Funkanalysis Cheatsheet
von Julian Dörner
♡ gitlab.com/juliandoerner/funkana_cheatsheet

0 Räume

DEF: Metrik
$d : X \times X \to [0,\infty)$, $x, y \in X$
(M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(M2) $d(x,y) = d(y,x)$
(M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Genügt d nur (M2), (M3) und ist $d(x,x) = 0$, dann heißt d **Halbmetrik**.

DEF: Metrischer Raum
$X \neq \emptyset, d$ Metrik, dann heißt (X,d) *metrischer Raum*

DEF: Vollständigkeit
Ein **MR** (X,d) heißt *vollständig*, wenn jede CF konvergiert.

DEF: Norm
$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, X $\mathbb{K}$-VR, $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$
(N1) $\|x\| = 0 \implies x = 0$
(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Genügt $\|\cdot\|$ nur (N2), (N3), dann heißt $\|\cdot\|$ Halbnorm auf X.

DEF: Normierter Raum
X $\mathbb{K}$-VR, $\|\cdot\|$ Norm, dann heißt $(X, \|\cdot\|)$ *normierter Raum.*

DEF: Banachraum
Ein vollständiger NR $(X, \|\cdot\|)$ heißt Banachraum

Satz: Voll. NR u. Reihen
Sei $(X, \|\cdot\|)$ NR. Es sind äq.
(i) $(X, \|\cdot\|)$ voll.
(ii) Für $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ ex. $x \in X$ mit $lim_{N\to\infty} \|x - \sum_{n=1}^{N} x_n\| = 0$

Satz: CF-TF Konvergenz
Sei $(x_n)_n$ CF in (X,d) MR. Gibt es eine TF $(x_{n_j})_j$, die gegen $x \in X$ konvergiert, so konvergiert $(x_n)_n$ gegen x.

Satz: TF Konvergenz
Sei $(x_n)_n$ eine Folge in (X,d) MR. Dann sind äq.
(i) $(x_n)_n$ konvergiert gegen x
(ii) Jede TF $(x_{n_j})_j$ hat eine gegen x konvergente TF

1 Topologie

DEF: Offen und Abgeschlossen
$M \subset X$ **offen** $\Leftrightarrow \forall x_0 \in M \exists r > 0 : B(x_0, r) \subset M$
$M \subset X$ **abgeschlossen** $\Leftrightarrow X \setminus M$ offen.

Satz: Offenheit mit Folgen
Sei $U \subset X$. Es sind äq.
(i) U *offen*
(ii) $\forall x \in U$ und jede gegen x konv. Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ex $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U, \forall n \geq N$

Lemma:
(1) Die Vereinigung *beliebig* vieler offener Mengen ist offen.
(2) Der Schnitt *endlich* vieler offener Mengen ist offen.

DEF: innerer Punkt, Randpunkt, Abschluss
$M \subset X$
(1) $x_0 \in M$ **innerer Pkt.** von M $\Leftrightarrow \exists r > 0 : B(x_0, r) \subset M$
(2) $int(M)$ Menge aller *inneren Pkt.*
(3) $x_0 \in X$ **Randpunkt** von M $\Leftrightarrow \forall r > 0 : B(x_0, r) \cap M \neq \emptyset$ und $B(x_0, r) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$.
(4) **Rand** ∂M Menge aller *Randpkt.*
(5) **Abschluss** $\overline{M} = \{x \in X | \forall r > 0 : B(x,r) \cap M \neq \emptyset$

- $int(X \setminus M) = X \setminus \overline{M}$
- $\overline{X \setminus M} = X \setminus int(M)$
- M offen $\Leftrightarrow int(M) = M$
- M abg. $\Leftrightarrow \overline{M} = M$
- $\partial M = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$
- $\overline{M} = int(M) \dot\cup \partial M$
- $X = int(M) \dot\cup \partial M \dot\cup int(X \setminus M)$

Lemma:
$M \subset X, x_0 \in X$
$x_0 \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \subset M : x_n \to x_0$

Korrolar:
$M \subset X$ abg. $\Leftrightarrow \forall (x_n)_n \subset M : (x_n \to x_0 \implies x_0 \in M)$

Satz: voll. Teilraum
(X,d) metr., *voll.*, $\emptyset \neq M \subset X$
$(M, d_{|M})$ *voll.* $\Leftrightarrow M$ abg. in X.

DEF: Dicht, seperabel
(X,d) metr., $D, M \subset X$
(1) D **dicht** in $M \Leftrightarrow M \subset \overline{D}$
(2) (X,d) **seperabel** $\Leftrightarrow \exists A \subset X$ *abz.* und *dicht* in X.

