

# Introduction aux équations aux dérivées partielles

## Avant-propos

Le but de ce cours est de proposer une introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles (EDP dans la suite). Nous étudierons plusieurs équations ainsi que leur discrétisation par la méthode des différences finies.

Dans le cadre du programme officiel de l'agrégation de mathématiques (épreuve de modélisation, option B : calcul scientifique), nous aborderons notamment :

- des notions élémentaires portant sur les EDP classiques en dimension 1.
- l'équation de transport linéaire avec la méthode des caractéristiques.
- l'équation des ondes et de la chaleur. Une résolution par série de Fourier et transformée de Fourier sera proposée ainsi qu'une méthode de séparation des variables. Les aspects qualitatifs seront abordés.
- les équations elliptiques avec l'utilisation du théorème de Lax–Milgram.
- des exemples de discrétisation des EDP en dimension 1 avec la méthode des différences finies. L'étude des propriétés de ces discrétisations sera proposée : notions de consistance, stabilité, convergence et d'ordre.

Vous êtes par ailleurs invités à lire le rapport du jury (disponible sur internet). Vous vous rendrez compte que le jury insiste notamment sur le fait que :

- l'épreuve de modélisation, comme les autres, requiert une démarche rigoureuse de la part des candidats.
- il faut équilibrer sa présentation entre une présentation du modèle étudié, des preuves mathématiques rigoureuses et des illustrations informatiques.
- il attend une prise de recul de la part des candidats. Il faudra donc notamment être capable de critiquer les limites du modèle présenté dans le texte, d'expliquer le comportement qualitatif de celui-ci (par exemple expliquer ce qu'il se passe quand la valeur d'un paramètre change) et être capable de conclure sur la problématique de départ.

Ce cours sera composé de :

- cinq séances de cours de deux heures chacune.
- une séance de programmation de deux heures.

Dans une première partie, nous présenterons les équations étudiées dans ce cours ainsi que les problèmes physiques associés. Chacune des parties suivantes sera consacrée à l'étude plus approfondie d'une EDP. Nous présenterons notamment les principales caractéristiques de cette EDP, les outils d'analyse utilisés ainsi qu'une discrétisation par différences finies. Les EDP étudiées dans la suite seront les équations elliptiques, l'équation de transport, l'équation de la chaleur et enfin l'équation des ondes. Une dernière section sera consacrée à des éléments de cours hors-programme destinés aux candidats souhaitant approfondir leurs connaissances sur ce sujet.

# 1 Présentation des EDP du cours

Nous présentons dans cette section les EDP étudiées dans la suite du cours. Nous essayons de donner une signification physique aux différents termes. Nous nous intéressons à des EDP de la forme

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = F, \quad (1)$$

où  $a, b, c, d, e$  et  $f$  sont des réels et où  $F$  est une fonction de  $x$  et  $y$ .

Une partie du comportement qualitatif de l'EDP peut être déterminée à partir de la valeur de ces coefficients. Considérons l'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = A, \quad (2)$$

avec  $A$  un réel tel que l'ensemble des solutions soit non vide. S'il s'agit de l'équation :

- d'une ellipse, on dira que l'équation est elliptique.
- d'une parabole, on dira que l'équation est parabolique.
- d'une hyperbole, on dira que l'équation est hyperbolique.

Cette dénomination n'est pas juste esthétique. En effet, comme nous le verrons plus loin dans ce cours, chacun de ces types d'équations dispose de propriétés spécifiques.

Dans l'équation (1) nous avons considéré un problème qui dépend de deux variables  $x$  et  $y$ . Les notions d'EDP elliptiques, paraboliques et hyperboliques peuvent aussi être généralisées à un plus grand nombre de variables. Dans le cadre de ce cours, nous nous concentrerons sur l'étude d'équations avec une seule dimension d'espace. On considérera donc une seule variable  $x$  dans le cas d'un problème stationnaire et deux variables  $t$  (le temps) et  $x$  (l'espace) dans le cas d'un problème instationnaire.

**Remarque 1.** *Les démonstrations de cette section ne sont pas exigibles. On demande simplement aux candidats de se représenter à quoi correspondent les équations et les paramètres introduits. Aucune connaissance en physique n'est requise pour cette section qui peut être lue indépendamment des autres. Les candidats doivent cependant avoir à l'esprit que tous les textes comportent une part de modélisation et les modèles présentés dans cette section sont classiques.*

## 1.1 Équations elliptiques

Nous nous intéressons dans cette section à des équations de la forme

$$-\frac{d}{dx} \left( k \frac{du}{dx} \right) = f, \quad (3)$$

pour une dimension d'espace et si l'on considère plusieurs dimensions d'espace, cette équation devient

$$-\nabla \cdot (k \nabla u) = f, \quad (4)$$

où  $\nabla \cdot$  et  $\nabla$  sont respectivement les opérateurs divergence et gradient.



FIGURE 1 – Répartition de particules dans un domaine. Gauche : représentation du problème. Droite : équilibre des flux sur une portion infinitésimale du domaine.

Nous présentons deux problèmes physiques qui font intervenir cette équation. Le premier est le cas où des particules circulent dans un domaine. Le second est un problème d'équilibre mécanique.

Nous donnons dans la partie gauche de la figure 1 une représentation du premier problème. Nous nous intéressons à des particules qui circulent dans un milieu unidimensionnel. La position est repérée par la coordonnée d'espace  $x$ . On note  $u(x)$  la densité de particules en  $x$ . Certaines particules entrent ou sortent du domaine en  $x$ , on note  $f(x)$  le terme source les représentant. De plus, les particules se déplacent à travers le domaine, on note  $q(x)$  le flux de particules en  $x$  (le nombre de particules qui traversent l'axe vertical d'abscisse  $x$  par unité de temps). Ce flux est positif si les particules vont vers la droite et négatif si elles vont vers la gauche.

On s'intéresse au cas où les flux sont à l'équilibre, il n'y a donc pas d'accumulation de particules en aucun point de l'espace. Le problème ne dépend pas du temps.

Pour établir les équations de ce problème, considérons une portion infinitésimale du domaine (de taille  $\delta x$ ) comme représenté sur la droite de la figure 1. Le nombre de particules à l'intérieur de cette section doit rester constant. On obtient donc la relation de conservation  $q(x) - q(x + \delta x) + f(x)\delta x = 0$ , ce qui donne

$$\frac{dq}{dx} = f. \quad (5)$$

De plus, on considère que les particules fuient les zones de forte densité : le flux  $q(x)$  suit la direction opposée au gradient de  $u$ . On note donc

$$q(x) = -k(x) \frac{du}{dx}(x). \quad (6)$$

Ici  $k$  est un coefficient positif qui peut dépendre de l'espace. Il traduit le rapport de proportionnalité entre le gradient de la densité et le flux qui en résulte. Ainsi, pour une densité fixée, si  $k$  est grand alors les particules circuleront facilement et le flux sera important ; à l'inverse, un  $k$  petit traduit le fait que les particules ont du mal à circuler dans le milieu. L'équation finale sur  $u$  est donc (3).

En pratique les particules que nous avons considérées peuvent représenter par exemple des molécules. Dans ce cas  $u$  sera une concentration chimique,  $q$  un flux de molécules,  $f$



FIGURE 2 – Une barre élastique en équilibre. Gauche : représentation du problème. Droite : déformation d'un élément infinitésimal de matière. Le trait continu représente la configuration soumise à une charge  $f$ . Le trait discontinu représente la configuration au repos (sans  $f$ ).

un terme représentant leur apparition ou leur disparition (par des réactions chimiques) et  $k$  sera un coefficient déterminant la facilité avec laquelle les molécules se déplacent.

On peut aussi dire que les particules représentent de l'énergie thermique qui se propage à travers un matériau. Dans ce cas,  $u$  sera la température,  $q$  un flux thermique,  $f$  une source ou un puit de chaleur et  $k$  sera la conductivité thermique du matériau considéré.

Nous citons une dernière possibilité selon laquelle les particules sont des individus (humains ou animaux). Dans ce cas,  $u$  correspond à une densité de population,  $q$  à un flux de population,  $f$  représente les naissances et morts et  $k$  est un coefficient représentant la facilité avec laquelle la population peut se déplacer.

Nous présentons maintenant un autre problème physique faisant intervenir des équations elliptiques. Considérons un matériau soumis à des contraintes mécaniques. Par exemple, on représente sur la figure 2 une barre élastique en équilibre.

La barre dans son état initial est représentée en pointillés. Sous l'effet d'une force linéique  $f$ , cette barre s'allonge et atteint l'état d'équilibre représenté en trait continu. On note  $u(x)$  le déplacement de la matière qui a eu lieu en  $x$  entre la configuration au repos et la configuration soumise à la charge  $f$ .

On considère que la barre est à l'équilibre mécanique. On note  $q(x)$  la force qu'exerce la section de gauche sur la section de droite en  $x$ . En faisant un bilan de force comme représenté sur la partie droite de la figure 1, les forces s'exerçant sur une portion infinitésimale de barre sont la force  $q(x)$  à gauche, la force  $-q(x + \delta x)$  à droite et la force linéique  $f(x)\delta x$ . La barre étant à l'équilibre la somme de ces forces est nulle. On retrouve donc (5).

De plus, la force s'exerçant en  $x$  à travers la section de la barre est proportionnelle à l'élongation de la barre et s'oppose au mouvement imposé. Ceci est intuitif, pensez à un élastique si vous l'allongez il s'exerce une force qui tend à le faire revenir vers sa position initiale. De plus, plus l'élongation est importante, plus l'intensité de la force est grande. On

obtient donc la loi d'élasticité (6) où  $k$  est un coefficient de raideur : plus  $k$  est grand, plus la barre est raide (plus il faut forcer pour la déformer). En pratique, le coefficient de raideur dépend du matériau choisi et de la géométrie de la section de la barre.

Notons que dans (6), la dérivée en espace correspond bien à l'élongation de la barre en  $x$ . Pour s'en convaincre, on regardera la partie droite de la figure 2. Un élément de matière de longueur  $\delta x$  dans sa position de référence a pour longueur  $x + \delta x + u(x + \delta x) - u(x) - x$  sous charge  $f$ . La nouvelle longueur est donc de  $\delta x + u(x + \delta x) - u(x) \simeq \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \delta x$  et la dérivée partielle en  $x$  est donc bien une élongation par unité de longueur.

D'autres problèmes physiques peuvent être modélisés par des équations elliptiques. Nous citerons simplement l'électromagnétisme sans donner plus de détails. Nous verrons par la suite que, dans le cas instationnaire, les deux problèmes exposés ici correspondent à des équations de nature différente. Le premier est représenté par une équation parabolique en instationnaire, tandis que la deuxième est représenté par une équation hyperbolique.

Évoquons maintenant les conditions aux limites les plus classiques que l'on peut associer à ce problème. Tout d'abord, nous pouvons considérer la condition de Dirichlet  $u = g$  où  $g$  est une donnée du problème. Ceci revient à imposer la valeur de la solution  $u$  sur le bord du domaine. Par exemple, dans le cas de l'équation de la chaleur stationnaire, la condition de Dirichlet revient à considérer que le bord du domaine correspond à un élément à forte capacité thermique dont la température restera constante quoi qu'il arrive.

Une autre condition aux limites classique est la condition de Neumann  $q = g$  où  $g$  est une donnée. Ceci revient à imposer la valeur du flux  $q$  sur le bord du domaine. En général, la valeur  $g$  sera nulle. Par exemple, dans le cas du problème de la chaleur, ceci revient à considérer que le bord du domaine est adiabatique : quoi qu'il arrive aucun flux de chaleur ne traversera le bord du domaine (pensez par exemple à une bouteille isotherme).

Ces deux conditions aux limites peuvent éventuellement être utilisées simultanément en des points différents du bord (Dirichlet sur une partie de la frontière et Neumann sur le reste). On parle alors de conditions aux limites mixtes.

	Chaleur stationnaire	Barre élastique	Molécules
$u$	température	déplacement	concentration
$q = -k\nabla u$	flux de chaleur	force interne	déplacements de mol.
$k$	conduction thermique	raideur	diffusion
$f$	source	force externe	réactions chimiques
$u = g$	temp. constante	déplacement imposé	concentration imposée
$q = 0$	paroi adiabatique	frontière libre	frontière imperméable

TABLE 1 – Résumé des problèmes physiques abordés.

**Exercice 1.** On se place dans le cas d'un domaine bidimensionnel  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . On note  $x$  et  $y$  les deux variables d'espace. On suppose que  $k$  est constant : pour tout  $(x, y) \in \Omega$ ,  $k(x, y) = k_0 > 0$ . Montrer que l'équation (4) est elliptique.

**Remarque 2.** Dans la plupart des applications,  $k$  est une constante. Prenons par exemple  $k = 1$ . L'équation (4) devient  $\Delta u = f$ . On appelle cette équation équation de Laplace ou équation de Poisson. Pour simplifier la présentation, c'est cette équation que nous étudierons par la suite.

Pour finir cette section, nous illustrons le comportement de la solution de (3) en fonction de  $k$  (voir figure 3). Comme nous l'avons évoqué précédemment, une solution avec un  $k$  plus grand est plus "plate".



FIGURE 3 – Solution de l'équation elliptique 1D (3) pour différents  $k$  (pour  $f(x) = 1$ ).

## 1.2 Équation de transport

La deuxième équation que nous étudions est l'équation de transport (unidimensionnelle). Elle correspond à une quantité qui est transportée à vitesse constante dans une direction. Cela peut être par exemple un polluant transporté par une rivière. Dans cette section, nous nous intéressons au cas de tas de sable sur un tapis roulant se déplaçant à vitesse constante  $a$ .

Sur la figure 4, nous représentons des tas de sables qui se déplacent à vitesse constante  $a$  vers la droite. On note  $u(t, x)$  la hauteur du sable en  $x$  à l'instant  $t$ .



FIGURE 4 – Des tas de sable transportés sur un tapis roulant. La ligne discontinue représente les tas en  $t = 0s$  et la ligne continue en  $t = 1s$ .

Si l'on considère un temps infinitésimal  $\delta t$ , le sable aura avancé d'une distance  $\delta x = a\delta t$ . La hauteur en  $(t + \delta t, x + \delta x)$  sera la même qu'elle était en  $(t, x)$ , on traduit cela par  $u(t + \delta t, x + a\delta t) = u(t, x)$ . On obtient ainsi l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Ici,  $a$  correspond à la vitesse du transport. Si  $a$  est positif, le sable bouge vers la droite ; si  $a$  est négatif, le sable bouge vers la gauche ; plus  $a$  est grand en valeur absolue, plus le mouvement est rapide.

**Remarque 3.** *En se référant à la définition, cette équation n'est ni elliptique, ni parabolique, ni hyperbolique. Cependant, le comportement des solutions de cette équation est proche d'un comportement hyperbolique. Notons par ailleurs que l'équation (2) associée à l'équation de transport est une droite et les hyperboles ont des droites comme asymptotes.*

Pour finir la présentation de l'équation de transport, nous donnons des résultats numériques pour différentes valeurs de la vitesse de transport  $a$  (voir figure 5). Ces résultats illustrent bien le fait  $a$  est la vitesse à laquelle la solution se déplace.

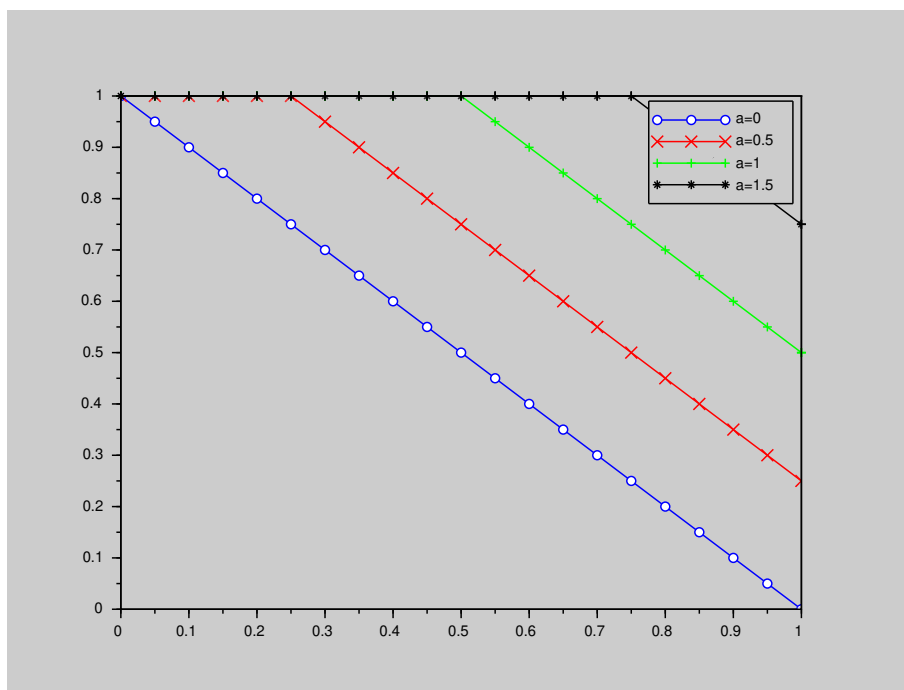


FIGURE 5 – Solution de l'équation de transport à  $t = 0.5$  pour différents  $a$ . La donnée initiale correspond à la solution pour  $a = 0$ .

### 1.3 Équation de la chaleur

On se place dans le cadre du premier problème que nous avons évoqué dans la section 1.1 (voir figure 1). Pour plus de simplicité, nous considérons que nous sommes dans le cas de la conduction thermique (bien que comme nous l'avons vu précédemment d'autres

problèmes comme le mouvement d'une population ou de molécules peuvent être considérés). La différence avec ce qui a été fait dans la section 1.1 est qu'ici les flux de chaleur ne sont pas nécessairement à l'équilibre. On permet donc à la température de changer au cours du temps.

Nous allons maintenant refaire le raisonnement de la section 1.1 avec cette fois-ci une température  $u(t, x)$  qui dépend du temps. Si l'on considère la partie droite de la figure 1, l'accumulation d'énergie en  $(t, x)$  est due au fait que les flux ne sont pas équilibrés ("ce qui entre n'est pas égal à ce qui sort"). Ainsi, s'il y a plus d'énergie qui entre dans le domaine infinitésimal qu'il n'y en a qui en sort, alors la température augmente. Nous traduisons cela par l'équation  $c(x)\delta x \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = f(t, x)\delta x + q(t, x) - q(t, x + \delta x)$ , ce qui donne

$$c(x) \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = f(t, x) - \frac{\partial q}{\partial x}(t, x). \quad (8)$$

où  $c(x)$  est la capacité thermique linéique du matériau,  $q(t, x)$  et  $f(t, x)$  sont respectivement le flux de chaleur et la source de chaleur en  $(t, x)$ . Comme précédemment, le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température (voir (6)). Pour simplifier la présentation, nous considérons que la capacité thermique  $c$  et la conduction thermique  $k$  sont des constantes (qui ne dépendent ni du temps, ni de l'espace). En combinant les équations (6) et (8), on obtient l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \tilde{f}, \quad (9)$$

où  $\nu = k/c > 0$  est la diffusion thermique.

