TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

**Fakultät Mathematik** Institut für Geometrie, Professur für Nichtlineare Analysis

# PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

*Übungen*

**Prof. Dr. Friedemann Schuricht**

Sommersemester 2020

Autor : Eric Kunze
E-Mail : `eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de`

# Hausaufgaben

**Eric Kunze**

**Partielle Differentialgleichungen** – Übungsblatt 1

Matr.-Nr. 4679202

**Aufgabe 1.** Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $u \in C^2(U, \mathbb{R}^n)$, $A \in C^1(U, \mathbb{R}^{m\times n})$, $\varphi \in C^1(U)$ und $c \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{div}((Du)^\top) = (D(\operatorname{div} u))^\top$,

(b) $\operatorname{div}(cA) = c \operatorname{div} A$,

(c) $\operatorname{div}(\varphi A) = A \cdot D\varphi + \varphi \operatorname{div} A$.

*Hinweis:* Wir betrachten Vektoren im $\mathbb{R}^n$ als Zeilenvektoren, $\cdot$ ist das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$, $Du = (\partial_j u_i)_{i,j=1,\dots,n}$, div und $\cdot$ wirken auf eine Matrix *zeilenweise*.

Es seien nun $u, v \colon U \to \mathbb{R}$ hinreichend glatt. Beweisen Sie die **Formel von Leibniz**:

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v$$

wobei für Multiindizes $\alpha, \beta$ gilt:

$$D^\alpha u = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u, \qquad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}, \qquad \alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$$

und $\beta \le \alpha$ genau dann, wenn $\beta_i \le \alpha_i$ für $i = 1, \dots, n$.

(zu a) Sei $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in C^2$. Wir notieren Vektoren verkürzt $(u_i)_i = (u_i)_{i=1,\dots,n} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Es ist

$$\operatorname{div}\left((Du)^\top\right) = \operatorname{div}\begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 & \cdots & \partial_n u_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 u_n & \partial_2 u_n & \cdots & \partial_n u_n \end{pmatrix}^\top = \operatorname{div}(\partial_j u_i)_{i,j}^\top = \operatorname{div}(\partial_i u_j)_{i,j}$$
$$= \begin{pmatrix} \partial_{11} u_1 & \partial_{12} u_2 & \cdots & \partial_{1n} u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1} u_1 & \partial_{n2} u_2 & \cdots & \partial_{nn} u_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ij} u_j\right)_i$$

und außerdem

$$(D(\operatorname{div} u))^\top = \left(D\left(\sum_{i=1}^n \partial_i u_i\right)\right)^\top = \begin{pmatrix} \partial_{11} u_1 + \partial_{21} u_2 + \cdots + \partial_{n1} u_n \\ \vdots \\ \partial_{1n} u_1 + \partial_{2n} u_2 + \cdots + \partial_{nn} u_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ji} u_j\right)_i$$

Wegen $u \in C^2$ sind alle partiellen Ableitungen stetig und können somit vertauscht werden. Daraus folgt die (zeilenweise) Gleichheit mit

$$\operatorname{div}\left((Du)^\top\right) = \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ij} u_j\right)_i = \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ji} u_j\right)_i = (D(\operatorname{div} u))^\top$$

(zu b) Es ist

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(cA) &= \operatorname{div}\left(\sum_{j=1}^n c_j a_{ij}\right)_i = \sum_{i=1}^n \partial_i \sum_{j=1}^n c_j a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_i c_j a_{ij} \\ c\cdot \operatorname{div}(A) &= c\cdot\left(\sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij}\right)_i = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_j c_j a_{ij}\end{aligned}$$

und somit $\operatorname{div}(cA) = c \cdot \operatorname{div}(A)$.

(zu c) Man hat

$$\begin{aligned}A\cdot D\varphi &= A\cdot(\partial_i\varphi)_i = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\ \partial_j\varphi\right)_i \\ \varphi\operatorname{div}(A) &= \varphi\cdot\left(\sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij}\right)_i = \left(\sum_{j=1}^n \varphi\ \partial_j a_{ij}\right)_i \\ \operatorname{div}(\varphi A) &= \operatorname{div}\left((\varphi a_{ij})_{i,j}\right) = \left(\sum_{j=1}^n \partial_j(\varphi a_{ij})\right)_i\end{aligned}$$

Für fixiertes $i$ (also zeilenweise) erhält man mit der Produktregel für (partielle) Ableitungen

$$\sum_{j=1}^n \partial_j(\varphi a_{ij}) = \sum_{j=1}^n ((\partial_j\varphi)a_{ij} + \varphi(\partial_j a_{ij})) = \sum_{j=1}^n (\partial_j\varphi)a_{ij} + \sum_{j=1}^n \varphi(\partial_j a_{ij})$$

und somit $\operatorname{div}(\varphi A) = A\cdot(D\varphi) + \varphi\cdot\operatorname{div}(A)$.

**Leibnitz-Formel:** Vollständige Induktion über $|\alpha| = k$.

**(IA)** $k = 0:$ Für $|\alpha| = 0$, also $\alpha = 0$ ist

$$D^0(uv) = uv = \binom{0}{0} D^0u\ D^0v$$

**(IV)** Für $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i = k$ gilt $D^\alpha(uv) = \sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v$.

**(IS)** $k \to k+1:$ Seien $|\alpha| = |(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)| = k+1$ und $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n - 1)$ sowie $\beta' = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n + 1)$. Dann ist $|\alpha'| = k$ und $|\beta'| = |\beta| + 1$. Es gilt

$$\begin{aligned}
D^\alpha(uv) &= \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}(uv) = \partial_{x_n}\left(\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n - 1}(uv)\right) \\
&= \partial_{x_n}\left(D^{\alpha'}(uv)\right) \\
&\overset{\text{IV}}{=} \partial_{x_n}\left(\sum_{\beta \le \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} D^\beta u \; D^{\alpha'-\beta} v\right) \\
&= \sum_{\beta \le \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta}\left(\partial_{x_n}(D^\beta u) \; D^{\alpha'-\beta} v + D^\beta u \; \partial_{x_n}(D^{\alpha'-\beta} v)\right) \\
&= \sum_{\beta \le \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta}\left(D^{\beta'} u \; D^{\alpha'-\beta} v + D^\beta u \; D^{\alpha-\beta} v\right) \\
&= \ldots \\
&= \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u \; D^{\alpha-\beta} v
\end{aligned}$$

**Aufgabe 2.** Ermitteln Sie jeweils eine nichttriviale Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

(a) $v_y(x,y) = xy \cdot v(x,y)$

(b) $u_x(x,y) + y \cdot u(x,y) = 0$

(zu a) Wir gehen analog zur Vorlesung vor und betrachten die Gleichung für fixiertes $x = \text{const}$. Dann erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$u'(y) = xy \cdot u(y)$$

und lösen entweder durch geübtes Hinschauen oder mit Trennung der Variablen: sei $f(u(y)) = u(y)$ und $g(y) = x \cdot y$. Der Ansatz

$$\int^{u(y)} \frac{1}{f(\xi)} \mathrm{d}\xi = \int^y g(\xi) \mathrm{d}\xi \quad \Rightarrow \quad \ln(|u(y)|) = \frac{1}{2} x y^2 + C$$

Beachte, dass die unteren Integralgrenzen dabei in der Konstante $C$ zusammengefasst sind, da wir keinen Anfangswert vorgegeben haben. Die Gleichung „umgestellt“ ergibt eine Lösung

$$u(y) = \exp\left(\frac{1}{2} x y^2\right) \qquad \text{bzw.} \qquad v(x,y) = \exp\left(\frac{1}{2} x y^2\right)$$

Eine kurze Probe ergibt

$$v_y(x,y) = xy \cdot \exp\left(\frac{1}{2} x y^2\right) = xy \cdot v(x,y)$$

(zu b) Wir fixieren erneut eine Variable, diesmal $y = \text{const}$. Diesmal sehen wir direkt eine Lösung, nämlich

$$u(x,y) = \exp(-xy)$$

Eine kurze Probe ergibt $u_x(x,y) + y \cdot u(x,y) = -y \cdot \exp(-xy) + y \cdot \exp(-xy) = 0$.

**Zusatzaufgabe 3.** Klassifizieren Sie die nachstehenden partiellen Differentialgleichungen nach folgenden Gesichtspunkten:

(a) Ist die Differentialgleichung linear, semilinear, quasilinear oder voll nichtlinear?

(b) Welche Ordnung hat die Differentialgleichung?

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0 \\
-\Delta u &= f(u) \\
|Du| &= 1 \\
u_t + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} &= 0 \\
\det(D^2 u) &= f \\
\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) &= 0 \\
u_t - \Delta u &= f(u) \\
u_{tt} - \Delta u &= 0 \\
u_t + \operatorname{div} F(u) &= 0 \\
u_t + u u_x + u_{xxx} &= 0 \\
a u_t + \Delta u &= 0 \\
u_t + H(Du, x) &= 0 \\
u_t - \Delta(u^\gamma) &= 0 \\
-\Delta u &= \lambda u \\
\operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) &= 0 \\
u_t + u u_x &= 0
\end{aligned}$$

# Hausaufgaben

**Partielle Differentialgleichungen** – Übungsblatt 2

**Eric Kunze**
Matr.-Nr. 4679202

*Thema: Charakteristikenmethode*

*Ich bitte um Entschuldigung, dass meine Lösung so lang geworden ist. Aber ich habe mich bemüht mein Vorgehen detailliert zu beschreiben.* ☺

**Aufgabe 4.** Finden Sie Lösungen $u \in C^1$ der folgenden linearen Randwertprobleme:

(a) $-3u_x + 2u_y = 0$ mit $u(x,y) = y^2 + 1$ auf $\Gamma = \big\{(1,s) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in \mathbb{R}\big\}$

(b) $u_x + u_y - u_z = xe^{y-z}$ mit $u(0,y,z) = g(y,z)$ für alle $y,z \in \mathbb{R}$, wobei $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ beliebig ist

(c) $2u_x - u_y = 2u - xe^x$ mit $u(0,y) = y^2$ für alle $y \in \mathbb{R}$

Erläutern Sie dabei Ihr Vorgehen und überprüfen Sie abschließend, ob die von Ihnen gefundene Lösung wirklich das Problem löst.