Korrolar:
D **dicht** in $M \Leftrightarrow \forall x \in M \exists (x_n)_n \subset D : x_n \to x$

Lemma:
$(X, \|\cdot\|)$ ist **seperabel** $\Leftrightarrow \exists A \subset X$ abz. u. $lin(A)$ dicht in X

Satz: Separabilität von BR
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein BR. Dann sind äq.
(i) X separabel
(ii) $B_X = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ seperabel
(iii) $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ seperabel

1.1 Teilraumtopologie

(X,d) MR, $M \subset X, d_M = d_{|M\times M}$

DEF: relativ offen
$A \subset M$ heißt **relativ offen**, falls A offen in (M, d_M)

Lemma:
$A \subset M$ ist *offen in* M, gdw. es $A' \subset X$ offen gibt, mit $A = A' \cap X$

Korrolar:
Sei $A \subset M$. Für den Abschluss $\overline{A}^M$ in M gilt $\overline{A}^M = \overline{A} \cap M$

Satz: Seperabler Teilraum
Sei X seperabel $\implies M$ *seperabel.*

1.2 Stetigkeit

X, Y metr. R., $f : X \to Y$

DEF: Stetigkeit
(1) f heißt **stetig**, falls $\forall O \subset Y$ offen $\implies f^{-1}(O)$ offen.
(2) f heißt **stetig in** $x_0 \in X$, falls $\forall V \subset Y$ Umgebung v. $f(x_0)$ ex. $U \subset X$ Umgebung v. x_0 mit $f(U) \subset V$

BEM: f stetig in $x_0 \in X$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \implies d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0)), \varepsilon)$
$\Leftrightarrow x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to f(x_0)$

DEF: glm. Stetigkeit
f heißt **glm. Stetig**, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X : d(x,y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

BEM: f glm stetig, (x_n) CF $\implies (f(x_n))$ CF

DEF: Lipschitz-Stetig
f heißt **Lipschitz-Stetig**, falls $\exists L > 0 \forall \delta > 0 \forall x, y \in X : d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x,y)$

Satz: glm. Fortsetzung
$D \subset X$, X, Y vollständig, f glm. Stetig.
Dann existiert eine *eindeutige, glm. Stetige* Fortsetzung $\tilde{f} : \overline{D} \to Y$

1.3 Äquivalente Normen

$(\|\cdot\|, X), (|||\cdot|||, X)$ normierte Räume

DEF: Äquivalente Normen
$\|\cdot\|, |||\cdot|||$ sind äquivalent, falls $\exists c, C > 0 \forall x \in X : c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\|$

Satz: äq. Normen und GWe
$\Leftrightarrow$ $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ äquivalent
$\Leftrightarrow$ $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ haben die *gleichen konv. Folgen*
$\Leftrightarrow$ $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ haben die *gleichen Nullfolgen*

BEM:
(i) $(X, d_1), (X, d_2)$ metr. Räume mit den selben konv. Folgen $\not\Rightarrow$ dieselben CF
(ii) Sind $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ äquivalent, dann haben die Räume die *gleichen* offenen (abgl.) Mengen
(iii) Sind $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ äquivalent, dann gilt $(X, \|\cdot\|)$ voll. $\Leftrightarrow (X, |||\cdot|||)$ voll.
(iv) In end. dim. Räumen sind alle Normen äq.

1.4 Kompaktheit

DEF: Komapkt, folgenkom., rel. kom., totalbeschränkt
(X,d) metr. R., $K \subset X$
(i) K **kompakt**, falls jede offenen Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt
(ii) K **folgenkompakt**, falls jede Folge in K eine konvergente TF besitzt
(iii) K **relativ kompakt**, falls $\overline{K}$ kompakt
(iv) K **totalbeschränkt**, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists x_1, ..., x_m \in X : K \subset \cup_{i=1}^m B(x_j, \varepsilon)$

Satz: Kompaktheit in MR
K *kompakt*
$\Leftrightarrow$ K *folgenkompakt*
$\Leftrightarrow$ K *totalbeschränkt* und *vollständig*

BEM:
(i) K *rel. kompakt* u. *abgeschlossen* $\implies K$ *kompakt*
(ii) K *komapkt* $\implies K$ *totalbeschränkt*
(iii) K *totalbeschränkt*, dann können die x_j in K gewählt werden
(iv) K *totalbeschränkt* $\implies K$ *beschränkt*
(v) K voll. $\implies K$ *abgeschlossen* in X
(vi) K *kompakt* $\implies K$ *abgeschlossen* u. *beschränkt*
(vii) K *totalbeschränkt* $\implies K$ *seperabel*
(viii) K *komapkt* $A \subset K \implies A$ *rel. kompakt*

Satz: Kompaktheit im endlichen
$(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Dann ist äquivalent
(i) *dim* $X < \infty$
(ii) $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\} = \overline{B}(0,1)$ ist kompakt
(iii) Jede *abgeschlossene* u. *beschränkte* Teilmenge ist *kompakt*

Satz: Kompakter MR
Sei (X,d) kompt. MR und $A \subset X$ abg. $\implies A$ kompakt

Lemma:
Sei (X,d) MR, $B \subset X$ rel. komp, $A \subset B \implies A$ rel. komp.

