

Un estudio de la dinámica no lineal en el circuito caótico de Chua

FERIA DE PROYECTOS ESTUDIANTILES

CATEGORÍA II

GRUPO N° 3

Carlos A. Aznarán Laos

André G. Santos Félix

Alejandro Vásquez Gavancho



Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

23 de agosto del 2022



Plan de la charla

① Descripción del modelo del circuito

Circuito de Chua

Sistema de Chua adimensional

② Método para determinar el caos

Mapa de Poincaré

Exponentes de Lyapunov

③ Simulaciones numéricas

④ Programas

⑤ Conclusiones

Circuito de Chua

- (1) es un sistema EDO no lineal autónomo. Comprobado experimentalmente en 1984 por Zhong y Ayrom.
- Considere el circuito de la Figura 1 con una resistencia no lineal N_R de tres segmentos lineal por tramos.
- En el trabajo “A chaotic attractor from Chua’s circuit” estudiamos el comportamiento caótico del circuito y un **método de convergencia de órbitas** que nos ayudará a estabilizar el mismo.

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} \frac{dV_{C_1}}{dt} &= \frac{1}{RC_1}(V_{C_2} - V_{C_1} - g(V_{C_1})) \\ \frac{dV_{C_2}}{dt} &= \frac{1}{RC_2}(V_{C_1} - V_{C_2} + Ri_L) \\ \frac{di_L}{dt} &= -\frac{1}{L}V_{C_2} \end{aligned} \right\} \text{Sistema de Chua}$$

donde

- V_{C_1} , V_{C_2} son los voltajes en los capacitores C_1 , C_2 , y
- $g(V_{C_1})$ es la **curva característica** del *diodo de Chua*.

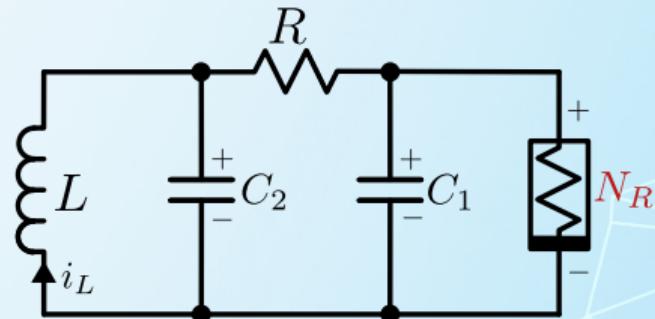


Figura 1: Circuito de Chua conformado por la resistencia lineal R , inductancia lineal L e i_L es la intensidad de corriente.

Sistema de Chua adimensional

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - x - g(x)) \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = -\beta y \end{cases}$$

y cuyos puntos de equilibrio son

$$P^+ = (1, 0, -1)$$

$$O = (0, 0, 0)$$

$$P^- = (-1, 0, 1)$$

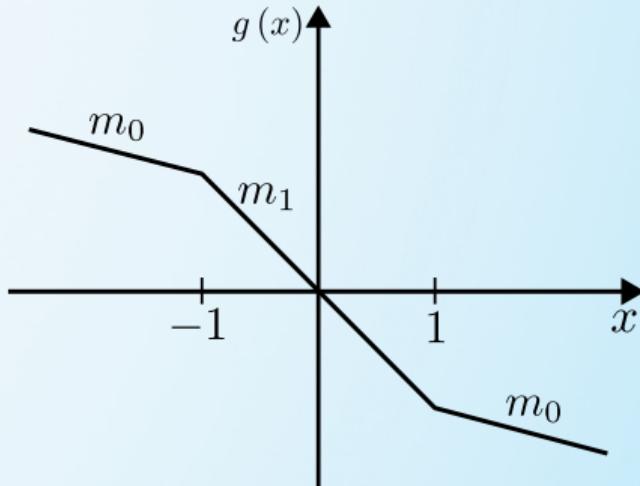


Figura 2: Curva caracterísitica de la resistencia no lineal $g(x)$ definida como

$$g(x) = \begin{cases} m_0x + m_0 + m_1 & \text{si } x \leq -1, \\ m_1x & \text{si } -1 < x < 1, \\ m_0x + m_1 - m_0 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Definición 1: Mapa de Poincaré

