Analyse du schéma d'Euler explicite

1 Présentation du schéma d'Euler explicite

On cherche à approcher numériquement une EDO de la forme

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \text{ sur } [t_0, T], \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

où f et y_0 sont des données du problème. Ici on considère que le problème est scalaire : $y(t) \in \mathbb{R}$. On peut raisonner de manière analogue s'il est vectoriel : $y(t) \in \mathbb{R}^d$.

Pour approcher numériquement le problème (1), on découpe l'intervalle $[t_0, T]$ en N sous-intervalles de longueur uniforme. La longueur de ces sous-intervalles est appelée pas de discrétisation. On la note

$$h = \frac{T - t_0}{N}.$$

On définit ainsi une discrétisation de l'intervalle $[t_0, T]$ avec les temps $t_k = t_0 + kh$ avec $0 \leq k \leq N$.

Le schéma d'Euler consiste à approcher la dérivée par un taux d'accroissement :

$$y'(t_k) \simeq \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h}. \tag{2}$$

On cherche donc à calculer les termes d'une suite $(y_k)_{0 \leq k \leq N}$ en remplaçant dans (1) la dérivée par le taux d'accroissement (2). Ceci revient donc à calculer la suite $(y_k)_{0 \leq k \leq N}$ par récurrence comme :

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \qquad 0 \leq k \leq N-1, \\ y_0 = y(t_0). \end{cases}$$

Nous voyons que la valeur de y_{k+1} peut être calculée de manière explicite à partir de la valeur de y_k. C'est pour cela que l'on parle de schéma d'Euler explicite.

Dans l'ensemble de ce document on utilise les notations standards qui consistent à noter (y_k) la suite calculée par le schéma d'Euler explicite et $y(t)$ la solution exacte (solution de (1)) au temps $t \in [t_0, T]$. Le but d'une telle approche est de construire une suite (y_k) qui s'approche des $(y(t_k))$. Nous allons maintenant étudier sous quelles conditions y_k est une bonne approximation de $y(t_k)$.

2 Analyse du schéma

Pour introduire le schéma d'Euler explicite, nous avons approché une dérivée par un taux d'accroissement. Cette approximation est correcte dans la limite $h \to 0$ (ou de manière équivalente $N \to +\infty$). Nous allons maintenant étudier le comportement de ce schéma dans cette limite. Pour cela, nous définissons un certain nombre de notions.

Si l'on se place dans le cadre plus général des schémas explicites à un pas de temps, le problème consiste (en considérant que $y_0 = y(t_0)$) à construire une suite (y_k) à partir de la relation de récurrence

$$y_{k+1} = y_k + hF(t_k, y_k, h), \tag{3}$$

où h est le pas de discrétisation et F est une fonction à trois variables donnée qui détermine le schéma utilisé. Par exemple, dans le cas du schéma d'Euler explicite on a $F(t, y, h) = f(t, y)$.

Définition 1 (Erreur de consistance)**.** *On appelle erreur de consistance la quantité*

$$\varepsilon_k = y(t_{k+1}) - y(t_k) - hF(t_k, y(t_k), h).$$

Il s'agit de la différence entre la solution exacte au temps t_{k+1} et la solution générée par le schéma (3) à partir de la solution exacte au temps t_k. Nous voyons donc que cette erreur correspond à l'erreur générée par le schéma au cours de la résolution dans l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$.

Définition 2 (Consistance)**.** *On dit que le schéma* (3) *est consistant si*

$$\lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{N-1} |\varepsilon_k| = 0,$$

où ε_k est l'erreur de consistance définie précédemment.

Notons que la notion de consistance se fait par rapport à un problème continu (ici (1)) puisqu'on utilise la solution exacte $y(t)$. Cette notion consiste donc à dire que l'erreur du schéma générée au cours de toutes les itérations tend vers 0 quand le pas de discrétisation tend vers 0.

Définition 3 (Stabilité)**.** *Le schéma* (3) *est stable s'il existe une constante $C > 0$ indépendante de N (et donc de h) telle que pour toute suite $(\eta_k)_{0\leq k\leq N}$, les suites (y_k) et (z_k) définies comme*

$$y_0 \in \mathbb{R} \quad et \quad y_{k+1} = y_k + hF(t_k, y_k, h),$$
$$z_0 = y_0 + \eta_0 \quad et \quad z_{k+1} = z_k + hF(t_k, z_k, h) + \eta_{k+1},$$

vérifient

$$\sup_{0\leq k\leq N} |y_k - z_k| \leq C \sum_{n=0}^{N} |\eta_n|.$$

Cette notion correspond à dire que si une erreur de calcul s'introduit (ici l'erreur de calcul est le η_k) alors la solution sera perturbée de manière "continue" par rapport à cette erreur de calcul.

En pratique, des erreurs de calcul apparaissent lors des opérations informatiques. Ces erreurs sont très petites par rapport à la solution du problème. Ainsi, si le schéma est stable, ces erreurs seront négligeables et ne dégraderont pas le résultat final.

Définition 4 (Convergence)**.** *Le schéma* (3) *converge (ou est convergent) si*

$$\lim_{h\to 0} \sup_{0\leq k\leq N} |y_k - y(t_k)| = 0.$$

!! ordre !!

Théorème 1 (...)**.** *a*

3 Un exemple

!! but : 3–4 pages!!