Un estudio de la dinámica no lineal en el circuito caótico de Chua

Feria de proyectos estudiantiles   Categoría II   Grupo N° 3

Carlos A. Aznarán Laos   André G. Santos Félix   Alejandro Vásquez Gavancho

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

23 de agosto del 2022

Plan de la charla

1. Descripción del modelo del circuito
   - Circuito de Chua
   - Sistema de Chua adimensional
2. Método para determinar el caos
   - Mapa de Poincaré
   - Exponentes de Lyapunov
3. Simulaciones numéricas
4. Programas
5. Conclusiones

Circuito de Chua

- (1) es un sistema EDO no lineal autónomo. Comprobado experimentalmente en 1984 por Zhong y Ayrom.
- Considere el circuito de la Figura 1 con una resistencia no lineal N_R de tres segmentos lineal por tramos.
- En el trabajo "A chaotic attractor from Chua's circuit" estudiamos el comportamiento caótico del circuito y el método de convergencia de órbitas que nos ayudará a estabilizar el mismo.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\,V_{C_1}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{RC_1}\left(V_{C_2} - V_{C_1} - g(V_{C_1})\right) \\ \frac{\mathrm{d}\,V_{C_2}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{RC_2}\left(V_{C_1} - V_{C_2} + Ri_L\right) \\ \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{L}V_{C_2} \end{aligned}\right\}\text{Sistema de Chua} \tag{1}$$

donde

- V_{C_1}, V_{C_2} son los voltajes en los capacitores C_1, C_2, y
- $g\left(V_{C_1}\right)$ es la curva característica del *diodo de Chua*.

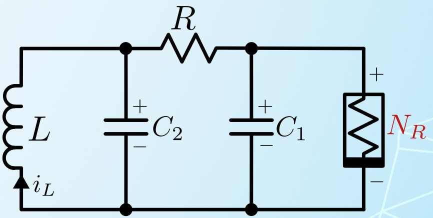


Figura 1: Circuito de Chua conformado por la resistencia lineal R, inductancia lineal L e i_L es la intensidad de corriente.

Sistema de Chua adimensional

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha\left(y - x - g\left(x\right)\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - y + z \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\beta y \end{cases} \tag{2}$$

y cuyos puntos de equilibrio son

$$P^{+} = (1, 0, -1)$$
$$O = (0, 0, 0)$$
$$P^{-} = (-1, 0, 1)$$

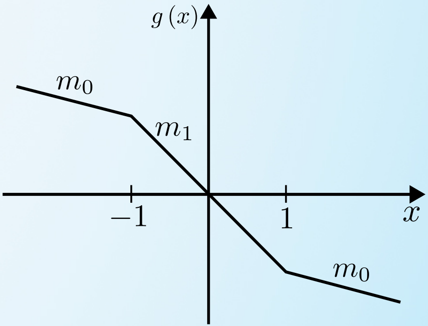


Figura 2: Curva caracterísitica de la resistencia no lineal $g\left(x\right)$ definida como

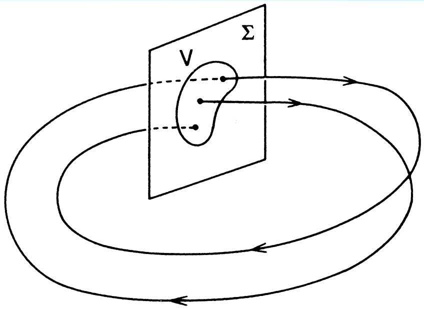
$$g\left(x\right) = \begin{cases} m_0 x + m_0 + m_1 & \text{si } x \leq -1, \\ m_1 x & \text{si } -1 < x < 1, \\ m_0 x + m_1 - m_0 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Definición 1: Mapa de Poincaré

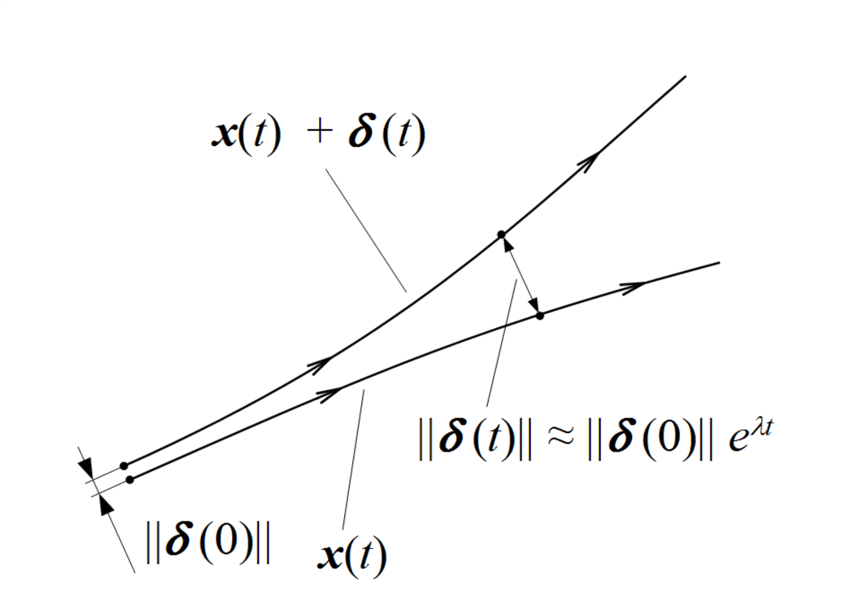
Es la aplicación que asocia los puntos en $V \subset \Sigma$ abierto tal que las trayectorias que inician en V retornan a Σ

