Un estudio de la dinámica no lineal en el circuito caótico de Chua

Feria de proyectos estudiantiles Categoría II Grupo N° 3

Carlos A. Aznarán Laos André G. Santos Félix Alejandro Vásquez Gavancho

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

23 de agosto del 2022

Plan de la charla

1. Descripción del modelo del circuito
    - Circuito de Chua
    - Sistema de Chua adimensional
2. Método para determinar el caos
    - Mapa de Poincaré
    - Exponentes de Lyapunov
3. Simulaciones numéricas
4. Programas
5. Conclusiones

Circuito de Chua

- (1) es un sistema EDO no lineal autónomo. Comprobado experimentalmente en 1984 por Zhong y Ayrom.
- Considere el circuito de la Figura 1 con una resistencia no lineal N_R de tres segmentos lineal por tramos.
- En el trabajo "A chaotic attractor from Chua's circuit" estudiamos el comportamiento caótico del circuito y el método de convergencia de órbitas que nos ayudará a estabilizar el mismo.

$$
(1) \qquad \left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V_{C_1}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{RC_1}\left(V_{C_2} - V_{C_1} - g(V_{C_1})\right),\\
\frac{\mathrm{d}V_{C_2}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{RC_2}\left(V_{C_1} - V_{C_2} + Ri_L\right),\\
\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{L}V_{C_2},
\end{aligned}\right\}\ \text{Sistema de Chua}
$$

donde

- V_{C_1}, V_{C_2} son los voltajes en los capacitores C_1, C_2, y
- $g\left(V_{C_1}\right)$ es la curva característica del *diodo de Chua*.

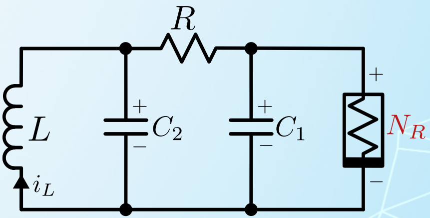


Figura 1: Circuito de Chua conformado por la resistencia lineal R, inductancia lineal L e i_L es la intensidad de corriente.

Sistema de Chua adimensional

$$
(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha\left(y - x - g\left(x\right)\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - y + z \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\beta y \end{cases}
$$

y cuyos puntos de equilibrio son

$$
\begin{aligned} P^{+} &= (1, 0, -1) \\ O &= (0, 0, 0) \\ P^{-} &= (-1, 0, 1) \end{aligned}
$$

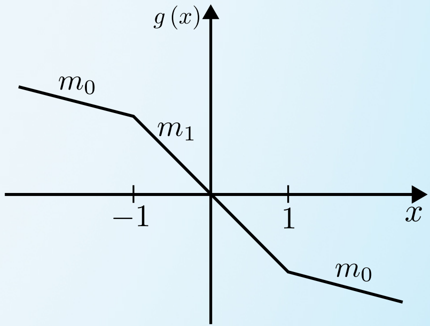


Figura 2: Curva caracterísitica de la resistencia no lineal $g\left(x\right)$ definida como

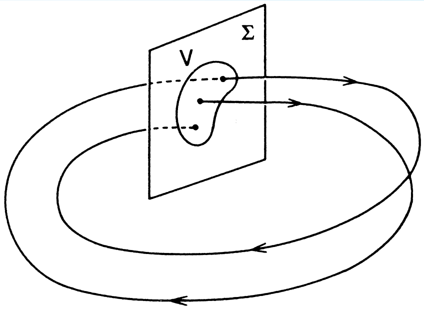
$$
g\left(x\right) = \begin{cases} m_0 x + m_0 + m_1 & \text{si } x \leq -1, \\ m_1 x & \text{si } -1 < x < 1, \\ m_0 x + m_1 - m_0 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}
$$