(zu a) Wir betrachten die Charakteristiken

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sei $\alpha(t) := u(x(t), y(t))$, d.h. $\alpha$ beschreibt $u$ entlang der Charakteristiken. Es gilt

$$\alpha'(t) = u_x \cdot \dot{x}(t) + u_y \cdot \dot{y}(t) = -3u_x + 2u_y = 0$$

und somit ist $u$ konstant entlang der Charakteristiken. Parametrisiere die Kurve $\Gamma$ durch $x_0(s) = 1$ und $y_0(s) = s$. Dann ergibt sich die Randwertbedingung zu $g(s) = s^2 + 1$. Wir prüfen nun die nichtcharakteristische Bedingung, d.h. ob die Kurve $\Gamma$ auch alle Charakteristiken $\Xi_{(x_0,y_0)}$ durchläuft. Dazu prüfen wir den Tangentenvektor von $\Gamma$, nämlich $\left(\begin{smallmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, und den Tangentenvektor der Charakteristik $\Xi_{(x_0,y_0)}$, nämlich $\left(\begin{smallmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, auf lineare Unabhängigkeit:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

Somit schneidet $\Gamma$ alle Charakteristiken $\Xi_{(x_0,y_0)}$. Somit können wir die Schar der Charakteristiken beschreiben durch

$$\begin{aligned} x(s,t) &= x_0(s) - 3t = 1 - 3t &&\Rightarrow \quad t(x,y) = \frac{1-x}{3} \\ y(s,t) &= y_0(s) + 2t = s + 2t &&\Rightarrow \quad s(x,y) = y - 2t = y - \frac{2}{3}(1-x) = y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Nach Konstruktion in der Vorlesung erhalten wir damit eine Lösung

$$u(x,y) = g(s(x,y)) = \left(y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right)^2 + 1$$

Die Probe liefert mit den partiellen Ableitungen

$$\left.\begin{array}{lcl} u_x(x,y) & = & \frac{4}{3}\quad \left(y+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)^2 \\ u_y(x,y) & = & 2\quad \left(y+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ -3\cdot\frac{4}{3}\left(y+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)^2+4\left(y+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)^2=0$$

und außerdem $u(1,y)=y^2+1$ für den Anfangswert. Somit ist $u$ also Lösung der Differentialgleichung.

(zu b) Wir betrachten die partielle Differentialgleichung $u_x+u_y-u_z=x\cdot e^{y-z}$ mit der Randbedingung $u(0,y,z)=g(y,z)$ für beliebiges $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$. Definieren wir den „Rand“ als die Fläche $\Gamma=\{(0,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y,z\in\mathbb{R}\}$. Diese lässt sich parametrisieren mit

$$\gamma(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix} x_0(\sigma,\tau)\\ y_0(\sigma,\tau)\\ z_0(\sigma,\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \sigma\\ \tau\end{pmatrix}$$

Für die Tangentialebene erhalten wir die Spannvektoren

$$\gamma_\sigma(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\qquad \gamma_\tau(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \dot\gamma(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Betrachten wir die Charakteristiken $\Xi_{\sigma,\tau}=\operatorname{Im}(\xi)$ mit

$$\xi(t,\sigma,\tau)=\begin{pmatrix}x(t,\sigma,\tau)\\ y(t,\sigma,\tau)\\ z(t,\sigma,\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0(\sigma,\tau)+t\\ y_0(\sigma,\tau)+t\\ z_0(\sigma,\tau)-t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ \sigma+t\\ \tau-t\end{pmatrix}\tag{2.1}$$

Prüfen wir die nichtcharakteristische Bedingung um sicherzustellen, dass auch jede Charakteristik $\Xi_{\sigma,\tau}$ von $\Gamma$ durchlaufen wird:

$$\det(\dot\gamma\mid\dot\xi)=\det\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=1\neq 0$$

Bezeichne mit $f(u,x,y,z)=x\cdot e^{y-z}$ die rechte Seite der Differentialgleichung. Schreibe $\xi(t)=\xi(t,\sigma,\tau)$ für fixiertes $\sigma$ und $\tau$ ($x$,$y$,$z$ analog). Sei $\alpha(t):=u(\xi(t))$ die Funktion $u$ entlang einer Charakteristik $\Xi_{\sigma,\tau}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\dot\alpha(t)&=Du\cdot\dot\xi=f(u(\xi(t)),\xi(t))=f(\alpha(t),t,\sigma+t,\tau-t)=t\cdot e^{(\sigma+t)-(\tau-t)}\\ &=t\cdot e^{\sigma-\tau+2t}\end{aligned}\tag{2.2}$$

und dem Anfangswert $\alpha(0)=\alpha(0,\sigma,\tau)=g(\sigma,\tau)$. Lösen wir also dieses Anfangswertproblem und integrieren dazu die rechte Seite in Gleichung (2.2) partiell:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \int t \cdot e^{\sigma-\tau+2t}\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{2}e^{\sigma-\tau+2t}\right)t - \int \frac{1}{2}e^{\sigma-\tau+2t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}t \cdot e^{\sigma-\tau+2t} - \frac{1}{4}e^{\sigma-\tau+2t} + C(\sigma,\tau) \\ &= \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right)e^{\sigma-\tau+2t} + C(\sigma,\tau)\end{aligned}$$

Mit dem Anfangswert $\alpha(0) = g(\sigma,\tau)$ ergibt sich die Konstante

$$\alpha(0) = \frac{1}{4}e^{\sigma-\tau} + C(\sigma,\tau) \overset{!}{=} g(\sigma,\tau) \quad \Rightarrow \quad C(\sigma,\tau) = \frac{1}{4}e^{\sigma-\tau} + g(\sigma,\tau)$$

und somit die konkrete Lösung

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right)e^{\sigma-\tau+2t} + \frac{1}{4}e^{\sigma-\tau} + g(\sigma,\tau)$$

Aus Gleichung (2.1) erhalten wir die Inverse von $\xi$ als

$$\xi^{-1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} t(x,y,z) \\ \sigma(x,y,z) \\ \tau(x,y,u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-x \\ z+x \end{pmatrix}$$

Nach Konstruktion in der Vorlesung erhalten wir die Lösung

$$\begin{aligned}u(x,y,z) &= \alpha(\xi^{-1}(x,y,z)) \\ &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{(y-x)-(z+x)+2x} + \frac{1}{4}e^{(y-x)-(z+x)} + g(y-x,z+x) \\ &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + g(y-x,z+x)\end{aligned}$$

Nun prüfen wir noch, dass die gefundene Funktion auch wirklich eine Lösung der Differentialgleichung ist. Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}u_x(x,y,z) &= \frac{1}{2}e^{y-z} - \frac{1}{2}e^{y-z-2x} - \partial_1 g(y-x,z+x) + \partial_2 g(y-x,z+x) \\ u_y(x,y,z) &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + \partial_1 g(y-x,z+x) \\ u_z(x,y,z) &= -\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{y-z} - \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + \partial_2 g(y-x,z+x)\end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}e^{y-z} - \frac{1}{2}e^{y-z-2x} - \partial_1 g(y-x, z+x) + \partial_2 g(y-x, z+x) \\
+&\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + \partial_1 g(y-x, z+x) \\
+&\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} - \partial_2 g(y-x, z+x) \\
=&\ e^{y-z} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) - e^{y-z-2x}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) \\
=&\ x \cdot e^{y-z}
\end{aligned}$$

Außerdem ist die Randwertbedingung erfüllt, denn

$$u(0, y, z) = -\frac{1}{4}e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z} + g(y, z) = g(y, z)$$

und somit $u$ tatsächlich Lösung der partiellen Differentialgleichung.

(zu c) Gegeben sei die partielle Differentialgleichung $2u_x - u_y = 2u + x \cdot e^x$ und die Randwertbedingung $u(0, y) = y^2$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Bezeichnen wir mit $f(u, x, y) = 2u - xe^x$ die rechte Seite. Die Randwerte werden auf der Kurve $\Gamma = \big\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\big\}$ angenommen. Diese können wir parametrisieren mit

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} x_0(s) \\ y_0(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} \dot{x}_0(s) \\ \dot{y}_0(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit wird die Randwertbedingung zu $g(s) = s^2$. Betrachten wir die Charakteristiken $\Xi_s$ mit

$$\xi(t, s) = \begin{pmatrix} x(t, s) \\ y(t, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(s) + 2t \\ y_0(s) - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ s + t \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Die nichtcharakteristische Bedingung ist hier erfüllt, denn

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

Betrachte nun die Funktion $u$ entlang der Charakteristiken $\Xi_s$ für fixiertes $s$ beschrieben durch $\alpha(t) = u(\xi(t))$. Differenzieren ergibt

$$\dot{\alpha}(t) = u_x \cdot \dot{x} + u_y \cdot \dot{y} = f(u(\xi(t)), \xi(t)) = f(\alpha(t), 2t, s + t) = 2\alpha - 2t \cdot e^{2t} \tag{2.4}$$

bei $\alpha(0, s) = g(s) = s^2$. Dieses Anfangswertproblem lösen wir mit Variation der Konstanten. Das zugehörige homogene Problem besitzt offensichtlich die Lösung $\alpha(t) = c(t) \cdot e^{2t}$. Differenzieren wir diese Gleichung erhalten wir $\dot{\alpha}(t) = \dot{c}(t) \cdot e^{2t} + 2c(t) \cdot e^{2t}$. Setzen wir dies nun in Gleichung (2.4) ein, dann erhalten wir für ein $\hat{c} \in \mathbb{R}$

$$\dot{c}(t) \cdot e^{2t} + 2c(t) \cdot e^{2t} = 2c(t) \cdot e^{2t} - 2t \cdot e^{2t} \quad \Rightarrow \quad \dot{c}(t) = -2t \quad \Rightarrow \quad c(t) = \hat{c} - t^2$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung $\alpha(t) = e^{2t}(\hat{c} - t^2)$. Durch den Anfangswert gilt $\alpha(0) = \hat{c} = s^2$ und somit ist $\alpha(t) = e^{2t}(s^2 - t^2)$ konkrete Lösung des Anfangswertproblems, was sich auch leicht überprüfen lässt:

$$\dot{\alpha}(t) = 2\underbrace{e^{2t}(s^2 - t^2)}_{=\alpha(t)} - 2t \cdot e^{2t} = 2\alpha(t) - 2t \cdot e^{2t} \quad \text{und} \quad \alpha(0) = s^2$$

Aus Gleichung (2.3) erhalten wir

$$\xi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} t(x,y) \\ s(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x + y \end{pmatrix}$$

Damit folgt nach Konstruktion in der Vorlesung eine Lösung

$$\begin{aligned} u(x,y) = \alpha(s(x,y)) &= e^x \left( \left( \frac{1}{2}x + y \right)^2 - \frac{1}{4}x^2 \right) \\ &= e^x \left( \frac{1}{4}x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{4}x^2 \right) \\ &= e^x \left( y^2 + xy \right) \end{aligned}$$

Dann gilt für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \left( y^2 + xy \right) + y \cdot e^x \\ u_y &= e^x \left( 2y + x \right) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} 2u_x - u_y &= 2e^x(y^2 + xy) + 2y \cdot e^x - e^x(2y + x) \\ &= 2u + e^x(2y - 2y - x) \\ &= 2u - x \cdot e^x \end{aligned}$$

und $u(0, y) = e^0(y^2 + 0 \cdot y) = y^2$. Damit ist also $u$ tatsächlich Lösung der partiellen Differentialgleichung.

