



**TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN**

Fakultät Mathematik Institut für Geometrie, Professur für Nichtlineare Analysis

PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Übungen

Prof. Dr. Friedemann Schuricht

Sommersemester 2020

Autor : Eric Kunze
E-Mail : eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

Aufgabe 1. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $u \in C^2(U, \mathbb{R}^n)$, $A \in C^1(U, \mathbb{R}^{m \times n})$, $\varphi \in C^1(U)$ und $c \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:

- (a) $\operatorname{div}((Du)^\top) = (D(\operatorname{div} u))^\top$,
- (b) $\operatorname{div}(cA) = c \operatorname{div} A$,
- (c) $\operatorname{div}(\varphi A) = A \cdot D\varphi + \varphi \operatorname{div} A$.

Hinweis: Wir betrachten Vektoren im \mathbb{R}^n als Zeilenvektoren, \cdot ist das Skalarprodukt im \mathbb{R}^n , $Du = (\partial_j u_i)_{i,j=1,\dots,n}$, div und \cdot wirken auf eine Matrix *zeilenweise*.

Es seien nun $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$ hinreichend glatt. Beweisen Sie die **Formel von Leibniz**:

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v$$

wobei für Multiindizes α, β gilt:

$$D^\alpha u = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u, \quad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$$

und $\beta \leq \alpha$ genau dann, wenn $\beta_i \leq \alpha_i$ für $i = 1, \dots, n$.

(zu a) Sei $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in C^2$. Wir notieren Vektoren verkürzt $(u_i)_i = (u_i)_{i=1,\dots,n} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div}((Du)^\top) &= \operatorname{div} \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 & \cdots & \partial_n u_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 u_n & \partial_2 u_n & \cdots & \partial_n u_n \end{pmatrix}^\top = \operatorname{div} (\partial_j u_i)_{i,j}^\top = \operatorname{div} (\partial_i u_j)_{i,j} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_{11} u_1 & \partial_{12} u_2 & \cdots & \partial_{1n} u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1} u_1 & \partial_{n2} u_2 & \cdots & \partial_{nn} u_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ij} u_j \right)_i \end{aligned}$$

und außerdem

$$(D(\operatorname{div} u))^\top = \left(D \left(\sum_{i=1}^n \partial_i u_i \right) \right)^\top = \begin{pmatrix} \partial_{11} u_1 + \partial_{21} u_2 + \cdots + \partial_{n1} u_n \\ \vdots \\ \partial_{1n} u_1 + \partial_{2n} u_2 + \cdots + \partial_{nn} u_n \end{pmatrix}^\top = \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ji} u_j \right)_i$$

Wegen $u \in C^2$ sind alle partiellen Ableitungen stetig und können somit vertauscht

werden. Daraus folgt die (zeilenweise) Gleichheit mit

$$\operatorname{div} \left((Du)^\top \right) = \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ij} u_j \right)_i = \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ji} u_j \right)_i = (D(\operatorname{div} u))^\top$$

(zu b) Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(cA) &= \operatorname{div} \left(\sum_{j=1}^n c_j a_{ij} \right)_i = \sum_{i=1}^n \partial_i \sum_{j=1}^n c_j a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_i c_j a_{ij} \\ c \cdot \operatorname{div}(A) &= c \cdot \left(\sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij} \right)_i = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_j c_i a_{ij} \end{aligned}$$

und somit $\operatorname{div}(cA) = c \cdot \operatorname{div}(A)$.

(zu c) Man hat

$$\begin{aligned} A \cdot D\varphi &= A \cdot (\partial_i \varphi)_i = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \partial_j \varphi \right)_i \\ \varphi \operatorname{div}(A) &= \varphi \cdot \left(\sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij} \right)_i = \left(\sum_{j=1}^n \varphi \partial_j a_{ij} \right)_i \\ \operatorname{div}(\varphi A) &= \operatorname{div} \left((\varphi a_{ij})_{i,j} \right) = \left(\sum_{j=1}^n \partial_j (\varphi a_{ij}) \right)_i \end{aligned}$$

Für fixiertes i (also zeilenweise) erhält man mit der Produktregel für (partielle) Ableitungen

$$\sum_{j=1}^n \partial_j (\varphi a_{ij}) = \sum_{j=1}^n ((\partial_j \varphi) a_{ij} + \varphi (\partial_j a_{ij})) = \sum_{j=1}^n (\partial_j \varphi) a_{ij} + \sum_{j=1}^n \varphi (\partial_j a_{ij})$$

und somit $\operatorname{div}(\varphi A) = A \cdot (D\varphi) + \varphi \cdot \operatorname{div}(A)$.

Leibnitz-Formel: Vollständige Induktion über $|\alpha| = k$.

(IA) $k = 0$: Für $|\alpha| = 0$, also $\alpha = 0$ ist

$$D^0(uv) = uv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} D^0 u D^0 v$$

(IV) Für $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i = k$ gilt $D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v$.

(IS) $k \rightarrow k+1$: Seien $|\alpha| = |(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)| = k+1$ und $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n - 1)$ sowie $\beta' = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n + 1)$. Dann ist $|\alpha'| = k$ und $|\beta'| = |\beta| + 1$. Es gilt

$$\begin{aligned}
D^\alpha(uv) &= \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}(uv) = \partial_{x_n} \left(\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n-1}(uv) \right) \\
&= \partial_{x_n} \left(D^{\alpha'}(uv) \right) \\
&\stackrel{\text{IV}}{=} \partial_{x_n} \left(\sum_{\beta \leq \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} D^\beta u D^{\alpha'-\beta} v \right) \\
&= \sum_{\beta \leq \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} \left(\partial_{x_n}(D^\beta u) D^{\alpha'-\beta} v + D^\beta u \partial_{x_n}(D^{\alpha'-\beta} v) \right) \\
&= \sum_{\beta \leq \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} \left(D^{\beta'} u D^{\alpha'-\beta} v + D^\beta u D^{\alpha-\beta} v \right) \\
&= \dots \\
&= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Ermitteln Sie jeweils eine nichttriviale Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

- (a) $v_y(x, y) = xy \cdot v(x, y)$
- (b) $u_x(x, y) + y \cdot u(x, y) = 0$

(zu a) Wir gehen analog zur Vorlesung vor und betrachten die Gleichung für fixiertes $x = \text{const.}$. Dann erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$u'(y) = xy \cdot u(y)$$

und lösen entweder durch geübtes Hinschauen oder mit Trennung der Variablen: sei $f(u(y)) = u(y)$ und $g(y) = x \cdot y$. Der Ansatz

$$\int^{u(y)} \frac{1}{f(\xi)} d\xi = \int^y g(\xi) d\xi \Rightarrow \ln(|u(y)|) = \frac{1}{2}xy^2 + C$$

Beachte, dass die unteren Integralgrenzen dabei in der Konstante C zusammengefasst sind, da wir keinen Anfangswert vorgegeben haben. Die Gleichung „umgestellt“ ergibt eine Lösung

$$u(y) = \exp\left(\frac{1}{2}xy^2\right) \quad \text{bzw.} \quad v(x, y) = \exp\left(\frac{1}{2}xy^2\right)$$

Eine kurze Probe ergibt

$$v_y(x, y) = xy \cdot \exp\left(\frac{1}{2}xy^2\right) = xy \cdot v(x, y)$$

(zu b) Wir fixieren erneut eine Variable, diesmal $y = \text{const.}$ Diesmal sehen wir direkt eine Lösung, nämlich

$$u(x, y) = \exp(-xy)$$

Eine kurze Probe ergibt $u_x(x, y) + y \cdot u(x, y) = -y \cdot \exp(-xy) + y \cdot \exp(-xy) = 0$.

Zusatzaufgabe 3. Klassifizieren Sie die nachstehenden partiellen Differentialgleichungen nach folgenden Gesichtspunkten:

- (a) Ist die Differentialgleichung linear, semilinear, quasilinear oder voll nichtlinear?
- (b) Welche Ordnung hat die Differentialgleichung?

$$\Delta u = 0$$

$$-\Delta u = f(u)$$

$$|Du| = 1$$

$$u_t + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} = 0$$

$$\det(D^2 u) = f$$

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = 0$$

$$u_t - \Delta u = f(u)$$

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

$$u_t + \operatorname{div} F(u) = 0$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

$$au_t + \Delta u = 0$$

$$u_t + H(Du, x) = 0$$

$$u_t - \Delta(u^\gamma) = 0$$

$$-\Delta u = \lambda u$$

$$\operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) = 0$$

$$u_t + uu_x = 0$$

Thema: Charakteristikenmethode

Ich bitte um Entschuldigung, dass meine Lösung so lang geworden ist. Aber ich habe mich bemüht mein Vorgehen detailliert zu beschreiben. ☺

Aufgabe 4. Finden Sie Lösungen $u \in C^1$ der folgenden linearen Randwertprobleme:

- (a) $-3u_x + 2u_y = 0$ mit $u(x, y) = y^2 + 1$ auf $\Gamma = \{(1, s) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in \mathbb{R}\}$
- (b) $u_x + u_y - u_z = xe^{y-z}$ mit $u(0, y, z) = g(y, z)$ für alle $y, z \in \mathbb{R}$, wobei $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ beliebig ist
- (c) $2u_x - u_y = 2u - xe^x$ mit $u(0, y) = y^2$ für alle $y \in \mathbb{R}$

Erläutern Sie dabei Ihr Vorgehen und überprüfen Sie abschließend, ob die von Ihnen gefundene Lösung wirklich das Problem löst.

