TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik Institut für Analysis, Professur für Dynamik und Steuerung

FUNKTIONENTHEORIE

Übungen

Prof. Dr. Stefan Siegmund

Sommersemester 2020

Autor : Eric Kunze
E-Mail : eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

Hausaufgaben

Eric Kunze

Matr.-Nr. 4679202

Funktionentheorie – Übungsblatt 1

Thema: Komplexe Zahlen & Differenzierbarkeit

Aufgabe 1.1. Wo liegen in der Gaußschen Zahlenebene diejenigen Punkte z, für die gilt

(a) $0 < \operatorname{Re}(\imath z) < 2\pi$

(b) $|z - z_1| = |z - z_2|$ ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gegeben)

(c) $|z| + \operatorname{Re}(z) < 1$

(d) $z^5 = 1$

(e) $z = 3 - \imath + 5e^{\imath t}$ $(0 \leq t \leq \pi)$

(f) $z = te^{\imath t}$ $(t \geq 0)$

(zu a) Mit $z = a + b\imath$ ist $\imath \cdot z = -b + a\imath$, d.h. $\operatorname{Re}(\imath \cdot z) = -\operatorname{Im}(z)$.

(zu b) Der Term $|z - z_1|$ beschreibt den Abstand zwischen z und z_1, d.h. $|z - z_1| = |z - z_2|$ beschreibt alle Punkte, die von z_1 und z_2 den gleichen Abstand haben. Dies sind alle Punkte, die auf der Geraden mit Normale $n = \overline{z_1 z_2}$ liegen, d.h. z erfülle die Bedingung $\left\langle n\,,\, \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 - z \right\rangle = 0$, wobei z, z_1, z_2 als Punkte im $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt zu verstehen sind.

(zu c) Sei $z = a + b\imath$, dann lässt sich die Gleichung schreiben als

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2 + b^2} + a < 1 \;&\Leftrightarrow\; \sqrt{a^2 + b^2} < 1 - a \\
&\Leftrightarrow\; a^2 + b^2 < 1 - 2a + a^2 \\
&\Leftrightarrow\; y^2 < 1 - 2x \\
&\Leftrightarrow\; |y| < \sqrt{1 - 2x} \\
&\Leftrightarrow\; -\sqrt{1 - 2x} < y < \sqrt{1 - 2x}
\end{aligned}$$

Somit liegen alle gültigen z in dem von einer nach links geöffneten Parabel mit Scheitelpunkt in $(1/2, 0)$ eingeschlossenen Bereich.

(zu d) Die Einheitswurzeln liegen stets auf dem Einheitskreis. Insbesondere bilden die fünften Einheitswurzeln ein Fünfeck, wobei ein Eckpunkt auf der Realachse liegt (da stets $1^5 = 1$). Außerdem lassen sich alle Lösungen dieser Gleichung explizit angeben mit

$$z_k = \exp\left(\frac{2\pi\imath \cdot k}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi \cdot k}{5}\right) + \imath \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot k}{5}\right) \qquad (k = 0, 1 \ldots, 4)$$

(zu e) Wir schreiben $z = 3 - i + 5e^{\imath t} = 3 + 5\cos(t) + \imath \cdot (5\sin(t) - 1)$. Damit erhalten wir eine Parameterdarstellung eines Kreises mit Radius 5 und Zentrum $(3, -1)$. Da $t \in [0, \pi]$ liegen alle z nur auf dem oberen Halbkreis.

(zu f) Der Ausdruck $r \cdot e^{it}$ beschreibt einen Kreis mit Radius r um den Ursprung. Da t den Winkel zur Realachse beschreibt, wird der Radius von $t \cdot e^{it}$ mit wachsendem Winkel größer, d.h. es ergibt sich eine (unendliche) Spirale.

