TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik Institut für Geometrie, Professur für Nichtlineare Analysis

PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Übungen

Prof. Dr. Friedemann Schuricht

Sommersemester 2020

Autor : Eric Kunze
E-Mail : eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

Hausaufgaben

Eric Kunze

Partielle Differentialgleichungen – Übungsblatt 1

Matr.-Nr. 4679202

Aufgabe 1. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $u \in C^2(U, \mathbb{R}^n)$, $A \in C^1(U, \mathbb{R}^{m \times n})$, $\varphi \in C^1(U)$ und $c \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{div}((Du)^\top) = (D(\operatorname{div} u))^\top$,

(b) $\operatorname{div}(cA) = c \operatorname{div} A$,

(c) $\operatorname{div}(\varphi A) = A \cdot D\varphi + \varphi \operatorname{div} A$.

Hinweis: Wir betrachten Vektoren im $\mathbb{R}^n$ als Zeilenvektoren, $\cdot$ ist das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$, $Du = (\partial_j u_i)_{i,j=1,\dots,n}$, div und $\cdot$ wirken auf eine Matrix *zeilenweise*.

Es seien nun $u, v \colon U \to \mathbb{R}$ hinreichend glatt. Beweisen Sie die **Formel von Leibniz**:

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v$$

wobei für Multiindizes α, β gilt:

$$D^\alpha u = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u, \qquad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}, \qquad \alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$$

und $\beta \leq \alpha$ genau dann, wenn $\beta_i \leq \alpha_i$ für $i = 1, \dots, n$.

(zu a) Sei $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in C^2$. Wir notieren Vektoren verkürzt $(u_i)_i = (u_i)_{i=1,\dots,n} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Es ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left((Du)^\top\right) &= \operatorname{div} \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 & \cdots & \partial_n u_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 u_n & \partial_2 u_n & \cdots & \partial_n u_n \end{pmatrix}^\top = \operatorname{div}\left(\partial_j u_i\right)_{i,j}^\top = \operatorname{div}\left(\partial_i u_j\right)_{i,j} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_{11} u_1 & \partial_{12} u_2 & \cdots & \partial_{1n} u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1} u_1 & \partial_{n2} u_2 & \cdots & \partial_{nn} u_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ij} u_j \right)_i
\end{aligned}$$

und außerdem

$$(D(\operatorname{div} u))^\top = \left(D \left(\sum_{i=1}^n \partial_i u_i \right) \right)^\top = \begin{pmatrix} \partial_{11} u_1 + \partial_{21} u_2 + \cdots + \partial_{n1} u_n \\ \vdots \\ \partial_{1n} u_1 + \partial_{2n} u_2 + \cdots + \partial_{nn} u_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ji} u_j \right)_i$$

Wegen $u \in C^2$ sind alle partiellen Ableitungen stetig und können somit vertauscht werden. Daraus folgt die (zeilenweise) Gleichheit mit

$$\operatorname{div}\left((Du)^\top\right) = \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ij} u_j\right)_i = \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ji} u_j\right)_i = (D(\operatorname{div} u))^\top$$

(zu b) Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(cA) &= \operatorname{div}\left(\sum_{j=1}^n c_j a_{ij}\right)_i = \sum_{i=1}^n \partial_i \sum_{j=1}^n c_j a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_i c_j a_{ij} \\ c \cdot \operatorname{div}(A) &= c \cdot \left(\sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij}\right)_i = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_j c_j a_{ij} \end{aligned}$$

und somit $\operatorname{div}(cA) = c \cdot \operatorname{div}(A)$.

(zu c) Man hat

$$\begin{aligned} A \cdot D\varphi &= A \cdot (\partial_i \varphi)_i = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\ \partial_j \varphi\right)_i \\ \varphi \operatorname{div}(A) &= \varphi \cdot \left(\sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij}\right)_i = \left(\sum_{j=1}^n \varphi\ \partial_j a_{ij}\right)_i \\ \operatorname{div}(\varphi A) &= \operatorname{div}\left((\varphi a_{ij})_{i,j}\right) = \left(\sum_{j=1}^n \partial_j (\varphi a_{ij})\right)_i \end{aligned}$$

Für fixiertes i (also zeilenweise) erhält man mit der Produktregel für (partielle) Ableitungen

$$\sum_{j=1}^n \partial_j(\varphi a_{ij}) = \sum_{j=1}^n ((\partial_j \varphi) a_{ij} + \varphi(\partial_j a_{ij})) = \sum_{j=1}^n (\partial_j \varphi) a_{ij} + \sum_{j=1}^n \varphi(\partial_j a_{ij})$$

und somit $\operatorname{div}(\varphi A) = A \cdot (D\varphi) + \varphi \cdot \operatorname{div}(A)$.