(zu a) Wir betrachten die Charakteristiken

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sei $\alpha(t) := u(x(t), y(t))$, d.h. α beschreibt u entlang der Charakteristiken. Es gilt

$$\alpha'(t) = u_x \cdot \dot{x}(t) + u_y \cdot \dot{y}(t) = -3u_x + 2u_y = 0$$

und somit ist u konstant entlang der Charakteristiken. Parametrisiere die Kurve Γ durch $x_0(s) = 1$ und $y_0(s) = s$. Dann ergibt sich die Randwertbedingung zu $g(s) = s^2 + 1$. Wir prüfen nun die nichtcharakteristische Bedingung, d.h. ob die Kurve Γ auch alle Charakteristiken $\Xi_{(x_0, y_0)}$ durchläuft. Dazu prüfen wir den Tangentenvektor von Γ , nämlich $\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, und den Tangentenvektor der Charakteristik $\Xi_{(x_0, y_0)}$, nämlich $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, auf lineare Unabhängigkeit:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

Somit schneidet Γ alle Charakteristiken $\Xi_{(x_0, y_0)}$. Somit können wir die Schar der Charakteristiken beschreiben durch

$$\begin{aligned} x(s, t) = x_0(s) - 3t = 1 - 3t &\Rightarrow t(x, y) = \frac{1 - x}{3} \\ y(s, t) = y_0(s) + 2t = s + 2t &\Rightarrow s(x, y) = y - 2t = y - \frac{2}{3}(1 - x) = y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Nach Konstruktion in der Vorlesung erhalten wir damit eine Lösung

$$u(x, y) = g(s(x, y)) = \left(y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right)^2 + 1$$

Die Probe liefert mit den partiellen Ableitungen

$$\left. \begin{aligned} u_x(x, y) &= \frac{4}{3} \left(y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right)^2 \\ u_y(x, y) &= 2 \left(y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -3 \cdot \frac{4}{3} \left(y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right)^2 + 4 \left(y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right)^2 = 0$$

und außerdem $u(1, y) = y^2 + 1$ für den Anfangswert. Somit ist u also Lösung der Differentialgleichung.

(zu b) Wir betrachten die partielle Differentialgleichung $u_x + u_y - u_z = x \cdot e^{y-z}$ mit der Randbedingung $u(0, y, z) = g(y, z)$ für beliebiges $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Definieren wir den „Rand“ als die Fläche $\Gamma = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\}$. Diese lässt sich parametrisieren mit

$$\gamma(\sigma, \tau) = \begin{pmatrix} x_0(\sigma, \tau) \\ y_0(\sigma, \tau) \\ z_0(\sigma, \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \\ \tau \end{pmatrix}$$

Für die Tangentialebene erhalten wir die Spannvektoren

$$\gamma_\sigma(\sigma, \tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_\tau(\sigma, \tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\gamma}(\sigma, \tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Betrachten wir die Charakteristiken $\Xi_{\sigma, \tau} = \text{Im}(\xi)$ mit

$$\xi(t, \sigma, \tau) = \begin{pmatrix} x(t, \sigma, \tau) \\ y(t, \sigma, \tau) \\ z(t, \sigma, \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(\sigma, \tau) + t \\ y_0(\sigma, \tau) + t \\ z_0(\sigma, \tau) - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \sigma + t \\ \tau - t \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Prüfen wir die nichtcharakteristische Bedingung um sicherzustellen, dass auch jede Charakteristik $\Xi_{\sigma, \tau}$ von Γ durchlaufen wird:

$$\det(\dot{\gamma} \mid \dot{\xi}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Bezeichne mit $f(u, x, y, z) = x \cdot e^{y-z}$ die rechte Seite der Differentialgleichung. Schreibe $\xi(t) = \xi(t, \sigma, \tau)$ für fixiertes σ und τ (x, y, z analog). Sei $\alpha(t) := u(\xi(t))$ die Funktion u entlang einer Charakteristik $\Xi_{\sigma, \tau}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= Du \cdot \dot{\xi} = f(u(\xi(t)), \xi(t)) = f(\alpha(t), t, \sigma + t, \tau - t) = t \cdot e^{(\sigma+t) - (\tau-t)} \\ &= t \cdot e^{\sigma - \tau + 2t} \end{aligned} \quad (2.2)$$

und dem Anfangswert $\alpha(0) = \alpha(0, \sigma, \tau) = g(\sigma, \tau)$. Lösen wir also dieses Anfangswert-

problem und integrieren dazu die rechte Seite in Gleichung (2.2) partiell:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \int t \cdot e^{\sigma-\tau+2t} dt = \left(\frac{1}{2}e^{\sigma-\tau+2t}\right)t - \int \frac{1}{2}e^{\sigma-\tau+2t} dt \\ &= \frac{1}{2}t \cdot e^{\sigma-\tau+2t} - \frac{1}{4}e^{\sigma-\tau+2t} + C(\sigma, \tau) \\ &= \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right)e^{\sigma-\tau+2t} + C(\sigma, \tau)\end{aligned}$$

Mit dem Anfangswert $\alpha(0) = g(\sigma, \tau)$ ergibt sich die Konstante

$$\alpha(0) = \frac{1}{4}e^{\sigma-\tau} + C(\sigma, \tau) \stackrel{!}{=} g(\sigma, \tau) \Rightarrow C(\sigma, \tau) = \frac{1}{4}e^{\sigma-\tau} + g(\sigma, \tau)$$

und somit die konkrete Lösung

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right)e^{\sigma-\tau+2t} + \frac{1}{4}e^{\sigma-\tau} + g(\sigma, \tau)$$

Aus Gleichung (2.1) erhalten wir die Inverse von ξ als

$$\xi^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} t(x, y, z) \\ \sigma(x, y, z) \\ \tau(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y - x \\ z + x \end{pmatrix}$$

Nach Konstruktion in der Vorlesung erhalten wir die Lösung

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= \alpha(\xi^{-1}(x, y, z)) \\ &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{(y-x)-(z+x)+2x} + \frac{1}{4}e^{(y-x)-(z+x)} + g(y-x, z+x) \\ &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + g(y-x, z+x)\end{aligned}$$

Nun prüfen wir noch, dass die gefundene Funktion auch wirklich eine Lösung der Differentialgleichung ist. Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}u_x(x, y, z) &= \frac{1}{2}e^{y-z} - \frac{1}{2}e^{y-z-2x} - \partial_1 g(y-x, z+x) + \partial_2 g(y-x, z+x) \\ u_y(x, y, z) &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + \partial_1 g(y-x, z+x) \\ u_z(x, y, z) &= -\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{y-z} - \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + \partial_2 g(y-x, z+x)\end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}e^{y-z} - \frac{1}{2}e^{y-z-2x} - \partial_1 g(y-x, z+x) + \partial_2 g(y-x, z+x) \\
& + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + \partial_1 g(y-x, z+x) \\
& + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} - \partial_2 g(y-x, z+x) \\
& = e^{y-z} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) - e^{y-z-2x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) \\
& = x \cdot e^{y-z}
\end{aligned}$$

Außerdem ist die Randwertbedingung erfüllt, denn

$$u(0, y, z) = -\frac{1}{4}e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z} + g(y, z) = g(y, z)$$

und somit u tatsächlich Lösung der partiellen Differentialgleichung.

(zu c) Gegeben sei die partielle Differentialgleichung $2u_x - u_y = 2u + x \cdot e^x$ und die Randwertbedingung $u(0, y) = y^2$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Bezeichnen wir mit $f(u, x, y) = 2u - x e^x$ die rechte Seite. Die Randwerte werden auf der Kurve $\Gamma = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$ angenommen. Diese können wir parametrisieren mit

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} x_0(s) \\ y_0(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} \dot{x}_0(s) \\ \dot{y}_0(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit wird die Randwertbedingung zu $g(s) = s^2$. Betrachten wir die Charakteristiken Ξ_s mit

$$\xi(t, s) = \begin{pmatrix} x(t, s) \\ y(t, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(s) + 2t \\ y_0(s) - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ s + t \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Die nichtcharakteristische Bedingung ist hier erfüllt, denn

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

Betrachte nun die Funktion u entlang der Charakteristiken Ξ_s für fixiertes s beschrieben durch $\alpha(t) = u(\xi(t))$. Differenzieren ergibt

$$\dot{\alpha}(t) = u_x \cdot \dot{x} + u_y \cdot \dot{y} = f(u(\xi(t)), \xi(t)) = f(\alpha(t), 2t, s+t) = 2\alpha - 2t \cdot e^{2t} \quad (2.4)$$

bei $\alpha(0, s) = g(s) = s^2$. Dieses Anfangswertproblem lösen wir mit Variation der Konstanten. Das zugehörige homogene Problem besitzt offensichtlich die Lösung $\alpha(t) = c(t) \cdot e^{2t}$. Differenzieren wir diese Gleichung erhalten wir $\dot{\alpha}(t) = \dot{c}(t) \cdot e^{2t} + 2c(t) \cdot e^{2t}$. Setzen wir dies nun in Gleichung (2.4) ein, dann erhalten wir für ein $\hat{c} \in \mathbb{R}$

$$\dot{c}(t) \cdot e^{2t} + 2c(t) \cdot e^{2t} = 2c(t) \cdot e^{2t} - 2t \cdot e^{2t} \Rightarrow \dot{c}(t) = -2t \Rightarrow c(t) = \hat{c} - t^2$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung $\alpha(t) = e^{2t}(\hat{c} - t^2)$. Durch den Anfangswert gilt $\alpha(0) = \hat{c} = s^2$ und somit ist $\alpha(t) = e^{2t}(s^2 - t^2)$ konkrete Lösung des Anfangswertproblems, was sich auch leicht überprüfen lässt:

$$\dot{\alpha}(t) = 2 \underbrace{e^{2t}(s^2 - t^2)}_{=\alpha(t)} - 2t \cdot e^{2t} = 2\alpha(t) - 2t \cdot e^{2t} \quad \text{und} \quad \alpha(0) = s^2$$

Aus Gleichung (2.3) erhalten wir

$$\xi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} t(x, y) \\ s(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x + y \end{pmatrix}$$

Damit folgt nach Konstruktion in der Vorlesung eine Lösung

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha(s(x, y)) = e^x \left(\left(\frac{1}{2}x + y \right)^2 - \frac{1}{4}x^2 \right) \\ &= e^x \left(\frac{1}{4}x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{4}x^2 \right) \\ &= e^x (y^2 + xy) \end{aligned}$$

Dann gilt für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} u_x &= e^x (y^2 + xy) + y \cdot e^x \\ u_y &= e^x (2y + x) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} 2u_x - u_y &= 2e^x(y^2 + xy) + 2y \cdot e^x - e^x(2y + x) \\ &= 2u + e^x(2y - 2y - x) \\ &= 2u - x \cdot e^x \end{aligned}$$

und $u(0, y) = e^0(y^2 + 0 \cdot y) = y^2$. Damit ist also u tatsächlich Lösung der partiellen Differentialgleichung.