Les conditions aux limites classiques sont les mêmes que celles évoquées pour le problème stationnaire (voir tableau 1).



FIGURE 6 – Solution de l'équation de la chaleur pour  $f(x) = -1$ . Gauche :  $\nu = 0.5$ . Milieu :  $\nu = 1$ . Droite :  $\nu = 2$ . Les courbes représentent la solution à  $t = 0$  (bleu),  $t = 0.05$  (rouge) et  $t = 0.1$  (noir).

Nous illustrons sur la figure 6 l'influence du paramètre  $\nu$ . Plus  $\nu$  est grand, plus la chaleur va se diffuser rapidement et plus la courbe va s'applatir rapidement.

**Exercice 2.** Prouver que l'équation (9) est une équation parabolique.



## 1.4 Équation des ondes

L'équation des ondes peut être obtenue en considérant un modèle mécanique comme celui de la figure 2 où cette fois-ci les forces ne sont pas nécessairement à l'équilibre et où les déplacements  $u(t, x)$  peuvent varier au cours du temps.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à une tranche de matière de longueur  $\delta x$  nous dit que l'accélération de la position de cette tranche ( $x + u(t, x)$ ) multipliée par sa masse est égale à la somme des forces qui agissent sur elle. Ainsi,  $\rho(x)\delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(t, x)\delta x + q(t, x) - q(t, x + \delta x)$ , ce qui nous donne l'équation

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) + \frac{\partial q}{\partial x}(t, x) = f(t, x), \quad (10)$$

où  $\rho(x)$  correspond à la masse de la barre par unité de longueur. Plus  $\rho$  est grand, plus la barre a d'inertie et plus elle accélère lentement. Notons à ce stade qu'il y a, dans cette équation, une dérivée seconde en temps à la place de la dérivée première qu'il y avait dans (8).

La force de compression à travers la barre est donnée par la loi d'élasticité (6). Pour simplifier la présentation, on considère que la raideur  $k$  et la masse linéique  $\rho$  sont constantes (ne dépendent ni de  $t$  ni de  $x$ ). En combinant (6) et (10) on obtient l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \tilde{f}, \quad (11)$$

où  $c > 0$  défini par  $c^2 = k/\rho$  correspond à la vitesse de propagation des ondes dans ce milieu.



FIGURE 7 – Solution de l'équation des ondes pour  $f = 0$  et  $v_0 = 0$ . Gauche :  $c = 0.2$ . Milieu :  $c = 0.5$ . Droite :  $c = 1$ . Les courbes représentent la solution à  $t = 0$  (bleu),  $t = 0.2$  (rouge) et  $t = 0.4$  (noir).

On illustre l'influence de  $c$  sur la figure 7. Nous voyons que nous avons une propagation de l'information dans les deux directions (les  $x$  positifs et les  $x$  négatifs). Plus  $c$  est grand, plus l'information se propage rapidement. Notons également que la solution pour  $c = 0.5$  et  $t = 0.4$  correspond à la solution pour  $c = 1.0$  et  $t = 0.2$ . On voit donc bien que  $c$  correspond à une vitesse de propagation de l'onde.

Nous avons évoqué le fait que l'équation des ondes pouvait représenter le déplacement d'une barre en compression. On peut aussi modéliser des problèmes comme la propagation du déplacement d'une corde ou la propagation d'une onde électromagnétique (on ne s'étendra pas davantage sur le sujet).

Rappelons enfin que les conditions aux limites classiques sont les mêmes que celles du cas stationnaire (voir tableau 1).

**Exercice 3.** *Prouver que l'équation (11) est hyperbolique.*

## 2 Équation de Poisson

On considère  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  avec  $d \in \{1, 2, 3\}$ . Nous simplifions le cadre évoqué précédemment en considérant  $k = 1$ . On s'intéresse donc au problème

$$\text{Trouver } u \in C^2(\Omega) \text{ telle que } \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (12)$$

### 2.1 Propriétés générales de l'équation

**Théorème 1** (Existence et unicité de la solution). *Si  $f \in C^0(\Omega)$ , alors il existe une unique solution  $u \in C^2(\Omega)$  au problème (12). De plus, pour  $\ell \in \mathbb{N}$ , si  $f \in C^\ell(\Omega)$ , alors  $u \in C^{\ell+2}(\Omega)$ .*

Dans ce théorème nous voyons l'effet régularisant de l'équation de Poisson : si le terme source est de classe  $C^\ell$  alors la solution du problème est de classe  $C^{\ell+2}$ . Les outils utilisés pour établir cette preuve sont présentés dans la section 2.2.

**Proposition 1** (Principe du maximum). *On se place dans le cadre du théorème 1. Si  $f \leq 0$ , alors  $u \leq 0$ . En particulier,  $\max_{x \in \Omega} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x) = 0$ . Si de plus il existe  $m \in \Omega$  tel que  $u(m) = 0$ , alors  $\forall x \in \Omega$ ,  $u(x) = 0$  (principe du maximum fort).*

**Définition 1** (Fonctions harmoniques). *Si  $u \in C^2(\Omega)$  et  $-\Delta u = 0$  dans  $\Omega$ , on dit que  $u$  est une fonction harmonique.*

Il existe des liens entre fonctions harmoniques et fonctions holomorphes. En effet, si  $\varphi$  est une fonction holomorphe, alors  $\Re(\varphi)$  et  $\Im(\varphi)$  (parties réelle et imaginaire) sont des fonctions harmoniques.

D'autres conditions aux limites peuvent être considérées. Nous pouvons par exemple considérer des conditions de Dirichlet non homogènes.

$$\text{Trouver } u \in C^2(\Omega) \text{ telle que } \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $g \in C^2(\partial\Omega)$  est une donnée du problème. Pour résoudre ce problème, on considère un relèvement de  $g$ , c'est-à-dire une fonction  $\tilde{g} \in C^2(\Omega)$  telle que  $\tilde{g} = g$  sur  $\partial\Omega$ , et on cherche la solution  $u$  sous la forme  $u = \tilde{u} + \tilde{g}$ . La fonction  $\tilde{u}$  est alors solution du problème homogène

$$\text{Trouver } \tilde{u} \in C^2(\Omega) \text{ telle que } \begin{cases} -\Delta \tilde{u} = f + \Delta \tilde{g} & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Moyennant l'existence du relèvement  $\tilde{g}$  résoudre le problème non homogène revient à résoudre un problème homogène équivalent.

Nous pouvons également considérer des conditions de Neumann. Le problème de Poisson devient alors

$$\text{Trouver } u \in C^2(\Omega) \text{ telle que } \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \nabla u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} u \, dx = 0, \end{cases} \quad (13)$$

où  $n$  désigne la normale sortante au domaine.

Dans le problème (13), la condition  $\int_{\Omega} u \, dx = 0$  a été ajoutée pour garantir l'unicité de la solution. En effet, si on enlevait cette condition, pour  $u$  solution de (13),  $u + c$  serait aussi solution pour tout  $c \in \mathbb{R}$ . Des alternatives existent à la condition  $\int_{\Omega} u \, dx = 0$ , l'essentiel est d'éliminer l'infinité de solutions générées en ajoutant  $c \in \mathbb{R}$ .

Terminons cette section en relevant le fait que l'existence d'une solution au problème (13) requiert la condition  $\int_{\Omega} f \, dx = 0$ .

**Exercice 4.** *Prouver que s'il existe une solution  $u$  au problème (13), alors  $f$  vérifie  $\int_{\Omega} f \, dx = 0$ .*

## 2.2 Formulation variationnelle, théorème de Lax–Milgram

Le but de cette section est de présenter les outils utilisés pour prouver le théorème 1. Nous utilisons notamment le théorème de Lax–Milgram.

**Théorème 2** (Lax–Milgram). *On fait les hypothèses suivantes.*

- Soit  $V$  un espace de Hilbert.
- Soit  $\ell$  une forme linéaire continue sur  $V$  (il existe  $C_{\ell} > 0$  tel que  $\forall v \in V, |\ell(v)| \leq C_{\ell} \|v\|_V$ ).
- Soit  $a$  une forme bilinéaire continue sur  $V$  (il existe  $C_a > 0$  tel que  $\forall v, w \in V, |a(v, w)| \leq C_a \|v\|_V \|w\|_V$ ).
- On suppose de plus que  $a$  est coercive : il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$ .

*Sous ces hypothèses le problème suivant est bien posé :*

$$\text{Trouver } u \in V, \text{ tel que } \forall v \in V, a(u, v) = \ell(v). \quad (14)$$

*Ceci signifie que le problème (14) admet une unique solution  $u \in V$  et que celle-ci vérifie  $\|u\|_V \leq \frac{C_{\ell}}{\alpha}$ .*

Pour utiliser ce théorème, écrivons le problème (12) sous sa forme variationnelle. On introduit l'espace de Sobolev

$$H_0^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) \mid \nabla v \in L^2(\Omega) \text{ et } v|_{\partial\Omega} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \quad (15)$$

où  $\nabla v$  est défini au sens des distributions et  $v|_{\partial\Omega}$  est la trace de  $v$  sur le bord du domaine.

Si  $u$  est une solution de (12), alors pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$  on peut écrire

$$\int_{\Omega} -\Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

En intégrant par parties on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n) v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Puisque  $v|_{\partial\Omega} = 0$ , le deuxième terme de cette expression est nul. Nous avons donc établi la proposition suivante.

**Proposition 2.** *Toute solution du problème (12) est solution du problème*

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega), \text{ tel que } \forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (16)$$

**Proposition 3.** *Le problème (16) est bien posé.*

*Démonstration.* Le problème (16) correspond au problème (14) avec  $V = H_0^1(\Omega)$ ,  $\forall v, w \in H_0^1(\Omega)$ ,  $a(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx$  et  $\ell(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$ . Nous allons montrer que toutes les hypothèses du théorème de Lax–Milgram sont vérifiées. On admet le fait que  $H_0^1(\Omega)$  équipé de la norme  $\|v\|_{H^1(\Omega)} := (\int_{\Omega} v^2 + \nabla v \cdot \nabla v \, dx)^{1/2}$  est un espace de Hilbert (se reporter à un cours sur les distributions). D’après l’inégalité de Cauchy–Schwarz, on a  $|\ell(v)| \leq (\int_{\Omega} f^2 \, dx)^{1/2} (\int_{\Omega} v^2 \, dx)^{1/2} \leq (\int_{\Omega} f^2 \, dx)^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)}$ . La forme linéaire  $\ell$  est donc continue.

De la même façon, l’inégalité de Cauchy–Schwarz permet de prouver que la forme bilinéaire  $a$  est continue. Pour finir, nous utilisons l’inégalité de Poincaré : il existe  $c > 0$  tel que  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\int_{\Omega} v^2 \, dx \leq c \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx$ . Avec cette inégalité, on peut prouver que  $a$  est coercive. Toutes les hypothèses du théorème de Lax–Milgram sont réunies, le problème (16) est donc bien posé.  $\square$

**Remarque 4.** *Les résultats de cette section prouvent l’unicité de la solution de (12). On a également prouvé l’existence d’une solution à (16). Pour prouver le théorème 1, il faut montrer que si  $f \in C^\ell(\Omega)$  alors la solution de (16) est dans  $C^{\ell+2}(\Omega)$  et est solution de (12). Cependant cette preuve est très délicate et nous ne la développerons pas ici.*

**Remarque 5.** *On dit qu’une solution de (12) est une solution forte du problème de Poisson au sens où les dérivées sont des dérivées usuelles. On dit qu’une solution de (16) est une solution faible du problème de Poisson au sens où les dérivées sont des dérivées faibles (au sens des distributions). Nous avons montré qu’une solution forte est une solution faible. La réciproque est plus délicate et nécessite des hypothèses sur la régularité de  $f$ .*

**Exercice 5.** *On note  $H^1 = \{v \in L^2(\Omega) \mid \nabla u \in L^2(\Omega)\}$  et  $H_\bullet^1 = \{v \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} v \, dx = 0\}$ . Prouver que toute solution du problème (13) est solution de la formulation variationnelle*

$$\text{Trouver } u \in H_\bullet^1(\Omega), \text{ tel que } \forall v \in H_\bullet^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (17)$$

*Prouver de plus que le problème (17) est bien posé.*

*Pour cela, on supposera que  $H_\bullet^1$  équipé de la norme  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  introduite précédemment est un espace de Hilbert. On pourra également utiliser l’inégalité de Poincaré–Wirtinger : il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \left( v - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v(x') \, dx' \right)^2 \, dx \leq C \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx.$$



FIGURE 8 – Représentation de la discrétisation de l'intervalle  $(0, 1)$ .

## 2.3 Discrétisation par la méthode des différences finies

Le but de la méthode des différences finies est d'approcher la solution d'une EDO (équation aux dérivées ordinaires) ou EDP (équation aux dérivées partielles) par des valeurs censées représenter cette fonction en certains points. Dans toutes les discrétisations abordées dans ce cours, nous ne considérerons que le cas de problèmes à une dimension en espace (les problèmes instationnaires auront une deuxième dimension correspondant au temps).

Par exemple, intéressons nous au problème (12) avec  $\Omega = (0, 1)$ . Notre problème est donc

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} = f \text{ dans } (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Nous discrétisons l'intervalle  $(0, 1)$  en  $M > 0$  sous-intervalles. On définit donc les points  $x_j = jh$  ( $0 \leq j \leq M$ ) où  $h = 1/M$ . On a bien  $x_0 = 0$  et  $x_M = 1$  (voir figure 8).

Étant donné que nous ne disposons que de valeurs en certains points, on ne peut pas définir de dérivées au sens usuel. On utilise donc des taux d'accroissement (rappelons qu'une dérivée est la limite d'un taux d'accroissement). Par exemple, on peut montrer que  $\frac{d^2u}{dx^2}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h))}{h^2}$ . Avec les notations introduites précédemment, cela signifie que, pour  $h$  suffisamment petit,

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x_j) \simeq \frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1}))}{h^2}. \quad (19)$$

La méthode des différences finies consiste donc à définir une suite  $(u_j)_{0 \leq j \leq M}$  qui reprenne les éléments du problème (18). En particulier, il faut remplacer les dérivées continues par des taux d'accroissement. Il existe plusieurs façons de définir la suite  $(u_j)_{0 \leq j \leq M}$  et toutes n'ont pas les mêmes propriétés. La propriété la plus importante est la convergence : on veut que  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \max_{0 \leq j \leq M} |u(x_j) - u_j| = 0$ . Nous aborderons plus en détails ces aspects dans la section 3.3.

Nous proposons maintenant de discrétiser le problème (18) en utilisant (19). Nous construisons donc une suite  $(u_j)_{0 \leq j \leq M}$  vérifiant

$$\begin{cases} \forall 1 \leq j \leq M-1, -\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = f(x_j), \\ u_0 = u_M = 0. \end{cases} \quad (20)$$

**Proposition 4.** *La relation (20) définit une unique suite  $(u_j)_{0 \leq j \leq M}$  dont les valeurs peuvent*

être déterminées en résolvant le système linéaire  $AU = F$ , avec

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{M-1} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{M-1}) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

*Démonstration.* La relation (20) est équivalente au système linéaire  $AU = F$ . Pour prouver cela, on écrit les équations discrètes

$$\begin{aligned} \frac{-u_0 + 2u_1 - u_2}{h^2} &= f(x_1), \\ \frac{-u_1 + 2u_2 - u_3}{h^2} &= f(x_2), \\ \frac{-u_2 + 2u_3 - u_4}{h^2} &= f(x_3), \\ &\vdots \\ \frac{-u_{M-2} + 2u_{M-1} - u_M}{h^2} &= f(x_{M-1}). \end{aligned}$$

En prenant en compte  $u_0 = u_M = 0$ , on obtient bien  $AU = F$ . La réciproque se prouve de manière similaire.

Maintenant, le fait que ce système admet une unique solution vient de l'inversibilité de la matrice  $A$  qui est une conséquence de la proposition 5.  $\square$

**Remarque 6.** La matrice  $A$  doit absolument être connue par cœur. En effet, ceci est exigible et le jury du concours se plaint dans ses rapports que beaucoup trop de candidats ne connaissent pas cette matrice.

**Proposition 5.** La matrice  $A$  est symétrique définie positive.

**Exercice 6.** Prouver la proposition 5.

**Proposition 6** (Convergence). Supposons que la solution  $u$  du problème (18) soit dans  $C^4(0, 1)$ . Alors il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $M \geq 2$ , on a

$$\max_{0 \leq j \leq M} |u(x_j) - u_j| \leq Ch^2,$$

avec  $h = 1/M$ .

*Démonstration.* Étant donné que  $u \in C^4(0, 1)$ , on peut utiliser la formule de Taylor–Young

$$\begin{aligned} u(x_{j+1}) &= u(x_j) + hu'(x_j) + \frac{h^2}{2}u^{(2)}(x_j) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_j) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_j) + o(h^4), \\ u(x_{j-1}) &= u(x_j) - hu'(x_j) + \frac{h^2}{2}u^{(2)}(x_j) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_j) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_j) + o(h^4). \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\frac{-u(x_{j+1}) + 2u(x_j) - u(x_{j-1}))}{h^2} = -u^{(2)}(x_j) - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x_j) + o(h^2).$$

On a de plus

$$\frac{-u_{j+1} + 2u_j - u_{j-1}}{h^2} = f(x_j) = -u^{(2)}(x_j),$$

et donc

$$\frac{-\delta_{j+1} + 2\delta_j - \delta_{j-1}}{h^2} = \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x_j) + o(h^2),$$

où  $\delta_j = u_j - u(x_j)$ . En notant  $\underline{\delta}$  le vecteur des  $\delta_j$ , on a  $\underline{\delta} = A^{-1}\underline{\epsilon}$  avec  $(\epsilon)_j = O(h^2)$ . En supposant que  $\sup_{X \in \mathbb{R}^{M-1} \setminus \{0\}} \frac{\max_j |(A^{-1}X)_j|}{\max_j |X_j|}$  est borné quand  $h$  tend vers 0 (on ne le montre pas ici), on obtient le résultat attendu.  $\square$

Le résultat précédent signifie que pour  $h$  suffisamment petit on s'attend à ce que l'erreur commise par le schéma numérique décroisse comme le carré de  $h$ . On dit que le schéma est d'ordre 2, nous étudierons plus précisément cette notion plus loin dans le cours.

