

Funkanalysis Cheatsheet

von Julian Dörner
gitlab.com/juliandoerner/funkana_cheatsheet
Seite 1 von 4

0 Räume

DEF: Metrik

$d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$, $x, y \in X$

(M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Genügt d nur (M2), (M3) und ist $d(x, x) = 0$, dann heißt d **Halbmetrik**.

DEF: Metrischer Raum

$X \neq \emptyset$, d Metrik, dann heißt (X, d) *metrischer Raum*

DEF: Vollständigkeit

Ein MR (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede CF konvergiert.

DEF: Norm

$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$, X \mathbb{K} -VR, $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$

(N1) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Genügt $\|\cdot\|$ nur (N2), (N3), dann heißt $\|\cdot\|$ **Halbnorm** auf X .

DEF: Normierter Raum

X \mathbb{K} -VR, $\|\cdot\|$ Norm, dann heißt $(X, \|\cdot\|)$ *normierter Raum*.

DEF: Banachraum

Ein vollständiger NR $(X, \|\cdot\|)$ heißt **Banachraum**

Satz: Voll. NR u. Reihen

Sei $(X, \|\cdot\|)$ NR. Es sind äq.

(i) $(X, \|\cdot\|)$ voll.

(ii) Für $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ ex. $x \in X$ mit $\lim_{N \rightarrow \infty} \|x - \sum_{n=1}^N x_n\| = 0$

Satz: CF-TF Konvergenz

Sei $(x_n)_n$ CF in (X, d) MR. Gibt es eine TF $(x_{n_j})_j$, die gegen $x \in X$ konvergiert, so konvergiert $(x_n)_n$ gegen x .

Satz: TF Konvergenz

Sei $(x_n)_n$ eine Folge in (X, d) MR. Dann sind äq.

(i) $(x_n)_n$ konvergiert gegen x

(ii) Jede TF $(x_{n_j})_j$ hat eine gegen x konvergente TF

1 Topologie

DEF: Offen und Abgeschlossen

$M \subset X$ **offen** $\Leftrightarrow \forall x_0 \in M \exists r > 0 : B(x_0, r) \subset M$

$M \subset X$ **abgeschlossen** $\Leftrightarrow X \setminus M$ offen.

Satz: Offenheit mit Folgen

Sei $U \subset X$. Es sind äq.

(i) U *offen*

(ii) $\forall x \in U$ und jede gegen x konv. Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ex $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U, \forall n \geq N$

Lemma:

(1) Die Vereinigung *beliebig* vieler offener Mengen ist offen.

(2) Der Schnitt *endlich* vieler offener Mengen ist offen.

DEF: innerer Punkt, Randpunkt, Abschluss

$M \subset X$

(1) $x_0 \in M$ **innerer Pkt.** von $M \Leftrightarrow \exists r > 0 : B(x_0, r) \subset M$

(2) $\text{int}(M)$ Menge aller *inneren Pkt.*

(3) $x_0 \in X$ **Randpunkt** von $M \Leftrightarrow \forall r > 0 : B(x_0, r) \cap M \neq \emptyset$ und $B(x_0, r) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$.

(4) **Rand** ∂M Menge aller *Randpkt.*

(5) **Abschluss** $\bar{M} = \{x \in X | \forall r > 0 : B(x, r) \cap M \neq \emptyset\}$

• $\text{int}(X \setminus M) = X \setminus \bar{M}$

• $X \setminus M = X \setminus \text{int}(M)$

• M offen $\Leftrightarrow \text{int}(M) = M$

• M abg. $\Leftrightarrow \bar{M} = M$

• $\partial M = \bar{M} \cap X \setminus \bar{M}$

• $\bar{M} = \text{int}(M) \cup \partial M$

• $X = \text{int}(M) \cup \partial M \cup \text{int}(X \setminus M)$

Lemma:

$M \subset X, x_0 \in X$

$x_0 \in \bar{M} \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \subset M : x_n \rightarrow x_0$

Korollar:

$M \subset X$ abg. $\Leftrightarrow \forall (x_n)_n \subset M : (x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow x_0 \in M)$

Satz: voll. Teilraum

(X, d) metr., voll., $\emptyset \neq M \subset X$

$(M, d|_M)$ voll. $\Leftrightarrow M$ abg. in X .

DEF: Dicht, separabel

(X, d) metr., $D, M \subset X$

(1) D **dicht** in $M \Leftrightarrow M \subset \bar{D}$

(2) (X, d) **separabel** $\Leftrightarrow \exists A \subset X$ abz. und *dicht* in X .

Korollar:

\bar{D} **dicht** in $M \Leftrightarrow \forall x \in M \exists (x_n)_n \subset D : x_n \rightarrow x$

Lemma:

$(X, \|\cdot\|)$ ist **separabel** $\Leftrightarrow \exists A \subset X$ abz. u. *lin*(A) *dicht* in X

Satz: Separabilität von BR

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein BR. Dann sind äq.

