Funkanalysis Cheatsheet
von Julian Dörner
♡ gitlab.com/juliandoerner/funkana_cheatsheet

0 Räume

DEF: Metrik
$d : X \times X \to [0, \infty)$, $x, y \in X$
(M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(M2) $d(x, y) = d(y, x)$
(M3) $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$

Genügt d nur (M2), (M3) und ist $d(x, x) = 0$, dann heißt d **Halbmetrik**.

DEF: Metrischer Raum
$X \neq \emptyset, d$ Metrik, dann heißt (X, d) *metrischer Raum*

DEF: Vollständigkeit
Ein **MR** (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede CF konvergiert.

DEF: Norm
$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, X $\mathbb{K}$-VR, $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$
(N1) $\|x\| = 0 \implies x = 0$
(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
(N3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

Genügt $\|\cdot\|$ nur (N2), (N3), dann heißt $\|\cdot\|$ Halbnorm auf X.

DEF: Normierter Raum
X $\mathbb{K}$-VR, $\|\cdot\|$ Norm, dann heißt $(X, \|\cdot\|)$ *normierter Raum.*

DEF: Banachraum
Ein vollständiger NR $(X, \|\cdot\|)$ heißt Banachraum

Satz: Voll. NR u. Reihen
Sei $(X, \|\cdot\|)$ NR. Es sind äq.
(i) $(X, \|\cdot\|)$ voll.
(ii) Für $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ ex. $x \in X$ mit $lim_{N\to\infty} \|x - \sum_{n=1}^{N} x_n\| = 0$

Satz: CF-TF Konvergenz
Sei $(x_n)_n$ CF in (X, d) MR. Gibt es eine TF $(x_{n_j})_j$, die gegen $x \in X$ konvergiert, so konvergiert $(x_n)_n$ gegen x.

Satz: TF Konvergenz
Sei $(x_n)_n$ eine Folge in (X, d) MR. Dann sind äq.
(i) $(x_n)_n$ konvergiert gegen x
(ii) Jede TF $(x_{n_j})_j$ hat eine gegen x konvergente TF

1 Topologie

DEF: Offen und Abgeschlossen
$M \subset X$ **offen** $\Leftrightarrow \forall x_0 \in M \exists r > 0 : B(x_0, r) \subset M$
$M \subset X$ **abgeschlossen** $\Leftrightarrow X \setminus M$ offen.

Satz: Offenheit mit Folgen
Sei $U \subset X$. Es sind äq.
(i) U *offen*
(ii) $\forall x \in U$ und jede gegen x konv. Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ex $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U, \forall n \ge N$

Lemma:
(1) Die Vereinigung *beliebig* vieler offener Mengen ist offen.
(2) Der Schnitt *endlich* vieler offener Mengen ist offen.

DEF: innerer Punkt, Randpunkt, Abschluss
$M \subset X$
(1) $x_0 \in M$ **innerer Pkt.** von M $\Leftrightarrow \exists r > 0 : B(x_0, r) \subset M$
(2) $int(M)$ Menge aller *inneren Pkt.*
(3) $x_0 \in X$ **Randpunkt** von M $\Leftrightarrow \forall r > 0 : B(x_0, r) \cap M \neq \emptyset$ und $B(x_0, r) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$.
(4) **Rand** ∂M Menge aller *Randpkt.*
(5) **Abschluss** $\overline{M} = \{x \in X | \forall r > 0 : B(x, r) \cap M \neq \emptyset$

- $int(X \setminus M) = X \setminus \overline{M}$
- $\overline{X \setminus M} = X \setminus int(M)$
- M offen $\Leftrightarrow int(M) = M$
- M abg. $\Leftrightarrow \overline{M} = M$
- $\partial M = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$
- $\overline{M} = int(M) \dot\cup \partial M$
- $X = int(M) \dot\cup \partial M \dot\cup int(X \setminus M)$

Lemma:
$M \subset X, x_0 \in X$
$x_0 \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \subset M : x_n \to x_0$

Korrolar:
$M \subset X$ abg. $\Leftrightarrow \forall (x_n)_n \subset M : (x_n \to x_0 \implies x_0 \in M)$

Satz: voll. Teilraum
(X, d) metr., *voll.*, $\emptyset \neq M \subset X$
$(M, d_{|M})$ *voll.* $\Leftrightarrow M$ abg. in X.

DEF: Dicht, seperabel
(X, d) metr., $D, M \subset X$
(1) D **dicht** in $M \Leftrightarrow M \subset \overline{D}$
(2) (X, d) **seperabel** $\Leftrightarrow \exists A \subset X$ *abz.* und *dicht* in X.

Korrolar:
D **dicht** in $M \Leftrightarrow \forall x \in M \exists (x_n)_n \subset D : x_n \to x$

Lemma:
$(X, \|\cdot\|)$ ist **seperabel** $\Leftrightarrow \exists A \subset X$ abz. u. $lin(A)$ dicht in X

Satz: Separabilität von BR
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein BR. Dann sind äq.
(i) X separabel
(ii) $B_X = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ separabel
(iii) $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ separabel

1.1 Teilraumtopologie

(X, d) MR, $M \subset X, d_M = d_{|M\times M}$

DEF: relativ offen
$A \subset M$ heißt **relativ offen**, falls A offen in (M, d_M)

Lemma:
$A \subset M$ ist *offen in* M, gdw. es $A' \subset X$ offen gibt, mit $A = A' \cap X$

Korrolar:
Sei $A \subset M$. Für den Abschluss $\overline{A}^M$ in M gilt $\overline{A}^M = \overline{A} \cap M$

Satz: Seperabler Teilraum
Sei X seperabel $\implies M$ *seperabel.*

1.2 Stetigkeit

X, Y metr. R., $f : X \to Y$

DEF: Stetigkeit
(1) f heißt **stetig**, falls $\forall O \subset Y$ offen $\implies f^{-1}(O)$ offen.
(2) f heißt **stetig in** $x_0 \in X$, falls $\forall V \subset Y$ Umgebung v. $f(x_0)$ ex. $U \subset X$ Umgebung v. x_0 mit $f(U) \subset V$