Aufgabe 6. Bestimmen Sie eine Lösung $u \in C^1(U)$ des quasilinearen Randwertproblems

$$\begin{aligned} uu_x + u_y &= 1 \\ u(x, x) &= \frac{1}{2}x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\xi\} \end{aligned}$$

wobei $\xi \in \mathbb{R}$ geeignet gewählt und U eine geeignet gewählte Umgebung der Menge ist, auf der u vorgegeben ist. Nutzen Sie dazu die Methode der Charakteristiken, überprüfen Sie Ihr Ergebnis und skizzieren Sie einige Charakteristiken in der Nähe des Punktes (ξ, ξ) .

Aus der Vorlesung kennen wir die Notation $a(u(x), x) \cdot Du + b(u(x), x) = 0$. Wir notieren $a(u(x, y), x, y) = (u(x, y), 1)$ und $b(u(x, y), x, y) = -1$. Aus der Randwertbedingung erhalten wir eine Kurve $\Gamma = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \setminus \{\xi\}\}$ mit Parametrisierung $\gamma(s) = \begin{pmatrix} x_0(s) \\ y_0(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix}$, auf der $g(s) = \frac{1}{2}s$ gilt. Wir überprüfen die nichtcharakteristische Bedingung gemäß Konstruktion in der Vorlesung als

$$\det(\dot{\gamma} \mid a(g(s), \gamma(s))) = \det \begin{pmatrix} 1 & g(s) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}s \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - \frac{1}{2}s \neq 0 \quad \forall s \neq 2$$

Wähle somit also $\xi = 2$, um die Regularität zu sichern. Betrachten wir $\alpha(t, s) = u(x(t, s), y(t, s))$ als die Funktion u entlang der Charakteristiken. Da die partielle Differentialgleichung quasilinear ist, reichen die beiden folgenden charakteristischen Gleichungen zu lösen aus:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= a(\alpha, x, y) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \\ \dot{\alpha} &= -b(\alpha, x, y) = 1 \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $\alpha(0, s) = \frac{1}{2}s$, $x(0, s) = s$ und $y(0, s) = s$. Lösen wir diese gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= t + c(s) & \xrightarrow{\text{AW}} c(s) &= \frac{1}{2}s & \Rightarrow \alpha(t, s) &= t + \frac{1}{2}s \\ y(t) &= t + c(s) & \xrightarrow{\text{AW}} c(s) &= s & \Rightarrow y(t, s) &= t + s \\ x(t) &= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + c(s) & \xrightarrow{\text{AW}} c(s) &= s & \Rightarrow x(t, s) &= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + s \end{aligned}$$

Wegen der charakteristischen Bedingung können wir dieses Gleichungssystem nach t und s auflösen:

$$\begin{aligned} y(t, s) &= t + s \Rightarrow s = y - t \\ x(t, s) &= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + s = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}(y - t)t + y - t = t \left(\frac{1}{2}y - 1 \right) + y \end{aligned}$$

also

$$t(x, y) = \frac{x - y}{\frac{1}{2}y - 1} \quad \text{und} \quad s(x, y) = y - \frac{x - y}{\frac{1}{2}y - 1}$$

Setzen wir dies als Lösung $u(x, y) = \alpha(t(x, y), s(x, y))$ zusammen, erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha\left(\frac{x-y}{\frac{1}{2}y-1}, y - \frac{x-y}{\frac{1}{2}y-1}\right) \\ &= \frac{x-y}{\frac{1}{2}y-1} + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\frac{x-y}{\frac{1}{2}y-1} \\ &= \frac{x-y}{y-2} + \frac{1}{2}y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 2 \end{aligned}$$

Überprüfen wir unser Ergebnis: Es gilt

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{x-y}{y-2} + \frac{1}{2}y \\ u_x(x, y) &= \frac{1}{y-2} \\ u_y(x, y) &= \frac{-1}{y-2} - \frac{x-y}{(y-2)^2} + \frac{1}{2} = \frac{2-x}{(y-2)^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die partielle Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x, y) \cdot u_x(x, y) + u_y(x, y) &= \left(\frac{x-y}{y-2} + \frac{1}{2}y\right) \cdot \frac{1}{y-2} + \frac{2-x-2y}{(y-2)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{x-y}{(y-2)^2} + \frac{1}{2}y \frac{1}{y-2} + \frac{2-x}{(y-2)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2-y}{(y-2)^2} + \frac{1}{2}y \frac{1}{y-2} + \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2}y - 1\right) \frac{1}{y-2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

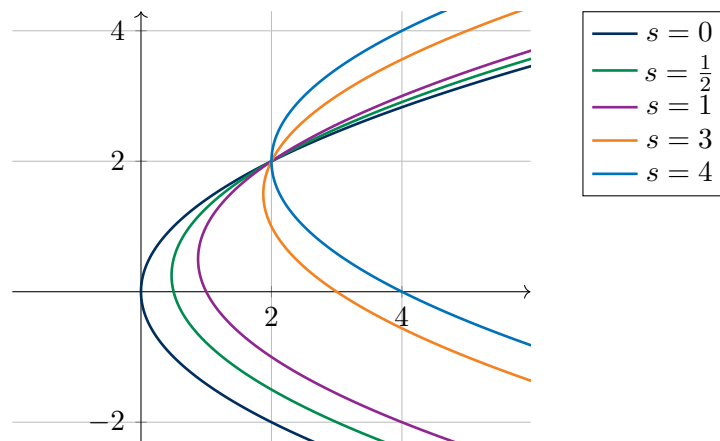
und für die Randwerte $u(x, x) = \frac{1}{2}x$ für alle $x \neq 2$.

Betrachten wir die Charakteristiken beschrieben mit einer Parametrisierung für fixiertes $s \neq 2$ und betrachten das Gleichungssystem

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + s \\ t + s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow t = 2 - s \Rightarrow 2 = \frac{1}{2}(2-s)^2 + \frac{1}{2}s(2-s) + s = 2$$

Somit sind die Gleichungen unabhängig von $s \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ erfüllt und alle Charakteristiken gehen durch den Punkt $(2, 2)$.

Charakteristiken $x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + s \\ t + s \end{pmatrix}$



Aufgabe 7. Wir betrachten die *Burgers-Gleichung*

$$\begin{aligned}u_t + uu_x &= 0 && \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= g(x) && \text{für alle } x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

(a) Es sei zuerst g gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$v(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq \frac{1}{2}t, \\ 0 & \text{für } x < \frac{1}{2}t \end{cases} \quad \text{und} \quad w(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq t, \\ \frac{x}{t} & \text{für } x \in [0, t), \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

schwache Lösungen sind.

Hinweis: Es genügt, die Randwerte, die Rankine-Hugoniot-Bedingung auf Sprungkurven und die Differentialgleichung abseits dieser Kurven zu überprüfen.

(b) Es sei nun g gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

- i. Offenbar ist $g \notin C^1(\mathbb{R})$. Stellen Sie dennoch die charakteristischen Gleichungen auf und ermitteln Sie, welche Lösung man formal für $t < 1$ erwarten würde.
- ii. In welchen Punkten $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, 1)$ gilt $u_t + uu_x = 0$?
- iii. Setzen Sie u derart auf $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ fort, dass nur eine Sprungkurve existiert und dass entlang dieser die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt ist.

Hinweis: Es bietet sich an, dass u für $t \geq 1$ nur die Werte 0 und 1 annimmt.

Für die Burgers-Gleichung gilt in Anlehnung an die Notation der Vorlesung $F(u)_x = uu_x$ und damit $F(u) = \frac{1}{2}u^2$.

(zu a) Wir betrachten die Funktion v . Für die Randwerte, d.h. für $y = 0$ gilt

$$v(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} = g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Die Sprungkurve ist gegeben durch $s(t) = \frac{1}{2}t$ mit $\dot{s} = \frac{1}{2}$. Es gilt $[[v]] = -1$ und $[[F(v)]] = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, also ist mit $[[F(v)]] = \dot{s} \cdot [[v]]$ die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt. Betrachte die Differentialgleichung abseits der Sprungkurve:

- Sei $x > \frac{1}{2}t$. Dann ist v gegeben durch $v(x, t) = 1$ und somit $v_t = v_x \equiv 0$. Eingesetzt in die PDE ergibt dies $v_t + vv_x = 0 + 1 \cdot 0 = 0$. ✓
- Sei $x < \frac{1}{2}t$. Dann ist v gegeben durch $v(x, t) = 0$ und somit $v_t = v_x \equiv 0$. Eingesetzt in die PDE ergibt dies $v_t + vv_x = 0 + 0 \cdot 0 = 0$. ✓

Betrachten wir nun die Funktion w . Die Randwerte werde wegen

$$w(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} = g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

erfüllt. Wir erhalten hier zwei Sprungkurven:

- Die Winkelhalbierende können wir durch $s_1(t) = t$ parametrisieren, also ist $\dot{s} = 1$. Dann ergibt sich für die Differenzen

$$[[F(w)]] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{und} \quad [[w]] = 1 - \frac{t}{t} = 0 \quad \Rightarrow \quad [[F(w)]] = \dot{s}_1 \cdot [[w]]$$

- Für die andere Sprungkurve, die wir mit $s_2(t) = 0$ parametrisieren ($\dot{s} = 0$), erhalten wir

$$[[F(w)]] = 0 - 0 = 0 \quad \text{und} \quad [[w]] = \frac{0}{t} - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad [[F(w)]] = \dot{s}_2 \cdot [[w]]$$

Die Differentialgleichung wird abseits der Sprungkurven auch erfüllt:

- Sei $x > t$. Dann ist w gegeben durch $w(x, t) = 1$ und somit $w_t = w_x \equiv 0$. Eingesetzt in die PDE ergibt dies $w_t + ww_x = 0 + 1 \cdot 0 = 0$. ✓
- Sei $x \in [0, t)$. Dann ist w gegeben durch $w(x, t) = \frac{x}{t}$ und somit $w_t = \frac{-x}{t^2}$ und $w_x = \frac{1}{t}$. Eingesetzt in die PDE ergibt dies $w_t + ww_x = \frac{-x}{t^2} + \frac{x}{t} \frac{1}{t} = 0$. ✓
- Sei $x < 0$. Dann ist w gegeben durch $w(x, t) = 0$ und somit $w_t = w_x \equiv 0$. Eingesetzt in die PDE ergibt dies $w_t + ww_x = 0 + 0 \cdot 0 = 0$. ✓

Damit sind also v und w schwache Lösungen der partiellen Differentialgleichung.