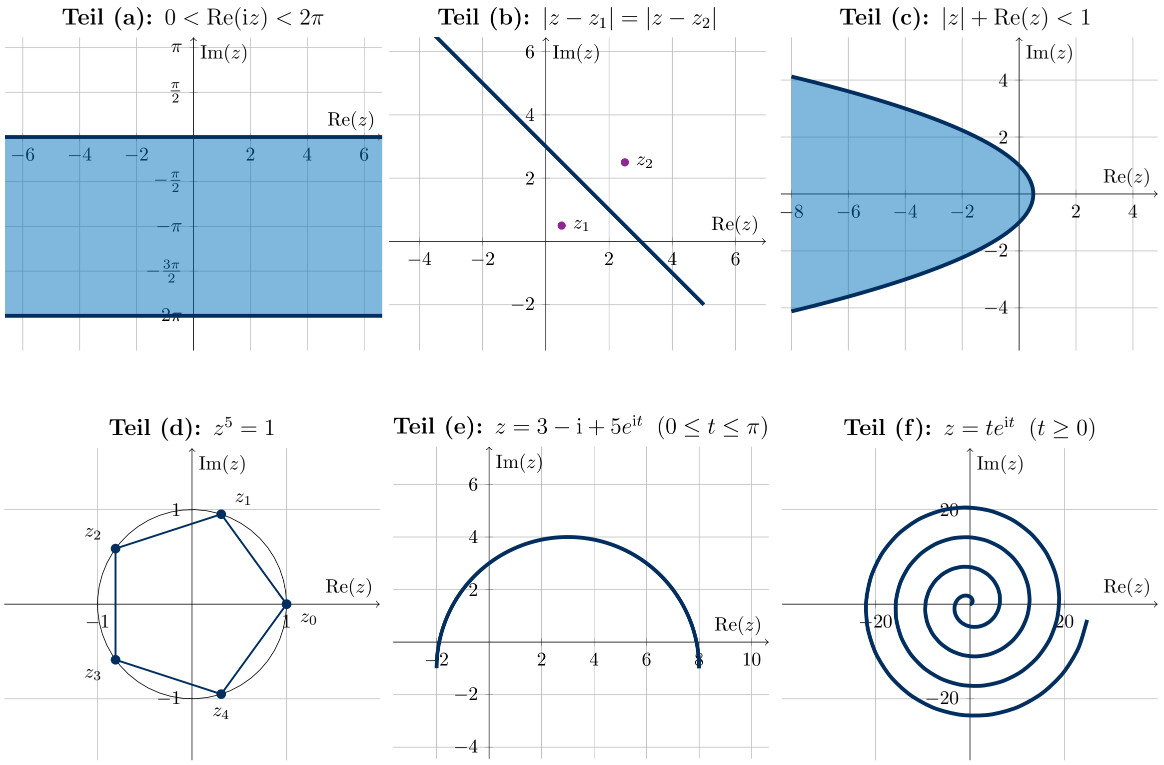

Abbildung 1.1: Darstellungen zu Aufgabe 1.1

Aufgabe 1.2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie: f ist genau dann in z_0 differenzierbar, wenn es $a \in \mathbb{C}$ und $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $\lim_{z\to z_0} \varphi(z) = 0$ gibt, sodass

$$f(z) = f(z_0) + a(z - z_0) + |z - z_0|\,\varphi(z) \qquad (z \in \Omega)$$

gilt. Es ist dann $f'(z_0) = a$.

(b) Sei $\Omega' \subseteq \mathbb{C}$ offen, $g\colon \Omega' \to \mathbb{C}$, $f(\Omega) \subseteq \Omega'$ und seien f in z_0 und g in $f(z_0)$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass $g \circ f$ in z_0 differenzierbar ist und dass

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

gilt (Kettenregel).

(zu a) **(⇒)** f sei komplex differenzierbar in z_0, d.h. $f'(z_0)$ existiert. Definieren wir $a := f'(z_0)$ und

$$\varphi(z) := \frac{z-z_0}{|z-z_0|} \cdot \widetilde{\varphi}(z) \quad \text{mit} \quad \widetilde{\varphi}(z) := \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & f(z_0) + a(z-z_0) + |z-z_0|\,\varphi(z) \\ = \;& f(z_0) + f'(z_0)\cdot(z-z_0) + |z-z_0| \cdot \tfrac{z-z_0}{|z-z_0|} \cdot \left(\tfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right) \\ = \;& f(z_0) + f'(z_0)\cdot(z-z_0) + f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0) \\ = \;& f(z) \end{aligned}$$

