

Séptima Práctica Dirigida Grupo N°3

ANÁLISIS Y MODELAMIENTO NUMÉRICO I CM4F1 B

Profesor Ángel Enrique Ramírez Gutiérrez.

Aldo Luna Bueno

Alejandro Escobar Mejia

Carlos Aznarán Laos

Brian Huaman Garcia

Khalid Izquierdo Ayllon

Carlos Malvaceda Canales

Facultad de Ciencias

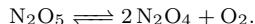
Universidad Nacional de Ingeniería

4 de julio del 2023

Lista de N° de pregunta / estudiante

Pregunta N°5	Khalid Zaid Izquierdo Ayllón
Pregunta N°9	Alejandro Escobar Mejia
Pregunta N°17	Brian Alberto Huamán Garcia
Pregunta N°23	Carlos Alonso Aznarán Laos
Pregunta N°28	Aldo Luna Bueno
Pregunta N°29	Carlos Daniel Malvaceda Canales

5. El pentóxido de dinitrógeno gaseoso puro $N_2O_{5(g)}$ reacciona en un reactor intermitente según la reacción estequiométrica



Calculamos la concentración de pentóxido de dinitrógeno existente en ciertos instantes, obteniendo los siguientes datos:

Tiempo (s)	0	200	400	650	1100	1900	2300
Concentración (mm)	5.5	5.04	4.36	3.45	2.37	1.32	0.71

Si lo tenemos en el reactor un tiempo máximo de 35 minutos (2100 segundos), determine la concentración de pentóxido de dinitrógeno que queda sin reaccionar, usando el polinomio de Taylor, Lagrange y Newton por diferencias divididas implementado.

Solución

9. Dada la tabla de valores

x_i	-1	0	1
y_i	13	7	9

- a) Determine el spline cúbico natural que interpola estos datos, imponiendo las condiciones requeridas y resolviendo el sistema.
- b) Dibujar el spline completo que interpola los datos, suponiendo que las derivadas primeras del spline en los nodos inicial y final son -5 y 5, respectivamente.

Solución

a) .

17. Sea $f(x) = \exp(x)$ para $0 \leq x \leq 2$.

- a) Aproxime $f(0.25)$ mediante la interpolación lineal con $x_0 = 0$ y $x_1 = 0.5$.
- b) Aproxime $f(0.75)$ mediante interpolación lineal con $x_0 = 0.5$ y $x_1 = 1$.
- c) Aproxime $f(0.25)$ y $f(0.75)$ mediante el segundo polinomio de Lagrange con $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

Solución

a)

b)

c)

Polinomio de interpolación

Sean $n + 1$ puntos distintos $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^n \subset [a, b] \times \mathbb{R}$ y $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de modo que $y_k = f(x_k)$ para $0 \leq k \leq n$.

Definición (Polinomio de interpolación en la forma de Lagrange)

$$\Pi_n f(x) := \sum_{k=0}^n y_k \ell_k(x) \in \mathbb{P}_n,$$

donde $\ell_k(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$ para $0 \leq k \leq n$ son los *polinomios característicos* que satisface $\ell_k(x_j) = \delta_{kj}$.

La evaluación de $\Pi_n f(x)$ requiere $O(n^2)$ sumas y productos, en general, el algoritmo es numéricamente inestable.

Definición (Polinomio de interpolación en la forma de Newton)

$$\Pi_n f(x) := \sum_{k=0}^n a_k \omega_k(x) \in \mathbb{P}_n,$$

donde

► $a_k := f[x_0, \dots, x_k]$ es la k -ésima *diferencia dividida de Newton*, y

► $\omega_k(x) := \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$ es el *polinomio nodal de grado k* .

La evaluación de $\Pi_n f(x)$ requiere $O(n)$.