Cette notion d'ordre de convergence peut-être illustrée en représentant l'erreur commise par le schéma  $\varepsilon = \max_{0 \leq j \leq M} |u(x_j) - u_j|$  en fonction de  $h$  en utilisant une échelle logarithmique pour les axes des abscisses et des ordonnées. Par exemple, considérons  $f(x) = x^2$ , la solution exacte associée est  $u(x) = \frac{x}{12}(1 - x^3)$ . L'erreur du schéma commise sur ce cas test est représentée sur la figure 9. On voit que l'on obtient une droite de pente 2. Ceci est en accord avec la proposition 6 : si l'erreur est  $\varepsilon = Ch^2$  alors  $\log(\varepsilon) = 2 \log(h) + \log(C)$ .

**Exercice 7.** Coder le schéma décrit précédemment et retrouver les résultats de la figure 9 (les différents points ont été obtenus pour  $M = 10, 20, 50, 100$  et  $200$ ).

**Exercice 8** (Coefficient de raideur). On peut décider d'ajouter un coefficient de raideur  $k > 0$  constant. La nouvelle matrice devient alors  $kA$  où  $A$  est la matrice précédente. La figure 3 a été obtenue pour  $f(x) = 1$  et  $M = 10$  ( $h = 1/10$ ). Coder le schéma proposé et retrouver les résultats de la figure 3. Calculer la solution exacte. En déduire l'erreur que commet le schéma. Que remarquez-vous ?

**Exercice 9** (Conditions aux limites de Dirichlet non homogènes). Adapter le schéma numérique précédent pour approcher le problème

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} = f \text{ dans } (0, 1), \\ u(0) = \alpha, \\ u(1) = \beta, \end{cases}$$

où  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Donner le système linéaire à résoudre.

**Exercice 10** (Condition aux limites de Neumann). On considère le problème de Poisson avec des conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} = f \text{ dans } (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \\ \int_0^1 u(x) dx = 0. \end{cases}$$



FIGURE 9 – Erreur en fonction de  $h$  (échelle logarithmique) pour  $f(x) = x^2$ .

1. On décide d'adapter la démarche précédente en considérant le schéma

$$\begin{cases} \forall 1 \leq j \leq M-1, -\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = f(x_j), \\ \frac{u_1 - u_0}{h} = \frac{u_M - u_{M-1}}{h} = 0. \end{cases}$$

Calculer la matrice associée. Montrer qu'elle est positive mais qu'elle n'est pas inversible. Commenter.

2. On ajoute une condition de moyenne nulle, le schéma devient

$$\begin{cases} \forall 1 \leq j \leq M-1, -\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = f(x_j), \\ \frac{u_1 - u_0}{h} = \frac{u_M - u_{M-1}}{h} = 0, \\ \sum_{j=1}^{M-1} u_j = 0. \end{cases}$$

On impose la condition de moyenne nulle par un multiplicateur de Lagrange  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Le problème devient  $\tilde{A}\tilde{U} = \tilde{F}$  avec

$$\tilde{A} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & h^2 \\ -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \\ h^2 & \dots & \dots & \dots & h^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{M-1} \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \tilde{F} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{M-1}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice  $\tilde{A}$  est inversible.



3. Coder ce schéma et le tester avec  $f(x) = 1$ . Que se passe-t-il ? Est-ce un comportement normal ? D'après vous, que représente  $\alpha$  ?
4. Essayons maintenant

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0, 0.5), \\ 0 & \text{si } x = 0.5, \\ -1 & \text{si } x \in (0.5, 1). \end{cases}$$

Calculer la solution exacte à ce problème. Déterminer numériquement l'ordre de convergence du schéma. Est-ce en contradiction avec la proposition 6 ?

5. On pourra également reprendre la question précédente avec  $f(x) = x - \frac{1}{2}$ .

### 3 Équation de transport

Nous étudions ici l'équation de transport dans un espace à une dimension. Le problème dépend donc d'une variable d'espace  $x \in [0, 1]$  et d'une variable de temps  $t \in [0, T]$  avec  $T > 0$ . Nous considérons le problème

$$\text{Trouver } u \in C^1([0, T] \times [0, 1]) \text{ telle que } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{dans } (0, T) \times (0, 1), \\ \forall t \in (0, T), u(t, 0) = \alpha(t), \\ \forall x \in (0, 1), u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (22)$$

où  $a > 0$  correspond à la vitesse de transport de l'équation,  $\alpha(t)$  est la donnée de Dirichlet à gauche et  $u_0$  est la donnée initiale. Dans l'énoncé de notre problème, nous avons noté  $C^1([0, T] \times [0, 1])$  l'ensemble des fonctions  $C^1$  de  $[0, T] \times [0, 1]$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ .

#### 3.1 Propriétés générales

Le problème (22) admet une unique solution  $u$ . Cette solution est obtenue en "déplaçant" la donnée initiale vers la droite et en "faisant entrer" la donnée de Dirichlet dans le domaine. De manière plus rigoureuse, nous avons le théorème suivant.

**Théorème 3.** *Supposons que  $a > 0$ ,  $u_0 \in C^1([0, 1])$  et  $\alpha \in C^1([0, T])$ . Supposons de plus les conditions de compatibilité  $u_0(0) = \alpha(0)$  et  $\alpha'(0) + au_0'(0) = 0$ . Le problème (22) admet alors une unique solution donnée par*

$$u(t, x) = \begin{cases} u_0(x - at) & \text{si } x \geq at, \\ \alpha(t - x/a) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (23)$$

**Remarque 7.** *On n'a besoin d'une donnée de Dirichlet que d'un seul côté du domaine. Puisque l'on a choisi  $a > 0$ , il faut fixer la donnée de Dirichlet à gauche. On aurait aussi pu prendre  $a < 0$  et utiliser la condition de Dirichlet à droite  $u(t, 1) = \alpha(t)$ .*

Nous allons maintenant évoquer une autre propriété intéressante de l'équation de transport : la réversibilité de l'équation. Cela signifie qu'en utilisant la solution au temps final et éventuellement d'autres données (ici la solution qui sort du domaine à droite), on peut reconstituer la solution en tout temps  $t \in [0, T]$ . Il s'agit en fait d'étudier un problème où le temps s'écoule "en sens inverse".

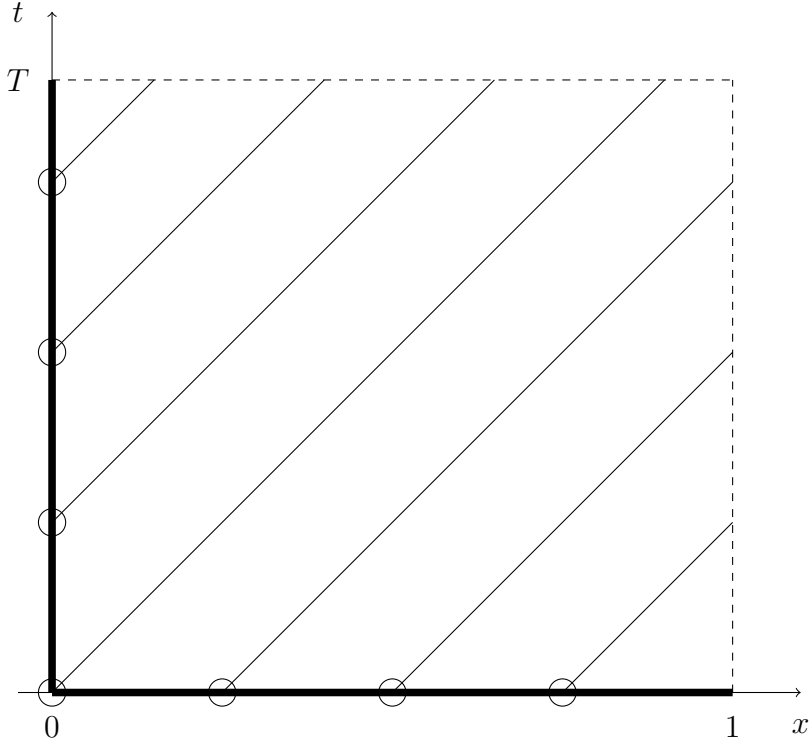


FIGURE 10 – Les droites caractéristiques de l'équation de transport ( $a = 1$  et  $T = 0.9$ ).

**Proposition 7** (Réversibilité de l'équation de transport). *Soit  $u$  une solution du problème (22). Le problème*

$$\text{Trouver } \tilde{u} \in C^1([0, T] \times [0, 1]) \text{ telle que } \begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - a \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 0 & \text{dans } (0, T) \times (0, 1), \\ \forall t \in (0, T), & \tilde{u}(t, 1) = u(T - t, 1), \\ \forall x \in (0, 1), & \tilde{u}(0, x) = u(T, x), \end{cases} \quad (24)$$

admet une unique solution définie par  $\forall t \in [0, T], \forall x \in [0, 1], \tilde{u}(t, x) = u(T - t, x)$ .

Cette propriété signifie que l'information est conservée au cours du temps : le comportement de l'équation ne dégrade pas cette information.

### 3.2 Méthode des caractéristiques

La méthode des caractéristiques consiste à montrer que la solution se conserve sur certaines courbes que l'on appelle trajectoires caractéristiques. Dans le cas monodimensionnel avec  $a$  constant, ces courbes sont des droites. On parlera donc de droites caractéristiques. Cependant, dans le cas où plusieurs dimensions d'espace sont considérées, ces courbes peuvent être plus complexes (voir la section 6.1).

Nous pouvons montrer que dans le cas considéré dans cette section, la solution se conserve sur les droites d'équation  $x = at + b$  avec  $a$  la vitesse de transport dans (22) et  $b \in \mathbb{R}$ . Ces droites sont donc les droites caractéristiques de notre problème, nous les représentons sur la figure 10. Le résultat de conservation est énoncé dans la proposition suivante.

**Proposition 8.** Soit  $u \in C^1([0, T] \times [0, 1])$  vérifiant l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ dans } (0, T) \times (0, 1),$$

avec  $a \in \mathbb{R}$ . Pour tous  $t, s \in [0, T]$  et  $x \in [0, 1]$  tels que  $t - s \in [0, T]$  et  $x - as \in [0, 1]$ , on a

$$u(t, x) = u(t - s, x - as).$$

**Exercice 11.** Prouver la proposition 8.

Notons que la proposition 8 est valable pour tout  $a \in \mathbb{R}$  et pour n'importe quelles conditions aux limites. Nous allons maintenant prouver le théorème 3.

*Preuve du théorème 3.* Commençons par montrer que la fonction  $u$  donnée dans (23) est solution du problème (22). On note  $u^+(t, x) = u_0(x - at)$  et  $u^-(t, x) = \alpha(t - x/a)$ .

Par construction, les fonctions  $u^+$  et  $u^-$  sont  $C^1$  sur leur domaine de définition. Nous cherchons à les raccorder le long de la droite  $x = at$ . Soit  $(t_0, x_0) \in [0, T] \times [0, 1]$  qui vérifient  $x_0 = at_0$ . On a  $\lim_{(t,x) \rightarrow (t_0,x_0)} u^+(t, x) = \lim_{s \rightarrow 0^+} u_0(s) = u_0(0) = \alpha(0) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \alpha(s) = \lim_{(t,x) \rightarrow (t_0,x_0)} u^-(t, x)$ . La fonction  $u$  est donc continue. De plus, par un raisonnement similaire, la condition  $\alpha'(0) = -au'_0(0)$  implique que  $u$  est dans  $C^1([0, T] \times [0, 1])$ . De plus,  $u$  vérifie la condition initiale  $u(0, x) = u_0(x)$  ainsi que la condition de Dirichlet  $u(t, 0) = \alpha(t)$  et elle vérifie l'équation de transport. Il s'agit donc bien d'une solution de (22).

Supposons maintenant que  $v \in C^1([0, T] \times [0, 1])$  est solution de (22). Si  $x \leq at$ , on applique la proposition 8 avec  $s = x/a$ , avec la condition de Dirichlet on obtient  $u(t, x) = \alpha(t - x/a)$ . Si  $x \geq at$ , on applique la proposition 8 avec  $s = t$ , avec la condition initiale on obtient  $u(t, x) = u_0(x - at)$ . Nous avons donc prouvé l'unicité de la solution.  $\square$

Nous voyons donc que la valeur de la solution en  $(t, x)$  est à aller chercher sur le bord du domaine espace-temps. C'est-à-dire, en fonction de la valeur de  $t$  et  $x$ , soit sur la condition initiale, soit sur la donnée de Dirichlet (l'endroit où récupérer l'information est représenté sur la figure 10 par un cercle).

**Remarque 8.** Avec un raisonnement similaire, on peut montrer que si  $a = 0$ , il n'y a pas besoin de condition de Dirichlet et que si  $a < 0$ , il faut mettre la condition de Dirichlet sur la droite du domaine (en  $x = 1$ ). Le même résultat d'existence et d'unicité s'applique alors.

On peut utiliser la méthode des caractéristiques pour prouver d'autres résultats comme par exemple ceux énoncés dans les exercices suivants.

**Exercice 12.** Prouver la proposition 7.

**Exercice 13** (Conditions aux limites périodiques). Soit  $u_0 \in C^1([0, 1])$  qui vérifie  $u_0(0) = u_0(1)$  et  $u'_0(0) = u'_0(1)$ . Prouver que l'équation de transport avec des conditions aux limites périodiques

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ dans } (0, T) \times (0, 1), \\ \forall t \in (0, T), \quad u(t, 0) = u(t, 1), \\ \forall x \in (0, 1), \quad u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (25)$$

avec  $a \in \mathbb{R}$  admet pour unique solution  $u(t, x) = u_0(f(x - at))$ , où  $f(x)$  est la partie fractionnaire de  $x$ , c'est-à-dire  $x = E(x) + f(x)$  avec  $E(x) \in \mathbb{Z}$  et  $0 \leq f(x) < 1$ .

**Exercice 14** (Prise en compte d'un terme source). *Montrer que l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x) & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}, \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

avec  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f \in C^0([0, T] \times \mathbb{R})$  et  $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ , est donnée par  $u(t, x) = u_0(x - at) + \int_0^t f(s, x + a(s - t)) \, ds$ .

*NB : Notez que l'on a posé ce problème sur  $\mathbb{R}$  entier pour ne pas avoir à se soucier des conditions aux limites.*

### 3.3 Discrétisation par les différences finies et analyse numérique

Nous cherchons maintenant à discrétiser le problème (22) par la méthode des différences finies. Dans la section 2.3, pour approcher l'équation de Poisson, nous avons discrétisé l'espace  $(0, 1)$  et nous avons approché la solution  $u(x)$  par une suite de terme général  $u_j$ .

Dans le cas présent, la solution dépend de deux variables  $t$  et  $x$ , il faut donc discrétiser ces deux dimensions. On découpe l'intervalle de temps  $[0, T]$  en  $N$  sous-intervalles  $[t_n, t_{n+1}]$  avec pour tout  $0 \leq n \leq N$ ,  $t_n = nh_t$  et  $h_t = T/N$ . De même, on découpe l'intervalle d'espace  $[0, 1]$  en  $M$  sous-intervalles  $[x_j, x_{j+1}]$  avec pour tout  $0 \leq j \leq M$ ,  $x_j = jh_x$  et  $h_x = 1/M$ . De plus, nous allons approcher la fonction  $u(t, x)$  par une suite  $(u_j^n)_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 0 \leq j \leq M}}$ . Ici, l'indice  $j$  donne la position en espace et l'exposant  $n$  donne le temps considéré. Ainsi, on cherche à calculer  $u_j^n$  de manière à ce que ce soit une approximation de  $u(t_n, x_j)$ .

#### 3.3.1 Motivation de l'analyse numérique

Comme nous l'avons vu précédemment, lorsque l'on considère l'équation de transport avec une condition de Dirichlet, l'information de la donnée initiale sort progressivement du domaine en étant remplacée par la donnée de Dirichlet. On pourrait vouloir s'intéresser au traitement sur le temps long de l'information issue de la donnée initiale. Pour cela, on peut essayer de suivre le déplacement de cette donnée initiale dans un domaine infini en considérant des conditions périodiques. Dans cette section, on s'intéresse au problème (25). Avec ces conditions frontières, l'information qui sort en  $x = 1$  réentre immédiatement en  $x = 0$ . On peut donc la suivre au cours de sa propagation dans le domaine et observer la qualité de l'approximation que nous avons faite. Nous allons donc comparer nos approximations numériques avec la solution exacte donnée par  $u(t, x) = u_0(f(x - at))$  (voir exercice 13).

Nous proposons maintenant deux discrétisations de l'équation (25). La méthode consiste à approcher les dérivées partielles (en temps et en espace) par des taux d'accroissement. Nous comparons le comportement de deux discrétisations différentes.

Nous proposons tout d'abord d'approcher la dérivée en temps par une approximation décentrée aval et la dérivée en espace par une approximation centrée comme suit

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) \simeq \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{h_t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) \simeq \frac{u(t_n, x_{j+1}) - u(t_n, x_{j-1})}{2h_x}.$$

On obtient le schéma numérique

$$\begin{cases} \forall 0 \leq j \leq M, u_j^0 = u_0(x_j), \\ \forall 1 \leq n \leq N, u_0^n = u_M^n, \\ \forall 1 \leq n \leq N, \forall 0 \leq j \leq M, u_j^n = u_j^{n-1} - \frac{ah_t}{2h_x}(u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}), \end{cases} \quad (26)$$

où, pour simplifier l'écriture, nous avons introduit  $u_{M+1}^n = u_1^n$  et  $u_{-1}^n = u_{M-1}^n$  (rappelons que  $u_M^n = u_0^n$ ).

Nous nous proposons également d'approcher les dérivées en temps et les dérivées en espace respectivement par des approximations décentrées aval et amont comme suit

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) \simeq \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{h_t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) \simeq \frac{u(t_n, x_j) - u(t_n, x_{j-1})}{h_x}. \quad (27)$$

On obtient le schéma numérique

$$\begin{cases} \forall 0 \leq j \leq M, u_j^0 = u_0(x_j), \\ \forall 1 \leq n \leq N, u_0^n = u_M^n, \\ \forall 1 \leq n \leq N, \forall 0 \leq j \leq M, u_j^n = u_j^{n-1} - \frac{ah_t}{h_x}(u_j^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}), \end{cases} \quad (28)$$

où, pour simplifier l'écriture, nous avons introduit  $u_{-1}^n = u_{M-1}^n$ .

Nous reportons sur la figure 11 les résultats numériques obtenus à partir de ces deux schémas. Lorsque l'on raffine le maillage (quand on augmente  $N$  et  $M$ ), la solution obtenue par le schéma décentré (28) tend vers la solution exacte tandis que la solution obtenue par le schéma centré (26) se dégrade de plus en plus. La solution obtenue par le schéma centré semble diverger quand  $N, M \rightarrow +\infty$ .

