TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

**Fakultät Mathematik** Institut für Geometrie, Professur für Nichtlineare Analysis

# HÖHERE ANALYSIS 1

**Prof. Dr. Friedemann Schuricht**

Wintersemester 2019/20

Autor : Eric Kunze
E-Mail : eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

# Hausaufgaben

**Eric Kunze**

**Höhere Analysis 1** – Übungsblatt 1

Matr.-Nr. 4679202

*Thema: Topologische Räume*

**15/15 BE**

### Übung 1

Untersuchen Sie die topologischen Räume $(\mathbb{R}^n, \tau)$ aus dem Beispiel der Vorlesung ($\tau$ ist euklidische Topologie, triviale Topologie, diskrete Topologie $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ oder Streifentopologie):

(a) Ist $(\mathbb{R}^n, \tau)$ separiert?

(b) Ist $\tau$ die von einer Metrik auf $\mathbb{R}^n$ erzeugte Standardtopologie?

(zu a) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Definiere $\varepsilon := \frac{1}{2}\mathrm{d}(x, y)$. Dann gilt für die Umgebungen $U = B_\varepsilon(x)$ von $u$ und $V = B_\varepsilon(y)$ von $v$ nach Konstruktion stets $U \cap V = \emptyset$, d.h. $\mathbb{R}^n$ ist separiert bzgl. der euklidischen Topologie.

Sei $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$ und seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Angenommen $\mathbb{R}^n$ sei separiert, dann existieren Umgebungen $U$ von $u$ und $V$ von $v$. Da $U$ und $V$ Umgebungen sind, existieren $M, N \in \tau$ mit $v \in M \subseteq U$ und $v \in N \subseteq V$. Dann muss aber schon $M = N = \mathbb{R}^n$ gelten, da kein Element in $\emptyset$ enthalten ist. Somit folgt daraus auch $U = V = \mathbb{R}^n$. Da $U \cap V = \mathbb{R}^n \neq \emptyset$ ist $\mathbb{R}^n$ nicht separiert.

Sei $\tau = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und $u, v \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Verwende stets Umgebungen $U = \{u\} \in \tau$ von $u$ und $V = \{v\} \in \tau$ von $v$. Für $u \neq v$ ist $U \cap V = \emptyset$, also ist $\mathbb{R}^n$ separiert.

Sei $\tau = \{\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \in R\} : R \subseteq \mathbb{R} \text{ euklidisch offen}\}$ die Streifentopologie. Angenommen $\mathbb{R}^n$ sei separiert. Seien $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $u_1 = v_1$. Die kleinste Menge $M \in \tau$ mit $u \in M$ ist $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = u_1\}$. Somit muss jede Umgebung $U$ von $u$ auch $M$ enthalten, also $M \subseteq U$. Anderseits ist $M$ auch in jeder Umgebung $V$ von $v$ enthalten, da $u_1 = v_1$ gilt. Somit ist $\emptyset \neq M \subseteq U \cap V$, also $U \cap V \neq \emptyset$ und damit $\mathbb{R}^n$ nicht separiert.

(zu b) Die euklidische Topologie $\tau$ ist offensichtlich metrisierbar mit dem euklidischen Abstandsbegriff

$$\mathrm{d}(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Die triviale Topologie $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$ ist nicht metrisierbar. Angenommen es gäbe eine Metrik $d$ und $\kappa$ die davon erzeugte Standardtopologie. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq y$ beliebig. Definiere $\varepsilon := \mathrm{d}(x, y) > 0$. Setze außerdem $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist $B_\delta(x)$ offen bezüglich $\kappa$, d.h. $B_\delta \in \kappa$. Jedoch ist $x \in B_\delta(x)$, aber $y \notin B_\delta(x)$ und somit $B_\delta(x) \neq \emptyset$ und $B_\delta(x) \neq \mathbb{R}^n$, also muss $\tau \neq \kappa$ sein.

Die diskrete Topologie $\tau = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ist metrisierbar mit

$$\mathrm{d}(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Damit haben die $\varepsilon$-Kugeln folgende Gestalt: $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(x,y) < \varepsilon\} = \{x\}$ für $0 < \varepsilon < 1$. Schließlich können wir die Zugehörigkeit eines Elementes $x$ zu eine Menge $M \in \tau$ mit einer Kugel vom Radius $0 < \varepsilon < 1$ beschreiben, was genau der Definition einer induzierten Topologie entspricht.

Die Streifentopologie ist nicht metrisierbar. Mithilfe der Standardkonstruktion der von einer Metrik $d$ erzeugten Topologie können wir zeigen, dass ein metrischer Raum $(X, d)$ stets separiert ist. Nehmen wir an, dass die Streifentopolgie metrisierbar wäre, dann wäre sie auch separiert, was wir oben bereits widerlegt haben. Somit existiert also keine Metrik, die die Streifentopologie induziert.

**Übung 2**

Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Für alle Punkte $x, x', y, y' \in X$ gilt die sogenannte Vierecksungleichung

$$\left|\mathrm{d}(x,x') - \mathrm{d}(y,y')\right| \leq \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(x',y')$$

(b) Ist $(X, d)$ separabel, so gilt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

(zu a) Seien $x, x', y, y' \in X$. Dann gilt mit zweifacher Anwendung der Dreiecksungleichung für eine Metrik $d$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x,x') &\leq \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,y') + \mathrm{d}(y',x') = \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,y') + \mathrm{d}(x',y') \\ \mathrm{d}(y,y') &\leq \mathrm{d}(y,x) + \mathrm{d}(x,x') + \mathrm{d}(x',y') = \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,y') + \mathrm{d}(x',y') \end{aligned}$$

Durch Subtraktion von $\mathrm{d}(x,x')$ bzw. $\mathrm{d}(y,y')$ erhält man schließlich die beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x,x') - \mathrm{d}(y,y') &\leq \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(x',y') \\ -\left(\mathrm{d}(x,x') - \mathrm{d}(y,y')\right) &\leq \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(x',y') \end{aligned}$$

woraus schlussendlich die behauptete Gleichung

$$\left|\mathrm{d}(x,x') - \mathrm{d}(y,y')\right| \leq \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(x',y')$$

folgt.

(zu b) Sei $(X, d)$ ein separabler, metrischer Raum, d.h. es existiert eine höchstens abzählbare, dichte Menge $D$ in $X$. Da $D$ dicht ist bezüglich der von $d$ induzierten Standardtopologie $\tau$, d.h. für alle $x \in D$ und für alle $r > 0$ existiert ein $y \in D$ mit $\mathrm{d}(x,y) < r$. Somit können wir als Basis $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) : x \in D, 0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$ wählen. Da sowohl $D$ als auch $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, ist auch $\mathcal{B}$ wieder abzählbar. Nun müssen wir noch zeigen, dass $\mathcal{B}$ auch eine Basis von $\tau$ ist. Dies ist jedoch klar, da wir für alle $x \in M \in \tau$ stets die Kugeln $B_\varepsilon(x)$ wählen können und deren Vereinigung bereits $M$ beschreibt, also für hinreichend kleine $0 < \varepsilon_x \in \mathbb{Q}$ gilt

$$M = \bigcup_{x \in M} B_{\varepsilon_x}(x)$$

**Übung 3**

Es sei $(X, \tau)$ ein topologischer Raum. Beweisen Sie:

(a) Ist $\tau$ die triviale Topologie, so konvergiert jede Folge gegen jeden Punkt.

(b) Ist $\tau$ die diskrete Topologie, so konvergiert eine Folge genau dann gegen $u \in X$, wenn alle bis auf endlich viele Folgenglieder mit $u$ übereinstimmen.

(c) Ist $X = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ $\tau$ die Streifentopologie, so hat keine konvergente Folge einen eindeutigen Grenzwert.

Hinweis: *Eine Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ konvergiert per Definition gegen $u \in X$, wenn für jede Umgebung $U$ von $u$ höchstens endlich viele Glieder der Folge nicht in $U$ liegen.*

(zu a) Seien $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ und $x \in X$ beliebig. Da $\tau = \{\emptyset, X\}$ ist und $\emptyset$ nie eine Umgebung sein kann, existiert nur eine Umgebung $X$ von $u$. Da $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, also $x_n \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$, liegen alle Glieder der Folge in jeder Umgebung von $u$ und somit $x_n \to x$ für alle Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ und alle $x \in X$.

(zu b) Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine gegen $x \in X$ konvergente Folge, d.h. für jede Umgebung $U$ von $x$ liegen nur endlich viele Folgenglieder außerhalb von $U$. Da $\{x\} \in \tau$ eine Umgebung von $x$ ist, liegen auch fast alle $x_n \in \{x\}$, was gleichbedeutend ist mit $x_n = x$ für fast alle $x_n$.

Angenommen es stimmen fast alle (alle bis auf endlich viele) Folgenglieder $x_n$ mit $x$ überein, dann ist stets $\{x\} \subseteq U \in \tau$ für eine Umgebung $U$ von $x$. Somit liegen stets auch nur endliche viele $x_n \notin \{x\} \subseteq U$.

(zu c) Sei $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige gegen $u = (u^1, u^2, \ldots, u^n) \in \mathbb{R}^n$ konvergente Folge. Wähle $v = (v^1, v^2, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ mit $v^1 = u^1$, aber $v \neq u$. Dann ist $u$ in jeder Umgebung von $v$ enthalten und vice versa. Sei dazu $V$ eine Umgebung von $v$, d.h. es existiert eine Menge $M \in \tau$ mit $v \in M \subseteq U$. Die kleinste Umgebung ist genau ein Streifen der Breite Null, d.h. $M^* := \{(x^1, x^2, \ldots, x^n) : x^1 = v^1\} \subseteq V$ für jede Umgebung $V$ von $v$. Jedoch ist auch $u \in M^*$, sodass $u \in V$ für jede Umgebung $V$ von $v$. Mit vertauschten Rollen folgt auch, dass $v \in U$ für jede Umgebung $U$ von $u$. Erfüllt also $U$ die Konvergenzbedingung, so wird sie auch $V$ erfüllt.

# Hausaufgaben

**Höhere Analysis 1** – Übungsblatt 2

**Eric Kunze**
Matr.-Nr. 4679202

*Thema: Konvergenz & Kompaktheit in topologischen Räumen*

**10/15 BE**

**Übung 4**

Es sei $\tau$ die sogenannte koabzählbare Topologie auf $\mathbb{R}$, das heißt

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{O \subset \mathbb{R} \colon \mathbb{R} \setminus O \text{ ist abzählbar}\}$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\tau$ ist in der Tat eine Topologie auf $\mathbb{R}$.

(b) Eine Folge $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ konvergiert genau dann bezüglich $\tau$ gegen $x \in \mathbb{R}$, wenn alle bis auf endlich viele Folgenglieder mit $x$ übereinstimmen.

(c) Jede Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ ist folgenabgeschlossen bzgl. $\tau$.

(d) Es gibt eine folgenabgeschlossene Menge in $(\mathbb{R}, \tau)$, die nicht abgeschlossen ist.

(zu a) Es ist $\emptyset \in \tau$ offensichtlich und $\mathbb{R} \in \tau$, weil $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ abzählbar ist. Seien $U_i \in \tau$ für alle $i \in I$ mit einer beliebigen Indexmenge $I$. Das bedeutet, dass $\mathbb{R} \setminus U_i$ abzählbar ist für alle $i \in I$. Dann ist

$$\mathbb{R} \setminus \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) = \bigcap_{i \in I} \underbrace{(\mathbb{R} \setminus U_i)}_{\text{abzählbar}}$$

abzählbar, da der Schnitt abzählbarer Mengen offensichtlich wieder abzählbar ist. Sei nun $I = \{1, \ldots, n\}$. Dann ist

$$\mathbb{R} \setminus \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus U_i)$$

wieder abzählbar, da die endliche Vereinigung abzählbarer Mengen gemäß der Vorlesung MINT (oder auch ANAG vllt) wieder abzählbar ist.

(zu b) **($\Rightarrow$)** Sei $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ mit $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Betrachten wir die Menge $M := \{x_n \colon x_n \neq x\}$. $A$ ist abzählbar, d.h. $V := \mathbb{R} \setminus M \in \tau$. Wegen $x \in V$ ist $V$ eine Umgebung von $x$. Aufgrund der Konvergenz von $\{x_n\}$ liegen nur endlich viele Folgenglieder nicht in $V$, d.h. $x_n \in \mathbb{R} \setminus V = M$ für alle $n \in \{1, \ldots, N\}$. Für alle $n \geq N$ gilt $x_n \in V = \mathbb{R} \setminus M$, also $x_n = x$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

**($\Leftarrow$)** Sei $x_n = x$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $U$ eine Umgebung von $x$, d.h. insbesondere $x \in U$ und damit auch $x_n \in U$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Somit liegen also fast alle Folgenglieder in einer beliebigen Umgebung von $x$ und deshalb $x_n \to x$.

(zu c) Sei $\{x_n\} \subset M$ eine Folge mit $x_n \to x$ und $x \in \mathbb{R}$. Nach Teil (b) existiert also ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n = x$ für alle $n \geq N$. Damit ist schließlich schon $x \in M$, da $x_n \in M$

vorausgesetzt war.

(zu d) Alle $M \subset \mathbb{R}$ sind folgenabgeschlossen. Es reicht also eine nicht abgeschlossene Menge $M$ zu finden. Es gilt

$$\begin{aligned} M \subset \mathbb{R} \text{ abgeschlossen} &\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus M \text{ offen, d.h. } (\mathbb{R} \setminus M) \in \tau \\ &\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus M) \text{ abzählbar oder } \mathbb{R} \setminus M = \emptyset \\ &\Leftrightarrow M \text{ abzählbar oder } \mathbb{R} \subseteq M \end{aligned}$$

Damit erfüllt jedes nicht-abzählbare $M \subsetneq \mathbb{R}$ die Bedingungen, z.B. $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

**Übung 5**

Es sei $(X, \tau)$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Die Vereinigung endlich vieler kompakten Mengen $M_i \subset X$ ist kompakt.

