



**TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DRESDEN**

---

**Fakultät Mathematik** Institut für Analysis, Professur für Dynamik und Steuerung

---

# FUNKTIONENTHEORIE

*Übungen*

**Prof. Dr. Stefan Siegmund**

Sommersemester 2020

Autor : Eric Kunze  
E-Mail : [eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de](mailto:eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de)

### Thema: Komplexe Zahlen & Differenzierbarkeit

**Aufgabe 1.1.** Wo liegen in der Gaußschen Zahlenebene diejenigen Punkte  $z$ , für die gilt

- (a)  $0 < \operatorname{Re}(iz) < 2\pi$
- (b)  $|z - z_1| = |z - z_2|$  ( $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gegeben)
- (c)  $|z| + \operatorname{Re}(z) < 1$
- (d)  $z^5 = 1$
- (e)  $z = 3 - i + 5e^{it}$  ( $0 \leq t \leq \pi$ )
- (f)  $z = te^{it}$  ( $t \geq 0$ )

(zu a) Mit  $z = a + bi$  ist  $i \cdot z = -b + ai$ , d.h.  $\operatorname{Re}(i \cdot z) = -\operatorname{Im}(z)$ .

(zu b) Der Term  $|z - z_1|$  beschreibt den Abstand zwischen  $z$  und  $z_1$ , d.h.  $|z - z_1| = |z - z_2|$  beschreibt alle Punkte, die von  $z_1$  und  $z_2$  den gleichen Abstand haben. Dies sind alle Punkte, die auf der Geraden mit Normale  $n = \overline{z_1 z_2}$  liegen, d.h.  $z$  erfülle die Bedingung  $\left\langle n, \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 - z \right\rangle = 0$ , wobei  $z, z_1, z_2$  als Punkte im  $\mathbb{R}^2$  mit dem Standardskalarprodukt zu verstehen sind.

(zu c) Sei  $z = a + bi$ , dann lässt sich die Gleichung schreiben als

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + b^2} + a < 1 &\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} < 1 - a \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 < 1 - 2a + a^2 \\ &\Leftrightarrow b^2 < 1 - 2a \\ &\Leftrightarrow |b| < \sqrt{1 - 2a} \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{1 - 2a} < b < \sqrt{1 - 2a}\end{aligned}$$

Somit liegen alle gültigen  $z$  in dem von einer nach links geöffneten Parabel mit Scheitelpunkt in  $(1/2, 0)$  eingeschlossenen Bereich.

(zu d) Die Einheitswurzeln liegen stets auf dem Einheitskreis. Insbesondere bilden die fünften Einheitswurzeln ein Fünfeck, wobei ein Eckpunkt auf der Realachse liegt (da stets  $1^5 = 1$ ). Außerdem lassen sich alle Lösungen dieser Gleichung explizit angeben mit

$$z_k = \exp\left(\frac{2\pi i \cdot k}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi \cdot k}{5}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot k}{5}\right) \quad (k = 0, 1, \dots, 4)$$

(zu e) Wir schreiben  $z = 3 - i + 5e^{it} = 3 + 5\cos(t) + i \cdot (5\sin(t) - 1)$ . Damit erhalten wir eine Parameterdarstellung eines Kreises mit Radius 5 und Zentrum  $(3, -1)$ . Da  $t \in [0, \pi]$  liegen alle  $z$  nur auf dem oberen Halbkreis.

(zu f) Der Ausdruck  $r \cdot e^{it}$  beschreibt einen Kreis mit Radius  $r$  um den Ursprung. Da  $t$  den Winkel zur Realachse beschreibt, wird der Radius von  $t \cdot e^{it}$  mit wachsendem Winkel größer, d.h. es ergibt sich eine (unendliche) Spirale.

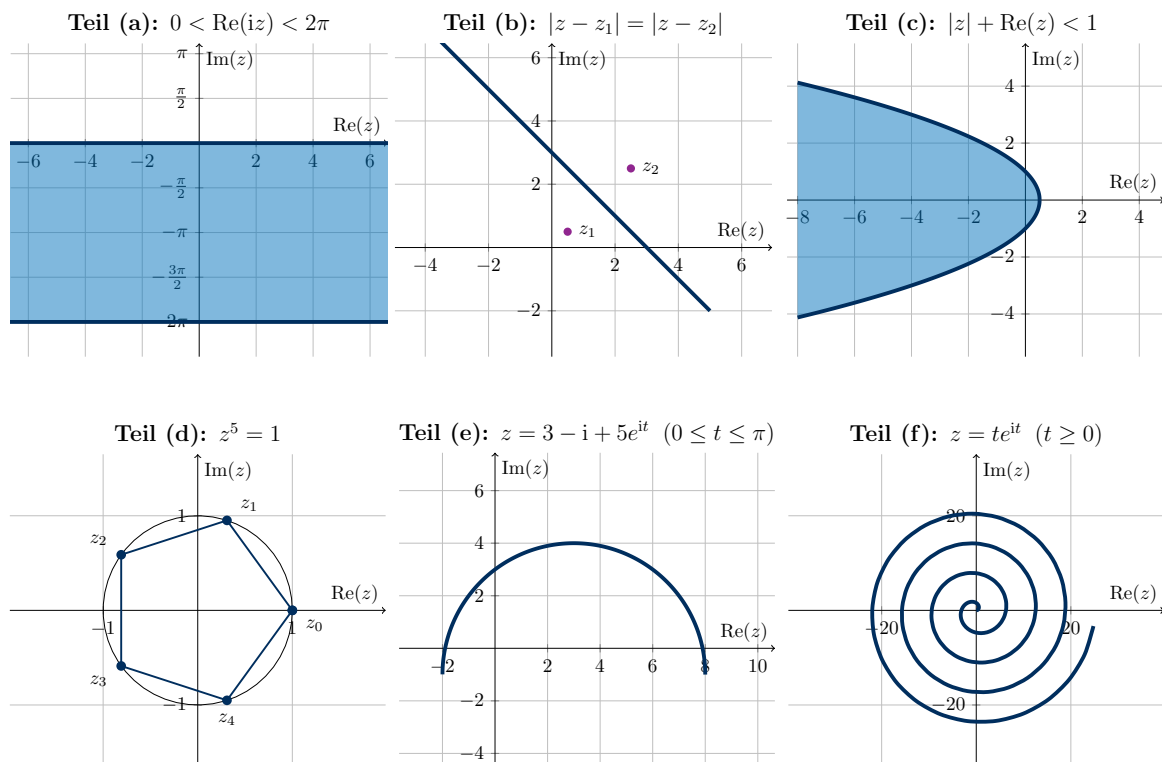


Abbildung 1.1: Darstellungen zu Aufgabe 1.1

**Aufgabe 1.2.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .

- (a) Zeigen Sie:  $f$  ist genau dann in  $z_0$  differenzierbar, wenn es  $a \in \mathbb{C}$  und  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = 0$  gibt, sodass

$$f(z) = f(z_0) + a(z - z_0) + |z - z_0| \varphi(z) \quad (z \in \Omega)$$

gilt. Es ist dann  $f'(z_0) = a$ .