BEM: f stetig in $x_0 \in X$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \implies d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0)), \varepsilon)$
$\Leftrightarrow x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to f(x_0)$

DEF: glm. Stetigkeit
f heißt **glm. Stetig**, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X : d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

BEM: f glm stetig, (x_n) CF $\implies (f(x_n))$ CF

DEF: Lipschitz-Stetig
f heißt **Lipschitz-Stetig**, falls $\exists L > 0 \forall \delta > 0 \forall x, y \in X : d(f(x), f(y)) \le L \cdot d(x, y)$

Satz: glm. Fortsetzung
$D \subset X$, X, Y vollständig, f glm. Stetig.
Dann existiert eine *eindeutige, glm. Stetige* Fortsetzung $\tilde{f} : \overline{D} \to Y$

1.3 Äquivalente Normen

$(\|\cdot\|, X), (|||\cdot|||, X)$ normierte Räume

DEF: Äquivalente Normen
$\|\cdot\|, |||\cdot|||$ sind äquivalent, falls $\exists c, C > 0 \forall x \in X : c\|x\| \le |||x||| \le C\|x\|$

Satz: äq. Normen und GWe
$\Leftrightarrow$ $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ äquivalent
$\Leftrightarrow$ $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ haben die *gleichen konv. Folgen*
$\Leftrightarrow$ $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ haben die *gleichen Nullfolgen*

BEM:
(i) $(X, d_1), (X, d_2)$ metr. Räume mit den selben konv. Folgen $\not\Rightarrow$ dieselben CF
(ii) Sind $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ äquivalent, dann haben die Räume die *gleichen* offenen (abgl.) Mengen
(iii) Sind $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ äquivalent, dann gilt $(X, \|\cdot\|)$ voll. $\Leftrightarrow (X, |||\cdot|||)$ voll.
(iv) In end. dim. Räumen sind alle Normen äq.

1.4 Kompaktheit

DEF: Komapkt, folgenkom., rel. kom., totalbeschränkt
(X, d) metr. R., $K \subset X$
(i) K **kompakt**, falls jede offenen Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt
(ii) K **folgenkompakt**, falls jede Folge in K eine konvergente TF besitzt
(iii) K **relativ kompakt**, falls $\overline{K}$ kompakt
(iv) K **totalbeschränkt**, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists x_1, ..., x_m \in X : K \subset \cup_{i=1}^{m} B(x_j, \varepsilon)$

Satz: Kompaktheit in MR
K *kompakt*
$\Leftrightarrow$ K *folgenkompakt*
$\Leftrightarrow$ K *totalbeschränkt* und *vollständig*

BEM:
(i) K *rel. kompakt* u. *abgeschlossen* $\implies K$ *kompakt*
(ii) K *komapkt* $\implies K$ *totalbeschränkt*
(iii) K *totalbeschränkt*, dann können die x_j in K gewählt werden
(iv) K *totalbeschränkt* $\implies K$ *beschränkt*
(v) K voll. $\implies K$ *abgeschlossen* in X
(vi) K *kompakt* $\implies K$ *abgeschlossen* u. *beschränkt*
(vii) K *totalbeschränkt* $\implies K$ *seperabel*
(viii) K *komapkt* $A \subset K \implies A$ *rel. kompakt*

Satz: Kompaktheit im endlichen
$(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Dann ist äquivalent
(i) $dim\ X < \infty$
(ii) $B_X = \{x \in X : \|x\| \le 1\} = \overline{B}(0, 1)$ ist kompakt
(iii) Jede *abgeschlossene* u. *beschränkte* Teilmenge ist *kompakt*

Satz: Kompakter MR
Sei (X, d) kompt. MR und $A \subset X$ abg. $\implies A$ kompakt

Lemma:
Sei (X, d) MR, $B \subset X$ rel. komp, $A \subset B \implies A$ rel. komp.

Satz: Rieszsches Lemma
$(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $Y \neq X$ abg. UR, $\delta > 0$
Dann $\exists x_\delta \in X, \|x_\delta\| = 1 : \|x_\delta - y\| \ge 1 - \delta, \ \forall y \in Y$

Lemma:
$(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, Y end. dim. UR.
Dann ist Y abg. in X

Satz: Stetige Funktion auf Kompaktum
X, Y metr. R., X *kompakt*, $f : X \to Y$ stetig.
Dann ist f glm stetig und $f(X)$ kompakt

DEF: Gleichgradig Stetig
(K, d) metr. Raum, K kompakt, $M \subset C(K)$
M heißt gleichgradig Stetig, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in M \forall s, t \in K : (d(s, t) < \varepsilon \implies |f(s) - f(t)| < \varepsilon)$

Satz: Arzela-Ascoli
(K, d) metr. Raum, K kompakt, $M \subset C(K)$
M *beschränkt* u *gleichgradig Stetig* $\implies$ M *rel. Komapkt*

2 Operatoren

2.1 Stetige lineare Operatoren

X, Y norm. R., $T : X \to Y$ linear

Satz: Stetigkeit von lin. Abb.
Es sind äquivalent
(i) T stetig
(ii) T stetig in 0
(iii) (T beschränkt $\Leftrightarrow \exists C \ge 0 \forall x \in X : \|Tx\| \le C\|x\|$)
(iv) T ist lipschitz
(v) T ist glm. stetig

DEF: Raum besch., lin. Operatoren
$T \in L(X, Y) \Leftrightarrow T$ *lin.* und *besch.*

DEF: Operatornorm
$\|T\| = \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} | x \in X \setminus \{0\}\}$

$= \inf\{c \geq 0| \ \|Tx\| \leq c\|x\| \forall x \in X\}$
$= \sup_{x\in X, \|x\|=1} \|Tx\|$
$= \sup_{x\in X, \|x\|\leq 1} \|Tx\|$

DEF: Dualraum
$X' = L(X, \mathbb{K})$ **Dualraum** zu X

Satz: $L(X,Y)$ **vollständig?**
Y voll. $\implies$ $L(X,Y)$ *voll.* bzgl. Op.norm

Satz: lineare Fortsetzung
Y voll., $D \subset X$ dichter UR, $T \in L(D,Y)$.
Dann ex. eind. Fortsetzung $\tilde{T} \in L(X,Y)$, mit $\|T\| = \|\tilde{T}\|$

DEF: Kern, Bild, Einbettung,...