Leibnitz-Formel: Vollständige Induktion über $|\alpha| = k$.

(IA) $k = 0:$ Für $|\alpha| = 0$, also $\alpha = 0$ ist

$$D^0(uv) = uv = \binom{0}{0} D^0 u\ D^0 v$$

(IV) Für $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i = k$ gilt $D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v$.

(IS) $k \to k+1:$ Seien $|\alpha| = |(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)| = k+1$ und $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n - 1)$ sowie $\beta' = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n + 1)$. Dann ist $|\alpha'| = k$ und $|\beta'| = |\beta| + 1$. Es gilt

$$\begin{aligned}
D^\alpha(uv) &= \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}(uv) = \partial_{x_n}\left(\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n - 1}(uv)\right) \\
&= \partial_{x_n}\left(D^{\alpha'}(uv)\right) \\
&\overset{\text{IV}}{=} \partial_{x_n}\left(\sum_{\beta \le \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} D^\beta u \; D^{\alpha' - \beta} v\right) \\
&= \sum_{\beta \le \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta}\left(\partial_{x_n}(D^\beta u) \; D^{\alpha'-\beta} v + D^\beta u \; \partial_{x_n}(D^{\alpha'-\beta} v)\right) \\
&= \sum_{\beta \le \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta}\left(D^{\beta'} u \; D^{\alpha'-\beta} v + D^\beta u \; D^{\alpha-\beta} v\right) \\
&= \ldots \\
&= \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u \; D^{\alpha-\beta} v
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Ermitteln Sie jeweils eine nichttriviale Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

(a) $v_y(x,y) = xy \cdot v(x,y)$

(b) $u_x(x,y) + y \cdot u(x,y) = 0$

(zu a) Wir gehen analog zur Vorlesung vor und betrachten die Gleichung für fixiertes $x = \text{const}$. Dann erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$u'(y) = xy \cdot u(y)$$

und lösen entweder durch geübtes Hinschauen oder mit Trennung der Variablen: sei $f(u(y)) = u(y)$ und $g(y) = x \cdot y$. Der Ansatz

$$\int^{u(y)} \frac{1}{f(\xi)} \mathrm{d}\xi = \int^y g(\xi) \mathrm{d}\xi \quad \Rightarrow \quad \ln(|u(y)|) = \frac{1}{2} x y^2 + C$$

Beachte, dass die unteren Integralgrenzen dabei in der Konstante C zusammengefasst sind, da wir keinen Anfangswert vorgegeben haben. Die Gleichung „umgestellt“ ergibt eine Lösung

$$u(y) = \exp\left(\frac{1}{2} x y^2\right) \qquad \text{bzw.} \qquad v(x,y) = \exp\left(\frac{1}{2} x y^2\right)$$

Eine kurze Probe ergibt

$$v_y(x,y) = xy \cdot \exp\left(\frac{1}{2} x y^2\right) = xy \cdot v(x,y)$$

(zu b) Wir fixieren erneut eine Variable, diesmal $y = \text{const}$. Diesmal sehen wir direkt eine Lösung, nämlich

$$u(x,y) = \exp(-xy)$$

Eine kurze Probe ergibt $u_x(x,y) + y \cdot u(x,y) = -y \cdot \exp(-xy) + y \cdot \exp(-xy) = 0$.

Zusatzaufgabe 3. Klassifizieren Sie die nachstehenden partiellen Differentialgleichungen nach folgenden Gesichtspunkten:

(a) Ist die Differentialgleichung linear, semilinear, quasilinear oder voll nichtlinear?

(b) Welche Ordnung hat die Differentialgleichung?