Il va de soi que le schéma décentré a un comportement tout à fait acceptable tandis que le schéma centré est totalement inutilisable. Il ne suffit donc pas de remplacer les dérivées partielles de l'EDP par des taux d'accroissement pour obtenir un bon schéma numérique. Pour être sûr que le schéma que l'on conçoit a un bon comportement, il faut vérifier certaines propriétés que nous allons aborder dans la section suivante.

**Exercice 15.** La figure 11 a été obtenue pour  $a = 1$ ,  $T = 0.5$ ,  $u_0(x) = x^2(1 - x^2)$  et  $(N, M) = (15, 20)$ ,  $(30, 40)$ ,  $(60, 80)$  et  $(120, 160)$ . Dans ces conditions la solution exacte est  $u(t, x) = u_0(f(x - at))$  (voir exercice 13). Coder les schémas (26) et (28) et retrouver la figure 11. On pourra aussi explorer d'autres valeurs de  $(N, M)$ .

### 3.3.2 Analyse numérique : définitions et théorèmes

Nous définissons maintenant des notions que nous utilisons ensuite pour analyser les deux schémas introduits précédemment. Pour cela, représentons la suite  $(u_j^n)_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 0 \leq j \leq M}}$  par un vecteur  $U^n$  tel que  $u_j^n$  soit égal à la  $j$ -ème coordonnée du vecteur  $U^n$  généré par récurrence comme suit :

$$U^0 = U_0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad U^{n+1} = AU^n + h_t F^n, \quad (29)$$

où  $U_0$  est donné par  $(U_0)_j = u(0, x_j)$ ,  $A$  est une matrice et  $F^n$  est un vecteur. Afin de simplifier notre propos, nous considérons que le système à inverser a  $M$  inconnues que l'on



FIGURE 11 – Équation de transport avec conditions périodiques : solution exacte (à l’instant final) et solutions (à l’instant final) obtenues par les schémas décentré et centré pour  $T = 0.5$ ,  $a = 1$  et  $(N, M) = (15, 20), (30, 40), (60, 80)$  et  $(120, 160)$ .

numéroté de 1 à  $M$ . Ainsi, pour tout  $0 \leq n \leq N$ ,  $U^n \in \mathbb{R}^M$  avec  $\forall 1 \leq j \leq M$ ,  $(U^n)_j = u_j^n$  et de même  $A \in \mathbb{R}^{M \times M}$  et  $F^n \in \mathbb{R}^M$ . La valeur de  $u_0^n$  n’est pas considérée comme inconnue du problème car elle est donnée par une condition limite (Dirichlet ou périodique). Si le système dispose d’un nombre différent d’inconnues, on pourra aisément adapter notre propos.

**Remarque 9.** Dans le cas présent, nous considérons une suite dont la formule de récurrence ne nécessite que le pas de temps précédent (schéma à un pas de temps). En pratique, certains schémas nécessitent plusieurs pas de temps précédents. Le schéma (29) ainsi que les notions que nous abordons dans cette section peuvent être adaptés à ce cas de figure. Nous verrons ceci plus loin dans ce cours.

Définissons maintenant un certain nombre de notions utiles pour étudier le comportement du schéma (29).

**Définition 2** (Stabilité). Soit  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  tel que  $(0, 0) \in \overline{\mathcal{S}}$ . On dit que le schéma numérique (29) est stable sous la condition  $\mathcal{S}$  s’il existe  $C_1, C_2 > 0$  qui ne dépendent que de  $T$  tels que  $\forall (h_x, h_t) \in \mathcal{S}$ ,  $\forall U_0 \in \mathbb{R}^M$ ,  $\forall (F^n)_{0 \leq n \leq N} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times M}$ , on a

$$\max_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 1 \leq j \leq M}} |u_j^n| \leq C_1 \max_{1 \leq j \leq M} |(U_0)_j| + C_2 \max_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 1 \leq j \leq M}} |F_j^n|, \quad (30)$$

où  $u_j^n = (U^n)_j$  avec  $(U^n)$  l'unique suite vérifiant (29).

On dit également que le schéma (29) est inconditionnellement stable si la définition précédente s'applique avec  $\mathcal{S} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ .

**Définition 3** (Erreur de troncature). *L'erreur de troncature (ou erreur de consistance) du schéma (29) au temps  $t_n$  est un vecteur  $\varepsilon^n \in \mathbb{R}^M$  ( $1 \leq n \leq N$ ) défini par*

$$\varepsilon^{n+1} := \tilde{u}^{n+1} - A\tilde{u}^n - h_t F^n, \quad (31)$$

où  $\tilde{u}^n \in \mathbb{R}^M$  est défini par  $(\tilde{u}^n)_j = u(t_n, x_j)$  avec  $u$  la solution du problème exact associé à (29).

**Définition 4** (Consistance). *On dit que le schéma numérique (29) est consistant si pour toute solution régulière  $u$  du problème exact on a*

$$\lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ M \rightarrow +\infty}} \max_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 1 \leq j \leq M}} \frac{|\varepsilon_j^n|}{h_t} = 0, \quad (32)$$

où  $\varepsilon_j^n = (\varepsilon^n)_j$  est l'erreur de troncature (et  $h_t = T/N$ ).

On dit de plus que le schéma (29) est consistant d'ordre  $p \in \mathbb{N}^*$  en temps et  $q \in \mathbb{N}^*$  en espace si pour toute solution régulière  $u$  (du problème exact) il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h_t$  et  $h_x$  telle que

$$\forall N, M \geq 2, \quad \max_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 1 \leq j \leq M}} \frac{|\varepsilon_j^n|}{h_t} \leq C(h_t^p + h_x^q). \quad (33)$$

**Remarque 10.** Notons que la constante  $C$  dans la définition 4 peut dépendre de la solution  $u$  du problème exact.

**Définition 5** (Convergence). *On dit que le schéma numérique (29) converge (ou est convergent) sous la condition  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  si*

$$\lim_{\substack{(h_t, h_x) \in \mathcal{S} \\ (h_t, h_x) \rightarrow (0,0)}} \max_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 1 \leq j \leq M}} |u(t_n, x_j) - u_j^n| = 0, \quad (34)$$

avec  $Nh_t = T$  et  $Mh_x = 1$  où  $u$  est la solution du problème exact.

De manière similaire, on dit que le schéma numérique (29) converge (ou est convergent) à l'ordre  $p \in \mathbb{N}^*$  en temps et  $q \in \mathbb{N}^*$  en espace sous la condition  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  s'il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h_t$  et  $h_x$  telle que

$$\forall (h_t, h_x) \in \mathcal{S}, \quad \max_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 1 \leq j \leq M}} |u(t_n, x_j) - u_j^n| \leq C(h_t^p + h_x^q). \quad (35)$$

On dit enfin que le schéma est convergent (resp. convergent à l'ordre  $p$  en temps et  $q$  en espace) si la définition ci-dessus est vérifiée avec  $\mathcal{S} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ .

Ces définitions sont reliées par le théorème de Lax.

**Théorème 4** (Théorème de Lax). *Si le schéma (29) est stable sous la condition  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  et consistant (respectivement consistant d'ordre  $p$  en temps et  $q$  en espace), alors le schéma (29) est convergent (respectivement convergent d'ordre  $p$  en temps et  $q$  en espace) sous la condition  $\mathcal{S}$ .*

*De plus, si le problème exact (le problème vérifié par  $u$ ) est bien posé, alors la consistance et la stabilité du schéma sont nécessaires à sa convergence.*

Le théorème 4 s'applique aussi avec  $\mathcal{S} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ . Avant d'exposer une preuve de ce théorème faisons quelques remarques sur les définitions précédentes.

Concernant la stabilité (cf définition 2), les quantités  $\max_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 1 \leq j \leq M}} |u_j^n|$ ,  $\max_{1 \leq j \leq M} |(U_0)_j|$  et  $\max_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 1 \leq j \leq M}} |F_j^n|$  sont des normes portant sur  $(u_j^n)$ ,  $U_0$  et  $(F^n)$ . On peut dire que la stabilité du schéma correspond à la continuité de l'application linéaire qui à  $U_0$  et  $(F^n)$  associe  $(u_j^n)$  avec une constante de continuité que ne dépend pas de  $h_t$  et  $h_x$ . Cette continuité permet d'obtenir le fait qu'une "petite" modification de la donnée initiale ou des termes  $F^n$  ne crée qu'une "petite" modification du résultat obtenu et que cette propriété se conserve lorsque  $(h_t, h_x) \rightarrow (0, 0)$ . Remarquons sur la figure 11 que l'erreur commise par le schéma centré augmente fortement lorsque  $(h_t, h_x) \rightarrow (0, 0)$ , nous verrons plus loin que ce comportement est dû à un défaut de stabilité.

La condition  $\mathcal{S}$  permet de traiter des cas où le schéma n'est stable que si on restreint les  $h_t$  et  $h_x$  utilisés. Nous verrons dans la suite de cette section que le schéma décentré amont (28) n'est stable que sous une certaine condition que nous expliciterons.

On pourrait considérer d'autres normes pour exprimer cette stabilité. Par exemple, on pourrait considérer la norme  $\max_{0 \leq n \leq N} \sqrt{h_x} (\sum_{0 \leq j \leq M} (u_j^n)^2)^{1/2}$  pour  $(u_j^n)$ . La définition proposée ne serait alors pas nécessairement équivalente à celle de la définition 2. En effet, si toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, rien ne prouve que les constantes de la relation d'équivalence ne dépendent pas de  $h_t$  et  $h_x$ .

L'erreur de troncature représente l'erreur que fait le schéma au cours d'un pas de temps en partant de la solution exacte. En effet, on compare (cf définition 3) la solution exacte  $\tilde{u}^{n+1}$  à la solution obtenue en faisant un pas de temps du schéma à partir de la solution exacte au pas de temps précédent  $\tilde{u}^n$ .

La consistance d'un schéma (cf définition 4) signifie que l'erreur de troncature commise par unité de temps (on divise par  $h_t$ ) tend vers 0 lorsque  $(h_t, h_x) \rightarrow (0, 0)$ . De plus, on peut quantifier la notion de consistance grâce à l'ordre de consistance (plus les ordres de consistance en temps et en espace sont élevés, plus l'erreur de troncature décroît vite vers 0 quand  $(h_t, h_x) \rightarrow (0, 0)$ ). En quelque sorte, la consistance signifie que le schéma est cohérent avec le problème exact (les termes présents dans le schéma numérique correspondent à des termes du problème exact et vice-versa).

La convergence d'un schéma signifie que la solution approchée obtenue correspond bien à une approximation de la solution exacte au sens où si l'on fait tendre les pas de temps et d'espace vers 0, l'erreur commise par le schéma tend aussi vers 0. Là encore on peut quantifier cette décroissance de l'erreur commise avec la notion d'ordre de convergence. Étant donné que les ordres de consistance et de convergence se correspondent (voir théorème 4), on parle parfois simplement d'ordre d'un schéma (sans préciser 'convergence' ou 'consistance').

En pratique, la convergence est la propriété que l'on veut avoir car elle garantit que le schéma considéré fournit une approximation raisonnable du problème exact (sous réserve que les pas de temps et d'espace sont suffisamment petits). Cependant, cette propriété n'est



pas aisée à démontrer. C'est pourquoi nous utilisons le théorème 4 qui assure la convergence à partir de la stabilité et de la consistance. Notons également que si le problème exact est bien posé alors avoir la convergence est équivalent à avoir la stabilité et la consistance. Ceci signifie qu'en pratique, on ne peut pas espérer avoir un schéma convergent s'il manque la consistance ou la stabilité.

**Remarque 11.** *Les notions de consistance et de convergence sont différentes. Les jurys se plaignent des candidats qui confondent ces deux notions. Ne faites pas cette erreur.*

**Remarque 12.** *Toutes ces définitions caractérisent le comportement du schéma lorsque  $(h_t, h_x) \rightarrow (0, 0)$ . En général, l'analyse numérique n'est menée que dans cette limite.*

Nous allons maintenant prouver la première partie du théorème 4 qui est celle que l'on utilise en pratique.

*Preuve partielle du théorème 4.* Dans cette preuve, nous utilisons toutes les définitions précédentes. Tout d'abord, par définition de l'erreur de troncature,  $\tilde{u}^{n+1} = A\tilde{u}^n + h_t F^n + \varepsilon^{n+1}$ . On montre ainsi que  $w^n = \tilde{u}^n - U^n$  vérifie  $w^0 = 0$  (puisque  $(U^0)_j = u(t_0, x_j)$ ) et  $w^{n+1} = Aw^n + \varepsilon^{n+1}$ .

Par stabilité du schéma, on obtient  $\max_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 1 \leq j \leq M}} |w_j^n| \leq C_2 \max_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 1 \leq j \leq M}} \frac{|\varepsilon_j^n|}{h_t}$ . On conclut en utilisant la définition de la consistance.  $\square$

Comme nous l'avons dit, en pratique, pour prouver la convergence du schéma on prouve sa consistance et sa stabilité. Il se trouve que les preuves de consistances sont généralement plutôt aisées, la difficulté se trouve donc plutôt dans la preuve de la stabilité. Afin de faciliter ces preuves, nous en donnons maintenant des conditions nécessaires et des conditions suffisantes. Pour  $A \in \mathbb{R}^{M \times M}$ , on note  $\|A\| = \sup_{V \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\}} \frac{\|AV\|}{\|V\|}$ , où  $\|V\| = \max_{1 \leq j \leq M} |V_j|$ . Rappelons que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathbb{R}^{M \times M}$ . Commençons d'abord par le résultat suivant.

**Proposition 9.** *Le schéma (29) est stable si et seulement si il existe  $C > 0$  dépendant uniquement de  $T$  tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|A^n\| \leq C. \quad (36)$$

**Corrolaire 1.** *Si  $\|A\| \leq 1$ , alors le schéma est stable.*

*Preuve de la proposition 9.* Supposons tout d'abord que le schéma est stable. Dans ce cas, appliquons le schéma à  $U_0 = V \in \mathbb{R}^M$  quelconque et  $F^n = 0$ . La solution obtenue est  $U^n = A^n V$ . On a donc prouvé qu'il existe  $C > 0$  dépendant uniquement de  $T$  tel que  $\forall V \in \mathbb{R}^M, \quad \|A^n V\| \leq C \|V\|$  et donc (36).

Maintenant supposons que (36) est établie. Appliquons le schéma à  $U_0 \in \mathbb{R}^M$  et  $(F^n) \in \mathbb{R}^{(N+1) \times M}$ . Nous pouvons prouver (voir exercice 16) que la solution obtenue est donnée par

$$\forall 0 \leq n \leq N, \quad U^n = A^n U_0 + h_t \sum_{\ell=0}^{n-1} A^{n-\ell-1} F^\ell.$$

Ainsi,  $\|U^n\| \leq \|A^n\| \|U_0\| + h_t \sum_{\ell=0}^{n-1} \|A^{n-\ell-1}\| \|F^\ell\|$ . En utilisant (36), on obtient  $\|U^n\| \leq C \|U_0\| + C h_t n \max_{0 \leq \ell \leq N} \|F^\ell\|$ , avec  $C$  la constante de (36) qui dépend uniquement de  $T$ . De plus,  $n h_t = t_n \leq T$ . On a donc établi la stabilité du schéma.  $\square$

**Exercice 16.** Soient  $U_0 \in \mathbb{R}^M$  et  $(F^n) \in \mathbb{R}^{(N+1) \times M}$ . Montrer que l'unique solution de (29) est donnée par

$$\forall 0 \leq n \leq N, \quad U^n = A^n U_0 + h_t \sum_{\ell=0}^{n-1} A^{n-\ell-1} F^\ell. \quad (37)$$

Nous introduisons une dernière définition : la stabilité au sens de Von Neumann. Lorsque l'on veut prouver qu'un schéma de la forme (29) est instable, la façon standard de procéder est de montrer qu'il n'est pas stable au sens de Von Neumann. On considère alors  $F^n = 0$  et une condition initiale sous la forme d'une onde spatiale :  $u_j^0 = e^{2i\pi k x_j}$  avec  $i$  la racine carrée de l'unité et  $k \in \mathbb{Z}$ . On étudie ensuite l'effet qu'a l'application du schéma sur cette condition initiale complexe.

L'intérêt de choisir un vecteur de la forme  $u_j^0 = e^{2i\pi k x_j}$  est que l'on a  $u_j^1 = \sum_{\ell=1}^M a_{j\ell} u_\ell^0$ . En prenant  $\mathcal{A}_j(k) = \sum_{\ell=1}^M a_{j\ell} e^{2i\pi k(x_\ell - x_j)}$ , on montre que  $\forall 1 \leq j \leq M$ ,  $u_j^1 = \mathcal{A}_j(k) u_j^0$  avec  $\mathcal{A}_j(k) \in \mathbb{C}$ .

**Définition 6** (Stabilité au sens de Von Neumann). On dit qu'un schéma (29) est stable au sens de Von Neumann si pour tout  $1 \leq j \leq M$  et pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $|\mathcal{A}_j(k)| \leq 1$ .

**Proposition 10.** La stabilité au sens de Von Neumann est nécessaire à la stabilité du schéma. Dit autrement, la stabilité du schéma implique la stabilité au sens de Von Neumann.

*Démonstration.* On peut montrer que si on considère  $u_j^0 = \Re(e^{2i\pi k x_j})$  et  $F^n = 0$  alors  $\forall 0 \leq n \leq N$ ,  $u_j^n = \Re((\mathcal{A}_j(k))^n e^{2i\pi k x_j})$ . Idem, si  $u_j^0 = \Im(e^{2i\pi k x_j})$ , alors  $\forall 0 \leq n \leq N$ ,  $u_j^n = \Im((\mathcal{A}_j(k))^n e^{2i\pi k x_j})$ .

Ainsi, si le schéma (29) est stable alors  $\max_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 1 \leq j \leq M}} |\Re((\mathcal{A}_j(k))^n e^{2i\pi k x_j})| \leq C$  où  $C > 0$  ne dépend que de  $T$ . En faisant le même raisonnement sur la partie imaginaire, on obtient  $\max_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 1 \leq j \leq M}} |(\mathcal{A}_j(k))^n e^{2i\pi k x_j}| \leq \sqrt{2}C$ .

Or ceci n'est possible que si  $|\mathcal{A}_j(k)| \leq 1$  sinon on dépasse la constante  $\sqrt{2}C$  en faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$ . Ceci prouve le résultat.  $\square$

Par la suite nous utilisons la stabilité de Von Neumann lorsque nous voulons prouver qu'un schéma n'est pas stable.