$$\begin{aligned} P\colon V &\to \Sigma \\ x &\mapsto \phi\left(\tau\left(x\right), x\right), \end{aligned}$$

donde $\tau\left(x\right)$ es el primer retorno del punto x a Σ. Además, decimos que Σ es la sección transversal al campo vectorial $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f\left(x\right)$, $x\left(t_0\right) = x_0$.



Exponentes de Lyapunov



Simulaciones numéricas

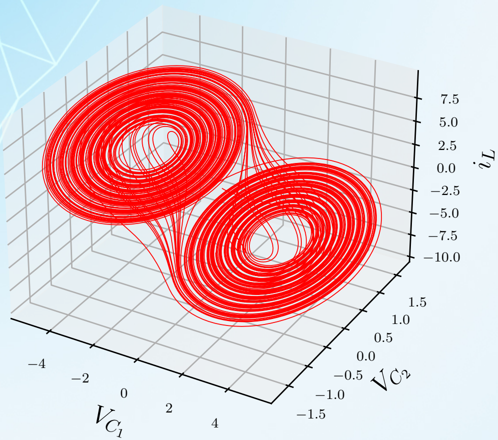


Figura 3: Sistema dinámico del doble atractor de Chua.

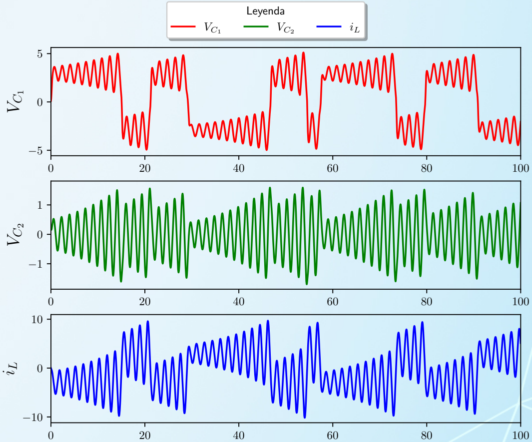


Figura 4: Serie de tiempo.

Simulaciones numéricas

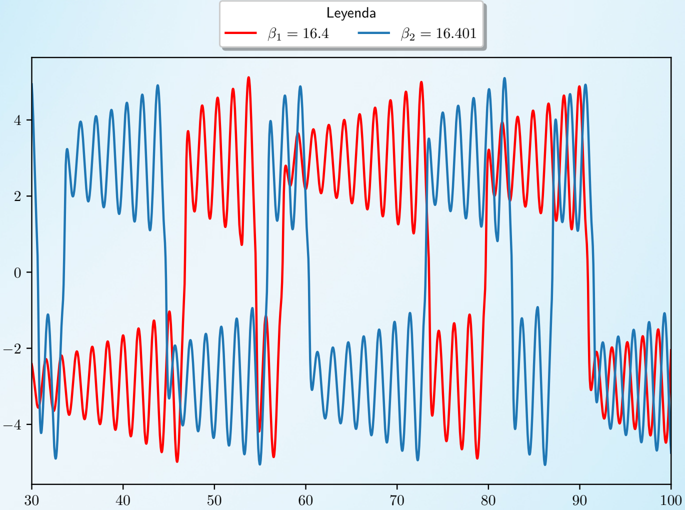


Figura 5: Soluciones de V_{C_1} para $\beta_1 \approx \beta_2$.

Simulaciones numéricas $(\alpha = 10, \beta = 16.4, R = -1.22, C_2 = 0.728)$

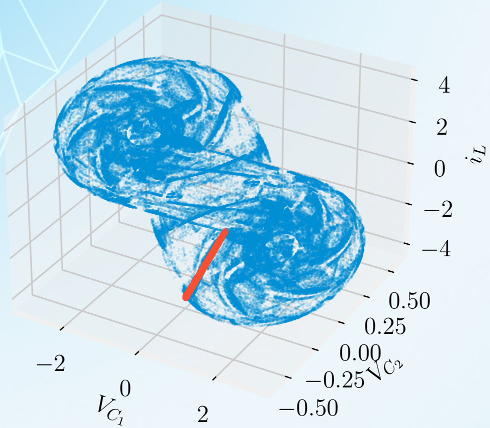


Figura 6: La sección transversal es el plano $\Sigma = \{(V_{C_1}, V_{C_2}, i_L) : V_{C_1} = 1\}$ en el doble atractor de Chua.