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0 \\
-\Delta u &= f(u) \\
|Du| &= 1 \\
u_t + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} &= 0 \\
\det(D^2 u) &= f \\
\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) &= 0 \\
u_t - \Delta u &= f(u) \\
u_{tt} - \Delta u &= 0 \\
u_t + \operatorname{div} F(u) &= 0 \\
u_t + u u_x + u_{xxx} &= 0 \\
a u_t + \Delta u &= 0 \\
u_t + H(Du, x) &= 0 \\
u_t - \Delta(u^\gamma) &= 0 \\
-\Delta u &= \lambda u \\
\operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) &= 0 \\
u_t + u u_x &= 0
\end{aligned}$$

Hausaufgaben

Eric Kunze
Matr.-Nr. 4679202

Partielle Differentialgleichungen – Übungsblatt 2

Thema: Charakteristikenmethode

Ich bitte um Entschuldigung, dass meine Lösung so lang geworden ist. Aber ich habe mich bemüht mein Vorgehen detailliert zu beschreiben. ☺

Aufgabe 4. Finden Sie Lösungen $u \in C^1$ der folgenden linearen Randwertprobleme:

(a) $-3u_x + 2u_y = 0$ mit $u(x,y) = y^2 + 1$ auf $\Gamma = \{(1,s) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in \mathbb{R}\}$

(b) $u_x + u_y - u_z = xe^{y-z}$ mit $u(0,y,z) = g(y,z)$ für alle $y, z \in \mathbb{R}$, wobei $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ beliebig ist

(c) $2u_x - u_y = 2u - xe^x$ mit $u(0,y) = y^2$ für alle $y \in \mathbb{R}$

Erläutern Sie dabei Ihr Vorgehen und überprüfen Sie abschließend, ob die von Ihnen gefundene Lösung wirklich das Problem löst.

(zu a) Wir betrachten die Charakteristiken

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sei $\alpha(t) := u(x(t), y(t))$, d.h. α beschreibt u entlang der Charakteristiken. Es gilt

$$\alpha'(t) = u_x \cdot \dot{x}(t) + u_y \cdot \dot{y}(t) = -3u_x + 2u_y = 0$$

und somit ist u konstant entlang der Charakteristiken. Parametrisiere die Kurve Γ durch $x_0(s) = 1$ und $y_0(s) = s$. Dann ergibt sich die Randwertbedingung zu $g(s) = s^2 + 1$. Wir prüfen nun die nichtcharakteristische Bedingung, d.h. ob die Kurve Γ auch alle Charakteristiken $\Xi_{(x_0,y_0)}$ durchläuft. Dazu prüfen wir den Tangentenvektor von Γ, nämlich $\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, und den Tangentenvektor der Charakteristik $\Xi_{(x_0,y_0)}$, nämlich $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, auf lineare Unabhängigkeit:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

Somit schneidet Γ alle Charakteristiken $\Xi_{(x_0,y_0)}$. Somit können wir die Schar der Charakteristiken beschreiben durch

$$\begin{aligned} x(s,t) &= x_0(s) - 3t = 1 - 3t &&\Rightarrow \quad t(x,y) = \frac{1-x}{3} \\ y(s,t) &= y_0(s) + 2t = s + 2t &&\Rightarrow \quad s(x,y) = y - 2t = y - \frac{2}{3}(1-x) = y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Nach Konstruktion in der Vorlesung erhalten wir damit eine Lösung

$$u(x,y) = g(s(x,y)) = \left(y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right)^2 + 1$$

Die Probe liefert mit den partiellen Ableitungen

$$\left.\begin{array}{rcll} u_x(x,y) & = & \frac{4}{3} & \left(y+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)^2 \\ u_y(x,y) & = & 2 & \left(y+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow -3\cdot\frac{4}{3}\left(y+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)^2+4\left(y+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)^2=0$$

und außerdem $u(1,y)=y^2+1$ für den Anfangswert. Somit ist u also Lösung der Differentialgleichung.

(zu b) Wir betrachten die partielle Differentialgleichung $u_x+u_y-u_z=x\cdot e^{y-z}$ mit der Randbedingung $u(0,y,z)=g(y,z)$ für beliebiges $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$. Definieren wir den „Rand“ als die Fläche $\Gamma=\{(0,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y,z\in\mathbb{R}\}$. Diese lässt sich parametrisieren mit

$$\gamma(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix} x_0(\sigma,\tau)\\ y_0(\sigma,\tau)\\ z_0(\sigma,\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \sigma\\ \tau\end{pmatrix}$$