**Remarque 13.** On peut prouver que la stabilité de Von Neumann correspond à la stabilité du schéma dans le sens  $\|(u_j^n)\|_* \leq C_1 \|U_0\|_\# + C_2 \|(F^n)\|_*$ , avec  $C_1$  et  $C_2$  ne dépendant que de  $T$  et des normes  $\|\cdot\|_*$  et  $\|\cdot\|_\#$  différentes de celles de la définition 2.

### 3.3.3 Analyse des deux schémas donnés en introduction

Nous allons montrer dans cette section que le schéma numérique proposé en (26) n'est pas stable contrairement au schéma (28). C'est ce défaut de stabilité qui explique son mauvais comportement.

On considère comme degrés de liberté  $U^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_M^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^M$ . Les deux schémas précédents

peuvent être écrits sous la forme matricielle (29) avec  $F^n = 0$  et

$$A_C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -c & 0 & \dots & 0 & c \\ c & 2 & -c & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & -c \\ -c & 0 & & & c & 2 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

pour le schéma centré (26) et

$$A_{AM} = \begin{pmatrix} 1-c & 0 & \dots & 0 & c \\ c & \ddots & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & c \\ & & & & 1-c \end{pmatrix}, \quad (39)$$

pour le schéma décentré amont (28). Les deux matrices précédentes sont dans  $\mathbb{R}^{M \times M}$  et ont été écrites avec  $c = \frac{ah_t}{h_x}$ .

**Proposition 11.** *Les schémas (26) et (28) sont tous les deux consistants. De plus, le schéma (26) est consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace ; le schéma (28) est consistant d'ordre 1 en temps et 1 en espace.*

*Démonstration.* Prouvons que le schéma (26) est consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace. La preuve pour le schéma décentré amont est laissée en exercice (cf exercice 17).

On calcule l'erreur de troncature. Ceci revient à calculer une solution approchée au temps  $t_{n+1}$  par le schéma à partir de la solution exacte au temps  $t_n$  et de comparer le résultat obtenu à la solution exacte au temps  $t_{n+1}$ . On a ainsi

$$\varepsilon_j^{n+1} = u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j) + \frac{ah_t}{2h_x}(u(t_n, x_{j+1}) - u(t_n, x_{j-1})),$$

où  $u$  est la solution de (25).

On considère ensuite les développements de Taylor suivants :

$$\begin{aligned} u(t_{n+1}, x_j) &= u(t_n, x_j) + h_t \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) + O(h_t^2), \\ u(t_n, x_{j+1}) &= u(t_n, x_j) + h_x \frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) + O(h_x^3), \\ u(t_n, x_{j-1}) &= u(t_n, x_j) - h_x \frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) + O(h_x^3). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\frac{\varepsilon_j^{n+1}}{h_t} = \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) + O(h_t) + a \frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) + O(h_x^2).$$

En utilisant le fait que  $u$  est solution de (25), on a  $\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) + a \frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) = 0$ . Nous avons prouvé le fait que le schéma (26) est consistant d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps.  $\square$

**Exercice 17.** Terminer la preuve de la proposition 11 : prouver que le schéma (28) est consistant d'ordre 1 en temps et en espace.

**Proposition 12.** Le schéma (28) est stable sous la condition  $c = \frac{ah_t}{h_x} \leq 1$ . De plus, ce schéma est instable si  $c > 1$ .

*Démonstration.* Supposons  $c \leq 1$  et montrons que le schéma est stable. Soit  $U_0 \in \mathbb{R}^M$ , on calcule  $U^1 = AU_0$ . Pour  $1 \leq j \leq M$ ,  $u_j^1 = (1-c)u_j^0 + cu_{j-1}^0$ . Ainsi,  $|u_j^1| \leq |1-c||u_j^0| + |c||u_{j-1}^0|$ . On obtient  $\|U^1\| \leq (|1-c| + |c|)\|U_0\|$ . Ceci étant valide pour tout  $U_0 \in \mathbb{R}^M$ , on a  $\|A\| \leq |1-c| + |c|$ . La condition  $0 \leq c \leq 1$  donne  $\|A\| \leq 1$  et le schéma est stable d'après le corrolaire 1.

Supposons maintenant que  $c > 1$  et montrons que le schéma est instable. Pour cela, nous allons montrer qu'il est instable au sens de Von Neumann. Si  $u_j^0 = e^{2i\pi k x_j}$ , alors

$$u_j^1 = (1-c)u_j^0 + cu_{j-1}^0 = (1-c + ce^{-2i\pi k h_x})u_j^0 = \mathcal{A}(k)u_j^0.$$

Ici, nous avons  $\mathcal{A}(k) = 1-c + ce^{-2i\pi k h_x}$ . Pour  $c > 1$  et  $k = 1$ , on a pour  $h_x < 1$ ,  $|\mathcal{A}| > 1$  (on montre que  $\cos(2\pi k h_x) < 1$ ). Le schéma n'est pas stable au sens de Von Neumann donc, d'après la proposition 10, il n'est pas stable au sens de la définition 2.  $\square$

La mauvais comportement du schéma centré provient d'un défaut de stabilité. La preuve de ce résultat est laissée en exercice.

**Exercice 18** (Instabilité du schéma explicite centré). Montrer que le schéma (26) est instable (c'est-à-dire n'est stable sous aucune condition  $\mathcal{S}$ ).

!! FIN DE L'ENVOI!!

Nous pouvons tirer plusieurs conclusions de l'étude de ces deux schémas. Tout d'abord, le fait de décentrer la dérivée partielle en espace a permis de rendre le schéma stable. Notons que le sens dans le lequel on décentre cette dérivée est essentiel, on peut montrer que le schéma décentré aval issu de l'approximation  $\frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) \simeq \frac{u(t_n, x_{j+1}) - u(t_n, x_j)}{h_x}$  est instable pour  $a > 0$  et qu'il faut changer le sens du décentrage si  $a < 0$ . En fait, il faut décentrer la dérivée en espace en utilisant les données qui correspondent à de l'information qui arrive et non de l'information qui part.

De plus, nous avons vu dans la proposition 12 que le schéma (28) est stable uniquement sous la condition  $ah_t \leq h_x$  qui lie les pas de temps et d'espace. On appelle une telle condition "condition de CFL" pour les noms des trois scientifiques Courant, Friedrichs et Lewy. De la même façon on appelle  $c = \frac{ah_t}{h_x}$  le nombre de CFL (parfois aussi appelé nombre de Courant). De telles conditions doivent être associées aux schémas explicites pour espérer les rendre stables. Seuls les schémas implicites peuvent se passer de ce type de condition (voir exercice 20).

Notons que remplacer les dérivées de l'EDP par des taux d'accroissements permet d'assurer la consistance d'un schéma mais pas sa stabilité comme nous venons de le voir. Il faut donc être très prudent quand on discrétise une EDP.

### 3.3.4 Conditions de Dirichlet

On s'intéresse dans cette section à la prise en compte des conditions de Dirichlet. On cherche donc à discrétiser le problème (22). Pour avoir les mêmes propriétés de stabilité que dans le cas des conditions aux limites périodiques on discrétise la dérivée en espace par une approximation décentrée amont, on utilise donc (27). On obtient le schéma numérique

$$\begin{cases} \forall 0 \leq j \leq M, u_j^0 = u_0(x_j), \\ \forall 1 \leq n \leq N, u_0^n = \alpha(t_n), \\ \forall 1 \leq n \leq N, \forall 1 \leq j \leq M, u_j^n = u_j^{n-1} - \frac{ah_t}{h_x}(u_j^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}). \end{cases} \quad (40)$$

On a donc

$$A = \begin{pmatrix} 1-c & 0 & & & \\ c & 1-c & \ddots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & c & 1-c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad h_t F^n = c \begin{pmatrix} \alpha(t_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (41)$$

avec  $c = \frac{ah_t}{h_x}$ . Remarquons que la condition de Dirichlet a été prise en compte dans le terme "second membre"  $F^n$ . Si l'on compare la matrice  $A$  avec la matrice  $A_{AM}$  dans le cas de conditions périodiques (voir (39)), on voit que le terme  $c$  de la matrice  $A_{AM}$  a été retiré et remplacé par la présence d'un second membre. Ce terme  $c$  correspondait au fait que la valeur qui entrainait en 0 dans le cas des conditions périodiques était celle de la valeur de la solution en 1. Notons que ce terme a été remplacé par un  $c\alpha(t_n)$  dans le second membre (notons le coefficient  $c$  qui est le même que pour les conditions périodiques).

On peut, de la même façon que pour le cas des conditions périodiques, montrer que ce schéma est stable si et seulement la condition de CFL " $c \leq 1$ " est vérifiée (vous pouvez chercher cette démonstration pour vous convaincre que vous avez compris la section précédente).

!! VERIFIER QUE CA SE PROUVE FACILEMENT!!

!! dessin représentant l'endroit où on va chercher l'information : schéma centré / décentré + effet de la cfl!!

!! faut-il parler des propriétés de positivité?? – OUI ET LE RELIER AVEC LA NOTION DE STABILITE!!

### 3.3.5 Diffusion numérique

On peut représenter le nombre de CFL comme le rapport entre les vitesses de propagation de l'information dans le cas continu et le cas discrétisé. En effet, si on considère une condition initiale constante et une perturbation arrivant en entrée du domaine, dans le problème continu la perturbation va progressivement chasser la condition initiale à vitesse  $a$ . Dans le problème discrétisé avec un schéma explicite comme (28), au premier pas de temps, le premier point en espace est modifié puis à chaque pas de temps un pas en espace est modifié. Le front de la perturbation de la condition initiale se propage donc à la vitesse  $h_x/h_t$ . Ainsi, quand  $c \leq 1$ , le front de la perturbation se propage plus vite dans le problème numérique que dans le problème continu et inversement quand  $c \geq 1$ .

Dans le cas où  $c \leq 1$ , le front de perturbation se propage plus vite dans le cas numérique et les valeurs ont tendance à s'applatir. On appelle ce phénomène la diffusion numérique : tout se passe comme s'il y avait un terme de diffusion supplémentaire dans l'équation. Quand  $c \geq 1$ , le schéma est instable et des phénomènes similaires à ceux du schéma centré apparaissent (voir figure 11).

Nous y avons étudié le problème de transport–Dirichlet avec  $\alpha(t) = 2$ ,  $u_0(x) = 1$  et  $a = 1$ . La solution exacte est

$$u(t, x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq at, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On calcule la solution numérique avec le schéma (40) pour différents nombres de CFL. L'influence de la CFL est ainsi illustrée sur la figure 12. On observe cet effet de diffusion numérique : un petit nombre de CFL tend à dissiper le saut comme le ferait un terme de diffusion (voir le chapitre sur l'équation de la chaleur). Bien entendu, l'effet de la diffusion numérique s'estompe quand  $h \rightarrow 0$  (en supposant que l'on vérifie la condition de CFL).

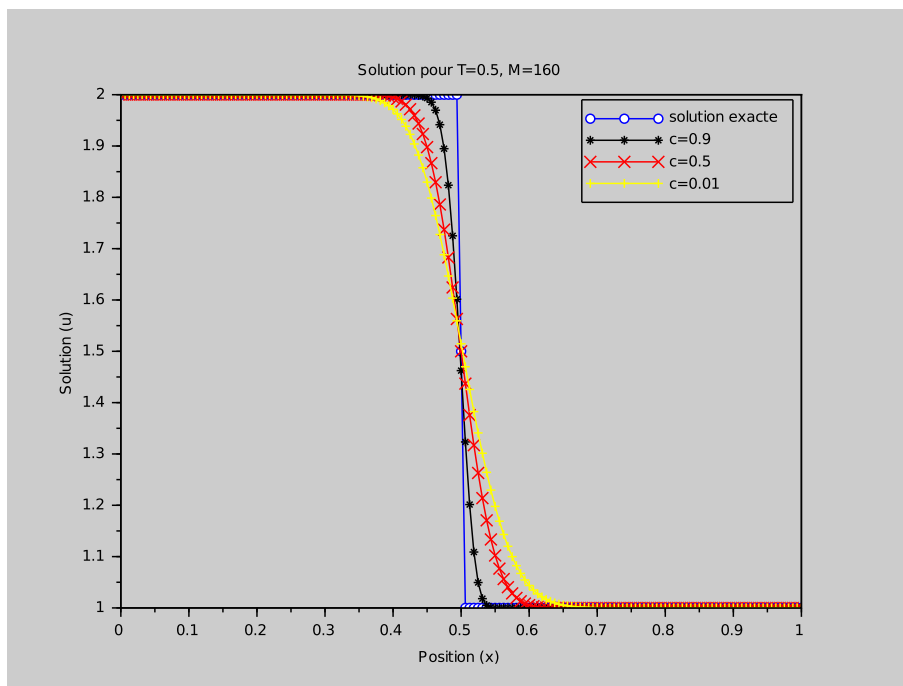


FIGURE 12 – Solution du problème de transport–Dirichlet pour différents nombres de CFL  $c$  ( $t = 0.5$ ,  $M = 160$ ).

Un dernier phénomène intéressant est le fait que le schéma numérique permet d'obtenir la solution exacte lorsque  $c = 1$  (la démonstration est laissée en exercice). Cette valeur de CFL n'est en pratique pas utilisée car le schéma est alors proche d'être instable et de toutes façons on ne trouve la solution exacte que dans des cas simples tels que celui de l'équation de transport unidimensionnelle à vitesse constante. Dans le cas de problèmes plus complexes ne pouvant être résolus que par de la simulation numérique, il ne faut pas s'attendre à ce que le schéma fournisse la solution exacte.

**Exercice 19.** Montrer que lorsque  $c = 1$ , l'erreur commise par le schéma (40) est nulle. La même démonstration peut être faite pour le cas des conditions périodiques (28).

Application : la figure 5 représente les solutions exactes de l'équation de transport à  $t = 0.5$  pour  $M = 20$  et différentes vitesses  $a$ . Elle a été obtenue en appliquant le schéma (40). Donner pour chaque valeur de  $a$  la valeur de  $N$  qui a été utilisée.

NB : pour rappel, l'intervalle de temps est  $(0, 0.5)$ , l'intervalle d'espace est  $(0, 1)$ . Vous pouvez essayer de retrouver la figure 5 pour vérifier vos résultats.

!! VERIFIER QUE CET EXERCICE EST FAISABLE!!

### 3.3.6 Schéma implicite

**Exercice 20** (Schéma implicite). Dans cet exercice, on s'intéresse à une discrétisation implicite du problème (22). On approche les dérivées partielles en temps et espace par des approximations décentrées amont :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) \simeq \frac{u(t_n, x_j) - u(t_{n-1}, x_j)}{h_t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) \simeq \frac{u(t_n, x_j) - u(t_n, x_{j-1})}{h_x}. \quad (42)$$

1. En considérant la condition de Dirichlet  $u(t_n, 0) = \alpha(t_n)$ , écrire le schéma numérique issu de (42). Montrer qu'il peut se mettre sous la forme  $\tilde{A}U^n = U^{n-1} + h_t \tilde{F}^n$ . Donner  $\tilde{A}$  et  $\tilde{F}^n$ .
2. Montrer que  $\tilde{A}$  est inversible. En déduire que ce schéma vérifie (29) en donnant  $A$  et  $F^n$ . On pourra donc utiliser les définitions de la section 3.3.2.
3. Soit  $V \in \mathbb{R}^M$ , on note  $U = AV$ . Calculer les coordonnées de  $U$  en fonction de  $V$ . En déduire que  $\|A\| \leq 1$  et que ce schéma est inconditionnellement stable.
4. Montrer que ce schéma est consistant d'ordre 1 en temps et en espace. Que peut-on dire de la convergence de ce schéma ?
5. Coder le schéma proposé. On peut soit inverser la matrice à l'extérieur de la boucle en temps, soit résoudre un système linéaire à chaque pas de temps. Comparer les deux méthodes, laquelle est la plus efficace ?

!! Coder ca !!

NB : commandes scilab

6. On considère  $a = 1$ ,  $u_0 = 0$  et  $\alpha(t) = t^2$ . Quelle est la solution exacte du problème ? approcher la solution grâce au schéma implicite. Pour  $(N, M) = (\dots)$ , que remarquez-vous en  $(t, x) = (0.1, 0.5)$  ? Si vous l'avez codé, comparez avec le schéma explicite. Comment expliquez-vous ceci ?
7. Déterminer numériquement le taux de convergence de ce schéma. On prendra par exemple la solution du cas test précédent à  $T = 1$  pour estimer la convergence du schéma. Calculer l'erreur et la tracer sur une figure à l'échelle logarithmique comme sur la figure (...). Quels ordres de convergence trouvez-vous numériquement ?

NB : si vous avez des difficultés pour l'une de ces questions, vous pouvez éventuellement lire la section 4.3.2.

!! Ajouter une question sur la stabilité de Von Neumann : comparer les preuves des deux stabilités + remarque : Von Neumann plus simple, sera étudié dans le chapitre suivant (...)

## 4 Équation de la chaleur

!! definition des espaces de fonctions utiles : nombre de dérivées en  $x$  et en  $t$  peut être différent !!

!! La méthode utilisée par B. Lucquin est de ne pas donner les espaces : on dit juste qu'on cherche  $u : [0, T] \times [0, 1]$  telle que ... !!

$$\text{Trouver } u \in C^2(\Omega)(\dots) \text{ telle que } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{dans } (0, T) \times (0, 1), \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{dans } (0, 1), \\ u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = 0 & \forall t \in (0, T), \end{cases} \quad (43)$$

avec (...)

!! Voir si on écrit le pb avec les espaces de fonctions  $C^k$  ou bien avec les espaces de Sobolev (...)

### 4.1 Propriétés générales

**Proposition 13.** Soit  $f \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$  et  $u_0 \in L^2(0, 1)$ . Alors il existe une solution  $u$  au problème (43) dans  $C^0([0, T]; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$ .

Une preuve à cette proposition est proposée en Section 6.3.

**Proposition 14.** Soit  $u \in C^0([0, T]; L^2(0, 1))$  une solution de (43). Si  $u_0 \in L^2(0, 1)$  et  $f \in L^2([0, T] \times [0, 1])$ , alors

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(0, 1)} \leq \|u_0\|_{L^2(0, 1)} + \|f\|_{L^2([0, T] \times [0, 1])}.$$

*Démonstration.* Multiplions la première ligne de (43) par  $u$  et intégrons en espace sur le domaine  $\Omega = (0, 1)$ , on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} u = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u + \int_{\Omega} f u.$$

On utilise ensuite l'intégration par parties  $\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u = - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$  (on rappelle que  $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$ ) ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz  $\int_{\Omega} f u \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$ , que l'on combine avec l'inégalité de Young  $\|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} (\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2)$ .