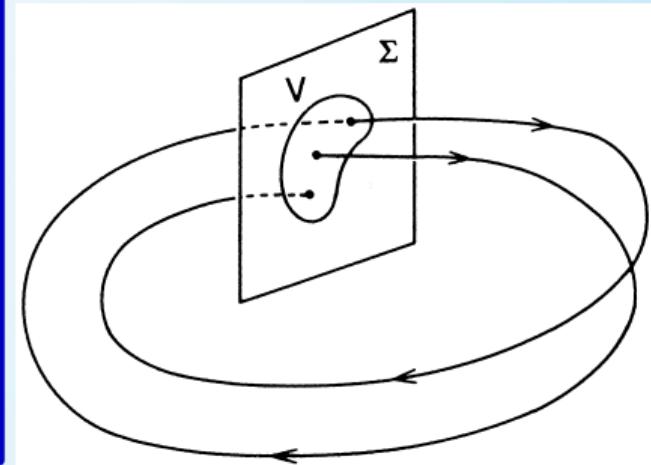
Es la aplicación que asocia los puntos en $V \subset \Sigma$ abierto tal que las trayectorias que inician en V retornan a Σ

$$P: V \rightarrow \Sigma$$

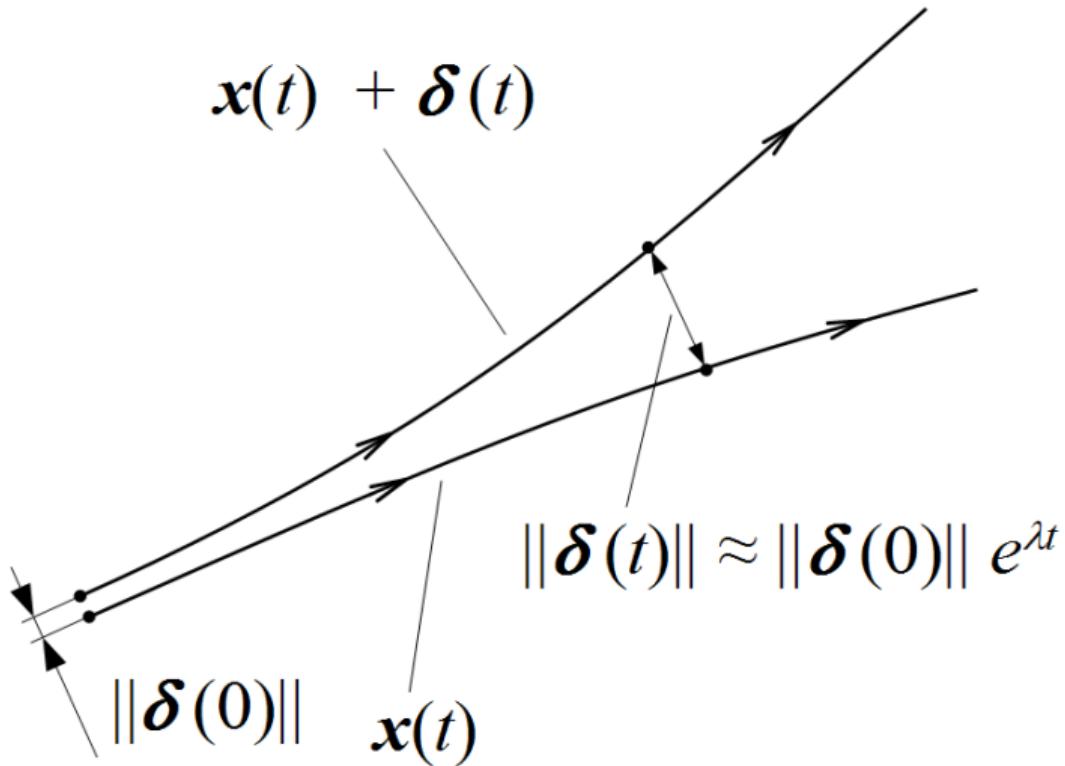
$$x \mapsto \phi(\tau(x), x),$$

donde $\tau(x)$ es el primer retorno del punto x a Σ .

Además, decimos que Σ es la sección transversal al campo vectorial $\frac{dx}{dt} = f(x)$, $x(t_0) = x_0$.