(i) $N(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$ **Kern**
(ii) $R(T) = \{y = Tx : x \in X\}$ **Bild**
(iii) *injektiver* Op. heißt **Einbettung** $X \leftrightarrow Y$
(iv) *bijektiver* Op. mit *stetiger Inverser* T^{-1} heißt **Isomorphismus** $X \simeq Y$
(v) Op. mit $\|Tx\| = \|x\|$ heißt **isometrisch**
(vi) Op. mit $\|T\| \leq 1$ (!!!) heißt **kontraktiv**

BEM:
- $N(T)$ *abgeschlossen*, ($T \in L(X,Y)$)
- T *isometrisch* $\implies$ T *kontraktiv* u. *injektiv*
- T *kontraktiv* $\implies$ T *stetig*
- T *isometrisch* $\implies$ $T^{-1} : R(T) \to X$ *isometrisch*
- $R(T)$ *abgeschlossen in* Y

2.2 Summen NR

X NR

DEF: Projektion
$P \in L(X), P^2 = P$ heißt **Projektion**

Lemma:
$P \in L(X)$ Projektion, $X_1 = N(P) = R(1-P)$, $X_2 = R(P) = N(1-P)$.
Dann ist $(1-P)$ auch Projektion und $X = X_1 \oplus X_2$ sowie $\|P\| \geq 1, P \neq 0$

Lemma:
$X = X_1 \oplus X_2$. Dann $\exists P \in L(X)$ eind. Proj. mit $R(P) = X_1, N(P) = X_2$

BEM: X voll. $\implies$ $(X_1 \oplus X_2 \simeq X_1 \times X_2)$

2.3 Quotientenräume

X NR

DEF: Quotientenraum
Y UR von X.
$X/Y = \{\hat{x} = x + Y | x \in X\}$ **Quotientenraum**

DEF: Quotientenabbildung
$Q : X \to X/Y$, $Qx = \hat{x}$ **Quotientenabbildung**, *linear* u. *surjektiv*, $N(Q) = Y$

DEF: Quotientennorm
$\|\hat{x}\| = \inf\{\|x - y\| \ |y \in Y\} (= d(x,Y))$

Satz: X/Y **NR?**
Y **abg.** UR von X.
Dann ist X/Y mit der Quo.norm ein NR. Ist X **voll.**, dann auch X/Y

2.4 Kompakte Operatoren

X, Y NR, $B_X = \{x \in X| \ \|x\| \leq 1\}$, $T : X \to Y$ linear

DEF: kompakter Operator
T **kompakt**, falls $T(B_X)$ *relativ kompakt* in Y

BEM:
(i) T *kompakt* $\implies$ $T \in L(X,Y)$
(ii) Y voll. Dann gilt T *kompakt* $\Leftrightarrow$ $T(B_X)$ *totalbeschränkt* $\Leftrightarrow$ für $(x_n)_n$ *beschränkt* enthält $(Tx_n)_n$ *konv. TF*

Satz: kompakte Operatoren
X, Y, Z voll.
(i) $K(X,Y)$ *abg. UR* von $L(X,Y)$ und voll.
(ii) $T \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,Z)$, ist T o. S kompakt $\implies$ $ST \in K(X,Z)$
(iii) $T \in L(X,Y)$, $dim R(T) < \infty \implies T \in K(X,Y)$
(iv) $dim X < \infty \implies T \in K(X,Y)$

Korrolar:
X, Y *voll.*, $T \in L(X,Y)$. Es gilt $\exists (T_n)_n \subset L(X,Y), dim R(T_n) < \infty, \|T_n - T\| \to 0 \implies T \in K(X,Y)$

3 Hauptsätze

3.1 Bairescher Kategoriensatz

(X,d) metr. R.

DEF: Durchmesser
$A \subset X$, $\mathrm{diam} A := \sup\{d(x,y), x, y \in A\}$

Lemma:
(X,d) voll., $(A_n) \subset X$ *abg.* mit $\emptyset \neq A_{n+1} \subset A_n$ und $\mathrm{diam} A_n \to 0 \implies \cap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$

Satz: Satz von Baire
(X,d) voll., $(O_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ *offen* und *dicht* in X $\implies$ $\cap_{n=1}^{\infty} O_n$ *offen* und *dicht* in X

DEF: Kategorien
(i) $M \subset X$ **nirgends dicht**, falls $\mathrm{int} \overline{M} = \emptyset$
(ii) $M \subset X$ **1. Kategorie**, falls $\exists (M_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ *nirgends dicht*, $M = \cup_{n=1}^{\infty} M_n$
(iii) $M \subset X$ **2. Kategorie**, falls nicht von *1. Kategorie*

Satz: Bairescher Kategoriensatz
(X,d) voll., $M \subset X$ *1. Kategorie* $\implies$ $M^C = X \setminus M$ *dicht* in X

Korrolar:
Ein voll. metr. R. ist von *2. Kategorie*: $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n$ *abg.* $\implies$ $\exists N \in \mathbb{N} : \mathrm{int} A_N \neq \emptyset$

3.2 Prinzip der glm. Beschränktheit

X, Y norm. R.

DEF: pkt., glm. Beschränktheit
$J \subset L(X,Y)$
(i) J **pkt. Beschränkt**, falls $\forall x \in X : \sup\{\|Tx\| : \ T \in J\} < \infty$
(ii) J **glm. Beschränkt**, falls $\sup\{\|T\| : \ T \in J\} < \infty$

Satz: Prinzip der glm. Beschränktheit
X *voll.*, $J \subset L(X,Y)$ *pkt. Beschränkt* $\implies$ J *glm. Beschränkt*

Satz: Banach-Steinhaus
X *voll.*, $(T_n) \subset L(X,Y)$, falls $\forall x \in X : Tx := lim_{n\to\infty} T_n x$ ex. $\implies$ $T \in L(X,Y)$. u. $\|T\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|T_n\| < \infty$

Korrolar:
X, Y *voll.*, $(T_n) \subset L(X,Y)$. Es sind äq.
(i) $\exists T \in L(X,Y) : \forall x \in X Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$
(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ u. $\exists D \subset X$ *dicht* m. $\forall x \in D : (T_n x)$ *CF*

DEF: starke Konvergenz
$(T_n) \subset L(X,Y)$, $T \in L(X,Y)$. (T_n) **konvergiert stark** gegen T, falls $\forall x \in X : Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$

BEM: *Konvergenz Operatornorm* $\implies$ *starke Konvergenz*

3.3 Satz von der offenen Abbildung

X, Y metr. R.