(zu b) Mit $y := (x, t)$, $a(u, y) = \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b(u, y) = 0$ hat die Burgersgleichung die quasilineare

Form der Vorlesung. Dann sind die charakteristischen Gleichungen gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{y}(\tau, \sigma) &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{t} \end{pmatrix} = a(\alpha, y) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \\ \dot{\alpha}(\tau, \sigma) &= a(\alpha, y) \cdot Du = -b(u, y) = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha(0, \sigma) = g(\sigma)\end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir die Lösung $\alpha(\tau, \sigma) = g(\sigma)$, d.h. u ist entlang der Charakteristiken konstant. Aus der ersten Gleichung erhalten wir zum einen die Identifizierung $\tau = t$, d.h. die Charakteristiken können durch die Zeit t parametrisiert werden. Zum anderen die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{x} = \alpha$ mit der Lösung $x(\tau, \sigma) = g(\sigma) \cdot \tau + s$ bzw. mit der Identifizierung dann $x(t) = g(\sigma) \cdot t + \sigma$. Setzen wir die Definition von g ein, so erhalten wir

$$x(t) = \begin{cases} t + \sigma & \sigma \leq 0 \\ (1 - \sigma)t + \sigma & 0 \leq \sigma \leq 1 \\ \sigma & \sigma \geq 1 \end{cases}$$

Für $t \leq 1$ können wir jeden Fall umstellen und erhalten

$$\sigma = \begin{cases} x - t & x - t \leq 0 \\ \frac{x-t}{1-t} & x - t \geq 0 \wedge x \leq 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$$

Nach Konstruktion erhalten wir dann die Lösung

$$u(x, t) = \alpha(\tau, \sigma) = g(\sigma(t, x)) = \begin{cases} 1 & x - t \leq 0 \\ 1 - \frac{x-t}{1-t} & x - t \geq 0 \wedge x \leq 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

Sei nun $t \in (0, 1)$. Wir prüfen die Gültigkeit der Differentialgleichung:

- Sei $x - t \leq 0$. Dann ist also $u(x, t) = 1$ und $u_x = u_t \equiv 0$ und die Differentialgleichung erfüllt.
- Ist $x - t \geq 0$ und $x \leq 1$, dann ist $u(x, t) = 1 - \frac{x-t}{1-t}$ und $u_x(x, t) = \frac{1}{1-t}$ sowie $u_t(x, t) = \frac{(t-1)+(x-t)}{(1-t)^2}$. In die Differentialgleichung eingesetzt ergibt dies

$$u_t + uu_x = \frac{(t-1)+(x-t)}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t} - \frac{x-t}{(1-t)^2} = 0 \quad \checkmark$$

- Sei $x \geq 1$. Dann ist $u = u_x = u_t \equiv 0$ und die Differentialgleichung damit erfüllt.

Somit ist u Lösung der Differentialgleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ und $t \in (0, 1)$.

Aufgabe 8. Betrachten Sie das Beispiel „Ampel (von rot auf grün)“ aus der Vorlesung, modelliert durch

$$\begin{aligned} u_t + F(u)_x &= 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= g(x) & \text{für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit

$$F(u) = u(60 - \frac{2}{5}u) \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} 150 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) In der Vorlesung wurde in Teil a) eine Funktion u_a explizit gegeben. In Teil b) wurde eine weitere Lösung u_b skizziert. Ermitteln Sie u_b explizit.

Hinweis: Die charakteristischen Gleichungen geben u_b auf eine großen Menge vor. Ermitteln Sie u_b für die restlichen (x, t) , indem sie eine differenzierbare reelle Funktion v derart bestimmen, dass $u_b(x, t) = v(\frac{x}{t})$ die Differentialgleichung löst.

- (b) Überprüfen Sie für u_a und u_b entlang aller Sprungkurven die Rankine-Hugoniot-Bedingung und die Entropiebedingung.

(zu a) Für die skalare Erhaltungsgleichung erhalten wir die aus der Vorlesung bekannten Bezeichnungen mit $y = (x, t)$, $a(u, y) = (60 - \frac{4}{5}u, 1)$ und $b \equiv 0$. Außerdem sind die Startwerte der charakteristischen Gleichungen gegeben durch $x_0(s) = s$, $t_0(s) = 0$, und als Randwerte $g(s) = 150 \cdot \mathbb{1}_{\{s < 0\}}(s)$. Wir erhalten die charakteristischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{y}(\tau, \sigma) &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{t} \end{pmatrix} = a(\alpha, y) = \begin{pmatrix} 60 - \frac{4}{5}u \\ 1 \end{pmatrix} \\ \dot{\alpha}(\tau, \sigma) &\stackrel{\text{DGI}}{=} -b(\alpha, y) = 0 \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile der ersten Gleichung erhalten wir dabei die Identifizierung $t(\tau, \sigma) = \tau$. Die zweite charakteristische Gleichung löst sich unter Nutzung des Anfangswertes $\alpha(0, \sigma) = g(\sigma)$ zu $\alpha(\tau, \sigma) = g(\sigma)$. Setzen wir dies in die erste Zeile der ersten Gleichung ein, so erhalten wir $\dot{x}(\tau, \sigma) = 60 - \frac{4}{5}g(\sigma)$. Dies löst sich mit dem Anfangswert $x(0, \sigma) = \sigma$ zu

$$x(\tau, \sigma) = 60\tau - \frac{4}{5}g(\sigma) \cdot \tau + \sigma = \begin{cases} -60t + \sigma & \sigma < 0 \\ 60t + \sigma & \sigma \geq 0 \end{cases}$$

Für $\tau = t > 0$ lässt sich dies umstellen zu

$$\sigma(x, t) = \begin{cases} x + 60t & x < 0 \\ x - 60t & x \geq 0 \end{cases}$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$u(x, t) = \alpha(t, \sigma) = \begin{cases} 150 & \sigma(x, t) < 0 \\ 0 & \sigma(x, t) \geq 0 \end{cases}$$

Da $t \in (0, \infty)$ ist, ist somit u auf der Menge $\{(x, t) : t \in (0, \infty), x \notin (-60t, 60t)\}$ eindeutig vorgegeben. Wir erweitern nun auf $t \in \mathbb{R}$ und betrachte $x \in (-60t, 60t)$. Dabei soll eine Funktion v mit $u(x, t) = v(\frac{x}{t})$ bestimmt werden, die die PDE erfüllt. Die Funktion u muss gemäß Vorlesung ihr Maximum auf der t -Achse, also für $x = 0$ annehmen. Dementsprechend gilt $u(0, t) = v(\frac{0}{t}) = v(0) = u_{\text{opt}} = 75$. Da wir $x \in (-60t, 60t)$ betrachten, gilt $\frac{x}{t} \in (-60, 60)$. Die Randwerte sollten dabei mit minimaler (rechts) bzw. maximaler (links) Dichte gegeben sein, d.h. $v(-60) = 150$ und $v(60) = 0$. Diese drei Punkte definieren uns eine eindeutige Polynomfunktion zweiten Grades:

$$v(\xi) = -\frac{5}{4s}\xi + 75 \quad \text{auf } (-60, 60)$$

Damit können wir u definieren als

$$u(x, t) = v\left(\frac{x}{t}\right) = -\frac{5}{4} \frac{x}{t} + 75 \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ und } x \in (-60t, 60t)$$

Damit gilt $u_x(x, t) = -\frac{5}{4} \frac{1}{t}$ und $u_t(x, t) = \frac{5}{4} \frac{x}{t^2}$. In die PDE eingesetzt liefert dies

$$\begin{aligned} u_t + F(u)_x &= u_t + \left(60 - \frac{4}{5}u\right)u_x \\ &= \frac{5}{4} \frac{x}{t^2} + \left(60 + \frac{x}{t} - 60\right) \left(-\frac{5}{4} \frac{1}{t}\right) = \frac{5}{4} \frac{x}{t^2} - \frac{5}{4} \frac{x}{t^2} = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Somit können wir u schlussendlich definieren als

$$u(t, x) = \begin{cases} 150 & x < -60t \\ -\frac{5}{4} \frac{x}{t} + 75 & -60t \leq x \leq 60t \\ 0 & x > 60t \end{cases}$$

(zu b) Definiere $u_b := u$ von oben. Man sieht leicht, dass u_b eine stetige Funktion ist. Daher existieren keine Sprungkurven und die Rankine-Hugoniot- bzw. Entropie-Bedingungen müssen nicht betrachtet werden. (Die Rankine-Hugoniot-Bedingungen werden trivialerweise trotzdem erfüllt, aber die Entropie-Bedingung nicht mehr).