(b) Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge $M \subset X$ ist relativ kompakt.

(c) Ist $\tau$ die koendliche Topologie auf $X = \mathbb{R}$, also $\tau = \{\emptyset\} \cup \{O \subset \mathbb{R} \colon \mathbb{R} \setminus O \text{ ist endlich}\}$, so gibt es eine Teilmenge von $X$, die kompakt, aber nicht abgeschlossen ist.

(zu a) Seien $M_i \subset X$ kompakt für alle $i \in I = \{1, \ldots, n\}$. Betrachten wir nun $M := \bigcup_{i\in I} M_i$ mit einer Überdeckung $\{U_j\}_{j\in J}$. Da $M_i \subset M$ existiert für alle $i \in I$ eine endliche Teilüberdeckung $U_{i,1}, \ldots, U_{i,k_i}$ von $M_i$. Somit ist $\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{k_i} U_{i,k_j}$ endlich und überdeckt alle $F_i$, also auch $F$.

(zu b) Sei $M \subset X$ kompakt und $A \subseteq M$ abgeschlossen. $A$ ist genau dann relativ kompakt, wenn $\mathrm{cl}(A)$ kompakt ist. Wegen der Abgeschlossenheit von $A$ und demzufolge $\mathrm{cl}(A) = A$ reicht es zu zeigen, dass $A$ kompakt ist. Sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $A \subseteq M$. Da $A$ abgeschlossen ist, ist $X \setminus A \in \tau$, d.h. $\widetilde{\mathcal{U}} := \{X \setminus A\} \cup \mathcal{U}$ ist eine offene Überdeckung von $M$. Aufgrund der Kompaktheit von $M$ existiert eine endliche Teilüberdeckung $\widetilde{\mathcal{U}}^*$ von $M$. Wegen $A \subseteq M$ ist $\widetilde{\mathcal{U}}^*$ auch eine endliche Überdeckung von $A$. Ist $X \setminus A \in \widetilde{\mathcal{U}}^*$, dann wähle $\mathcal{U}^* := \widetilde{\mathcal{U}}^* \setminus \{X \setminus A\}$, sodass $\mathcal{U}^*$ eine endliche Teilüberdeckung von $A$ ist. Somit ist $A$ also kompakt und damit auch relativ kompakt.

(zu c) Wir zeigen, dass jede Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ kompakt bezüglich $\tau$ ist. Sei also $M \subseteq \mathbb{R}$ beliebig und $\mathcal{U} := \{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $M$. Wähle nun $U_0 \in \mathcal{U}$ beliebig. Da $U_0 \in \tau$, ist $\mathbb{R} \setminus U_0$ endlich, d.h. nur endlich viele Elemente von $M$ liegen nicht in $U_0$. Schreibe $\{x_1, \ldots, x_n\} = (\mathbb{R} \setminus U_0) \cap M$. Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ finden wir nun ein $U_i \in \mathcal{U}$ mit $x_i \in U_i$. Dann ist $\{U_0\} \cup \{U_i\}_{i=1}^{n}$ eine endliche Teilüberdeckung von $M$ und $M$ somit kompakt bezüglich $\tau$. Weiterhin gilt

$$M \text{ abgeschlossen} \Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus M \in \tau \Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus M) = M \text{ endlich oder } \mathbb{R} \setminus M = \emptyset$$

Somit ist jede nicht-endliche Menge $M^* \subsetneq \mathbb{R}$ nicht abgeschlossen, aber kompakt bezüglich $\tau$.

**Übung 6**

Sei $(X, \tau)$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Erfüllt $X$ das erste Abzählbarkeitsaxiom, so ist jede kompakte Teilmenge von $X$ folgenkompakt.

(b) Erfüllt $X$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so ist jede folgenkompakte Teilmenge von $X$ kompakt.

*Hinweis:* Gilt das erste Abzählbarkeitsaxiom und hat eine Folge $\{x_n\} \subset X$ keine konvergente Teilfolge, so hat sie auch keinen Häufungspunkt. Das heißt, jedes $x \in X$ hat eine Umgebung, in der nur endlich viele Folgenglieder liegen.

# Hausaufgaben

**Eric Kunze**
Matr.-Nr. 4679202

**Höhere Analysis 1** – Übungsblatt 3

*Thema: Netze und normierte Räume*

**11.5/15 BE**

**Übung 7**

Es seien $X$ ein topologischer Raum, $M \subset X$ und $u \in X$. Beweisen Sie:

(a) Es gilt genau dann $u \in \mathrm{cl}(M)$, wenn ein Netz $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset M$ gegen $u$ konvergiert.

(b) $M$ ist genau dann kompakt, wenn $M$ Netz-folgenkompakt ist.

Es seien zudem $Y$ ein weiterer topologischer Raum und $F\colon X \to Y$. Beweisen Sie:

(c) F ist genau dann stetig, wenn $F$ Netz-folgenstetig ist.

**Hinweis:** Hat ein Netz $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset X$ kein konvergentes Teilnetz, so hat es auch keinen Häufungspunkt. Das heißt, zu jedem $x \in X$ existiert eine Umgebung $U$ von $x$ und ein $\alpha \in I$ mit der Eigenschaft, dass für $\beta \in I$ mit $\alpha \leq \beta$ stets $x_\beta \notin U$ gilt. Vergleiche dazu auch den Hinweis zu Aufgabe 6.

(zu a) **($\Rightarrow$)** Bezeichne mit $I = \mathcal{U}(u)$ die Menge der Umgebungen eines Punktes $u \in X$ und betrachte die Richtung $U \preccurlyeq V \;\;:\Leftrightarrow\;\; V \subseteq U$. Definieren wir nun ein Netz $u\colon I \to M$ durch Auswahl eines $u_\alpha \in \alpha \cap M$ für alle $\alpha \in I$. Dieses existiert aufgrund des Auswahlaxioms und der Tatsache, dass für $u \in \mathrm{cl}(M)$ gilt $\alpha \cap M \neq \emptyset$ für alle $\alpha \in I$. Nun konvergiert dieses Netz bereits nach Konstruktion: Sei $U$ eine offene Umgebung von $u$, d.h. insbesondere $u \in U$. Nach Definition gilt dann $U \in \mathcal{U}(u)$ und wenn $U \preccurlyeq \alpha$ gilt, dann ist $u_\alpha \in \alpha \subseteq U$, d.h. alle Netzglieder beginnend bei $U$ liegen in $U$.

**($\Leftarrow$)** Sei $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq M$ ein gegen $u$ konvergentes Netz. Angenommen $u \notin \mathrm{cl}(M)$, d.h. $u \in X \setminus \mathrm{cl}(M)$, was offen ist. Da $u_\alpha \to u$ existiert ein $\alpha_0$, sodass für alle $\alpha \succcurlyeq \alpha_0$ gilt $u_\alpha X \setminus \mathrm{cl}(M) \subset X \setminus M$ im Widerspruch zum Definitionsbereich des Netzes $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

(zu b) **($\Rightarrow$)** Angenommen $M$ sei kompakt und es existiere ein Netz $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ohne Häufungspunkt. Dementsprechend existiert auch kein konvergentes Teilnetz. Dadurch, dass kein $x \in M$ ein Häufungspunkt von $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ist, existiert für alle $x \in M$ eine offene Umgebung $U(x) \subseteq M$ von $u$ und ein Index $\alpha_x \in I$, sodass $x_\alpha \notin U(x)$ für alle $\alpha \succcurlyeq \alpha_x$. Dann ist jedoch $\{U(x)\}_{x\in M}$ eine offene Überdeckung von $M$, die aufgrund der Kompaktheit eine endliche Teilüberdeckung hat, d.h. es existieren $x_1, \ldots, x_n \in M$, sodass $M \subseteq \bigcup_{i=1}^n U(x_i)$. Da $I$ eine gerichtete Menge ist, existiert ein $\beta \in I$ mit $\beta \succcurlyeq \alpha_{x_i}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt $x_\beta \notin U(x_i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ im Widerspruch zur Überdeckung von $M$ durch die $U(x_i)$.

**($\Leftarrow$)** Angenommen jedes Netz in $M$ habe einen Häufungspunkt und $M$ besitzt eine offene Überdeckung $\mathcal{O}$, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Definieren wir uns nun eine gerichtete Menge $I$ als Menge aller endliche Teilüberdeckungen von $\mathcal{O}$ mit der Richtung $U \preccurlyeq V \quad :\Leftrightarrow \quad U \subseteq V$. Für alle $A \in I$ wird $M$ nicht von $\bigcup_{U \in A} U$ überdeckt, d.h. wir können für alle $A \in I$ einen Punkt $x_A \in M \setminus \bigcup_{U \in A} U$ auswählen. Dies definiert uns wieder ein Netz $\{x_A\}_{A \in I}$. Dann hat $\{x_A\}_{A \in I}$ einen Häufungspunkt $x \in M$. Da $\mathcal{O}$ die Menge $M$ überdeckt, existiert ein $V \in \mathcal{O}$ mit $x \in V$ und es gilt $\{V\} \in I$. Also existiert ein $A \succcurlyeq \{V\}$, sodass $x_A \in V$. Das bedeutet jedoch, dass $A$ eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{O}$ ist, die $V$ enthält im Widerspruch zur Wahl von $x_A$.

(zu c) **($\Rightarrow$)** Angenommen $F\colon X \to Y$ sei stetig und $\{u_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq X$ sei ein gegen $u \in X$ konvergentes Netz. Nehmen wir uns eine Umgebung $U \subseteq Y$ von $F(u)$, dann ist das Urbild $F^{-1}(U) \subseteq X$ eine Umgebung von $u$. Da $u_\alpha \to x$ konvergiert, existiert ein $\alpha_0 \in I$, sodass $u_\alpha \in F^{-1}(U)$ für alle $\alpha \succcurlyeq \alpha_0$. Dies bedeutet wiederum, dass $F(u_\alpha) \in U$ für alle $\alpha \succcurlyeq \alpha_0$. Damit konvergiert auch $\{F(u_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ gegen $F(u)$.

**($\Leftarrow$)** Betrachten wir nun erneut als gerichtete Menge $I = \mathcal{U}(u)$ die Menge aller Umgebungen von $u$ mit Richtung $U \preccurlyeq V \quad :\Leftrightarrow \quad V \subseteq U$. Nehmen wir nun an, dass $F\colon X \to Y$ nicht stetig sei, d.h. es existiert eine offene Menge $U \subseteq Y$, für die $F^{-1}(U)$ nicht offen ist. Dies bedeutet, dass $F^{-1}(U)$ einen Punkt $u$ enthält, für den jede Umgebung $V \subseteq X$ einen Netzpunkt $u_V \notin F^{-1}(U)$ enthält. Die gewählten Punkte $u_V$ bilden dann ein Netz $\{u_V\}_{V \in I}$. Dieses konvergiert gegen $u$, da für jede offene Umgebung $V \subseteq X$ von $u$ und ein beliebiges $V' \succcurlyeq V$ gilt, dass $u_{V'} \in V' \subseteq V$. Konvergiere nun das Netz $\{F(u_V)\}_{V \in I} \subseteq Y$ gegen $F(u)$. Ist $U \subseteq Y$ eine offene Umgebung von $F(u)$, dann existiert ein $V_0 \in I$, sodass $F(x_V) \in U$ für alle $V \succcurlyeq V_0$. Das bedeutet jedoch auch, dass $x_V \in F^{-1}(U)$ im Widerspruch zur Annahme.

**Übung 8**

Es sei $\Omega$ ein kompakter topologischer Raum. Beweisen Sie:

(a) Ist $\Omega$ ein metrischer Raum, so ist $\Omega$ vollständig.

(b) Der Raum $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ der stetigen Funktionen $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ ausgestattet mit der kanonischen Metrik
$$d(u,v) := \max_{x \in \Omega} |u(x) - v(x)|$$
ist vollständig.

(zu a) Sei $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$ eine Cauchy-Folge. Da $\Omega$ kompakt und metrisch ist, also insbesondere auch folgenkompakt, existiert eine konvergente Teilfolge $\{\omega_{n_k}\}_k$ mit $\omega_{n_k} \to \omega \in \Omega$. Daher existiert ein $N_1$, sodass $d(\omega_{n_k}, \omega) < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N_1$. Sei $N_2$ so gewählt, dass für $n, m \geq N_2$ gilt $d(\omega_n, \omega_m) < \varepsilon/2$. Für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ gilt dann nach Dreiecksungleichung
$$d(\omega_n, \omega) \leq d(\omega_n, \omega_N) + d(\omega_n, \omega) < \varepsilon$$
Also gilt $\omega_n \to \omega$ und $\Omega$ ist vollständig.

## Übung 9

Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$. Beweisen Sie:

(a) Jede Cauchyfolge in X ist beschränkt.

(b) $|\cdot|$ sei eine $p$-Norm auf $\mathbb{K}^2$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Dann ist

$$\| \cdot \| : \begin{cases} X \times Y & \to \quad \mathbb{K} \\ (u, v) & \mapsto \quad \|(u, v)\| := |(\|u\|_X, \|u\|_Y)| \end{cases}$$

eine Norm auf dem linearen Raum $X \times Y$.

(c) $X \times X$ sei mit der Norm $\|(u, v)\| = \|u\|_X + \|v\|_X$ ausgestattet und $\mathbb{K} \times X$ mit der Norm $\|(\alpha, u)\| = |\alpha| + \|u\|_X$. Dann sind Addition, Skalarmultiplikation und Norm stetige Abbildungen.