(i) X separabel

(ii) $B_X = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ separabel

(iii) $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ separabel

1.1 Teilraumtopologie

(X, d) MR, $M \subset X, d_M = d|_{M \times M}$

DEF: relativ offen

$A \subset M$ heißt **relativ offen**, falls A offen in (M, d_M)

Lemma:

$A \subset M$ ist *offen in* M , gdw. es $A' \subset X$ offen gibt, mit $A = A' \cap X$

Korollar:

Sei $A \subset M$. Für den Abschluss \bar{A}^M in M gilt $\bar{A}^M = \bar{A} \cap M$

Satz: Separabler Teilraum

Sei X separabel $\Rightarrow M$ separabel.

1.2 Stetigkeit

X, Y metr. R., $f: X \rightarrow Y$

DEF: Stetigkeit

(1) f heißt **stetig**, falls

$\forall O \subset Y$ offen $\Rightarrow f^{-1}(O)$ offen.

(2) f heißt **stetig in** $x_0 \in X$, falls

$\forall V \subset Y$ Umgebung v. $f(x_0)$ ex. $U \subset X$ Umgebung v. x_0 mit $f(U) \subset V$

BEM: f stetig in $x_0 \in X$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$

$\Leftrightarrow x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

DEF: glm. Stetigkeit

f heißt **glm. Stetig**, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X : d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

BEM: f glm stetig, (x_n) CF $\Rightarrow (f(x_n))$ CF

DEF: Lipschitz-Stetig

f heißt **Lipschitz-Stetig**, falls $\exists L > 0 \forall \delta > 0 \forall x, y \in X : d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$

Satz: glm. Fortsetzung

$\bar{D} \subset X, X, Y$ vollständig, f glm. Stetig.

Dann existiert eine *eindeutige, glm. Stetige* Fortsetzung $\tilde{f}: \bar{D} \rightarrow Y$

1.3 Äquivalente Normen

$(\|\cdot\|, X), (\|\cdot\|, X)$ normierte Räume

DEF: Äquivalente Normen

$\|\cdot\|, \|\cdot\|$ sind äquivalent, falls $\exists c, C > 0 \forall x \in X : c\|x\| \leq \|x\| \leq C\|x\|$

Satz: äq. Normen und GWE

$\Leftrightarrow \|\cdot\|, \|\cdot\|$ äquivalent

$\Leftrightarrow \|\cdot\|, \|\cdot\|$ haben die *gleichen konv. Folgen*

$\Leftrightarrow \|\cdot\|, \|\cdot\|$ haben die *gleichen Nullfolgen*

BEM:

(i) $(X, d_1), (X, d_2)$ metr. Räume mit den selben konv. Folgen \nRightarrow dieselben CF

(ii) Sind $\|\cdot\|, \|\cdot\|$ äquivalent, dann haben die Räume die *gleichen* offenen (abgl.) Mengen

(iii) Sind $\|\cdot\|, \|\cdot\|$ äquivalent, dann gilt $(X, \|\cdot\|)$ voll. $\Leftrightarrow (X, \|\cdot\|)$ voll.

(iv) In end. dim. Räumen sind alle Normen äq.

1.4 Kompaktheit

DEF: Kompakt, folgenkom., rel. kom., totalbeschränkt

(X, d) metr. R., $K \subset X$

(i) K **kompakt**, falls jede offenen Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt

(ii) K **folgenkompakt**, falls jede Folge in K eine konvergente TF besitzt

(iii) K **relativ kompakt**, falls \bar{K} kompakt

(iv) K **totalbeschränkt**, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists x_1, \dots, x_m \in X : K \subset \bigcup_{i=1}^m B(x_i, \varepsilon)$

Satz: Kompaktheit in MR

K kompakt

$\Leftrightarrow K$ folgenkompakt

$\Leftrightarrow K$ totalbeschränkt und *vollständig*

BEM:

(i) K rel. kompakt u. abgeschlossen $\Rightarrow K$ kompakt

(ii) K kompakt $\Rightarrow K$ totalbeschränkt

(iii) K totalbeschränkt, dann können die x_j in K gewählt werden

(iv) K totalbeschränkt $\Rightarrow K$ beschränkt

(v) K voll. $\Rightarrow K$ abgeschlossen in X

(vi) K kompakt $\Rightarrow K$ abgeschlossen u. beschränkt

(vii) K totalbeschränkt $\Rightarrow K$ separabel

(viii) K kompakt $A \subset K \Rightarrow A$ rel. kompakt

Satz: Kompaktheit im endlichen

$(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Dann ist äquivalent

(i) $\dim X < \infty$

(ii) $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\} = \bar{B}(0, 1)$ ist kompakt

(iii) Jede abgeschlossene u. beschränkte Teilmenge ist kompakt

Satz: Kompakter MR

Sei (X, d) kompt. MR und $A \subset X$ abg. $\Rightarrow A$ kompakt

Lemma:

Sei (X, d) MR, $B \subset X$ rel. komp., $A \subset B \Rightarrow A$ rel. komp.