Satz: Rieszsches Lemma
$(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $Y \neq X$ abg. UR, $\delta > 0$
Dann $\exists x_\delta \in X, \|x_\delta\| = 1 : \|x_\delta - y\| \geq 1 - \delta, \ \forall y \in Y$

Lemma:
$(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, Y end. dim. UR.
Dann ist Y abg. in X

Satz: Stetige Funktion auf Kompaktum
X, Y metr. R., X *kompakt*, $f : X \to Y$ stetig.
Dann ist f glm stetig und $f(X)$ kompakt

DEF: Gleichgradig Stetig
(K,d) metr. Raum, K kompakt, $M \subset C(K)$
M heißt gleichgradig Stetig, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in M \forall s, t \in K : (d(s,t) < \varepsilon \implies |f(s) - f(t)| < \varepsilon)$

Satz: Arzela-Ascoli
(K,d) metr. Raum, K kompakt, $M \subset C(K)$
M *beschränkt* u *gleichgradig Stetig* $\implies$ M *rel. Komapkt*

2 Operatoren

2.1 Stetige lineare Operatoren

X, Y norm. R., $T : X \to Y$ linear

Satz: Stetigkeit von lin. Abb.
Es sind äquivalent
(i) T stetig
(ii) T stetig in 0
(iii) (T beschränkt $\Leftrightarrow \exists C \geq 0 \forall x \in X : \|Tx\| \leq C\|x\|$)
(iv) T ist lipschitz
(v) T ist glm. stetig

DEF: Raum besch., lin. Operatoren
$T \in L(X,Y) \Leftrightarrow T$ *lin.* und *besch.*

DEF: Operatornorm
$\|T\| = \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} | x \in X \setminus \{0\}\}$

$= \inf\{c \geq 0 | \, \|Tx\| \leq c\|x\| \forall x \in X\}$
$= \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|Tx\|$
$= \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \|Tx\|$

DEF: Dualraum
$X' = L(X, \mathbb{K})$ **Dualraum** zu X

Satz: $L(X,Y)$ **vollständig?**
Y voll. $\implies$ $L(X,Y)$ *voll.* bzgl. Op.norm

Satz: lineare Fortsetzung
Y voll., $D \subset X$ dichter UR, $T \in L(D,Y)$.
Dann ex. eind. Fortsetzung $\tilde{T} \in L(X,Y)$, mit $\|T\| = \|\tilde{T}\|$

DEF: Kern, Bild, Einbettung,...

(i) $N(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$ **Kern**
(ii) $R(T) = \{y = Tx : x \in X\}$ **Bild**
(iii) *injektiver* Op. heißt **Einbettung** $X \leftrightarrow Y$
(iv) *bijektiver* Op. mit *stetiger Inverser* T^{-1} heißt **Isomorphismus** $X \simeq Y$
(v) Op. mit $\|Tx\| = \|x\|$ heißt **isometrisch**
(vi) Op. mit $\|T\| \leq 1$ (!!!) heißt **kontraktiv**

BEM:
- $N(T)$ *abgeschlossen*, ($T \in L(X,Y)$)
- T *isometrisch* $\implies$ T *kontraktiv* u. *injektiv*
- T *kontraktiv* $\implies$ T *stetig*
- T *isometrisch* $\implies$ T^{-1} : $R(T) \to X$ *isometrisch*
- $R(T)$ *abgeschlossen in* Y

2.2 Summen NR

X NR

DEF: Projektion
$P \in L(X), P^2 = P$ heißt **Projektion**

Lemma:
$P \in L(X)$ Projektion, $X_1 = N(P) = R(1-P)$, $X_2 = R(P) = N(1-P)$.
Dann ist $(1-P)$ auch Projektion und $X = X_1 \oplus X_2$ sowie $\|P\| \geq 1, P \neq 0$

Lemma:
$X = X_1 \oplus X_2$. Dann $\exists P \in L(X)$ eind. Proj. mit $R(P) = X_1, N(P) = X_2$

BEM: X voll. $\implies$ $(X_1 \oplus X_2 \simeq X_1 \times X_2)$

2.3 Quotientenräume

X NR

DEF: Quotientenraum
Y UR von X.
$X/Y = \{\hat{x} = x + Y | x \in X\}$ **Quotientenraum**

DEF: Quotientenabbildung
$Q : X \to X/Y$, $Qx = \hat{x}$ **Quotientenabbildung**, *linear* u. *surjektiv*, $N(Q) = Y$

DEF: Quotientennorm
$\|\hat{x}\| = \inf\{\|x - y\| \; | y \in Y\} (= d(x,Y))$

Satz: X/Y **NR?**
Y **abg.** UR von X.
Dann ist X/Y mit der Quo.norm ein NR. Ist X **voll.**, dann auch X/Y