Exponentes de Lyapunov



Simulaciones numéricas ($\alpha = 10.0$, $\beta = 16.4$, $m_0 = -1.22$, $m_1 = 0.628$)

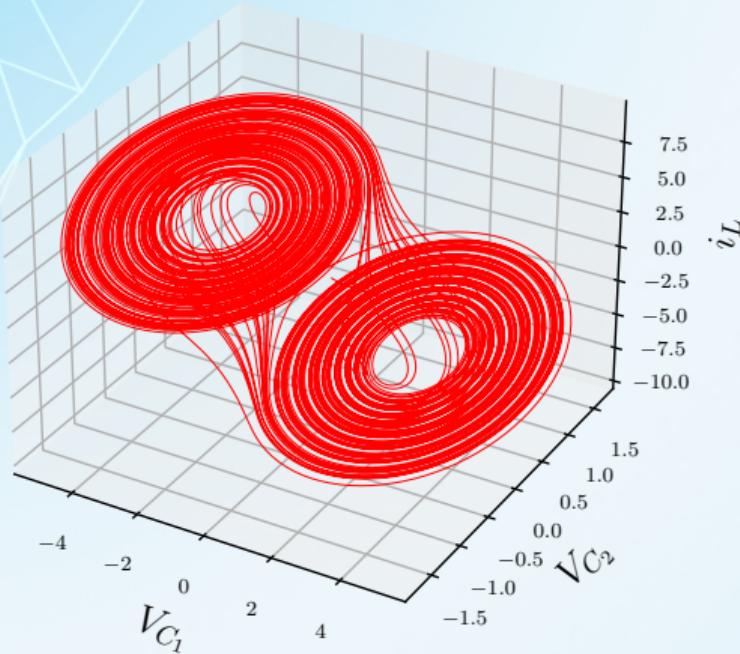


Figura 3: Sistema dinámico del doble atractor de Chua.

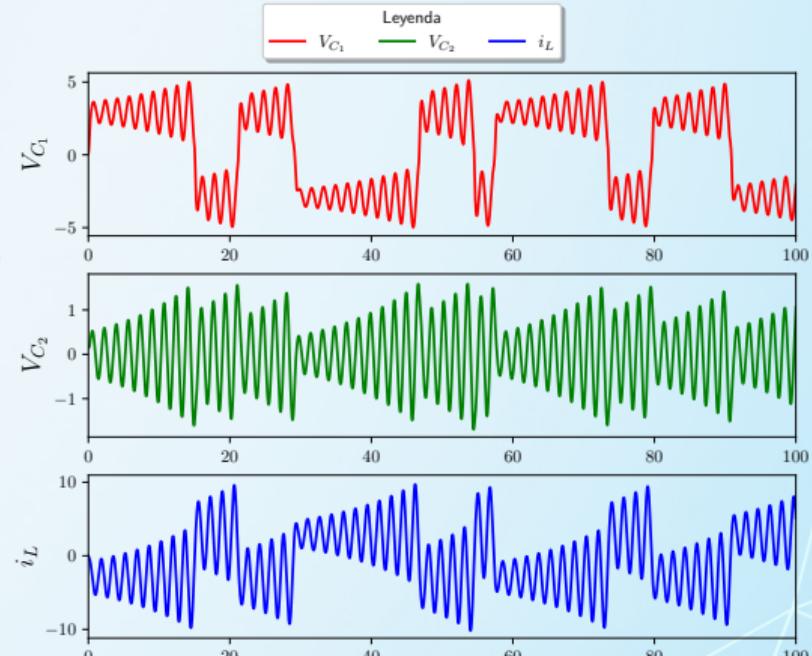


Figura 4: Serie de tiempo.