On obtient ainsi

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq - \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} (\|f(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2).$$

De plus, d'après l'inégalité de Poincaré, on a  $\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega)}^2$ . On a donc

$$\frac{d}{dt} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$



On intègre selon  $t$ , ce qui donne

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2((0,t) \times \Omega)}^2.$$

On obtient le résultat en prenant le sup sur  $t$ . □

En combinant les propositions 13 et 14, on obtient le résultat suivant.

**Corrolaire 2.** *Si  $u_0 \in L^2(0, 1)$  et  $f \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$  alors le problème (43) admet une unique solution dans  $C^0([0, T]; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$ .*

**Proposition 15** (Effet régularisant de l'équation de la chaleur). *Si  $u \in C^2([0, T] \times ]0, 1[)$  est solution de  $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ , alors  $u \in C^\infty([0, T] \times ]0, 1[)$ .*

!! PREUVE : Proposition II.10 du poly ENS!! – DEMANDER REF A MURIEL POUR MEILLEUR RESULTAT!!

!! ON PEUT CONSTRUIRE UNE PREUVE DE REGULARITE EN CHERCHANT DES SOLUTIONS REGULIERES (VOIR NOTES MURIEL)!! – ON DOIT POUVOIR COMBINER CA AVEC LA PREUVE DE LA RECHERCHE DE SOLUTIONS FAIBLES!!

Voir Figure (...)!! TODO!!

!! VOIR COMMENT EXPRIMER LA NON-REVERSIBILITÉ DE L'ÉQUATION!!

**Proposition 16** (Non réversibilité de l'équation). *Le problème (43) n'est pas réversible : (...)*

**Remarque 14.** *La continuité par rapport aux données traduit une forme de stabilité (...)*

**Remarque 15** (Conditions de Dirichlet non homogènes). *On peut utiliser un relèvement comme dans (...) — A DONNER EN EXERCICE!!*

**Remarque 16** (Condition de Neumann). *Conservation de la valeur moyenne ?? (...)*

**Proposition 17** (Principe du maximum). *Supposons  $\forall (t, x) \in (0, T) \times (0, 1)$ ,  $f(t, x) \leq 0$ . On note  $u$  la solution de (43). Alors, pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times (0, 1)$ , on a*

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times [0,1]} u(t, x) = \max\left(\sup_{x \in (0,1)} u_0(x), 0\right).$$

Notons que nous avons utilisé le fait que les conditions de Dirichlet sont homogènes. Dans le cas de conditions de Dirichlet non homogènes, il faudrait prendre le max du sup en espace de la donnée initiale et du sup en temps des données de Dirichlet.

**Exercice 21.** *Montrer que la solution du pb de Neumann sans terme source tend exponentiellement vers la valeur moyenne de la donnée initiale.*

## 4.2 Analyse de Fourier

!! chapeau!!

!! parler de l'approche historique par Fourier!!

!! parler aussi de séparation des variables!! — C'est écrit dans le programme officiel!!

### 4.2.1 Recherche d'une solution sous la forme de séries de Fourier

On cherche une solution régulière par la méthode de séparation des variables. On cherche donc une solution de la forme  $u(t, x) = \Phi(t)\Psi(x)$ . Si  $f$  est nul, alors on a  $\Phi'(t)\Psi(x) = \Phi(t)\Psi''(x)$ . Tant que ces fonctions sont non nulles, on peut écrire  $\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} = \frac{\Psi''(x)}{\Psi(x)}$ . Étant donné que le premier terme dépend uniquement de  $t$  et le second uniquement de  $x$ , on peut dire que ces deux termes sont constants. On suppose que cette constante est non nulle (sinon on a une solution identiquement nulle).

On a donc les équations  $\Phi'(t) = K\Phi(t)$  et  $\Psi''(x) = K\Psi(x)$ . Si  $K > 0$ , alors  $\Psi(x) = ae^{\sqrt{K}x} + be^{-\sqrt{K}x}$ . Les conditions aux limites donnent  $a + b = 0$  et  $a(e^{\sqrt{K}} - e^{-\sqrt{K}}) = 0$ . La seule solution est donc la solution nulle.

On suppose maintenant  $K < 0$ . Dans ce cas,  $\Psi(x) = ae^{i\sqrt{|K|x}} + be^{-i\sqrt{|K|x}}$ . Les conditions aux limites donnent alors  $a + b = 0$  et  $a \sin(\sqrt{|K|}) = 0$ . La seule façon d'avoir une solution non identiquement nulle est de prendre  $K = -\pi^2 k^2$  avec  $k \in \mathbb{Z}^*$ .

On remarque réciproquement que les fonctions de la forme  $\sin(k\pi x)e^{-k^2\pi^2 t}$  vérifient l'équation de la chaleur (avec  $f = 0$ ). L'approche que nous allons présenter consiste donc à chercher une solution au problème (43) sous la forme d'une série de ces termes.

On se place ici dans le cas de conditions de Dirichlet homogènes  $\alpha = \beta = 0$  et sans terme source  $f = 0$ . On suppose que la donnée initiale  $u_0$  est  $C^2([0, 1])$  avec  $u_0(0) = u_0(1) = 0$ . On note  $U_0$  la fonction définie sur  $[-1, 1]$  par

$$U_0(x) = \begin{cases} u_0(x) & \text{si } x \in [0, 1], \\ -u_0(-x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On prolonge également  $U_0$  sur  $\mathbb{R}$  par 2-périodicité. La fonction obtenue est  $C^1(\mathbb{R})$ . D'après le théorème de Dirichlet, cette fonction est donc égale à sa série de Fourier (qui converge). De plus, comme  $U_0$  est impaire, cette série de Fourier ne comprends que des sinus.

Donc, en particulier, sur  $[0, 1]$  on a

$$u_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} b_k \sin(k\pi x),$$

avec

$$b_k = \frac{2}{k\pi} \int_0^1 u'_0(x) \cos(k\pi x) \, dx.$$

Comme, pour  $t \geq 0$ , on a  $e^{-k^2\pi^2 t} \leq 1$ , la série  $u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} b_k \sin(k\pi x)e^{-k^2\pi^2 t}$  est normalement convergente sur tout intervalle de la forme  $[a, T] \times [0, 1]$  pour tout  $a > 0$ . La fonction  $u$  est donc dérivable par rapport à la variable  $t$  et sa dérivée est donnée par

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = - \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k^2 \pi^2 b_k \sin(k\pi x) e^{-k^2\pi^2 t}.$$

On peut également montrer que  $u$  est dérivable deux fois par rapport à la variable  $x$  et que cette dérivée seconde à la même valeur que la dérivée première en  $t$ . Cette série de Fourier vérifie donc l'équation de la chaleur.

Pour plus de détails, on pourra se reporter aux pages 157–158 du livre de Brigitte Lucquin.

!! parler du phénomène de Gibbs + figure + exo numérique!!

!! vérifier théorèmes sur les séries de Fourier + les intégrer au cours!!

### 4.2.2 Problème dans $\mathbb{R}$ entier : utilisation de la transformée de Fourier

On s'intéresse ici au problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (44)$$

Notons que comme le domaine spatial  $\mathbb{R}$  n'a pas de bord, l'équation n'a pas de conditions aux limites.

!! ENONCER UN THEOREME D'EXISTENCE ET UNICITE!!

On peut utiliser la transformée de Fourier de  $u$  par rapport à  $x$  pour résoudre ce problème.

On la note

$$\mathcal{F}(u)(t, \omega) := \hat{u}(t, \omega) := \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} u(t, x) \, dx.$$

On notera la transformée de Fourier inverse

$$\mathcal{F}^{-1}(v)(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{2i\omega x} v(t, \omega) \, d\omega.$$

!! HYPOTHESES DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER ??

En utilisant les propriétés classiques de la transformée de Fourier, on montre que  $\hat{u}(t, \omega)$  est solution du problème

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, \omega) + \omega^2 \hat{u}(t, \omega) &= \hat{f}(t, \omega) \text{ dans } (0, T) \times \mathbb{R}, \\ \hat{u}(0, \omega) &= \hat{u}_0(\omega) \text{ dans } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\hat{u}(t, \omega) = \hat{u}_0(\omega) e^{-\omega^2 t} + \int_0^t \hat{f}(s, \omega) e^{-\omega^2(t-s)} \, ds.$$

Après quoi, on applique la transformée de Fourier inverse pour trouver une solution à l'équation (44). En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier, on obtient donc

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}_0) * \mathcal{F}^{-1}(e^{-\omega^2 t}) + \mathcal{F}^{-1}\left(\int_0^t \hat{f}(s, \omega) e^{-\omega^2(t-s)} \, ds\right) \\ &= (u_0 * G(t, \cdot))(t, x) + \dots \end{aligned}$$

avec  $G(t, x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$  le noyau de la chaleur et  $*$  le produit de convolution. Pour rappel  $(u_0 * G(t, \cdot))(t, x) := \int_{\mathbb{R}} u_0(y) G(t, x - y) \, dy$ .

**Exercice 22.** Pour  $t > 0$ , calculer  $\mathcal{F}^{-1}(e^{-\omega^2 t})$ .

*Indice : utiliser des intégrations par parties et les propriétés de la transformée de Fourier pour prouver que pour tout  $t > 0$ ,  $x \mapsto \mathcal{F}^{-1}(e^{-\omega^2 t})$  est solution d'une EDO d'ordre 2. Prouver que le problème de Cauchy vérifié par cette fonction admet une unique solution et vérifier que le noyau de la chaleur est cette unique solution.*

!! propagation de l'info à vitesse infinie!! (+exo numérique avec version schéma implicite/explicite)

!! NON UNICITE DANS  $\mathbb{R}$  ?? – VOIR POLY MIRONESCU!! — C'est peut-être trop compliqué!!

### 4.3 Approximation par différences finies

Nous nous plaçons ici dans le même cadre que celui utilisé pour l'équation de transport en section 3.3. Nous décomposons les intervalles de temps et d'espace respectivement en  $N$  et  $M$  sous-intervalles. On note  $t_n$  ( $0 \leq n \leq N$ ) et  $x_j$  ( $0 \leq j \leq M$ ) les bornes de ces sous-intervalles. Nous cherchons à approcher la solution de (43) en  $t_n$  et  $x_j$ , i.e.  $u(t_n, x_j)$  par le terme  $u_j^n$  d'une suite  $(u_j^n)$ . Nous proposons plusieurs schémas. Leurs propriétés seront étudiées en utilisant les éléments de la section 3.3.2.

#### 4.3.1 Schéma explicite centré

Le schéma le plus intuitif à utiliser est un schéma explicite centré. Pour cela, considérons d'approcher les dérivées de la façon suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) \simeq \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{h_t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) \simeq \frac{u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1}))}{h_x^2}.$$

Nous obtenons ainsi le schéma suivant

$$\begin{cases} \forall 1 \leq j \leq M-1, u_j^0 = u_0(x_j), \\ \forall 0 \leq n \leq N, u_0^n = u_M^n = 0, \\ \forall 0 \leq n \leq N-1, \forall 1 \leq j \leq M-1, u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\nu h_t}{h_x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + h_t f(t_n, x_j). \end{cases} \quad (45)$$

!! FAUT-IL INTRODUIRE  $\nu$  PLUS HAUT ??

**Exercice 23.** La figure 6 a été obtenue grâce au schéma (45). Coder ce schéma est retrouver cette figure.

!! donner les paramètres !!

Nous allons maintenant étudier les propriétés de ce schéma. Nous pouvons prouver que ce schéma est consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace. De plus, il est stable sous la condition de CFL  $2\nu h_t \leq h_x^2$  et instable si cette condition n'est pas remplie. Ces résultats peuvent être prouvés en adaptant ce qui a été fait dans la section 3.3.

**Exercice 24.** Nous considérons le schéma (45).

1. Prouver que ce schéma est consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace.
2. Prouver que ce schéma est stable sous la condition de CFL  $2\nu h_t \leq h_x^2$ .
3. Prouver que ce schéma est instable si la condition de CFL précédente n'est pas vérifiée.

!! Donner la preuve ?? Un exemple de plus ne ferait pas de mal ... – une bonne solution serait de donner une correction en fin de section –

!! peut-être modifier la def de la stabilité de Von Neumann en permettant à la fréquence de parcourir  $\mathbb{R}$  entier !!

!! CFL très coûteuse dans ce cas précis !!

!! FAUT-IL FAIRE UNE REMARQUE SUR LE PRINCIPE DU MAXIMUM DISCRET ?? – A QUEL ENDROIT ?? ON POURRAIT AUSSI LA FAIRE POUR LES AUTRES EQUATIONS !!

### 4.3.2 Schéma implicite centré

Comme évoqué dans la section précédente, l'utilisation de schémas explicites est très coûteuse dans le cadre de l'équation de la chaleur. On s'intéresse donc à la possibilité d'utiliser des schémas qui seraient inconditionnellement stable. Un premier exemple d'un tel schéma est donné par le schéma implicite centré.

On approche les dérivées partielles de la manière suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) \simeq \frac{u(t_n, x_j) - u(t_{n-1}, x_j)}{h_t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) \simeq \frac{u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1}))}{h_x^2}.$$

Le schéma implicite centré est donc défini comme

$$\begin{cases} \forall 1 \leq j \leq M-1, u_j^0 = u_0(x_j), \\ \forall 0 \leq n \leq N, u_0^n = u_M^n = 0, \\ \forall 1 \leq n \leq N, \forall 1 \leq j \leq M-1, u_j^n = u_j^{n-1} - \frac{\nu h_t}{h_x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + h_t f(t_n, x_j). \end{cases} \quad (46)$$

Le schéma peut donc être écrit sous la forme

$$\tilde{A}U^n = U^{n-1} + h_t \tilde{F}^n,$$

avec  $U^n$  le vecteur des  $u_j^n$  pour  $1 \leq j \leq M-1$  et  $(\tilde{F}^n)_j = f(t_n, x_j)$ . De plus,  $\tilde{A} = I - \nu h_t \hat{A}$  où  $\hat{A}$  est la matrice du problème de Laplace-Dirichlet (la matrice  $A$  dans (21)). Pour rappel, cette matrice est exigible.

Pour montrer qu'il existe une unique solution à ce problème discret, il faut montrer que la matrice  $\tilde{A}$  est inversible. Cela a été fait par un calcul direct dans l'exercice 20. Cependant ce calcul est bien plus difficile dans le cas présent. La méthode utilisée consiste alors à calculer les valeurs propres de cette matrice.

Montrons le résultat suivant qui nous servira à plusieurs endroits dans ce cours.

**Proposition 18** (Valeurs propres d'une matrice tridiagonale symétrique). *Soit  $M \geq 2$ . Considérons une matrice de taille  $(M-1) \times (M-1)$  de la forme*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & & \\ b & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & b & a \end{pmatrix},$$

avec  $a$  et  $b$  des réels. Alors les valeurs propres de  $A$  sont les  $\lambda_k = a + 2b \cos\left(\frac{k\pi}{M}\right)$  avec  $1 \leq k \leq M-1$ . Le vecteur propre associé  $V_k$  a pour composantes  $(V_k)_j = \sin\left(j \frac{k\pi}{M}\right)$ .

*Démonstration.* Pour une démonstration de cette proposition, le lecteur pourra se référer au Lemme 2.2 du livre de Brigitte Lucquin, "Équations aux dérivées partielles et leurs approximations", 2004.  $\square$

Les valeurs propres de la matrice  $\tilde{A}$  sont donc de la forme

$$\lambda_k = 1 + \frac{2\nu h_t}{h_x^2} \left( 1 - \cos \left( \frac{k\pi}{M} \right) \right) \quad (1 \leq k \leq M-1).$$

Toutes ces valeurs propres sont strictement positives pour tous  $h_t, h_x > 0$ . La matrice  $\tilde{A}$  est donc inversible.

On peut donc réécrire le schéma numérique sous la forme (...)

!! est-ce qu'on ne pourrait pas faire une preuve avec la stabilité en norme  $\|\cdot\|_\infty$  puis montrer que c'est beaucoup plus simple en norme  $\|\cdot\|_{L^2}$  ?? -> De toutes façons, il va falloir introduire la norme  $\|\cdot\|_{L^2}$  !!

!! La stabilité du schéma implicite se fait bien pour la norme  $L^2$  mais ça a l'air bien plus difficile pour la norme max!!

!! Une possibilité serait d'introduire ici la notion de stabilité pour une autre norme, en particulier la norme  $L^2$  !!

!! Du coup quelle est la différence entre la norme  $L^2$  du livre et la stabilité au sens de Von Neumann ??

!! stabilité avec d'autres normes ?? -> a priori, ce serait plus adapté en "bonus" !!

!! Peut-être faudrait-il aussi écrire l'équivalence entre la stabilité de Von Neumann et celle avec la norme  $\|\cdot\|_{L^2}$  ??

**Remarque 17.** *La preuve de stabilité fait ici appel à des résultats qui peuvent être difficiles à vérifier dans le cas général. En comparaison, la preuve de la stabilité au sens de Von Neumann est bien plus aisée. Ainsi, parfois en pratique, on se contentera de la stabilité de Von Neumann.*

**Remarque 18.** *!! schéma plus difficile à implémenter !!*

*!! mettre résultats numériques !!*

*!! comparer avec schéma explicite, notamment loin d'une condition non nulle !!*

### 4.3.3 $\theta$ -schémas

!! parler des  $\theta$ -schémas – voir poly L.!! – Est-ce possible de le faire avec les defs de la section sur l'équation de transport ??

!! Preuve de stabilité par la méthode de l'énergie : cf B. Lucquin !!

!! exo final sur les  $\theta$ -schémas !!

## 4.4 Étude du problème de Neumann

Le but de cette section est d'étudier le problème de la chaleur avec des conditions aux limites de Neumann. Toutes les preuves sont laissées en exercice.

!! autre gros exo sur conditions de Neumann ??

## 5 Équation des ondes

!! définition des espaces de fonctions utiles : nombre de dérivées en x et en t peut être différent !!

$$\text{Trouver } u \in C^2(\Omega)(\dots) \text{ telle que } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{dans } (0, T) \times (0, 1), \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{dans } (0, 1), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, \cdot) = u_1 & \text{dans } (0, 1), \\ u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = 0 & \forall t \in (0, T), \end{cases} \quad (47)$$

avec (...)

!! Remarque sur le lien entre dérivées et conditions initiales / aux limites !! -> !! comparer avec les autres chapitres !!