(zu a) Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine Cauchy-Folge, d.h. $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Mithilfe der Dreiecksungleichung folgt

$$\|x_n\| - \|x_m\| \leq \|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|x_n\| < \varepsilon + \|x_m\| \qquad \forall n, m \geq N$$

Setze nun $m = N$, dann ist $\|x_n\| < \|x_N\| + \varepsilon$ für alle $n \geq N$, d.h.

$$\|x_n\| < \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_{N-1}\|, \|x_N\| + \varepsilon\} =: M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $M$ eine Schranke für $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(zu b) $(i)$ Ist $(u, v) = 0$, dann gilt $\|(u, v)\| = |(\|0\|_X, \|0\|_Y)|_p = |(0, 0)|_p = 0$. Sei umgekehrt $0 = \|(u, v)\| = |(\|u\|_X, \|v\|_Y)|_p$. Dann ist $(\|u\|_X, \|v\|_Y) = 0$ (Normeigenschaft von $|\cdot|_p$) und da auch $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_Y$ Normen sind, folgt daraus $u = 0 = v$.

$(ii)$ Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda(u, v)\| = \|(\lambda u, \lambda v)\| &= |(\|\lambda u\|_X, \|\lambda v\|_Y)|_p \\ &= |(|\lambda| \cdot \|u\|_X, |\lambda| \cdot \|v\|_Y)|_p \\ &= ||\lambda| \cdot (\|u\|_X, \|v\|_Y)|_p \\ &= |\lambda| \cdot |(\|u\|_X, \|v\|_Y)|_p \\ &= |\lambda| \cdot \|(u, v)\| \end{aligned}$$

(*iii*) Seien $(u,v),(u',v') \in X \times Y$. Mit $\triangle_X$ bezeichnen wir die Anwendung der Dreiecksungleichung von Norm $X$.

$$\begin{aligned}
\|(u,v)+(u',v')\| &= \|(u+u',v+v')\| \\
&= \left|\left(\|u+u'\|_X\,, \|v+v'\|_Y\right)\right|_p \\
&\leq \left|\left(\|u\|_X + \|u'\|_X\,, \|v\|_Y + \|v'\|_Y\right)\right|_p && (\triangle_X, \triangle_Y) \\
&= \left|\left(\|u\|_X\,, \|v\|_Y\right) + \left(\|u'\|_X\,, \|v'\|_Y\right)\right|_p \\
&\leq \left|\left(\|u\|_X\,, \|v\|_Y\right)\right|_p + \left|\left(\|u'\|_X\,, \|v'\|_Y\right)\right|_p && (\triangle_p) \\
&= \|(u,v)\| + \|(u',v')\|
\end{aligned}$$

# Hausaufgaben

**Eric Kunze**
Matr.-Nr. 4679202

**Höhere Analysis 1** – Übungsblatt 4

*Thema: Hilberträume*

**10.5/15 BE**

Aufgabe 11

Wir zeigen die Aussage via Ringschluss.

**(a ⇒ b)** Es gelte $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$. Betrachte

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v\,,\, u+v\rangle = \langle u\,,\, u\rangle + \langle u\,,\, v\rangle + \overline{\langle u\,,\, v\rangle} + \langle v\,,\, v\rangle = \|u\|^2 + 2\Re\langle u\,,\, v\rangle + \|v\|^2$$

Aus (a) folgt $\|u+v\|^2 = (\|u\|+\|v\|)^2 = \|u\|^2 + 2\,\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2$. Somit ist $\Re\langle u\,,\, v\rangle = \|u\|\cdot\|v\|$. Unter Nutzung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt die Einschließung

$$\|u\|\cdot\|v\| = \Re\langle u\,,\, v\rangle = |\langle u\,,\, v\rangle|$$

Da $\Re\langle u\,,\, v\rangle = |\langle u\,,\, v\rangle|$ gilt, ist $\Im\langle u\,,\, v\rangle = 0$, d.h. $\langle u\,,\, v\rangle \in \mathbb{R}$ und schließlich

$$\langle u\,,\, v\rangle = \Re\langle u\,,\, v\rangle = \|u\|\cdot\|v\|$$

**(a ⇒ b)** Es gelte $\langle u\,,\, v\rangle = \|u\|\cdot\|v\| \in \mathbb{R}$, d.h. $\langle u\,,\, v\rangle \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\langle u\,,\, u\rangle\langle v\,,\, v\rangle = \|u\|^2\cdot\|v\|^2 = (\|u\|\cdot\|v\|)^2 = (\langle u\,,\, v\rangle)^2 = (\langle v\,,\, u\rangle)^2$$

Da $\langle .\,,\, .\rangle$ positiv definit ist, gilt $\langle v\,,\, v\rangle > 0$ für alle $v \neq 0$. Für $v \neq 0$ liefert somit die Division durch $\langle v\,,\, v\rangle$

$$\langle u\,,\, u\rangle = \frac{(\langle u\,,\, v\rangle)^2}{\langle v\,,\, v\rangle} = \frac{(\langle v\,,\, u\rangle)^2}{\langle v\,,\, v\rangle} \tag{$\star$}$$

Setzten wir nun $\mu := \frac{\langle u\,,v\rangle}{\langle v\,,v\rangle} = \frac{\langle v\,,u\rangle}{\langle v\,,v\rangle}$. Dann gilt wieder aufgrund der positiven Definitheit und $\langle u\,,\, v\rangle = \langle v\,,\, u\rangle = \|u\|\,\|v\|$, dass $\mu > 0$. Betrachten wir unter Nutzung von $(\star)$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u\,,\, u\rangle - \frac{(\langle v\,,\, u\rangle)^2}{\langle v\,,\, v\rangle} - \frac{(\langle u\,,\, v\rangle)^2}{\langle v\,,\, v\rangle} + \frac{(\langle u\,,\, v\rangle)^2}{\langle v\,,\, v\rangle} \\ &= \langle u\,,\, u\rangle - \mu\langle v\,,\, u\rangle - \mu\langle u\,,\, v\rangle + |\mu|^2\langle v\,,\, v\rangle \\ &= \langle u\,,\, u\rangle - \langle \mu v\,,\, u\rangle - \langle u\,,\, \mu v\rangle + \langle \mu v\,,\, \mu v\rangle \\ &= \langle u - \mu v\,,\, u - \mu v\rangle \end{aligned}$$

Wegen positiver Definitheit von $\langle .\,,\, .\rangle$ folgt daraus $0 = u - \mu v$, d.h. $u = \mu v$ und es folgt (c) für $\alpha := \mu$. Ist $v = 0$, dann gilt $v = \alpha u$ für $\alpha = 0$. Mit vertauschten Rollen von $u$ und $v$ zeigt man auch das zweite Disjunkt.

# Hausaufgaben

**Höhere Analysis 1** – Übungsblatt 5

**Eric Kunze**
Matr.-Nr. 4679202

### Hausaufgabe 13

Es sei $X$ ein Hilbertraum mit Orthonormalsystem $\{e_i : i \in I\}$

(a) Beweisen Sie die Besselsche Ungleichung

$$\sup_{J \subseteq I \text{ endlich}} \sum_{i \in J} |\langle u\,,\, e_i \rangle|^2 \leq \|u\|^2$$

für alle $u \in X$.

(b) Sei $X = L([0, 2\pi], \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass die Funktionen $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-int}$ ein Orthonormalsystem von $X$ bilden.

(c) Folgern Sie für jedes $f \in L([0, 2\pi], \mathbb{C})$, dass $\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} f(t) e^{\mathrm{i}nt} \; \mathrm{d}t$

(zu a) Sei $\mathcal{E} = \{e_i : i \in I\}$. Nach Satz 19.2 gilt $P_{\overline{\operatorname{lin}(\mathcal{E})}(u)} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k\,,\, u \rangle\, e_k$ für alle $u \in X$. Ohne Beschränkung nehmen wir an, dass $I = \{1, \dots, n\}$ sei. Mit der auf $L^2$ definierten Norm gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\| u - P_{\overline{\operatorname{lin}(\mathcal{E})}(u)} \right\| = \left\langle u - P_{\overline{\operatorname{lin}(\mathcal{E})}(u)}\,,\, u - P_{\overline{\operatorname{lin}(\mathcal{E})}(u)} \right\rangle \\
&= \left\langle u - \sum_{k=1}^{n} \langle e_k\,,\, u \rangle\, e_k\,,\, u - \sum_{\ell=1}^{n} \langle e_\ell\,,\, u \rangle\, e_\ell \right\rangle \\
&= \langle u\,,\, u \rangle - \left\langle u\,,\, \sum_{\ell=1}^{n} \langle e_\ell\,,\, u \rangle\, e_\ell \right\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle e_k\,,\, u \rangle\, e_k\,,\, u \right\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle e_k\,,\, u \rangle\, e_k\,,\, \sum_{\ell=1}^{n} \langle e_\ell\,,\, u \rangle\, e_\ell \right\rangle \\
&= \|u\|^2 - \sum_{\ell=1}^{n} \langle e_\ell\,,\, u \rangle \langle u\,,\, e_\ell \rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle e_k\,,\, u \rangle} \langle e_k\,,\, u \rangle + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \overline{\langle e_k\,,\, u \rangle} \langle e_\ell\,,\, u \rangle \langle e_k\,,\, e_\ell \rangle \\
&= \|u\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} |\langle e_k\,,\, u \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle e_k\,,\, u \rangle} \langle e_\ell\,,\, u \rangle \\
&= \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle e_k\,,\, u \rangle|^2
\end{aligned}$$

Somit folgt daraus $\sum_{k=1}^{n} |\langle e_k\,,\, u \rangle|^2 \leq \|u\|^2$ für alle $u \in X$ und alle endlichen Indexmengen $I$. Da diese Ungleichung nun also für alle endlichen Indexmengen $I$ gilt, können wir auf der linken Seite zur Grenze übergehen ohne die Relation zu verlieren. Somit gilt

$$\sup_{J \subseteq I \text{ endlich}} \sum_{i \in J} |\langle u\,,\, e_i \rangle|^2 \leq \|u\|^2$$

(zu b) Sei $\mathcal{E} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $e_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\mathrm{i}nt)$. Wir wollen nun zeigen, dass $\mathcal{E}$ ein Orthonormalsystem ist. Wir berechnen also für beliebige $n \neq m$

$$\begin{aligned}
\langle e_n\, , \, e_m \rangle &= \int_0^{2\pi} \overline{e_n(t)} \cdot e_m(t) \; \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\exp(-\mathrm{i}nt)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\mathrm{i}mt) \; \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\overline{-\mathrm{i}nt}) \cdot \exp(-\mathrm{i}mt) \; \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\mathrm{i}t(n-m)) \; \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{-\mathrm{i}}{(n-m)} \underbrace{[\exp(\mathrm{i}t(n-m))]_0^{2\pi}}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\|e_n\| = \langle e_n\, , \, e_n \rangle &= \int_0^{2\pi} \overline{e_n(t)} \cdot e_n(t) \; \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\exp(-\mathrm{i}nt)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\mathrm{i}nt) \; \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\mathrm{i}nt) \cdot \exp(-\mathrm{i}mt) \; \mathrm{d}t \\
&= 1
\end{aligned}$$

(zu c) Sei $X = L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ und $\mathcal{E} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $e_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\mathrm{i}nt)$. Außerdem sei $u \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$. Nach (a) gilt

$$\sup_{J \subseteq I \text{ endlich}} \sum_{i \in J} |\langle u\, , \, e_i \rangle|^2 \leq \|u\|^2$$

Wählen wir oBdA für alle $J$ die Darstellung $J = \{1, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\sup_{J \subseteq I \text{ endlich}} \sum_{i \in J} |\langle u\, , \, e_i \rangle|^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |\langle u\, , \, e_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle u\, , \, e_i \rangle|^2 \leq \|u\|^2 < \infty$$

Daraus folgt also $\lim_{n\to\infty} |\langle u\, , \, e_n \rangle|^2 = 0$ und somit auch $\lim_{n\to\infty} \left|\overline{\langle u\, , \, e_n \rangle}\right|^2 = \lim_{n\to\infty} |\langle e_n\, , \, u \rangle|^2 = 0$. Daraus folgt nun $\lim_{n\to\infty} \langle e_n\, , \, u \rangle = 0$. Skalarmultiplikation liefert dann auch $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi} \cdot \langle e_n\, , \, u \rangle = 0$. Berechnen wir nun

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi} \cdot \langle e_n\, , \, u \rangle &= \sqrt{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\exp(-\mathrm{i}nt)} \cdot u(t) \; \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} u(t) \cdot \exp(\mathrm{i}nt) \; \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Mit $f := u$ folgt nun die Behauptung $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(t) e^{\mathrm{i}nt} \mathrm{d}t = 0$.

**Übung 14**

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

(a) Zeigen Sie, dass $C_B(\Omega, \| \, . \, \|_C)$ nicht separabel ist.

(b) Warum funktioniert das Argument aus (a) nicht für $C(\overline{\Omega}, \| \, . \, \|_C)$ falls $\Omega$ beschränkt ist.

(c) Zeigen Sie, dass $L^\infty(\Omega)$ nicht separabel ist.