Satz: Rieszssches Lemma

$(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $Y \neq X$ abg. UR, $\delta > 0$

Dann $\exists x_\delta \in X, \|x_\delta\| = 1 : \|x_\delta - y\| \geq 1 - \delta, \forall y \in Y$

Lemma:

$(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, Y end. dim. UR.

Dann ist Y abg. in X

Satz: Stetige Funktion auf Kompaktum

X, Y metr. R., X kompakt, $f: X \rightarrow Y$ stetig.

Dann ist f glm stetig und $f(X)$ kompakt

DEF: Gleichgradig Stetig

(K, d) metr. Raum, K kompakt, $M \subset C(K)$

M heißt gleichgradig Stetig, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in M \forall s, t \in K : (d(s, t) < \varepsilon \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon)$

Satz: Arzela-Ascoli

(K, d) metr. Raum, K kompakt, $M \subset C(K)$

M beschränkt u. gleichgradig Stetig $\Rightarrow M$ rel. Kompakt

2 Operatoren

2.1 Stetige lineare Operatoren

X, Y norm. R., $T: X \rightarrow Y$ linear

Satz: Stetigkeit von lin. Abb.

Es sind äquivalent

(i) T stetig

(ii) T stetig in 0

(iii) $(T$ beschränkt $\Leftrightarrow \exists C \geq 0 \forall x \in X : \|Tx\| \leq C\|x\|)$

(iv) T ist lipschitz

(v) T ist glm. stetig

DEF: Raum besch., lin. Operatoren

$T \in L(X, Y) \Leftrightarrow T$ lin. und besch.

DEF: Operatornorm

$\|T\| = \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} | x \in X \setminus \{0\}\}$

Funkanalysis Cheatsheet

von Julian Dörner
gitlab.com/julianoermer/funkana_cheatsheet
Seite 2 von 4

$$\begin{aligned} &= \inf\{c \geq 0 \mid \|Tx\| \leq c\|x\| \forall x \in X\} \\ &= \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|Tx\| \\ &= \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \|Tx\| \end{aligned}$$

DEF: Dualraum

$X' = L(X, \mathbb{K})$ Dualraum zu X

Satz: $L(X, Y)$ vollständig?

Y voll. $\implies L(X, Y)$ voll. bzgl. Op.norm

Satz: lineare Fortsetzung

Y voll., $D \subset X$ dichter UR, $T \in L(D, Y)$.

Dann ex. eind. Fortsetzung $\tilde{T} \in L(X, Y)$, mit $\|T\| = \|\tilde{T}\|$

DEF: Kern, Bild, Einbettung,...

- (i) $N(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$ **Kern**
- (ii) $R(T) = \{y = Tx : x \in X\}$ **Bild**
- (iii) *injektiver* Op. heißt **Einbettung** $X \hookrightarrow Y$
- (iv) *bijektiver* Op. mit *stetiger Inverser* T^{-1} heißt **Isomorphismus** $X \simeq Y$
- (v) Op. mit $\|Tx\| = \|x\|$ heißt **isometrisch**
- (vi) Op. mit $\|T\| \leq 1$ (!!!) heißt **kontraktiv**

BEM:

- $N(T)$ abgeschlossen, ($T \in L(X, Y)$)
- T isometrisch $\implies T$ kontraktiv u. injektiv
- T kontraktiv $\implies T$ stetig
- T isometrisch $\implies T^{-1} : R(T) \rightarrow X$ isometrisch
- $R(T)$ abgeschlossen in Y

2.2 Summen NR

X NR

DEF: Projektion

$P \in L(X)$, $P^2 = P$ heißt **Projektion**

Lemma:

$P \in L(X)$ Projektion, $X_1 = N(P) = R(1 - P)$, $X_2 = R(P) = N(1 - P)$. Dann ist $(1 - P)$ auch Projektion und $X = X_1 \oplus X_2$ sowie $\|P\| \geq 1, P \neq 0$

Lemma:

$X = X_1 \oplus X_2$. Dann $\exists P \in L(X)$ eind. Proj. mit $R(P) = X_1, N(P) = X_2$

BEM: X voll. $\implies (X_1 \oplus X_2 \simeq X_1 \times X_2)$

2.3 Quotientenräume

X NR

DEF: Quotientenraum

Y UR von X .

$X/Y = \{\hat{x} = x + Y \mid x \in X\}$ **Quotientenraum**

DEF: Quotientenabbildung

$Q : X \rightarrow X/Y$, $Qx = \hat{x}$ **Quotientenabbildung**, linear u. surjektiv, $N(Q) = Y$

DEF: Quotientennorm

$\|\hat{x}\| = \inf\{\|x - y\| \mid y \in Y\} (= d(x, Y))$

Satz: X/Y NR?

