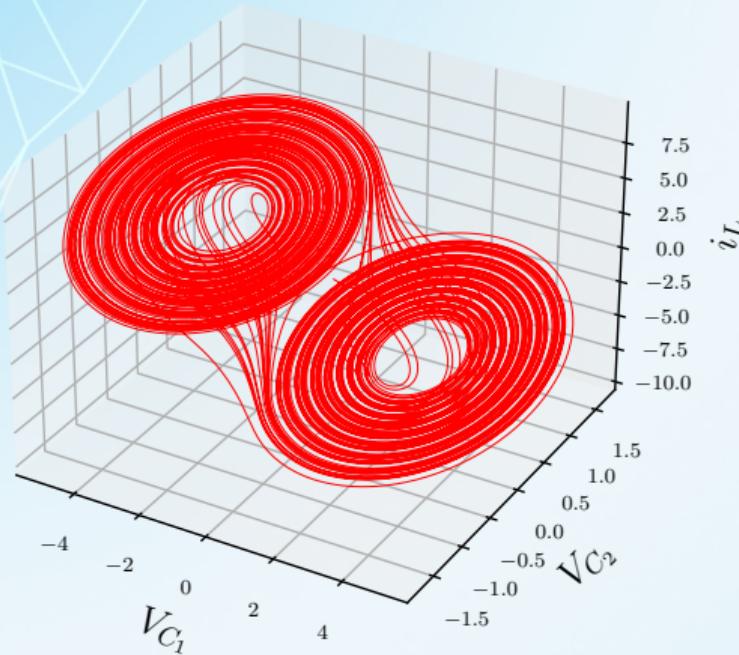


Figura 3: Sistema dinámico del doble atractor de Chua.

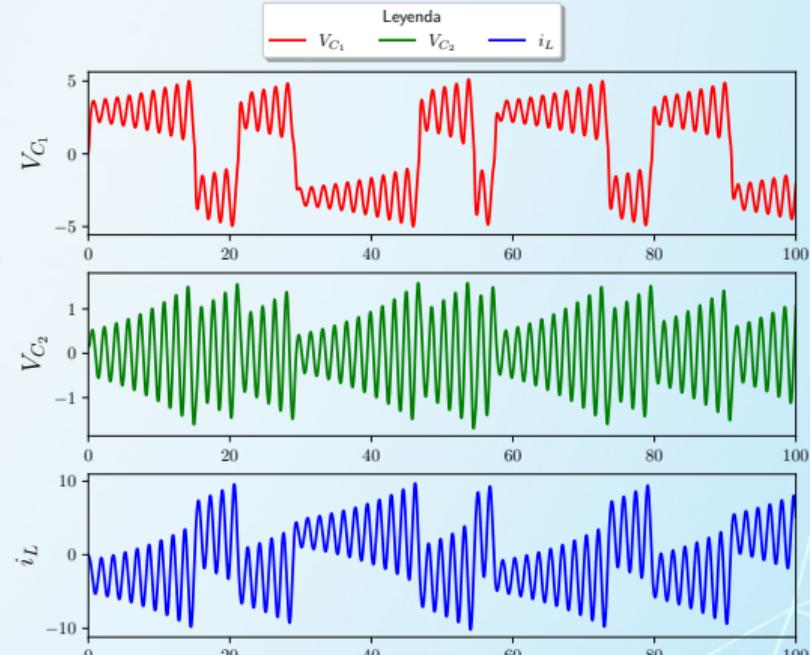


Figura 4: Serie de tiempo.