(zu a) Wir betrachten die Abbildung $\Lambda \colon C_B(\Omega) \to \ell^\infty$ mit $f \mapsto \{f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Wählen wir eine beliebige Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und konstruieren daraus eine Funktion $f \in C_B(\Omega)$, indem alle Folgenglieder Elementen aus $\Omega$ zugeordnet werden, und zwischen diesen Punkten setzen wir $f$ stetig fort (beispielsweise mit abschnittsweise affin-linearen Funktionen). Ohne Beschränkung nehmen wir daher im Folgenden an, dass $\mathbb{N} \subseteq \Omega$ und somit vereinfacht sich die Konstruktion zu $f(n) := x_n$. Außerdem setzen wir $f(x) := x_1$ für alle $x \leq 1$. Somit wird $\Lambda$ nach Konstruktion surjektiv und ist stetig, da für alle $f, g \in C_B(\Omega)$ gilt

$$\|\Lambda(f) - \Lambda(g)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(n) - g(n)| \leq \sup_{x\in\Omega} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|_\infty$$

Angenommen $C_B(\Omega)$ wäre separabel, d.h. es existiere eine abzählbare, dichte Teilmenge $D \subseteq C_B(\Omega)$. Da das Bild dichter Mengen unter surjektiven, stetigen Funktionen wieder dicht ist, muss auch $\Lambda(D) \subseteq \ell^\infty$ wieder abzählbar und dicht in $\ell^\infty$ sein. Dies würde jedoch bedeuten, dass auch $\ell^\infty$ wieder separabel ist im Widerspruch zum Beispiel aus der Vorlesung.

(zu c) Wir wissen, dass $\ell^\infty(\Omega)$ nicht separabel ist. Außerdem wissen wir, dass $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p \leq \infty$ Banachräume sind, also insbesondere auch metrische Räume. Ein metrischer Raum ist genau dann separabel, wenn er das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Nun erfüllt offensichtlich auch jeder lineare Unterraum eines metrischen Raumes das zweite Abzählbarkeitsaxiom und ist somit separabel.

Angenommen $X := L^\infty(\Omega)$ wäre separabel. Betrachten wir die Abbildung

$$\iota \colon \begin{cases} \ell^\infty & \to \quad X \\ \{x_k\}_k & \mapsto \quad f(t) := \sum_{k=1}^\infty x_k \cdot \mathbb{1}_{[k,k+1)}(t) \end{cases}$$

Dann ist diese Abbildung zum einen linear und auch isometrisch. Seien also $\{x_k\}_k, \{y_k\}_k \in$

$\ell^\infty$ und $\lambda$ ein beliebiger Skalar.

$$
\begin{aligned}
\iota\left(\{x_k\}_k + \{y_k\}_k\right) = \iota\left(\{x_k + y_k\}_k\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k) \cdot \mathbb{1}_{[k,k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \mathbb{1}_{[k,k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k \cdot \mathbb{1}_{[k,k+1)} \\
&= \iota\left(\{x_k\}_k\right) + \iota\left(\{y_k\}_k\right) \\
\iota\left(\lambda \cdot \{x_k\}_k\right) = \iota\left(\{\lambda \cdot x_k\}_k\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda \cdot x_k) \cdot \mathbb{1}_{[k,k+1)} \\
&= \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \mathbb{1}_{[k,k+1)} \\
&= \lambda \cdot \iota\left(\{x_k\}_k\right) \left\| \iota\left(\{x_k\}_k\right) - \iota\left(\{y_k\}_k\right) \right\|_X \quad = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k) \cdot \mathbb{1}_{[k,k+1)} \right\|_X \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \Omega} \left| \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k) \cdot \mathbb{1}_{[k,k+1)}(t) \right| \\
&= \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k| \\
&= \left\| \{x_k\}_k - \{y_k\}_k \right\|_{\ell^\infty}
\end{aligned}
$$

Somit können wir $\ell^\infty$ als linearen Teilraum von $X$ auffassen. Nach Annahme ist $X$ separabel, d.h. diese Eigenschaft vererbt sich auch auf $\ell^\infty$ im Widerspruch zum Beispiel der Vorlesung, dass $\ell^\infty$ nicht separabel ist.

# Hausaufgaben

**Eric Kunze**

**Höhere Analysis 1** – Übungsblatt 6

Matr.-Nr. 4679202

*Thema: Beispielräume & Lineare Operatoren*

**Lemma 6.1.** Es sei $u_\alpha(x) := x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} u_\alpha \in L^1((1,\infty)) &\Leftrightarrow \alpha < -1 \\ u_\alpha \in L^1((0,1)) &\Leftrightarrow \alpha > -1 \end{aligned}$$

*Beweis.* siehe Vorlesung "Maß und Integral" oder Schilling: "Maß und Integral", Seite 60. □

**Übung 15**

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $p, q \in [1, \infty]$.

(a) Es sei $p \leq q$ und $\Omega$ beschränkt. Beweisen Sie $L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$.

(b) Es sei $p \neq q$. Weisen Sie nach, dass ein $\Omega$ mit $L^q(\Omega) \nsubseteq L^p(\Omega)$ existiert.

(c) Es sei $u(x) := |x|^\alpha$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $u \in L^p(B_1(0))$, für welche $u \in W^{1,p}(B_1(0))$?

(zu a) Wir schreiben $\|\ .\ \|_q$ für $\|\ .\ \|_{L^q}$ und zeigen zuerst, dass $\|u\|_q \leq \|u\|_p \cdot \lambda(\Omega)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$. Sei dafür $r > 1$. Dann ist $\frac{1}{r} + \frac{r-1}{r} = 1$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \|u\|_q = \left(\int_\Omega |u(x)|^q \ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} &= \||u|^q\|_1^{\frac{1}{q}} = \||u|^q \cdot 1\|_1^{\frac{1}{q}} \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \||u|^q\|_r^{\frac{1}{q}} \cdot \|1\|_{\frac{r}{r-1}}^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\left(\int_\Omega ||u(x)|^q|^r \ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\left(\int_\Omega |1|^{\frac{r}{r-1}} \ \mathrm{d}x\right)^{\frac{r-1}{r}}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_\Omega |u|^q r \ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{qr}} \cdot \left(\int_\Omega \ \mathrm{d}x\right)^{\frac{r-1}{qr}} \\ &= \|u\|_{qr} \cdot \lambda(\Omega)^{\frac{r-1}{qr}} \end{aligned}$$

Sei nun $r := \frac{p}{q} > 1$ (da $p > q$). Dann folgt

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p \cdot \lambda(\Omega)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$$

Zurück zur eigentlichen Aufgabe: für $p = q$ ist die Aussage klar. Sei $u \in L^p(\Omega)$, d.h. $\|u\|_p < \infty$. Dann ist

$$\|u\|_q \leq \underbrace{\|u\|_p}_{<\infty} \cdot \underbrace{\lambda(\Omega)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}_{<\infty} < \infty$$

und somit ist $u \in L^q(\Omega)$.

(zu b) Sei $p < q$. Wir betrachten $\Omega = (1, \infty)$ und $u(x) := x^{-\frac{1}{p}}$. Da $\frac{q}{p} > 1$, ist nach Lemma 6.1 $x^{-\frac{q}{p}} \in L^1(\Omega)$. Somit gilt

$$\int_\Omega \left|x^{-\frac{1}{p}}\right|^q \, \mathrm{d}x = \int_\Omega x^{-\frac{q}{p}} \, \mathrm{d}x < \infty$$

d.h. $u \in L^q(\Omega)$. Jedoch gilt

$$\int_\Omega \left|x^{-\frac{1}{p}}\right|^p \, \mathrm{d}x = \int_\Omega x^{-1} \, \mathrm{d}x = \infty$$

d.h. $u \notin L^p(\Omega)$. Für $p > q$ betrachten wir $\Omega = (0, 1)$ und die Funktion $u(x) := x^{-\frac{1}{p}}$. Dann ist $\frac{q}{p} < 1$, d.h. nach Lemma 6.1 gilt $u^{\frac{q}{p}} \in L^1(\Omega)$ und somit

$$\int_\Omega |u(x)|^q \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^{-\frac{q}{p}} \, \mathrm{d}x < \infty$$

d.h. $\|u\|_q < \infty$ und $u \in L^q(\Omega)$. Jedoch ist

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^{-1} \, \mathrm{d}x = \infty$$

d.h. $u \notin L^p(\Omega)$ nach Lemma 6.1.

**Übung 16**

Untersuchen Sie die folgenden linearen Operatoren auf Beschränktheit und bestimmen Sie gegebenenfalls die Operatornorm.

(a) Definiere für $X = (C([0,1], \mathbb{R}), \| \,.\, \|_C)$, $m \in \mathbb{N}$, paarweise verschiedene $t_k \in [0,1]$ und $c_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \{1, \ldots, m\}$ fest den Operator

$$A \colon X \to \mathbb{R} \text{ mit } f \mapsto \sum_{k=1}^m c_k f(t_k)$$

(b) $F \colon \ell^\infty \to \ell^\infty$ mit $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \{x_{k+1} - x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

(c) Seien $D(m) = \{f \in L^p(\mathbb{R}) \colon \int_\mathbb{R} |xf(x)|^p \, \mathrm{d}x \in \mathbb{R}\}$ und $p \in [1, \infty)$.

$$m \colon D(m) \subseteq L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R}) \text{ mit } f \mapsto (x \mapsto x \cdot f(x))$$

(zu a) Es gilt

$$\|Af\| = \left\|\sum_{k=1}^m c_k f(t_k)\right\| \leq \sum_{k=1}^m |c_k| \cdot |f(t_k)|$$

Wegen $\|f\|_C = \sup_{x\in[0,1]} f(x) \geq f(t_k)$ für alle $k \in \{1, \ldots, m\}$ gilt also

$$\sum_{k=1}^m |c_k| \cdot |f(t_k)| \leq \sum_{k=1}^m |c_k| \, \|f\|_C = c \cdot \|f\|_C$$

mit $c := \sum_{k=1}^{m} |c_k| < \infty$. Somit ist $A$ beschränkt. Außerdem gilt für die Operatornorm

$$\|A\| = \sup_{\|f\|_C \leq 1} \|Af\| = \sum_{k=1}^{m} |c_k| = c$$

da $|\sum_{k=1}^{m} c_k f(t_k)|$ genau dann unabhängig von $f$ groß wird, wenn die $|c_k|$ groß werden.

(zu b) Es gilt $\left\|\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^\infty} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$.

$$\begin{aligned}\left\|F\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^\infty} &= \left\|\{x_{k+1} - x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^\infty} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_{k+1} - x_k| \\ &\leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_{k+1}| + \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| \leq 2 \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| \\ &= 2 \cdot \left\|\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^\infty}\end{aligned}$$

Wegen $2 < \infty$ ist $F$ also beschränkt. Sei $\left\|\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^\infty} \leq 1$ (d.h. alle unbenannten sup laufen über genau diese Folgen).

$$\|F\| = \sup \left\|F\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^\infty} = \sup \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_{k+1} - x_k| = 2 \cdot \sup \left\|\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right\| = 2$$

(zu c) Wir definieren eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(\mathbb{R})$ durch $f_n := \mathbb{1}_{[n,n+1]}$. Dann gilt nämlich

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^p \, \mathrm{d}x = \int_n^{n+1} \mathrm{d}x = 1 < \infty \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

d.h. $f_n \in L^p(\mathbb{R})$ für alle $p \in [1, \infty)$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |mf|^p \, \mathrm{d}x &= \int_n^{n+1} |x|^p \, \mathrm{d}x = \int_n^{n+1} x^p \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1}\right]_n^{n+1} = \frac{1}{p+1} \left((n+1)^{p+1} - n^{p+1}\right) < \infty\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $p \in [1, \infty)$, d.h. $mf_n \in L^p(\mathbb{R})$. Jedoch gilt $\left(\int_{\mathbb{R}} |mf|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p} \to \infty$ für $n \to \infty$, da $(n+1)^{p+1} - n^{p+1} \to \infty$. Somit ist $m$ unbeschränkt.

# Hausaufgaben

**Eric Kunze**

Matr.-Nr. 4679202

**Höhere Analysis 1** – Übungsblatt 7

*Thema: kompakte Operatoren*

**Übung 19**

(a) Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $K\colon \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig und $u \in C(\overline{\Omega})$. Wir betrachten den Fredholm'schen Integraloperator $A$ definiert durch

$$(Au)(x) := \int_\Omega K(x,y)u(y) \; \mathrm{d}y$$

Zeigen Sie, dass der stetige lineare Operator $A\colon C(\overline{\Omega}) \to \overline{\Omega}$ kompakt ist.

(b) Der Differentialoperator $D\colon C^1([0,1]) \to C([0,1])$ mit $Du = u'$ ist linear und stetig. Zeigen Sie, dass $D$ nicht kompakt ist.

(zu a) Es reicht zu zeigen, dass $AB_1(0)$ relativ kompakt ist. Da $K$ stetig ist, existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass $|K(x,y) - K(\overline{x},\overline{y})| < \varepsilon$ für $|x - \overline{x}| + |y - \overline{y}| < \delta$. Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{B_1(0)}$, d.h. $\|u_n\| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wollen zeigen, dass $AB_1(0)$ gleichgradig stetig ist. Also betrachten wir

$$\begin{aligned}
\|(Au_n)(x) - (Au_n)(\overline{x})\| &\leq \int_\Omega \Big| K(x,y)un_(y) - K(\overline{x},y)u_n(y) \Big| \; \mathrm{d}y \\
&= \int_\Omega |K(x,y) - K(\overline{x},y)| \, |u_n(y)| \; \mathrm{d}y \\
&\leq \int_\Omega \varepsilon \, |u_n(y)| \; \mathrm{d}y \\
&\leq \varepsilon \cdot \underbrace{\|u_n\|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\lambda(\Omega)}_{<\infty} =: \varepsilon'
\end{aligned}$$

für alle $|x - \overline{x}| < \delta$. Damit ist nun $AB_1(0)$ gleichgradig stetig. Nun müssen wir noch zeigen, dass $AB_1(0)$ beschränkt in $C(\overline{\Omega})$ ist. Dabei gilt aufgrund der Stetigkeit von $A$ für alle $u \in B_1(0)$

$$\|Au\| \leq \|A\| \, \|u\| \leq \|A\|$$

da mit $u \in B_1(0)$ auch $\|u\| \leq 1$ ist. Da $\|A\| < \infty$ gilt, ist $AB_1(0)$ also beschränkt durch $\|A\|$.