Aus der Vorlesung bekannt ist

$$u_a(x, t) = \begin{cases} 150 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

Wir betrachten die Sprungkurve $x = s(t) = 0$. Dann ist auch $\dot{s} = 0$ und mit $F(u) = u\left(60 - \frac{4}{5}u\right)$ gilt

$$\left. \begin{aligned} [[u]] &= 150 \\ [[F(u)]] &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow [[F(u)]] = \dot{s} \cdot [[u]]$$

Es ist $F'(u) = 60 - \frac{4}{5}u$ und damit $F'(u_l) = F'(150) = -60$ sowie $F'(u_r) = F'(0) = 60$. Somit ist die Entropie-Bedingung verletzt.

Aufgabe 12. Eine Funktion $u \in C^2(U)$ über einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt harmonisch, falls $\Delta u = 0$ in U .

(a) Zeigen Sie, dass die durch

$$u(x) = \begin{cases} \ln(|x|) & \text{für } n = 2, \\ \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{für } n \geq 3 \end{cases}$$

definierte Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ harmonisch ist.

(b) Es sei $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal. Zeigen Sie, dass durch $v(x) = u(Ax)$ eine harmonische Funktion $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert wird.

(zu a) Sei $n = 2$ und $x = (x_1, x_2) \in U$. Dann ist $u(x) = \ln|x| = \ln(r(x))$ mit $r(x) := |x|$. Mit $r_{x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|}$ ist

$$u_{x_i}(x) = \frac{1}{|x|} \cdot r_{x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|^2} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}$$

Leiten wir weiter nach x_i ab, dann erhalten wir

$$u_{x_i x_i}(x) = \partial_{x_i} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_i \cdot 2x_i}{|x|^4} = \frac{|x|^2 - 2x_i^2}{|x|^4}$$

und somit für den Laplace-Operator

$$\Delta u(x) = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = \frac{|x|^2 - 2x_1^2}{|x|^4} + \frac{|x|^2 - 2x_2^2}{|x|^4} = 0 \quad \checkmark$$

Sei $n \geq 3$. Dann ist $u(x) = |x|^{2-n}$. Es gilt

$$\begin{aligned} u_{x_i}(x) &= (2-n) \cdot |x|^{1-n} \cdot \frac{x_i}{|x|} = (2-n) \cdot |x|^{-n} \cdot x_i \\ u_{x_i x_i}(x) &= (2-n) \cdot \partial_{x_i} \left(x_i \cdot |x|^{-n} \right) \\ &= (2-n) \cdot \left(|x|^{-n} - n \cdot |x|^{-n-1} \frac{x_i}{|x|} \cdot x_i \right) \\ &= (2-n) \cdot \left(|x|^{-n} - n \cdot |x|^{-n-2} \cdot x_i^2 \right) \end{aligned}$$

Damit gilt für den Laplace-Operator

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x) = (2-n) \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x|^{-n} - n \cdot |x|^{-n-2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \\ &= (2-n) \left(n \cdot |x|^{-n} - n \cdot |x|^{-n-2} \cdot |x|^2 \right) \\ &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

(zu b) Sei $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal, d.h. $A^\top = A^{-1}$. Betrachte

$$v_{x_i}(x) = Du(Ax) \cdot \partial_i Ax = Du(Ax) \cdot a_i = \sum_{k=1}^n u_{x_k}(Ax) \cdot a_{ki}$$

$$v_{x_i x_i}(x) = \partial_{x_i} \left(\sum_{k=1}^n u_{x_k}(Ax) \cdot a_{ki} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n u_{x_k x_\ell}(Ax) \cdot a_{ki} a_{\ell i}$$

Aufgrund der Orthogonalität von A ist $\sum_{i=1}^n a_{ki} a_{\ell i} = \delta_{k\ell}$. Somit ist

$$\Delta v(x) = \sum_{i=1}^n v_{x_i x_i}(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n u_{x_k x_\ell}(Ax) \cdot a_{ki} a_{\ell i} = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(Ax) = \Delta u(Ax) = 0 \quad \checkmark$$

und daher auch v harmonisch.

Aufgabe 13. Es sei Φ die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung, d. h.

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln(|x|) & \text{für } n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{für } n \geq 3 \end{cases}$$

für $x \neq 0$. Zeigen Sie für $x \neq 0$ die Abschätzungen $|D\Phi(x)| \leq c|x|^{1-n}$ und $|D^2\Phi(x)| \leq c|x|^{-n}$.

Für $n = 2$ gilt $\Phi_{x_i}(x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x|} \cdot \frac{x_i}{|x|} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x_i}{|x|^2}$. Leiten wir für $n \geq 3$ nach x_i ab, so erhalten wir $\Phi_{x_i}(x) = \frac{2-n}{n(n-2)\alpha(n)} \cdot |x|^{1-n} \frac{x_i}{|x|} = \frac{2-n}{n(n-2)\alpha(n)} \cdot x_i \cdot |x|^{-n}$. Beide Fälle können wir mit einer universellen Konstante c zusammenfassen und erhalten mit $\frac{x_i}{|x|} \leq 1$ auch folgende Abschätzung:

$$\Phi_{x_i}(x) = c \cdot x_i \cdot |x|^{-n} = c \cdot |x|^{1-n} \cdot \frac{x_i}{|x|} \leq c \cdot |x|^{1-n} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Damit erhalten wir für die erste Ungleichung

$$|D\Phi(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Phi_{x_i}(x)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(c \cdot |x|^{1-n} \right)^2} = c \cdot n \cdot |x|^{1-n} = c \cdot |x|^{1-n}$$

Für die zweiten Ableitungen gilt dann entsprechend

$$\Phi_{x_i x_j}(x) = c \left(\delta_{ij} |x|^{-n} - n x_i |x|^{-n-1} \cdot \frac{x_j}{|x|} \right) = c \cdot |x|^{-n} \left(\delta_{ij} - n \cdot x_i x_j \cdot |x|^{-2} \right)$$

$$\Rightarrow \quad |D^2\Phi(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Phi_{x_i x_j}(x)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(|x|^{-n} \right)^2 \cdot \left(c \delta_{ij} - n x_i x_j |x|^{-2} \right)^2}$$

$$= |x|^{-n} \sqrt{nc^2 - 2n|x|^{-2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + n^2 |x|^{-4} \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{j=1}^n x_j^2}$$

$$= |x|^{-n} \cdot \sqrt{nc^2 - 2n + n^2}$$

$$\leq c |x|^{-n}$$

Aufgabe 15. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ eine Lösung von

$$-\Delta u = f(u, x) \quad \text{in } U, \quad u = g \quad \text{auf } \partial U,$$

wobei f und g im Folgenden spezifisch gewählt werden.

- (a) Es sei $f(u, x) = u - u^3$ und $g = 0$. Beweisen Sie *mit elementaren Methoden* die Abschätzung $-1 \leq u(x) \leq 1$ für alle $x \in \bar{U}$.
- (b) Es sei $U = (-a, a)^n$ für ein $a > 0$, $f(u, x) = -1$ und $g = 0$. Finden Sie möglichst gute obere und untere Schranken für $u(0)$, indem Sie eine harmonische Funktion der Form $v = u + w$ betrachten, wobei w geeignet zu wählen ist
- (c) Es sei $U = B_1(0)$, $f(u, x) = h(x)$ mit $h, g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass es eine von n , h , g und u unabhängige Konstante $c > 0$ gibt, für die gilt:

$$\max_{\bar{B}_1(0)} |u| \leq c \cdot \left(\max_{\partial B_1(0)} |g| + \max_{\bar{B}_1(0)} |h| \right)$$

Hinweis: Betrachten sie $u - v$, wobei $v(x) = \max_{\partial B_1(0)} |g| + (e^2 - e^{x_1+1}) \max_{\bar{B}_1(0)} |h|$.

(zu a) Es sei $f(u) = u - u^3$ und $g \equiv 0$. Da U beschränktes Gebiet ist und \bar{U} eine abgeschlossene Menge, ist also \bar{U} kompakt. Da u stetig auf \bar{U} ist, nimmt u ein Maximum in einem $x_0 \in \bar{U}$ an. Nehmen wir an es sei $u(x_0) > 1$. Es gilt $\equiv g \equiv 0$ auf ∂U , d.h. um ein Maximum $u(x_0) > 1$ zu besitzen, muss $x_0 \in \text{int } U$ sein. Da $u(x_0)$ Maximum ist mit $u \in C^2(U)$, gilt $u_{x_i x_i}(x_0) \leq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Nach Differentialgleichung ist dann also

$$0 \leq -\Delta u(x_0) = -\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x_0) = u(x_0) - u^3(x_0) = u(x_0) \left(1 - u(x_0)^2\right) \stackrel{u(x_0) > 1}{<} 0$$

ein Widerspruch. Somit ist dann $u(x_0) \leq 1$ und aufgrund der Maximalität von $u(x_0)$ auch $u(x) \leq u(x_0) \leq 1$ für alle $x \in \bar{U}$.

Analog dazu nimmt u auf \bar{U} ein globales Minimum in $x_0 \in \bar{U}$ an, für welches nach gleicher Argumentation wie oben $x_0 \in \text{int } U$ gilt. Nehmen wir an, es sei $u(x_0) < -1$. Als Minimalstelle gilt $u_{x_i x_i}(x_0) \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Nach PDE gilt dann

$$0 \geq -\Delta u(x_0) = -\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x_0) = u(x_0) - u^3(x_0) = u(x_0) \left(1 - u(x_0)^2\right) \stackrel{u(x_0) < -1}{<} 0$$

ein Widerspruch. Somit ist $u(x) \geq u(x_0) \geq -1$ für alle $x \in \bar{U}$ und schließlich gilt die Einschließung $-1 \leq u(x) \leq 1$ für alle $x \in \bar{U}$.

(zu b) Sei $a > 0$ und $U = (-a, a)^n$ ein n -dimensionaler (offener) Quader. Weiter sei $f \equiv -1$ und $g \equiv 0$. Gesucht sind „gute“ (obere und untere) Schranken von $u(0)$. Wir betrachten eine harmonische Funktion v der Form $v = u + w$, d.h. $0 = \Delta v = \Delta u + \Delta w = -f(u, x) + \Delta w = 1 + \Delta w$. Somit suchen wir nun eine Funktion w mit $\Delta w = -1$. Eine Lösung dieser PDE erhalten wir beispielsweise mit $w(x) = -\frac{1}{2n}|x|^2 = -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n x_i^2$.

