TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik Institut für Analysis, Professur für Dynamik und Steuerung

FUNKTIONENTHEORIE

Übungen

Prof. Dr. Stefan Siegmund

Sommersemester 2020

Autor : Eric Kunze

E-Mail : `eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de`

Hausaufgaben

Eric Kunze

Funktionentheorie – Übungsblatt 1

Matr.-Nr. 4679202

Thema: Komplexe Zahlen & Differenzierbarkeit

Aufgabe 1.1. Wo liegen in der Gaußschen Zahlenebene diejenigen Punkte z, für die gilt

(a) $0 < \operatorname{Re}(\imath z) < 2\pi$

(b) $|z - z_1| = |z - z_2|$ ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gegeben)

(c) $|z| + \operatorname{Re}(z) < 1$

(d) $z^5 = 1$

(e) $z = 3 - \imath + 5e^{\imath t}$ $(0 \leq t \leq \pi)$

(f) $z = te^{\imath t}$ $(t \geq 0)$

(zu a) Mit $z = a + b\imath$ ist $\imath \cdot z = -b + a\imath$, d.h. $\operatorname{Re}(\imath \cdot z) = -\operatorname{Im}(z)$.

(zu b) Der Term $|z - z_1|$ beschreibt den Abstand zwischen z und z_1, d.h. $|z - z_1| = |z - z_2|$ beschreibt alle Punkte, die von z_1 und z_2 den gleichen Abstand haben. Dies sind alle Punkte, die auf der Geraden mit Normale $n = \overline{z_1 z_2}$ liegen, d.h. z erfülle die Bedingung $\left\langle n\,, \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 - z \right\rangle = 0$, wobei z, z_1, z_2 als Punkte im $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt zu verstehen sind.

(zu c) Sei $z = a + b\imath$, dann lässt sich die Gleichung schreiben als

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2+b^2} + a < 1 \;&\Leftrightarrow\; \sqrt{a^2+b^2} < 1 - a \\ &\Leftrightarrow\; a^2 + b^2 < 1 - 2a + a^2 \\ &\Leftrightarrow\; y^2 < 1 - 2x \\ &\Leftrightarrow\; |y| < \sqrt{1-2x} \\ &\Leftrightarrow\; -\sqrt{1-2x} < y < \sqrt{1-2x} \end{aligned}$$

Somit liegen alle gültigen z in dem von einer nach links geöffneten Parabel mit Scheitelpunkt in $(1/2, 0)$ eingeschlossenen Bereich.

(zu d) Die Einheitswurzeln liegen stets auf dem Einheitskreis. Insbesondere bilden die fünften Einheitswurzeln ein Fünfeck, wobei ein Eckpunkt auf der Realachse liegt (da stets $1^5 = 1$). Außerdem lassen sich alle Lösungen dieser Gleichung explizit angeben mit

$$z_k = \exp\left(\frac{2\pi\imath \cdot k}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi \cdot k}{5}\right) + \imath \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot k}{5}\right) \qquad (k = 0, 1 \ldots, 4)$$

(zu e) Wir schreiben $z = 3 - i + 5e^{\imath t} = 3 + 5\cos(t) + \imath \cdot (5\sin(t) - 1)$. Damit erhalten wir eine Parameterdarstellung eines Kreises mit Radius 5 und Zentrum $(3, -1)$. Da $t \in [0, \pi]$ liegen alle z nur auf dem oberen Halbkreis.

(zu f) Der Ausdruck $r \cdot e^{it}$ beschreibt einen Kreis mit Radius r um den Ursprung. Da t den Winkel zur Realachse beschreibt, wird der Radius von $t \cdot e^{it}$ mit wachsendem Winkel größer, d.h. es ergibt sich eine (unendliche) Spirale.