Dann folgt mit dem Satz von Arzela-Ascoli, dass $AB_1(0)$ relativ kompakt ist und somit auch $A$ kompakt.

(zu b) Sei $\Omega = [0,1]$ und schreibe $\|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{C^k}$ und $\|\cdot\| = \|\cdot\|_0$. Wir betrachten eine beschränkte Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C[0,1]$, die keine konvergente Teilfolge in $C(\overline{\Omega})$ hat[1]. Aufgrund der Beschränktheit existiert nun ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\|u_n\| \leq \alpha$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definieren wir nun eine Folge $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^1(\Omega)$ durch $U_n(x) := \int_0^x u_n(y) \; dy$ für alle

[1] Diese existiert, da z.B. $u_n := x^n$ durch $u = 1$ beschränkt ist und offensichtlich keine konvergente Teilfolge in $C[0,1]$ besitzt.

$x \in \Omega$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist dann $DU_n = u_n$. Wegen Beschränktheit der Folge $\{u_n\}$ gilt nun

$$\left|\int_0^x u_n(y)\ \mathrm{d}y\right| \leq \int_0^x |u_n(y)|\ \ dy \leq \int_0^x \alpha\ \mathrm{d}y = \alpha \int_0^x\ \ dy = \alpha \cdot \lambda([0,x])$$

Damit ist nun

$$\sup_{x\in[0,1]} |U_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\int_0^x u_n(y)\ \mathrm{d}y\right| \leq \sup_{x\in[0,1]} \alpha \cdot \lambda([0,x]) = \alpha \cdot \sup_{x\in[0,1]} (x-0) = \alpha$$

Somit ist $\|U_n\|_1 = \sup_{x\in[0,1]} |U_n(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |u_n(x)| \leq 2\alpha < \infty$. Damit ist also die Folge $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, ihr Bild $\{DU_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt aber keine konvergente Teilfolge und ist somit nicht kompakt. Somit ist $D$ nicht kompakt.

**Übung 20**

(a) Es seien $X$ ein linearer normierter Raum und $Y$ ein Banachraum. Beweisen Sie, dass die Menge $K(X,Y)$ der linearen, kompakten Operatoren $A\colon X \to Y$ einen abgeschlossenen Unterraum von $L(X,Y)$ bilden.

(b) Es sei $\{a_{i,k}\}_{i,k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Doppelfolge mit $\sum_{i,k=0}^{\infty} |a_{ik}| < \infty$. Zeigen Sie mithilfe von Teil (a), dass

$$A\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} := \left\{\sum_{k=0}^{\infty} |a_{ik}x_k|\right\}_{i\in\mathbb{N}}$$

einen Operator $A \in K(\ell^\infty, \ell^1)$ definiert.

(zu a) Es ist klar, dass $0 \in K(X,Y)$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig und $A \in K(X,Y)$. In jedem Vektorraum $X$ gilt für $x, y \in X$, dass $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$. Betrachten wir wieder die Einheitskugel $B_1(0)$. Da $A$ kompakt ist, ist $AB_1(0)$ relativ kompakt in $Y$, was auch durch Multiplikation mit $\lambda$ nicht verändert wird, d.h. $(\lambda A)B_1(0)$ ist wieder relativ kompakt und somit ist der Operator $\lambda A$ kompakt. Seien nun $A, B \in K(X,Y)$. Wir wollen zeigen, dass $AB_1(0) + BB_1(0)$ relativ kompakt bzw. $\overline{AB_1(0) + BB_1(0)}$ kompakt ist in $Y$. Da $A$ und $B$ kompakt sind, sind auch die Bilder der Einheitskugel $AB_1(0)$ und $BB_1(0)$ relativ kompakt, d.h. $\overline{AB_1(0)}$ und $\overline{BB_1(0)}$ sind kompakt. Nun wissen wir, dass die Addition in $Y$, also die Abbildung $+\colon Y \times Y \to Y$ stetig ist und somit die Bilder kompakter Mengen wieder kompakt sind. Damit ist $\overline{AB_1(0)} + \overline{BB_1(0)}$ kompakt, insbesondere also abgeschlossen. Somit ist $\overline{AB_1(0) + BB_1(0)} \subseteq \overline{AB_1(0)} + \overline{BB_1(0)}$, d.h. auch $\overline{AB_1(0) + BB_1(0)}$ ist kompakt. Somit ist $AB_1(0) + BB_1(0)$ relativ kompakt und schlussendlich $A + B$ ein kompakter, linearer Operator.

Wir müssen nun noch zeigen, dass $K(X,Y)$ abgeschlossen ist. Dafür sei $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K(X,Y)$ mit $A_n \to A$ mit $A \in L(X,Y)$. Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $X$. Da $A_1$ kompakt ist, existiert von $\{A_1x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, die wir für $I \subseteq \mathbb{N}$ mit $\{A_1x_n\}_{n\in I}$ notieren. Außerdem ist $A_2$ kompakt, d.h. es gibt $J \subseteq \mathbb{N}$ sodass $\{A_2x_m\}_{m\in J}$ konvergiert. Außerdem konvergiert $\{A_1x_m\}_{m\in J}$ weiterhin. Nun können wir weiter Folgenglieder aussortieren, d.h. es existiert ein $K \subseteq J$, sodass $\{A_3x_m\}_{m\in K}$ konvergiert und auch $\{A_1 x_m\}_{m \in K}$ sowie $\{A_2 x_m\}_{m \in K}$ konvergieren. Nun kann so weiter fortfahren und erhält schließlich $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{N}$, sodass $\{A_k x_{k_i}\}_{i \in N_r}$ für alle $k \leq r$ konvergiert. Wir konstruieren nun die daraus resultierende Diagonalfolge $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Dabei stellt man fest, dass die Folge $\{y_i\}$ ab dem $k$-ten Glied mit der $k$-ten Aussonderung übereinstimmt, d.h. mit der Konvergenzfeststellung von oben konvergiert $\{A_n y_i\}_i$ also für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun wollen wir zeigen, dass $\{A y_i\}_i$ auch konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$ und oBdA nehmen wir an, dass $\|x_i\| \leq 1$ und somit $\|y_i\| \leq 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Da $A_n \to A$, wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\|A_n - A\| < \varepsilon$ und ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|A_n y_i - A_m y_j\| < \varepsilon$ für alle $i, j \geq i_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|Ay_i - Ay_j\| &\leq \|Ay_i - A_n y_i\| + \|A_n y_i - A_n y_j\| + \|A_n y_j - Ay_j\| \\ &\leq \|A - A_n\| + \varepsilon + \|A_n - A\| \\ &\leq 3\varepsilon\end{aligned}$$

Damit ist $\{Ay_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im Banachraum $Y$, d.h. diese konvergiert in $Y$. Somit haben wir für eine beschränkte Folge eine konvergente Bildfolge konstruiert und schließlich $A \in K(X, Y)$.

**Übung 21**

Es sei $\Omega := (0, 1)$. Wir definieren für $u \in C(\overline{\Omega})$ und $x \in [0, 1]$ einen Fredholm'schen Integraloperator durch

$$(Au)(x) := \int_0^1 \frac{x^2 y}{2} u(y) \ \mathrm{d}y$$

Nutzen Sie die Neumann-Reihe, um eine explizite Lösung $u \in C(\overline{\Omega})$ der Gleichung

$$f = u - Au$$

zu konstruieren. Dabei sei $f \in C(\overline{\Omega})$ gegeben durch $f(x) := x^2$ für $x \in [0, 1]$.

Um die Neumann-Reihe anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass $\|A\| < 1$ gilt. Sei dazu $x \in [0, 1]$ und $\|u\| \leq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|Au\| = \int_0^1 \frac{x^2 y}{2} u(y) \ \mathrm{d}y = \frac{x^2}{2} \int_0^1 \frac{y}{2} u(y) \ \mathrm{d}y &\leq \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{y}{2} \|u\| \ \mathrm{d}y \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{y}{2} \ \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{y^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} < 1\end{aligned}$$

Somit ist $\|A\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Au\| \leq \frac{1}{8} < 1$. Da offensichtlich auch $A \in L(X)$ gilt

$$(\mathrm{id} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Damit lässt sich die Lösung der Gleichung allgemein schon angeben, denn aus $f = u - Au = (\mathrm{id} - A) \cdot u$ folgt mittels Neumann-Reihe und der damit verbundenen Invertierbarkeit von $(\mathrm{id} - A)$

$$u = (\mathrm{id} - A)^{-1}\ f = \left( \sum_{n=0}^{\infty} A^n \right)\ f = \sum_{n=0}^{\infty} (A^n\ f) \tag{$\star$}$$

Es gilt $(A^n f)(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^n \cdot x^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen diese Aussage mit vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

**(IA)** $n = 0:$ Mit $A^n = \mathrm{id}$ ist $A^0 f = f$ und $\left(\frac{1}{8}\right)^0 = 1$, also $(A^0 f)(x) = x^2$.

**(IS)** $n \mapsto n + 1:$ Es gilt

$$\begin{aligned}
(A^{n+1} f)(x) = (A(A^n f))(x) &= \int_0^1 \frac{x^2 y}{2} (A^n f)(y)\ \mathrm{d}y \\
&\overset{\text{IV}}{=} \int_0^1 \frac{x^2 y}{2} \left(\frac{1}{8}\right)^n y^2\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^n \int_0^1 y^3\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^n \left[\frac{1}{4} y^4\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^n \cdot x^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1} \cdot x^2
\end{aligned}$$

Somit gilt mit der geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{8}{7}$ in $(\star)$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A^n f = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n x^2 = \frac{8}{7}\ x^2$$

# Hausaufgaben

**Eric Kunze**

**Höhere Analysis 1** – Übungsblatt 8

Matr.-Nr. 4679202

*Thema: Dualräume & Distributionen*

## Übung 22

Bekanntlich gilt $\ell^1 \subsetneq (\ell^\infty)^*$ (genauer: für alle $u^* \in \ell^1$ liefert $u \mapsto \langle u^* , u \rangle$ ein stetiges lineare Funktional auf $\ell^\infty$, jedoch nicht jedes $u^* \in (\ell^\infty)^*$ lässt sich so darstellen). Zeigen Sie nun, dass es eine isometrische konjugiert-lineare Isomorphie $T \colon \ell^1 \to (c_0)^*$ gibt, wobei $c_0$ der Raum der komplexen Nullfolgen (versehen mit der Supremumsnorm) ist.

## Übung 23

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

(a) Überprüfen Sie, welche der folgenden Abbildungen $T$ für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ eine Distribution definieren. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Orndung von $T$ sowie die Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_1} T$ und deren Ordnung.

(i) $T(\varphi) := \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \varphi(x) e^{x_1} \right) |_{x=0}$ auf $\Omega = \mathbb{R}^n$

(ii) $T(\varphi) := \sum_{k=1}^n \int_\Omega \sin(|x|^2) \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi(x) \ \mathrm{d}x$

(b) Zeigen Sie, dass die Topologie auf $\mathcal{D}(\Omega)$ nicht metrisierbar ist. Hinweis: Skalierung ändert nicht den Träger einer Funktion und ist stetig.

(zu a) Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\Omega_0 \subset\subset \Omega$.

(zu i) Es ist

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \varphi(x) \cdot e^{x_1} \right) |_{x=0} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x) \right)_{x=0} e^{x_1} + \varphi(x) e^{x_1} \ |_{x=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x) \ |_{x=0} + \varphi(0) \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} |T(\varphi)| = \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x) \ |_{x=0} + \varphi(0) \right| &\leq \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x) \right|_{x=0} + |\varphi(0)| \\ &\leq \sup_{x \in \overline{\Omega_0}} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x) + \varphi(x) \right| \\ &= \sum_{|\alpha| \leq 1} \sup_{x \in \overline{\Omega_0}} |D^\alpha \varphi(x)| \\ &= \|\varphi\|_{C^1} \end{aligned}$$

Somit ist also $T$ eine Distribution von Ordnung $k = 1$. Für die Ableitung gilt nach Definition

$$(D^\alpha T)(\varphi) := (-1)^\alpha T(D^\alpha \varphi)$$

Hier sei $\alpha = 1$ und somit

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial x_1} T)(\varphi) := (-1) \cdot T\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi\right) &= (-1) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x)\right) e^{x_1}\right]_{x=0} \\
&= (-1) \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\varphi(x)e^{x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x)e^{x_1}\right]_{x=0} \\
&= -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\varphi(x) \mid_{x=0} - \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x) \mid_{x=0}
\end{aligned}$$

Nun kann beide Summanden gegen das Supremum abschätzen und erhält dann Beschränktheit in der $C^2$-Norm. Also ist die Ordnung $k = 2$.

(zu ii) Da $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ist, also insbesondere beschränkt, existiert eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq \gamma$ für alle $x \in \Omega_0$. Für die Distribution $T$ gilt

$$\begin{aligned}
T(\varphi) &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} \sin(|x|^2) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}\varphi(x) \ \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1) \cdot \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} \sin(|x|^2) \cdot \varphi(x) \ \mathrm{d}x \\
&= (-1) \cdot \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} \cos(|x|^2) \cdot 2x_k \cdot \varphi(x) \ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Im Absolutbetrag folgt dann

$$\begin{aligned}
|T(\varphi)| &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} \left|\cos(|x|^2)\right| \cdot 2\,|x_k| \cdot |\varphi(x)| \ \mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} 1 \cdot 2\gamma \cdot \|\varphi\|_{C^0} \ \mathrm{d}x \\
&= [n \cdot 2\gamma \cdot \lambda(\Omega)] \cdot \|\varphi\|_{C^0}
\end{aligned}$$

Somit ist also $T$ eine Distribution von Ordnung $k = 0$. Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x_1} T\right)(\varphi) &= (-1) \cdot T\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi\right) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} \sin(|x|^2) \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x)\right) \ \mathrm{d}x \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} \sin(|x|^2) \frac{\partial^2}{\partial x_k x_1}\varphi(x) \ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Mittels partieller Integration kann nun die Ableitung wieder auf den Sinus "geschoben" werden, d.h. wir können erneut mit der $C^0$-Norm abschätzen. Somit hat auch die Ableitung von $T$ wieder Ordnung $k = 0$.