Y abg. UR von X .

Dann ist X/Y mit der Quo.norm ein NR. Ist X voll., dann auch X/Y

2.4 Kompakte Operatoren

X, Y NR, $B_X = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$, $T : X \rightarrow Y$ linear

DEF: kompakter Operator

T kompakt, falls $T(B_X)$ relativ kompakt in Y

BEM:

- (i) T kompakt $\implies T \in L(X, Y)$
- (ii) Y voll. Dann gilt T kompakt $\iff T(B_X)$ totalbeschränkt \iff für $(x_n)_n$ beschränkt enthält $(Tx_n)_n$ konv. TF

Satz: kompakte Operatoren

X, Y, Z voll.

- (i) $K(X, Y)$ abg. UR von $L(X, Y)$ und voll.
- (ii) $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, Z)$, ist T o. S kompakt $\implies ST \in K(X, Z)$
- (iii) $T \in L(X, Y)$, $\dim R(T) < \infty \implies T \in K(X, Y)$
- (iv) $\dim X < \infty \implies T \in K(X, Y)$

Korollar:

X, Y voll., $T \in L(X, Y)$. Es gilt $\exists (T_n)_n \subset L(X, Y)$, $\dim R(T_n) < \infty$, $\|T_n - T\| \rightarrow 0 \implies T \in K(X, Y)$

3 Hauptsätze

3.1 Bairescher Kategoriensatz

(X, d) metr. R.

DEF: Durchmesser

$A \subset X$, $\text{diam} A := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$

Lemma:

(X, d) voll., $(A_n)_n \subset X$ abg. mit $\emptyset \neq A_{n+1} \subset A_n$ und $\text{diam} A_n \rightarrow 0 \implies \bigcap_{n=1}^\infty A_n \neq \emptyset$

Satz: Satz von Baire

(X, d) voll., $(O_n)_n \in X^\mathbb{N}$ offen und dicht in $X \implies \bigcap_{n=1}^\infty O_n$ offen und dicht in X

DEF: Kategorien

- (i) $M \subset X$ nirgends dicht, falls $\text{int} \bar{M} = \emptyset$
- (ii) $M \subset X$ **1. Kategorie**, falls $\exists (M_n)_n \in X^\mathbb{N}$ nirgends dicht, $M = \bigcup_{n=1}^\infty M_n$
- (iii) $M \subset X$ **2. Kategorie**, falls nicht von 1. Kategorie

Satz: Bairescher Kategoriensatz

(X, d) voll., $M \subset X$ 1. Kategorie $\implies M^C = X \setminus M$ dicht in X

Korollar:

Ein voll. metr. R. ist von 2. Kategorie: $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, A_n abg. $\implies \exists N \in \mathbb{N} : \text{int} A_N \neq \emptyset$

3.2 Prinzip der glm. Beschränktheit

X, Y norm. R.

DEF: pkt., glm. Beschränktheit

$J \subset L(X, Y)$

- (i) J pkt. Beschränkt, falls $\forall x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in J\} < \infty$
- (ii) J glm. Beschränkt, falls $\sup\{\|T\| : T \in J\} < \infty$

Satz: Prinzip der glm. Beschränktheit

X voll., $J \subset L(X, Y)$ pkt. Beschränkt $\implies J$ glm. Beschränkt

Satz: Banach-Steinhaus

X voll., $(T_n)_n \subset L(X, Y)$, falls $\forall x \in X : Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ ex. $\implies T \in L(X, Y)$. u. $\|T\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{\|T_n\| : T_n \in J\} < \infty$

Korollar:

X, Y voll., $(T_n)_n \subset L(X, Y)$. Es sind äq.

- (i) $\exists T \in L(X, Y) : \forall x \in X Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$
- (ii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ u. $\exists D \subset X$ dicht m. $\forall x \in D : (T_n x)$ CF

DEF: starke Konvergenz

$(T_n)_n \subset L(X, Y)$, $T \in L(X, Y)$. $(T_n)_n$ konvergiert stark gegen T , falls $\forall x \in X : Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$

BEM: Konvergenz Operatornorm

\implies starke Konvergenz

3.3 Satz von der offenen Abbildung

X, Y metr. R.

DEF: offene Abbildung

$f : X \rightarrow Y$ offen, falls $\forall O \in X$ offen $\implies f(O)$ offen

Lemma:

X, Y norm. R., $T : X \rightarrow Y$ lin. Dann sind äq.

- (i) T offen
- (ii) $\exists \varepsilon > 0 : B(0, \varepsilon) \subset T(B(0, 1))$

Satz: Satz von der offenen Abbildung

X, Y voll. $T \in L(X, Y)$ surj. $\implies T$ offen

Korollar:

- (i) T bij. $\implies T$ Isomorph. u. T^{-1} stetig
- (ii) T inj. dann ist $T : R(T) \rightarrow X \in L(R(T), X)$ gdw. $R(T)$ abg.