Definición (Interpolación baricéntrica de Lagrange)

Con el fin de realizar menos operaciones en la interpolación polinomial de Lagrange, multiplicamos por $\frac{1}{\omega_{n+1}(x)}$ y resulta

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega_{n+1}(x)} \Pi_n f(x) &= \frac{1}{\omega_{n+1}(x)} \sum_{k=0}^n y_k \ell_k(x) = \frac{1}{\omega_{n+1}(x)} \sum_{k=0}^n y_k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \\ &= \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{y_k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}}{\omega_{n+1}(x)} \right\} = \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{y_k}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x_k - x_j}{x - x_k}} \right\} \\ \Pi_n f(x) &= \sum_{k=0}^n y_k \tilde{\ell}_k(x) \in \mathbb{P}_n,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\blacktriangleright \tilde{\ell}_k(x) &= \omega_{n+1}(x) \frac{b_k}{x - x_k}, \text{ y} \\ \blacktriangleright b_j &= \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n x_k - x_j} \text{ son los pesos baricéntricos.}\end{aligned}$$

Teorema

Para $0 \leq k \leq n$ se cumple $w'_{n+1}(x_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n x_k - x_j$.

Demostración.

Si $\omega_{n+1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=0}^{n+1-1} x - x_j = \prod_{j=0}^n x - x_j$, entonces $\ln(\omega_{n+1}(x)) = \ln\left(\prod_{j=0}^n x - x_j\right) = \sum_{j=0}^n \ln(x - x_j)$. Derivando,

$$(\ln(\omega_{n+1}(x)))' = \left(\sum_{j=0}^n \ln(x - x_j)\right)' = \sum_{j=0}^n (\ln(x - x_j))'.$$

$$\frac{\omega'_{n+1}(x)}{\omega_{n+1}(x)} = \sum_{j=0}^n \frac{(x - x_j)'}{x - x_j} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{x - x_j}.$$

$$\omega'_{n+1}(x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{j=0}^n \frac{1}{x - x_j}.$$

$$\omega'_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j) \sum_{j=0}^n \frac{1}{x - x_j} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n x - x_j.$$

Si x_k un punto nodal cualesquiera, donde $0 \leq k \leq n$, entonces $w'_{n+1}(x_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n x_k - x_j$.



Teorema

Si $\Pi_n f(x)$ el polinomio de Lagrange, entonces $\Pi_n f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} y_k$.

Demostración.

$$\sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} y_k = \sum_{k=0}^n y_k \frac{\prod_{j=0}^n x-x_j}{(x-x_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n x_k-x_j} = \sum_{k=0}^n y_k \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n x-x_j}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n x_k-x_j} = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j} = \sum_{k=0}^n y_k \ell_k(x) = \Pi_n f(x).$$

□

Teorema

Usar la identidad entre $\omega_k(x)$ y $\ell_k(x)$.

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{w'_{n+1}(x_k)}.$$

Demostración.

$$\sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{w'_{k+1}(x_k)} = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{0}$$

□

Teorema (Teorema de las diferencias divididas de orden superior)

Para $0 \leq k \leq n$ se cumple

$$a_k = f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

La evaluación de a_n requiere n^2 restas y $\frac{n^2}{2}$ divisiones.

Demostración.



23. Using the functions ℓ_i defined in Section 6.1 (p. 312) and based on nodes x_0, x_1, \dots, x_n , show that for any f

$$\sum_{k=0}^n f(x_k) \ell_k(x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

(Continuation) Prove this formula:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n f(x_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x_k - x_j)^{-1}.$$

Solución

Sean $n + 1$ puntos distintos $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^n \subset [a, b] \times \mathbb{R}$ y $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de modo que $y_k = f(x_k)$ para $0 \leq k \leq n$.

$$\sum_{k=0}^n f(x_k) \ell_k(x) = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

por el teorema X

$$= \sum_{k=0}^n a_k \omega_k(x).$$

$$\sum_{k=0}^n f(x_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x_k - x_j)^{-1} =$$

por el teorema Y

$$= a_k$$

28. Encuentre la aproximación del polinomio lineal de cuadrados a $f(x) = x^2 + 3x + 2$ en el intervalo $[0, 1]$.

Solución

.

29. Utilice los ceros de T_3 para construir un polinomio interpolador de grado 2 para $f(x) = \exp(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución

.

Referencias

- ▶ Libros
- ▶ Artículos científicos
- ▶ Sitios web