DEF: offene Abbildung
$f : X \to Y$ **offen**, falls $\forall O \in X$ *offen* $\implies$ $f(O)$ *offen*

Lemma:
X, Y norm. R., $T : X \to Y$ lin. Dann sind äq.
(i) T *offen*
(ii) $\exists \varepsilon > 0 : B(0,\varepsilon) \subset T(B(0,1))$

Satz: Satz von der offenen Abbildung
X, Y voll. $T \in L(X,Y)$ *surj.* $\implies$ T offen

Korrolar:
(i) T *bij.* $\implies$ T Isomoph. u. T^{-1} *stetig*
(ii) T *inj.* dann ist $T : R(T) \to X \in L(R(T), X)$ gdw. $R(T)$ *abg.*

Korrolar:
$(X, \|\cdot\|), (X, |||\cdot|||)$ *voll.* $\exists M > 0 \forall x \in X : \|x\| \leq M|||x||| \implies \|\cdot\|, |||\cdot|||$ **äq.**

Korrolar:
X, Y BR, $T \in L(X,Y)$.
T ist *inj.* u. $R(T)$ *abg.* gdw. $\exists c > 0 : \|Tx\| \geq c\|x\| \forall x \in X$

3.4 Satz vom abg. Graphen

X, Y norm. R.

DEF: Abgeschlossenen lin. Abbildung
$D \subset X$ UR, $T : D \to Y$ lin.
T heißt **agb.**, falls für $(x_n)_n \in D^{\mathbb{N}}, x_n \to x \in X$ u. $Tx_n \to y \in Y \implies x \in D, \ Tx = y$

DEF: Graph
$D \subset X$ UR, $T : D \to Y$ lin.
$gr(T) = \{(x, Tx), x \in D \subset X \times Y$

BEM:
(i) $gr(T)$ ist *UR* von $X \times Y$
(ii) T *abg.* $\Leftrightarrow$ $gr(T)$ *abg.* in $X \times Y$ bzgl. **Produktnorm** $|||\cdot||| = ||\cdot||_X + ||\cdot||_Y$

Lemma:
X, Y *voll.*, $D \subset X$ *UR*, $T : D \to Y$ *abg.* Dann
(i) $(D, |||\cdot|||_G)$ *voll*, **Graphennorm** $|||\cdot|||_G = ||\cdot||_X + ||T\cdot||_Y$
(ii) $T \in L((D, |||\cdot|||_G), Y)$

Satz: Satz vom abg. Graphen
X, Y voll., $T : X \to Y$ *lin.*, *abg.* $\implies$ $T \in L(X,Y)$

4 Satz von Hahn-Banach

4.1 Fortsetzung von Funktionalen

DEF: sublinear
X $\mathbb{K}$-VR, $p : X \to \mathbb{R}$ **sublinear**, falls
(1) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \ \forall x \in X \forall \lambda \geq 0$ *(positiv homogen)*
(2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \ \forall x, y \in X$ *(subadditiv)*

Satz: Hahn-Banach *reelle V.*
X $\mathbb{R}$-VR, $U \subset X$ *UR*, $p : X \to \mathbb{R}$ *sublinear*, $l : U \to \mathbb{R}$ *linear* m. $l(x) \leq p(x), \forall x \in U \implies \exists L : X \to \mathbb{R}$ *linear* mit $L_{|U} = l, \ L(x) \leq p(x) \forall x \in X$

Lemma:
X $\mathbb{C}$-VR
(i) $l : X \to \mathbb{R}, \mathbb{R}$-linear $\tilde{l}(x) := l(x) - il(ix) \implies \tilde{l}$ $\mathbb{C}$-linear, $Re \ \tilde{l} = l$
(ii) $l : X \to \mathbb{C}, \mathbb{C}$-linear $l := Re \ \tilde{l} \implies l$ $\mathbb{R}$-linear
(iii) $p : X \to \mathbb{R}$ Halbnorm, $l : X \to \mathbb{C}, \mathbb{C}$-linear, dann $|l(x)| \leq p(x) \Leftrightarrow |Re \ l(x)| \leq p(x), \ \forall x \in X$
(iv) X norm. kompl. R., $l : X \to \mathbb{C}, \mathbb{C}$-linear und stetig $\implies$ $||l|| = ||Re \ l||$

Satz: Hahn-Banach *komplexe V.*
X $\mathbb{C}$-VR, $U \subset X$ *UR*, $p : X \to \mathbb{R}$ *sublinear*, $l : U \to \mathbb{C}$ *linear* m. $Re \ l(x) \leq p(x), \forall x \in U \implies \exists L : X \to \mathbb{C}$ *linear* mit $L_{|U} = l, \ Re \ L(x) \leq p(x) \forall x \in X$

Satz: Hahn-Banach *Fortsetzungsversion*
X norm. R., $U \subset X$ UR. $\forall \varphi \in L(U, \mathbb{K}) : \exists \phi \in L(X, \mathbb{K})$ m. $\phi_{|U} = \phi, ||\phi|| = ||\varphi||$

BEM:
(i) **Fortsetzungen** sind im alg. **nicht eindeutig**
(ii) **Fortsetzungen** ex. im alg. nur für **Funktionale**

Korrolar:
X norm. R., $x \in X$
(i) $x \neq 0, \exists x' \in X' : ||x'|| = 1, x'(x) = ||x||$ außerdem $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \exists x' \in X : x'(x_1) \neq x'(x_2)$
(ii) $||x|| = \sup_{x' \in B_{X'}} |x'(x)|$
(iii) $U \subset X$ abg. UR, $x \notin U \implies \exists x' \in X' : x'_{|U} = 0, x'(x) \neq 0$
(iv) $U \subset X$ UR, dann: U dicht in $X \Leftrightarrow \forall x' \in X' : (x'_{|U} = 0 \implies x' = 0)$