Korollar:

$(X, \|\cdot\|), (X, \|\cdot\|)$ voll. $\exists M > 0 \forall x \in X : \|x\| \leq M \|\cdot\| \implies \|\cdot\|, \|\cdot\|$ äq.

Korollar:

X, Y BR, $T \in L(X, Y)$.

T ist inj. u. $R(T)$ abg. gdw. $\exists c > 0 : \|Tx\| \geq c\|x\| \forall x \in X$

3.4 Satz vom abg. Graphen

X, Y norm. R.

DEF: Abgeschlossenen lin. Abbildung

$D \subset X$ UR, $T : D \rightarrow Y$ lin.

T heißt **abg.**, falls für $(x_n)_n \in D^\mathbb{N}$, $x_n \rightarrow x \in X$ u. $Tx_n \rightarrow y \in Y \implies x \in D, Tx = y$

DEF: Graph

$D \subset X$ UR, $T : D \rightarrow Y$ lin.

$gr(T) = \{(x, Tx) \mid x \in D \subset X \times Y\}$

BEM:

- (i) $gr(T)$ ist UR von $X \times Y$
- (ii) T abg. $\iff gr(T)$ abg. in $X \times Y$ bzgl. **Produktnorm** $\|\cdot\| = \|\cdot\|_X + \|\cdot\|_Y$

Lemma:

X, Y voll., $D \subset X$ UR, $T : D \rightarrow Y$ abg.

Dann

- (i) $(D, \|\cdot\|_G)$ voll, **Graphennorm** $\|\cdot\|_G = \|\cdot\|_X + \|T \cdot\|_Y$
- (ii) $T \in L((D, \|\cdot\|_G), Y)$

Satz: Satz vom abg. Graphen

X, Y voll., $T : X \rightarrow Y$ lin., abg. $\implies T \in L(X, Y)$

4 Satz von Hahn-Banach

4.1 Fortsetzung von Funktionalen

DEF: sublinear

X \mathbb{K} -VR, $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ sublinear, falls

- (1) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall x \in X \forall \lambda \geq 0$ (positiv homogen)
- (2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$ (subadditiv)

Satz: Hahn-Banach reelle V.

X \mathbb{R} -VR, $U \subset X$ UR, $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ sublinear, $l : U \rightarrow \mathbb{R}$ linear m. $l(x) \leq p(x)$, $\forall x \in U \implies \exists L : X \rightarrow \mathbb{R}$ linear mit $L|_U = l$, $L(x) \leq p(x) \forall x \in X$

Lemma:

X \mathbb{C} -VR

- (i) $l : X \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R}$ -linear $\tilde{l}(x) := l(x) - il(ix) \implies \tilde{l}$ \mathbb{C} -linear, $Re \tilde{l} = l$
- (ii) $\tilde{l} : X \rightarrow \mathbb{C}, \mathbb{C}$ -linear $l := Re \tilde{l} \implies l$ \mathbb{R} -linear
- (iii) $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ Halbnorm, $l : X \rightarrow \mathbb{C}, \mathbb{C}$ -linear, dann $|l(x)| \leq p(x) \iff |Re l(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in X$
- (iv) X norm. kompl. R., $l : X \rightarrow \mathbb{C}, \mathbb{C}$ -linear und stetig $\implies \|l\| = \|Re l\|$

Satz: Hahn-Banach komplexe V.

X \mathbb{C} -VR, $U \subset X$ UR, $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ sublinear, $l : U \rightarrow \mathbb{C}$ linear m. $Re l(x) \leq p(x)$, $\forall x \in U \implies \exists L : X \rightarrow \mathbb{C}$ linear mit $L|_U = l$, $Re L(x) \leq p(x) \forall x \in X$

Satz: Hahn-Banach Fortsetzungs-version

X norm. R., $U \subset X$ UR. $\forall \varphi \in L(U, \mathbb{K}) : \exists \phi \in L(X, \mathbb{K})$ m. $\phi|_U = \varphi$, $\|\phi\| = \|\varphi\|$

BEM:

- (i) **Fortsetzungen** sind im alg. nicht eindeutig
- (ii) **Fortsetzungen** ex. im alg. nur für **Funktionale**

Korollar:

X norm. R., $x \in X$

- (i) $x \neq 0, \exists x' \in X' : \|x'\| = 1, x'(x) = \|x\|$ außerdem $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \exists x' \in X : x'(x_1) \neq x'(x_2)$
- (ii) $\|x\| = \sup_{x' \in B_{X'}} |x'(x)|$
- (iii) $U \subset X$ abg. UR, $x \notin U \implies \exists x' \in X' : x'|_U = 0, x'(x) \neq 0$
- (iv) $U \subset X$ UR, dann: U dicht in $X \iff \forall x' \in X' : (x'|_U = 0 \implies x' = 0)$