## Simulaciones numéricas

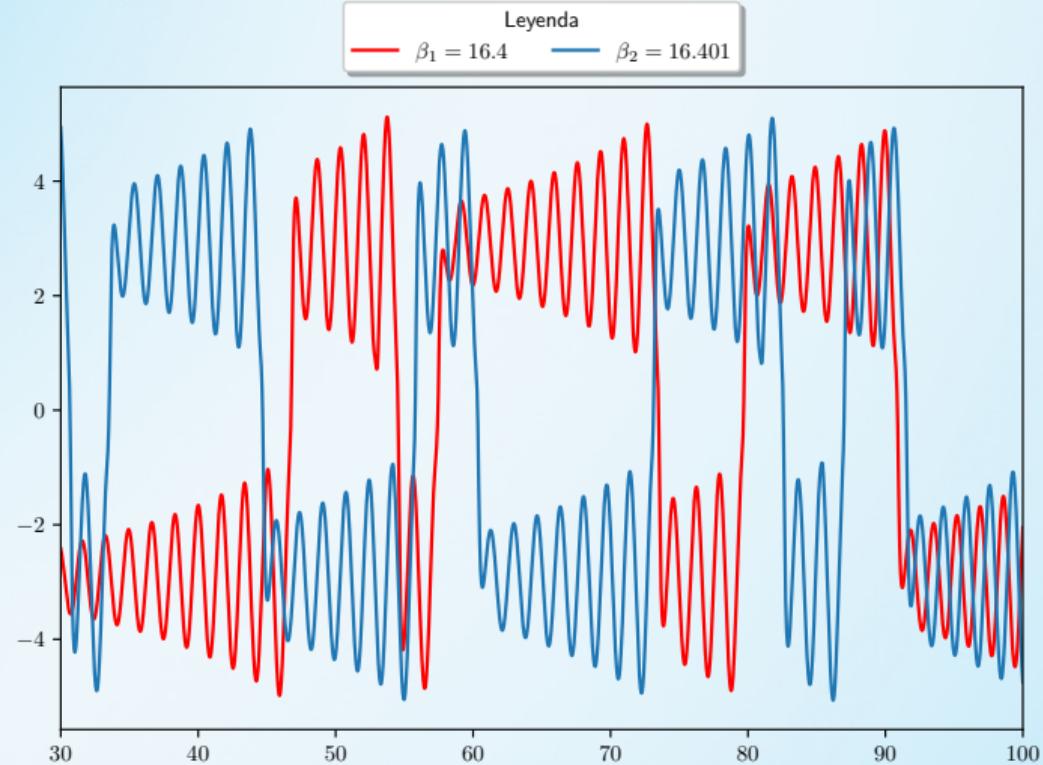


Figura 5: Soluciones de  $V_{C1}$  para  $\beta_1 \approx \beta_2$ .

## Simulaciones numéricas ( $\alpha = 10$ , $\beta = 16.4$ , $R = -1.22$ , $C_2 = 0.728$ )

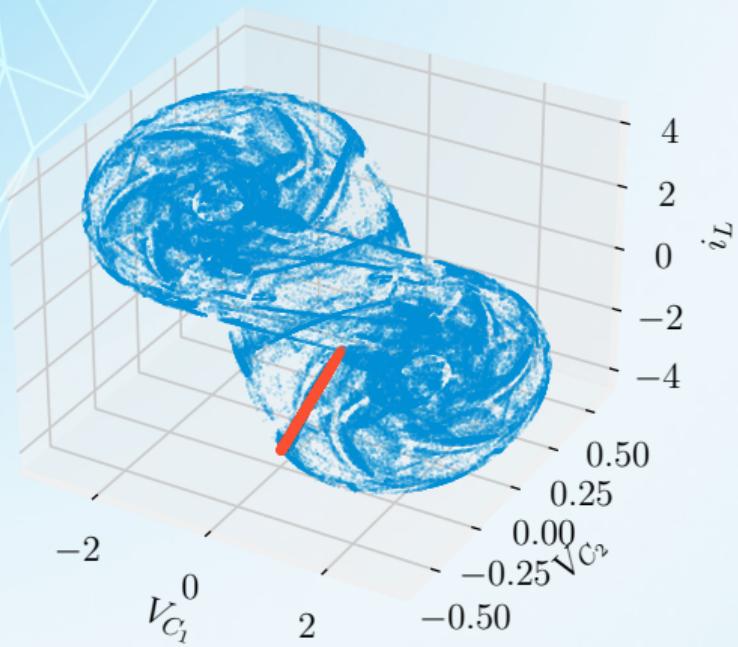


Figura 6: La sección transversal es el plano  $x = 1$  en el doble atractor de Chua.