**Übung 24**

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

(a) Es sei $\mu$ ein Maß auf $\Omega$ mit $\mu(\Omega) = 1$ und $f \in L^1(\Omega, \mu)$ reellwertig. Weiterhin sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie die Jensen'sche Ungleichung:

$$\varphi\left(\int_\Omega f \mathrm{d}\mu\right) \leq \int_\Omega (\varphi \circ f) \mathrm{d}\mu$$

Hinweis: Bekanntlich gilt für jede konvexe Funktion $\varphi$ auf $\mathbb{R}$ und jedes $x_0 \in \mathbb{R}$, dass $a, b \in \mathbb{R}$ existieren, die

$$ax_0 + b = \varphi(x_0) \text{ und } ax + b \leq \varphi(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

erfüllen. Betrachten Sie $x_0 := \int_\Omega f \mathrm{d}\mu$.

(b) Es sei zudem $\Omega$ beschränkt und $p \in [1, \infty)$. Zeigen Sie die Poincaré'sche Ungleichung: Es existiert eine Konstante $C > 0$ mit <

$$\|u\|_{L^p} \leq C \cdot \|\nabla u\|_{L^p} \text{ für alle } u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst für ein allgemeines $u \in C_0^1(\Omega)$ mit Hilfe von (a), dass $|u(x,y)|^p \leq (2R)^{p-1} \int_{-R}^R \chi_\Omega(s,y) \cdot |\partial_1 u(s,y)|^p \, \mathrm{d}s$ für ein geeignetes $R > 0$.

(zu a) Da $\varphi$ konvex ist, existieren $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $ax_0 + b = \varphi(x_0)$ und $ay + b \leq \varphi(y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Betrachten wir gemäß Hinweis $x_0 := \int_\Omega f \mathrm{d}\mu$, d.h. es gilt

$$a \int_\Omega f \mathrm{d}\mu + b = \varphi\left(\int_\Omega f \mathrm{d}\mu\right)$$

und wegen Linearität des Integrals gilt auch

$$\int_\Omega af + b \mathrm{d}\mu = a \cdot \int_\Omega f \mathrm{d}\mu + b = \varphi\left(\int_\Omega f \mathrm{d}\mu\right)$$

Außerdem gilt mit $y = f(x)$

$$af(x) + b \leq \varphi(f(x))$$

für alle $f(x) \in \Omega$. Somit ist wegen $\mu(\Omega) = 1$ auch $\int_\Omega b \mathrm{d}\mu = b \cdot \mu(\Omega) = b \in \mathbb{R}$ und damit

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\int_\Omega f \mathrm{d}\mu\right) = \varphi(x_0) &= ax_0 + b \\
&= a \int_\Omega f \mathrm{d}\mu + b \cdot \int_\Omega \mathrm{d}\mu \\
&= \int_\Omega af + b \mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_\Omega \varphi(f) \mathrm{d}\mu = \int_\Omega (\varphi \circ f) \mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

# Hausaufgaben

**Eric Kunze**
Matr.-Nr. 4679202

**Höhere Analysis 1** – Übungsblatt 10

*Thema: Grundideen der linearen Theorie*

**Lemma 10.1.** Ist $X$ ein normierter Raum und $Y \subseteq X$ ein endlich-dimensionaler linearer Unterraum, dann ist $Y$ vollständig.

*Beweis.* Sei $(Y, \|\,.\,\|)$ ein Unterraum von $X$ mit $\dim Y = n$ und Basis $B := \{e_1, \dots, e_n\}$. Weiter sei $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bzgl. $\|\,.\,\|$. Da im endlichdimensionalen Fall alle Normen äquivalent sind, gilt mit $\|\,.\,\|_1 = \|\,.\,\|_{\ell^1}$, dass $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ existieren, sodass $\alpha \|y\|_1 \leq \|y\| \leq \beta \|y\|_1$ für alle $y \in Y$. Somit ist für alle $\varepsilon > 0$ und $k, k$ hinreichend groß

$$\varepsilon > \|v_k - v_j\| \geq \alpha \|v_k - v_j\|_1 = \alpha \sum_{i=1}^{\infty} |v_{ki} - v_{ji}| \geq \alpha |v_{ki} - v_{ji}|$$

für alle $1 \leq i \leq n$: Damit sind auch $\{v_{ki}\}$ und $\{v_{ji}\}$ Cauchyfolgen in $\mathbb{K}$. Da $\mathbb{K}$ bezüglich $\|\,.\,\|_1$ vollständig ist, existieren für alle $1 \leq i \leq n$ ein $u_i \in \mathbb{K}$ mit $\lim_{k\to\infty} v_{ki} = u_i$. Definiere $u := (u_1, \dots, u_n) = \sum_i u_i e_i \in Y$. Schließlich gilt

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \|v_k - u\| \leq \beta \lim_{k\to\infty} \|v_k - u\|_1 = \beta \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |v_{ki} - u_i| = \beta \sum_{i=1}^{n} \lim_{k\to\infty} |v_{ki} - u_i| = 0$$

Somit ist also $v_k \to u \in Y$ und $Y$ damit vollständig. □

**Lemma 10.2.** Ist $Y \subseteq X$ ein Banachraum. Dann ist $Y$ abgeschlossen.

**Lemma 10.3.** Sei $Y \subsetneq X$ ein echter linearer Teilraum. Dann gilt $\operatorname{int} Y = \emptyset$.

*Beweis.* Angenommen es sei $\operatorname{int} Y \neq \emptyset$. Dann existiert ein $y \in \operatorname{int} Y$ und da $\operatorname{int} Y$ offen ist auch ein $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(y) \subseteq Y$. Sei nun $x \in X \setminus Y$, dann ist $\overline{x} := y + \frac{\varepsilon}{2\|x\|} \cdot x \in B_\varepsilon(y) \subseteq Y$. Da $Y$ ein linearer Teilraum ist, gilt auch $x = \frac{2}{\varepsilon} \|x\| \cdot (\overline{x} - y) \in Y$. Somit ist also $Y = X$. □

**Übung 29**

(a) Es sei $X$ ein Banachraum und $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ konvex und stetig. Zeigen Sie, dass für alle $x_0 \in X$ ein $h^* \in X^*$ existiert mit $\varphi(x_0) + \langle h^*, x - x_0\rangle \leq \varphi(x)$ für alle $y \in X$.
*Hinweis*: Führen Sie die Aufgabe auf den Fall $(x_0, \varphi(x_0)) = (0,0)$ zurück. Finden Sie dann ein Funktional $g^* \in (X \times \mathbb{R})^*$ mit der Eigenschaft $\langle g^*, (x, \varphi(x) + \varepsilon)\rangle < 0$ für alle $x$ und alle $\varepsilon > 0$. Nutzen Sie $g^*$, um ein geeignetes $h^*$ zu definieren.

(b) Finden Sie eine konvexe Teilmenge des reellen Folgenraums $\ell^2$, deren Rand 0 enthält, die aber nicht von 0 getrennt werden kann. (D.h. es gibt kein $u^*$ in $(\ell^2)^* \setminus \{0\}$ mit $\langle u^*, u\rangle \leq 0$ für alle $u \in M$)
*Hinweis*: Suchen Sie eine Menge der Form $M = \{x \in \ell^2 : |x_n| \leq a_n \text{ für alle } n\}$.

(c) Aus einem früheren Semester stammt folgende Idee für einen Beweis, dass ein Beispiel wie in (b) gefordert nicht existieren kann.

Es sei $M \subset \ell^2$ konvex und es gelte $0 \in \partial M$. Wir wenden den Trennungssatz 3.4 nicht auf $M$, sondern das Innere $N := \operatorname{int} M$ an. Natürlich ist $N$ offen und es lässt sich leicht zeigen, dass $N$ auch konvex ist. Wegen $0 \notin N$ gibt es folglich ein Funktional $u^* \in (\ell^2)^*$ mit $\langle u^*, u\rangle < \langle u^*, 0\rangle = 0$ für alle $u \in N$. Für $u \in M$ wählen wir nun eine approximierende Folge $\{u_n\}_n \subset N$. Dann gilt $\langle u^*, u_n\rangle < 0$ und da $u^*$ stetig ist, folgt nach Grenzübergang $\langle u^*, u\rangle \leq 0$. Somit lassen sich $M$ und 0 trennen.

Finden Sie den Fehler und begründen Sie anhand Ihres Beispiels aus (b), dass dies wirklich ein Fehler ist.

(zu a) Wir können die konvexe Funktion $\varphi$ mittels linearer Translationen so verschieben, dass $(x_0, \varphi(x_0)) = (0,0)$ gilt. Definiere dazu $\widetilde{x} := x - x_0$. Die Untersuchung in $x = x_0$ wird damit zur Untersuchung in $\widetilde{x} = x_0 - x_0 = 0$. Definiere $\widetilde{\varphi}(x) := \varphi(x + x_0) - \varphi(x_0)$, dann gilt $\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}) = \widetilde{\varphi}(0) = \varphi(x_0) - \varphi(x_0) = 0$. Somit wird schlussendlich die Untersuchung in $(x_0, \varphi(x_0))$ zur Untersuchung in $(0,0)$. Gilt dann für $\widetilde{\varphi}$, dass $h^*(x) \leq \widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x + x_0) - \varphi(x_0) \;\Rightarrow\; \varphi(x_0) + h^*(x) \leq \varphi(x + x_0)$. Anwendung des Translationsoperators $A\colon X \to X$ mit $x \mapsto x - x_0$ liefert wegen $h^* A \in L(X, \mathbb{R})$

$$\varphi(x_0) + h^*(Ax) \leq \varphi(Ax + x_0) \quad\Leftrightarrow\quad \varphi(x_0) + h^*(x - x_0) \leq \varphi(x)$$

für alle $x \in X$. Damit reduziert sich die zu zeigende Aussage auf die Existenz eines $h^* \in X^*$ mit $h^*(x) \leq \varphi(x)$ für alle $x \in X$.

Wir suchen nun ein Funktional $g^* \in (X \times \mathbb{R})^*$ mit $g^*(x, \varphi(x) + \varepsilon) < 0$. Wir betrachten $Y := X \times \mathbb{R}$ und $M_\varphi := \{(x,y) : y \geq \varphi(x)\}$. Da $\varphi$ konvex ist, ist auch $M_\varphi$ konvex. Nach Teil 1 reicht $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ aus, d.h. $0 \in M_\varphi$. Wähle nun ein $u_0 = (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \notin M$, d.h. $\widetilde{y} < \varphi(\widetilde{x})$. Offensichtlich ist $M_\varphi$ abgeschlossen. Dann existiert nach Trennungssatz also ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und $g^* \in Y^*$ mit $g^*(u) < \alpha < g^*(u_0)$ für alle $u = (x,y) \in M_\varphi$. Mit Linearität von $g^*$ folgt damit $g^*(x,y) - g^*(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = g^*(x - \widetilde{x}, y - \widetilde{y}) < 0$. Jetzt weiß ich aber nicht, wie ich das $\varphi(x) + \varepsilon$ ins Spiel bringen soll. Und wie ich daraus das $h^*$ defnieren soll.

(zu b) Wir betrachten die Menge $M := \left\{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 : |x_n| \leq \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}\right\}$, d.h. wir setzen entsprechend dem Hinweis $a_n := \frac{1}{n}$.

- Konvexität von $M$: Seien $x, y \in M$ und $\lambda \in [0,1]$. Dann gilt für die Folge $\lambda x + (1-\lambda)y$

$$|\lambda x_n + (1-\lambda)y_n| \leq \lambda\,|x_n| + (1-\lambda)\,|y_n| \leq \lambda\frac{1}{n} + (1-\lambda)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist auch $\lambda x + (1-\lambda)y \in M$, d.h. $M$ ist konvex.

- $\operatorname{int}(M) = \emptyset$: Sei $x \in M$ und $\varepsilon > 0$. Dann hat jede $\varepsilon$-Kugel die Gestalt

$$B_\varepsilon(x) = \left\{y \in \ell^2 : \|x-y\|_{\ell^2} < \varepsilon\right\} = \left\{y \in \ell^2 : \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2} < \varepsilon\right\}$$

Somit enthält $B_\varepsilon(x)$ insbesondere auch alle Folgen, die sich in genau einem Folgenglied um weniger als $\varepsilon$ von $x$ unterscheiden. Wegen $\frac{1}{n} \to 0$ existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_{n_0}| + \varepsilon > \frac{1}{n_0}$. Somit gilt stets $B_\varepsilon(x) \not\subseteq M$ für alle $\varepsilon > 0$ und alle $x \in M$. Schließlich kann $M$ also keine inneren Punkt besitzen, d.h $\operatorname{int}(M) = \emptyset$. Da aber offensichtlich $M \neq \emptyset$ ist (z.B. $0 \in M$), ist jeder Punkt von $M$ ein Randpunkt, d.h. $M = \partial M$. Somit ist $0 \in M = \partial M$ ein Randpunkt.