Für die Tangentialebene erhalten wir die Spannvektoren

$$\gamma_\sigma(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\qquad \gamma_\tau(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \dot\gamma(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Betrachten wir die Charakteristiken $\Xi_{\sigma,\tau}=\operatorname{Im}(\xi)$ mit

$$\xi(t,\sigma,\tau)=\begin{pmatrix}x(t,\sigma,\tau)\\ y(t,\sigma,\tau)\\ z(t,\sigma,\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0(\sigma,\tau)+t\\ y_0(\sigma,\tau)+t\\ z_0(\sigma,\tau)-t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ \sigma+t\\ \tau-t\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Prüfen wir die nichtcharakteristische Bedingung um sicherzustellen, dass auch jede Charakteristik $\Xi_{\sigma,\tau}$ von Γ durchlaufen wird:

$$\det(\dot\gamma\mid\dot\xi)=\det\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=1\neq 0$$

Bezeichne mit $f(u,x,y,z)=x\cdot e^{y-z}$ die rechte Seite der Differentialgleichung. Schreibe $\xi(t)=\xi(t,\sigma,\tau)$ für fixiertes σ und τ (x,y,z analog). Sei $\alpha(t):=u(\xi(t))$ die Funktion u entlang einer Charakteristik $\Xi_{\sigma,\tau}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\dot\alpha(t)&=Du\cdot\dot\xi=f(u(\xi(t)),\xi(t))=f(\alpha(t),t,\sigma+t,\tau-t)=t\cdot e^{(\sigma+t)-(\tau-t)}\\ &=t\cdot e^{\sigma-\tau+2t}\end{aligned} \tag{2.2}$$

und dem Anfangswert $\alpha(0)=\alpha(0,\sigma,\tau)=g(\sigma,\tau)$. Lösen wir also dieses Anfangswertproblem und integrieren dazu die rechte Seite in Gleichung (2.2) partiell:

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= \int t \cdot e^{\sigma-\tau+2t} \mathrm{d}t = \left(\frac{1}{2}e^{\sigma-\tau+2t}\right) t - \int \frac{1}{2}e^{\sigma-\tau+2t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}t \cdot e^{\sigma-\tau+2t} - \frac{1}{4}e^{\sigma-\tau+2t} + C(\sigma,\tau) \\
&= \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right) e^{\sigma-\tau+2t} + C(\sigma,\tau)
\end{aligned}$$

Mit dem Anfangswert $\alpha(0) = g(\sigma,\tau)$ ergibt sich die Konstante

$$\alpha(0) = \frac{1}{4}e^{\sigma-\tau} + C(\sigma,\tau) \stackrel{!}{=} g(\sigma,\tau) \quad \Rightarrow \quad C(\sigma,\tau) = \frac{1}{4}e^{\sigma-\tau} + g(\sigma,\tau)$$

und somit die konkrete Lösung

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right) e^{\sigma-\tau+2t} + \frac{1}{4}e^{\sigma-\tau} + g(\sigma,\tau)$$

Aus Gleichung (2.1) erhalten wir die Inverse von ξ als

$$\xi^{-1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} t(x,y,z) \\ \sigma(x,y,z) \\ \tau(x,y,u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-x \\ z+x \end{pmatrix}$$

Nach Konstruktion in der Vorlesung erhalten wir die Lösung

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= \alpha(\xi^{-1}(x,y,z)) \\
&= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{(y-x)-(z+x)+2x} + \frac{1}{4}e^{(y-x)-(z+x)} + g(y-x, z+x) \\
&= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + g(y-x, z+x)
\end{aligned}$$

Nun prüfen wir noch, dass die gefundene Funktion auch wirklich eine Lösung der Differentialgleichung ist. Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}
u_x(x,y,z) &= \frac{1}{2}e^{y-z} - \frac{1}{2}e^{y-z-2x} - \partial_1 g(y-x, z+x) + \partial_2 g(y-x, z+x) \\
u_y(x,y,z) &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + \partial_1 g(y-x, z+x) \\
u_z(x,y,z) &= -\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{y-z} - \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + \partial_2 g(y-x, z+x)
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}e^{y-z} - \frac{1}{2}e^{y-z-2x} - \partial_1 g(y-x, z+x) + \partial_2 g(y-x, z+x) \\
+ \; &\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + \partial_1 g(y-x, z+x) \\
+ \; &\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} - \partial_2 g(y-x, z+x) \\
= \; &e^{y-z} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) - e^{y-z-2x}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) \\
= \; &x \cdot e^{y-z}
\end{aligned}$$

Außerdem ist die Randwertbedingung erfüllt, denn

$$u(0, y, z) = -\frac{1}{4}e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z} + g(y, z) = g(y, z)$$

und somit u tatsächlich Lösung der partiellen Differentialgleichung.