- (b) Sei  $\Omega' \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $g: \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(\Omega) \subseteq \Omega'$  und seien  $f$  in  $z_0$  und  $g$  in  $f(z_0)$  differenzierbar. Zeigen Sie, dass  $g \circ f$  in  $z_0$  differenzierbar ist und dass

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

gilt (Kettenregel).

(zu a)  $(\Rightarrow)$   $f$  sei komplex differenzierbar in  $z_0$ , d.h.  $f'(z_0)$  existiert. Definieren wir  $a := f'(z_0)$  und

$$\varphi(z) := \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \cdot \tilde{\varphi}(z) \quad \text{mit} \quad \tilde{\varphi}(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & f(z_0) + a(z - z_0) + |z - z_0| \varphi(z) \\ = & f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + |z - z_0| \cdot \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \cdot \left( \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right) \\ = & f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) \\ = & f(z) \end{aligned}$$

Außerdem gilt aufgrund der Differenzierbarkeit von  $f$  auch  $\tilde{\varphi}(z) \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow z_0$  sowie

$$\left| \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \right| = \frac{|z - z_0|}{|z - z_0|} = 1$$

und somit ist der Ausdruck  $\frac{z - z_0}{|z - z_0|}$  beschränkt. Schließlich dominiert somit  $\tilde{\varphi}$  die Konvergenz von  $\varphi$  und es gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = 0$$

$(\Leftarrow)$  Es existieren  $a \in \mathbb{C}$  und  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\varphi(z) \rightarrow 0$  und  $f(z) = f(z_0) + a \cdot f'(z_0)(z - z_0) + |z - z_0| \cdot \varphi(z)$ . Daraus lässt sich umstellen

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= a + \varphi(z) \cdot |z - z_0| \cdot \frac{\overline{z - z_0}}{\overline{z - z_0}} \\ &= a + \varphi(z) \cdot (z - z_0) \cdot \frac{\overline{z - z_0}}{|z - z_0|} \quad \left( \frac{|z|}{\overline{z}} = \frac{z}{|z|} \right) \\ \Rightarrow \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= a + \varphi(z) \cdot \frac{\overline{z - z_0}}{|z - z_0|} \end{aligned}$$

Somit ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a + \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{\varphi(z) \cdot \frac{\overline{z - z_0}}{|z - z_0|}}_{=: \tilde{\varphi}(z)}$$

Wie oben ist

$$\left| \frac{\overline{z - z_0}}{|z - z_0|} \right| = \frac{|z - z_0|}{|z - z_0|} = 1$$

und somit dominiert  $\varphi$  den Ausdruck  $\tilde{\varphi}$  zu Null, d.h.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a + \lim_{z \rightarrow z_0} \tilde{\varphi}(z) = a \Rightarrow a = f'(z_0)$$

(zu b) Es seien  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  in  $z_0$  und  $g: \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$  in  $f(z_0)$  komplex differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{f(z) - f(z_0)} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{f(z) - f(z_0)} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= g'(f(z_0)) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (g \text{ diffbar in } f(z_0)) \\ &= g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0) \quad (f \text{ diffbar in } z_0) \end{aligned}$$

Insbesondere existieren die Grenzwerte  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{f(z) - f(z_0)}$  und  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  und somit auch der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{z - z_0}$ , d.h.  $g \circ f$  ist komplex differenzierbar in  $z_0$ .

**Aufgabe 1.3.** Seien  $f, g, h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$\begin{aligned} f(z) &:= x^2 + y^2 \\ g(z) &:= 2xy + y + 1(x^2 - y^2 - x) \\ h(z) &:= \frac{x - iy}{1 + x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Punkte in  $\mathbb{C}$ , in denen  $f$ ,  $g$  und  $h$  komplex differenzierbar sind.

Wir zerlegen die Funktionen immer in Real- und Imaginärfunktion, d.h.  $f(z) = f(x, y) = f_1(x, y) + i \cdot f_2(x, y)$ . Damit ist  $f_1(x, y) = x^2 + y^2$  und  $f_2(x, y) = 0$ . Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} \partial_x f_1(x, y) &= 2x & \partial_y f_1(x, y) &= 2y \\ \partial_x f_2(x, y) &= 0 & \partial_y f_2(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig, somit ist  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (reell) differenzierbar. Wir prüfen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_x f_1(x, y) &= \partial_y f_2(x, y) & \Leftrightarrow & 2x = 0 & \Leftrightarrow & x = 0 \\ \partial_y f_1(x, y) &= -\partial_x f_2(x, y) & \Leftrightarrow & 2y = 0 & \Leftrightarrow & y = 0 \end{aligned}$$

Damit sind die beiden Gleichungen nur für  $z = 0$  erfüllt und  $f$  ist nur in diesem Punkt komplex differenzierbar.

Es ist  $g_1(x, y) = 2xy + y$  und  $g_2(x, y) = x^2 - y^2 - x$ . Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} \partial_x g_1(x, y) &= 2y & \partial_y g_1(x, y) &= 2x + 1 \\ \partial_x g_2(x, y) &= 2x - 1 & \partial_y g_2(x, y) &= -2y \end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig, somit ist  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (reell) differenzierbar. Wir prüfen

die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\partial_x g_1(x, y) &= \partial_y g_2(x, y) &\Leftrightarrow 2y &= -2y &\Rightarrow y &= 0 \\ \partial_y g_1(x, y) &= -\partial_x g_2(x, y) &\Leftrightarrow 2x + 1 &= -2x + 1 &\Rightarrow x &= 0\end{aligned}$$

Damit sind die beiden Gleichungen nur für  $z = 0$  erfüllt und  $g$  ist nur in diesem Punkt komplex differenzierbar.