- Wir wollen zeigen, dass 0 nicht von $M$ getrennt werden kann, d.h. es existiert kein $x^* \in (\ell^2)^* \setminus \{0\}$, sodass $x^*(x) \leq 0$ für alle $x \in M$. Da $\ell^2$ ein Hilbertraum ist, gilt $(\ell^2)^* \cong \ell^2$. Sei $J$ der zugehörige isometrische Isomorphismus. Dann ist die Existenz eines solchen $x^* \in (\ell^2)^*$ gleichbedeutend mit der Existenz eines $y \in \ell^2$ mit $Jy = x^*$ und $x^*(x) = (Jy)(x) = \langle y\,,\, x\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \cdot x_i$. Angenommen es existiert ein $y \in \ell^2 \setminus \{0\}$ mit $\langle y\,,\, x\rangle \leq 0$ für alle $x \in M$. Dann gibt es ein Index $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $y_{i_0} \neq 0$, oBdA nehmen wir an, dass $y_1 \neq 0$. Mit $x_i = 0$ für alle $i \geq 2$ und $x_1 = \operatorname{sgn}(y_1) \in M$ ($|x_1| = 1 \leq \frac{1}{1}$) gilt dann $\langle y\,,\, x\rangle = |y_1| > 0$ im Widerspruch zur Annahme. Somit kann kein solches $y \in \ell^2$ existieren und dementsprechend auch kein $x^* \in (\ell^2)^*$.

(zu c) In Teil (b) haben wir gesehen, dass eine Menge auch nur aus Randpunkten bestehen kann, d.h. eine nichtleere Menge kann dennoch ein leeres Inneres besitzen. Somit kann nicht ohne Weiteres statt der Menge $M$ die Menge $N := \operatorname{int}(M)$ betrachtet werden, da darauf der Trennungssatz nicht mehr anwendbar ist.

**Übung 30**

Beweisen Sie die Folgenden Aussagen:

(a) Es sei $B$ die Basis (im Sinne der linearen Algebra) eines Banachraumes $X$. Ist $B$ unendlich, so ist $B$ überabzählbar.

(b) Es sei $H$ ein Hilbertraum und $A\colon H \to H$ symmetrisch, d.h. $\langle Ax\,,\,y\rangle = \langle x\,,\,Ay\rangle$ für alle $x, y \in H$. Ist $A$ linear, so ist $A$ stetig.

(c) Es seien $(X, \|\cdot\|_i)$ für $i = 1, 2$ Banachräume. Gibt es ein $c_1$ mit $\|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2$ für alle $x \in X$, so gibt es auch ein $c_2$ mit $\|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$ für alle $x \in X$.

(d) Es sei $X$ ein normierter Raum und $C \subset X$ eine Teilmenge. Ist $C$ abgeschlossen und konvex, so ist $C$ der Schnitt von abgeschlossenen Halbräumen.

(e) Es seien $X$ ein Banachraum, $\{A_n\}_n \subset L(X)$ eine Folge von Operatoren und $A\colon X \to X$ eine Abbildung. Konvergiert $\{A_n\}_n$ punktweise gegen $A$, so gilt $A \in L(X)$.
*Anmerkung*: Es folgt nicht zwingend $A_n \to A$. Kennen Sie ein Beispiel?

(zu a) Sei $X$ ein Banachraum und $B$ eine unendliche Basis von $X$. Beweis durch Widerspruch — Angenommen $B$ sei abzählbar, d.h. $B = \{v_i : i \in \mathbb{N}\}$. Betrachten wir die Teilräume $X_n := \{v_1, \ldots, v_n\}$ von $X$. Damit gilt folglich $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Da alle $X_n$ lineare Teilräume von $X$ sind und zudem $\dim X_n = n$ gilt (also alle $X_n$ endlich-dimensional sind), ist $X_n$ nach Lemma 10.1 vollständig für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da alle $X_n$ vollständig sind, sind sie also nach Lemma 10.2 auch abgeschlossen.

Somit gilt mit Lemma 10.3 nun für alle $X_n$, dass $\operatorname{int} X_n = \emptyset$ und folglich $\operatorname{int}(\operatorname{cl} X_n) = \operatorname{int} X_n = \emptyset$ im Widerspruch zum Baire'schen Kategoriensatz, nach welchem $\operatorname{int} X_{n_0} \neq \emptyset$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Somit muss die Annahne, dass $B$ abzählbar ist, falsch gewesen sein und schlussendlich ist nun jede unendliche Basis von $X$ schon überabzählbar.

(zu b) Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist $A \in L(H)$ genau dann, wenn $\operatorname{graph}(A) := \{(x, Ax) \in H^2 : x \in H\}$ abgeschlossen in $H^2$ ist. Wir zeigen die Abgeschlossenheit als Folgenabgeschlossenheit, d.h. dass für $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$ schon $y = Tx$ gilt. Insbesondere reicht es wegen der Linearität von $A$ auch schon zu zeigen, dass dies für $x = 0$ gilt. Sei also $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge und $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Wir müssen nun noch zeigen, dass dann auch $\lim_{n\to\mathbb{N}} Ax_n = 0$ ist. Sei $y := \lim_{n\to\infty} Ax_n$. Dann gilt mit der Stetigkeit des Skalarproduktes

$$\langle y\,,\,y\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} Ax_n\,,\,y\right\rangle = \lim_{n\to\mathbb{N}} \langle Ax_n\,,\,y\rangle = \lim_{n\to\mathbb{N}} \langle x_n\,,\,Ay\rangle = \langle 0\,,\,Ay\rangle = 0$$

Damit folgt nun die Abgeschlossenheit von $\operatorname{graph}(A)$ und mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen auch die Stetigkeit von $A$.

(zu c) Seien $X_1 := (X, \|.\|_1)$ und $X_2 := (X, \|.\|_2)$ Banachräume. Dann ist der Operator $A = \operatorname{id}\colon X_2 \to X_1$ bekanntermaßen bijektiv und wegen $\|x\|_1 = \|Ax\|_1 =\leq c_1 \|x\|_2$ ist $A \in$

$L(X_2, X_1)$. Dann ist nach dem Satz von der inversen Abbildung auch $A^{-1} \in L(X_1, X_2)$, d.h. insbesondere auch, dass $A^{-1}$ beschränkt ist und somit ein $c_2$ existiert, so dass $\|A^{-1}x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$.

(zu d) Bezeichnen wir mit $\mathcal{H}$ die Menge aller abgeschlossenen Halbräume, die $C$ enthalten, d.h. $\mathcal{H} := \{\{x \in X : \exists x^* \in X^*, \alpha \in \mathbb{R} : \langle x^* , x\rangle \leq \alpha\} \supseteq C\}$. Sei $C$ abgeschlossen und konvex. Wir wollen zeigen, dass $C = \bigcap_{H\in\mathcal{H}} H$.

**$\subseteq$ :** Sei $x \in C$. Da $C \subseteq H$ für alle $H \in \mathcal{H}$, gilt auch $x \in H$ für alle $H \in \mathcal{H}$ und schließlich $x \in \bigcap_{H\in\mathcal{H}} H$.

**$\supseteq$ :** Wir zeigen die Kontraposition, d.h. dass für alle $x \notin C$ auch $x \notin \bigcap_{H\in\mathcal{H}} H$ gilt. Sei also $x_0 \notin C$. Da $C$ konvex und abgeschlossen ist, existiert nach Trennungssatz ein $x^* \in X^*$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\langle x^* , x\rangle \leq \alpha < \langle x^* , x_0\rangle$ für alle $x \in C$, d.h. $H := \{x \in X : \langle x^* , x\rangle = \alpha\}$ trennt $x_0$ von $C$ und vielmehr beschreibt $H$ einen Halbraum, der $C$ enthält, d.h. $H \in \mathcal{H}$. Dagegen gilt $C \nsubseteq \overline{H} := \{x \in X : \langle x^* , x\rangle > \alpha\}$, aber $x_0 \in \overline{H}$. Somit ist also $x_0 \notin \bigcap_{H\in\mathcal{H}} H$. Schließlich folgt $\bigcap_{H\in\mathcal{H}} H \subseteq C$.

(zu e) Sei $A_n \in L(X)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A_n$ konvergiere puntkweise gegen $A\colon X \to X$, d.h. $A_n x \to Ax$ für alle $x \in X$.

Linearität — Seien $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A(x+y) &= \lim_{n\to\infty} A_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} Anx + \lim_{n\to\infty} A_n y = Ax + Ay \\ A(\lambda x) &= \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda x) = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} A_n x = \lambda \cdot Ax \end{aligned}$$

Stetigkeit — Da $A$ linear ist, reicht es zu zeigen, dass $A$ beschränkt ist, woraus dann schon Stetigkeit folgt. Da $A_n \in L(X)$, insbesondere also stetig, ist für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $a_n := \sup_{\|x\|\leq 1} \|A_n x\| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dementsprechend ist dann auch $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus gilt dann $a := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$, d.h. $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt in $L(X)$. Schließlich ist dann mit

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq a \cdot \|x\|$$

auch $A$ beschränkt, also $A \in L(X)$.

**Übung 31**
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es sei $X$ ein Banachraum und $\{x_n^*\}_n \subset X^*$ eine Folge mit $x_n^* \rightharpoonup x^* \in X^*$. Dann gilt $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$.

(b) Es sei $X = c_0$ der Raum der komplexen Nullfolgen. Dann gibt es eine Folge $\{x_n^*\}_n \subset X^*$, die schwach* gegen ein $x^* \in X^*$ konvergiert, aber nicht schwach.

(c) Es sei $H$ ein Hilbertraum und $\{x_n\}_n \subset X$ eine Folge mit $x_n \rightharpoonup x \in X$ und $\|x_n\| \to \|x\|$. Dann gilt $x_n \to x$.

(d) Es sei $X = L^1([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Dann gibt es eine Folge $\{x_n\}_n \subset X$, die schwach gegen ein $x \in X$ konvergiert, aber nicht stark.
*Hinweis*: Aufgabe 13

(zu a) Betrachte die Abbildung $\iota_x \colon X^* \to \mathbb{K}$ mit $\iota_x(x^*) = x^*(x)$.

- Linearität: Seien $x^*, y^* \in X^*$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\iota_x(x^* + y^*) &= (x^* + y^*)(x) = x^*(x) + y^*(x) = \iota_x(x^*) + \iota_x(y^*)\\ \iota_x(\lambda \cdot x^*) &= (\lambda \cdot x^*)(x) = \lambda \cdot x^*(x) = \lambda \cdot \iota_x(x^*)\end{aligned}$$

- Stetigkeit: Es gilt $|\iota_x(x^*)| = |x^*(x)| \leq \|x^*\| \cdot \|x\| < \infty$ für alle $\|x\| \leq 1$. Das heißt auch, dass $\|\iota_x\| \leq \|x\|$ für alle $x \in X$. Folgerung 3 der Vorlesung aus dem Satz von Hahn-Banach liefert sogar $\|\iota_x\| = \|x\|$.

Somit ist also $\iota_x \in L(X^*, \mathbb{K})$. Definieren wir nun damit eine Abbildung $\iota$, die $X$ in $X^{**}$ einbettet via

$$\iota \colon \begin{cases} X & \to & X^{**} \\ x & \mapsto & \iota_x \end{cases}$$

- Linearität: Seien $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}[\iota(x+y)](x^*) &= \iota_{x+y}(x^*) = x^*(x+y) = x^*(x) + x^*(y)\\ &= \iota_x(x^*) + \iota_y(x^*) = (\iota_x + \iota_y)(x^*)\\ &= [\iota(x) + \iota(y)](x^*)\\ [\iota(\lambda x)](x^*) &= \iota_{\lambda x}(x^*) = x^*(\lambda x) = \lambda \cdot x^*(x)\\ &= \lambda \iota_x(x^*) = (\lambda \iota_x)(x^*)\\ &= [\lambda \iota(x)](x^*)\end{aligned}$$

  für alle $x^* \in X^*$

- Isometrie: Nach Folgerung 3 bzw. der Bemerkung oben ist $\|\iota(x)\| = \|\iota_x\| = \|x\|$.
- Die Injektivität von $\iota$ folgt aus der Isometrie-Eigenschaft. Ebenso erhält man auch die Stetigkeit von $\iota$.

Somit ist also $\iota\colon X \to X^{**}$ eine lineare, isometrische Einbettung und wir können die Elemente des Bidualraums via $x^{**}(x^*) := x^*(x)$ auffassen.

Angenommen $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ konvergiere schwach gegen $x^* \in X^*$. Per Defintion gilt dann $x^{**}(x_n^*) \to x^{**}(x^*)$ für alle $x^{**} \in X^{**}$. Somit gilt schließlich

$$x_n^*(x) = x^{**}(x_n^*) \to x^{**}(x^*) = x^*(x)$$

also $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$.

(zu b) —

(zu c) Im Hilbertraum wird schwache Konvergenz zur Konvergenz im Skalarprodukt (vgl. auch Erläuterungen zu Aufgabe 29b). Es gilt $H^* \cong H$ mithilfe eines isometrischen Isomorphismus $J\colon H \to H^*$ mit $(Jw)(u) = \langle w\,,\, u\rangle$ für alle $u, w \in H$. Somit kann jedes $h^* \in H^*$ via $J^{-1}$ auf ein $h \in H$ abgebildet werden, sodass $x_n \rightharpoonup x$ gleichbedeutend ist mit $\langle h\,,\, x_n\rangle \to \langle h\,,\, x\rangle$ für alle $h \in H$. Wir betrachten im folgenden das Skalarprodukt über dem Körper $\mathbb{R}$, da für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die Konvergenz durch die komplexe Konjugation unberührt bleibt. Mit der durch $\langle .\,,\, .\rangle$ auf $H$ induzierten Norm $\|\cdot\|$ gilt

$$\|x_n - x\|^2 = \langle x_n\,,\, x_n\rangle - \langle x_n\,,\, x\rangle - \langle x\,,\, x_n\rangle + \langle x\,,\, x\rangle = \underbrace{\|x_n\|^2}_{\to\|x\|^2} + \|x\|^2 - 2\underbrace{\langle x\,,\, x_n\rangle}_{\to\|x\|^2} \to 0$$

Somit konvergiert auch $\|x_n - x\| \to 0$, also folgt $x_n \to x$.