4.2 Dualräume

DR von Quotientenräumen

DEF: Anihilator
X norm. R., $U \subset X, V \subset X'$
(i) $U^{\perp} = \{x' \in X' : x'(x) = 0, \forall x \in U\}$ **Annihilator von** U **in** X'
(ii) $V_{\perp} = \{x \in X : x'(x) = 0, \forall x' \in V\}$ **Annihilator von** V **in** X

BEM: $U^{\perp}, V_{\perp}$ sind jeweils **abg. UR**

X norm. R., $U \subset X$ abg. UR.
Es ex. ein *kanonischer isometrischer Isomorphismus* so, dass $(X/U)' \simeq U^{\perp}$

$U' \simeq X'/U^\perp$

Satz: seperabler DR
Ein norm. R. mit *seperablem DR* ist seperabel

DR von Folgenräumen

$1 \le p < \infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.
Die Abb. $J: l^p \to (l^q)', Jy(x) = \sum_{j=1}^\infty x_j y_j$ ist ein *isometrischer Isomorphismus*
Die selbe Abb. liefert *isometrischen Isomorphismus* $J: l^1 \to (c_0)'$
$(l^p)' \simeq l^q$
$(c_0)' \simeq l^1$
$(l^\infty)' \not\simeq l^1$

DR von Lebesqueräumen

$1\le p<\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, (S,\mathcal{A},\mu)$ σ-end. Maßraum
Die Abb. $J: L^q(\mu) \to (L^p(\mu))', (Jg)(f) = \int_S fg\, d\mu$ ist ein *isometrischer Isomorphismus*
$(L^p(\mu))' \simeq L^q(\mu)$

4.3 Hahn Banach *geometrische V.*

DEF: Minkowski-Funktional
X $\mathbb{K}$-VR, $A \subset X, p_A: X \to [0,\infty], x\mapsto \inf\{\lambda>0: x\in\lambda A\}$, **Minkowski Funtkional**

Lemma:
X norm. R. $A\subset X$ konvex m. $(0 \in \text{int}A \Leftrightarrow \exists\delta>0: \overline{B}(0,\delta)\subset A)$, dann
(i) $\exists \delta>0: p_A(x) \le \frac{1}{\delta} ||x|| \forall x\in X$
(ii) p_A *sublinear*
(iii) A *offen* $\implies (p_A)^{-1}([0,1]) = A$

Lemma:
X norm. R., $V\subset X$ konvex, offen u. $0\notin V \implies \exists x'\in X': Re\ x'(x) < 0 \forall x\in V$

Satz: Hahn-Banach *Trennungsversion I*
X norm. R., $U_1,U_2 \subset X$ konvex, U_1 offen, $U_1\cap U_2 = \emptyset \implies \exists x'\in X': Re(x'(u_1)) < Re(x'(u_2)) \forall u_1\in U_1, u_2\in U_2$

Satz: Hahn-Banach *Trennungsversion II*
X norm. R., $U\subset X$ abg. konvex, $x_0\notin U \implies \exists x'\in X': Re(x'(x_0)) < \inf_{u\in U} Re(x'(u))$

5 Hilbertraum

5.1 Prähilbertraum u. Hilbertraum

DEF: Skalarprodukt
X $\mathbb{K}$-VR, $(\cdot,\cdot): X\times X\to\mathbb{K}$ **Skalarprodukt**, falls
(i) $(\lambda x + y, z) = \lambda(x,z) + (y,z), \forall\lambda\in\mathbb{K}\ \forall x,y,z\in X$
(ii) $(x,y) = \overline{(y,x)}, \forall x,y\in X$
(iii) $(x,x)\ge 0, (x,x)=0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x\in X$

DEF: Prähilbertraum
X $\mathbb{K}$-VR, $(\cdot,\cdot): X\times X \to \mathbb{K}$ Skalarprodukt, $(X,(\cdot,\cdot))$ **Prähilbertraum**

DEF: Hilbertnorm
X $\mathbb{K}$-VR, $(\cdot,\cdot): X\times X \to \mathbb{K}$ Skalarprodukt, $||\cdot|| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$ **Hilbertnorm**

Satz: CSU
X $\mathbb{K}$-VR, $(\cdot,\cdot): X\times X \to \mathbb{K}$ Skalarprodukt $\implies |(x,y)| \le (x,x)(y,y) \forall x,y\in X$
$|(x,y)| = (x,x)(y,y) \Leftrightarrow x,y$ *lin. unab.*

DEF: Hilbertraum
X $\mathbb{K}$-VR und bzgl. *Hilbertnorm voll.*

Satz: Parallelogramungleichung/Polarisation
X norm. R. (X *Prähilbertraum* $\Leftrightarrow ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2+2||y||^2, \forall x,y\in X$)

Satz: Vervollständigung Prähilbertraum
Sei $\hat{X}$ die *Vervollständigung des Prähilbertraums* $X \implies \hat{X}$ ist *Hilbertraum*

5.2 Orthogonalität

DEF: orthogonal
X *Prähilbertraum*, $x,y\in X$ **orthogonal**, falls $(x,y)=0$
$A,B\subset X$ **orthogonal**, falls $x\perp y, \forall x\in A, y\in B$

DEF: orth. Komplement
X *Prähilbertraum*, $A\subset X$, $A^\perp = \{x\in X: x\perp a, \forall a\in A\}$ **orth. Komplement**

DEF: lin., orth. Projektion
Eine *lin. Projektion* P heißt **orthogonal**, falls $N(P)\perp R(P)$

BEM:
(i) $x\perp y \implies ||x||^2+||y||^2 = ||x+y||^2$
(ii) $A^\perp$ *abg. UR* von X
(iii) $x\perp x \Leftrightarrow x=0$
(iv) $A\subset (A^\perp)^\perp$
(v) $A\subset B \implies B^\perp\subset A^\perp$
(vi) $A^\perp = (\overline{\text{lin}A})^\perp$

