Introduction aux équations aux dérivées partielles

Avant-propos

Le but de ce cours est de vous proposer une introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles (EDP dans la suite). Nous étudierons plusieurs équations ainsi que leur discrétisation par la méthode des différences finies.

Dans le cadre du programme officiel de la préparation à l'agrégation de mathématiques (épreuve de modélisation), nous aborderons notamment :

— des notions élémentaires portant sur les EDP classiques en dimension 1,

— l'équation de transport linéaire avec la méthode des caractéristiques,

— l'équation des ondes et de la chaleur ; une résolution par série de Fourier et transformée de Fourier sera proposée ainsi qu'une méthode de séparation des variables. Les aspects qualitatifs seront abordés.

— les équations elliptiques avec l'utilisation du théorème de Lax–Milgram

— des exemples de discrétisation des EDP en dimension 1 avec la méthode des différences finies. L'étude des propriétés de ces discrétisations sera proposée : notions de consistance, stabilité, convergence et d'ordre.

Vous êtes par ailleurs invités à lire le rapport du jury (disponible sur internet). Vous vous rendrez compte que le jury insiste notamment sur le fait que :

— l'épreuve de modélisation, comme les autres, requiert de la rigueur mathématique,

— il faut équilibrer sa présentation entre une présentation du modèle étudié, des preuves mathématiques rigoureuses, des illustrations informatiques,

— il attend une prise de recul de la part des candidats. Il faudra donc notamment être capable de critiquer les limites du modèle présenté dans le texte, d'expliquer le comportement qualitatif de celui-ci (par exemple expliquer ce qu'il se passe quand la valeur d'un paramètre change) et être capable de conclure sur la problématique de départ.

Ce cours sera composé de

— cinq séances de cours de deux heures chacune,

— une séance de programmation de deux heures.

Dans une première partie, nous présenterons les équations étudiées dans ce cours en donnant une idée des problèmes physiques associés. Chacune des parties suivantes sera consacrée à l'étude plus approfondie d'une EDP. Nous y traiterons notamment les principales caractéristiques de cette EDP, les outils utilisés pour mener des preuves ainsi qu'une discrétisation par différences finies. Les EDP étudiées dans la suite seront les équations elliptiques, l'équation de transport, l'équation de la chaleur et enfin l'équation des ondes.

1 Présentation des EDP du cours

Nous présentons dans cette section les EDP étudiées dans la suite du cours. Nous essayons de donner une signification physique aux différents termes.

Nous nous intéressons à des EDP de la forme

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = F.$$

Pour déterminer la nature de l'EDP, on associe à chaque dérivée la variable qui correspond à la direction de dérivation. L'équation précédente devient donc

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = F.$$

S'il s'agit de l'équation :

— d'une ellipse, on dira que l'équation est elliptique ;

— d'une parabole, on dira que l'équation est parabolique ;

— d'une hyperbole, on dira que l'équation est hyperbolique.

Cette dénomination n'est pas juste esthétique. En effet, comme nous le verrons plus loin dans ce cours, chacun de ces types d'équations dispose de propriétés spécifiques.

Notons également que les équations précédentes dépendent de deux variables d'espace. La dénomination précédente se généralise dans le cas où on aurait une seule variable ou strictement plus de deux variables. Dans le cadre de ce cours, nous nous concentrerons sur l'étude déquations avec une seule dimension d'espace. On considérera donc une seule variable x dans le cas d'un problème stationnaire et deux variables t (le temps) et x (l'espace) dans le cas d'un problème instationaire.

Dans la suite de ce cours, on notera Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ avec $d = 1, 2, 3$.

1.1 Équations elliptiques

Les équations elliptiques apparaissent principalement dans deux contextes que nous allons maintenant aborder. Le premier est le cas où des particules circulent dans un domaine.