(zu c) Gegeben sei die partielle Differentialgleichung $2u_x - u_y = 2u + x \cdot e^x$ und die Randwertbedingung $u(0, y) = y^2$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Bezeichnen wir mit $f(u, x, y) = 2u - xe^x$ die rechte Seite. Die Randwerte werden auf der Kurve $\Gamma = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$ angenommen. Diese können wir parametrisieren mit

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} x_0(s) \\ y_0(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} \dot{x}_0(s) \\ \dot{y}_0(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit wird die Randwertbedingung zu $g(s) = s^2$. Betrachten wir die Charakteristiken Ξ_s mit

$$\xi(t, s) = \begin{pmatrix} x(t, s) \\ y(t, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(s) + 2t \\ y_0(s) - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ s + t \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Die nichtcharakteristische Bedingung ist hier erfüllt, denn

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

Betrachte nun die Funktion u entlang der Charakteristiken Ξ_s für fixiertes s beschrieben durch $\alpha(t) = u(\xi(t))$. Differenzieren ergibt

$$\dot{\alpha}(t) = u_x \cdot \dot{x} + u_y \cdot \dot{y} = f(u(\xi(t)), \xi(t)) = f(\alpha(t), 2t, s+t) = 2\alpha - 2t \cdot e^{2t} \tag{2.4}$$

bei $\alpha(0, s) = g(s) = s^2$. Dieses Anfangswertproblem lösen wir mit Variation der Konstanten. Das zugehörige homogene Problem besitzt offensichtlich die Lösung $\alpha(t) = c(t) \cdot e^{2t}$. Differenzieren wir diese Gleichung erhalten wir $\dot{\alpha}(t) = \dot{c}(t) \cdot e^{2t} + 2c(t) \cdot e^{2t}$. Setzen wir dies nun in Gleichung (2.4) ein, dann erhalten wir für ein $\hat{c} \in \mathbb{R}$

$$\dot{c}(t) \cdot e^{2t} + 2c(t) \cdot e^{2t} = 2c(t) \cdot e^{2t} - 2t \cdot e^{2t} \quad \Rightarrow \quad \dot{c}(t) = -2t \quad \Rightarrow \quad c(t) = \hat{c} - t^2$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung $\alpha(t) = e^{2t}(\hat{c} - t^2)$. Durch den Anfangswert gilt $\alpha(0) = \hat{c} = s^2$ und somit ist $\alpha(t) = e^{2t}(s^2 - t^2)$ konkrete Lösung des Anfangswertproblems, was sich auch leicht überprüfen lässt:

$$\dot{\alpha}(t) = 2\,\underbrace{e^{2t}(s^2 - t^2)}_{=\alpha(t)} - 2t \cdot e^{2t} = 2\alpha(t) - 2t \cdot e^{2t} \quad \text{und} \quad \alpha(0) = s^2$$

Aus Gleichung (2.3) erhalten wir

$$\xi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} t(x, y) \\ s(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x + y \end{pmatrix}$$

Damit folgt nach Konstruktion in der Vorlesung eine Lösung

$$\begin{aligned} u(x, y) = \alpha(s(x, y)) &= e^x \left(\left(\frac{1}{2}x + y \right)^2 - \frac{1}{4}x^2 \right) \\ &= e^x \left(\frac{1}{4}x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{4}x^2 \right) \\ &= e^x \left(y^2 + xy \right) \end{aligned}$$

Dann gilt für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \left(y^2 + xy \right) + y \cdot e^x \\ u_y &= e^x \,(2y + x) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} 2u_x - u_y &= 2e^x(y^2 + xy) + 2y \cdot e^x - e^x(2y + x) \\ &= 2u + e^x(2y - 2y - x) \\ &= 2u - x \cdot e^x \end{aligned}$$

und $u(0, y) = e^0(y^2 + 0 \cdot y) = y^2$. Damit ist also u tatsächlich Lösung der partiellen Differentialgleichung.