Es ist  $h_1(x, y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$  und  $h_2(x, y) = -\frac{y}{1+x^2+y^2}$ . Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}\partial_x h_1(x, y) &= \frac{1 - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} & \partial_y h_1(x, y) &= \frac{-2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \\ \partial_x h_2(x, y) &= \frac{-2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} & \partial_y h_2(x, y) &= -\frac{1 + x^2 - y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig für  $x \neq \pm\sqrt{-y^2 - 1}$ , somit ist  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dort (reell) differenzierbar. Wir prüfen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\partial_x h_1(x, y) &= \partial_y h_2(x, y) &\Leftrightarrow \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} &= -\frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2} &\Rightarrow 1 &= -1 \\ \partial_y h_1(x, y) &= -\partial_x h_2(x, y) &\Leftrightarrow \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} &= \frac{2xy}{(1+x^2+y^2)^2} &\Rightarrow -2xy &= 2xy\end{aligned}$$

Die erste Gleichung liefert aufgrund der falschen Aussage für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  die Unlösbarkeit des Gleichungssystems. Somit ist  $h$  nirgends komplex differenzierbar.

**Aufgabe 2.1.** Sei  $\Omega := B(0, 1) \subseteq \mathbb{C}$  (Einheitskreis),  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ . Zeigen Sie: Ist  $z_0 \in \Omega$ ,  $f$  komplex differenzierbar in  $z_0$ , dann gilt  $f'(z_0) = 0$ . Ist  $f$  (in  $\Omega$ ) holomorph, so ist  $f$  konstant.

Sei  $f \simeq (u, v)$ ,  $f = u + iv$  und  $z = x + iy \simeq (x, y)$ . Wegen  $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$  ist  $v \equiv 0$ . Da  $f$  in  $z_0 = x_0 + iy_0 \simeq (x_0, y_0)$  komplex differenzierbar ist, ist  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dort auch reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen  $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) = 0$  bzw.  $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) = 0$ . Somit ist auch  $u'(z) = 0$  und somit  $f'(x_0, y_0) \simeq f'(z_0) = 0$ .

Sei  $f$  holomorph auf  $\Omega$ . Dann gilt  $f'(z) = 0$  für alle  $z \in \Omega$ , insbesondere ist  $u', v' \equiv 0$  und dann sind  $u$  und  $v$  als reelle Funktionen konstant, also auch  $f = u + iv$ .

**Aufgabe 2.2.** (a) Weisen Sie nach, dass die Funktion

$$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad u(x, y) := e^{-x}(x \cdot \cos(y) + y \cdot \sin(y))$$

der Laplace-Differentialgleichung  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$  genügt.

- (b) Bestimmen Sie eine Funktion  $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $v(0, 0) = 0$  derart, dass  $u, v$  die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllen.
- (c) Schreiben Sie  $f = u + iv$  mithilfe der komplexen Exponentialfunktionen als Funktion von  $z = x + iy$ .

(zu a) Es ist

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= -e^{-x}(x \cdot \cos(y) + y \cdot \sin(y)) + e^{-x} \cdot \cos(y) \\ &= e^{-x}((1 - x) \cos(y) - y \sin(y)) \\ u_{xx}(x, y) &= e^{-x}(x \cos(y) + y \sin(y) - 2 \cos(y)) \\ &= e^{-x}((x - 2) \cos(y) + y \sin(y)) \\ u_y(x, y) &= e^{-x}(-x \sin(y) + \sin(y) + y \cos(y)) \\ &= e^{-x}((1 - x) \sin(y) + y \cos(y)) \\ u_{yy}(x, y) &= e^{-x}(-x \cos(y) + \cos(y) + \cos(y) - y \sin(y)) \\ &= -e^{-x}((x - 2) \cos(y) + y \sin(y)) \end{aligned}$$

Damit gilt  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ .

(zu b) Es gilt  $u_x(x, y) = e^{-x}((1 - x) \cos(y) - y \sin(y))$  und nach den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen muss  $u_x = v_y$  gelten. Löse diese Differentialgleichung für fixiertes  $x$

durch Integration:

$$\begin{aligned}
 v(x, y) &= \int u_x(x, y) \, dy = \int e^{-x} ((1-x) \cos(y) - y \sin(y)) \, dy \\
 &= e^{-x} \left( (1-x) \int \cos(y) \, dy - \int y \sin(y) \, dy \right) \\
 &= e^{-x} ((1-x) \sin(y) - \sin(y) + y \cos(y) + C) \\
 &= e^{-x} (-x \sin(y) + y \cos(y) + C)
 \end{aligned}$$

Prüfen wir die zweite Cauchy-Riemann-Differentialgleichung und bestimmten  $v_x$ :

$$\begin{aligned}
 v_x &= -e^{-x} (-x \sin(y) + y \cos(y) + C) + e^{-x} (-\sin(y)) \\
 &= -e^{-x} ((1-x) \sin(y) + y \cos(y) + C) \\
 &\stackrel{!}{=} u_y(x, y) \\
 &= -e^{-x} ((1-x) \sin(y) + y \cos(y))
 \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Konstante  $C = 0$  und als Lösung  $v(x, y) = e^{-x} (y \cos(y) - x \sin(y))$ .

Auch der Anfangswert  $v(0, 0) = 1 \cdot (0 - 0) = 0$  wird erfüllt. Die Probe ergibt

$$\begin{aligned}
 v_x(x, y) &= -e^{-x} (-x \sin(y) + y \cos(y)) - e^{-x} \sin(y) \\
 &= -e^{-x} ((1-x) \sin(y) + y \cos(y)) = -u_y(x, y) \\
 v_y(x, y) &= e^{-x} ((-x \cos(y) + \cos(y) - y \sin(y))) \\
 &= e^{-x} ((1-x) \cos(y) - y \sin(y)) = u_x(x, y)
 \end{aligned}$$

also  $u_x = v_y$  und  $u_y = -v_x$ .

(zu c) Sei  $z = x + iy$ .


$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= u(x, y) + i \cdot v(x, y) \\
 &= e^{-x} (x \cdot \cos(y) + y \cdot \sin(y) - i \cdot x \sin(y) + i \cdot y \cos(y)) \\
 &= e^{-x} ((x + iy) \cos(y) - i \cdot (x + iy) \sin(y)) \\
 &= e^{-x} \cdot z \cdot (\cos(-y) + i \sin(-y)) \\
 &= z \cdot e^{-x} \cdot e^{-iy} \\
 &= z \cdot e^{-z} = f(z)
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.3.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $f'$  stetig,  $z_0 \in \Omega$ ,  $f'(z_0) \neq 0$ . Zeigen Sie: Es gibt offene Umgebungen  $U \subseteq \Omega$  von  $z_0$  und  $V \subseteq \mathbb{C}$  von  $f(z_0)$ , sodass  $f: U \rightarrow V$  bijektiv und die daher existierende Abbildung  $f^{-1}: V \rightarrow U$  ebenfalls holomorph ist. Es gilt  $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$  für alle  $w \in V$ .

