TP EDP : Laplacien et équation de transport

1 Problème de Laplace et différentes conditions aux limites

On se place dans le cadre d'un domaine unidimensionnel $\Omega = (0,1)$. On s'intéresse à l'équation de Laplace

$$-u''(x) = f(x), \tag{1}$$

où on cherche u et f est une fonction connue. Cette équation est complétée par des conditions aux limites (on considérera plusieurs possibilités). Le domaine $(0,1)$ est maillé en $M > 0$ sous-divisions de longueur $h = 1/M$. On définit les points $x_j = jh$ ($0 \leq j \leq M$). On veut ensuite construire une suite (u_j) dont le terme général approche la valeur de u au point x_j. Le schéma de différences finies choisi consiste à approcher $u''(x_j) \simeq \frac{u(x_{j+1})-2u(x_j)+u(x_{j-1})}{h^2}$.

Pour chaque condition aux limites considérée ci-dessous, on vous demande de coder la matrice A et le vecteur F. On pourra ensuite calculer numériquement U et afficher sur un graphe la solution obtenue (u_j) (en ordonnées) en fonction de la position des points (x_j) (en abscisses). On pourra aussi comparer ce résultat aux valeurs exactes $(u(x_j))$ (sur le même graphe).

1.1 Conditions de Dirichlet homogènes

On considère les conditions aux limites

$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 0. \tag{2}$$

La méthode de différences finies consiste alors à résoudre le problème $AU = F$ avec

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{M-1} \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{M-1}) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

La suite (u_j) est alors donnée par le vecteur U ainsi que $u_0 = u_M = 0$.

On pourra par exemple considérer $f(x) = x$ avec pour solution associée $u(x) = \frac{x}{6}(1 - x^2)$ (dans ce cas vérifier que l'on retrouve la solution exacte par la méthode des DF). On pourra aussi considérer $f(x) = x^2$ et $u(x) = \frac{x}{12}(1 - x^3)$ (dans ce cas vérifier que l'on n'obtient pas exactement la solution exacte du problème).

1.2 Conditions de Dirichlet non homogènes

On considère les conditions aux limites

$$u(0) = \alpha, \qquad u(1) = \beta, \tag{4}$$

où α et β sont des réels connus. On a vu (cf cours) que, dans ce cas, la solution exacte est celle du problème homogène à laquelle on ajoute le relèvement $\alpha(1 - x) + \beta x$.

La méthode des différences finies consiste à résoudre le problème $AU = F$ avec A et U donnés par (3) et F donné par

$$F = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{M-2}) \\ f(x_{M-1}) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Les valeurs de la suite sont alors celles de U que l'on complète par $u_0 = \alpha$ et $u_M = \beta$.

On pourra, par exemple, considérer $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{12}$, $f(x) = x^2$ et $u(x) = \frac{x}{12}(1 - x^3) + \frac{x}{12}$. (N'hésitez pas à essayer d'autres valeurs.)

1.3 Conditions mixtes

On considère les conditions aux limites

$$u(0) = 0, \qquad u'(1) = 0. \tag{6}$$

On parle de conditions mixtes car il y a une condition de Dirichlet à gauche et une condition de Neumann à droite. On impose $u_0 = 0$ et $\frac{u_{M-1} - u_M}{h} = 0$.

On résout le problème $AU = F$ avec

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{M-1} \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{M-1}) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

La suite (u_j) est alors donnée par le vecteur U ainsi que $u_0 = 0$ et $u_M = u_{M-1}$.

On pourra, par exemple, considérer $f(x) = x^2$ et $u(x) = \frac{x}{3}(1 - \frac{x^3}{4})$.

1.4 Conditions de Neumann (facultatif)

(facultatif : à faire seulement après avoir traité les autres sections)

2 Équation de transport

Dirichlet

2.1 Schéma centré

2.2 Schéma décentré

3 Équation de la chaleur et des ondes (facultatif)

(facultatif : à faire seulement après avoir traité les autres sections)

Utiliser le code développé pour le Laplacien pour simuler l'équation des ondes et de la chaleur (se reporter au cours pour la discrétisation).