2.4 Kompakte Operatoren

X, Y NR, $B_X = \{x \in X | \, \|x\| \leq 1\}$, $T : X \to Y$ linear

DEF: kompakter Operator
T **kompakt**, falls $T(B_X)$ *relativ kompakt* in Y

BEM:
(i) T *kompakt* $\implies$ $T \in L(X,Y)$
(ii) Y voll. Dann gilt T *kompakt*
$\Leftrightarrow$ $T(B_X)$ *totalbeschränkt*
$\Leftrightarrow$ für $(x_n)_n$ *beschränkt* enthält $(Tx_n)_n$ *konv. TF*

Satz: kompakte Operatoren
X, Y, Z voll.
(i) $K(X,Y)$ *abg. UR* von $L(X,Y)$ und voll.
(ii) $T \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,Z)$, ist T o. S kompakt $\implies$ $ST \in K(X,Z)$
(iii) $T \in L(X,Y)$, $dim R(T) < \infty \implies T \in K(X,Y)$
(iv) $dim X < \infty \implies T \in K(X,Y)$

Korrolar:
X, Y *voll.*, $T \in L(X,Y)$. Es gilt $\exists (T_n)_n \subset L(X,Y), dim R(T_n) < \infty, \|T_n - T\| \to 0 \implies T \in K(X,Y)$

3 Hauptsätze

3.1 Bairescher Kategoriensatz

(X,d) metr. R.

DEF: Durchmesser
$A \subset X$, $\text{diam} A := \sup\{d(x,y), x, y \in A\}$

Lemma:
(X,d) voll., $(A_n) \subset X$ *abg.* mit $\emptyset \neq A_{n+1} \subset A_n$ und $\text{diam} A_n \to 0 \implies \cap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$

Satz: Satz von Baire
(X,d) voll., $(O_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ *offen* und *dicht* in X $\implies$ $\cap_{n=1}^{\infty} O_n$ *offen* und *dicht* in X

DEF: Kategorien
(i) $M \subset X$ **nirgends dicht**, falls $\text{int} \overline{M} = \emptyset$
(ii) $M \subset X$ **1. Kategorie**, falls $\exists (M_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ *nirgends dicht*, $M = \cup_{n=1}^{\infty} M_n$
(iii) $M \subset X$ **2. Kategorie**, falls nicht von *1. Kategorie*

Satz: Bairescher Kategoriensatz
(X,d) voll., $M \subset X$ *1. Kategorie* $\implies$ $M^C = X \setminus M$ *dicht* in X

Korrolar:
Ein voll. metr. R. ist von *2. Kategorie*: $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n$ *abg.* $\implies$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\text{int} A_N \neq \emptyset$

3.2 Prinzip der glm. Beschränktheit

X, Y norm. R.

DEF: pkt., glm. Beschränktheit
$J \subset L(X,Y)$
(i) J **pkt. Beschränkt**, falls $\forall x \in X : \sup\{\|Tx\| : \; T \in J\} < \infty$
(ii) J **glm. Beschränkt**, falls $\sup\{\|T\| : \; T \in J\} < \infty$

Satz: Prinzip der glm. Beschränktheit
X *voll.*, $J \subset L(X,Y)$ *pkt. Beschränkt* $\implies$ J *glm. Beschränkt*

Satz: Banach-Steinhaus
X *voll.*, $(T_n) \subset L(X,Y)$, falls $\forall x \in X : Tx := lim_{n\to\infty} T_n x$ ex. $\implies$ $T \in L(X,Y)$. u. $\|T\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|T_n\| < \infty$

Korrolar:
X, Y *voll.*, $(T_n) \subset L(X,Y)$. Es sind äq.
(i) $\exists T \in L(X,Y) : \forall x \in X Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$
(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ u. $\exists D \subset X$ *dicht* m. $\forall x \in D : (T_n x)$ *CF*

DEF: starke Konvergenz
$(T_n) \subset L(X,Y)$, $T \in L(X,Y)$. (T_n) **konvergiert stark** gegen T, falls $\forall x \in X : Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$

BEM: *Konvergenz Operatornorm* $\implies$ *starke Konvergenz*

3.3 Satz von der offenen Abbildung

X, Y metr. R.

DEF: offene Abbildung
$f : X \to Y$ **offen**, falls $\forall O \in X$ *offen* $\implies$ $f(O)$ *offen*

Lemma:
X, Y norm. R., $T : X \to Y$ lin. Dann sind äq.
(i) T *offen*
(ii) $\exists \varepsilon > 0 : B(0, \varepsilon) \subset T(B(0,1))$

Satz: Satz von der offenen Abbildung
X, Y voll. $T \in L(X,Y)$ *surj.* $\implies$ T offen

Korrolar:
(i) T *bij.* $\implies$ T Isomoph. u. T^{-1} *stetig*
(ii) T *inj.* dann ist $T : R(T) \to X \in L(R(T), X)$ gdw. $R(T)$ *abg.*

Korrolar:
$(X, \|\cdot\|), (X, |||\cdot|||)$ *voll.* $\exists M > 0 \forall x \in X : \|x\| \leq M |||x||| \implies \|\cdot\|, |||\cdot|||$ **äq.**

Korrolar:
X, Y BR, $T \in L(X,Y)$.
T ist *inj.* u. $R(T)$ *abg.* gdw. $\exists c > 0 : \|Tx\| \geq c\|x\| \forall x \in X$

3.4 Satz vom abg. Graphen

X, Y norm. R.