*Hinweis:* Betrachten Sie  $f = (f_1, f_2)$  als Abbildung von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$ . Deren Jacobi Determinante ist in  $z_0 = (x_0, y_0)$  ungleich Null. Anwendung des Satzes über die lokale Invertierbarkeit.



Wir erinnern uns gemäß Hinweis an zwei Sätze aus der Analysis 2:

**Lemma 2.1 (Satz über inverse Funktionen).** Sei  $f: U \subseteq \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  mit  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  stetig differenzierbar ( $U$  offen),  $x_0 \in U$ ,  $f'(x_0)$  regulär. Dann existiert eine offene Umgebung  $U_0 \subseteq U$  von  $x_0$ , sodass mit  $V_0 := f(U_0)$  die eingeschränkte Abbildung  $f: U_0 \rightarrow V_0$  Diffeomorphismus<sup>1</sup> ist (insbesondere ist  $V_0$  offene Umgebung von  $y_0 := f(x_0)$ ). 

**Lemma 2.2 (Ableitung der inversen Funktion).** Sei  $f: U \subseteq \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  injektiv und differenzierbar ( $D$  offen,  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ),  $f^{-1}$  differenzierbar in  $y \in \text{int}(f(D))$ . Dann ist

$$(f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y))^{-1} \quad \text{img alt="leaf icon" data-bbox="860 250 885 265"/>$$

Sei  $f = (f_1, f_2): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $z = x + iy \simeq (x, y)$  sowie  $z_0 = x_0 + iy_0 \simeq (x_0, y_0)$ . Da  $f$  holomorph ist in allen  $z_0 \in \Omega$ , ist  $f$  auch reell differenzierbar in  $(x_0, y_0)$  mit

$$f'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1(x_0, y_0) & \partial_y f_1(x_0, y_0) \\ \partial_x f_2(x_0, y_0) & \partial_y f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} =: J$$

Außerdem gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen  $\partial_x f_1(x_0, y_0) = \partial_y f_2(x_0, y_0)$  und  $\partial_y f_1(x_0, y_0) = -\partial_x f_2(x_0, y_0)$ . Damit besitzt  $J$  die Form  $J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  mit Determinante

$$\det(J) = \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$$

Angenommen es gilt  $\det(J) = a^2 + b^2 = 0$ . Dann ist  $a = 0$  und  $b = 0$ , d.h.  $f'(x_0, y_0) = 0$  im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist also  $f'(z_0) \simeq f'(x_0, y_0) \neq 0$  für alle  $z_0 \simeq (x_0, y_0) \in \Omega$ .

Außerdem ist  $f'$  stetig. Nach dem Satz über inverse Funktionen (Lemma 2.1) existiert dann eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  von  $(x_0, y_0)$ , sodass mit  $V = f(U)$  (und insbesondere  $f(x_0, y_0) \in V$ )  $f: U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus ist. Nach dem Satz über die Ableitung der inversen Funktion (Lemma 2.2) gilt dann

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x, y) &= f'(f^{-1}(x, y))^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x f_1(f^{-1}(x, y)) & \partial_y f_1(f^{-1}(x, y)) \\ \partial_x f_2(f^{-1}(x, y)) & \partial_y f_2(f^{-1}(x, y)) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\det(J(f^{-1}(x, y)))} \begin{pmatrix} \partial_y f_2(f^{-1}(x, y)) & \partial_x f_2(f^{-1}(x, y)) \\ \partial_y f_1(f^{-1}(x, y)) & \partial_x f_1(f^{-1}(x, y)) \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in V \end{aligned}$$

Aufgrund der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für  $f$  ist  $\det(J(f^{-1}(x, y))) = \partial_x f_1(f^{-1}(x, y)) \cdot \partial_y f_2(f^{-1}(x, y)) - \partial_x f_2(f^{-1}(x, y)) \cdot \partial_y f_1(f^{-1}(x, y)) \neq 0$  und

$$\begin{aligned} \partial_y f_2(f^{-1}(x, y)) &= \partial_x f_1(f^{-1}(x, y)) \\ \partial_y f_1(f^{-1}(x, y)) &= -\partial_x f_2(f^{-1}(x, y)) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> $f, f^{-1}$  stetig differenzierbar

auch die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für  $f^{-1}$ . Damit ist  $f^{-1}$  komplex differenzierbar auf dem entsprechenden  $V \subseteq \mathbb{C}$  mit der Ableitung

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(w) &= \lim_{z \rightarrow w} \frac{f^{-1}(z) - \lim_{z \rightarrow w} f^{-1}(w)}{z - w} = \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(w)}{f(f^{-1}(z)) - f(f^{-1}(w))} \\ &= \left( \lim_{z \rightarrow w} \frac{f(f^{-1}(z)) - f(f^{-1}(w))}{f^{-1}(z) - f^{-1}(w)} \right)^{-1} \\ &= \left( f'(f^{-1}(w)) \right)^{-1} \quad \forall w \in V\end{aligned}$$

**Aufgabe 3.1.** Das Doppelverhältnis  $[z_1, z_2, z_3, z_4]$  von verschiedenen Punkten  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$  ist folgendermaßen erklärt:

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} \quad z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$$

Ist  $z_j = \infty$ , so definieren wir das Doppelverhältnis als Grenzwert, z.B.

$$[\infty, z_2, z_3, z_4] := \lim_{z \rightarrow \infty} [z, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

- (a) Sei  $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  eine Möbius-Transformation. Beweisen Sie: Sind  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$  und  $z_j \neq z_k$  für  $j \neq k$ , so gilt

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)]$$

- (b) Benutzen Sie (a) um zu zeigen: Sind drei verschiedene Punkte  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$  und drei verschiedene Punkte  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$  gegeben, so existiert genau eine Möbius-Transformation  $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  mit der Eigenschaft  $f(z_j) = w_j$  für  $j = 1, 2, 3$ . Für  $z \notin \{z_1, z_2, z_3\}$  ist  $f(z)$  gegeben durch

$$[w_1, w_2, w_3, f(z)] = [z_1, z_2, z_3, z]$$

- (zu a) Sei  $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  eine Möbius-Transformation, d.h. es existieren  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  mit  $ad - bc \neq 0$ , sodass  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Wir definieren abkürzend  $\alpha(z) := cz + d$  und  $\delta := ad - bc$ . Außerdem gilt