Außerdem gilt aufgrund der Differenzierbarkeit von f auch $\widetilde{\varphi}(z) \to 0$ für $z \to z_0$ sowie

$$\left|\frac{z-z_0}{|z-z_0|}\right| = \frac{|z-z_0|}{|z-z_0|} = 1$$

und somit ist der Ausdruck $\frac{z-z_0}{|z-z_0|}$ beschränkt. Schließlich dominiert somit $\widetilde{\varphi}$ die Konvergenz von φ und es gilt

$$\lim_{z\to z_0} \varphi(z) = 0$$

(⇐) Es existieren $a \in \mathbb{C}$ und $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\varphi(z) \to 0$ und $f(z) = f(z_0) + a \cdot f'(z_0)(z-z_0) + |z-z_0| \cdot \varphi(z)$. Daraus lässt sich umstellen

$$\begin{aligned} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= a + \varphi(z)\cdot|z-z_0|\cdot\frac{\overline{z-z_0}}{\overline{\overline{z-z_0}}} \\ &= a + \varphi(z)\cdot(z-z_0)\cdot\frac{\overline{z-z_0}}{|z-z_0|} \qquad \left(\tfrac{|z|}{\overline{z}} = \tfrac{z}{|z|}\right) \\ \Rightarrow \quad \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= a + \varphi(z)\cdot\frac{\overline{z-z_0}}{|z-z_0|} \end{aligned}$$

Somit ist

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = a + \lim_{z\to z_0} \underbrace{\varphi(z)\cdot\frac{\overline{z-z_0}}{|z-z_0|}}_{=:\widetilde{\varphi}(z)}$$

Wie oben ist

$$\left|\frac{\overline{z-z_0}}{|z-z_0|}\right| = \frac{|z-z_0|}{|z-z_0|} = 1$$

und somit dominiert φ den Ausdruck $\widetilde{\varphi}$ zu Null, d.h.

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = a + \lim_{z\to z_0}\widetilde{\varphi}(z) = a \quad\Rightarrow\quad a = f'(z_0)$$

(zu b) Es seien $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ in z_0 und $g\colon \Omega' \to \mathbb{C}$ in $f(z_0)$ komplex differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0} \frac{(g\circ f)(z)-(g\circ f)(z_0)}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0} \frac{(g\circ f)(z)-(g\circ f)(z_0)}{f(z)-f(z_0)} \cdot \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{(g\circ f)(z)-(g\circ f)(z_0)}{f(z)-f(z_0)} \cdot \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \\
&= g'(f(z_0)) \cdot \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} && (g \text{ diffbar in } f(z_0)) \\
&= g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0) && (f \text{ diffbar in } z_0)
\end{aligned}$$

Insbesondere existieren die Grenzwerte $\lim_{z\to z_0} \frac{(g\circ f)(z)-(g\circ f)(z_0)}{f(z)-f(z_0)}$ und $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ und somit auch der Grenzwert $\lim_{z\to z_0} \frac{(g\circ f)(z)-(g\circ f)(z_0)}{z-z_0}$, d.h. $g\circ f$ ist komplex differenzierbar in z_0.

Aufgabe 1.3. Seien $f, g, h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\begin{aligned}
f(z) &:= x^2 + y^2 \\
g(z) &:= 2xy + y + \imath(x^2 - y^2 - x) \\
h(z) &:= \frac{x - \imath y}{1 + x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Bestimmten Sie die Punkte in $\mathbb{C}$, in denen f, g und h komplex differenzierbar sind.

Wir zerlegen die Funktionen immer in Real- und Imaginärfunktion, d.h. $f(z) = f(x,y) = f_1(x,y) + \imath \cdot f_2(x,y)$. Damit ist $f_1(x,y) = x^2 + y^2$ und $f_2(x,y) = 0$. Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}
\partial_x f_1(x,y) &= 2x & \partial_y f_1(x,y) &= 2y \\
\partial_x f_2(x,y) &= 0 & \partial_y f_2(x,y) &= 0
\end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig, somit ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (reell) differenzierbar. Wir prüfen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
\partial_x f_1(x,y) &=& \partial_y f_2(x,y) &\Leftrightarrow& 2x = 0 &\Leftrightarrow& x = 0 \\
\partial_y f_1(x,y) &=& -\partial_x f_2(x,y) &\Leftrightarrow& 2y = 0 &\Leftrightarrow& y = 0
\end{array}$$

Damit sind die beiden Gleichungen nur für $z = 0$ erfüllt und f ist nur in diesem Punkt komplex differenzierbar.