Lemma:
X *Prähilbertraum*, $U\subset X$ *dichter UR*, $x\in X: (\forall u\in U: (x,u)=0 \implies x = 0)$

Satz: Projektionssatz
H *Hilbertraum*, $\emptyset\ne K$ *abg., konvex*, $x_0\in H$, dann $\exists! x\in K: ||x-x_0|| = \inf_{y\in K}||y-x_0||$

Lemma:
H *Hilbertraum*, $\emptyset\ne K\subset H$ *abg., konvex*, $x_0\in H, x\in K$. Dann ist äq.
(i) $||x-x_0|| = \inf_{y\in K}||y-x_0||$
(ii) $Re(x_0-x, y-x)\le 0, \forall y\in K$

Satz: Orthogonalprojektion
H *Hilbertraum*, $\{0\}\ne U\subset H$ *abg. UR*, dann ex. *eindeutige, lineare Projektion* P_U m. $||P_U|| = 1, R(P_U) = U, N(P_U) = U^\perp$,
$||x - P_U x|| = \inf_{y\in U}||x-y||, \forall x\in H, H = U\oplus U^\perp$.
P_U **orthogonale Projektion**

BEM: $(U^\perp)^\perp = U, H/U = U^\perp$

Korrolar:
H *Hilbertraum*, $U\subset H$ *UR*, dann $\overline{U} = (U^\perp)^\perp$

Satz: Darstellungssatz v. Fréchet-Riesz
H *Hilbertraum*. $\phi: H\to H', y\mapsto(\cdot,y)$ ist *bijektiv, isometrisch u. konjugiert linear*, d.h. $\forall x'\in H'\exists! y\in H: x'(x) = (x,y), \forall x\in H, ||x'|| = ||y||$

BEM: H^* der VR der *konjugiert-linearen Funktionale* $H\to\mathbb{K}$, dann ist $\phi^*: H\to H^*, x\mapsto (x,\cdot)$ *isometrischer Isomorphismus*
H^* ist *Hilbertraum* mit Skalarprodukt $(\varphi,\psi)_{H^*} := ((\phi^*)^{-1}\varphi, (\phi^*)^{-1}\psi)_H$

Satz: Lax-Milgram
H *Hilbertraum*, $B: H\times H\to\mathbb{K}$ *sesquilinear* u. *stetig*, dann $\exists T\in L(H): B(x,y) = (Tx,y)\forall x,y\in H$

5.3 Orthonormalbasen

H *Hilbertraum*

DEF: Orthonormalsystem
$S\subset H$ **Orthonormalsystem**, falls $||e|| = 1, (e,f) = 0, \forall e,f\in S, e\ne f$

Satz: Besselsche Ungl. I
$\{e_n: n\in N\}\subset H$ *ONS*, $x\in H \implies \sum_{i=1}^\infty |(x,e_n)|^2 \le ||x||^2$

Lemma:
$\{e_n:n\in N\}\subset H$ *ONS*, $x,y\in H \implies \sum_{i=1}^\infty |(x,e_n)(e_n,y)| < \infty$

Lemma:
$S\subset H$ *ONS*, $x\in H \implies S_x := \{e\in S: (x,e)\ne 0\}$ *höchstens abzählbar*

Satz: Besselsche Ungl. II
$S\subset H$ *ONS*, $x\in H \implies \sum_{e\in S}|(x,e)|^2 \le ||x||^2$

DEF: unbedingte Konvergenz
X norm. R., I Indexmenge, $(x_i)_{i\in I}\subset X, x\in X$.
$\sum_{i\in I} x_i$ **konvergiert unbedingt** gegen x, falls
(i) $I_0 := \{i\in I, x_i\ne 0\}$ *höchst. abz.*
(ii) für Umordnung $i_1,i_2,...$ von I_0: $x = \sum_{n=1}^\infty x_{i_n}$

Satz: Orthogonalprojektion
$S\subset H$ *ONS*
(i) $\forall x\in X: \sum_{e\in S}(x,e)e$ *konvergiert unbedingt*
(ii) $P: H\to H, x\mapsto \sum_{e\in S}(x,e)e$ ist die *Orthogonalprojektion* auf $\overline{linS}$

Korrolar:
$S\subset H$ *ONS*, dann sind äq.
(i) $x\in H, x\perp S \implies x=0$
(ii) $\overline{linS} = H$
(iii) $\forall x\in H: x = \sum_{e\in S}(x,e)e$
(iv) $\forall x,y \in H: (x,y) = \sum_{e\in S}(x,e)(e,y)$
(v) $\forall x\in H: ||x||^2 = \sum_{e\in S}|(x,e)|^2$

DEF: Orthonormalbasis
Ist eine der *Bedingung* aus dem *Korrolar* erfüllt, so heißt S **vollständiges ONS** oder **Orthonormalbasis** von H (Schauderbasis)

Satz: Hilbertraum ONB
(i) Jeder Hilbertraum besitzt eine **ONB**
(ii) $\{e_i, i\in I\} = S\subset H$ *ONB* u. $l^2(I,\mathbb{K}) := \{(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^I: \sum_{i\in I}|\lambda_i|^2 < \infty\}$ m. *Norm* $||(\lambda_i)_{i\in I}||_{l^2(I,\mathbb{K})} := \sqrt{\sum_{i\in I}|\lambda_i|^2}$, dann *induziert* $e_i \mapsto (\delta_{ij})_{j\in I}$ einen *isometrischen Isomorphismus* $H\to l^2(I,\mathbb{K})$

BEM: In *unendlichdim. Hilberträumen* ist äq.
H *seperabel*
$\Leftrightarrow$ eine (alle) *ONB* ist abz.
$\Leftrightarrow H\simeq l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$

6 Soboleräume

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen
$L^1_{loc}(\Omega) = \{f: \Omega\to\mathbb{K} \text{ mb}: f\mathbb{1}_K \in L^1(\Omega),\ K\subset\Omega \text{ kpt.}\}$
$\text{supp}\,\varphi = \overline{\{x\in\Omega:\varphi(x)\ne 0\}}$
$C_c^\infty(\Omega) = \{\varphi: \Omega\to\mathbb{K}\in C^\infty: \text{supp}\,\varphi\subset\Omega \text{ kpt.}\}$

DEF: schwache Ableitung
$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ Gebiet, $f\in L^1_{loc}(\Omega), j\in\{1,..,n\}$
Existiert $g\in L^1_{loc}(\Omega): \int_\Omega f\cdot\partial_j\varphi dx = -\int_\Omega g\cdot\varphi dx, \quad \forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$, dann heißt f schwach nach x_j ableitbar, und $\partial_j f = g$ ist die **schwache Ableitung** in Richtung x_j.