Simulaciones numéricas

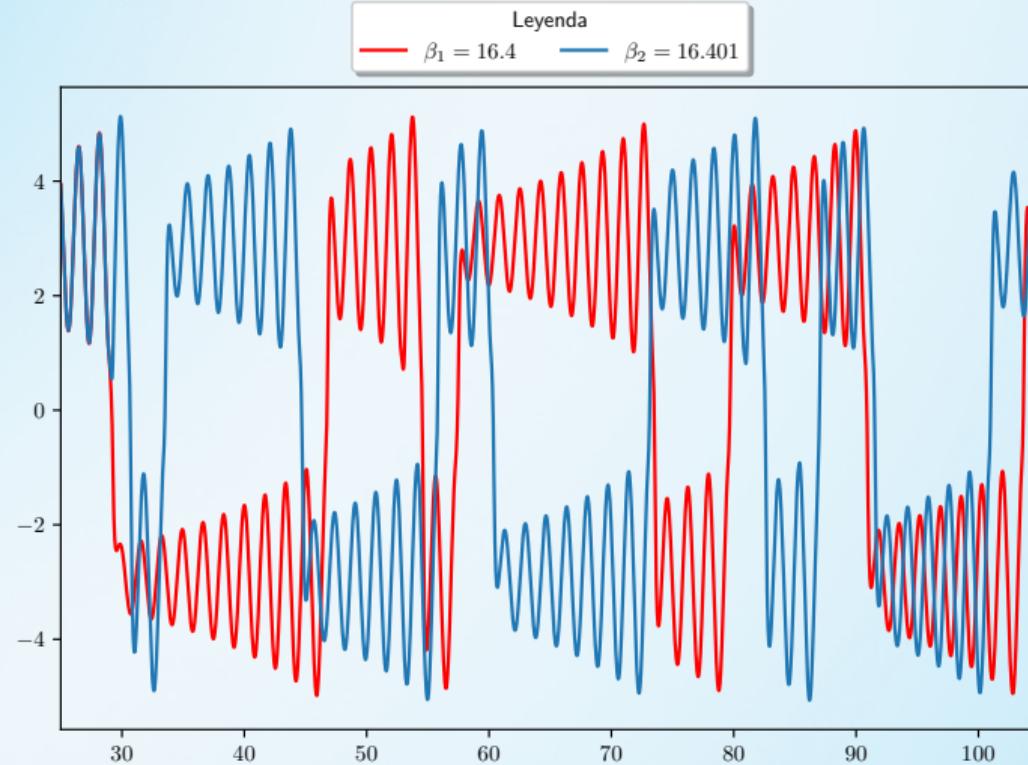


Figura 5: Soluciones de V_{C_1} cuando $\beta_1 \approx \beta_2$ y los demás parámetros constantes.

Simulaciones numéricas ($\alpha = 10$, $\beta = 16.4$, $m_0 = -1.22$, $m_1 = 0.728$)

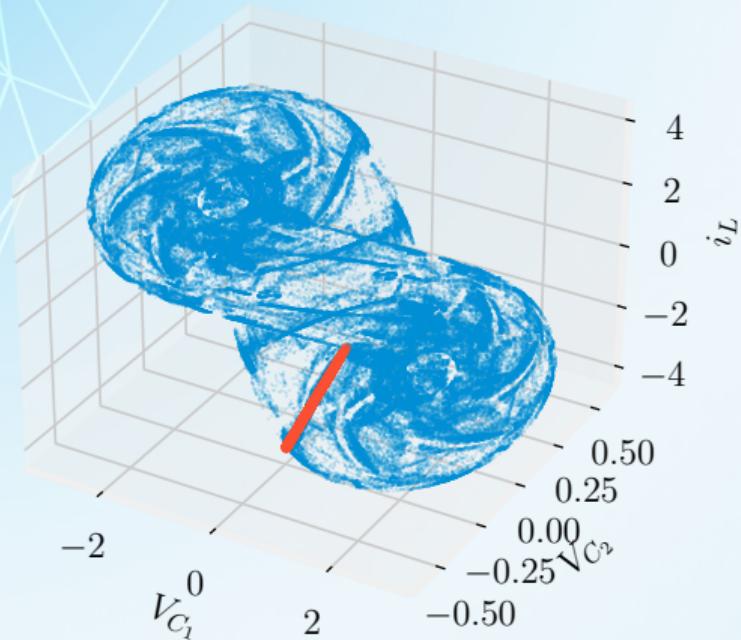


Figura 6: La sección transversal es el plano $\Sigma = \{(V_{C_1}, V_{C_2}, i_L) : V_{C_1} = 1\}$ en el doble atractor de Chua.

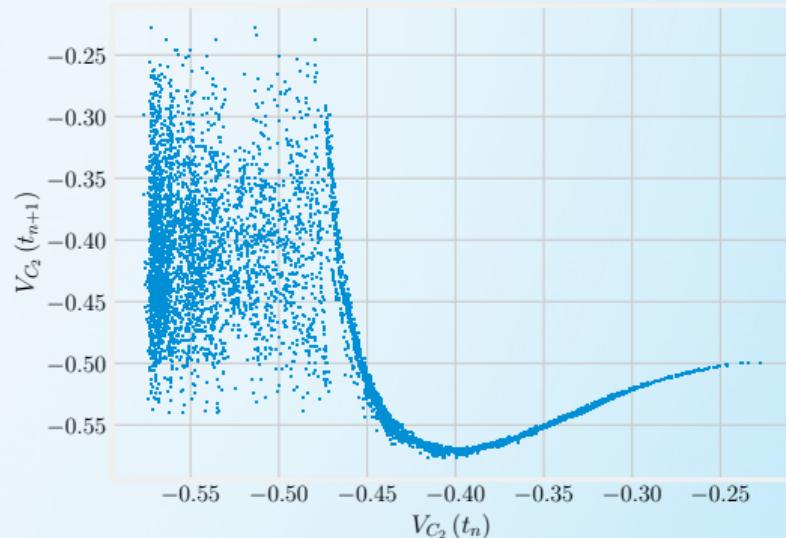


Figura 7: Mapa de primer retorno: $V_{C_2}(t_n)$ versus $V_{C_2}(t_{n+1})$.