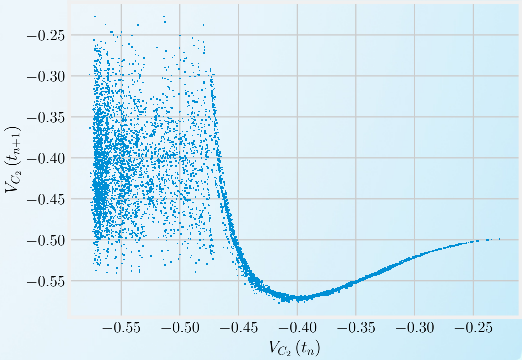


Figura 7: Mapa de Poincaré: $V_{C_2}(t_n)$ versus $V_{C_2}(t_{n+1})$.

Programas (Lynch, 2018, Sección 8.4.2, pág. 246)

```python
def chua(
    t: float, X: ArrayLike, α: float, β: float, m_0: float, m_1: float
) -> ArrayLike:
    dX: ArrayLike = np.empty_like(X)
    g_x = m_1 * X[0] + 0.5 * (m_0 - m_1) * (np.abs(X[0] + 1) - np.abs(X[0] - 1))

    dX[0] = α * (X[1] - (g_x))
    dX[1] = X[0] - X[1] + X[2]
    dX[2] = -β * X[1]
    return dX


α: float = 10.0
β: float = 16.4
m_0: float = -1.22
m_1: float = 0.628

time = np.linspace(start=0, stop=300, num=50000)
X_0 = [0.1, 0.15, 0.01]

X_s = odeint(func=chua, y0=X_0, t=time, args=(α, β, m_0, m_1), tfirst=True)
```

Programa 1: `chua_double_scroll.py` usa la función `scipy.integrate.odeint`.

```python
x_section: int = 1


def poincare(t: ArrayLike, vector: ArrayLike) -> float:
    x: float = vector[0]
    return x - x_section


t_0: float = 0.0
t_final: float = 6e4
u0: list[float] = [0.1, 0.15, 0.01]

poincare.direction: float = -1
sol: ArrayLike = solve_ivp(
    chua,
    [t_0, t_final],
    u0,
    events=poincare,
    dense_output=True,
    vectorized=True,
)

sol.sol

t = sol.t_events[0]
vectors = sol.sol(t)
x, y, z = vectors
```

Programa 2: `poincare_chua.py` usa la función `scipy.integrate.solve_ivp`.

Conclusiones

- De la Figura 5 podemos ver que el sistema de Chua bajo ciertos parámetros $\alpha = 10$ y $\beta_1 = 16.4$, $\beta_2 = 16.401$ es un sistemas caótico ya que para parámetros muy cercanos obtenemos soluciones muy diferentes.
- Para ciertos parámetros el sistema de Chua se comporta de manera caótica.
- De la Figura 6 logramos implementar un programa para poder obtener la sección de Poincaré y hacer las gráficas para hallar el mapa de primer retorno con el objetivo de ver si las órbitas sean estables.
- Además del análisis con la sección de Poincaré, existen otros métodos como la *aplicación del círculo*, el *exponente de Lyapunov más grande*, la *dimensión de correlación*.

Referencias

- Libros

Wiggins, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.* Springer New York.

Lynch, S. (2018). *Dynamical Systems with Applications using Python.* Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-78145-7

Viana, M., & Espinar, J. M. (2021). *Differential equations: a dynamical systems approach to theory and practice.* American Mathematical Society.

- Artículos matemáticos

Matsumoto, T. (1984). A chaotic attractor from Chua's circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems, 31*(12), 1055-1058. https://doi.org/10.1109/TCS.1984.1085459

- Sitio web

Zhong, G.-Q., & Ayrom, F. (1984). *Experimental Confirmation of Chaos from Chua's Circuit.* Consultado el 10 de junio de 2020, desde http://www2.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/1984/338.html

Agradecimientos

¡Muchas gracias!

Colaboradores:

- Tipografía en LaTeX: todo el grupo.
- Esquema de la exposición: todo el grupo, prof. asesor Benito L. Ostos Cordero.

Presentación disponible en:

https://carlosal1015.github.io/circuit-expo/slides.pdf

Dudas, sugerencias o preguntas a:

caznaranl@uni.pe
asantosf@uni.pe
avasquezg@uni.pe