DEF: Abgeschlossenen lin. Abbildung
$D \subset X$ UR, $T : D \to Y$ lin.
T heißt **agb.**, falls für $(x_n)_n \in D^{\mathbb{N}}, x_n \to x \in X$ u. $Tx_n \to y \in Y \implies x \in D, \; Tx = y$

DEF: Graph
$D \subset X$ UR, $T : D \to Y$ lin.
$gr(T) = \{(x, Tx), x \in D \subset X \times Y$

BEM:
(i) $gr(T)$ ist *UR* von $X \times Y$
(ii) T *abg.* $\Leftrightarrow gr(T)$ *abg.* in $X \times Y$ bzgl. **Produktnorm** $|||\cdot||| = \|\cdot\|_X + \|\cdot\|_Y$

Lemma:
X, Y *voll.*, $D \subset X$ *UR*, $T : D \to Y$ *abg.* Dann
(i) $(D, |||\cdot|||_G)$ *voll*, **Graphennorm** $|||\cdot|||_G = \|\cdot\|_X + \|T\cdot\|_Y$
(ii) $T \in L((D, |||\cdot|||_G), Y)$

Satz: Satz vom abg. Graphen
X, Y voll., $T : X \to Y$ *lin.*, *abg.* $\implies$ $T \in L(X,Y)$

4 Satz von Hahn-Banach

4.1 Fortsetzung von Funktionalen

DEF: sublinear
X $\mathbb{K}$-VR, $p : X \to \mathbb{R}$ **sublinear**, falls
(1) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \; \forall x \in X \forall \lambda \geq 0$ *(positiv homogen)*
(2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \; \forall x, y \in X$ *(subadditiv)*

Satz: Hahn-Banach *reelle V.*
X $\mathbb{R}$-VR, $U \subset X$ *UR*, $p : X \to \mathbb{R}$ *sublinear*, $l : U \to \mathbb{R}$ *linear* m. $l(x) \leq p(x), \forall x \in U \implies \exists L : X \to \mathbb{R}$ *linear* mit $L_{|U} = l, \; L(x) \leq p(x) \forall x \in X$

Lemma:
X $\mathbb{C}$-VR
(i) $l : X \to \mathbb{R}, \mathbb{R}$-linear $\tilde{l}(x) := l(x) - il(ix) \implies \tilde{l}$ $\mathbb{C}$-linear, $Re \; \tilde{l} = l$
(ii) $l : X \to \mathbb{C}, \mathbb{C}$-linear $l := Re \; \tilde{l} \implies l$ $\mathbb{R}$-linear
(iii) $p : X \to \mathbb{R}$ Halbnorm, $l : X \to \mathbb{C}, \mathbb{C}$-linear, dann $|l(x)| \leq p(x) \Leftrightarrow |Re \; l(x)| \leq p(x), \; \forall x \in X$
(iv) X norm. kompl. R., $l : X \to \mathbb{C}, \mathbb{C}$-linear und stetig $\implies$ $\|l\| = \|Re \; l\|$

Satz: Hahn-Banach *komplexe V.*
X $\mathbb{C}$-VR, $U \subset X$ *UR*, $p : X \to \mathbb{R}$ *sublinear*, $l : U \to \mathbb{C}$ *linear* m. $Re \; l(x) \leq p(x), \forall x \in U \implies \exists L : X \to \mathbb{C}$ *linear* mit $L_{|U} = l, \; Re \; L(x) \leq p(x) \forall x \in X$

Satz: Hahn-Banach *Fortsetzungsversion*
X norm. R., $U \subset X$ UR. $\forall \varphi \in L(U, \mathbb{K}) : \exists \phi \in L(X, \mathbb{K})$ m. $\phi_{|U} = \phi, \|\phi\| = \|\varphi\|$

BEM:
(i) **Fortsetzungen** sind im alg. **nicht eindeutig**
(ii) **Fortsetzungen** ex. im alg. nur für **Funktionale**

Korrolar:
X norm. R., $x \in X$
(i) $x \neq 0, \exists x' \in X' : \|x'\| = 1, x'(x) = \|x\|$ außerdem $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \exists x' \in X : x'(x_1) \neq x'(x_2)$
(ii) $\|x\| = \sup_{x' \in B_{X'}} |x'(x)|$
(iii) $U \subset X$ abg. UR, $x \notin U \implies \exists x' \in X' : x'_{|U} = 0, x'(x) \neq 0$
(iv) $U \subset X$ UR, dann: U dicht in $X \Leftrightarrow \forall x' \in X' : (x'_{|U} = 0 \implies x' = 0)$