Es ist $g_1(x,y) = 2xy + y$ und $g_2(x,y) = x^2 - y^2 - x$. Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}
\partial_x g_1(x,y) &= 2y & \partial_y g_1(x,y) &= 2x + 1 \\
\partial_x g_2(x,y) &= 2x - 1 & \partial_y g_2(x,y) &= -2y
\end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig, somit ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (reell) differenzierbar. Wir prüfen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{rcrcrclcrcl} \partial_x g_1(x,y) &=& \partial_y g_2(x,y) &\Leftrightarrow& 2y &=& -2y &\Rightarrow& y &=& 0 \\ \partial_y g_1(x,y) &=& -\partial_x g_2(x,y) &\Leftrightarrow& 2x+1 &=& -2x+1 &\Rightarrow& x &=& 0 \end{array}$$

Damit sind die beiden Gleichungen nur für $z = 0$ erfüllt und g ist nur in diesem Punkt komplex differenzierbar.

Es ist $h_1(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$ und $h_2(x,y) = -\frac{y}{1+x^2+y^2}$. Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\partial_x h_1(x,y) = \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad \partial_y h_1(x,y) = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$
$$\partial_x h_2(x,y) = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad \partial_y h_2(x,y) = -\frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig für $x \neq \pm\sqrt{-y^2-1}$, somit ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dort (reell) differenzierbar. Wir prüfen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{rcrcccrcl} \partial_x h_1(x,y) &=& \partial_y h_2(x,y) &\Leftrightarrow& \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} = -\frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2} &\Rightarrow& 1 &=& -1 \\ \partial_y h_1(x,y) &=& -\partial_x h_2(x,y) &\Leftrightarrow& \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(1+x^2+y^2)^2} &\Rightarrow& -2xy &=& 2xy \end{array}$$

Die erste Gleichung liefert aufgrund der falschen Aussage für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Unlösbarkeit des Gleichungssystems. Somit ist h nirgends komplex differenzierbar.

Aufgabe 2.1. Sei $\Omega := B(0,1) \subseteq \mathbb{C}$ (Einheitskreis), $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $z_0 \in \Omega$, f komplex differenzierbar in z_0, dann gilt $f'(z_0) = 0$. Ist f (in Ω) holomorph, so ist f konstant.

Sei $f \simeq (u,v)$, $f = u + \imath v$ und $z = x + \imath y \simeq (x,y)$. Wegen $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ ist $v \equiv 0$. Da f in $z_0 = x_0 + \imath y_0 \simeq (x_0, y_0)$ komplex differenzierbar ist, ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dort auch reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen $u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) = 0$ bzw. $u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) = 0$. Somit ist auch $u'(z) = 0$ und somit $f'(x_0,y_0) \simeq f'(z_0) = 0$.

Sei f holomorph auf Ω. Dann gilt $f'(z) = 0$ für alle $z \in \Omega$, insbesondere ist $u', v' \equiv 0$ und dann sind u und v als reelle Funktionen konstant, also auch $f = u + \imath v$.

Aufgabe 2.2. (a) Weisen Sie nach, dass die Funktion

$$u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad u(x,y) := e^{-x}(x \cdot \cos(y) + y \cdot \sin(y))$$

der Laplace-Differentialgleichung $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ genügt.

(b) Bestimmen Sie eine Funktion $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $v(0,0) = 0$ derart, dass u,v die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllen.

(c) Schreiben Sie $f = u + \imath v$ mithilfe der komplexen Exponentialfunktionen als Funktion von $z = x + \imath y$.