# Hausaufgaben

**Eric Kunze**

**Partielle Differentialgleichungen** – Übungsblatt 3

Matr.-Nr. 4679202

**Aufgabe 6.** Bestimmen Sie eine Lösung $u \in C$ź$(U)$ des quasilinearen Randwertproblems

$$
\begin{aligned}
uu_x + u_y &= 1 \\
u(x,x) &= \frac{1}{2}x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\xi\}
\end{aligned}
$$

wobei $\xi \in \mathbb{R}$ geeignet gewählt und $U$ eine geeignet gewählte Umgebung der Menge ist, auf der $u$ vorgegeben ist. Nutzen Sie dazu die Methode der Charakteristiken, überprüfen Sie Ihr Ergebnis und skizzieren Sie einige Charakteristiken in der Nähe des Punktes $(\xi, \xi)$.

Aus der Vorlesung kennen wir die Notation $a(u(x), x) \cdot Du + b(u(x), x) = 0$. Wir notieren $a(u(x,y), x, y) = (u(x,y), 1)$ und $b(u(x,y), x, y) = -1$. Aus der Randwertbedingung erhalten wir eine Kurve $\Gamma = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \setminus \{\xi\}\}$ mit Parametrisierung $\gamma(s) = \binom{x_0(s)}{y_0(s)} = \binom{s}{s}$, auf der $g(s) = \frac{1}{2}s$ gilt. Wir überprüfen die nichtcharakteristische Bedingung gemäß Konstruktion in der Vorlesung als

$$
\det\left(\dot\gamma \mid a(g(s), \gamma(s))\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & g(s) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}s \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - \frac{1}{2}s \neq 0 \;\; \forall s \neq 2
$$

Wähle somit also $\xi = 2$, um die Regularität zu sichern. Betrachten wir $\alpha(t,s) = u(x(t,s), y(t,s)$ als die Funktion $u$ entlang der Charakteristiken. Da die partielle Differentialgleichung quasilinear ist, reichen die beiden folgenden charakteristischen Gleichungen zu lösen aus:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix} &= a(\alpha, x, y) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \\
\dot\alpha &= -b(\alpha, x, y) = 1
\end{aligned}
$$

mit den Anfangswerten $\alpha(0,s) = \frac{1}{2}s$, $x(0,s) = s$ und $y(0,s) = s$. Lösen wir diese gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$
\begin{aligned}
\alpha(t) &= t + c(s) && \overset{\text{AW}}{\Rightarrow} \; c(s) = \tfrac{1}{2}s && \Rightarrow \; \alpha(t,s) = t + \tfrac{1}{2}s \\
y(t) &= t + c(s) && \overset{\text{AW}}{\Rightarrow} \; c(s) = s && \Rightarrow \; y(t,s) = t + s \\
x(t) &= \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{2}st + c(s) && \overset{\text{AW}}{\Rightarrow} \; c(s) = s && \Rightarrow \; x(t,s) = \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{2}st + s
\end{aligned}
$$

Wegen der charakteristischen Bedingung können wir dieses Gleichungssystem nach $t$ und $s$ auflösen:

$$
\begin{aligned}
y(t,s) &= t + s \;\; \Rightarrow \;\; s = y - t \\
x(t,s) &= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + s = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}(y-t)t + y - t = t\left(\frac{1}{2}y - 1\right) + y
\end{aligned}
$$

also

$$
t(x,y) = \frac{x-y}{\frac{1}{2}y - 1} \qquad \text{und} \qquad s(x,y) = y - \frac{x-y}{\frac{1}{2}y - 1}
$$

Setzen wir dies als Lösung $u(x,y) = \alpha(t(x,y), s(x,y)$ zusammen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \alpha\left(\frac{x-y}{\frac{1}{2}y-1}\ ,\ y - \frac{x-y}{\frac{1}{2}y-1}\right) \\
&= \frac{x-y}{\frac{1}{2}y-1} + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\frac{x-y}{\frac{1}{2}y-1} \\
&= \frac{x-y}{y-2} + \frac{1}{2}y \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}, y \neq 2
\end{aligned}$$

Überprüfen wir unser Ergebnis: Es gilt

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{x-y}{y-2} + \frac{1}{2}y \\
u_x(x,y) &= \frac{1}{y-2} \\
u_y(x,y) &= \frac{-1}{y-2} - \frac{x-y}{(y-2)^2} + \frac{1}{2} = \frac{2-x}{(y-2)^2} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Setzen wir dies in die partielle Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
u(x,y) \cdot u_x(x,y) + u_y(x,y) &= \left(\frac{x-y}{y-2} + \frac{1}{2}y\right) \cdot \frac{1}{y-2} + \frac{2-x-2y}{(y-2)^2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{x-y}{(y-2)^2} + \frac{1}{2}y\frac{1}{y-2} + \frac{2-x}{(y-2)^2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{2-y}{(y-2)^2} + \frac{1}{2}y\frac{1}{y-2} + \frac{1}{2} \\
&= \left(\frac{1}{2}y - 1\right)\frac{1}{y-2} + \frac{1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

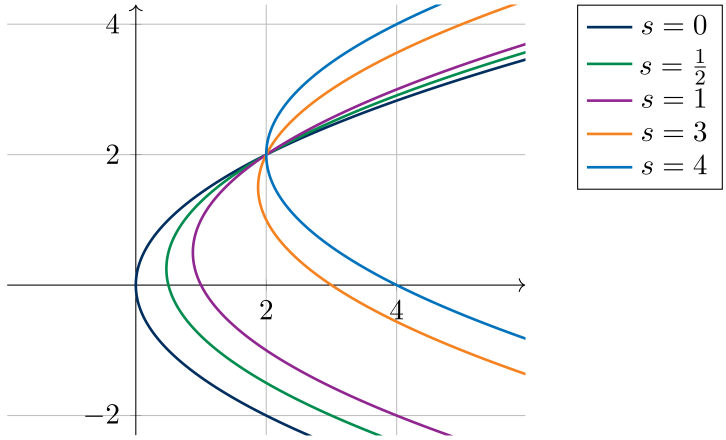
und für die Randwerte $u(x,x) = \frac{1}{2}x$ für alle $x \neq 2$.

Betrachten wir die Charakteristiken beschrieben mit einer Parametrisierung für fixiertes $s \neq 2$ und betrachten das Gleichungssystem

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + s \\ t+s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad t \quad = 2 - s \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{1}{2}(2-s)^2 + \frac{1}{2}s(2-s) + s = 2$$

Somit sind die Gleichungen unabhängig von $s \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ erfüllt und alle Charakteristiken gehen durch den Punkt $(2,2)$.

**Charakteristiken** $x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + s \\ t + s \end{pmatrix}$



# Hausaufgaben

**Partielle Differentialgleichungen** – Übungsblatt 4

**Eric Kunze**
Matr.-Nr. 4679202

**Aufgabe 7.** Wir betrachten die *Burgers-Gleichung*

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0 \qquad \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= g(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(a) Es sei zuerst $g$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$v(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq \frac{1}{2}t, \\ 0 & \text{für } x < \frac{1}{2}t \end{cases} \qquad \text{und} \qquad w(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq t, \\ \frac{x}{t} & \text{für } x \in [0,t), \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

schwache Lösungen sind.

*Hinweis*: Es genügt, die Randwerte, die Rankine-Hugoniot-Bedingung auf Sprungkurven und die Differentialgleichung abseits dieser Kurven zu überprüfen.

(b) Es sei nun $g$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0 \\ 1-x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

i. Offenbar ist $g \notin C^1(\mathbb{R})$. Stellen Sie dennoch die charakteristischen Gleichungen auf und ermitteln Sie, welche Lösung man formal für $t < 1$ erwarten würde.

ii. In welchen Punkten $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,1)$ gilt $u_t + uu_x = 0$?

iii. Setzen Sie $u$ derart auf $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ fort, dass nur eine Sprungkurve existiert und dass entlang dieser die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt ist.

*Hinweis*: Es bietet sich an, dass $u$ für $t \geq 1$ nur die Werte 0 und 1 annimmt.

Für die Burgers-Gleichung gilt in Anlehnung an die Notation der Vorlesung $F(u)_x = uu_x$ und damit $F(u) = \frac{1}{2}u^2$.

(zu a) Wir betrachten die Funktion $v$. Für die Randwerte, d.h. für $y = 0$ gilt

$$v(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} = g(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Die Sprungkurve ist gegeben durch $s(t) = \frac{1}{2}t$ mit $\dot{s} = \frac{1}{2}$. Es gilt $[[v]] = -1$ und $[[F(v)]] = 0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, also ist mit $[[F(v)]] = \dot{s} \cdot [[v]]$ die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt. Betrachte die Differentialgleichung abseits der Sprungkurve:

- Sei $x > \frac{1}{2}t$. Dann ist $v$ gegeben durch $v(x,t) = 1$ und somit $v_t = v_x \equiv 0$. Eingesetzt in die PDE ergibt dies $v_t + vv_x = 0 + 1 \cdot 0 = 0$. ✓
- Sei $x < \frac{1}{2}t$. Dann ist $v$ gegeben durch $v(x,t) = 0$ und somit $v_t = v_x \equiv 0$. Eingesetzt in die PDE ergibt dies $v_t + vv_x = 0 + 0 \cdot 0 = 0$. ✓

Betrachten wir nun die Funktion $w$. Die Randwerte werde wegen

$$w(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} = g(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

erfüllt. Wir erhalten hier zwei Sprungkurven:

- Die Winkelhalbierende können wir durch $s_1(t) = t$ parametrisieren, also ist $\dot{s} = 1$. Dann ergibt sich für die Differenzen

$$[[F(w)]] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{und} \quad [[w]] = 1 - \frac{t}{t} = 0 \quad \Rightarrow \quad [[F(w)]] = \dot{s_1} \cdot [[w]]$$

- Für die andere Sprungkurve, die wir mit $s_2(t) = 0$ parametrisieren ($\dot{s} = 0$), erhalten wir

$$[[F(w)]] = 0 - 0 = 0 \quad \text{und} \quad [[w]] = \frac{0}{t} - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad [[F(w)]] = \dot{s_2} \cdot [[w]]$$

Die Differentialgleichung wird abseits der Sprungkurven auch erfüllt:

- Sei $x > t$. Dann ist $w$ gegeben durch $w(x,t) = 1$ und somit $w_t = w_x \equiv 0$. Eingesetzt in die PDE ergibt dies $w_t + ww_x = 0 + 1 \cdot 0 = 0$. ✓
- Sei $x \in [0,t)$. Dann ist $w$ gegeben durch $w(x,t) = \frac{x}{t}$ und somit $w_t = \frac{-x}{t^2}$ und $w_x = \frac{1}{t}$. Eingesetzt in die PDE ergibt dies $w_t + ww_x = \frac{-x}{t^2} + \frac{x}{t}\frac{1}{t} = 0$. ✓
- Sei $x < 0$. Dann ist $w$ gegeben durch $w(x,t) = 0$ und somit $w_t = w_x \equiv 0$. Eingesetzt in die PDE ergibt dies $w_t + ww_x = 0 + 0 \cdot 0 = 0$. ✓

Damit sind also $v$ und $w$ schwache Lösungen der partiellen Differentialgleichung.