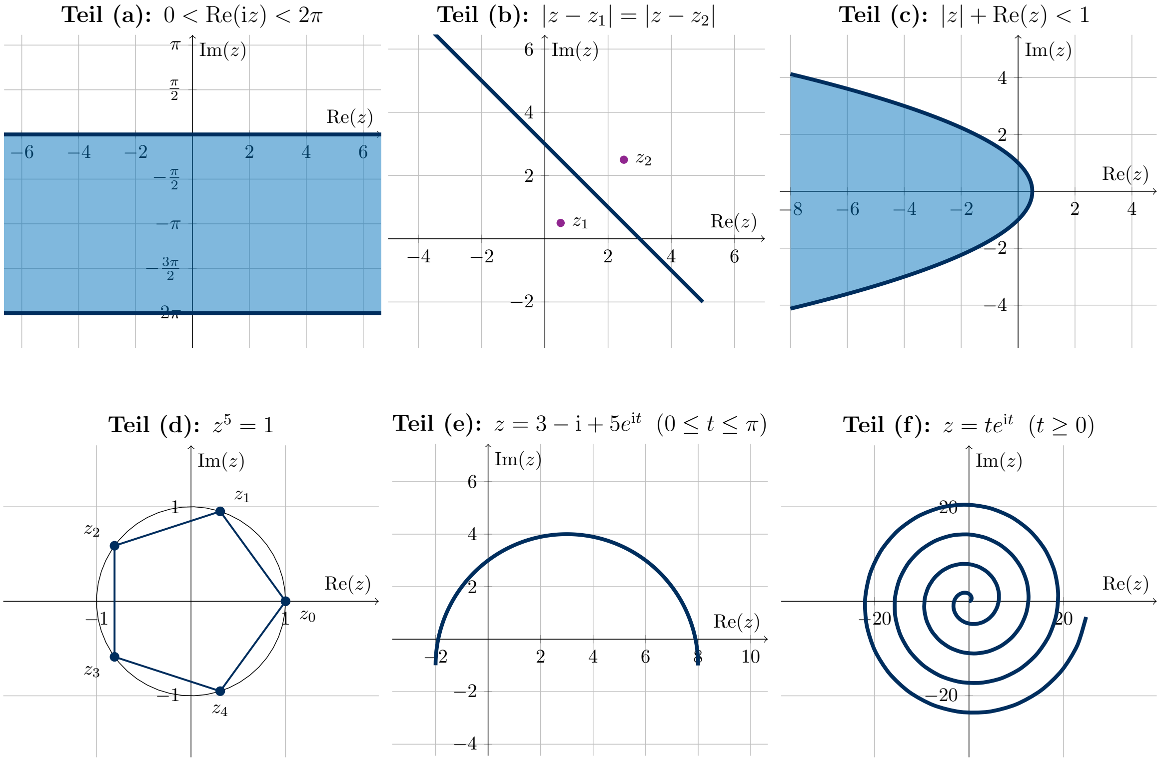

Abbildung 1.1: Darstellungen zu Aufgabe 1.1

Aufgabe 1.2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie: f ist genau dann in z_0 differenzierbar, wenn es $a \in \mathbb{C}$ und $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = 0$ gibt, sodass

$$f(z) = f(z_0) + a(z - z_0) + |z - z_0|\,\varphi(z) \qquad (z \in \Omega)$$

gilt. Es ist dann $f'(z_0) = a$.

(b) Sei $\Omega' \subseteq \mathbb{C}$ offen, $g\colon \Omega' \to \mathbb{C}$, $f(\Omega) \subseteq \Omega'$ und seien f in z_0 und g in $f(z_0)$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass $g \circ f$ in z_0 differenzierbar ist und dass

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

gilt (Kettenregel).

(zu a) **(⇒)** f sei komplex differenzierbar in z_0, d.h. $f'(z_0)$ existiert. Definieren wir $a := f'(z_0)$ und

$$\varphi(z) := \frac{z-z_0}{|z-z_0|} \cdot \widetilde{\varphi}(z) \quad \text{mit} \quad \widetilde{\varphi}(z) := \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & f(z_0) + a(z-z_0) + |z-z_0|\,\varphi(z) \\ = \; & f(z_0) + f'(z_0)\cdot(z-z_0) + |z-z_0| \cdot \tfrac{z-z_0}{|z-z_0|} \cdot \left(\tfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right) \\ = \; & f(z_0) + f'(z_0)\cdot(z-z_0) + f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0) \\ = \; & f(z) \end{aligned}$$

Außerdem gilt aufgrund der Differenzierbarkeit von f auch $\widetilde{\varphi}(z) \to 0$ für $z \to z_0$ sowie

$$\left|\frac{z-z_0}{|z-z_0|}\right| = \frac{|z-z_0|}{|z-z_0|} = 1$$

und somit ist der Ausdruck $\frac{z-z_0}{|z-z_0|}$ beschränkt. Schließlich dominiert somit $\widetilde{\varphi}$ die Konvergenz von φ und es gilt

$$\lim_{z\to z_0} \varphi(z) = 0$$

(⇐) Es existieren $a \in \mathbb{C}$ und $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\varphi(z) \to 0$ und $f(z) = f(z_0) + a \cdot f'(z_0)(z-z_0) + |z-z_0| \cdot \varphi(z)$. Daraus lässt sich umstellen

$$\begin{aligned} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= a + \varphi(z) \cdot |z-z_0| \cdot \frac{\overline{z-z_0}}{\overline{\overline{z-z_0}}} \\ &= a + \varphi(z)\cdot(z-z_0)\cdot \frac{\overline{z-z_0}}{|z-z_0|} && \left(\tfrac{|z|}{\overline{z}} = \tfrac{z}{|z|}\right) \\ \Rightarrow \quad \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= a + \varphi(z) \cdot \frac{\overline{z-z_0}}{|z-z_0|} \end{aligned}$$

Somit ist

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = a + \lim_{z\to z_0} \underbrace{\varphi(z) \cdot \frac{\overline{z-z_0}}{|z-z_0|}}_{=:\widetilde{\varphi}(z)}$$

Wie oben ist

$$\left|\frac{\overline{z-z_0}}{|z-z_0|}\right| = \frac{|z-z_0|}{|z-z_0|} = 1$$

und somit dominiert φ den Ausdruck $\widetilde{\varphi}$ zu Null, d.h.