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [z_2, z_1, z_4, z_3] = [z_3, z_4, z_1, z_2] \quad (\star)$$

- (i) Für  $x, y \in \mathbb{C}$  gilt

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \frac{ax+b}{cx+d} - \frac{ay+b}{cy+d} = \frac{(ax+b)(cy+d) - (ay+b)(cx+d)}{(cx+d)(cy+d)} \\ &= \frac{acxy + adx + bcy + bd - acxy - ady - bcx - bd}{\alpha(x)\alpha(y)} \\ &= \frac{(x-y) \cdot \delta}{\alpha(x) \cdot \alpha(y)} \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned}
[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] &= \frac{(f(z_1) - f(z_3)) \cdot (f(z_2) - f(z_4))}{(f(z_1) - f(z_4)) \cdot (f(z_2) - f(z_3))} \\
&= \frac{(z_1 - z_3) \cdot \delta \cdot (z_2 - z_4) \cdot \delta}{\alpha(z_1) \cdot \alpha(z_3) \cdot \alpha(z_2) \cdot \alpha(z_4)} \cdot \frac{\alpha(z_1) \cdot \alpha(z_4) \cdot \alpha(z_2) \cdot \alpha(z_3)}{(z_1 - z_4) \cdot \delta \cdot (z_2 - z_3) \cdot \delta} \\
&= \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} \\
&= [z_1, z_2, z_3, z_4]
\end{aligned}$$

- (ii) Genau ein  $z_k = \infty$  und  $c \neq 0$ . Wegen  $(\star)$  können wir oBdA annehmen, dass  $z_1 = \infty$ . Dann ist  $f(z_1) = \frac{a}{c}$  und es gilt

$$f(z_1) - f(z) = \frac{a}{c} - \frac{az + b}{cz + d} = \frac{acz + ad - acz - bc}{c(cz + d)} = \frac{\delta}{c \cdot \alpha(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] &= \frac{\delta(z_2 - z_4) \cdot c \cdot \alpha(z_4) \cdot c \cdot \alpha(z_2) \cdot \alpha(z_3)}{c \cdot \alpha(z_3) \cdot \alpha(z_2) \cdot \alpha(z_4) \cdot \delta \cdot (z_2 - z_3)} \\
&= \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \\
&= [z_1, z_2, z_3, z_4]
\end{aligned}$$

Für  $c = 0$  ist  $f(z_1) = \infty$  und somit  $f(z_1) - f(z) = \infty$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ , sowie  $\alpha \equiv d$ . Es gilt

$$[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = \frac{f(z_2) - f(z_4)}{f(z_2) - f(z_3)} = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \cdot \frac{\delta \cdot d^2}{\delta \cdot d^2} = [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

- (iii) Es seien  $z_1 = z_2 = \infty$ . Dann ist  $f(z_1) = f(z_2) = \frac{a}{c}$  für  $c \neq 0$ . Somit vereinfacht sich Fall (ii) weiter zu

$$\begin{aligned}
[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] &= \frac{\delta \cdot \delta}{c \cdot \alpha(z_3) \cdot c \cdot \alpha(z_4)} \cdot \frac{c \cdot \alpha(z_4) \cdot c \cdot \alpha(z_3)}{\delta \cdot \delta} \\
&= 1 \\
&= [z_1, z_2, z_3, z_4]
\end{aligned}$$

Für  $c = 0$  ist  $f(z_1) = f(z_2) = \infty$  und somit  $[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = 1 = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ .

Sei  $z_1 = z_3 = \infty$ , dann folgt die Aussage in beiden Fällen mit ähnlicher Rechnung wie oben.

- (iv) Analog zu den bisher gezeigten Fällen, rechnet man auch alle weiteren Fälle nach.

Damit erhält man schließlich für alle  $z_k \in \mathbb{C}_\infty$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) die Aussage  $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)]$ .

(zu b) Wir konstruieren eine Möbius-Transformation  $f$  mit  $f(z_j) = w_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Dazu betrachten wir das Doppelverhältnis  $[z_1, z_2, z_3, z]$  als Funktion  $\tau$  in  $z$ , d.h.

$$\tau(z) := [z_1, z_2, z_3, z] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z)}{(z_1 - z)(z_2 - z_3)} = \frac{-(z_1 - z_3) \cdot z + (z_1 - z_3)z_2}{-(z_2 - z_3) + (z_2 - z_3)z_1}$$

Mit der zugeordneten Matrix  $T := \begin{pmatrix} -(z_1 - z_3) & (z_1 - z_3)z_2 \\ -(z_2 - z_3) & (z_2 - z_3)z_1 \end{pmatrix}$  und  $\det(T) = (z_1 - z_3)(z_2 - z_3)(z_2 - z_1) \neq 0$ , da  $z_1 \neq z_2$  vorausgesetzt war, ist  $\tau$  wieder eine Möbius-Transformation. Dabei gilt  $\tau(z_1) = \infty$ ,  $\tau(z_2) = 0$  und  $\tau(z_3) = 1$ . Sei  $\sigma$  nun das Doppelverhältnis der  $w_k$  und  $z$  als Funktion in  $z$  aufgefasst:

$$\sigma(z) := [w_1, w_2, w_3, z] = \frac{-(w_1 - w_3) \cdot z + (w_1 - w_3)w_2}{-(w_2 - w_3) + (w_2 - w_3)w_1}$$


Mit der gleichen Überlegung wie für  $\tau$  ist auch  $\sigma$  wieder eine Möbius-Transformation mit der zugeordneten Matrix  $S := \begin{pmatrix} -(w_1 - w_3) & (w_1 - w_3)w_2 \\ -(w_2 - w_3) & (w_2 - w_3)w_1 \end{pmatrix}$ . Mit

$$S^{-1} = \frac{1}{w_1 + w_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{w_1 - w_3} & -\frac{w_2}{w_2 - w_3} \\ \frac{1}{w_1 - w_3} & -\frac{1}{w_2 - w_3} \end{pmatrix}$$

ist  $\sigma^{-1}$  wieder eine Möbius-Transformation und die Verkettung  $\sigma^{-1} \circ \tau$  ist gegeben durch die Matrix

$$S^{-1} \cdot T = \frac{1}{w_1 + w_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{w_1 - w_3} & -\frac{w_2}{w_2 - w_3} \\ \frac{1}{w_1 - w_3} & -\frac{1}{w_2 - w_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(z_1 - z_3) & (z_1 - z_3)z_2 \\ -(z_2 - z_3) & (z_2 - z_3)z_1 \end{pmatrix} = \dots$$

Die zugehörige Möbius-Transformation  $f := \sigma^{-1} \circ \tau$  erfüllt dann (wie man mit tausend mal mehr nachrechnen einsehen kann) gerade die Bedingungen  $f(z_k) = w_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) und  $[z_1, z_2, z_3, z] = [w_1, w_2, w_3, z]$ .