(zu b) Mit $y := (x,t)$, $a(u,y) = \binom{u}{1}$ und $b(u,y) = 0$ hat die Burgergsgleichung die quasilineare

Form der Vorlesung. Dann sind die charakteristischen Gleichungen gegeben durch

$$\begin{aligned}
\dot{y}(\tau, \sigma) &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{t} \end{pmatrix} = a(\alpha, y) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \\
\dot{\alpha}(\tau, \sigma) &= a(\alpha, y) \cdot Du = -b(u, y) = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha(0, \sigma) = g(\sigma)
\end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir die Lösung $\alpha(\tau, \sigma) = g(\sigma)$, d.h. $u$ ist entlang der Charakteristiken konstant. Aus der ersten Gleichung erhalten wir zum einen die Identifizierung $\tau = t$, d.h. die Charakteristiken können durch die Zeit $t$ parametrisiert werden. Zum anderen die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{x} = \alpha$ mit der Lösung $x(\tau, \sigma) = g(\sigma) \cdot \tau + s$ bzw. mit der Identifizierung dann $x(t) = g(\sigma) \cdot t + \sigma$. Setzen wir die Definition von $g$ ein, so erhalten wir

$$x(t) = \begin{cases} t + \sigma & \sigma \leq 0 \\ (1 - \sigma)t + \sigma & 0 \leq \sigma \leq 1 \\ \sigma & \sigma \geq 1 \end{cases}$$

Für $t \leq 1$ können wir jeden Fall umstellen und erhalten

$$\sigma = \begin{cases} x - t & x - t \leq 0 \\ \frac{x-t}{1-t} & x - t \geq 0 \wedge x \leq 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$$

Nach Konstruktion erhalten wir dann die Lösung

$$u(x, t) = \alpha(\tau, \sigma) = g(\sigma(t, x)) = \begin{cases} 1 & x - t \leq 0 \\ 1 - \frac{x-t}{1-t} & x - t \geq 0 \wedge x \leq 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

Sei nun $t \in (0, 1)$. Wir prüfen die Gültigkeit der Differentialgleichung:

- Sei $x - t \leq 0$. Dann ist also $u(x, t) = 1$ und $u_x = u_t \equiv 0$ und die Differentialgleichung erfüllt.
- Ist $x - t \geq 0$ und $x \leq 1$, dann ist $u(x, t) = 1 - \frac{x-t}{1-t}$ und $u_x(x, t) = \frac{1}{1-t}$ sowie $u_t(x, t) = \frac{(t-1)+(x-t)}{(1-t)^2}$. In die Differentialgleichung eingesetzt ergibt dies

$$u_t + uu_x = \frac{(t-1) + (x-t)}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t} - \frac{x-t}{(1-t)^2} = 0 \quad \checkmark$$

- Sei $x \geq 1$. Dann ist $u = u_x = u_t \equiv 0$ und die Differentialgleichung damit erfüllt.

Somit ist $u$ Lösung der Differentialgleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ und $t \in (0, 1)$.

**Aufgabe 8.** Betrachten Sie das Beispiel „Ampel (von rot auf grün)“ aus der Vorlesung, modelliert durch

$$\begin{aligned} u_t + F(u)_x &= 0 \qquad \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= g(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit

$$F(u) = u(60 - \frac{2}{5}u) \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} 150 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) In der Vorlesung wurde in Teil a) eine Funktion $u_a$ explizit gegeben. In Teil b) wurde eine weitere Lösung $u_b$ skizziert. Ermitteln Sie $u_b$ explizit.

*Hinweis*: Die charakteristischen Gleichungen geben $u_b$ auf eine großen Menge vor. Ermitteln Sie $u_b$ für die restlichen $(x,t)$, indem sie eine differenzierbare reelle Funktion $v$ derat bestimmen, dass $u_b(x,t) = v(\frac{x}{t})$ die Differentialgleichung löst.

(b) Überprüfen Sie für $u_a$ und $u_b$ entlang aller Sprungkurven die Rankine-Hugoniot-Bedingung und die Entropiebedingung.

(zu a) Für die skalare Erhaltungsgleichung erhalten wir die aus der Vorlesung bekannten Bezeichnungen mit $y = (x,t)$, $a(u,y) = (60 - \frac{4}{5}u\ ,\ 1)$ und $b \equiv 0$. Außerdem sind die Startwerte der charakteristischen Gleichungen gegeben durch $x_0(s) = s$, $t_0(s) = 0$, und als Randwerte $g(s) = 150 \cdot \mathbb{1}_{\{s<0\}}(s)$. Wir erhalten die charakteristischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{y}(\tau,\sigma) &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{t} \end{pmatrix} = a(\alpha, y) = \begin{pmatrix} 60 - \frac{4}{5}u \\ 1 \end{pmatrix} \\ \dot{\alpha}(\tau,\sigma) &\overset{\text{DGl}}{=} -b(\alpha,y) = 0 \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile der ersten Gleichung erhalten wir dabei die Identifizierung $t(\tau,\sigma) = \tau$. Die zweite charakteristische Gleichung löst sich unter Nutzung des Anfangswertes $\alpha(0,\sigma) = g(\sigma)$ zu $\alpha(\tau,\sigma) = g(\sigma)$. Setzen wir dies in die erste Zeile der ersten Gleichung ein, so erhalten wir $\dot{x}(\tau,\sigma) = 60 - \frac{4}{5}g(\sigma)$. Dies löst sich mit dem Anfangswert $x(0,\sigma) = \sigma$ zu

$$x(\tau,\sigma) = 60\tau - \frac{4}{5}g(\sigma)\cdot\tau + \sigma = \begin{cases} -60t + \sigma & \sigma < 0 \\ 60t + \sigma & \sigma \geq 0 \end{cases}$$

Für $\tau = t > 0$ lässt sich dies umstellen zu

$$\sigma(x,t) = \begin{cases} x + 60t & x < 0 \\ x - 60t & x \geq 0 \end{cases}$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$u(x,t) = \alpha(t,\sigma) = \begin{cases} 150 & \sigma(x,t) < 0 \\ 0 & \sigma(x,t) \geq 0 \end{cases}$$

Da $t \in (0, \infty)$ ist, ist somit $u$ auf der Menge $\{(x,t) : t \in (0,\infty), x \notin (-60t, 60t)\}$ eindeutig vorgegeben. Wir erweitern nun auf $t \in \mathbb{R}$ und betrachte $x \in (-60t, 60t)$. Dabei soll eine Funktion $v$ mit $u(x,t) = v(\frac{x}{t})$ bestimmt werden, die die PDE erfüllt. Die Funktion $u$ muss gemäß Vorlesung ihr Maximum auf der $t$-Achse, also für $x = 0$ annehmen. Dementsprechend gilt $u(0,t) = v(\frac{0}{t}) = v(0) = u_{\text{opt}} = 75$. Da wir $x \in (-60t, 60t)$ betrachten, gilt $\frac{x}{t} = (-60, 60)$. Die Randwerte sollten dabei mit minimaler (rechts) bzw. maximaler (links) Dichte gegeben sein, d.h. $v(-60) = 150$ und $v(60) = 0$. Diese drei Punkte definieren uns eine eindeutige Polynomfunktion zweiten Grades:

$$v(\xi) = -\frac{5}{4s}\xi + 75 \qquad \text{auf } (-60, 60)$$

Damit können wir $u$ definieren als

$$u(x,t) = v(\frac{x}{t}) = -\frac{5}{4}\frac{x}{t} + 75 \qquad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ und } x \in (-60t, 60t)$$

Damit gilt $u_x(x,t) = -\frac{5}{4}\frac{1}{t}$ und $u_t(x,t) = \frac{5}{4}\frac{x}{t^2}$. In die PDE eingesetzt liefert dies

$$\begin{aligned} u_t + F(u)_x &= u_t + \left(60 - \frac{4}{5}u\right) u_x \\ &= \frac{5}{4}\frac{x}{t^2} + \left(60 + \frac{x}{t} - 60\right)\left(-\frac{5}{4}\frac{1}{t}\right) = \frac{5}{4}\frac{x}{t^2} - \frac{5}{4}\frac{x}{t^2} = 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Somit können wir $u$ schlussendlich definieren als

$$u(t,x) = \begin{cases} 150 & x < -60t \\ -\frac{5}{4}\frac{x}{t} + 75 & -60t \leq x \leq 60t \\ 0 & x > 60t \end{cases}$$

(zu b) Definiere $u_b := u$ von oben. Man sieht leicht, dass $u_b$ eine stetige Funktion ist. Daher existieren keine Sprungkurven und die Rankine-Hugoniot- bzw. Entropie-Bedingungen müssen nicht betrachtet werden. (Die Rankine-Hugoniot-Bedingungen werden trivialerweise trotzdem erfüllt, aber die Entropie-Bedingung nicht mehr).

Aus der Vorlesung bekannt ist

$$u_a(x,t) = \begin{cases} 150 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

Wir betrachten die Sprungkurve $x = s(t) = 0$. Dann ist auch $\dot{s} = 0$ und mit $F(u) = u\left(60 - \frac{2}{5}u\right)$ gilt

$$\left.\begin{aligned} [[u]] &= 150 \\ [[F(u)]] &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow [[F(u)]] = \dot{s} \cdot [[u]]$$

Es ist $F'(u) = 60 - \frac{4}{5}u$ und damit $F'(u_l) = F'(150) = -60$ sowie $F'(u_r) = F'(0) = 60$. Somit ist die Entropie-Bedingung verletzt.

# Hausaufgaben

**Eric Kunze**

**Partielle Differentialgleichungen** – Übungsblatt 5

Matr.-Nr. 4679202

**Aufgabe 12.** Eine Funktion $u \in C^2(U)$ über einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt harmonisch, falls $\Delta u = 0$ in $U$.

(a) Zeigen Sie, dass die durch

$$u(x) = \begin{cases} \ln(|x|) & \text{für } n = 2, \\ \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{für } n \geq 3 \end{cases}$$

definierte Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ harmonisch ist.

(b) Es sei $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal. Zeigen Sie, dass durch $v(x) = u(Ax)$ eine harmonische Funktion $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert wird.