Wenden wir das Maximumsprinzip auf v an, dann nimmt damit v sein Maximum in einem $x_0 \in \partial U$ an. Aufgrund der Randwertbedingung gilt dort $u \equiv 0$. Wir betrachten oBdA den Randpunkt $x_0 = (a, 0, \dots, 0) \in \partial U$. Dieser minimiert $\sum_{i=1}^n x_i^2$, da jeder andere Randpunkt auch mindestens eine Koordinate $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $x_j = \pm a$ besitzt. Somit gilt dann schlussendlich

$$u(0) = v(0) - w(0) = v(0) \leq \max_{x \in U} v(x) \leq \max_{x \in \partial U} (u(x) + w(x)) \leq w(x_0) = -\frac{1}{2n}a^2$$

Analog liefert das Minimumsprinzip die Existenz des Minimum in $x_0 \in \partial U$. Nach Randwertbedingung gilt dort wieder $u(x_0) = 0$. Die Funktion w wird auf dem Rand minimiert durch den Punkt $x_0 = (a, \dots, a) \in \partial U$ mit Minimalwert $w(x_0) = -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n a^2 = -\frac{1}{2}a^2$. Analog zu oben gilt nun

$$u(0) = v(0) - w(0) = v(0) \geq \min_{x \in U} v(x) \geq \min_{x \in \partial U} (u(x) + w(x)) \geq w(x_0) = -\frac{1}{2}a^2$$

Somit ist schließlich $-\frac{1}{2}a^2 \leq u(0) \leq -\frac{1}{2n}a^2$.

(zu c) Sei $U = B_1(0)$ und $f(u, x) = h(x)$ für $g, h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Gemäß Hinweis betrachten wir $u - v$ mit $v(x) := \max_{\partial B_1(0)} |g| + (e^{-e^{x_1+1}}) \cdot \max_{\overline{B_1(0)}} |h|$. Es ist $\Delta v(x) = -e^{x_1+1} \cdot \max_{\overline{B_1(0)}} |h| \leq -\max_{\overline{B_1(0)}} |h|$. Somit ist

$$-\Delta(u-v)(x) = -\Delta u(x) + \Delta v(x) = f(u, x) - \Delta v(x) \leq h(x) - \max_{\overline{B_1(0)}} |h| \leq 0 \quad \forall x \in B_1(0)$$

Damit ist $u - v$ subharmonisch und mit dem Maximumsprinzip gilt auch hier, dass das Maximum in einem $x_0 \in \partial B_1(0)$ angenommen wird. Dementsprechend gilt

$$\max_{\overline{B_1(0)}} (u - v) \leq \max_{\partial B_1(0)} (u - v) \leq \max_{\partial B_1(0)} u + \max_{\partial B_1(0)} (-v) = \max_{\partial B_1(0)} |g| - \max_{\partial B_1(0)} |g| = 0$$

sowie daraus folgend

$$\begin{aligned} \max_{\overline{B_1(0)}} u &\leq \max_{\overline{B_1(0)}} (u - v) + \max_{\overline{B_1(0)}} v = \max_{\overline{B_1(0)}} v \\ &= \max_{\partial B_1(0)} |g| + \max_{\overline{B_1(0)}} |h| \cdot \max_{\overline{B_1(0)}} (e^2 - e^{x_1+1}) \\ &= \max_{\partial B_1(0)} |g| + (e^2 - \underbrace{e^0}_{=1}) \cdot \max_{\overline{B_1(0)}} |h| \end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung funktioniert auch mit $-u$ bzw. $f(u, x) = -h(x)$, sodass $c := e^2 - 1$ vollständig unabhängig ist.

Aufgabe 16. Für $t > 0$ ist die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung auf \mathbb{R}^n gegeben durch $u(x, t) = (ct)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ mit einer Konstante $c > 0$. Zeigen Sie:

- (a) $u_t = \Delta u$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$.
- (b) $\lim_{t \rightarrow 0+} u(x, t) = 0$ für $x \neq 0$, $\lim_{t \rightarrow 0+} u(0, t) = \infty$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$.
- (c) $\int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) dx = 1$ für alle $t > 0$ und $c = 4\pi$.

(zu a) Es sei $u(x, t) = (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 u_t(x, t) &= c^{-\frac{n}{2}} \left(-\frac{n}{2} \right) t^{-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \frac{4|x|^2}{16t^2} \\
 &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{n}{2} t^{-1} + \frac{|x|^2}{4t^2} \right) \\
 &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \left(\frac{|x|^2 - 2nt}{4t^2} \right) \\
 u_{x_i}(x, t) &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{2x_i}{4t} \right) = -(ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \frac{x_i}{2t} \\
 u_{x_i x_i}(x) &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \left(e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \frac{x_i}{2t} \cdot \frac{x_i}{2t} - \frac{1}{2t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) \\
 &= (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\frac{x_i^2}{4t^2} - \frac{1}{2t} \right) \\
 \Delta_x u(x, t) &= \sum_{i=1}^n x_{x_i x_i}(x) = (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\frac{1}{4t^2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n}{2t} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n x_{x_i x_i}(x) = (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\frac{|x|^2 - 2nt}{4t^2} \right)
 \end{aligned}$$

Somit gilt also $u_t = \Delta u$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$.

(zu b) ■ Sei $x \neq 0$. Es ist

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{n}{2} \ln(t) + \frac{|x|^2}{4} \cdot \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2nt \ln(t) + |x|^2}{4t}$$

Betrachten wir zunächst den Ausdruck $2nt \cdot \ln(t) = 2n \cdot \frac{\ln(t)}{\frac{1}{t}}$. Mit der Regel von l'Hôpital erhalten wir

$$\lim_{t \rightarrow 0+} 2n \cdot \frac{\ln(t)}{\frac{1}{t}} = 2n \cdot \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = -2n \cdot \lim_{t \rightarrow 0+} t = 0$$

Damit erhalten wir dann recht einsichtig

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2nt \ln(t) + |x|^2}{4t} = \infty$$

und schließlich

$$\lim_{t \rightarrow 0+} (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = c' \cdot \lim_{t \rightarrow 0+} e^{\ln(t^{-\frac{n}{2}})} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = c' \cdot \lim_{t \rightarrow 0+} e^{-\left(\frac{n}{2} \ln(t) + \frac{|x|^2}{4t}\right)} = 0$$

- Sei $t_k \rightarrow 0+$ für $k \rightarrow \infty$. Dann ist

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u(0, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} (c t_k)^{-\frac{n}{2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(c t_k)^{\frac{n}{2}}} = \infty$$

- Sei nun $t_k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$. Dann ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (c t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(c t_k)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp\left(\lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{|x|^2}{4t_k}\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

(zu c) Wir wollen die Substitution $y_i = \frac{x_i}{2\sqrt{t}}$ verwenden. Dabei ist $\frac{d}{dx_i} y_i = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx \\ &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{4t}} dx_1 \dots dx_n \\ &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^n e^{-\frac{x_i^2}{4t}} dx_1 \dots dx_n \\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_i^2}{4t}} dx_i \\ &= \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_i^2}{4t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dx_i \\ &\stackrel{\text{subst.}}{=} \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-y_i^2} dy_i \\ &= \prod_{i=1}^n \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y_i^2} dy_i}_{=1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 18. Für $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ ist

$$E(x, t; r) = \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq t, \Phi(x - y, t - s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}$$

wobei Φ die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung ist. Zeigen Sie

$$E(0, 0; r) = \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq 0, |y|^2 \leq 2ns \ln \left(-\frac{4\pi s}{r^2} \right) \right\}$$

und bestimmen Sie für jedes $s \in \mathbb{R}$ den Schnitt $B_s := \{y \in \mathbb{R}^n \mid (y, s) \in E(0, 0; r)\}$

Hinweis: $E(x, t; r)$ ist der aus der Vorlesung bekannte *Wärmeball*. Dabei ist $\Phi(x, 0)$ als Grenzwert $\lim_{s \rightarrow 0+} \Phi(x, s)$ zu interpretieren. Analoges gilt in der Darstellung von $E(0, 0; r)$.

Es ist $\Phi(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ für $t > 0$ die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichungen. Betrachten wir $E(0, 0; r)$. Die Bedingung $s \leq t$ wird damit automatisch zu $s \leq 0$ und wir können umstellen:

$$\begin{aligned} \Phi(-y, -s) = (-4\pi s)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{-4s}} \geq \frac{1}{r^n} & \Leftrightarrow e^{-\frac{|y|^2}{-4s}} \geq \frac{(-4\pi s)^{\frac{n}{2}}}{r^n} \\ & \Leftrightarrow -\frac{|y|^2}{-4s} \geq \ln \left(\frac{-4\pi s}{r^2} \right)^{\frac{n}{2}} \\ & \Leftrightarrow \frac{|y|^2}{-4s} \leq \frac{n}{2} \cdot \ln \left(\frac{r^2}{-4\pi s} \right) \\ & \Leftrightarrow |y|^2 \leq 2ns \cdot \ln \left(-\frac{4\pi s}{r^2} \right) \end{aligned}$$

Betrachten wir nun $B_s := \{y \in \mathbb{R}^n : (y, s) \in E(0, 0; r)\}$. Wir unterscheiden fünf Fälle:

(i) Ist $s > 0$, so ist $B_s = \emptyset$.

(ii) Ist $s = 0$, so ist

$$\Phi(-y, 0) = \lim_{t \rightarrow 0+} \Phi(-y, t) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } y \neq 0 \\ \infty & \text{wenn } y = 0 \end{cases}$$

Damit kann $\Phi(-y, 0) \geq \frac{1}{r^2} > 0$ nur für $y = 0$ erfüllt sein, also $B_s = B_0 = \{(0, 0)\}$.