**Lemma 3.1.** Sei  $f$  eine Möbius-Transformation gegeben durch  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{C}_\infty$ ) mit  $f \neq \text{id}$ . Dann hat  $f$  höchstens zwei Fixpunkte. 

*Beweis.* Die Fälle  $c = 0$  und  $a = 0$  sind klar. Betrachte die Fixpunktgleichung  $z = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Umstellen ergibt die Polynomgleichung zweiten Grades

$$z(cz + c) = cz^2 + cz = az + b \Leftrightarrow 0 = c \cdot z^2 + (c - a)z - b$$

die nach dem Fundamentalsatz der Algebra höchstens zwei verschiedene Lösungen besitzt. Damit kann die Möbius-Transformation  $f$  maximal zwei Fixpunkte besitzen.  $\square$

Sei nun  $\tilde{f}$  eine weitere Möbius-Transformation, die die Interpolationsbedingungen erfüllt. Dann ist  $f^{-1}(\tilde{f}(z_k)) = f^{-1}(w_k) = z_k$  für alle  $k = 1, 2, 3$ . Somit hat  $f^{-1} \circ \tilde{f}$  also drei Fixpunkte. Jedoch kann eine Möbius-Transformation nur zwei Fixpunkte besitzen, wenn sie nicht die Identität ist. Somit muss  $f^{-1} \circ \tilde{f} = \text{id}$  gelten, was äquivalent zu  $\tilde{f} = f$  ist. Somit ist das die Interpolationsbedingungen erfüllende  $f$  eindeutig bestimmt.

**Aufgabe 3.2.** Für  $z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  sei der Hauptwert  $\text{Arg}(z)$  des Argumentes von  $z$  festgelegt durch  $-\pi < \text{Arg}(z) < \pi$  (Das Argument  $\varphi$  von  $z$  ist modulo  $2\pi$  definiert durch  $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$ ). Wir definieren  $\text{Ln}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\text{Ln}(z) := \ln |z| + i \cdot \text{Arg}(z) \quad (\text{Hauptzweig des Logarithmus})$$

Beweisen Sie:

- (a)  $\text{Ln}$  ist die Umkehrfunktion von  $\exp: \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im}(z) < \pi\} \rightarrow \Omega$ .
- (b)  $\text{Ln}$  ist holomorph. (Hinweis: Aufgabe 2.3)

(zu a) Sei  $z \in \Omega$ . Dann existiert  $\varphi \in (-\pi, \pi)$ , sodass  $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$ , d.h.  $\varphi = \text{Arg}(z)$ . Es ist  $\text{Im}(\text{Ln}(z)) = \text{Arg}(z) = \varphi \in (-\pi, \pi)$ . Somit können wir  $\exp$  anwenden und erhalten

$$\exp(\text{Ln}(z)) = \exp(\ln |z|) \cdot \exp(i \cdot \varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi} = z$$

Umgekehrt sei  $z \in \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$ . Dann gilt mit  $z = a + bi$  und  $b \in (-\pi, \pi)$  auch  $\exp(a + bi) = \exp(a) \cdot \exp(bi) \in \Omega$ . Somit gilt

$$\begin{aligned} \text{Arg}(\exp(a + bi)) &= \text{Arg}(\exp(a) \cdot \exp(bi)) = b \\ \ln |\exp(a + bi)| &= \ln(\exp(a)) \cdot \ln |\exp(bi)| = a \end{aligned}$$

und schließlich

$$\text{Ln}(\exp(z)) = \ln |\exp(a + bi)| + i \cdot \text{Arg}(\exp(a + bi)) = a + bi = z$$

Somit ist  $\exp \circ \text{Ln} = \text{id} = \text{Ln} \circ \exp$  und  $\text{Ln}$  die Umkehrung von  $\exp$  als Abbildungen zwischen  $\Omega$  und  $\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$ .

(zu b) Wir wissen, dass  $\exp$  auf  $\mathbb{C}$  stetig und holomorph ist mit  $\exp'(z_0) = \exp(z_0) \neq 0$  für alle  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Nach Aufgabe 2.3 existieren dann offene Umgebungen  $U$  von  $z_0$  und  $V$  von  $\exp(z_0)$ , sodass  $\exp: U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus ist. Wir wissen außerdem, dass  $\exp$  auf  $\Omega' := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$  injektiv ist, d.h. wir können jede beliebige offene Umgebung  $U \subseteq \Omega'$  mit  $z_0 \in U$  wählen und erhalten mit  $V = \exp(U) \subseteq \Omega$  eine offene Umgebung von  $\exp(z_0)$ . Somit ist die Umkehrabbildung  $\text{Ln}: V \rightarrow U$  auf allen offenen  $V \subseteq \Omega$  holomorph, d.h. auch auf  $\Omega$  selbst.

**Aufgabe 3.3.** (a) Finden Sie  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , sodass  $\text{Ln}(z_1 \cdot z_2) \neq \text{Ln}(z_1) + \text{Ln}(z_2)$ .

(b) Sei  $z_1 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  mit  $\text{Re}(z_1) = 0$  und  $\text{Im}(z_1) > 0$ . Finden Sie alle  $z_2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , für die  $\text{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \text{Ln}(z_1) + \text{Ln}(z_2)$  gilt.