(zu a) Sei $n = 2$ und $x = (x_1, x_2) \in U$. Dann ist $u(x) = \ln|x| = \ln(r(x))$ mit $r(x) := |x|$. Mit $r_{x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|}$ ist

$$u_{x_i}(x) = \frac{1}{|x|} \cdot r_{x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|^2} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}$$

Leiten wir weiter nach $x_i$ ab, dann erhalten wir

$$u_{x_i x_i}(x) = \partial_{x_i} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_i \cdot 2x_i}{|x|^4} = \frac{|x|^2 - 2x_i^2}{|x|^4}$$

und somit für den Laplace-Operator

$$\Delta u(x) = x_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = \frac{|x|^2 - 2x_2^2}{|x|^4} + \frac{|x|^2 - 2x_2^2}{|x|^4} = 0 \quad \checkmark$$

Sei $n \geq 3$. Dann ist $u(x) = |x|^{2-n}$. Es gilt

$$\begin{aligned} u_{x_i}(x) &= (2-n) \cdot |x|^{1-n} \cdot \frac{x_i}{|x|} = (2-n) \cdot |x|^{-n} \cdot x_i \\ u_{x_i x_i} &= (2-n) \cdot \partial_{x_i} \left( x_i \cdot |x|^{-n} \right) \\ &= (2-n) \cdot \left( |x|^{-n} - n \cdot |x|^{-n-1} \frac{x_i}{|x|} \cdot x_i \right) \\ &= (2-n) \cdot \left( |x|^{-n} - n \cdot |x|^{-n-2} \cdot x_i^2 \right) \end{aligned}$$

Damit gilt für den Laplace-Operator

$$\begin{aligned} \Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x) &= (2-n) \cdot \left( \sum_{i=1}^{n} |x|^{-n} - n \cdot |x|^{-n-2} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \\ &= (2-n) \left( n \cdot |x|^{-n} - n \cdot |x|^{-n-2} \cdot |x|^2 \right) \\ &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

(zu b) Sei $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, d.h. $A^\top = A^{-1}$. Betrachte

$$v_{x_i}(x) = Du(Ax)\cdot \partial_i Ax = Du(Ax)\cdot a_i = \sum_{k=1}^n u_{x_k}(Ax)\cdot a_{ki}$$
$$v_{x_i x_i}(x) = \partial_{x_i}\left(\sum_{k=1}^n u_{x_k}(Ax)\cdot a_{ki}\right) = \sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n u_{x_k x_\ell}(Ax)\cdot a_{ki}a_{\ell i}$$

Aufgrund der Orthogonalität von $A$ ist $\sum_{i=1}^n a_{ki}a_{\ell i} = \delta_{k\ell}$. Somit ist

$$\Delta v(x) = \sum_{i=1}^n v_{x_i x_i}(x) = \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n u_{x_k x_\ell}(Ax)\cdot a_{ki}a_{\ell i} = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(Ax) = \Delta u(Ax) = 0 \quad \checkmark$$

und daher auch $v$ harmonisch.

**Aufgabe 13.** Es sei $\Phi$ die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung, d. h.

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln(|x|) & \text{für } n = 2,\\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{für } n \geq 3\end{cases}$$

für $x \neq 0$. Zeigen Sie für $x \neq 0$ die Abschätzungen $|D\Phi(x)| \leq c\,|x|^{1-n}$ und $\left|D^2\Phi(x)\right| \leq c\,|x|^{-n}$.

Für $n = 2$ gilt $\Phi_{x_i}(x) = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|x|}\cdot\frac{x_i}{|x|} = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{x_i}{|x|^2}$. Leiten wir für $n \geq 3$ nach $x_i$ ab, so erhalten wir $\Phi_{x_i}(x) = \frac{2-n}{n(n-2)\alpha(n)}\cdot|x|^{1-n}\frac{x_i}{|x|} = \frac{2-n}{n(n-2)\alpha(n)}\cdot x_i\cdot|x|^{-n}$. Beide Fälle können wir mit einer universellen Konstante $c$ zusammenfassen und erhalten mit $\frac{x_i}{|x|} \leq 1$ auch folgende Abschätzung:

$$\Phi_{x_i}(x) = c\cdot x_i\cdot|x|^{-n} = c\cdot|x|^{1-n}\cdot\frac{x_i}{|x|} \leq c\cdot|x|^{1-n} \qquad (i = 1,\dots,n)$$

Damit erhalten wir für die erste Ungleichung

$$|D\Phi(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Phi_{x_i}(x)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n\left(c\cdot|x|^{1-n}\right)^2} = c\cdot n\cdot|x|^{1-n} = c\cdot|x|^{1-n}$$

Für die zweiten Ableitungen gilt dann entsprechend

$$\Phi_{x_i x_j}(x) = c\left(\delta_{ij}\,|x|^{-n} - nx_i\,|x|^{-n-1}\cdot\frac{x_j}{|x|}\right) = c\cdot|x|^{-n}\left(\delta_{ij} - n\cdot x_i x_j\cdot|x|^{-2}\right)$$
$$\Rightarrow \qquad \left|D^2\Phi(x)\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \Phi_{x_i x_j}(x)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(|x|^{-n}\right)^2\cdot\left(c\delta_{ij} - nx_i x_j\,|x|^{-2}\right)^2}$$
$$= |x|^{-n}\sqrt{nc^2 - 2n\,|x|^{-2}\sum_{i=1}^n x_i^2 + n^2\,|x|^{-4}\sum_{i=1}^n x_i^2\sum_{j=1}^n x_j^2}$$
$$= |x|^{-n}\cdot\sqrt{nc^2 - 2n + n^2}$$
$$\leq c\,|x|^{-n}$$

# Hausaufgaben

**Eric Kunze**

**Partielle Differentialgleichungen** – Übungsblatt 6

Matr.-Nr. 4679202

**Aufgabe 15.** Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ eine Lösung von

$$-\Delta u = f(u,x) \quad \text{in } U, \qquad u = g \quad \text{auf } \partial U,$$

wobei $f$ und $g$ im Folgenden spezifisch gewählt werden.

(a) Es sei $f(u,x) = u - u^3$ und $g = 0$. Beweisen Sie *mit elementaren Methoden* die Abschätzung $-1 \leq u(x) \leq 1$ für alle $x \in \overline{U}$.

(b) Es sei $U = (-a,a)^n$ für ein $a > 0$, $f(u,x) = -1$ und $g = 0$. Finden Sie möglichst gute obere und untere Schranken für $u(0)$, indem Sie eine harmonische Funktion der Form $v = u + w$ betrachten, wobei $w$ geeignet zu wählen ist

(c) Es sei $U = B_1(0)$, $f(u,x) = h(x)$ mit $h, g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass es eine von $n$, $h$, $g$ und $u$ unabhängige Konstante $c > 0$ gibt, für die gilt:

$$\max_{B_1(0)} |u| \leq c \cdot \left( \max_{\partial B_1(0)} |g| + \max_{B_1(0)} |h| \right)$$

*Hinweis*: Betrachten sie $u - v$, wobei $v(x) = \max_{\partial B_1(0)} |g| + (e^2 - e^{x_1+1}) \max_{B_1(0)} |h|$.

(zu a) Es sei $f(u) = u - u^3$ und $g \equiv 0$. Da $U$ beschränktes Gebiet ist und $\overline{U}$ eine abgeschlossene Menge, ist also $\overline{U}$ kompakt. Da $u$ stetig auf $\overline{U}$ ist, nimmt $u$ ein Maximum in einem $x_0 \in \overline{U}$ an. Nehmen wir an es sei $u(x_0) > 1$. Es gilt $\equiv g \equiv 0$ auf $\partial U$, d.h. um ein Maximum $u(x_0 > 1$ zu besitzen, muss $x_0 \in \operatorname{int} U$ sein. Da $u(x_0)$ Maximum ist mit $u \in C^2(U)$, gilt $u_{x_i x_i}(x_0) \leq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Nach Differentialgleichung ist dann also

$$0 \leq -\Delta u(x_0) = -\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x_0) = u(x_0) - u^3(x_0) = u(x_0) \left(1 - u(x_0)^2\right) \overset{u(x_0)>1}{<} 0$$

ein Widerspruch. Somit ist dann $u(x_0) \leq 1$ und aufgrund der Maximalität von $u(x_0)$ auch $u(x) \leq u(x_0) \leq 1$ für alle $x \in \overline{U}$.

Analog dazu nimmt $u$ auf $\overline{U}$ ein globales Minimum in $x_0 \in \overline{U}$ an, für welches nach gleicher Argumentation wie oben $x_0 \in \operatorname{int} U$ gilt. Nehmen wir an, es sei $u(x_0) < -1$. Als Minimalstelle gilt $u_{x_i x_i}(x_0) \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Nach PDE gilt dann

$$0 \geq -\Delta u(x_0) = -\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x_0) = u(x_0) - u^3(x_0) = u(x_0) \left(1 - u(x_0)^2\right) \overset{u(x_0)<-1}{<} 0$$

ein Widerspruch. Somit ist $u(x) \geq u(x_0) \geq -1$ für alle $x \in \overline{U}$ und schließlich gilt die Einschließung $-1 \leq u(x) \leq 1$ für alle $x \in \overline{U}$.

(zu b) Sei $a > 0$ und $U = (-a, a)^n$ ein $n$-dimensionaler (offener) Quader. Weiter sei $f \equiv -1$ und $g \equiv 0$. Gesucht sind „gute" (obere und untere) Schranken von $u(0)$. Wir betrachten eine harmonische Funktion $v$ der Form $v = u+w$, d.h. $0 = \Delta v = \Delta u + \Delta w = -f(u,x) + \Delta w = 1 + \Delta w$. Somit suchen wir nun eine Funktion $w$ mit $\Delta w = -1$. Eine Lösung dieser PDE erhalten wir beispielsweise mit $w(x) = -\frac{1}{2n}|x|^2 = -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n x_i^2$.

Wenden wir das Maximumsprinzip auf $v$ an, dann nimmt damit $v$ sein Maximum in einem $x_0 \in \partial U$ an. Aufgrund der Randwertbedingung gilt dort $u \equiv 0$. Wir betrachten oBdA den Randpunkt $x_0 = (a, 0, \dots, 0) \in \partial U$. Dieser minimiert $\sum_{i=1}^n x_i^2$, da jeder andere Randpunkt auch mindestens eine Koordinate $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $x_j = \pm a$ besitzt. Somit gilt dann schlussendlich

$$u(0) = v(0) - w(0) = v(0) \leq \max_{x \in U} v(x) \leq \max_{x \in \partial U} (u(x) + w(x)) \leq w(x_0) = -\frac{1}{2n}a^2$$

Analog liefert das Minimumsprinzip die Existenz des Minimum in $x_0 \in \partial U$. Nach Randwertbedingung gilt dort wieder $u(x_0) = 0$. Die Funktion $w$ wird auf dem Rand minimiert durch den Punkt $x_0 = (a, \dots, a) \in \partial U$ mit Minimalwert $w(x_0) = -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n a^2 = -\frac{1}{2}a^2$. Analog zu oben gilt nun

$$u(0) = v(0) - w(0) = v(0) \geq \min_{x \in U} v(x) \geq \min_{x \in \partial U} (u(x) + w(x)) \geq w(x_0) = -\frac{1}{2}a^2$$

Somit ist schließlich $-\frac{1}{2}a^2 \leq u(0) \leq -\frac{1}{2n}a^2$.