4.2 Dualräume

DR von Quotientenräumen

DEF: Anihilator

X norm. R., $U \subset X, V \subset X'$

- (i) $U^\perp = \{x' \in X' : x'(x) = 0, \forall x \in U\}$ **Anihilator von U in X'**
- (ii) $V_\perp = \{x \in X : x'(x) = 0, \forall x' \in V\}$ **Anihilator von V in X**

BEM: U^\perp, V_\perp sind jeweils abg. UR

X norm. R., $U \subset X$ abg. UR. Es ex. ein *kanonischer isometrischer Isomorphismus* so, dass $(X/U)' \simeq U^\perp$

$$U' \simeq X'/U^\perp$$

Satz: separabler DR

Ein norm. R. mit *seperablem* DR ist separabel

DR von Folgenräumen

$$1 \leq p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Die Abb. $J : l^p \rightarrow (l^q)'$, $Jy(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$ ist ein *isometrischer Isomorphismus*

Die selbe Abb. liefert *isometrischen Isomorphismus* $J : l^1 \rightarrow (c_0)'$

$$(l^p)' \simeq l^q$$

$$(c_0)' \simeq l^1$$

$$(l^\infty)' \not\simeq l^1$$

DR von Lebesqueräumen

$$1 \leq p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, (S, \mathcal{A}, \mu) \text{ } \sigma\text{-end. Maßraum}$$

Die Abb. $J : L^q(\mu) \rightarrow (L^p(\mu))'$, $(Jg)(f) = \int_S fg \, d\mu$ ist ein *isometrischer Isomorphismus*
 $(L^p(\mu))' \simeq L^q(\mu)$

4.3 Hahn Banach geometrische V.

DEF: Minkowski-Funktional

$X \mathbb{K}$ -VR, $A \subset X$, $p_A : X \rightarrow [0, \infty]$, $x \mapsto \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$, Minkowski Funktional

Lemma:

X norm. R. $A \subset X$ konvex m. $(0 \in \text{int}A \Leftrightarrow \exists \delta > 0 : \overline{B}(0, \delta) \subset A)$, dann

$$(i) \exists \delta > 0 : p_A(x) \leq \frac{1}{\delta} \|x\| \forall x \in X$$

$$(ii) p_a \text{ sublinear}$$

$$(iii) A \text{ offen} \Rightarrow (p_A)^{-1}([0, 1]) = A$$

Lemma:

X norm. R., $V \subset X$ konvex, offen u. $0 \notin V \Rightarrow \exists x' \in X' : \text{Re } x'(x) < 0 \forall x \in V$

Satz: Hahn-Banach Trennungsversion I

X norm. R., $U_1, U_2 \subset X$ konvex, U_1 offen, $U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow \exists x' \in X' : \text{Re}(x'(u_1)) < \text{Re}(x'(u_2)) \forall u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$

Satz: Hahn-Banach Trennungsversion II

X norm. R., $U \subset X$ abg. konvex, $x_0 \notin U \Rightarrow \exists x' \in X' : \text{Re}(x'(x_0)) < \inf_{u \in U} \text{Re}(x'(u))$

5 Hilbertraum

5.1 Prähilbertraum u. Hilbertraum

DEF: Skalarprodukt

$X \mathbb{K}$ -VR, $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ Skalarprodukt, falls

$$(i) (\lambda x + y, z) = \lambda(x, z) + (y, z), \forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x, y, z \in X$$

$$(ii) (x, y) = \overline{(y, x)}, \forall x, y \in X$$

$$(iii) (x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in X$$

DEF: Prähilbertraum

$X \mathbb{K}$ -VR, $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ Skalarprodukt, $(X, (\cdot, \cdot))$ Prähilbertraum

DEF: Hilbertnorm

$X \mathbb{K}$ -VR, $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ Skalarprodukt, $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$ Hilbertnorm

Satz: CSU

$X \mathbb{K}$ -VR, $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ Skalarprodukt $\Rightarrow |(x, y)| \leq (x, x)(y, y) \forall x, y \in X$

$$|(x, y)| = (x, x)(y, y) \Leftrightarrow x, y \text{ lin. unab.}$$

DEF: Hilbertraum

$X \mathbb{K}$ -VR und bzgl. Hilbertnorm voll.