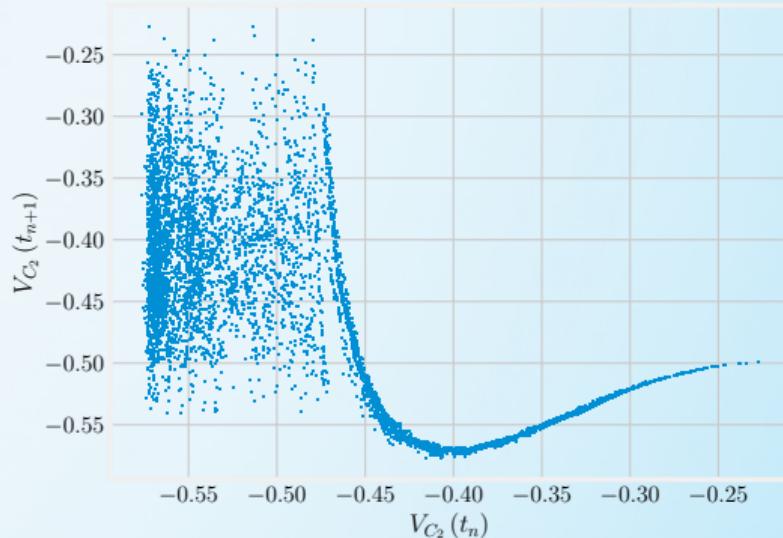


Figura 7: Mapa de Poincaré:  $V_{C_2}(t_n)$  versus  $V_{C_2}(t_{n+1})$ .

# Programas (Lynch, 2018, Capítulo 3)

```
def chua(
    t: float, X: ArrayLike, α: float, β: float, m_0: float, m_1: float
) -> ArrayLike:
    dX: ArrayLike = np.empty_like(X)
    g_x = m_1 * X[0] + 0.5 * (m_0 - m_1) * (np.abs(X[0]) + 1) - np.abs(X[0])
    dX[0] = α * (X[1] - (g_x))
    dX[1] = X[0] - X[1] + X[2]
    dX[2] = -β * X[1]
    return dX
```

```
α: float = 10.0
β: float = 16.4
m_0: float = -1.22
m_1: float = 0.628
```

```
time = np.linspace(start=0, stop=300, num=50000)
X_0 = [0.1, 0.15, 0.01]

X_s = odeint(func=chua, y0=X_0, t=time, args=(α, β, m_0, m_1), tfirst=True)
```

Programa 1: `chua_double_scroll.py` usa la función `scipy.integrate.odeint`.

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp
from numpy import linspace
from matplotlib import rc
from numpy.typing import ArrayLike

# plt.style.use('ggplot')
# rc('font', **{'family': 'serif', 'serif': ['Computer Modern']})
rc("text", usetex=True)

# plt.rcParams['text.usetex'] = True
# plt.rcParams['font.serif'] = ['Computer Modern']

α: float = 10.0
β: float = 16.4
R: float = -1.22
C_2: float = -0.728
```

```
def chua(t: float, u: ArrayLike) -> ArrayLike:
    """Chua system
```

.. math::

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{1}{R C_1}(V_2 - V_1 - g(V_1)) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{R C_2}(V_1 - V_2 + R i_L) \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{1}{L} V_2\end{aligned}$$

Args:

`t` (float): temporal variable  
`u` (ArrayLike): position

Returns:

ArrayLike: vector solution

..

`x, y, z = u`

`f(x = C_2 * x + 0.5 * (R * C_2) * (abs(x + 1) - abs(x - 1)))`

## Conclusiones

- De la Figura 5 podemos ver que el sistema de Chua bajo ciertos parámetros  $\alpha = 10$  y  $\beta_1 = 16.4$ ,  $\beta_2 = 16.401$  es un sistema caótico ya que para parámetros muy cercanos obtenemos soluciones muy diferentes.
- Para ciertos parámetros el sistema de Chua se comporta de manera caótica.
- De la Figura 6 logramos implementar un programa para poder obtener la sección de Poincaré y hacer las gráficas para hallar el mapa de primer retorno con el objetivo de ver si las órbitas sean estables.

# Referencias

- Libros

-  Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2013). *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos* (Third Edition). Academic Press. <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-382010-5.00027-0>
-  Lynch, S. (2018). *Dynamical Systems with Applications using Python*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-78145-7>
-  Viana, M., & Espinar, J. M. (2021). *Differential equations: a dynamical systems approach to theory and practice*. American Mathematical Society.

- Artículo matemático

-  Matsumoto, T. (1984). A chaotic attractor from Chua's circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 31(12), 1055-1058. <https://doi.org/10.1109/TCS.1984.1085459>

- Sitio web

-  Zhong, G.-Q., & Ayrom, F. (1984). *Experimental Confirmation of Chaos from Chua's Circuit*. Consultado el 10 de junio de 2020, desde <http://www2.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/1984/338.html>

# Agradecimientos

¡Muchas gracias!

Colaboradores:

- Tipografía en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X: todo el grupo.
- Esquema de la exposición: todo el grupo, prof. asesor Benito L. Ostos Cordero.

Presentación disponible en:

<https://carlosal1015.github.io/circuit-expo/slides.pdf>

Dudas, sugerencias o preguntas a:

caznaranl@uni.pe  
asantosf@uni.pe  
avasquezg@uni.pe