(zu c) Sei $U = B_1(0)$ und $f(u,x) = h(x))$ für $g, h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Gemäß Hinweis betrachten wir $u - v$ mit $v(x) := \max_{\partial B_1(0)} |g| + (e^{-} e^{x_1+1}) \cdot \max_{\overline{B_1(0)}} |h|$. Es ist $\Delta v(x) = -e^{x_1+1} \cdot \max_{\overline{B_1(0)}} |h| \leq -\max_{\overline{B_1(0)}} |h|$. Somit ist

$$-\Delta(u-v)(x) = -\Delta u(x) + \Delta v(x) = f(u,x) - \Delta v(x) \leq h(x) - \max_{\overline{B_1(0)}} |h| \leq 0 \quad \forall x \in B_1(0)$$

Damit ist $u - v$ subharmonisch und mit dem Maximumsprinzip gilt auch hier, dass das Maximum in einem $x_0 \in \partial B_1(0)$ angenommen wird. Dementsprechend gilt

$$\max_{\overline{B_1(0)}} (u - v) \leq \max_{\partial B_1(0)} (u - v) \leq \max_{\partial B_1(0)} u + \max_{\partial B_1(0)} (-v) = \max_{\partial B_1(0)} |g| - \max_{\partial B_1(0)} |g| = 0$$

sowie daraus folgend

$$\begin{aligned} \max_{\overline{B_1(0)}} u \leq \max_{\overline{B_1(0)}} (u - v) + \max_{\overline{B_1(0)}} v = \max_{\overline{B_1(0)}} v & \\ &= \max_{\partial B_1(0)} |g| + \max_{\overline{B_1(0)}} |h| \cdot \max_{\overline{B_1(0)}} \left(e^2 - e^{x_1+1}\right) \\ &= \max_{\partial B_1(0)} |g| + (e^2 - \underbrace{e^0}_{=1}) \cdot \max_{\overline{B_1(0)}} |h| \end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung funktioniert auch mit $-u$ bzw. $f(u,x) = -h(x)$, sodass $c := e^2 - 1$ vollständig unabhängig ist.

**Aufgabe 16.** Für $t > 0$ ist die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$ gegeben durch $u(x,t) = (ct)^{-n/2}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ mit einer Konstante $c > 0$. Zeigen Sie:

(a) $u_t = \Delta u$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$.

(b) $\lim_{t\to 0+} u(x,t) = 0$ für $x \neq 0$, $\lim_{t\to 0+} u(0,t) = \infty$ und $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$.

(c) $\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)dx = 1$ für alle $t > 0$ und $c = 4\pi$.

(zu a) Es sei $u(x,t) = (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) &= c^{-\frac{n}{2}}\left(-\frac{n}{2}\right)t^{-\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + (ct)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \frac{4\,|x|^2}{16t^2} \\
&= (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{n}{2}t^{-1} + \frac{|x|^2}{4t^2}\right) \\
&= (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \left(\frac{|x|^2 - 2nt}{4t^2}\right) \\
u_{x_i}(x,t) &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{2x_i}{4t}\right) = -(ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \frac{x_i}{2t} \\
u_{x_ix_i}(x) &= (ct)^{-\frac{n}{2}}\left(e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \frac{x_i}{2t} \cdot \frac{x_i}{2t} - \frac{1}{2t}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right) \\
&= (ct)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\left(\frac{x_i^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right) \\
\Delta_x u(x,t) &= \sum_{i=1}^n x_{x_ix_i}(x) = (ct)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\left(\frac{1}{4t^2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n}{2t}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n x_{x_ix_i}(x) = (ct)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\left(\frac{|x|^2 - 2nt}{4t^2}\right)
\end{aligned}$$

Somit gilt also $u_t = \Delta u$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$.

(zu b)
- Sei $x \neq 0$. Es ist

$$\lim_{t\to 0+} \frac{n}{2}\ln(t) + \frac{|x|^2}{4} \cdot \frac{1}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{2nt\ln(t) + |x|^2}{4t}$$

Betrachten wir zunächst den Ausdruck $2nt \cdot \ln(t) = 2n \cdot \frac{\ln(t)}{\frac{1}{t}}$. Mit der Regel von l'Hôpital erhalten wir

$$\lim_{t\to 0+} 2n \cdot \frac{\ln(t)}{\frac{1}{t}} = 2n \cdot \lim_{t\to 0+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = -2n \cdot \lim_{t\to 0+} t = 0$$

Damit erhalten wir dann recht einsichtig

$$\lim_{t\to 0+} \frac{2nt\ln(t) + |x|^2}{4t} = \infty$$

und schließlich

$$\lim_{t\to 0+} (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = c' \cdot \lim_{t\to 0+} e^{\ln(t^{-\frac{n}{2}})} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = c' \cdot \lim_{t\to 0+} e^{-\left(\frac{n}{2}\ln(t) + \frac{|x|^2}{4t}\right)} = 0$$

- Sei $t_k \to 0+$ für $k \to \infty$. Dann ist

$$\lim_{t \to 0+} u(0,t) = \lim_{k\to\infty} (c\ t_k)^{-\frac{n}{2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(c\ t_k)^{\frac{n}{2}}} = \infty$$

- Sei nun $t_k \to \infty$ für $k \to \infty$. Dann ist

$$\lim_{t\to\infty} (c\ t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(c\ t_k)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp\left(\lim_{k\to\infty} -\frac{|x|^2}{4t_k}\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

(zu c) Wir wollen die Substitution $y_i = \frac{x_i}{2\sqrt{t}}$ verwenden. Dabei ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i} y_i = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \ \mathrm{d}x &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \ \mathrm{d}x \\
&= (ct)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-x_1^2 - \cdots - x_n^2}{4t}} \ \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \\
&= (ct)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{-x_i^2}{4t}} \ \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \\
&= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_i^2}{4t}} \ \mathrm{d}x_i \\
&= \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_i^2}{4t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \ \mathrm{d}x_i \\
&\overset{\text{subst.}}{=} \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-y_i^2} \ \mathrm{d}y_i \\
&= \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y_i^2} \ \mathrm{d}y_i}_{=1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

# Hausaufgaben

**Eric Kunze**

**Partielle Differentialgleichungen** – Übungsblatt 7

Matr.-Nr. 4679202

**Aufgabe 18.** Für $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ ist

$$E(x,t;r) = \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq t, \Phi(x-y,t-s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}$$

wobei $\Phi$ die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung ist. Zeigen Sie

$$E(0,0;r) = \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq 0, |y|^2 \leq 2ns \, \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right) \right\}$$

und bestimmen Sie für jedes $s \in \mathbb{R}$ den Schnitt $B_s := \{ y \in \mathbb{R}^n \mid (y,s) \in E(0,0;r) \}$

*Hinweis*: $E(x,t;r)$ ist der aus der Vorlesung bekannte *Wärmeball*. Dabei ist $\Phi(x,0)$ als Grenzwert $\lim_{s \to 0+} \Phi(x,s)$ zu interpretieren. Analoges gilt in der Darstellung von $E(0,0;r)$.

Es ist $\Phi(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ für $t > 0$ die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichungen. Betrachten wir $E(0,0;r)$. Die Bedingung $s \leq t$ wird damit automatisch zu $s \leq 0$ und wir können umstellen:

$$\begin{aligned}
\Phi(-y,-s) = (-4\pi s)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{-4s}} \geq \frac{1}{r^n} \qquad &\Leftrightarrow \qquad e^{-\frac{|y|^2}{-4s}} \geq \frac{(-4\pi s)^{\frac{n}{2}}}{r^n} \\
&\Leftrightarrow \qquad -\frac{|y|^2}{-4s} \geq \ln\left(\frac{-4\pi s}{r^2}\right)^{\frac{n}{2}} \\
&\Leftrightarrow \qquad \frac{|y|^2}{-4s} \leq \frac{n}{2} \cdot \ln\left(\frac{r^2}{-4\pi s}\right) \\
&\Leftrightarrow \qquad |y|^2 \leq 2ns \cdot \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right)
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun $B_s := \{ y \in \mathbb{R}^n : (y,s) \in E(0,0;r) \}$. Wir unterscheiden fünf Fälle:

(i) Ist $s > 0$, so ist $B_s = \emptyset$.

(ii) Ist $s = 0$, so ist

$$\Phi(-y,0) = \lim_{t \to 0+} \Phi(-y,t) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } y \neq 0 \\ \infty & \text{wenn } y = 0 \end{cases}$$

Damit kann $\Phi(-y,0) \geq \frac{1}{r^2} > 0$ nur für $y = 0$ erfüllt sein, also $B_s = B_0 = \{(0,0)\}$.

(iii) Sein nun $s < 0$. Dann müssen wir in obiger Umstellung

$$|y|^2 \leq 2ns \cdot \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right)$$

beachten, wann die rechte Seite positiv bzw. Null wird. Da $s < 0$, sind alle Ausdrücke definiert. Es ist

$$0 = 2ns \cdot \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{4\pi s}{r^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s = -\frac{r^2}{4\pi}$$

und somit $B_s = B_{-\frac{r^2}{4\pi}} = \{(0,0)\}$. Abschließend ist

$$0 > 2ns \cdot \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{4\pi s}{r^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad s > -\frac{r^2}{4\pi}$$

d.h. $B_s = \emptyset$ für $s < -\frac{r^2}{4\pi}$ und

$$B_s = B_r(0) \text{ mit } r = \sqrt{2ns \cdot \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right)} \qquad \text{für } -\frac{r^2}{4\pi} < s < 0$$

Zusammengefasst gilt also

$$B_s = \begin{cases} \emptyset & \text{für } s > 0 \\ \{(0,0)\} & \text{für } s = 0 \\ \left\{ y \in \mathbb{R}^n : |y| \leq \sqrt{2ns \cdot \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right)} \right\} & \text{für } -\frac{r^2}{4\pi} < s < 0 \\ \{(0,0)\} & \text{für } s = -\frac{r^2}{4\pi} \\ \emptyset & \text{für } s < -\frac{r^2}{4\pi} \end{cases}$$

**Aufgabe 19.** Lösen Sie die *Wellengleichung* für $n = 1$, also das Problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = g, \quad u_t = h \quad & \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\} \end{aligned}$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung $\overline{u}_{\eta\xi} = 0$ auf $\mathbb{R}^2$. gegeben ist durch $\overline{u}(\eta, \xi) = F(\eta) + G(\xi)$, wobei $F, G \in C^1(\mathbb{R})$ beliebig sind.

(b) Betrachten Sie im $\mathbb{R}^2$ die Koordinatentransormation

$$\varphi(t, x) = (t + x, t - x) \quad \text{für } x, t \in \mathbb{R}.$$

und zeigen Sie, dass die Gleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$ genau dann erfüllt ist, wenn $\overline{u}_{\eta\xi} = 0$ für $\overline{u}(\eta, \xi) := (u \circ \varphi^{-1})(\eta, \xi)$ gilt.

(c) Nutzen Sie (a) und (b), um die *Formel von d'Alembert* herzuleiten, also die Lösungsdarstellung

$$u(x, t) = \tfrac{1}{2} \left( g(x + t) + g(x - t) \right) + \tfrac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \, \mathrm{d}y$$

*Hinweis*: Die Wellengleichung wird demnächst Gegenstand der Vorlesung sein. Dort wird die Formel von d'Alembert geschickt mittels der Methode der Charakteristiken hergeleitet.

(zu a) Sei $\overline{u}(\eta, \xi) = F(\eta) + G(\xi)$ für $F, G \in C^1(\mathbb{R})$. Dann ist $\overline{u}_\eta(\eta, \xi) = F'(\eta)$ und $\overline{u}_{\eta\xi}(\eta, \xi) = 0$ für alle $\eta, \xi \in \mathbb{R}$.

