# Hausaufgaben

**Versicherungsmathematik – Risikomodelle** – Übungsblatt 7

**Eric Kunze**
Matr.-Nr. 4679202

**Exercise 1** (Gaussian distribution).

(a) Assume $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Prove that $a + bX \sim \mathcal{N}(a, b^2)$ for $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Assume that $X_i$ are independent and $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$. Show for the sum $\sum_i X_i \sim \mathcal{N}(\sum_i \mu_i, \sum_i \sigma_i^2)$. Remark that this is an extremely important and useful property of Gaussian distributions.

(c) Assume $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Prove that $\mathbb{E}[X^{2k+1}] = 0$ for all $k \in \mathbb{N}_0$.

(a) Wir zeigen hier etwas allgemeiner den Fall einer linearen Transformation einer multivariaten Standardnormalverteilung.

Sei $X \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{1})$. Wir wollen zunächst die Dichte von $Y := H \cdot X$ mit einer invertierbaren Matrix $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bestimmen.

Sei dazu $U = H^{-1}$. Wir definieren zu den Matrizen gehörige Abbildungen durch $h(x) = Hx$ und $u(y) = Uy$. Schreiben wir $U = (u_{ij})_{i,j}$ , dann ist $u_i(y) = \sum_{i=1}^n u_{ij} y_j$. Es gilt

$$\frac{\partial u_i}{\partial y_j} = u_{ij}$$

und somit ist $J(y) = U$ die Jacobi-Matrix von $u$. Außerdem gilt

$$\det J(y) = \det U = \det(H^{-1}) = \frac{1}{\det H} \quad .$$

Nutzen wir nun die Transformationsformel für Integrale, so erhalten wir die Dichte

$$\begin{aligned}
P(Y \in B) &= P(h(X) \in B) \\
&= P(X \in u(B)) \\
&= \int_{u(B)} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{x^\top x}{2}\right) dx \\
&= \int_{h(u(B))} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{u(y)^\top u(y)}{2}\right) (\det J(y))\, dy \\
&= \int_{B} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{(Uy)^\top Uy}{2}\right) (\det J(y))\, dy \\
&= \int_{B} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{y^\top U^\top U y}{2}\right) \det U\, dy
\end{aligned}$$

Nun wollen wir die Kovarianz von $Y$ bestimmen. Dazu stellen wir fest, dass die Komponenten $X_i$ von $X$ unabhängig sind und somit insbesondere unkorreliert. Außerdem sind sie standardisiert und besitzen somit Kovarianz 1. Das liefert uns also

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} .$$

Die Kovarianz beschreibt also eine Einheitsmatrix $\mathbb{1} = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X) = (\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j))_{i,j}$. Für die Kovarianz von $Y$ berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_i, Y_j) &= \mathbb{E}\left[Y_i Y_j\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{a=1}^n H_{ia} X_a\right)\left(\sum_{b=1}^n H_{jb} X_b\right)\right] \\ &= \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n H_{ia} H_{jb} \mathbb{E}\left[X_a X_b\right] \\ &= \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n H_{ia} H_{jb}\, \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_a, X_b) \\ &= \sum_{a=1}^n H_{ia} H_{ja} \\ &= (HH^\top)_{ij} \quad , \end{aligned}$$

d.h. es gilt $\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y) = HH^\top$. Schreiben wir nun $\Sigma := \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y)$ und wollen diese Matrix in der Dichte von $Y$ wiederfinden. Diese Dichte haben wir oben berechnet als

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{y^\top U^\top U y}{2}\right) \det U$$

mit $U = H^{-1}$. Es gilt

$$U^\top U = (H^{-1})^\top H^{-1} = (HH^\top)^{-1} = \Sigma^{-1}$$

und

$$\det U = (\det(U^\top U))^{\frac{1}{2}} = (\det HH^\top)^{-\frac{1}{2}} = (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} \quad .$$

Damit ist die Dichte von $Y$ unter Verwendung der Kovarianzmatrix $\Sigma$ gegeben als

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{y^\top \Sigma^{-1} y}{2}\right) \quad .$$

Verallgemeinern wir dies nun noch auf den Fall einer nicht-zentrierten Zufallsvariable. Dazu definieren wir $Z := HX + \mu$ und $U := H^{-1}$ wie bisher. Damit sind die Abbildungen $u$ und $h$ nun gegeben durch

$$h(x) := HX + \mu \quad \text{und} \quad u(y) := U(y - \mu) \quad .$$

Weiterhin gilt

$$(J(y))_{ij} = \frac{\partial u_i}{y_j} = \sum_{k=1}^{n} u_{ik}(y_k - \mu_k) = u_{ij} \quad ,$$

d.h. nach wie vor ist $J(y) = U$. Berechnen wir nun analog zu oben die Dichte

$$\begin{aligned}
P(Z \in B) &= P(h(X) \in B) \\
&= P(X \in u(B)) \\
&= \int_{u(B)} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{x^\top x}{2}\right) dx \\
&= \int_{h(u(B))} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{u(y)^\top u(y)}{2}\right) (\det J(y))\, dy \\
&= \int_{B} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{(U(y-\mu))^\top U(y-\mu)}{2}\right) (\det J(y))\, dy \\
&= \int_{B} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^\top U^\top U(y-\mu)}{2}\right) \det U\, dy \quad .
\end{aligned}$$

Für den Erwartungswert gilt dann

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[HX + \mu] = H \cdot \mathbb{E}[X] + \mu = \mu \quad .$$

Damit ist also $Z := HX + \mu$ multivariat normalverteilt mit Erwartungswert $\mu$ und Kovarianzmatrix $\Sigma = HH^\top$.

(b) Die momentenerzeugende Funktion einer $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$-Verteilung ist gegeben durch

$$m_{X_i}(r) = \exp\left(r\mu_i + \frac{r^2\sigma_i^2}{2}\right) \quad .$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der $X_i$ faktorisiert die momentenerzeugende Funktion von $Y := \sum_{i=1}^n X_i$ und wir berechnen

$$\begin{aligned}
m_Y(r) = \mathbb{E}\left[\exp\left(r\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\exp(X_i)] = \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(r) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left(r\mu_i + \frac{r^2\sigma_i^2}{2}\right) \\
&= \exp\left(r\sum_{i=1}^{n}\mu_i + \frac{r^2\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}{2}\right) \quad ,
\end{aligned}$$

was genau der momentenerzeugenden Funktion einer $\mathcal{N}(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2)$-Verteilung entspricht. Damit ist schließlich $Y \sim \mathcal{N}(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2)$.

(c) Wir betrachten das $k$-te Moment von $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{E}\left[X^k\right] = \int_{\mathbb{R}} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \, \mathrm{d}x$$

und bezeichnen den Integranten mit $f(x)$. Es gilt

$$f(-x) = (-x)^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{(-x)^2}{2}\right) = (-1)^k f(x) \ ,$$

was für ungerade $k$ schon $f(-x) = -f(x)$ impliziert. Damit muss das Integral gleich Null sein und es gilt $\mathbb{E}\left[X^k\right] = 0$ für alle ungeraden $k$.