DEF: Faltung
Für $f,g: \mathbb{R}^n\to\mathbb{K}$ ist $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ die Faltung von f und g.

Lemma:
$f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n),\ \varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \alpha\in\mathbb{N}_0^n$
(i) $f*\varphi\in C^\infty(R^n),\ \partial^\alpha(f*\varphi) = f*\partial^\alpha\varphi$
(ii) $p\in[1,\infty),\ f\in L^p(\mathbb{R}^n)$
$\text{supp}\,\varphi\subset B(0,1)$
$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx = 1$
$\varphi_k(x) := k^n\varphi(kx), k\in\mathbb{N}$
Dann ist $f*\varphi_k\in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $||f*\varphi_k - f||\to 0$

Korrolar:
Ist $g\in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $\int_\Omega g\varphi dx = 0, \forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$, dann ist $g=0$ f.ü.

DEF: Sobolevraum
$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ Gebiet, $p\in[1,\infty]$
(i) $W^{1,p}(\Omega) = \{f\in L^p(\Omega): \partial_j f$ ex. u. $\partial_j f\in L^p(\Omega), \forall j\in\{1\dots,n\}\}$ heißt der Sobolevraum 1. Ordnung
(ii) $W^{m,p}(\Omega) = \{f\in L^p(\Omega): \partial^\alpha f$ ex. u. $\partial^\alpha f\in L^p(\Omega), \forall\alpha\in\mathbb{N}_0^n, |\alpha|\le m\}$ heißt der Sobolevraum m. Ordnung

DEF: Norm - SR. 1. Ordnung
(i) $p\in[1,\infty)$: $||f||_{W^{1,p}} = (||f||_p^p + \sum_{j=1}^n ||\partial_j f||_p^p)^{\frac{1}{p}}$
(ii) $p=\infty$: $||f||_{W^{1,p}} = \max\{||f||_\infty, ||\partial_1 f||_\infty,\dots,||\partial_n f||_\infty\}$

Satz: Vollständige Sobolevräume
Für $m\in\mathbb{N},\ p\in[1,\infty]$ ist $(W^{m,p}(\Omega), ||\cdot||_{W^{m,p}})$ ein BR.
Weiter ist $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ HR mit SP $(f,g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le m}(\partial^\alpha f, \partial^\alpha g)_{L^2(\Omega)}$

Lemma:

Funkanalysis Cheatsheet
von Julian Dörner
♡ gitlab.com/juliandoerner/funkana_cheatsheet

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $\partial_j f \in L^1_{loc}(\Omega), j = 1, \ldots, n$, $g \in C^\infty(\Omega)$. Dann ex. $\partial_j(fg), j = 1, \ldots, n$ in Ω und $\partial_j(fg) = (\partial_j f)g + f(\partial_j g), j = 1, \ldots, n$

BEM: Für $p \in [1, \infty], f \in W^{1,p}(\Omega)$, $g \in W^{1,p'}(\Omega)$ gilt $fg \in W^{1,1}(\Omega)$ und $\partial_j(fg) = (\partial_j f)g + f(\partial_j g), j = 1, \ldots, n$

BEM: Für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$ ex. $\partial^\alpha f$ in $\mathbb{R}^n$, dann gilt $\forall \varphi \in C^\infty_c$: $\partial^\alpha(f * \varphi) = \partial^\alpha f * \varphi$

Satz: Dicht im SR
Für $p \in [1, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$ ist $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ dicht in $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

Lemma:
Zu $f \in H^m(\Omega)$ mit $m > k + \frac{n}{2}$ ex. $g \in C^k(\Omega)$ mit $f = g$ f.ü.

Satz: von Rellich
Die Einbettung $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ist kompakt.

7 Reflexivität und schwache Konvergenz

7.1 Adjungierter Operator

DEF: Adj. Op.
Seien X, Y Br., $T \in L(X, Y)$, dann ist der adj. Op. $T' : Y' \to X'$ def. durch $T'y' = y' \circ T, \ \forall y' \in Y'$

DEF: Dualitätsklammer
Sei X ein norm. R. und X' sein Dualraum. Dann ist $x'(x) =< x, x' >, \ \forall x \in X, x' \in X'$ die Dualitätsklammer.

BEM: Für den adj. Op. gilt $< x, T'y' >=< Tx, y' > \quad \forall x \in X, \forall y' \in Y'$

BEM:
(i) Die Abb. $L(X, Y) \to L(X', Y'), T \mapsto T'$ ist lin., isom., aber im alg. nicht surj.
(ii) $T \in L(X, Y), S \in L(Y, Z)$: $(ST)' = T'S'$

Satz: Zsmh. Kern und Bild Adj.
X, Y Br. $T \in L(X, Y)$. Dann gilt
(i) $R(T)^\perp = N(T')$
(ii) $\overline{R(T)} = N(T')_\perp$

Korrolar:
X, Y Br. $T \in L(X, Y)$ mit abg. Bild. Die Gleichung $Tx = y$ ist lösbar gdw. $T'y' = 0$

7.2 Bidualraum

DEF: Bidualraum
X NR., $X'' := (X')'$ heißt **Bidualraum**

BEM: Für $x \in X$ ist $\delta_x : X' \to \mathbb{K}, x' \mapsto < x, x' >$ lin. u. stetig

Satz: kanon. Einbettung
Die kanon. Einbettung $J_X : X \to X'', x \mapsto \delta_x$ ist lin. u. isom. aber im alg. nicht surj.