(zu b) Es ist $\varphi^{-1}(\eta, \xi) = \frac{1}{2}(\eta + \xi, \eta - \xi)$. Damit gilt unter Nutzung des Satz von Schwarz

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} u \left( \frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) \\ = \; & \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \tfrac{1}{2} \partial_1 u \left( \frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) + \tfrac{1}{2} \partial_2 u \left( \frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) \right) \\ = \; & \tfrac{1}{4} \partial_{11} u \left( \frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) - \tfrac{1}{4} \partial_{12} u \left( \frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) \\ & + \tfrac{1}{4} \partial_{21} u \left( \frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) - \tfrac{1}{4} \partial_{22} u \left( \frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) \\ = \; & \tfrac{1}{4} \left( u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) \right) \; = \; 0 \\ \Leftrightarrow \; 0 \; = \; & u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) \end{aligned}$$

(zu c) Mit (a) und (b) ist $u\left(\frac{\eta+\xi}{2}, \frac{\eta-\xi}{2}\right) = F(\eta) + G(\xi)$ bzw. $u(x, t) = F(x + t) + G(x - t)$. Mit den Randwerten ist

$$\begin{aligned} u(x, 0) = F(x) + G(x) = g(x) \qquad & \text{für alle } x \in \mathbb{R} \qquad \text{(I)} \\ u_t(x, 0) = F'(x) - G'(x) = h(x) \qquad & \text{für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Aus der zweiten Randwertbedingung erhalten wir

$$F(x) - G(x) = \int F'(x) - G'(x)\ \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} h(y)\ \mathrm{d}y \tag{II}$$

Addieren bzw. Subtrahieren wir Gleichungen (I) und (II) so erhalten wir

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}\left(g(x) + \int_{x_0}^{x} h(y)\ \mathrm{d}y\right) \\ G(x) &= \frac{1}{2}\left(g(x) - \int_{x_0}^{x} h(y)\ \mathrm{d}y\right) \end{aligned}$$

Setzen wir dies nun in die allgemeine Lösung von oben ein, dann erhält man mit

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(x-t) + \int_{x_0}^{x+t} h(y)\ \mathrm{d}y - \int_{x_0}^{x-t} h(y)\ \mathrm{d}y\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\ \mathrm{d}y \end{aligned}$$

die Formel von d'Alembert

# Hausaufgaben

**Eric Kunze**

**Partielle Differentialgleichungen** – Übungsblatt 8

Matr.-Nr. 4679202

**Aufgabe 20.** Lösen Sie die folgenden Probleme, indem Sie die Formel von d'Alembert aus Aufgabe 19 auf geeignete Hilfsprobleme anwenden.

a)
$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \text{ mit } c > 0, \\ u(x,0) &= x^2 |e^x - 1| && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= x|e^x - 1| && \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= x^2 && \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= x && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= 0 && \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(zu a) Definiere $v(x,t) \coloneqq u(cx,t)$. Dann wird die partielle Differentialgleichung zu $v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = u_{tt}(cx,t) - c^2 u_{xx}(cx,t) = 0$ und die Anfangswerte zu $v(x,0) = u(cx,0) = (cx)^2 \left|e^{cx} - 1\right| =: g(x)$ sowie $v_t(x,t) = u_t(cx,t) = cx \left|e^{cx} - 1\right| =: h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir lösen nun das Integral $\int_{x-t}^{x+t} h(y) \ \mathrm{d}y$ und wollen zuerst eine Stammfunktion finden:

$$\begin{aligned} \int h(y) \ \mathrm{d}y &= \int cy \cdot \left|e^{cy} - 1\right| \ \mathrm{d}y \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot c \cdot \int y(e^{cy} - 1) \ \mathrm{d}y \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot c \cdot \int y \cdot e^{cy} - y \ \mathrm{d}y \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot c \cdot \left( \int y \cdot e^{cy} \ \mathrm{d}y - \int y \ \mathrm{d}y \right) \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot c \cdot \left( \frac{1}{c} y e^{cy} - \frac{1}{c} \int e^{cy} \ \mathrm{d}y - \frac{1}{2} y^2 \right) \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot c \cdot \left( \frac{1}{c} y e^{cy} - \frac{1}{c^2} e^{cy} - \frac{1}{2} y^2 \right) \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot \frac{2(cy-1)e^{cy} - c^2 y^2}{2c} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das bestimmte Integral

$$\begin{aligned} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \ \mathrm{d}y &= \frac{1}{2c} \left[ \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot \left( 2(cy-1)e^{cy} - c^2 y^2 \right) \right]_{x-t}^{x+t} \\ &= \frac{1}{2c} \Big( \operatorname{sgn}(e^{c(x+t)} - 1) \cdot \left( 2(c(x+t)-1)e^{c(x+t)} - c^2 (x+t)^2 \right) \\ &\quad - \quad \operatorname{sgn}(e^{c(x-t)} - 1) \cdot \left( 2(c(x-t)-1)e^{c(x-t)} - c^2 (x-t)^2 \right) \Big) \end{aligned}$$

...

Damit gilt dann mit der Formel von d'Alembert

$$g(x+t) + g(x-t) = c^2(x+t)^2 \left| e^{cx+ct} - 1 \right| + c^2(x-t)^2 \left| e^{cx-ct} - 1 \right|$$

und abschließend also

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \tfrac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \tfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y) \ \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\left(c^2(x+t)^2 \left| e^{cx+ct} - 1 \right| + c^2(x-t)^2 \left| e^{cx-ct} - 1 \right|\right) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{1}{2c}\Big(\operatorname{sgn}(e^{c(x+t)} - 1) \cdot \left(2(c(x+t) - 1)e^{c(x+t)} - c^2(x+t)^2\right) \\
&\quad - \ \operatorname{sgn}(e^{c(x-t)} - 1) \cdot \left(2(c(x-t) - 1)e^{c(x-t)} - c^2(x-t)^2\right)\Big)
\end{aligned}$$

...

(zu b) Definiere $v(x,t) \coloneqq u(x,t) + \frac{1}{12}x^4$. Lösen wir nun das Hilfsproblem $v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - x^2 = 0$ mit den Anfangswerten $v(x,0) = u(x,0) + \frac{1}{12}x^4 = x + \frac{1}{12}x^4 =: g(x)$ sowie $v_t(x,0) = u_t(x,0) = 0 =: h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir wollen die Formel von d'Alembert anwenden und erhalten wegen $\int_{x-t}^{x+t} h(y) \ \mathrm{d}y = 0$

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \tfrac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \tfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y) \ \mathrm{d}y \\
&= \tfrac{1}{2}\left((x+t) + \tfrac{1}{12}(x+t)^4 + (x-t) + \tfrac{1}{12}(x-t)^4\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(2x + \tfrac{1}{12}\left(t^4 + 4t^3x + 6t^2x^2 + 4tx^3 + x^4 + t^4 - 4t^3x + 6t^2x^2 - 4tx^3 + x^4\right)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(2x + \tfrac{1}{12}\left(2t^4 + 12t^2x^2 + 2x^4\right)\right) \\
&= x + \tfrac{1}{12}t^4 + \tfrac{1}{2}t^2x^2 + \tfrac{1}{12}x^4
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$u(x,t) = v(x,t) - \tfrac{1}{12}x^4 = x + \tfrac{1}{12}t^4 + \tfrac{1}{2}t^2x^2$$

Testen wir diese Lösung: Es ist

$$\left.\begin{array}{rcl} u_{tt}(x,t) &=& t^2 + x^2 \\ u_{xx}(x,t) &=& t^2 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = t^2 + x^2 - t^2 = x^2$$

Außerdem sind die Randwerte erfüllt, da $u(x,0) = x$ und $u_t(x,0) = \frac{1}{3}t^3 + x^2t \,\big|_{t=0} = 0$.

**Aufgabe 21.** Es sei $u$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ das *sphärische Mittel*

$$v(y,t) \coloneqq M_u(x, |y|, t) \coloneqq \fint_{\partial B_1(0)} u(x + |y|\, z, t) \, \mathrm{d}O(z)$$

ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

*Hinweis*: Die Vorlesung vom 28. Mai kann inspirierend sein.

# Hausaufgaben

**Eric Kunze**

**Partielle Differentialgleichungen** – Übungsblatt 9

Matr.-Nr. 4679202

**Aufgabe 25.** Es seien $g \in C_0^2(\mathbb{R})$ und $h \in C_0^1(\mathbb{R})$ Funktionen mit kompaktem Träger, und es sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u = g \ , \ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases}$$

Die „kinetische Energie“ $k$ und die „potentielle Energie“ $p$ seien definiert durch

$$k(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x,t) \ \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad p(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x,t) \ \mathrm{d}x \quad (t > 0)$$

Zeigen Sie:

(a) $k + p$ ist konstant.

(b) $k(t) = p(t)$ für alle genügend großen $t$.

(zu a) Wir betrachten die Formel von d'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \ \mathrm{d}y$$

Das Integral können wir mittels $y = x + zt$ und $\mathrm{d}y = t\mathrm{d}z$ transformieren zu $t \cdot \int_{-1}^{1} h(x + zt) \ \mathrm{d}z$. Damit können wir problemlos nach $x$ und $t$ ableiten, wobei aufgrund der kompakten Träger die Reihenfolge von Integration und Differentiation vertauschbar ist. Es gilt also:

$$\begin{aligned}
u_x(x,t) &= \frac{1}{2}\left(g'(x+t) + g'(x-t) + t\int_{-1}^{1} h'(x+zt) \ \mathrm{d}z\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(g'(x+t) + g'(x-t) + h(x+t) - h(x-t)\right) \\
u_{xx}(x,t) &= \frac{1}{2}\left(g''(x+t) + g''(x-t) + h'(x+t) - h'(x-t)\right) \\
u_{xt}(x,t) &= \frac{1}{2}\left(g''(x+t) - g''(x-t) + h'(x+t) + h'(x-t)\right) \\
u_t(x,t) &= \frac{1}{2}\left(g'(x+t) - g'(x-t) + \int_{-1}^{1} h(x+zt) \ \mathrm{d}z + t\int_{-1}^{1} h'(x+zt)\cdot z \ \mathrm{d}z\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(g'(x+t) - g'(x-t) + h(x+t) + h(x-t)\right)
\end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass

$$(k+p)'(t) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t) \ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t) \underbrace{u_{tt}(x,t)}_{=u_{xx}(x,t)} + u_x(x,t)u_{xt}(x,t) \ \mathrm{d}x$$

Durch Einsetzen und Ausmultiplizieren erhalten wir einen fürchterlichen Term:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}u_t(x,t)u_{xx}(x,t)+u_x(x,t)u_{xt}(x,t)\\
=\;& g'(x+t)g''(x+t)+g'(x+t)h'(x+t)-g'(x-t)g''(x-t)+g'(x-t)h'(x-t)+\\
& h(x+t)g''(x+t)+h(x+t)h'(x+t)+h(x-t)g''(x-t)-h(x-t)h'(x-t)
\end{aligned}$$

Nun sind in jedem Summanden die inneren Ableitungen nach $t$ gleich, das heißt die Vorzeichen spielen bei der Integration über $x$ keine Rolle und wir erhalten

$$(k+p)'(t)=\int_{-\infty}^{\infty} 4\cdot\left(g'(z)h'(z)+g''(z)h(z)\right)\ \mathrm{d}z$$

sowie mit partieller Integration für den zweiten Summanden

$$\int_{-\infty}^{\infty} g''(z)h(z)\ \mathrm{d}z=\left[g'(z)h(z)\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty} g'(z)h'(z)\ \mathrm{d}z=-\int_{-\infty}^{\infty} g'(z)h'(z)\ \mathrm{d}z$$

Damit ist nun schlussendlich

$$\begin{aligned}
(k+p)'(t)&=4\cdot\int_{-\infty}^{\infty} g'(z)h'(z)\ \mathrm{d}z+4\cdot\int_{-\infty}^{\infty} g''(z)h(z)\ \mathrm{d}z\\
&=4\cdot\int_{-\infty}^{\infty} g'(z)h'(z)\ \mathrm{d}z-4\cdot\int_{-\infty}^{\infty} g'(z)h'(z)\ \mathrm{d}z=0
\end{aligned}$$

und folglich also $k+p$ konstant für alle $t>0$.