4.2 Dualräume

DR von Quotientenräumen

DEF: Anihilator
X norm. R., $U \subset X, V \subset X'$
(i) $U^{\perp} = \{x' \in X' : x'(x) = 0, \forall x \in U\}$ **Annihilator von** U **in** X'
(ii) $V_{\perp} = \{x \in X : x'(x) = 0, \forall x' \in V\}$ **Annihilator von** V **in** X

BEM: $U^{\perp}, V_{\perp}$ sind jeweils **abg. UR**

X norm. R., $U \subset X$ abg. UR.
Es ex. ein *kanonischer isometrischer Isomorphismus* so, dass $(X/U)' \simeq U^{\perp}$

$U' \simeq X'/U^\perp$

Satz: seperabler DR
Ein norm. R. mit *seperablem DR* ist seperabel

DR von Folgenräumen

$1 \le p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$
Die Abb. $J : l^p \to (l^q)', Jy(x) = \sum_{j=1}^\infty x_j y_j$ ist ein *isometrischer Isomorphismus*
Die selbe Abb. liefert *isometrischen Isomorphismus* $J : l^1 \to (c_0)'$
$(l^p)' \simeq l^q$
$(c_0)' \simeq l^1$
$(l^\infty)' \not\simeq l^1$

DR von Lebesqueräumen

$1 \le p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, (S, \mathcal{A}, \mu)$ σ-end. Maßraum
Die Abb. $J : L^q(\mu) \to (L^p(\mu))', (Jg)(f) = \int_S fg \; d\mu$ ist ein *isometrischer Isomorphismus*
$(L^p(\mu))' \simeq L^q(\mu)$

4.3 Hahn Banach *geometrische V.*

DEF: Minkowski-Funktional
X $\mathbb{K}$-VR, $A \subset X, p_A : X \to [0, \infty], x \mapsto \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$, **Minkowski Funtkional**

Lemma:
X norm. R. $A \subset X$ konvex m. $(0 \in \text{int}A \Leftrightarrow \exists \delta > 0 : \overline{B}(0, \delta) \subset A)$, dann
(i) $\exists \delta > 0 : p_A(x) \le \frac{1}{\delta}||x|| \forall x \in X$
(ii) p_a *sublinear*
(iii) A *offen* $\implies (p_A)^{-1}([0, 1]) = A$

Lemma:
X norm. R., $V \subset X$ konvex, offen u. $0 \notin V \implies \exists x' \in X' : Re\; x'(x) < 0 \forall x \in V$

Satz: Hahn-Banach *Trennungsversion I*
X norm. R., $U_1, U_2 \subset X$ konvex, U_1 offen, $U_1 \cap U_2 = \emptyset \implies \exists x' \in X' : Re(x'(u_1)) < Re(x'(u_2)) \forall u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$

Satz: Hahn-Banach *Trennungsversion II*
X norm. R., $U \subset X$ abg. konvex, $x_0 \notin U \implies \exists x' \in X' : Re(x'(x_0)) < \inf_{u \in U} Re(x'(u))$

5 Hilbertraum

5.1 Prähilbertraum u. Hilbertraum

DEF: Skalarprodukt
X $\mathbb{K}$-VR, $(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ **Skalarprodukt**, falls
(i) $(\lambda x + y, z) = \lambda(x, z) + (y, z), \; \forall \lambda \in \mathbb{K} \; \forall x, y, z \in X$
(ii) $(x, y) = \overline{(y, x)}, \; \forall x, y \in X$
(iii) $(x, x) \ge 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in X$

DEF: Prähilbertraum
X $\mathbb{K}$-VR, $(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ Skalarprodukt, $(X, (\cdot, \cdot))$ **Prähilbertraum**

DEF: Hilbertnorm
X $\mathbb{K}$-VR, $(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ Skalarprodukt, $|| \cdot || = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$ **Hilbertnorm**

Satz: CSU
X $\mathbb{K}$-VR, $(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ Skalarprodukt $\implies |(x, y)| \le (x, x)(y, y) \forall x, y \in X$
$|(x, y)| = (x, x)(y, y) \Leftrightarrow x, y$ *lin. unab.*

DEF: Hilbertraum
X $\mathbb{K}$-VR und bzgl. *Hilbertnorm voll.*

Satz: Parallelogramungleichung/Polarisation
X norm. R. (X *Prähilbertraum* $\Leftrightarrow ||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2, \; \forall x, y \in X$)

Satz: Vervollständigung Prähilbertraum
Sei $\hat{X}$ die *Vervollständigung des Prähilbertraums* $X \implies \hat{X}$ ist *Hilbertraum*

5.2 Orthogonalität

DEF: orthogonal
X *Prähilbertraum*, $x, y \in X$ **orthogonal**, falls $(x, y) = 0$
$A, B \subset X$ **orthogonal**, falls $x \perp y, \forall x \in A, y \in B$

DEF: orth. Komplement
X *Prähilbertraum*, $A \subset X, \; A^\perp = \{x \in X : x \perp a, \forall a \in A\}$ **orth. Komplement**

DEF: lin., orth. Projektion
Eine *lin. Projektion* P heißt **orthogonal**, falls $N(P) \perp R(P)$

