TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

**Fakultät Mathematik** Institut für Numerik, Professur für Numerik partieller Differentialgleichungen

# OPTIMIERUNG & NUMERIK – TEIL 2

*Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen — Übungen*

**Prof. Dr. Oliver Sander**

Sommersemester 2020

Autor : Eric Kunze
E-Mail : `eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de`

# Hausaufgaben

**Eric Kunze**

**Optimierung & Numerik – Teil 2** – Übungsblatt 1

Matr.-Nr. 4679202

**Übung 1.** Untersuchen Sie in den folgenden Teilaufgaben jeweils, ob eine Umgebung vom $x = 1$ existiert, in der die angegebene Funktion $f = f(x)$ Lipschitz-stetig ist. In welchen Teilaufgaben kann der Satz von Picard und Lindelöf angewendet werden, um zu folgern, dass das Anfangswertproblem

$$x' = f(x) \qquad x(0) = 1$$

eine eindeutige Lösung besitzt?

(a) $f(x) = 1 - x^2$

(b) $f(x) = |1 - x^2|$

(c) $f(x) = \sqrt{|1 - x^2|}$

(zu a) Sei $\varepsilon > 0$ und $x, y, \in B_\varepsilon(1)$. Definiere $L := 2\varepsilon < \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| = \left|1 - x^2 - (1 - y^2)\right| = \left|y^2 - x^2\right| = |(y - x)(y + x)| &= |x + y| \cdot |x - y| \\ &\leq L \cdot |x - y|\end{aligned}$$

Damit ist $f$ lokal Lipschitz-stetig in $x_0 = 1$. Damit liefert der Satz von Picard-Lindelöf die Existenz einer eindeutigen, bis zum Rand fortsetzbaren Lösung $x$.

(zu b) Sei wiederum $\varepsilon > 0$ und $x, y, \in B_\varepsilon(1)$. Definiere $L := 2\varepsilon < \infty$, sodass schließlich gilt

$$|f(x) - f(y)| = \left|\left|1 - x^2\right| - \left|1 - y^2\right|\right| \leq \left|1 + x^2 - 1 - y^2\right| = \left|x^2 - y^2\right| \leq L \cdot |x - y|$$

Damit ist $f$ lokal Lipschitz-stetig in $x_0 = 1$. Nach Picard-Lindelöf existiert eine eindeutige Lösung, die bis zum Rand fortsetzbar ist.

(zu c) Sei $f$ lokal Lipschitz-stetig in $x_0 = 1$. Dann existieren $\varepsilon > 0$ und $0 < L < \infty$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \tag{$\star$}$$

für alle $x, y \in B_\varepsilon(1)$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}_+$ sodass $x_n := 1 + \frac{1}{n} \in B_\varepsilon(1)$. Setze $y := 1$. Es ist $x_n \neq y$, d.h. $|x_n - y| \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_+$. Somit gilt mit $(\star)$

$$\begin{aligned}L \geq \frac{|f(x_n) - f(y)|}{|x_n - y|} = \frac{\left|\sqrt{\left|1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right|}\right|}{\left|1 + \frac{1}{n} - 1\right|} &= \frac{\sqrt{\left|1 - 1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right|}}{\frac{1}{n}} \\ &= n \cdot \sqrt{\frac{2n + 1}{n^2}} \\ &= \sqrt{2n + 1} \quad \longrightarrow \infty \qquad (n \to \infty)\end{aligned}$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zur Existenz einer gültigen Lipschitzkonstante. Somit ist $f$ nicht lokal Lipschitz-stetig in $x_0 = 1$ und der Satz von Picard-Lindelöf kann nicht angewendet werden.

**Übung 2.** Sei $\Phi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, (t,x) \mapsto \Phi^t x$ ein Phasenfluss, d.h. $\Phi$ erfülle die Eigenschaften

(i) $\Phi(0,x) = x$ bzw. $\Phi^0 = \mathrm{id}$

(ii) $\Phi(s+t,x) = \Phi(s,\Phi(t,x))$ bzw. $\Phi^{s+t}x = \Phi^s\Phi^t x$

Sei $\Phi$ ferner in $t$ und $x$ stetig differenzierbar und sei $f(x) := \partial_t\Phi(0,x)$. Zeigen Sie, dass $x(t) := \Phi(t,x_0)$ das autonome Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(x(t)) \qquad x(0) = x_0$$

zum Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^d$ erfüllt.

**Differentialgleichung:** Es gilt

$$f(x(t)) = \partial_t\Phi(0,x) = \partial_t\Phi(0,\Phi(t,x_0)) \overset{\text{(ii)}}{=} \partial_t\Phi(0+t,x_0) = \partial_t\Phi(t,x_0) = x'(t)$$

**Anfangswert:**

$$x(0) = \Phi(0,x_0) \overset{\text{(i)}}{=} x_0$$