BEM:
(i) Durch J_X wird X mit UR von X'' identif.
(ii) X voll. $\implies$ $J_X(X)$ voll.
(iii) X norm. R., so ist $(\overline{J_X(X)}, J_X)$ Vervollstän.
(iv) Jeder norm. R. ist isom. isomorph zu dichten UR eines BR.

Lemma:
X, Y BR, $T \in L(X, Y)$. Dann ist $T'' := (T')' : X'' \to Y''$ lin. u. stetig mit $\|T''\| = \|T\|$ und $T'' \circ J_X = J_Y \circ T$

Satz: Satz von Schauder
X, Y BR., $T \in L(X, Y)$. Dann gilt T komp. $\Leftrightarrow T'$ komp.

7.3 Reflexivität

DEF: Reflexivität
Ein BR X heißt reflexiv, falls die kanon. Einbettung J_X surj. ist.

BEM:
(i) Dann ist $X \cong X''$
(ii) X nicht voll. $\implies$ X nicht reflexiv
(iii) $p \in (1, \infty) : l^p, L^p$ reflexiv
(iv) c_0, l^1, l^∞ nicht reflexiv
(v) X end. dim. $\implies$ X reflexiv

Lemma:
(i) Abg. UR von ref. R. sind ref.
(ii) X ref $\Leftrightarrow X'$ ref.

Korrolar:
X ref. ist seperabel $\Leftrightarrow X'$ seperabel

BEM: Hilberträume sind seperabel

DEF: schwache Konvergenz
X BR. $(x_n)_n) \in X$ heißt schw. konv. gegen $x \in X$, falls $< x_n, x' > \to < x, x' > \ \forall x' \in X'$
Not: $x_n \rightharpoonup x, x_n \xrightarrow{\sigma} x, x_n \xrightarrow{\omega} x$

DEF: schwach* Konvergenz
X BR. $(x'_n)_n \in X'$ heißt schw.* konv. gegen $x' \in X'$, falls $< x, x'_n > \to < x, x' > \forall x \in X$
Not: $x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x', x'_n \xrightarrow{\sigma^*} x', x'_n \xrightarrow{\omega^*} x'$

BEM:
1. Konv. in Norm $\implies$ schw. Konv.
2. schw./* GWe sind eindeutig
3. schw. Konv. in X $\implies$ schw.* Konv. in X''
$< x, x' >_{X \times X'} =$
$< x', J_X(x) >_{X' \times X''}$
4. Ist X ref., dann sind schw, Konv auf X' und schw.* Konv. auf X das Gleiche.
5. X' ist schw.*-folgenvollständig. D.h. ist $\forall x \in X : (< x, x'_n >)_n$ CF in $\mathbb{K}$, dann ex. $x' \in X'$ mit $x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x'$

Satz: schw. Konv. auf dichter Menge
X BR, $x_n, x \in X, x'_n, x' \in X'$
$D \subset X : \overline{linD} = X$
$D' \subset X' : \overline{linD'} = X'$
Dann gilt
(a) $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \sup_n \|x_n\| < \infty$ und $< x_n, x' > \to < x, x' > \forall x' \in D'$
(b) $x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x' \Leftrightarrow \sup_n \|x'_n\| < \infty$ und $< x, x'_n > \to < x, x' > \forall x \in D$

In a) gilt $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$
In b) gilt $\|x'\| \leq \liminf \|x'_n\|$

Satz: Banach-Alaoglu Ver. I
Sei X seperabler BR.
Für $(x'_n)_n$ beschr. ex. $x' \in X'$ und $(x'_{n_j})_j$ mit $x_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ und $\|x'\| \leq \liminf \|x'_n\|$

BEM:
1. im alg. falsch für X nicht-seperabel
2. Satz gilt nicht für schw. Konv.

Satz: Banach-Alaoglu Ver. II
Sei X reflexiver BR.
Für $(x_n)_n$ beschr. ex. $x \in X$ und $(x_{n_j})_j$ mit $x_{n_j} \rightharpoonup x$ und $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$

Satz: Mazur
X BR, $V \subset X$ abg.und konvex. Ist (x_n) schw. konv. in V mit $x_n \rightharpoonup x \implies x \in V$ Mazur

Satz: Banach-Alaoglu + Mazur
X ref. $\implies$ $\overline{B_X}$ schw.-folgenkompakt

8 Operatoren auf Hilberträumen

BEM: H HR. Fréchet-Riesz:
$\Phi_H : H \to H', y \mapsto (\cdot, y)$ ist kanon., konj. lin., isome. Isomorphismus

DEF: adj. Operator
H_1, H_2 HR, $T \in L(H_1, H_2)$. Der adj. Op $T^* : H_2 \to H_1$ ist def durch $(Tx, y) = (x, T^*y) \ \forall x \in H_1, y \in H_2$

BEM: Es gilt:
$T^* = \Phi^{-1}_{H_1} T' \Phi_{H_2}$

DEF: unitär, normal, selbstadj.
$T \in L(H_1, H_2)$
(i) T heißt *unitär*, falls T inv. mit $TT^* = Id_{H_2}$ und $T^*T = Id_{H_1}$
(ii) $H_1 = H_2$: T ist *normal*, falls $TT^* = T^*T$
(iii) $H_1 = H_2$: T ist *selbstadj.*, falls $T = T^*$

BEM:
1. T *unitär* $\Leftrightarrow$ T surj. u. $(Tx, Ty) = (x, y) \ \forall x, y \in H_1$
2. T *normal* $\Leftrightarrow$ $(Tx, Ty) = (T^*x, T^*y) \ \forall x, y \in H_1$
3. T *selbstadj.* $\Leftrightarrow$ $(Tx, y) = (x, Ty) \ \forall x, y \in H_1$

Satz: Hellinger-Toeplitz
H HR., $T : H \to H$ lin.
Falls $(Tx, y) = (y, Tx) \ \forall x, y \in H$, dann ist T stetig und selbstadj.

Satz: selbstadj. in komplexem HR
H HR über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $T \in L(H)$. Dann ist äq.
(i) T ist selbstadj.
(ii) $(Tx, x) \in \mathbb{R} \ \forall x \in H$

Satz: OPnorm selbstadj OP
H HR, $T \in L(H)$ selbstadj. Dann ist $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Tx, x)|$