BEM:
(i) $x \perp y \implies ||x||^2 + ||y||^2 = ||x + y||^2$
(ii) $A^\perp$ *abg. UR* von X
(iii) $x \perp x \Leftrightarrow x = 0$
(iv) $A \subset (A^\perp)^\perp$
(v) $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$
(vi) $A^\perp = (\overline{\text{lin}A})^\perp$

Lemma:
X *Prähilbertraum*, $U \subset X$ *dichter UR*, $x \in X : (\forall u \in U : (x, u) = 0 \implies x = 0)$

Satz: Projektionssatz
H *Hilbertraum*, $\emptyset \ne K$ *abg., konvex*, $x_0 \in H$, dann $\exists! x \in K : ||x - x_0|| = \inf_{y \in K} ||y - x_0||$

Lemma:
H *Hilbertraum*, $\emptyset \ne K \subset H$ *abg., konvex*, $x_0 \in H, x \in K$. Dann ist äq.
(i) $||x - x_0|| = \inf_{y \in K} ||y - x_0||$
(ii) $Re(x_0 - x, y - x) \le 0, \; \forall y \in K$

Satz: Orthogonalprojektion
H *Hilbertraum*, $\{0\} \ne U \subset H$ *abg. UR*, dann ex. *eindeutige, lineare Projektion* P_U m. $||P_U|| = 1, R(P_U) = U, N(P_U) = U^\perp$,
$||x - P_U x|| = \inf_{y \in U} ||x - y||, \forall x \in H, H = U \oplus U^\perp$.
P_U **orthogonale Projektion**

BEM: $(U^\perp)^\perp = U, H/U = U^\perp$

Korrolar:
H *Hilbertraum*, $U \subset H$ *UR*, dann $\overline{U} = (U^\perp)^\perp$

Satz: Darstellungssatz v. Fréchet-Riesz
H *Hilbertraum*. $\phi : H \to H', y \mapsto (\cdot, y)$ ist *bijektiv, isometrisch u. konjugiert linear*, d.h. $\forall x' \in H' \exists! y \in H : x'(x) = (x, y), \forall x \in H, ||x'|| = ||y||$

BEM: H^* der VR der *konjugiert-linearen Funktionale* $H \to \mathbb{K}$, dann ist $\phi^* : H \to H^*, x \mapsto (x, \cdot)$ *isometrischer Isomorphismus*
H^* ist *Hilbertraum* mit Skalarprodukt $(\varphi, \psi)_{H^*} := ((\phi^*)^{-1}\varphi, (\phi^*)^{-1}\psi)_H$

Satz: Lax-Milgram
H *Hilbertraum*, $B : H \times H \to \mathbb{K}$ *sesquilinear* u. *stetig*, dann $\exists T \in L(H) : B(x, y) = (Tx, y) \forall x, y \in H$

5.3 Orthonormalbasen

H *Hilbertraum*

DEF: Orthonormalsystem
$S \subset H$ **Orthonormalsystem**, falls $||e|| = 1, (e, f) = 0, \forall e, f \in S, e \ne f$

Satz: Besselsche Ungl. I
$\{e_n : n \in N\} \subset H$ *ONS*, $x \in H \implies \sum_{i=1}^\infty |(x, e_n)|^2 \le ||x||^2$

Lemma:
$\{e_n : n \in N\} \subset H$ *ONS*, $x, y \in H \implies \sum_{i=1}^\infty |(x, e_n)(e_n, y)| < \infty$

Lemma:
$S \subset H$ *ONS*, $x \in H \implies S_x := \{e \in S : (x, e) \ne 0\}$ *höchstens abzählbar*

Satz: Besselsche Ungl. II
$S \subset H$ *ONS*, $x \in H \implies \sum_{e \in S} |(x, e)|^2 \le ||x||^2$

DEF: unbedingte Konvergenz
X norm. R., I Indexmenge, $(x_i)_{i \in I} \subset X, x \in X$.
$\sum_{i \in I} x_i$ **konvergiert unbedingt** gegen x, falls
(i) $I_0 := \{i \in I, x_i \ne 0\}$ *höchst. abz.*
(ii) für Umordnung $i_1, i_2, \ldots$ von I_0 : $x = \sum_{n=1}^\infty x_{i_n}$

Satz: Orthogonalprojektion
$S \subset H$ *ONS*
(i) $\forall x \in X : \sum_{e \in S} (x, e)e$ *konvergiert unbedingt*
(ii) $P : H \to H, x \mapsto \sum_{e \in S} (x, e)e$ ist die *Orthogonalprojektion* auf $\overline{linS}$

Korrolar:
$S \subset H$ *ONS*, dann sind äq.
(i) $x \in H, x \perp S \implies x = 0$
(ii) $\overline{linS} = H$
(iii) $\forall x \in H : x = \sum_{e \in S} (x, e)e$
(iv) $\forall x, y \in H : (x, y) = \sum_{e \in S} (x, e)(e, y)$
(v) $\forall x \in H : ||x||^2 = \sum_{e \in S} |(x, e)|^2$