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = a + \lim_{z\to z_0} \widetilde{\varphi}(z) = a \quad \Rightarrow \quad a = f'(z_0)$$

(zu b) Es seien $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ in z_0 und $g\colon \Omega' \to \mathbb{C}$ in $f(z_0)$ komplex differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0} \frac{(g\circ f)(z) - (g\circ f)(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z\to z_0} \frac{(g\circ f)(z) - (g\circ f)(z_0)}{f(z) - f(z_0)} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{(g\circ f)(z) - (g\circ f)(z_0)}{f(z) - f(z_0)} \cdot \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\
&= g'(f(z_0)) \cdot \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} && (g \text{ diffbar in } f(z_0)) \\
&= g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0) && (f \text{ diffbar in } z_0)
\end{aligned}$$

Insbesondere existieren die Grenzwerte $\lim_{z\to z_0} \frac{(g\circ f)(z)-(g\circ f)(z_0)}{f(z)-f(z_0)}$ und $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ und somit auch der Grenzwert $\lim_{z\to z_0} \frac{(g\circ f)(z)-(g\circ f)(z_0)}{z-z_0}$, d.h. $g \circ f$ ist komplex differenzierbar in z_0.

Aufgabe 1.3. Seien $f, g, h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\begin{aligned}
f(z) &:= x^2 + y^2 \\
g(z) &:= 2xy + y + \imath(x^2 - y^2 - x) \\
h(z) &:= \frac{x - \imath y}{1 + x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Bestimmten Sie die Punkte in $\mathbb{C}$, in denen f, g und h komplex differenzierbar sind.

Wir zerlegen die Funktionen immer in Real- und Imaginärfunktion, d.h. $f(z) = f(x,y) = f_1(x,y) + \imath \cdot f_2(x,y)$. Damit ist $f_1(x,y) = x^2 + y^2$ und $f_2(x,y) = 0$. Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}
\partial_x f_1(x,y) &= 2x & \partial_y f_1(x,y) &= 2y \\
\partial_x f_2(x,y) &= 0 & \partial_y f_2(x,y) &= 0
\end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig, somit ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (reell) differenzierbar. Wir prüfen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{rclcrclcrcl}
\partial_x f_1(x,y) &=& \partial_y f_2(x,y) & \Leftrightarrow & 2x &=& 0 & \Leftrightarrow & x &=& 0 \\
\partial_y f_1(x,y) &=& -\partial_x f_2(x,y) & \Leftrightarrow & 2y &=& 0 & \Leftrightarrow & y &=& 0
\end{array}$$

Damit sind die beiden Gleichungen nur für $z = 0$ erfüllt und f ist nur in diesem Punkt komplex differenzierbar.

Es ist $g_1(x,y) = 2xy + y$ und $g_2(x,y) = x^2 - y^2 - x$. Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}
\partial_x g_1(x,y) &= 2y & \partial_y g_1(x,y) &= 2x + 1 \\
\partial_x g_2(x,y) &= 2x - 1 & \partial_y g_2(x,y) &= -2y
\end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig, somit ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (reell) differenzierbar. Wir prüfen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{rclcrclcrcl}
\partial_x g_1(x,y) &=& \partial_y g_2(x,y) &\Leftrightarrow& 2y &=& -2y &\Rightarrow& y &=& 0 \\
\partial_y g_1(x,y) &=& -\partial_x g_2(x,y) &\Leftrightarrow& 2x+1 &=& -2x+1 &\Rightarrow& x &=& 0
\end{array}$$

Damit sind die beiden Gleichungen nur für $z = 0$ erfüllt und g ist nur in diesem Punkt komplex differenzierbar.

Es ist $h_1(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$ und $h_2(x,y) = -\frac{y}{1+x^2+y^2}$. Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}
\partial_x h_1(x,y) &= \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} & \qquad \partial_y h_1(x,y) &= \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} \\
\partial_x h_2(x,y) &= \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} & \qquad \partial_y h_2(x,y) &= -\frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig für $x \neq \pm\sqrt{-y^2-1}$, somit ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dort (reell) differenzierbar. Wir prüfen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{rclcccrcl}
\partial_x h_1(x,y) &=& \partial_y h_2(x,y) &\Leftrightarrow& \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} = -\frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2} &\Rightarrow& 1 &=& -1 \\
\partial_y h_1(x,y) &=& -\partial_x h_2(x,y) &\Leftrightarrow& \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(1+x^2+y^2)^2} &\Rightarrow& -2xy &=& 2xy
\end{array}$$

Die erste Gleichung liefert aufgrund der falschen Aussage für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Unlösbarkeit des Gleichungssystems. Somit ist h nirgends komplex differenzierbar.