Satz: Parallelogrammungleichung/Polarisation

X norm. R. (X Prähilbertraum $\Leftrightarrow \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \forall x, y \in X$)

Satz: Vervollständigung Prähilbertraum

Sei \hat{X} die Vervollständigung des Prähilbertraums $X \Rightarrow \hat{X}$ ist Hilbertraum

5.2 Orthogonalität

DEF: orthogonal

X Prähilbertraum, $x, y \in X$ orthogonal, falls $(x, y) = 0$

$A, B \subset X$ orthogonal, falls $x \perp y, \forall x \in A, y \in B$

DEF: orth. Komplement

X Prähilbertraum, $A \subset X$, $A^\perp = \{x \in X : x \perp a, \forall a \in A\}$ orth. Komplement

DEF: lin., orth. Projektion

Eine lin. Projektion P heißt orthogonal, falls $N(P) \perp R(P)$

BEM:

$$(i) x \perp y \Rightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$$

$$(ii) A^\perp \text{ abg. UR von } X$$

$$(iii) x \perp x \Leftrightarrow x = 0$$

$$(iv) A \subset (A^\perp)^\perp$$

$$(v) A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$$

$$(vi) A^\perp = (\overline{\text{lin}A})^\perp$$

Lemma:

X Prähilbertraum, $U \subset X$ dichter UR, $x \in X : (\forall u \in U : (x, u) = 0 \Rightarrow x = 0)$

Satz: Projektionssatz

H Hilbertraum, $\emptyset \neq K$ abg., konvex, $x_0 \in H$, dann $\exists! x \in K : \|x - x_0\| = \inf_{y \in K} \|y - x_0\|$

Lemma:

H Hilbertraum, $\emptyset \neq K \subset H$ abg., konvex, $x_0 \in H, x \in K$. Dann ist äq.

$$(i) \|x - x_0\| = \inf_{y \in K} \|y - x_0\|$$

$$(ii) \text{Re}(x_0 - x, y - x) \leq 0, \forall y \in K$$

Satz: Orthogonalprojektion

H Hilbertraum, $\{0\} \neq U \subset H$ abg. UR, dann ex. eindeutige, lineare Projektion P_U m. $\|P_U\| = 1, R(P_U) = U, N(P_U) = U^\perp$, $\|x - P_U x\| = \inf_{y \in U} \|x - y\|, \forall x \in H, H = U \oplus U^\perp$.

P_U orthogonale Projektion

BEM: $(U^\perp)^\perp = U, H/U = U^\perp$

Korollar:

H Hilbertraum, $U \subset H$ UR, dann $\overline{U} = (U^\perp)^\perp$

Satz: Darstellungssatz v. Fréchet-Riesz

H Hilbertraum. $\phi : H \rightarrow H', y \mapsto (\cdot, y)$ ist bijektiv, isometrisch u. konjugiert linear, d.h. $\forall x' \in H' \exists! y \in H : x'(x) = (x, y), \forall x \in H, \|x'\| = \|y\|$

BEM: H^* der VR der konjugiert-linearen Funktionale $H \rightarrow \mathbb{K}$, dann ist $\phi^* : H \rightarrow H^*, x \mapsto (x, \cdot)$ isometrischer Isomorphismus

H^* ist Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\varphi, \psi)_{H^*} := ((\phi^*)^{-1}\varphi, (\phi^*)^{-1}\psi)_H$

Satz: Lax-Milgram

H Hilbertraum, $B : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ sesquilinear u. stetig, dann $\exists T \in L(H) : B(x, y) = (Tx, y) \forall x, y \in H$

5.3 Orthonormalbasen

H Hilbertraum

DEF: Orthonormalsystem

$S \subset H$ Orthonormalsystem, falls $\|e\| = 1, (e, f) = 0, \forall e, f \in S, e \neq f$

Satz: Besselsche Ungl. I

$$\{e_n : n \in N\} \subset H \text{ ONS}, x \in H \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2$$

Lemma:

$$\{e_n : n \in N\} \subset H \text{ ONS}, x, y \in H \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)(e_n, y)| < \infty$$

Lemma:

$S \subset H \text{ ONS}, x \in H \Rightarrow S_x := \{e \in S : (x, e) \neq 0\}$ höchstens abzählbar

Satz: Besselsche Ungl. II

$$S \subset H \text{ ONS}, x \in H \Rightarrow \sum_{e \in S} |(x, e)|^2 \leq \|x\|^2$$

DEF: unbedingte Konvergenz

X norm. R., I Indexmenge, $(x_i)_{i \in I} \subset X, x \in X$.

$\sum_{i \in I} x_i$ konvergiert unbedingdt gegen x , falls

$$(i) I_0 := \{i \in I, x_i \neq 0\} \text{ höchst. abz.}$$

$$(ii) \text{für Umordnung } i_1, i_2, \dots \text{ von } I_0 : x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{i_n}$$

Satz: Orthogonalprojektion

$S \subset H \text{ ONS}$

$$(i) \forall x \in X : \sum_{e \in S} (x, e)e \text{ konvergiert unbedingdt}$$

$$(ii) P : H \rightarrow H, x \mapsto \sum_{e \in S} (x, e)e \text{ ist die Orthogonalprojektion auf } \overline{\text{lin}S}$$

Korollar:

$S \subset H \text{ ONS}$, dann sind äq.