# Hausaufgaben

**Eric Kunze**
Matr.-Nr. 4679202

**Höhere Analysis 1** – Übungsblatt 11

*Thema: Dualräume & schwache Topologie*

**Lemma 11.1.** Sei $X$ ein normierter Raum und $U \subset X$ ein linearer Unterraum. Dann gilt:

$$\forall x^* \in X^* \text{ mit } x^* |_U = 0 : x^* = 0 \quad \Rightarrow \quad U \text{ ist dicht in } X$$

## Übung 33

Es sei $X$ ein normierter Raum mit separablem Dualraum $X^*$. Beweisen Sie:

(a) In der Einheitssphäre gibt $S_{X^*} = \{u^* \in X^* : \|u^*\| = 1\} \subset X^*$ liegt eine dichte Folge $\{u_n^*\}$.

(b) In der Einheitssphäre $S_X \subset X$ liegt eine Folge $\{u_n\}$, die $\langle u_n^* \, , \, u_n \rangle \geq \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

(c) Die lineare Hülle von $\{u_n\}$ ist dicht in $X$.

(d) $X$ ist separabel.

(zu a) Wir wissen, dass für einen separablen metrischen Raum $X$ auch alle Teilmengen $Y \subseteq X$ separabel sind. Wählen wir $S_{X^*}$ als Teilmenge des separablen Raumes $X^*$, dann ist $S_{X^*}$ separabel, d.h. es existiert eine abzählbare Dichte Menge $D$ und diese hat die Form $D = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. Damit ist dann die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in $S_{X^*}$.

(zu b) Fixiere ein $n \in \mathbb{N}$. Da $u_n^* \in S_{X^*}$, ist $\|u_n^*\| = 1$. Angenommen es gäbe nun kein $u_n \in S_X$ mit $\langle u_n^* \, , \, u_n \rangle \geq \frac{1}{2}$, so wäre

$$\|u_n^*\| = \sup_{\|u_n\|=1} |\langle u_n^* \, , \, u_n \rangle| \leq \frac{1}{2}$$

im Widerspruch zur Annahme $\|u_n^*\| = 1$. Somit existiert also ein $u_n \in S_X$ mit $\langle u_n^* \, , \, u_n \rangle \geq \frac{1}{2}$ und mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig existiert also eine Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\langle u_n^* \, , \, u_n \rangle \geq \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(zu c) Sei $U := \operatorname{lin}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sei $u^* \in X^*$ mit $u^* |_U = 0$. Angenommen $u^* \neq 0$, oBdA setzen wir $\|u^*\| = 1$. Da $\{u_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht ist, existiert ein $u_{n_0}^*$ mit $\|u^* - u_{n_0}^*\| \leq \frac{1}{4}$. Nach (b) gilt dann

$$\frac{1}{2} \leq |u_{n_0}^*(u_{n_0})| = |u_{n_0}^*(u_{n_0}) - u^*(u_{n_0})| \leq \|u_{n_0}^* - u^*\| \cdot \underbrace{\|u_{n_0}\|}_{=1} \leq \frac{1}{4}$$

Dies ergibt aber einen Widerspruch und somit muss $u^* = 0$ sein. Mit Lemma 11.1 ist also $U$ dicht in $X$.

(zu d) Setze $D := \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. Diese Menge $D$ ist abzählbar und nach (c) auch dicht in $X$, d.h. es gilt $\overline{\operatorname{lin}(A)} = X$. Somit ist $X$ separabel.

**Übung 34**

Sei $X$ ein normierter Raum.

(a) Zeigen Sie, dass $\tau_w$ eine Topologie auf $X$ ist und dass Konvergenz in $(X, \tau_w)$ gerade die schwache Konvergenz ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\tau_w^*$ eine Topologie auf $X$ ist und dass Konvergenz in $(X, \tau_w^*)$ gerade die schwache* Konvergenz ist.

(zu a) Sei $\tau_w$ wie in der Vorlesung definiert.

- Es ist klar, dass $\emptyset \in \tau_w$ und $X \in \tau_w$ gilt.

- Sei $I$ eine beliebige Indexmenge und $M_i \in \tau_w$ für alle $i \in I$. Sei $u_0 \in \bigcup_{i\in I} M_i$. Dann existiert ein $i_0 \in I$ mit $u_0 \in M_{i_0}$. Da $M_{i_0} \in \tau_w$ liegt, existieren $u_1^*, \dots, u_k^* \in X^*$ und $\varepsilon > 0$, sodass $v \in M_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} M_i$ falls $\left|\left\langle u_j^* \, , \, v - u_0 \right\rangle\right| < \varepsilon$ erfüllt ist für alle $j = 1, \dots, k$. Somit gilt schließlich auch $\bigcup_{i\in I} M_i \in \tau_w$.

- Seien $M_1, M_2 \in \tau_w$ und $u_0 \in M_1 \cap M_2$. Dann ist $u_0 \in M_1$ und $u_0 \in M_2$. Da $M_1, M_2 \in \tau_w$ existieren $u_1^*, \dots, u_k^* \in X^*$ und $w_1^*, \dots, w_\ell^* \in X^*$ sowie $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, sodass $v \in M_1$ falls $\left|\left\langle u_j^* \, , \, v - u_0 \right\rangle\right| < \varepsilon_1$ für alle $j = 1, \dots, k$ und $v \in M_2$ falls $\left|\left\langle w_j^* \, , \, v - u_0 \right\rangle\right| < \varepsilon_2$ für alle $j = 1, \dots, \ell$. Definieren wir nun $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ so gilt $v \in M_1 \cap M_2$ falls $\left|\left\langle u_j^* \, , \, v - u_0 \right\rangle\right| < \varepsilon$ für alle $j = 1, \dots, k$ und $\left|\left\langle w_j^* \, , \, v - u_0 \right\rangle\right| < \varepsilon$ für alle $j = 1, \dots, \ell$ gilt. Somit ist also $M_1 \cap M_2 \in \tau_w$ und damit auch jeder endliche Schnitt (da dieser als verschachtelter Schnitt von je zwei Mengen gesehen werden kann).

- Konvergenz in $\tau_w$ — Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ und $u \in X$. $\{u_n\}$ konvergiert genau danns schwach gegen $u$, wenn $\langle u^* \, , \, u_n \rangle \to \langle u^* \, , \, u \rangle$ für alle $u^* \in U$ bzw. genau dann, wenn für alle $u^* \in X^*$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ existiert, sodass für alle $n > n_0(\varepsilon)$ gilt, dass $|\langle u^* \, , \, u \rangle - \langle u^* \, , \, u_n \rangle| = |\langle u^* \, , \, u - u_n \rangle| < \varepsilon$ ist. Somit existiert für jede offene Umgebung $U(u) \in \tau_w$ ein $n_0$, sodass für alle $n > n_0$ gilt, dass $|\langle u_i^* \, , \, u - u_n \rangle| < \varepsilon_{U(u)}$ für alle $u_j^*$ $(j = 1, \dots, k)$ und $\varepsilon > 0$ per Definition von $\tau_w$. Damit ist nun also $u_n \in U(u)$ für alle $n > n_0$ für alle offenen Umgebungen von $U(u)$ von $u$, d.h. $u_n \overset{\tau_w}{\to} u$.

  Sei andersherum nun $u_n \overset{\tau_w}{\to} u$, d.h. für alle offenen Umgebungen $U(u)$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $u_n \in U(u)$ für alle $n > n_0$. Diese Umgebungen sind dann definiert durch die Existenz von $u_1, \dots, u_k \in X^*$ und $\varepsilon > 0$, sodass $v \in U(u)$ falls $|\langle u_i^* \, , \, u - v \rangle| < \varepsilon$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und endlich viele beliebige $u^* \in X^*$ liegen nun nur endlich viele $u_n$ nicht in der Umgebung von $u$. Damit muss also für alle $u^* \in X^*$ und für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $|\langle u^* \, , \, u - u_n \rangle| = |\langle u^* \, , \, u \rangle - \langle u^* \, , \, u_n \rangle| < \varepsilon$, d.h. $\langle u^* \, , \, u_n \rangle \to \langle u^* \, , \, u \rangle$ für alle $u^* \in X^*$, d.h. $u_n \rightharpoonup u$.

(zu b) Sei $\tau_w^*$ wie in der Vorlesung definiert.

- Es ist klar, dass $\emptyset \in \tau_w^*$ und $X^* \in \tau_w^*$ gilt.
- Sei $I$ eine beliebige Indexmenge und $M_i^* \in \tau_w^*$ für alle $i \in I$. Sei $u_0^* \in \bigcup_{i\in I} M_i^*$. Dann existiert ein $i_0 \in I$ mit $u_0^* \in M_{i_0}^*$. Da $M_{i_0}^* \in \tau_w^*$ liegt, existieren $u_1, \ldots, u_k \in X$ und $\varepsilon > 0$, sodass $v^* \in M_{i_0}^* \subseteq \bigcup_{i\in I} M_i^*$ falls $|\langle v - u_0\,,\, u_j\rangle| < \varepsilon$ erfüllt ist für alle $j = 1, \ldots, k$. Somit gilt schließlich auch $\bigcup_{i\in I} M_i^* \in \tau_w^*$.
- Seien $M_1^*, M_2^* \in \tau_w^*$ und $u_0^* \in M_1^* \cap M_2^*$. Dann ist $u_0^* \in M_1^*$ und $u_0^* \in M_2^*$. Da $M_1^*, M_2^* \in \tau_w^*$ existieren $u_1, \ldots, u_k \in X$ und $w_1, \ldots, w^* \in X$ sowie $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, sodass $v^* \in M_1^*$ falls $|\langle v^* - u_0^*\,,\, u_j\rangle| < \varepsilon_1$ für alle $j = 1, \ldots, k$ und $v^* \in M_2^*$ falls $|\langle v^* - u_0^*\,,\, w_j\rangle| < \varepsilon_2$ für alle $j = 1, \ldots, \ell$. Definieren wir nun $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ so gilt $v^* \in M_1^* \cap M_2^*$ falls $|\langle v^* - u_0^*\,,\, u_j\rangle| < \varepsilon$ für alle $j = 1, \ldots, k$ und $|\langle v^* - u_0^*\,,\, w_j\rangle| < \varepsilon$ für alle $j = 1, \ldots, \ell$ gilt. Somit ist also $M_1^* \cap M_2^* \in \tau_w^*$ und damit auch jeder endliche Schnitt (da dieser als verschachtelter Schnitt von je zwei Mengen gesehen werden kann).
- Konvergenz in $\tau_w^*$ — Sei $\{u_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ und $u^* \in X^*$. $\{u_n^*\}$ konvergiert genau dann schwach* gegen $u^*$, wenn $\langle u_n^*\,,\, u\rangle \to \langle u^*\,,\, u\rangle$ für alle $u \in X$ bzw. genau dann, wenn für alle $u \in X$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ existiert, sodass für alle $n > n_0(\varepsilon)$ gilt, dass $|\langle u^*\,,\, u\rangle - \langle u_n^*\,,\, u\rangle| = |\langle u^* - u_n^*\,,\, u\rangle| < \varepsilon$ ist. Somit existiert für jede offene Umgebung $U(u^*) \in \tau_w^*$ ein $n_0$, sodass für alle $n > n_0$ gilt, dass $|\langle u^* - u_n^*\,,\, u_j\rangle| < \varepsilon_{U(u^*)}$ für alle $u_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ und $\varepsilon > 0$ per Definition von $\tau_w^*$. Damit ist nun also $u_n^* \in U(u^*)$ für alle $n > n_0$ für alle offenen Umgebungen von $U(u^*)$ von $u^*$, d.h. $u_n^* \overset{\tau_w^*}{\to} u^*$.

  Sei andersherum nun $u_n^* \overset{\tau_w^*}{\to} u^*$, d.h. für alle offenen Umgebungen $U(u^*)$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $u_n^* \in U(u^*)$ für alle $n > n_0$. Diese Umgebungen sind dann definiert durch die Existenz von $u_1, \ldots, u_k \in X$ und $\varepsilon > 0$, sodass $v^* \in U(u^*)$ falls $|\langle u^* - v^*\,,\, u_i\rangle| < \varepsilon$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und endlich viele beliebige $u \in X$ liegen nun nur endlich viele $u_n^*$ nicht in der Umgebung von $u$. Damit muss also für alle $u \in X$ und für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $|\langle u^* - u_n^*\,,\, u\rangle| = |\langle u^*\,,\, u\rangle - \langle u_n^*\,,\, u\rangle| < \varepsilon$, d.h. $\langle u_n^*\,,\, u\rangle \to \langle u_n^*\,,\, u\rangle$ für alle $u \in X$, d.h. $u_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} u^*$.

**Übung 35**

Es sei $X$ ein reflexiver Banachraum und $T \in L(X, \ell^1)$. Zeigen Sie, dass $T$ kompakt ist.

**Übung 36**

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $p \in (1, \infty)$, $q = \frac{p}{p-1}$ und $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$ betrachten wir die Funktion

$$F \colon \ell^p \to \mathbb{R} \text{ mit } F(\{x_n\}) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \left( \frac{1}{p} |x_n|^p - y_n x_n \right)$$

Zeigen Sie, dass $F$ auf der Menge

$$A := \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p : x_n \geq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}$$

ein Minimum besitzt.

*Hinweis:* Nutzen Sie Satz 3.19 der Vorlesung.