(zu b) Betrachten wir nun $k-p$. Der ausmultiplizierte Integrant ergibt sich als

$$u_x^2(x,t)-u_t^2(x,t)=g'(x+t)g'(x-t)-g'(x+t)h(x-t)+g'(x-t)h(x+t)-h(x+t)h(x-t)$$

Die Funktionen $g$ und $h$ leben auf kompakten Trägern, d.h. es existieren Radien $R_g,R_h>0$, sodass $\operatorname{supp}(g)\subseteq B_{R_g}(0)$, $\operatorname{supp}(h)\subseteq B_{R_h}(0)$ und auch $\operatorname{supp}(g')\subseteq B_{R_g}(0)$. Ist $t$ nun hinreichend groß, d.h. $t>R\coloneqq\{R_g,R_h\}$, dann ist $x+t\notin B_R(0)$ oder $x-t\notin B_R(0)$. Somit wird stets einer der beiden Faktoren in obigen Summanden außerhalb des Trägers liegen und somit gleich Null sein. Das heißt also, dass $u_x^2(x,t)-u_t^2(x,t)=0$ für alle $t>R$ und $x\in R$ bzw. $p(t)-k(t)=0\equiv p(t)=k(t)$ für hinreichend große $t$.

**Aufgabe 26.** Es seien $g,h\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ gegeben und es sei $u\in C^2(\mathbb{R}^3\times[0,\infty))$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0 & \text{auf } \mathbb{R}^3\times(0,\infty),\\ u=g\ ,\ u_t=h & \text{auf } \mathbb{R}^3\times\{0\}.\end{cases}$$

Zeigen Sie:

$$\exists C>0\ \forall x\in\mathbb{R}^3,t\in(0,\infty):|u(x,t)|\leq\frac{C}{t}$$

Schätzen Sie dazu $u(x,t)$ auf geeigneten Teilbereichen von $\mathbb{R}^3\times[0,\infty)$ ab.

Mit der Kirchhoff'schen Formel erhalten wir als Darstellung der Lösung

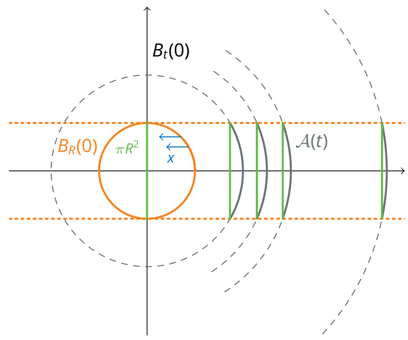
$$u(x,t) = \frac{1}{3t^2\alpha(3)} \int_{\partial B_t(0)} th(x+z) + g(x+z) + Dg(x+z) \cdot z \; \mathrm{d}O(z)$$

Schreibe von nun an $\alpha \coloneqq \alpha(3)$. Gemäß Voraussetzung leben $g$ und $h$ auf kompakten Trägern, d.h. es existieren Radien $R_g, R_h > 0$, sodass $\operatorname{supp}(g) \subseteq B_{R_g}(0)$ und $\operatorname{supp}(h) \subseteq B_{R_h}(0)$ sowie insbesondere auch $\operatorname{supp}(Dg) \subseteq B_{R_g}(0)$. Auf diesen kompakten Trägern nehmen die stetigen Funktionen auch ein Maximum an, d.h. $g(x) \leq g_{\max} \coloneqq \max_{x\in\mathbb{R}^3} |g(x)|$, $h(x) \leq h_{\max} \coloneqq \max_{x\in\mathbb{R}^3} |h(x)|$, $Dg(x) \leq g'_{\max} \coloneqq \max_{x\in\mathbb{R}^3} |Dg(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt mit $R \coloneqq \max\{R_g, R_h\}$ für $t \leq R$

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &\leq \frac{1}{3t^2\alpha} \int_{\partial B_t(0)} |t| \cdot |h(x+z)| + |g(x+z)| + |Dg(x+z)| \cdot |z| \; \mathrm{d}O(z) \\
&\leq \frac{1}{3t\alpha} \int_{\partial B_R(0)} h_{\max} \; \mathrm{d}O(z) + \frac{1}{3t^2\alpha} \int_{\partial B_R(0)} g_{\max} \; \mathrm{d}O(z) + \frac{1}{3t\alpha} \int_{\partial B_R(0)} g'_{\max} \; \mathrm{d}O(z) \\
&= \frac{R^2 h_{\max}}{t} + \frac{R^2 h_{\max}}{t^2} + \frac{R^2 g'_{\max}}{t} \qquad\qquad (|\partial B_R(0)| = R^2 \cdot 3\alpha)
\end{aligned}$$

Für hinreichend große $t$ ist $\frac{1}{t} \approx \frac{1}{t^2}$, d.h. mit $C_1 \coloneqq R^2 (h_{\max} + g_{\max} + g'_{\max}) > 0$ gilt die Abschätzung $|u(x,t)| \leq \frac{C_1}{t}$. Für kleine $t$ in einer Umgebung der Null ist $u(x,t) \xrightarrow{t\to 0} |g(x)| \leq g_{\max}$ beschränkt, d.h. ex existiert ein $C'_1 > 0$, sodass $|u(x,t)| \leq \frac{C'_1}{t}$.

Sein nun $t > R$. In diesem Fall muss $x + z$ nicht mehr unbedingt in den jeweiligen Trägern von $g$ oder $h$ liegen. Dies ist jedoch der Fall, wenn $|x + z| < R$. Wählen wir nun ein $z \in \partial B_R(0)$, d.h. auf dem Rand der $R$-Kugel, die kleiner ist als die $t$-Kugel. Für ein fixiertes $x$ kann die Bedingung $|x + z| < R$ höchstens für eine Hemisphäre gelten (für die jeweils andere Hemisphäre „zeigt $x$ aus der Kugel"). Der Flächeninhalt einer solchen Sphäre ist $\mathcal{A}(t) = \pi R^2 + \omega(t)$, wobei $\omega(t)$ den Flächenzuwachs durch die Wölbung der $t$-Kugel beschreibt. Je größer $t$ wird, desto geringer wird die Wölbung, da der „Ausschnitt" der gleiche bleibt, d.h. $\omega$ fällt monoton und für $t \to \infty$ gilt $\omega(t) \to 0$, d.h. $\mathcal{A}(t) \to \pi R^2$. Somit ist $\mathcal{A}$ beschränkt durch $\pi R^2 \leq \mathcal{A}(t) \leq \pi R^2 + \omega(R)$ für alle $t > R$. Somit ist




$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &\leq \frac{1}{3t^2\alpha} \int_{\partial B_t(0)} |th(x+z)| + |g(x+z)| + |Dg(x+z)| \cdot |z| \; \mathrm{d}O(z) \\
&\leq \mathcal{A}(t) \cdot \left( \frac{h_{\max}}{3t\alpha} + \frac{g_{\max}}{3t^2\alpha} + \frac{g'_{\max}}{3t\alpha} \right) \\
&= \underbrace{\mathcal{A}(t) \frac{h_{\max} + g_{\max} + g'_{\max}}{3\alpha}}_{=: C_2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{C_2}{t}
\end{aligned}$$

Definiere abschließend $C \coloneqq \max\{C_1, C'_1, C_2\}$, dann ist $|u(x,t)| \leq \frac{C}{t}$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$.

# Hausaufgaben

**Eric Kunze**

**Partielle Differentialgleichungen** – Übungsblatt 10

Matr.-Nr. 4679202

**Aufgabe 28.** Es sei $u\colon (0,1) \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $u$ stetig und stückweise stetige differenzierbar mit gleichmäßig beschränkter Ableitung, so hat $u$ eine stückweise stetige schwache Ableitung.

(b) Ist $u$ stückweise gleichmäßig stetig und ist $x_0 \in (0,1)$ eine Sprungstelle von $u$, so hat $u$ *keine* schwache Ableitung.

(zu a) Sei $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$ eine Zerlegung des Intervalls $(0,1)$, sodass $u|_{(x_i,x_{i+1})} =: u_i$ für alle $i = 0,\dots,n-1$ stetig differenzierbar ist. Aufgrund der gleichmäßigen Beschränktheit von $u'$ existiert ein $0 < C < \infty$, sodass $u_i'(x) \le C$ für alle $x \in (x_i, x_{i+1})$ und alle $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Dann gilt

$$\int u'(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_i'(x)\ \mathrm{d}x \le \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} C\ \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} C \cdot \underbrace{|x_{i+1} - x_i|}_{\le 1} \le (n+1) C < \infty$$

und somit $u' \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,1)$. Außerdem gilt mit stückweiser partieller Integration für alle $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$

$$\begin{aligned}\int_0^1 u \cdot \varphi'\ \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_i \cdot \varphi'\ \mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n-1} [u_i \cdot \varphi]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_i' \cdot \varphi\ \mathrm{d}x \\ &= [u \cdot \varphi]_0^1 - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_i' \cdot \varphi\ \mathrm{d}x \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_i' \cdot \varphi\ \mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 u' \cdot \varphi\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

wobei $[u\varphi]_0^1 = 0$, da $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ wegen $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$. Somit ist $u' \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,1)$ und es gilt $\int_0^1 u\varphi'\ \mathrm{d}x = -\int_0^1 u'\varphi\ \mathrm{d}x$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$, d.h. $u'$ ist schwache Ableitung von $u$ auf $(0,1)$. Die stückweise Stetigkeit folgt dabei aus der stetigen Differenzierbarkeit von $u_i$ für alle $i \in \{0,\dots,n-1\}$.

**Aufgabe 29.** Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $u, v \in W^{k,p}(U)$. Zeigen Sie:

(a) $D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u$, für alle $\alpha, \beta$ mit $|\alpha| + |\beta| \le k$.

(b) $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ mit $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $|\alpha| \le k$.

(c) $u|_V \in W^{k,p}(V)$ für jede offene Menge $V \subset U$.