Analyse du schéma d'Euler explicite

1 Présentation du schéma d'Euler explicite

On cherche à approcher numériquement sur l'intervalle $[t_0, T]$ une équation aux dérivées ordinaires (EDO) de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \text{ sur } [t_0, T], \\ y(t_0) = y_0, \end{array} \right. \tag{1}$$

où $f : [t_0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ sont des données du problème. Ici on considère que le problème est scalaire ($y(t) \in \mathbb{R}$), on peut raisonner de manière analogue s'il est vectoriel ($y(t) \in \mathbb{R}^d$).

Pour approcher numériquement le problème (1), on découpe l'intervalle $[t_0, T]$ en N sous-intervalles de longueur uniforme. La longueur de ces sous-intervalles est appelée pas de discrétisation. On la note

$$h = \frac{T - t_0}{N}.$$

On définit ainsi une discrétisation de l'intervalle $[t_0, T]$ avec les temps $t_k = t_0 + kh$ avec $0 \leq k \leq N$.

Le schéma d'Euler consiste à approcher la dérivée par un taux d'accroissement :

$$y'(t_k) \simeq \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h}. \tag{2}$$

On cherche donc à calculer les termes d'une suite $(y_k)_{0 \leq k \leq N}$ en remplaçant dans (1) la dérivée par le taux d'accroissement (2). Ceci revient donc à calculer la suite $(y_k)_{0 \leq k \leq N}$ par récurrence comme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), & 0 \leq k \leq N - 1, \\ y_0 = y(t_0). & \end{array} \right.$$

Nous voyons que la valeur de y_{k+1} peut être calculée de manière explicite à partir de la valeur de y_k. C'est pour cela que l'on parle de schéma d'Euler explicite.

Dans l'ensemble de ce document on utilise les notations standards qui consistent à noter (y_k) la suite calculée par le schéma d'Euler explicite et $y(t)$ la solution exacte (solution de (1)) au temps $t \in [t_0, T]$. Le but d'une telle approche est de construire une suite (y_k) qui s'approche des $(y(t_k))$. Nous allons maintenant étudier sous quelles conditions y_k est une bonne approximation de $y(t_k)$.

2 Analyse des schémas explicites à un pas

Pour introduire le schéma d'Euler explicite, nous avons approché une dérivée par un taux d'accroissement. Cette approximation est correcte dans la limite $h \to 0$ (ou de manière équivalente $N \to +\infty$). Nous allons maintenant définir un certain nombre de notions qui traitent du comportement de la suite (y_k) quand $h \to 0$. Nous exposons ces notions dans le cadre plus général des schémas explicites à un pas de temps. On considère donc que la suite (y_k) est générée par $y_0 = y(t_0)$ et

$$y_{k+1} = y_k + hF(t_k, y_k, h), \qquad (k \geq 0), \tag{3}$$

où h est le pas de discrétisation et F est une fonction à trois variables donnée qui dépend du schéma utilisé. Par exemple, dans le cas du schéma d'Euler explicite on a $F(t, y, h) = f(t, y)$.

Définition 1 (Erreur de consistance)**.** *On appelle erreur de consistance la quantité*

$$\varepsilon_k = y(t_{k+1}) - y(t_k) - hF(t_k, y(t_k), h).$$

Il s'agit de la différence entre la solution exacte au temps t_{k+1} et la solution générée par le schéma (3) à partir de la solution exacte au temps t_k. Cette erreur correspond donc à l'erreur générée par le schéma au cours de la résolution dans l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$.

Définition 2 (Consistance)**.** *On dit que le schéma* (3) *est consistant si*

$$\lim_{h \to 0} \sum_{k=0}^{N-1} |\varepsilon_k| = 0,$$

où ε_k est l'erreur de consistance définie précédemment.

Notons que la notion de consistance se fait par rapport à un problème continu (ici (1)) puisqu'on utilise la solution exacte $y(t)$. Cette notion consiste donc à dire que l'erreur du schéma générée au cours de toutes les itérations tend vers 0 quand le pas de discrétisation tend vers 0.

Définition 3 (Ordre)**.** *On dit que le schéma* (3) *est d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ s'il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que*

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\varepsilon_k| \leq Ch^p.$$

Notons tout d'abord que si le schéma est d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$, alors il est consistant. Cette notion d'ordre permet de quantifier la consistance d'un schéma : plus l'ordre du schéma est élevé plus la somme des erreurs de consistance tend rapidement vers 0.