Definición 1: Mapa de Poincaré

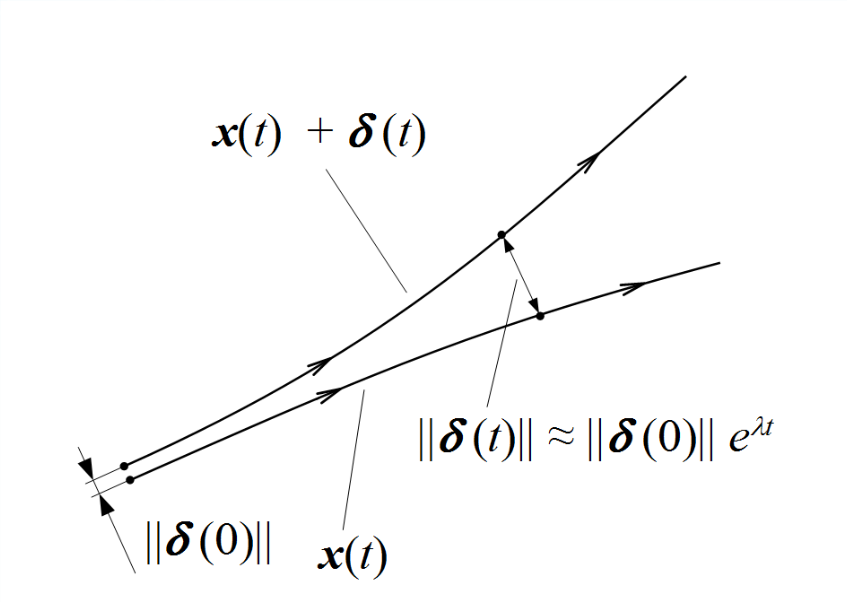
Es la aplicación que asocia los puntos en $V \subset \Sigma$ abierto tal que las trayectorias que inician en V retornan a Σ

$$\begin{aligned} P\colon\ & V \to \Sigma \\ & x \mapsto \phi\left(\tau\left(x\right), x\right), \end{aligned}$$

donde $\tau\left(x\right)$ es el primer retorno del punto x a Σ. Además, decimos que Σ es la sección transversal al campo vectorial $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f\left(x\right)$, $x\left(t_0\right) = x_0$.



Exponentes de Lyapunov



Simulaciones numéricas $(\alpha = 10.0, \beta = 16.4, m_0 = -1.22, m_1 = 0.628)$

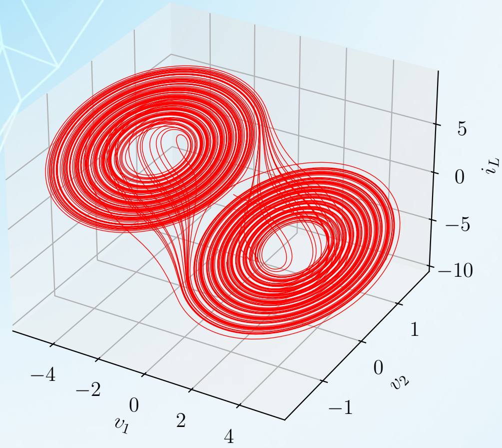


Figura 3: Sistema dinámico del doble atractor de Chua.

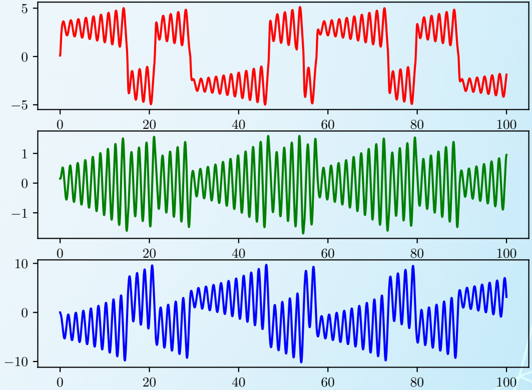


Figura 4: Serie de tiempo.

Simulaciones numéricas $\quad (\beta_1 = 16.4, \beta_2 = 16.401)$

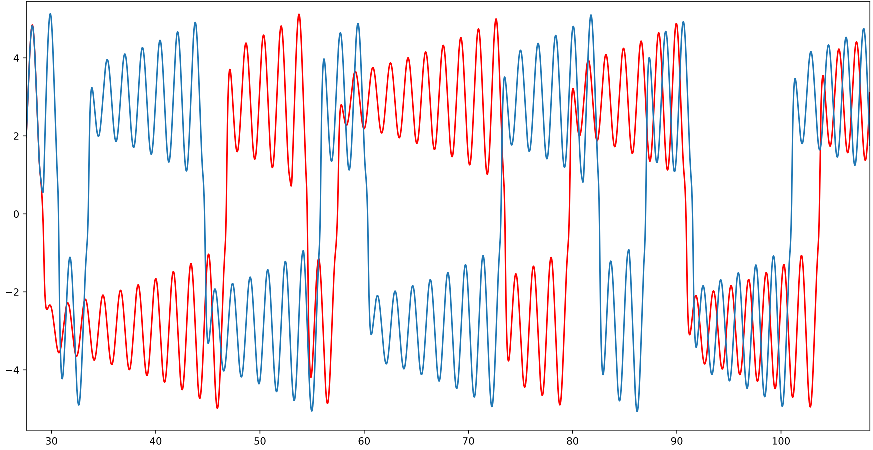


Figura 5: Azul: β_1, rojo: β_2.