(zu a) Sei  $z_1 = 1$  und  $z_2 = 1 - 1$ . Dann sind offensichtlich  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . Es gilt

$$\begin{aligned}\text{Ln}(1) &= \ln|1| + 1 \cdot \text{Arg}(1) = 0 + 1 \cdot \frac{\pi}{2} \\ \text{Ln}(1 - 1) &= \ln|1 - 1| + 1 \cdot \text{Arg}(1 - 1) = \ln(\sqrt{2}) + 1 \cdot \frac{3}{4}\pi\end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned}\text{Ln}(1 \cdot (1 - 1)) &= \text{Ln}(-1 - 1) = \ln|i + 1| + 1 \cdot \text{Arg}(-1 - 1) = \ln(\sqrt{2}) - 1 \cdot \frac{3}{4}\pi \\ \text{Ln}(i) + \text{Ln}(i - 1) &= \ln(\sqrt{2}) + 1 \cdot \frac{3}{4}\pi + 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \ln(\sqrt{2}) + 1 \cdot \frac{5}{4}\pi\end{aligned}$$

Wegen  $\text{Ln}(1) + \text{Ln}(1 - 1) - \text{Ln}(1 \cdot (1 - 1)) = 1 \cdot \frac{1}{2}\pi \neq 0$  ist  $\text{Ln}(z_1 \cdot z_2) \neq \text{Ln}(z_1) + \text{Ln}(z_2)$ .

(zu b) Sei  $z_k = r_k \cdot e^{i\varphi_k}$  für  $k = 1, 2$  und wegen  $\text{Re}(z_1) = 0$  sowie  $\text{Im}(z_1) > 0$  gilt  $r_1 > 0$  und  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ . Notiere daher im Folgenden  $\varphi := \varphi_2$ . Es gilt

$$\text{Ln}(z_1 z_2) = \ln|r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}| + 1 \cdot \text{Arg}\left(r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}\right) = \ln|r_1 r_2| + 1 \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \mod 2\pi\right)$$

und

$$\begin{aligned}\text{Ln}(z_1) + \text{Ln}(z_2) &= \ln|r_1 e^{i\frac{\pi}{2}}| + 1 \cdot \text{Arg}\left(r_1 e^{i\frac{\pi}{2}}\right) + \ln|r_2 e^{i\varphi}| + 1 \cdot \text{Arg}\left(r_2 e^{i\varphi}\right) \\ &= \ln|r_1 r_2| + 1 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\end{aligned}$$

Setzen wir nun beide Ausdrücke gleich, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\ln|r_1 r_2| + 1 \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \mod 2\pi\right) &= \ln|r_1 r_2| + 1 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \\ \Leftrightarrow \varphi + \frac{\pi}{2} \mod 2\pi &= \frac{\pi}{2} + \varphi\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird für alle  $\varphi + \frac{\pi}{2} \in (-\pi, \pi)$  erfüllt. Da aber auch  $\varphi \in (-\pi, \pi)$  als Hauptwert gilt, schränkt sich diese beiden Bedingungen gegenseitig ein zu  $\varphi \in (-\pi, \frac{\pi}{2})$ . Somit gilt die Gleichheit der zu zeigenden Aussage für alle  $z_2 = |z_2| \cdot e^{i\varphi}$  mit  $\varphi \in (-\pi, \frac{\pi}{2})$ .

**Aufgabe 4.1.** Berechnen Sie das Integral  $\int_{\gamma} |z| \cdot \bar{z} dz$  folgende Wege  $\gamma$  mit Anfangspunkt  $-1$  und Endpunkt  $+1$ .

- (a) geradlinige Verbindung
- (b) obere Halbkreislinie
- (c) untere Halbkreislinie

(zu a) Sei  $f(z) := |z| \cdot \bar{z}$ . Parametrisiere die geradlinige Verbindungsstrecke durch den Weg  $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(t) = t$  für alle  $t \in [-1, 1]$ . Dann ist  $\gamma'(t) = 1$  für  $t \in [-1, 1]$  und  $f(\gamma(t)) = |t| \cdot \bar{t} = \operatorname{sgn}(t) \cdot t^2$ , da  $t \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ . Somit gilt also

$$\int_{\gamma} |z| \bar{z} dz = \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(t) \cdot t^2 dt = \int_{-1}^0 -t^2 dt + \int_0^1 t^2 dt = \left[ -\frac{1}{3} t^3 \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

(zu b) Parametrisiere den Weg durch  $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(t) = -e^{-it}$ . Dann ist  $\gamma'(t) = ie^{-it}$  und  $f(\gamma(t)) = |\gamma(t)| \cdot \overline{\gamma(t)} = |-e^{-it}| \cdot (-e^{it}) = -e^{it}$ . Somit gilt

$$\int_{\gamma} |z| \bar{z} dz = \int_0^{\pi} -e^{it} \cdot ie^{-it} dt = -i \cdot \int_0^{\pi} 1 dt = -i\pi$$

(zu c) Parametrisiere den Weg durch  $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(t) = e^{it}$ . Dann ist  $\gamma'(t) = ie^{it}$  und  $f(\gamma(t)) = |\gamma(t)| \cdot \overline{\gamma(t)} = |e^{it}| \cdot (-e^{-it}) = -e^{-it}$ . Somit gilt

$$\int_{\gamma} |z| \bar{z} dz = \int_0^{\pi} -e^{-it} \cdot ie^{it} dt = i \cdot \int_0^{\pi} 1 dt = i\pi$$

**Aufgabe 4.2.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $f'$  stetig und  $\gamma$  ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in  $\Omega$ . Zeigen Sie:  $f \circ \gamma$  ist ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in  $\mathbb{C}$  und für  $g: \operatorname{Im}(f \circ \gamma) \rightarrow \mathbb{C}$  stetig gilt

$$\int_{f \circ \gamma} g(w) dw = \int_{\gamma} g(f(z)) \cdot f'(z) dz$$

Sei  $\gamma$  ein stückweise stetig differenzierbarer Weg auf dem Intervall  $[a, b]$ , d.h. es existiert eine Unterteilung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , sodass  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  für alle  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  stetig differenzierbar ist. Da  $f$  als holomorphe Funktion stetig ist und  $\gamma$  ein Weg, ist insbesondere auch  $f \circ \gamma$  stetig, also ein Weg. Wir betrachten ein fixiertes Intervall  $[t_i, t_{i+1}]$ . Dort ist  $f \circ \gamma$  nach Kettenregel differenzierbar mit  $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $f'$  und  $\gamma'$  auf dem oben gewählten Intervall, ist auch  $(f \circ \gamma)'$  stetig. Diese Betrachtung kann für jedes  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  ausgeführt werden mit dem Ergebnis, dass  $f \circ \gamma$  ein stückweise stetig differenzierbarer Weg ist. Mit der oben ausgeführten Kettenregel und der Definition für Integrale