$$(i) x \in H, x \perp S \Rightarrow x = 0$$

$$(ii) \overline{\text{lin}S} = H$$

$$(iii) \forall x \in H : x = \sum_{e \in S} (x, e)e$$

$$(iv) \forall x, y \in H : (x, y) = \sum_{e \in S} (x, e)(e, y)$$

$$(v) \forall x \in H : \|x\|^2 = \sum_{e \in S} |(x, e)|^2$$

DEF: Orthonormalbasis

Ist eine der Bedingung aus dem Korollar erfüllt, so heißt S vollständiges ONS oder Orthonormalbasis von H (Schauderbasis)

Satz: Hilbertraum ONB

$$(i) \text{Jeder Hilbertraum besitzt eine ONB}$$

$$(ii) \{e_i, i \in I\} = S \subset H \text{ ONB u. } l^2(I, \mathbb{K}) := \{(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I : \sum_{i \in I} |\lambda_i|^2 < \infty\} \text{ m. Norm}$$

$$\|(\lambda_i)_{i \in I}\|_{l^2(I, \mathbb{K})} := \sqrt{\sum_{i \in I} |\lambda_i|^2},$$

dann induziert $e_i \mapsto (\delta_{ij})_{j \in I}$ einen isometrischen Isomorphismus $H \rightarrow l^2(I, \mathbb{K})$

BEM: In unendlichdim. Hilberträumen ist äq.

H separabel

$$\Leftrightarrow \text{eine (alle) ONB ist abz.}$$

$$\Leftrightarrow H \simeq l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$$

6 Sobolevräume

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \text{ mb: } f \mathbb{1}_K \in L^1(\Omega), K \subset \Omega \text{ kpt.}\}$$

$$\text{supp } \varphi = \{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}$$

$$C_c^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \in C^\infty : \text{supp } \varphi \subset \Omega \text{ kpt.}\}$$

DEF: schwache Ableitung

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f \in L^1_{loc}(\Omega), j \in \{1, \dots, n\}$

Existiert $g \in L^1_{loc}(\Omega) : \int_\Omega f \cdot \partial_j \varphi dx = - \int_\Omega g \cdot \varphi dx m, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, dann heißt f schwach nach x_j ableitbar, und $\partial_j f = g$ ist die schwache Ableitung in Richtung x_j .

DEF: Faltung

Für $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ ist $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ die Faltung von f und g .

Lemma:

$$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \alpha \in \mathbb{N}_0^n$$

$$(i) f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \partial^\alpha (f * \varphi) = f * \partial^\alpha \varphi$$

$$(ii) p \in [1, \infty), f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{supp } \varphi \subset B(0, 1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$$

$$\varphi_k(x) := k^n \varphi(kx), k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Dann ist } f * \varphi_k \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ und } \|f * \varphi_k - f\| \rightarrow 0$$

Korollar:

Ist $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $\int_\Omega g \varphi dx = 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, dann ist $g = 0$ f.ü.

DEF: Sobolevraum

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $p \in [1, \infty]$

$$(i) W^{1,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : \partial_j f \text{ ex. u. } \partial_j f \in L^p(\Omega), \forall j \in \{1, \dots, n\}\}$$

heißt der Sobolevraum 1. Ordnung

$$(ii) W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha f \text{ ex. u. } \partial^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq m\}$$

heißt der Sobolevraum m. Ordnung

DEF: Norm - SR. 1. Ordnung

$$(i) p \in [1, \infty): \|f\|_{W^{1,p}} = (\|f\|_p^p + \sum_{j=1}^n \|\partial_j f\|_p^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$(ii) p = \text{inf: } \|f\|_{W^{1,p}} = \max\{\|f\|_\infty, \|\partial_1 f\|_\infty, \dots, \|\partial_n f\|_\infty\}$$

Satz: Vollständige Sobolevräume

Für $m \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty]$ ist $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}})$ ein Banachraum.

Weiter ist $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ ist Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(f, g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha f, \partial^\alpha g)_{L^2(\Omega)}$$

Funkanalysis Cheatsheet

von Julian Dörner

♥ gitlab.com/juliandoerner/funkana_cheatsheet

Seite 4 von 4

Lemma:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $\partial_j f \in L^1_{loc}(\Omega), j = 1, \dots, n$, $g \in C^\infty(\Omega)$. Dann ex. $\partial_j(fg), j = 1, \dots, n$ in Ω und $\partial_j(fg) = (\partial_j f)g + f(\partial_j g), j = 1, \dots, n$

BEM: Für $p \in [1, \infty], f \in W^{1,p}(\Omega), g \in W^{1,p'}(\Omega)$ gilt $fg \in W^{1,1}(\Omega)$ und $\partial_j(fg) = (\partial_j f)g + f(\partial_j g), j = 1, \dots, n$

BEM: Für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ex. $\partial^\alpha f$ in \mathbb{R}^n , dann gilt $\forall \varphi \in C_c^\infty : \partial^\alpha(f * \varphi) = \partial^\alpha f * \varphi$

Satz: Dicht im SR

Für $p \in [1, \infty), m \in \mathbb{N}$ ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$