Simulaciones numéricas $(\alpha = 10, \beta = 16.4, R = -1.22, C_2 = 0.728)$

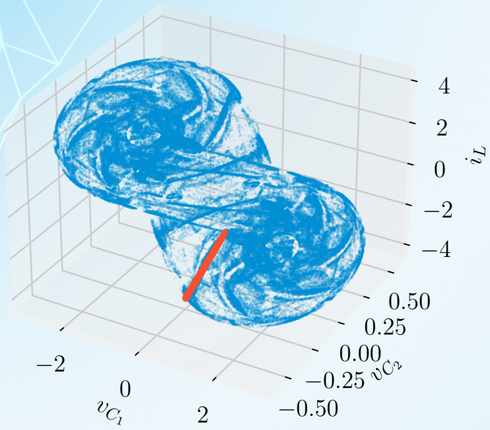


Figura 6: La sección transversal es el plano $x = 1$ en el doble atractor de Chua.

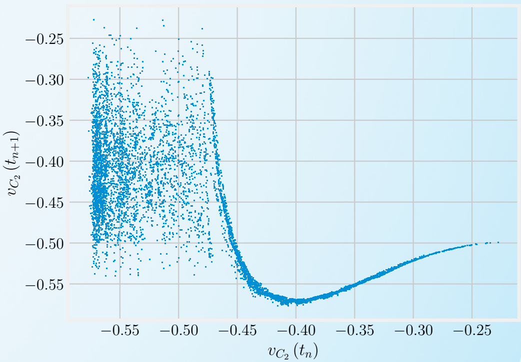


Figura 7: Mapa de Poincaré: $v_{C_2}(t_n)$ versus $v_{C_2}(t_{n+1})$.

Programas

scipy.integrate.solve_ivp

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

from matplotlib import pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint

plt.rcParams['text.usetex'] = True
plt.rcParams['font.serif'] = ['Computer Modern']

m0: float = -1.22
m1: float = 0.628
tmax: float = 300


def chua(x, t, a=10.0, b=16.4):
    f_x = m1*x[0] + 0.5*(m0-m1) * (np.abs(x[0] + 1) - np.abs(x[0] - 1))
    return [a * (x[1] - (f_x)),
            x[0] - x[1] + x[2],
            -b*x[1]]


time = np.linspace(0, tmax, 50000)
x0 = [0.1, 0.15, 0.01]

xs = odeint(chua, x0, time)

fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)

ax.plot(xs[:, 0], xs[:, 1], xs[:, 2], 'r-', lw=0.5)

ax.set_xlabel(r'$v_{C_{1}}$', fontsize=15)
ax.set_ylabel(r'$v_{C_{2}}$', fontsize=15)
ax.set_zlabel(r'$i_{L}$', fontsize=15)
plt.tick_params(labelsize=15)
ax.set_title(r'Atractor de doble espiral', fontsize=15)
# plt.show()
```

Conclusiones

- De la figura podemos ver que el sistema de Chua bajo ciertos parámetros $\alpha = 10$ y $\beta_1 = 16.4$, $\beta_2 = 16.401$ es un sistemas caótico ya que para parámetros muy cercanos obtenemos soluciones muy diferentes.
- Para ciertos parámetros el sistema de Chua se comporta de manera caótica.
- De la figura logramos implementar un programa para poder obtener la sección de Poincaré y hacer las gráficas para hallar el mapa de primer retorno con el objetivo de ver si las órbitas sean estables.

Referencias

- Libros
  - Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2013). *Differential Equations, Dynamical Systems, and an I ntroduction to Chaos* (Third Edition). Academic Press. https://doi.org/10.1016/b978-0-12-382010-5.00027-0
  - Lynch, S. (2018). *Dynamical Systems with Applications using Python*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-78145-7
- Artículo matemático
  - Matsumoto, T. (1984). A chaotic attractor from Chua's circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, *31*(12), 1055-1058. https://doi.org/10.1109/TCS.1984.1085459
- Sitio web
  - Zhong, G.-Q., & Ayrom, F. (1984). *Experimental Confirmation of Chaos from Chua's Circuit*. Consultado el 10 de junio de 2020, desde http://www2.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/1984/338.html

Agradecimientos

¡Muchas gracias!

Colaboradores:

- Tipografía en LaTeX: Todo el grupo.
- Esquema de la exposición: Todo el grupo, Prof. asesor Benito L. Ostos Cordero.

Presentación disponible en:

`https://carlosal1015.github.io/circuit-expo/beamer.pdf`

Dudas, sugerencias o preguntas a:

caznaranl@uni.pe
asantosf@uni.pe
avasquezg@uni.pe