(zu a) Es ist

$$\begin{aligned}
u_x(x,y) &= -e^{-x}\left(x \cdot \cos(y) + y \cdot \sin(y)\right) + e^{-x} \cdot \cos(y) \\
&= e^{-x}\left((1-x)\cos(y) - y\sin(y)\right) \\
u_{xx}(x,y) &= e^{-x}\left(x\cos(y) + y\sin(y) - 2\cos(y)\right) \\
&= e^{-x}\left((x-2)\cos(y) + y\sin(y)\right) \\
u_y(x,y) &= e^{-x}\left(-x\sin(y) + \sin(y) + y\cos(y)\right) \\
&= e^{-x}\left((1-x)\sin(y) + y\cos(y)\right) \\
u_{yy}(x,y) &= e^{-x}\left(-x\cos(y) + \cos(y) + \cos(y) - y\sin(y)\right) \\
&= -e^{-x}\left((x-2)\cos(y) + y\sin(y)\right)
\end{aligned}$$

Damit gilt $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(zu b) Es gilt $u_x(x,y) = e^{-x}\left((1-x)\cos(y) - y\sin(y)\right)$ und nach den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen muss $u_x = v_y$ gelten. Löse diese Differentialgleichung für fixiertes x

durch Integration:

$$\begin{aligned}
v(x,y) &= \int u_x(x,y)\ \mathrm{d}y = \int e^{-x}\left((1-x)\cos(y) - y\sin(y)\right)\ \mathrm{d}y \\
&= e^{-x}\left((1-x)\int \cos(y)\ \mathrm{d}y - \int y\sin(y)\ \mathrm{d}y\right) \\
&= e^{-x}\left((1-x)\sin(y) - \sin(y) + y\cos(y) + C\right) \\
&= e^{-x}\left(-x\sin(y) + y\cos(y) + C\right)
\end{aligned}$$

Prüfen wir die zweite Cauchy-Riemann-Differentialgleichung und bestimmten v_x:

$$\begin{aligned}
v_x &= -e^{-x}\left(-x\sin(y) + y\cos(y) + C\right) + e^{-x}(-\sin(y)) \\
&= -e^{-x}\left((1-x)\sin(y) + y\cos(y) + C\right) \\
&\overset{!}{=} u_y(x,y) \\
&= -e^{-x}\left((1-x)\sin(y) + y\cos(y)\right)
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Konstante $C = 0$ und als Lösung $v(x,y) = e^{-x}\left(y\cos(y) - x\sin(y)\right)$. Auch der Anfangswert $v(0,0) = 1 \cdot (0-0) = 0$ wird erfüllt. Die Probe ergibt

$$\begin{aligned}
v_x(x,y) &= -e^{-x}\left(-x\sin(y) + y\cos(y)\right) - e^{-x}\sin(y) \\
&= -e^{-x}\left((1-x)\sin(y) + y\cos(y)\right) = -u_y(x,y) \\
v_y(x,y) &= e^{-x}\left((-x\cos(y) + \cos(y) - y\sin(y))\right) \\
&= e^{-x}\left((1-x)\cos(y) - y\sin(y)\right) = u_x(x,y)
\end{aligned}$$

also $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$.

(zu c) Sei $z = x + \imath y$.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= u(x,y) + \imath \cdot v(x,y) \\
&= e^{-x}\left(x\cdot\cos(y) + y\cdot\sin(y) - \imath\cdot x\sin(y) + \imath\cdot y\cos(y)\right) \\
&= e^{-x}\left((x+\imath y)\cos(y) - \imath\cdot(x+\imath y)\sin(y)\right) \\
&= e^{-x}\cdot z\cdot\left(\cos(-y) + \imath\sin(-y)\right) \\
&= z\cdot e^{-x}\cdot e^{-\imath y} \\
&= z\cdot e^{-z} = f(z)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.3. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, f' stetig, $z_0 \in \Omega$, $f'(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie: Es gibt offene Umgebungen $U \subseteq \Omega$ von z_0 und $V \subseteq \mathbb{C}$ von $f(z_0)$, sodass $f\colon U \to V$ bijektiv und die daher existierende Abbildung $f^{-1}\colon V \to U$ ebenfalls holomorph ist. Es gilt $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$ für alle $w \in V$.
Hinweis: Betrachten Sie $f = (f_1, f_2)$ als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Deren Jabobi Determinante ist in $z_0 = (x_0, y_0)$ ungleich Null. Anwendung des Satzes über die lokale Invertierbarkeit.