(iii) Seien nun $s < 0$. Dann müssen wir in obiger Umstellung

$$|y|^2 \leq 2ns \cdot \ln \left(-\frac{4\pi s}{r^2} \right)$$

beachten, wann die rechte Seite positiv bzw. Null wird. Da $s < 0$, sind alle Ausdrücke

definiert. Es ist

$$0 = 2ns \cdot \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right) \Leftrightarrow -\frac{4\pi s}{r^2} = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{r^2}{4\pi}$$

und somit $B_s = B_{-\frac{r^2}{4\pi}} = \{(0,0)\}$. Abschließend ist

$$0 > 2ns \cdot \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right) \Leftrightarrow -\frac{4\pi s}{r^2} < 0 \Leftrightarrow s > -\frac{r^2}{4\pi}$$

d.h. $B_s = \emptyset$ für $s < -\frac{r^2}{4\pi}$ und

$$B_s = B_r(0) \text{ mit } r = \sqrt{2ns \cdot \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right)} \quad \text{für } -\frac{r^2}{4\pi} < s < 0$$

Zusammengefasst gilt also

$$B_s = \begin{cases} \emptyset & \text{für } s > 0 \\ \{(0,0)\} & \text{für } s = 0 \\ \left\{y \in \mathbb{R}^n : |y| \leq \sqrt{2ns \cdot \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right)}\right\} & \text{für } -\frac{r^2}{4\pi} < s < 0 \\ \{(0,0)\} & \text{für } s = -\frac{r^2}{4\pi} \\ \emptyset & \text{für } s < -\frac{r^2}{4\pi} \end{cases}$$

Aufgabe 19. Lösen Sie die *Wellengleichung* für $n = 1$, also das Problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u &= g, \quad u_t = h \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\} \end{aligned}$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- (a) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung $\bar{u}_{\eta\xi} = 0$ auf \mathbb{R}^2 . gegeben ist durch $\bar{u}(\eta, \xi) = F(\eta) + G(\xi)$, wobei $F, G \in C^1(\mathbb{R})$ beliebig sind.
- (b) Betrachten Sie im \mathbb{R}^2 die Koordinatentransformation

$$\varphi(t, x) = (t + x, t - x) \quad \text{für } x, t \in \mathbb{R}.$$

und zeigen Sie, dass die Gleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$ genau dann erfüllt ist, wenn $\bar{u}_{\eta\xi} = 0$ für $\bar{u}(\eta, \xi) := (u \circ \varphi^{-1})(\eta, \xi)$ gilt.

- (c) Nutzen Sie (a) und (b), um die *Formel von d'Alembert* herzuleiten, also die Lösungsdarstellung

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy$$

Hinweis: Die Wellengleichung wird demnächst Gegenstand der Vorlesung sein. Dort wird die Formel von d'Alembert geschickt mittels der Methode der Charakteristiken hergeleitet.

(zu a) Sei $\bar{u}(\eta, \xi) = F(\eta) + G(\xi)$ für $F, G \in C^1(\mathbb{R})$. Dann ist $\bar{u}_\eta(\eta, \xi) = F'(\eta)$ und $\bar{u}_{\eta\xi}(\eta, \xi) = 0$ für alle $\eta, \xi \in \mathbb{R}$.

(zu b) Es ist $\varphi^{-1}(\eta, \xi) = \frac{1}{2}(\eta + \xi, \eta - \xi)$. Damit gilt unter Nutzung des Satz von Schwarz

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} u \left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} \partial_1 u \left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) + \frac{1}{2} \partial_2 u \left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \partial_{11} u \left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) - \frac{1}{4} \partial_{12} u \left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) \\ & \quad + \frac{1}{4} \partial_{21} u \left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) - \frac{1}{4} \partial_{22} u \left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x)) = 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) \end{aligned}$$

(zu c) Mit (a) und (b) ist $u \left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) = F(\eta) + G(\xi)$ bzw. $u(x, t) = F(x+t) + G(x-t)$. Mit den Randwerten ist

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= F(x) + G(x) = g(x) & \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) &= F'(x) - G'(x) = h(x) & \text{für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{I}$$

Aus der zweiten Randwertbedingung erhalten wir

$$F(x) - G(x) = \int F'(x) - G'(x) \, dx = \int_{x_0}^x h(y) \, dy \quad (\text{II})$$

Addieren bzw. Subtrahieren wir Gleichungen (I) und (II) so erhalten wir

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \left(g(x) + \int_{x_0}^x h(y) \, dy \right) \\ G(x) &= \frac{1}{2} \left(g(x) - \int_{x_0}^x h(y) \, dy \right) \end{aligned}$$

Setzen wir dies nun in die allgemeine Lösung von oben ein, dann erhält man mit

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2} \left(g(x+t) - g(x-t) + \int_{x_0}^{x+t} h(y) \, dy - \int_{x_0}^{x-t} h(y) \, dy \right) \\ &= \frac{1}{2} (g(x+t) - g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \, dy \end{aligned}$$

die Formel von d'Alembert

Aufgabe 20. Lösen Sie die folgenden Probleme, indem Sie die Formel von d'Alembert aus Aufgabe 19 auf geeignete Hilfsprobleme anwenden.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \text{ mit } c > 0, \\ & u(x, 0) = x^2 |e^x - 1| \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ & u_t(x, 0) = x |e^x - 1| \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & u_{tt} - u_{xx} = x^2 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ & u(x, 0) = x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ & u_t(x, 0) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(zu a) Definiere $v(x, t) := u(cx, t)$. Dann wird die partielle Differentialgleichung zu $v_{tt}(x, t) - v_{xx}(x, t) = u_{tt}(cx, t) - c^2 u_{xx}(cx, t) = 0$ und die Anfangswerte zu $v(x, 0) = u(cx, 0) = (cx)^2 |e^{cx} - 1| =: g(x)$ sowie $v_t(x, t) = u_t(cx, t) = cx |e^{cx} - 1| =: h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir lösen nun das Integral $\int_{x-t}^{x+t} h(y) \, dy$ und wollen zuerst eine Stammfunktion finden:

$$\begin{aligned} \int h(y) \, dy &= \int cy \cdot |e^{cy} - 1| \, dy \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot c \cdot \int y(e^{cy} - 1) \, dy \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot c \cdot \int y \cdot e^{cy} - y \, dy \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot c \cdot \left(\int y \cdot e^{cy} \, dy - \int y \, dy \right) \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot c \cdot \left(\frac{1}{c} y e^{cy} - \frac{1}{c} \int e^{cy} \, dy - \frac{1}{2} y^2 \right) \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot c \cdot \left(\frac{1}{c} y e^{cy} - \frac{1}{c^2} e^{cy} - \frac{1}{2} y^2 \right) \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot \frac{2(cy - 1)e^{cy} - c^2 y^2}{2c} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das bestimmte Integral

$$\begin{aligned} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \, dy &= \frac{1}{2c} \left[\operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot \left(2(cy - 1)e^{cy} - c^2 y^2 \right) \right]_{x-t}^{x+t} \\ &= \frac{1}{2c} \left(\operatorname{sgn}(e^{c(x+t)} - 1) \cdot \left(2(c(x+t) - 1)e^{c(x+t)} - c^2(x+t)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sgn}(e^{c(x-t)} - 1) \cdot \left(2(c(x-t) - 1)e^{c(x-t)} - c^2(x-t)^2 \right) \right) \end{aligned}$$

...

Damit gilt dann mit der Formel von d'Alembert

$$g(x+t) + g(x-t) = c^2(x+t)^2 \left| e^{cx+ct} - 1 \right| + c^2(x-t)^2 \left| e^{cx-ct} - 1 \right|$$

und abschließend also

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \, dy \\ &= \frac{1}{2} \left(c^2(x+t)^2 \left| e^{cx+ct} - 1 \right| + c^2(x-t)^2 \left| e^{cx-ct} - 1 \right| \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{2c} \left(\operatorname{sgn}(e^{c(x+t)} - 1) \cdot \left(2(c(x+t) - 1)e^{c(x+t)} - c^2(x+t)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sgn}(e^{c(x-t)} - 1) \cdot \left(2(c(x-t) - 1)e^{c(x-t)} - c^2(x-t)^2 \right) \right) \end{aligned}$$

...

(zu b) Definiere $v(x, t) := u(x, t) + \frac{1}{12}x^4$. Lösen wir nun das Hilfsproblem $v_{tt}(x, t) - v_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) - x^2 = 0$ mit den Anfangswerten $v(x, 0) = u(x, 0) + \frac{1}{12}x^4 = x + \frac{1}{12}x^4 =: g(x)$ sowie $v_t(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 =: h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir wollen die Formel von d'Alembert anwenden und erhalten wegen $\int_{x-t}^{x+t} h(y) \, dy = 0$

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \, dy \\ &= \frac{1}{2} \left((x+t) + \frac{1}{12}(x+t)^4 + (x-t) + \frac{1}{12}(x-t)^4 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2x + \frac{1}{12} \left(t^4 + 4t^3x + 6t^2x^2 + 4tx^3 + x^4 + t^4 - 4t^3x + 6t^2x^2 - 4tx^3 + x^4 \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2x + \frac{1}{12} \left(2t^4 + 12t^2x^2 + 2x^4 \right) \right) \\ &= x + \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^2x^2 + \frac{1}{12}x^4 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$u(x, t) = v(x, t) - \frac{1}{12}x^4 = x + \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^2x^2$$

Testen wir diese Lösung: Es ist

$$\left. \begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= t^2 + x^2 \\ u_{xx}(x, t) &= t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = t^2 + x^2 - t^2 = x^2$$

Außerdem sind die Randwerte erfüllt, da $u(x, 0) = x$ und $u_t(x, 0) = \frac{1}{3}t^3 + x^2t \big|_{t=0} = 0$.

Aufgabe 21. Es sei u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ das *sphärische Mittel*

$$v(y, t) := M_u(x, |y|, t) := \oint_{\partial B_1(0)} u(x + |y| z, t) \, dO(z)$$

ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

Hinweis: Die Vorlesung vom 28. Mai kann inspirierend sein.