## 5.1 Propriétés générales

**Théorème 5** (Existence et unicité de la solution). *Supposons que (...). Le problème (47) est bien posé : il admet une unique solution  $u \in (\dots)$  et  $\|u\| \leq (\dots)$ .*

*De plus, cette solution appartient à l'espace (...)*

**Remarque 19** (Pas d'effet régularisant). *Commenter la régularité du théorème. (...) - Même régularité que celle des données.*

**Proposition 19** (Réversibilité de l'équation). *Le problème (47) est réversible : (...)*

**Proposition 20** (Conservation de l'énergie). *Soit  $u$  une solution de (47), alors on a pour tout  $t \in [0, T]$ ,*

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \right\|_{(\dots)}^2 + \frac{1}{2} \left\| c \frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot) \right\|_{(\dots)}^2 = \frac{1}{2} \|u_1\|_{(\dots)}^2 + \frac{1}{2} \|cu'_0\|_{(\dots)}^2 + \|f\|(\dots)$$

!! commenter les différents termes !!

## 5.2 Construction de solutions régulières

On s'intéresse à l'équation (47) avec  $f = 0$ . On utilise la méthode de séparation des variables. On cherche donc une solution de la forme  $u(t, x) = \Phi(t)\Psi(x)$ . En reportant cette expression dans l'équation, on s'aperçoit que ces fonctions doivent satisfaire la relation  $\Phi''(t)\Psi(x) = c^2\Phi(t)\Psi''(x)$ . On cherche donc des fonctions qui vérifient  $\frac{\Phi''(t)}{\Phi(t)} = c^2 \frac{\Psi''(x)}{\Psi(x)} = C$  avec  $C$  une constante (puisque ces deux expressions sont égales et dépendent du temps pour l'une et de l'espace pour l'autre). De plus, nous ne sommes pas intéressés par le cas où cette constante serait nulle car la solution associée serait alors triviale. Les fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$  vérifient donc les équations

$$\Phi''(t) - C\Phi(t) = 0, \quad c^2\Psi''(x) - C\Psi(x) = 0.$$

Si  $C > 0$ , on peut montrer en utilisant les conditions de Dirichlet homogènes que la seule solution possible est la solution nulle. On s'intéresse donc uniquement au cas où  $C < 0$ . Dans ce cas, on a  $\Phi(t) = A \sin(\sqrt{|C|}t) + B \cos(\sqrt{|C|}t)$  et  $\Psi(x) = A' \sin(\frac{\sqrt{|C|}}{c}x) + B' \cos(\frac{\sqrt{|C|}}{c}x)$ .

Avec les conditions de Dirichlet homogènes, on montre que  $B' = 0$  et  $C = -k^2 c^2 \pi^2$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Ainsi, si les conditions initiales le permettent, on peut considérer des solutions de la forme  $(t, x) \mapsto (A \sin(k\pi ct) + B \cos(k\pi ct)) \sin(k\pi x)$ .

Pour être plus général et ainsi vérifier les conditions initiales imposées, on va considérer des solutions sous la forme de séries de Fourier utilisant ces termes.

Supposons que  $u_0$  et  $u_1$  sont dans  $C^2([0, 1])$  avec  $u_0(0) = u_0(1) = 0$  et  $u_1(0) = u_1(1) = 0$ . On peut alors écrire

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\pi x) \quad \text{et} \quad u_1(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin(k\pi x).$$

avec  $b_k = 2 \int_0^1 u_0(x) \sin(k\pi x) dx$  et  $c_k = 2 \int_0^1 u_1(x) \sin(k\pi x) dx$ .

On peut montrer que ces coefficients sont en  $O(1/k^2)$  de sorte que les séries précédentes sont normalement convergentes.

La fonction définie par

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (b_k \cos(k\pi ct) + \frac{c_k}{k\pi} \sin(k\pi ct)) \sin(k\pi x),$$

est alors continue et solution de l'équation des ondes au sens des distributions (les dérivées sont à considérer au sens des distributions).

### 5.3 Formule de d'Alembert

On considère le problème sur  $\mathbb{R}$  entier :

$$\text{Trouver } u \in C^2(\Omega)(\dots) \text{ telle que } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, \cdot) = u_1 & \text{dans } \mathbb{R}, \end{cases} \quad (48)$$

où (...)

**Théorème 6.** Si  $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$  et  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , alors le problème (48) admet une unique solution  $u \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$  donnée par

$$u(t, x) = \frac{u_0(x + ct) + u_0(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(s, y) dy ds.$$

*Démonstration.* On prouve ce théorème en supposant que  $u$  est une solution de (48). L'idée de la preuve consiste à s'intéresser aux droites  $(t, x) \mapsto x - ct$  et  $(t, x) \mapsto x + ct$  selon lesquelles les ondes se déplacent. On introduit donc le changement de variables  $y = x + ct$  et  $z = x - ct$ , on note  $v(y, z) := u(\frac{y-z}{2c}, \frac{y+z}{2})$  la représentation de  $u$  selon ces nouvelles variables.

On prouve ensuite que  $v$  vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = -\frac{1}{4c^2} f\left(\frac{y-z}{2c}, \frac{y+z}{2}\right).$$



Cela se fait aisément en calculant cette dérivée croisée et en rappelant que  $u$  est solution de (48).

On peut ensuite calculer la fonction  $v$  en intégrant la relation précédente une fois selon  $y$  et une fois selon  $z$ . On obtient

$$v(y, z) = G(z) + F(y) - \frac{1}{4c^2} \int_0^z \int_0^y f\left(\frac{s-r}{2c}, \frac{s+r}{2}\right) ds dr,$$

où  $F$  et  $G$  sont des fonctions à déterminer. On peut donc écrire une première expression pour  $u$

$$\begin{aligned} u(t, x) &= v(x + ct, x - ct) \\ &= G(x - ct) + F(x + ct) - \frac{1}{4c^2} \int_0^{x-ct} \int_0^{x+ct} f\left(\frac{s-r}{2c}, \frac{s+r}{2}\right) ds dr. \end{aligned}$$

Il faut maintenant déterminer l'expression de  $F$  et  $G$ . Pour cela, on évalue l'expression précédente en  $t = 0$  et on utilise les conditions initiales, on obtient

$$u_0(x) = G(x) + F(x) - \frac{1}{4c^2} \int_0^x \int_0^x f\left(\frac{s-r}{2c}, \frac{s+r}{2}\right) ds dr. \quad (49)$$

Pour obtenir une deuxième relation, on suppose que  $F$  et  $G$  sont dérivables, on dérive l'expression de  $u$  et on évalue en  $t = 0$ , on obtient

$$u_1(x) = -cG'(x) + cF'(x) - \frac{1}{4c} \left( \int_0^x f\left(\frac{x-r}{2c}, \frac{x+r}{2}\right) dr - \int_0^x f\left(\frac{s-x}{2c}, \frac{s+x}{2}\right) ds \right). \quad (50)$$

En combinant les relations (49) et (50), on peut montrer  $F(0) = 0$ ,  $G(0) = 0$  et

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{u_0(x)}{2} + \int_0^x \frac{u_1(s)}{2c} ds + \frac{1}{8c^2} \left( \int_0^x \int_0^x f\left(\frac{s-r}{2c}, \frac{s+r}{2}\right) ds dr + \int_0^x \int_0^s f\left(\frac{s-r}{2c}, \frac{s+r}{2}\right) dr ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^x \int_0^r f\left(\frac{s-r}{2c}, \frac{s+r}{2}\right) ds dr \right), \\ G(x) &= \frac{u_0(x)}{2} - \int_0^x \frac{u_1(s)}{2c} ds + \frac{1}{8c^2} \left( \int_0^x \int_0^x f\left(\frac{s-r}{2c}, \frac{s+r}{2}\right) ds dr - \int_0^x \int_0^s f\left(\frac{s-r}{2c}, \frac{s+r}{2}\right) dr ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^x \int_0^r f\left(\frac{s-r}{2c}, \frac{s+r}{2}\right) ds dr \right). \end{aligned}$$

On peut maintenant simplifier les intégrales pour obtenir

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{u_0(x)}{2} + \int_0^x \frac{u_1(s)}{2c} ds + \frac{1}{4c^2} \int_0^x \int_0^s f\left(\frac{s-r}{2c}, \frac{s+r}{2}\right) dr ds, \\ G(x) &= \frac{u_0(x)}{2} - \int_0^x \frac{u_1(s)}{2c} ds + \frac{1}{4c^2} \int_0^x \int_0^r f\left(\frac{s-r}{2c}, \frac{s+r}{2}\right) ds dr. \end{aligned}$$

On peut maintenant injecter  $F(x)$  et  $G(x)$  dans l'expression de  $u(t, x)$ . Après simplification des intégrales, on obtient

$$u(t, x) = \frac{u_0(x + ct) + u_0(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds + \frac{1}{4c^2} \int_{x-ct}^{x+ct} \int_{x-ct}^s f\left(\frac{s-r}{2c}, \frac{s+r}{2}\right) dr ds.$$

On termine cette preuve en remaniant le dernier terme par les changements de variables  $\tilde{t} = \frac{s-r}{2c}$  et  $\tilde{x} = s - c\tilde{t}$ .

!! PEUT-ON SUPPOSER QUE  $F$  et  $G$  sont dérivables ?? – RAPPELER QU’ON EST DANS UNE PREUVE PAR ANALYSE–SYNTHÈSE !!

!! FAIRE A UN MOMENT UNE REMARQUE SUR LA REGULARITE DE  $f$  QUI PERMET D’UTILISER FUBINI !!  $\square$

!! prouver ce thm !!

!! donner une interpretation de ces termes ?? En particulier si  $f = 0$  !!

**Remarque 20.** *L’information se propage à vitesse finie (...) !! TODO!!!! Comparer avec l’équation de la chaleur !!*

**Exercice 25.** *Si  $f = 0$ , reprendre le résultat du théorème 6. Prouver qu’on a  $u(t, x) = u^+(t, x) + u^-(t, x)$  avec (...). Ces deux fonctions représentent des ondes se déplaçant dans les deux directions.*

!! donner la forme de  $u^+$  et  $u^-$  !!

**Exercice 26.** *Retrouver le résultat du théorème 6 en utilisant la transformée de Fourier comme dans (...). !! TODO !!*

!! faire la montée en régularité ??

## 5.4 Approximation par différences finies

Nous étudions dans cette section différents schémas pour approcher la solution de l’équation. La discrétisation la plus naturelle que l’on puisse imaginer consiste à approcher les dérivées d’ordre deux par des approximations centrées. On utilise donc les approximations :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n, x_j) &\simeq \frac{u(t_{n+1}, x_j) - 2u(t_n, x_j) + u(t_{n-1}, x_j))}{h_t^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) &\simeq \frac{u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1}))}{h_x^2}.\end{aligned}$$

On obtient ainsi le schéma explicite suivant :

$$\forall 1 \leq n \leq N, \forall 0 \leq j \leq M, u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + \frac{c^2 h_t^2}{h_x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

Ce schéma est à deux pas de temps. C’est-à-dire que si on introduit un vecteur  $U^n$  représentant les  $u_j^n$ , pour calculer  $U^{n+1}$ , il faut  $U^n$  et  $U^{n-1}$ . Pour pouvoir calculer les  $U^n$  pour tout  $n \geq 0$ , il faut donc initialiser les deux premiers termes de la suite. Comme d’habitude, on initialise le premier pas de temps avec les conditions initiales. En plus de cela, il faut aussi initialiser le second pas de temps qu’on prendra comme  $U^1 = U^0 + h_t V_0$ . Cela signifie que l’on considère qu’au cours du premier pas de temps, la solution a été modifiée par la seule action de la vitesse initiale. Il s’agit d’une manière de procéder qui est classique. On obtient donc le schéma suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall 1 \leq n \leq N, \forall 0 \leq j \leq M, u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + \frac{c^2 h_t^2}{h_x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \\ \forall 0 \leq n \leq N, \quad u_0^n = u_M^n = 0, \\ \forall 1 \leq j \leq M-1, \quad u_j^0 = u_0(x_j) \quad \text{et} \quad u_j^1 = u_0(x_j) + h_t v_0(x_j), \end{array} \right. \quad (51)$$

où  $u_0$  et  $v_0$  sont les données initiales du problème en position et en vitesse.

!!  $v_0$  ou  $u_1$  pour la vitesse initiale??

**Exercice 27.** La figure (...) a été obtenue avec le schéma (51) pour les données (...). Coder ce schéma et retrouver la figure.

Plus généralement, les schémas à deux pas sont de la forme

$$U^0 = U_0, \quad U^1 = U_0 + h_t V_0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad U^{n+1} = A_1 U^n + A_2 U^{n-1} + h_t^2 F^n, \quad (52)$$

avec  $A_1$  et  $A_2$  deux matrices et  $U_0$  et  $V_0$  des vecteurs tels que (...)

**Remarque 21.** Notons que la dérivée seconde présente dans l'équation des ondes rend très naturel le recours à un schéma à deux pas de temps. Ce type de schéma peut aussi être utilisé pour les équations vues précédemment (voir schéma saute-mouton). On peut aussi envisager d'utiliser un schéma à un pas de temps pour résoudre l'équation des ondes (voir ...).

La but de cette section est d'adapter les définitions des sections 3.3.2 et !!(...)!! au contexte des schémas à deux pas de temps. Nous adaptons tout d'abord les définitions et les théorèmes d'analyse numérique. Nous analysons ensuite différents schémas dont (51).

#### 5.4.1 Définitions et théorèmes pour les schémas à deux pas de temps

Nous donnons maintenant sans commentaire les définitions et théorèmes de la section 3.3.2 adaptés au cadre d'un schéma à deux pas de temps. Notons les similitudes avec les définitions pour un pas de temps. Nous considérons  $\|\cdot\|$  une norme de  $\mathbb{R}^M$  (cette norme dépend de  $M$ ).

**Définition 7** (Stabilité en norme  $\|\cdot\|$ ). Soit  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  tel que  $(0, 0) \in \overline{\mathcal{S}}$ . On dit que le schéma numérique (52) est stable (en norme  $\|\cdot\|$ ) sous la condition  $\mathcal{S}$  s'il existe  $C_1, C_2, C_3 > 0$  qui ne dépendent que de  $T$  tels que  $\forall (h_x, h_t) \in \mathcal{S}, \forall U_0, U^1 \in \mathbb{R}^M, \forall (F^n)_{0 \leq n \leq N} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times M}$ , on a

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|U^n\| \leq C_1 \|U^0\| + C_2 \|U^1\| + C_3 \max_{0 \leq n \leq N} \|F^n\|, \quad (53)$$

où  $(U^n)$  est l'unique suite vérifiant (52).

On dit également que le schéma (52) est inconditionnellement stable si la définition précédente s'applique avec  $\mathcal{S} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ .

**Définition 8** (Erreur de troncature). L'erreur de troncature (ou erreur de consistance) du schéma (52) au temps  $t_n$  est un vecteur  $\varepsilon^n \in \mathbb{R}^M$  ( $2 \leq n \leq N$ ) défini par

$$\varepsilon^{n+1} := \tilde{u}^{n+1} - A_1 \tilde{u}^n - A_2 \tilde{u}^{n-1} - h_t^2 F^n, \quad (54)$$

où  $\tilde{u}^n \in \mathbb{R}^M$  est défini par  $(\tilde{u}^n)_j = u(t_n, x_j)$  avec  $u$  la solution du problème exact associé à (52).

**Définition 9** (Consistance en norme  $\|\cdot\|$ ). On dit que le schéma numérique (52) est consistant (en norme  $\|\cdot\|$ ) si pour toute solution régulière  $u$  du problème exact on a

$$\lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ M \rightarrow +\infty}} \max_{0 \leq n \leq N} \frac{\|\varepsilon^n\|}{h_t^2} = 0, \quad (55)$$

où  $\varepsilon^n$  est l'erreur de troncature (et  $h_t = T/N$ ).

On dit de plus que le schéma (52) est consistant d'ordre  $p \in \mathbb{N}^*$  en temps et  $q \in \mathbb{N}^*$  en espace (en norme  $\|\cdot\|$ ) si pour toute solution régulière  $u$  (du problème exact) il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h_t$  et  $h_x$  telle que

$$\forall N, M \geq 2, \quad \max_{0 \leq n \leq N} \frac{\|\varepsilon^n\|}{h_t^2} \leq C(h_t^p + h_x^q). \quad (56)$$

**Remarque 22.** Notons que la constante  $C$  dans la définition 4 peut dépendre de la solution  $u$  du problème exact.

**Définition 10** (Convergence en norme  $\|\cdot\|$ ). On dit que le schéma numérique (52) converge (ou est convergent) en norme  $\|\cdot\|$  sous la condition  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  si

$$\lim_{\substack{(h_t, h_x) \in \mathcal{S} \\ (h_t, h_x) \rightarrow (0,0)}} \max_{0 \leq n \leq N} \|\tilde{u}^n - u^n\| = 0, \quad (57)$$

avec  $Nh_t = T$  et  $Mh_x = 1$  où  $u$  est la solution du problème exact et  $(\tilde{u}^n)_j = u(t_n, x_j)$ .

De manière similaire, on dit que le schéma numérique (52) converge (ou est convergent) en norme  $\|\cdot\|$  à l'ordre  $p \in \mathbb{N}^*$  en temps et  $q \in \mathbb{N}^*$  en espace sous la condition  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  s'il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h_t$  et  $h_x$  telle que

$$\forall (h_t, h_x) \in \mathcal{S}, \quad \max_{0 \leq n \leq N} \|\tilde{u}^n - u_j^n\| \leq C(h_t^p + h_x^q). \quad (58)$$

On dit enfin que le schéma est convergent (resp. convergent à l'ordre  $p$  en temps et  $q$  en espace) en norme  $\|\cdot\|$  si la définition ci-dessus est vérifiée avec  $\mathcal{S} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ .

Ces définitions sont reliées par le théorème de Lax.

**Théorème 7** (Théorème de Lax). Si le schéma (52) est stable en norme  $\|\cdot\|$  sous la condition  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  et consistant en norme  $\|\cdot\|$  (respectivement consistant d'ordre  $p$  en temps et  $q$  en espace), alors le schéma (52) est convergent en norme  $\|\cdot\|$  (respectivement convergent d'ordre  $p$  en temps et  $q$  en espace) sous la condition  $\mathcal{S}$ .

De plus, si le problème exact (le problème vérifié par  $u$ ) est bien posé, alors la consistance et la stabilité du schéma sont nécessaires à sa convergence.

Le théorème 7 s'applique aussi avec  $\mathcal{S} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ .

**Remarque 23.** On peut imaginer des schémas avec un nombre de pas de temps supérieur à deux. Ces définitions peuvent alors être adaptées à ce cas de figure.

!! FAIRE ATTENTION A CE QUE CETTE SECTION SOIT ADAPTEE POUR L'ETUDE DES SCHEMAS MULTI-PAS DANS LE CAS D'UN PB D'ORDRE UN EN TEMPS (en particulier faut-il un  $h_t^2$  devant  $F^n$  et dans la consistance)!!

!! Remarque : on pourrait construire des caractérisations de la stabilité comme nous l'avons fait en section 3!!