über stückweise stetig differenzierbare Wege aus der Vorlesung gilt

$$\begin{aligned}
 \int_{f \circ \gamma} g(w) \, dw &= \int_a^b g(f(\gamma(t))) \cdot (f \circ \gamma)'(t) \, dt \\
 &= \int_a^b (g \circ (f \circ \gamma))(t) \cdot (f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)) \, dt \\
 &= \int_a^b \left( ((g \circ f) \circ \gamma)(t) \cdot f'(\gamma(t)) \right) \cdot \gamma'(t) \, dt \\
 &= \int_{\gamma} (g \circ f)(z) \cdot f'(z) \, dz
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 4.3.** Für  $\sigma \in \mathbb{C}$  sei  $f_{\sigma}: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$f_{\sigma}(z) := \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z))$$

mit dem Hauptzweig  $\operatorname{Ln}$  des Logarithmus (siehe Aufgabe 3.2). Zeigen Sie:

- (a) Für  $n \in \mathbb{Z}$  gilt  $f_n(z) = z^n$  ( $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ )
- (b) Für alle  $\sigma, \tau \in \mathbb{C}$  gilt  $f_{\sigma} \cdot f_{\tau} = f_{\sigma+\tau}$ .
- (c) Für  $\sigma \in [-1, 1]$  und  $\tau \in \mathbb{C}$  gilt  $f_{\tau} \circ f_{\sigma} = f_{\tau\sigma}$ . Gilt dies auch für beliebige  $\sigma \in \mathbb{C}$ .
- (d) Für  $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$  hat die binomische Reihe  $b_{\sigma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\sigma}{k} z^k$  den Konvergenzradius 1.
- (e) Für  $|z| < 1$  gilt  $f_{\sigma}(1+z) = b_{\sigma}(z)$ .

Hinweis: Taylor-Entwicklung von  $z \mapsto f_{\sigma}(1+z)$  um  $z = 0$ .

(zu a) Sei  $\varphi = \operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi)$ . Dann gilt  $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$ .

$$f_n(z) = e^{n \cdot (\ln|z| + i \operatorname{Arg}(z))} = \left( e^{\ln|z|} \right)^n \cdot (e^{i\varphi})^n = (|z| \cdot e^{i\varphi})^n = z^n$$

(zu b)  $(f_{\sigma} \cdot f_{\tau})(z) = \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \cdot \exp(\tau \operatorname{Ln}(z)) = \exp((\sigma + \tau) \operatorname{Ln}(z)) = f_{\sigma+\tau}(z)$

(zu c) Sei  $\sigma \in [-1, 1]$  und  $\tau \in \mathbb{C}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 (f_{\tau} \circ f_{\sigma})(z) &= e^{\tau \operatorname{Ln}(e^{\sigma \operatorname{Ln}(z)})} = e^{\tau \operatorname{Ln}(e^{\sigma \ln|z| + \sigma i \operatorname{Arg}(z)})} \\
 &= e^{\tau \ln|e^{\sigma \ln|z| + \sigma i \operatorname{Arg}(z)}| + \tau i \operatorname{Arg}(e^{\sigma \ln|z| + \sigma i \operatorname{Arg}(z)})} \\
 &= e^{\tau \ln|e^{\sigma \ln|z|}| + \tau i \operatorname{Arg}(e^{\sigma i \operatorname{Arg}(z)})} && (\operatorname{Im}(\sigma) = 0) \\
 &= e^{\sigma \tau \ln|z| + \sigma \tau i \operatorname{Arg}(z)} && (\operatorname{Re}(\sigma) \leq 1) \\
 &= e^{\sigma \tau (\ln|z| + i \operatorname{Arg}(z))} \\
 &= e^{\sigma \tau \operatorname{Ln}(z)} = f_{\sigma\tau}(z)
 \end{aligned}$$

Da wir sowohl  $\operatorname{Im}(\sigma) = 0$  als auch  $\operatorname{Re}(\sigma) \leq 1$  ausgenutzt haben, funktioniert der Beweis nicht für alle  $\sigma \in \mathbb{C}$ .

(zu d) Sei  $a_n := \binom{\sigma}{n} = \prod_{j=1}^n \frac{\sigma-j+1}{j}$ . Dann gilt nach Quotientenkriterium für den Konvergenzradius  $R$  von  $b_\sigma(z)$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\prod_{j=1}^n \frac{\sigma-j+1}{j}}{\prod_{j=1}^{n+1} \frac{\sigma-j+1}{j}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\frac{\sigma-(n+1)+1}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{\sigma-n} \right| = 1$$

(zu e) Wir betrachten die Taylor-Entwicklung von  $f_\sigma(1+z)$  um  $z=0$ . Es gilt für die Ableitungen

$$f_\sigma^{(n)}(z) = \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \cdot \left( \frac{1}{z^n} \prod_{j=1}^n (\sigma-j+1) \right)$$

Vollständige Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ :

**(IA)**  $n=0$  : Es ist  $\exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \cdot \left( \frac{1}{z^0} \prod_{j=1}^0 (\sigma-j+1) \right) = \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) = f_\sigma^{(0)}(z)$ .

**(IS)** Definiere  $\varphi_\sigma(n) := \prod_{j=1}^n (\sigma-j+1)$ .

$$\begin{aligned} f_\sigma^{(n+1)}(z) &= \frac{d}{dz} \left( \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \cdot \left( \frac{1}{z^n} \varphi_\sigma(n) \right) \right) \\ &= \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \cdot \frac{\sigma}{z} \left( \frac{1}{z^n} \varphi_\sigma(n) \right) - \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \left( \frac{n}{z^{n+1}} \varphi_\sigma(n) \right) \\ &= \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \left( \frac{\sigma}{z^{n+1}} \varphi_\sigma(n) \right) - \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \left( \frac{n}{z^{n+1}} \varphi_\sigma(n) \right) \\ &= \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \left( \frac{\sigma-n}{z^{n+1}} \varphi_\sigma(n) \right) \\ &= \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \left( \frac{1}{z^{n+1}} \varphi_\sigma(n+1) \right) \\ &= \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \left( \frac{1}{z^{n+1}} \prod_{j=1}^{n+1} (\sigma-j+1) \right) \end{aligned}$$

Somit ist  $f_\sigma^{(n)}(1) = \varphi_\sigma(n) = \prod_{j=1}^n (\sigma-j+1)$ . Setzen wir dies in die Taylorreihe ein, so erhalten wir

$$f_\sigma(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_\sigma^{(n)}(1)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{j=1}^n \frac{\sigma-j+1}{j} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\sigma}{n} z^n = b_\sigma(z)$$

für alle  $|z| < 1$ .