Aufgabe 25. Es seien $g \in C_0^2(\mathbb{R})$ und $h \in C_0^1(\mathbb{R})$ Funktionen mit kompaktem Träger, und es sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = g, \quad u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases}$$

Die „kinetische Energie“ k und die „potentielle Energie“ p seien definiert durch

$$k(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x, t) \, dx \quad \text{und} \quad p(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x, t) \, dx \quad (t > 0)$$

Zeigen Sie:

- (a) $k + p$ ist konstant.
- (b) $k(t) = p(t)$ für alle genügend großen t .

(zu a) Wir betrachten die Formel von d'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \, dy$$

Das Integral können wir mittels $y = x + zt$ und $dy = t dz$ transformieren zu $t \cdot \int_{-1}^1 h(x + zt) \, dz$. Damit können wir problemlos nach x und t ableiten, wobei aufgrund der kompakten Träger die Reihenfolge von Integration und Differentiation vertauschbar ist. Es gilt also:

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \frac{1}{2} \left(g'(x+t) + g'(x-t) + t \int_{-1}^1 h'(x+zt) \, dz \right) \\ &= \frac{1}{2} (g'(x+t) + g'(x-t) + h(x+t) - h(x-t)) \\ u_{xx}(x, t) &= \frac{1}{2} (g''(x+t) + g''(x-t) + h'(x+t) - h'(x-t)) \\ u_{xt}(x, t) &= \frac{1}{2} (g''(x+t) - g''(x-t) + h'(x+t) + h'(x-t)) \\ u_t(x, t) &= \frac{1}{2} \left(g'(x+t) - g'(x-t) + \int_{-1}^1 h(x+zt) \, dz + t \int_{-1}^1 h'(x+zt) \cdot z \, dz \right) \\ &= \frac{1}{2} (g'(x+t) - g'(x-t) + h(x+t) + h(x-t)) \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass

$$(k+p)'(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) \underbrace{u_{tt}(x, t)}_{=u_{xx}(x, t)} + u_x(x, t) u_{xt}(x, t) \, dx$$

Durch Einsetzen und Ausmultiplizieren erhalten wir einen fürchterlichen Term:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}u_t(x,t)u_{xx}(x,t) + u_x(x,t)u_{xt}(x,t) \\ &= g'(x+t)g''(x+t) + g'(x+t)h'(x+t) - g'(x-t)g''(x-t) + g'(x-t)h'(x-t) + \\ & \quad h(x+t)g''(x+t) + h(x+t)h'(x+t) + h(x-t)g''(x-t) - h(x-t)h'(x-t) \end{aligned}$$

Nun sind in jedem Summanden die inneren Ableitungen nach t gleich, das heißt die Vorzeichen spielen bei der Integration über x keine Rolle und wir erhalten

$$(k+p)'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 4 \cdot (g'(z)h'(z) + g''(z)h(z)) \, dz$$

sowie mit partieller Integration für den zweiten Summanden

$$\int_{-\infty}^{\infty} g''(z)h(z) \, dz = [g'(z)h(z)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g'(z)h'(z) \, dz = - \int_{-\infty}^{\infty} g'(z)h'(z) \, dz$$

Damit ist nun schlussendlich

$$\begin{aligned} (k+p)'(t) &= 4 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g'(z)h'(z) \, dz + 4 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g''(z)h(z) \, dz \\ &= 4 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g'(z)h'(z) \, dz - 4 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g'(z)h'(z) \, dz = 0 \end{aligned}$$

und folglich also $k+p$ konstant für alle $t > 0$.

(zu b) Betrachten wir nun $k-p$. Der ausmultiplizierte Integrand ergibt sich als

$$u_x^2(x,t) - u_t^2(x,t) = g'(x+t)g'(x-t) - g'(x+t)h(x-t) + g'(x-t)h(x+t) - h(x+t)h(x-t)$$

Die Funktionen g und h leben auf kompakten Trägern, d.h. es existieren Radien $R_g, R_h > 0$, sodass $\text{supp}(g) \subseteq B_{R_g}(0)$, $\text{supp}(h) \subseteq B_{R_h}(0)$ und auch $\text{supp}(g') \subseteq B_{R_g}(0)$. Ist t nun hinreichend groß, d.h. $t > R := \{R_g, R_h\}$, dann ist $x+t \notin B_R(0)$ oder $x-t \notin B_R(0)$. Somit wird stets einer der beiden Faktoren in obigen Summanden außerhalb des Trägers liegen und somit gleich Null sein. Das heißt also, dass $u_x^2(x,t) - u_t^2(x,t) = 0$ für alle $t > R$ und $x \in \mathbb{R}$ bzw. $p(t) - k(t) = 0 \equiv p(t) = k(t)$ für hinreichend große t .

Aufgabe 26. Es seien $g, h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ gegeben und es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ u = g, \, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{0\}. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

$$\exists C > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^3, t \in (0, \infty) : |u(x,t)| \leq \frac{C}{t}$$

Schätzen Sie dazu $u(x,t)$ auf geeigneten Teilbereichen von $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ ab.

Mit der Kirchhoff'schen Formel erhalten wir als Darstellung der Lösung

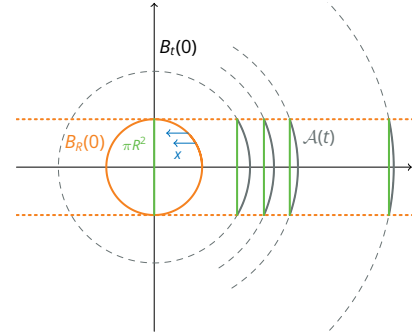
$$u(x, t) = \frac{1}{3t^2\alpha(3)} \int_{\partial B_t(0)} th(x+z) + g(x+z) + Dg(x+z) \cdot z \, dO(z)$$

Schreibe von nun an $\alpha := \alpha(3)$. Gemäß Voraussetzung leben g und h auf kompakten Trägern, d.h. es existieren Radien $R_g, R_h > 0$, sodass $\text{supp}(g) \subseteq B_{R_g}(0)$ und $\text{supp}(h) \subseteq B_{R_h}(0)$ sowie insbesondere auch $\text{supp}(Dg) \subseteq B_{R_g}(0)$. Auf diesen kompakten Trägern nehmen die stetigen Funktionen auch ein Maximum an, d.h. $g(x) \leq g_{\max} := \max_{x \in \mathbb{R}^3} |g(x)|$, $h(x) \leq h_{\max} := \max_{x \in \mathbb{R}^3} |h(x)|$, $Dg(x) \leq g'_{\max} := \max_{x \in \mathbb{R}^3} |Dg(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt mit $R := \max\{R_g, R_h\}$ für $t \leq R$

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \frac{1}{3t^2\alpha} \int_{\partial B_t(0)} |t| \cdot |h(x+z)| + |g(x+z)| + |Dg(x+z)| \cdot |z| \, dO(z) \\ &\leq \frac{1}{3t\alpha} \int_{\partial B_R(0)} h_{\max} \, dO(z) + \frac{1}{3t^2\alpha} \int_{\partial B_R(0)} g_{\max} \, dO(z) + \frac{1}{3t\alpha} \int_{\partial B_R(0)} g'_{\max} \, dO(z) \\ &= \frac{R^2 h_{\max}}{t} + \frac{R^2 g_{\max}}{t^2} + \frac{R^2 g'_{\max}}{t} \quad (|\partial B_R(0)| = R^2 \cdot 3\alpha) \end{aligned}$$

Für hinreichend große t ist $\frac{1}{t} \approx \frac{1}{t^2}$, d.h. mit $C_1 := R^2(h_{\max} + g_{\max} + g'_{\max}) > 0$ gilt die Abschätzung $|u(x, t)| \leq \frac{C_1}{t}$. Für kleine t in einer Umgebung der Null ist $u(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} |g(x)| \leq g_{\max}$ beschränkt, d.h. es existiert ein $C'_1 > 0$, sodass $|u(x, t)| \leq \frac{C'_1}{t}$.

Sei nun $t > R$. In diesem Fall muss $x+z$ nicht mehr unbedingt in den jeweiligen Trägern von g oder h liegen. Dies ist jedoch der Fall, wenn $|x+z| < R$. Wählen wir nun ein $z \in \partial B_R(0)$, d.h. auf dem Rand der R -Kugel, die kleiner ist als die t -Kugel. Für ein fixiertes x kann die Bedingung $|x+z| < R$ höchstens für eine Hemisphäre gelten (für die jeweils andere Hemisphäre „zeigt x aus der Kugel“). Der Flächeninhalt einer solchen Sphäre ist $\mathcal{A}(t) = \pi R^2 + \omega(t)$, wobei $\omega(t)$ den Flächenzuwachs durch die Wölbung der t -Kugel beschreibt. Je größer t wird, desto geringer wird die Wölbung, da der „Ausschnitt“ der gleiche bleibt, d.h.



ω fällt monoton und für $t \rightarrow \infty$ gilt $\omega(t) \rightarrow 0$, d.h. $\mathcal{A}(t) \rightarrow \pi R^2$. Somit ist \mathcal{A} beschränkt durch $\pi R^2 \leq \mathcal{A}(t) \leq \pi R^2 + \omega(R)$ für alle $t > R$. Somit ist

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \frac{1}{3t^2\alpha} \int_{\partial B_t(0)} |th(x+z)| + |g(x+z)| + |Dg(x+z)| \cdot |z| \, dO(z) \\ &\leq \mathcal{A}(t) \cdot \left(\frac{h_{\max}}{3t\alpha} + \frac{g_{\max}}{3t^2\alpha} + \frac{g'_{\max}}{3t\alpha} \right) \\ &= \mathcal{A}(t) \underbrace{\frac{h_{\max} + g_{\max} + g'_{\max}}{3\alpha}}_{=: C_2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{C_2}{t} \end{aligned}$$

Definiere abschließend $C := \max\{C_1, C'_1, C_2\}$, dann ist $|u(x, t)| \leq \frac{C}{t}$ für alle $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$.