!! adapter ce qui vient d'être fait à l'analyse des schémas à venir!! — Enlever toute cette partie ... (en la reportant dans la partie équation de la chaleur) (faire quand même une remarque quelque part sur ce qu'est la convergence)

### 5.4.2 Analyse de quelques schémas

Une méthode classique pour étudier des schémas à plusieurs pas de temps est de les réécrire comme un schéma "vectoriel" à un pas de temps. Pour cela, introduisons les inconnues

$$v_j^n = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{h_t}, \quad w_j^n = c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h_x}. \quad (59)$$

Nous pouvons montrer que ces inconnues vérifient

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{h_t} - c \frac{w_{j+1}^n - w_j^n}{h_x} = f(t_n, x_j), \quad (60)$$

$$\frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{h_t} = c \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{h_x}. \quad (61)$$

Nous pouvons donc réécrire le schéma (51) comme le schéma à un pas de temps de la forme (29) (nous ne donnons pas ici l'expression de la matrice et du second membre).

Il s'agit d'un schéma explicite où à chaque pas de temps,  $V^{n+1}$  et  $W^{n+1}$  sont calculés comme

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= v_j^n + \frac{ch_t}{h_x}(w_{j+1}^n - w_j^n) + h_t f_j^n, \\ w_j^{n+1} &= w_j^n + \frac{ch_t}{h_x}(v_j^n - v_{j-1}^n) + \left(\frac{ch_t}{h_x}\right)^2 (w_{j+1}^n - 2w_j^n + w_{j-1}^n) + \frac{ch_t^2}{h_x}(f_j^n - f_{j-1}^n). \end{aligned}$$

!! Donner l'initialisation de ce schéma!!

Nous voulons étudier la stabilité de ce schéma au sens de Von Neumann. On considère donc que  $V^n$  et  $W^n$  sont donnés par des ondes spatiales et on calcule le facteur d'amplification qui apparaît au pas de temps suivant. Si pour  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $v_j^n = w_j^n = e^{2i\pi k x_j}$  et  $f_j^n = 0$ , alors  $v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{ch_t}{h_x}(e^{2i\pi k h_x} - 1)w_j^n$  et  $w_j^{n+1} = w_j^n + \frac{ch_t}{h_x}(1 - e^{-2i\pi k h_x})v_j^n + 2\left(\frac{ch_t}{h_x}\right)^2 (\cos(2\pi k h_x) - 1)w_j^n$ . Ainsi, nous avons la relation

$$\begin{pmatrix} v_j^{n+1} \\ w_j^{n+1} \end{pmatrix} = A(k) \begin{pmatrix} v_j^n \\ w_j^n \end{pmatrix},$$

où  $A(k)$  est la matrice d'amplification associée à ce problème. Elle est donnée par

$$A(k) = \begin{pmatrix} 1 & ie^{i\pi k h_x} a(k) \\ ie^{-i\pi k h_x} a(k) & 1 - (a(k))^2 \end{pmatrix},$$

avec  $a(k) = 2\frac{ch_t}{h_x} \sin(\pi k h_x)$ .

Nous admettons le fait qu'une condition nécessaire de stabilité soit que les valeurs propres de cette matrice aient un module  $\leq 1$ . Le discriminant de cette matrice vaut  $\Delta(k) = (a(k))^2[(a(k))^2 - 4]$ . Étant donné que le déterminant de cette matrice vaut 1, le produit de ses deux valeurs propres vaut aussi 1. Il est donc nécessaire que le discriminant reste  $\leq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Nous avons donc la condition nécessaire de stabilité

$$\frac{ch_t}{h_x} \leq 1.$$

Cette condition ne correspond pas à une condition suffisante de stabilité. On peut prouver qu'une condition suffisante est

$$\exists \delta \in ]0, 1[, \quad \delta \text{ indépendant de } h_t \text{ et } h_x \text{ tel que } \frac{ch_t}{h_x} \leq \delta.$$

Pour plus de détails, le lecteur peut se reporter au livre de B. Lucquin (p. 196–201).

!! difficulté : dans le livre de B. Lucquin, il faut réécrire les schémas comme des schémas d'ordre 1!! – Utilise-t-on les def au dessus??!! Il y aurait moyen de les utiliser mais il faudrait refaire toutes les caractérisations!!

!! Une très bonne façon de faire serait de faire les premières démos avec les nouvelles defs et de laisser en exercice un raisonnement sur le système vectoriel — On pourrait ainsi inclure la partie "continue" dans l'exo!!

!! Une autre façon de procéder serait de faire toute l'analyse numérique comme dans le livre puis de faire une section "liens avec l'équation de transport" où on ferait l'étude continue avec la méthode des caractéristiques!! — On va choisir cette option : l'analyse avec plusieurs pas de temps est très compliquée!!

!! toute cette analyse a l'air compliquée : une possibilité serait de juste évoquer les schémas sans les analyser!!

!! analyse schéma intro!!

!! interpretation CFL!!

!! vérifier qu'il n'y a pas besoin de stabilité dans d'autres normes que celle proposée!!

!! schéma implicite!! +  $\theta$ -schéma en exo

!! exo final sur formulation mixte!! + dernière question : légère modif rend le schéma instable!!

!! exercice avec conditions de Dirichlet non homogènes??

### 5.4.3 Détermination pratique des ordres de convergence

!! expliquer comment ça marche + figures + exo : retrouver les figures!!

!! exercice sur les ordres de convergence : figure avec échelle logarithmique!!

## 5.5 Étude du problème de Neumann

!! faire d'autres conditions limites (Neumann)??

## 6 Pour aller plus loin

!! Écrire tous les exercices au fur et à mesure et les reporter dans une section à la fin du poly!!

!! les éléments de cette section sont hors-programme mais ne sont pas déconnectés de celui-ci au sens où ils peuvent être utilisés dans un texte (ils seront alors présentés)!!!! Ne travailler cette section qu'une fois que les autres sont parfaitement maîtrisées!!

### 6.1 Équation de transport dans un domaine multi-dimensionnel

!! Ajouter une annexe sur les EDO + y faire référence dans la première section d'analyse numérique!!

## 6.2 Équation de Burgers

## 6.3 Recherche de solutions faibles à l'équation de la chaleur

!! AJOUTER UN CHAPEAU A CETTE SECTION!!

Cette section constitue une preuve à la proposition 13.

!! Est-ce qu'on peut prouver l'unicité de la solution dans un espace particulier ?? (pas juste dans l'espace des solutions de cette forme) — On a l'unicité avec la Proposition de stabilité!! — Il suffit juste de spécifier la régularité de cette solution particulière!!

Cette démonstration est issue du livre de B. Lucquin. On note  $\Omega = (0, 1)$ .

• Recherche d'une solution : On utilise une base orthogonale de fonctions propres de l'opérateur  $-\Delta$ . On note  $w_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$  et  $\lambda_k = (k\pi)^2$ . On peut montrer que l'on a

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} w'_k(x) v'(x) dx = \lambda_k \int_{\Omega} w_k(x) v(x) dx.$$

!! Donner le lien avec la réduction d'endomorphismes!! + dire qui est  $\mathcal{A}$ !!

Pour  $k \geq 1$ , la fonction  $w_k$  est donc un vecteur propre de  $\mathcal{A}$  associé à la valeur propre  $\lambda_k$ . On cherche la solution  $u$  sous la forme

$$u(t, x) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} u_{\ell}(t) w_{\ell}(x). \quad (62)$$

Les fonctions  $w_k$  vérifient  $\int_{\Omega} w_k(x) w_{\ell}(x) dx = \delta_{k\ell}$  où  $\delta_{k\ell}$  représente le symbole de Kronecker.

L'équation de la chaleur sous sa forme variationnelle peut être écrite

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x) v(x) dx + \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \frac{\partial v}{\partial x}(x) dx = \int_{\Omega} f(t, x) v(x) dx.$$

En cherchant  $u$  sous la forme (62) et en prenant  $v = w_k$ , on obtient pour tout  $k \geq 1$ ,  $u'_k(t) + \lambda_k u_k(t) = \int_{\Omega} f(t, x) w_k(x) dx$ . La condition initiale donne  $u_k(0) = \int_{\Omega} u_0(x) w_k(x) dx$ . Les fonctions  $u_k$  vérifient donc

$$\forall t \in [0, T], \quad u_k(t) = \int_{\Omega} u_0(x) w_k(x) dx e^{-\lambda_k t} + \int_0^t \int_{\Omega} f(s, x) w_k(x) dx e^{-\lambda_k(t-s)} ds. \quad (63)$$

Il faut maintenant montrer que la série de fonctions (62) définie à partir de (63) converge dans les espaces  $C^0([0, T]; L^2(0, 1))$  et  $L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$ . Pour cela, nous allons considérer la suite  $(u^{(n)})_n$  avec  $u^{(n)}(t, x) = \sum_{\ell=1}^n u_{\ell}(t) w_{\ell}(x)$ . Ces deux espaces étant dans des espaces de Hilbert, nous allons montrer que cette suite est de Cauchy dans chacun de ces espaces.

• Convergence dans l'espace  $C^0([0, T]; L^2(0, 1))$  : en utilisant l'orthogonalité des  $w_k$ , nous avons pour  $0 \leq m \leq n$ ,

$$\begin{aligned} \|u^{(n)}(t, \cdot) - u^{(m)}(t, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 &= \left\| \sum_{\ell=m+1}^n u_{\ell}(t) w_{\ell} \right\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{k,\ell=m+1}^n u_{\ell}(t) u_k(t) (w_{\ell}, w_k)_{L^2(0,1)} \\ &= \sum_{k,\ell=m+1}^n u_{\ell}(t) u_k(t) \delta_{k\ell} = \sum_{\ell=m+1}^n (u_{\ell}(t))^2. \end{aligned}$$

On note

$$a_k(t) = (u_0, w_k)_{L^2(0,1)} e^{-\lambda_k t}, \quad b_k(t) = \int_0^t (f(s, \cdot), w_k)_{L^2(0,1)} e^{-\lambda_k(t-s)} ds.$$

En utilisant (63) et l'inégalité de Young, on a  $(u_k(t))^2 = (a_k(t) + b_k(t))^2 \leq 2(a_k(t)^2 + b_k(t)^2)$ . Ainsi,

$$\|u^{(n)}(t, \cdot) - u^{(m)}(t, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq 2(A_{n,m}(t) + B_{n,m}(t)),$$

avec

$$A_{n,m}(t) = \sum_{\ell=m+1}^n (a_\ell(t))^2, \quad B_{n,m}(t) = \sum_{\ell=m+1}^n (b_\ell(t))^2.$$

Pour  $t \geq 0$ , on a  $A_{n,m}(t) \leq \sum_{\ell=m+1}^n (u_0, w_\ell)_{L^2(0,1)}^2$ . Étant donné que les  $w_k$  forment une base hilbertienne de  $L^2(0,1)$  et que  $u_0 \in L^2(0,1)$ , on a  $u_0 = \sum_{\ell=1}^{+\infty} (u_0, w_\ell)_{L^2(0,1)} w_\ell$  et avec l'égalité de Parseval, on a  $\|u_0\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{\ell=1}^{+\infty} (u_0, w_\ell)_{L^2(0,1)}^2$ . La série de terme général  $(u_0, w_\ell)_{L^2(0,1)}^2$  converge donc et on a  $\sup_{t \in [0,T]} |A_{n,m}(t)| \rightarrow 0$  quand  $n$  et  $m \rightarrow +\infty$ .

!! VERIFIER QU'ON A BIEN UNE BASE HILBERTIENNE DANS  $L^2$  ET  $H_0^1$  !!

Montrons maintenant le même résultat sur  $B_{n,m}(t)$ . On a

$$\begin{aligned} \left( \int_0^t (f(s, \cdot), w_k)_{L^2(0,1)} e^{-\lambda_k(t-s)} ds \right)^2 &\leq \left( \int_0^t (f(s, \cdot), w_k)_{L^2(0,1)}^2 ds \right) \left( \int_0^t e^{-2\lambda_k(t-s)} ds \right) \\ &\leq \frac{1}{2\lambda_k} \left( \int_0^t (f(s, \cdot), w_k)_{L^2(0,1)}^2 ds \right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi^2} \left( \int_0^T (f(s, \cdot), w_k)_{L^2(0,1)}^2 ds \right), \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz et  $\lambda_k = k^2\pi^2 \geq \pi^2$ . De plus, comme  $f \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$ , pour presque tout  $s \in [0, T]$ ,  $f(s, \cdot)$  appartient à  $L^2(0, 1)$ . D'après l'égalité de Parseval, pour presque tout  $s \in [0, T]$ ,  $\|f(s, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{\ell=1}^{+\infty} (f(s, \cdot), w_\ell)_{L^2(0,1)}^2$ . Ainsi,  $\|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 = \int_0^T \sum_{\ell=1}^{+\infty} (f(s, \cdot), w_\ell)_{L^2(0,1)}^2 ds$ .

On peut donc montrer que la série de terme général  $\int_0^T (f(s, \cdot), w_k)_{L^2(0,1)}^2 ds$  converge (en étant bornée par  $\|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2$ ). Donc  $\sup_{t \in [0,T]} |B_{n,m}(t)| \rightarrow 0$  quand  $n$  et  $m \rightarrow +\infty$ .

La suite  $(u^{(n)})$  est donc de Cauchy dans  $C^0([0, T]; L^2(0, 1))$  et converge donc.

• Convergence dans l'espace  $L^2([0, T]; H_0^1(0, 1))$  : La norme  $|u|_{1,\Omega}^2 = \int_0^1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \mathcal{A}(u, u)$  est une norme sur  $H_0^1(0, 1)$  équivalente à la norme usuelle (par l'inégalité de Poincaré, voir (...)). On a

$$\begin{aligned} |(u^{(n)} - u^{(m)})(s, \cdot)|_{1,\Omega}^2 &= \mathcal{A}((u^{(n)} - u^{(m)})(s, \cdot), (u^{(n)} - u^{(m)})(s, \cdot)) \\ &= \sum_{k,\ell=m+1}^n u_k(s) u_\ell(s) \mathcal{A}(w_k, w_\ell) \\ &= \sum_{k,\ell=m+1}^n u_k(s) u_\ell(s) \lambda_k \delta_{k\ell} = \sum_{k=m+1}^n \lambda_k (u_k(s))^2. \end{aligned}$$



On montre donc que  $\|(u^{(n)} - u^{(m)})(s, \cdot)\|_{1,\Omega}^2 \leq 2(C_{n,m}(t) + D_{n,m}(t))$  avec

$$C_{n,m}(t) := \sum_{\ell=m+1}^n \lambda_\ell (a_\ell(t))^2, \quad D_{n,m}(t) := \sum_{\ell=m+1}^n \lambda_\ell (b_\ell(t))^2.$$

En raisonnant comme précédemment, on a

$$\int_0^T \lambda_k e^{-2\lambda_k s} (u_0, w_k)_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \frac{1}{2} (u_0, w_k)_{L^2(\Omega)}^2,$$

et la série de terme général  $(u_0, w_k)_{L^2(\Omega)}^2$  converge par l'égalité de Parseval. Donc  $\int_0^T C_{n,m}(s) ds \rightarrow 0$  quand  $n$  et  $m \rightarrow +\infty$ .

De la même façon,

$$\begin{aligned} \int_0^T \lambda_k \left( \int_0^t (f(s, \cdot), w_k)_{L^2(0,1)} e^{-\lambda_k(t-s)} ds \right)^2 dt &\leq \int_0^T \lambda_k \left( \int_0^t (f(s, \cdot), w_k)_{L^2(0,1)}^2 ds \right) \left( \int_0^t e^{-2\lambda_k(t-s)} ds \right) dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \left( \int_0^t (f(s, \cdot), w_k)_{L^2(0,1)}^2 ds \right) dt \\ &\leq \frac{T}{2} \left( \int_0^T (f(s, \cdot), w_k)_{L^2(0,1)}^2 ds \right). \end{aligned}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, la série de terme général  $\int_0^T (f(s, \cdot), w_k)_{L^2(0,1)}^2 ds$  converge.

Nous avons donc montré que la suite  $(u^{(n)})$  est de Cauchy et donc converge dans  $L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$ .

• Solution de l'équation : montrons maintenant que  $u$  définie par (62) avec (63) vérifie l'équation (43) au sens faible.

Soit  $v \in H_0^1(\Omega)$ . On note comme précédemment  $u^{(N)}(t, x) := \sum_{\ell=1}^N u_\ell(t) w_\ell(x)$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (u^{(N)}(t, \cdot), v)_{L^2(\Omega)} &= \sum_{k=1}^N -\lambda_k (u_0, w_k)_{L^2(\Omega)} (w_k, v)_{L^2(\Omega)} e^{-\lambda_k t} + (f(t, \cdot), w_k)_{L^2(\Omega)} (w_k, v)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - \lambda_k \int_0^t (f(s, \cdot), w_k)_{L^2(\Omega)} (w_k, v)_{L^2(\Omega)} e^{-\lambda_k(t-s)} ds \\ &= \sum_{k=1}^N -((u_0, w_k)_{L^2(\Omega)} e^{-\lambda_k t} + \int_0^t (f(s, \cdot), w_k)_{L^2(\Omega)} e^{-\lambda_k(t-s)} ds) \mathcal{A}(w_k, v) \\ &\quad + (f(t, \cdot), w_k)_{L^2(\Omega)} (w_k, v)_{L^2(\Omega)} \\ &= -\mathcal{A}(u^{(N)}(t, \cdot), v) + \sum_{k=1}^N (f(t, \cdot), w_k)_{L^2(\Omega)} (w_k, v)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Quand  $N \rightarrow +\infty$ ,  $u^{(N)}$  converge vers  $u$  dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ . De plus, (...)

!! MONTRER QUE  $\sum_{k=1}^N (f(t, \cdot), w_k)_{L^2(\Omega)} (w_k, v)_{L^2(\Omega)} \rightarrow (f, v)$  !!

Donc  $t \mapsto (u(t, \cdot), v)_{L^2(\Omega)}$  est dérivable presque pour tout  $t \in [0, T]$  et  $u$  vérifie (...)

!! A COMPLETER!!

!! LA SOLUTION PORTE SUR LA FORMULATION VARIATIONNELLE SEULEMENT!!

!! EN QUOI LA FORMULATION VARIATIONNELLE IMPLIQUE LA FORMULATION FORTE??

## A Principales propriétés de la transformée de Fourier

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = i\omega \mathcal{F}(u), \quad (64)$$

$$\mathcal{F}(u \times v) = \mathcal{F}(u) * \mathcal{F}(v), \quad (65)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(u)) = u, \quad (66)$$

avec  $u * v$  le produit de convolution. Les propriétés (65) sont aussi vérifiées par  $\mathcal{F}^{-1}$ , les preuves sont similaires et ne sont pas données dans ce document.