Programas (Lynch, 2018, Sección 8.4.2, pág. 246)

En Python 3.10.6, basados en las bibliotecas NumPy 1.23.1, SciPy 1.9.0 y Matplotlib 3.5.2.

```
def chua(
    t: float, X: ArrayLike, α: float, β: float, m_0: float, m_1: float
) -> ArrayLike:
    dX: ArrayLike = np.empty_like(X)
    g_X = m_1 * X[0] + 0.5 * (m_0 - m_1) * (np.abs(X[0]) + 1) -
        np.abs(X[0] - 1))

    dX[0] = α * (X[1] - g_X)
    dX[1] = X[0] - X[1] + X[2]
    dX[2] = -β * X[1]
    return dX

α: float = 10.0
β: float = 16.4
m_0: float = -1.22
m_1: float = 0.628

time = np.linspace(start=0, stop=300, num=50000)
X_0 = [0.1, 0.15, 0.01]

X_s = odeint(func=chua, y0=X_0, t=time, args=(α, β, m_0, m_1),
             tfirst=True)
```

Programa 1: `chua_double_scroll.py` usa la función `scipy.integrate.odeint`.

```
x_section: int = 1

def poincare(t: ArrayLike, vector: ArrayLike) -> float:
    x: float = vector[0]
    return x - x_section

t_0: float = 0.0
t_final: float = 6e4
u0: list[float] = [0.1, 0.15, 0.01]

poincare.direction: float = -1
sol: ArrayLike = solve_ivp(
    chua,
    [t_0, t_final],
    u0,
    events=poincare,
    dense_output=True,
    vectorized=True,
)

sol.sol

t = sol.t_events[0]
vectors = sol.sol(t)
x, y, z = vectors
```

Programa 2: `poincare_chua.py` usa la función `scipy.integrate.solve_ivp`.

Conclusiones

- De la Figura 5 podemos ver que el sistema de Chua bajo ciertos parámetros $\alpha = 10$, $\beta_1 = 16.4$, $\beta_2 = 16.401$ es un sistema caótico ya que para parámetros muy cercanos obtenemos soluciones muy diferentes.
- Para ciertos parámetros α , β , m_0 y m_1 el sistema de Chua exhibe los atractores en forma de espiral, doble espiral, doble gancho, de tipo Lorenz o Rössler (Chua, 1992).
- De la Figura 6 logramos implementar un programa para poder obtener la sección de Poincaré y hacer las gráficas para hallar el mapa de primer retorno con el objetivo de ver si las órbitas sean estables.
- Además del análisis con la sección de Poincaré, existen otros métodos como la *aplicación del círculo*, el *exponente de Lyapunov más grande*, la *dimensión de correlación*.

Referencias

- Libros

-  Wiggins, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer New York.
-  Lynch, S. (2018). *Dynamical Systems with Applications using Python*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-78145-7>
-  Viana, M., & Espinar, J. M. (2021). *Differential equations: a dynamical systems approach to theory and practice*. American Mathematical Society.

- Artículos matemáticos

-  Matsumoto, T. (1984). A chaotic attractor from Chua's circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 31(12), 1055-1058. <https://doi.org/10.1109/TCS.1984.1085459>
-  Chua, L. (1992). A zoo of strange attractors from the canonical Chua's circuits. [1992] *Proceedings of the 35th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, 916-926 vol.2. <https://doi.org/10.1109/MWSCAS.1992.271147>

- Sitio web

-  Zhong, G.-Q., & Ayrom, F. (1984). *Experimental Confirmation of Chaos from Chua's Circuit*. Consultado el 10 de junio de 2020, desde <http://www2.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/1984/338.html>

Agradecimientos

¡Muchas gracias!

Colaboradores:

- Tipografía en L^AT_EX: todo el grupo.
- Esquema de la exposición: todo el grupo, prof. asesor Benito L. Ostos Cordero.

Presentación disponible en:

<https://carlosal1015.github.io/circuit-expo/slides.pdf>

Dudas, sugerencias o preguntas a:

caznaranl@uni.pe
asantosf@uni.pe
avasquezg@uni.pe