Wir erinnern uns gemäß Hinweis an zwei Sätze aus der Analysis 2:

Lemma 2.1 (Satz über inverse Funktionen). *Sei* $f\colon U \subseteq \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *mit* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *stetig differenzierbar (*U *offen),* $x_0 \in U$*,* $f'(x_0)$ *regulär. Dann existiert eine offene Umgebung* $U_0 \subseteq U$ *von* x_0*, sodass mit* $V_0 := f(U_0)$ *die eingeschränkte Abbildung* $f\colon U_0 \to V_0$ *Diffeomorphismus*[1] *ist (insbesondere ist* V_0 *offene Umgebung von* $y_0 := f(x_0)$*).*

Lemma 2.2 (Ableitung der inversen Funktion). *Sei* $f\colon U \subseteq \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *injektiv und differenzierbar (*D *offen,* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$*),* f^{-1} *differenzierbar in* $y \in \operatorname{int}(f(D))$*. Dann ist*

$$(f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y))^{-1}$$

Sei $f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $z = x + \imath y \simeq (x, y)$ sowie $z_0 = x_0 + \imath y_0 \simeq (x_0, y_0)$. Da f holomorph ist in allen $z_0 \in \Omega$, ist f auch reell differenzierbar in (x_0, y_0) mit

$$f'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1(x_0, y_0) & \partial_y f_1(x_0, y_0) \\ \partial_x f_2(x_0, y_0) & \partial_y f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} =: J$$

Außerdem gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen $\partial_x f_1(x_0, y_0) = \partial_y f_2(x_0, y_0)$ und $\partial_y f_1(x_0, y_0) = -\partial_x f_2(x_0, y_0)$. Damit besitzt J die Form $J = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ mit Determinante

$$\det(J) = \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$$

Angenommen es gilt $\det(J) = a^2 + b^2 = 0$. Dann ist $a = 0$ und $b = 0$, d.h. $f'(x_0, y_0) = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist also $f'(z_0) \simeq f'(x_0, y_0) \neq 0$ für alle $z_0 \simeq (x_0, y_0) \in \Omega$.

Außerdem ist f' stetig. Nach dem Satz über inverse Funktionen (Lemma 2.1) existiert dann eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von (x_0, y_0), sodass mit $V = f(U)$ (und insbesondere $f(x_0, y_0) \in V$) $f\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Nach dem Satz über die Ableitung der inversen Funktion (Lemma 2.2) gilt dann

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(x, y) &= f'(f^{-1}(x, y))^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_x f_1(f^{-1}(x, y)) & \partial_y f_1(f^{-1}(x, y)) \\ \partial_x f_2(f^{-1}(x, y)) & \partial_y f_2(f^{-1}(x, y)) \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{\det(J(f^{-1}(x, y)))} \begin{pmatrix} \partial_y f_2(f^{-1}(x, y)) & \partial_x f_2(f^{-1}(x, y)) \\ \partial_y f_1(f^{-1}(x, y)) & \partial_x f_1(f^{-1}(x, y)) \end{pmatrix} \qquad \forall (x, y) \in V
\end{aligned}$$

Aufgrund der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für f ist $\det(J(f^{-1}(x, y))) = \partial_x f_1(f^{-1}(x, y)) \cdot \partial_y f_2(f^{-1}(x, y)) - \partial_x f_2(f^{-1}(x, y)) \cdot \partial_y f_1(f^{-1}(x, y)) \neq 0$ und

$$\begin{aligned}
\partial_y f_2(f^{-1}(x, y)) &= \partial_x f_1(f^{-1}(x, y)) \\
\partial_y f_1(f^{-1}(x, y)) &= -\partial_x f_2(f^{-1}(x, y))
\end{aligned}$$

[1] f, f^{-1} stetig differenzierbar

auch die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für f^{-1}. Damit ist f^{-1} komplex differenzierbar auf dem entsprechenden $V \subseteq \mathbb{C}$ mit der Ableitung

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(w) &= \lim_{z \to w} \frac{f^{-1}(z) - \lim_{z \to w} f^{-1}(w)}{z - w} = \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(w)}{f(f^{-1}(z)) - f(f^{-1}(w))} \\
&= \left(\lim_{z \to w} \frac{f(f^{-1}(z)) - f(f^{-1}(w))}{f^{-1}(z) - f^{-1}(w)} \right)^{-1} \\
&= \left(f'(f^{-1}(w)) \right)^{-1} \qquad \forall w \in V
\end{aligned}$$