DEF: Orthonormalbasis
Ist eine der *Bedingung* aus dem *Korrolar* erfüllt, so heißt S **vollständiges ONS** oder **Orthonormalbasis** von H (Schauderbasis)

Satz: Hilbertraum ONB
(i) Jeder Hilbertraum besitzt eine **ONB**
(ii) $\{e_i, i \in I\} = S \subset H$ *ONB* u. $l^2(I, \mathbb{K}) := \{(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I : \sum_{i \in I} |\lambda_i|^2 < \infty\}$ m. *Norm* $||(\lambda_i)_{i \in I}||_{l^2(I, \mathbb{K})} := \sqrt{\sum_{i \in I} |\lambda_i|^2}$, dann *induziert* $e_i \mapsto (\delta_{ij})_{j \in I}$ einen *isometrischen Isomorphismus* $H \to l^2(I, \mathbb{K})$

BEM: In *unendlichdim. Hilberträumen* ist äq.
H *seperabel*
$\Leftrightarrow$ eine (alle) *ONB* ist abz.
$\Leftrightarrow$ $H \simeq l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$

6 Sobolevräume

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen
$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ mb: } f\mathbb{1}_K \in L^1(\Omega), \; K \subset \Omega \text{ kpt.}\}$
$\text{supp}\, \varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \ne 0\}}$
$C_c^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{K} \in C^\infty : \text{supp}\, \varphi \subset \Omega \text{ kpt.}\}$

DEF: schwache Ableitung
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f \in L^1_{lov}(\Omega), j \in \{1, .., n\}$
Existiert $g \in L^1_{loc}(\Omega) : \int_\Omega f \cdot \partial_j \varphi dx = -\int_\Omega g \cdot \varphi dxm, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, dann heißt f schwach nach x_j ableitbar, und $\partial_j f = g$ ist die **schwache Ableitung** in Richtung x_j.

DEF: Faltung
Für $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ ist $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ die Faltung von f und g.

Lemma:
$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \; \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \alpha \in \mathbb{N}_0^n$
(i) $f * \varphi \in C^\infty(R^n), \; \partial^\alpha(f * \varphi) = f * \partial^\alpha \varphi$
(ii) $p \in [1, \infty), \; f \in L^p(\mathbb{R}^n)$
$\text{supp}\, \varphi \subset B(0, 1)$
$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$
$\varphi_k(x) := k^n \varphi(kx), k \in \mathbb{N}$
Dann ist $f * \varphi_k \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $||f * \varphi_k - f|| \to 0$

Korrolar:
Ist $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $\int_\Omega g\varphi dx = 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, dann ist $g = 0$ f.ü.

DEF: Sobolevraum
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $p \in [1, \infty]$
(i) $W^{1,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : \partial_j f \text{ ex. u. } \partial_j f \in L^p(\Omega), \forall j \in \{1 \ldots, n\}\}$ heißt der Sobolevraum 1. Ordnung
(ii) $W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha f \text{ ex. u. } \partial^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \le m\}$ heißt der Sobolevraum m. Ordnung

DEF: Norm - SR. 1. Ordnung
(i) $p \in [1, \infty)$:
$||f||_{W^{1,p}} = (||f||_p^p + \sum_{j=1}^n ||\partial_j f||_p^p)^{\frac{1}{p}}$
(ii) $p = \inf$:
$||f||_{W^{1,p}} = \max\{||f||_\infty, ||\partial_1 f||_\infty, \ldots, ||\partial_n f||_\infty\}$

Satz: Vollständige Sobolevräume
Für $m \in \mathbb{N}, \; p \in [1, \infty]$ ist $(W^{m,p}(\Omega), || \cdot ||_{W^{m,p}})$ ein Banachraum.
Weiter ist $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ ist Hilbertraum mit Skalarprodukt $(f, g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le m} (\partial^\alpha f, \partial^\alpha g)_{L^2(\Omega)}$

Lemma:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $\partial_j f \in L^1_{loc}(\Omega), j = 1, \dots, n$, $g \in C^\infty(\Omega)$. Dann ex. $\partial_j(fg), j = 1, \dots, n$ in Ω und $\partial_j(fg) = (\partial_j f)g + f(\partial_j g), j = 1, \dots, n$

BEM: Für $p \in [1, \infty], f \in W^{1,p}(\Omega)$, $g \in W^{1,p'}(\Omega)$ gilt $fg \in W^{1,1}(\Omega)$ und $\partial_j(fg) = (\partial_j f)g + f(\partial_j g), j = 1, \dots, n$

BEM: Für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ex. $\partial^\alpha f$ in $\mathbb{R}^n$, dann gilt $\forall \varphi \in C_c^\infty$: $\partial^\alpha(f * \varphi) = \partial^\alpha f * \varphi$

Satz: Dicht im SR
Für $p \in [1, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$ ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$