Définition 4 (Stabilité)**.** *Le schéma* (3) *est stable s'il existe une constante $C > 0$ indépendante de N (et donc de h) telle que pour toute suite $(\eta_k)_{0 \leq k \leq N}$, les suites (y_k) et (z_k) définies comme*

$$y_0 \in \mathbb{R} \quad et \quad y_{k+1} = y_k + hF(t_k, y_k, h),$$
$$z_0 = y_0 + \eta_0 \quad et \quad z_{k+1} = z_k + hF(t_k, z_k, h) + \eta_{k+1},$$

vérifient

$$\sup_{0 \leq k \leq N} |y_k - z_k| \leq C \sum_{n=0}^{N} |\eta_n|.$$

Cette notion correspond à dire que si une erreur de calcul s'introduit (ici l'erreur de calcul est le η_k) alors la solution sera perturbée de manière "continue" par rapport à cette erreur de calcul. Ici, (y_k) est la solution numérique attendue et (z_k) est la solution numérique obtenue après perturbation.

En pratique, des erreurs de calcul apparaissent lors des opérations informatiques. Ces erreurs sont très petites par rapport aux valeurs de la solution du problème. Ainsi, si le schéma est stable, ces erreurs sont négligeables et ne dégradent pas le résultat final.

Définition 5 (Convergence)**.** *Le schéma* (3) *converge (ou est convergent) si*

$$\lim_{h\to 0} \sup_{0\le k\le N} |y_k - y(t_k)| = 0.$$

La convergence d'un schéma assure que les valeurs données par celui-ci tendent vers les valeurs exactes de l'EDO quand $h \to 0$. Il s'agit donc de la propriété principale que l'on recherche puisqu'elle garantit un bon comportement du schéma quand $h \to 0$. En pratique, on démontre la convergence à partir de la consistance et de la stabilité grâce au théorème suivant.

Théorème 1. *Si le schéma* (3) *est consistant et stable, alors il est convergent. Si de plus ce schéma est d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$, alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que* $\sup_{0\le k\le N} |y_k - y(t_k)| \le Ch^p$.

Nous voyons ici, que comme pour la notion d'ordre, on peut quantifier la convergence du schéma. En fait, plus l'ordre du schéma est élevé, plus celui-ci converge vite (sous réserve qu'il soit stable).

3 Application au schéma d'Euler explicite

On s'intéresse dans cette section à l'analyse du schéma d'Euler explicite. Nous allons montrer que, sous certaines conditions, ce schéma est consistant et d'ordre 1 et qu'il est stable. En appliquant le théorème 1, nous savons alors qu'il vérifie

$$\sup_{0\le k\le N} |y_k - y(t_k)| \le Ch.$$

Proposition 1. *On suppose que f est continue sur $[t_0, T] \times \mathbb{R}$, alors le schéma d'Euler explicite est d'ordre 1.*

Démonstration. Étant donnée que f est continue, toute solution de (1) est de classe C^1. Nous pouvons alors écrire le développement de Taylor

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) &= y(t_k) + hy'(t_k) + O(h^2) \\ &= y(t_k) + hf(t_k, y(t_k)) + O(h^2). \end{aligned}$$

Ainsi, l'erreur de consistance vaut $\varepsilon_k = y(t_{k+1}) - y(t_k) - hf(t_k, y(t_k)) = O(h^2)$. Donc

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\varepsilon_k| = O(h),$$

et le schéma est d'ordre 1. □

Proposition 2. *On suppose que f est globalement Lipschitzienne par rapport à sa variable y uniformément en sa variable t, i.e. $\exists L > 0, \forall y, z \in \mathbb{R}, \forall t \in [t_0, T], |f(t,y) - f(t,z)| \leq L|y-z|$. Alors le schéma d'Euler explicite est stable.*

Démonstration. On définit (y_n) la solution du schéma d'Euler explicite et (z_n) une solution avec des perturbations à chaque pas de temps.

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + hf(t_k, y_k), \\ z_{k+1} &= z_k + hf(t_k, z_k) + \eta_{k+1}, \end{aligned}$$

avec $z_0 = y_0 + \eta_0$. Ainsi, pour $0 \leq k \leq N-1$,

$$|z_{k+1} - y_{k+1}| \leq (1 + Lh)|z_k - y_k| + |\eta_{k+1}|.$$

En appliquant le Lemme de Grönwall discret (voir par exemple wikipedia), on obtient

$$\begin{aligned} |z_k - y_k| &\leq e^{(t_k - t_0)L}|\eta_0| + \sum_{i=0}^{k-1} e^{L(t_k - t_{i+1})}|\eta_{i+1}| \\ &\leq e^{(T-t_0)L} \sum_{i=0}^{N} |\eta_i|. \end{aligned}$$

Le schéma est donc stable. □

Ainsi, si on se place dans le cadre du théorème de Cauchy–Lipschitz global (f continue et globalement Lipschitzienne par rapport à y uniformément en t) il existe une unique solution au problème (1) et le schéma d'Euler explicite converge vers cette solution (à l'ordre 1).