Optimierung & Numerik — Vorlesung 13

12.1.1 Die Hamiltonschen Gleichungen

Eine Transformation der Lagrange-Gleichung; quasi „die andere Seite der Medaille“

Definiere die Impulse

$$p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q, \dot{q}) \qquad \text{für } k = 1, \dots, d$$

Diese Abbildung heißt **Legendre-Transformation**.

Definition. Die Hamilton-Funktion ist

$$H(p, q) := p^T \dot{q} - L(q, \dot{q})$$

Dabei geht man natürlich davon aus, dass die Legendre-Transformation eine C^1-Bijektion $\dot{q} \leftrightarrow p$ darstellt.

Beispiel. kinetische Energie ist quadratisch:

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^T M \dot{q} \qquad \text{mit } M \text{ s.p.d.}$$

- Legendre-Transformation: Für festes q hat man $p = M\dot{q}$. Die Transformation ist also tatsächlich eine glatte Bijektion.
- Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned} H(p, q) &= p^T \dot{q} - L(q, \dot{q}) \\ &= p^T M^{-1} p - L(q, M^{-1}p) \\ &= p^T M^{-1} p - T(q, M^{-1}p) + U(q) \\ &= p^T M^{-1} p - \frac{1}{2}(M^{-1}p)^T M (M^{-1}p) + U(q) \\ &= \frac{1}{2}(M^{-1}p)^T M (M^{-1}p) + U(q) \\ &= T + U \end{aligned}$$

Die Hamilton-Funktion ist die Gesamtenergie!

Auch mit Hilfe der Hamilton-Funktion kann man das Verhalten des mechanischen Systems einfach ausdrücken.

Satz 12.2 ([HLW16, Thm. VI.1.3]). Die Lagrange-Gleichung ist äquivalent zu den Hamilton-Gleichungen

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}(p, q), \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}(p, q), \qquad k = 1, \dots, d$$

Literaturverzeichnis

[HLW16] Ernst Hairer, Christian Lubich, and Gerhard Wanner. *Geometric Numerical Integration—Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Springer, zweite auflage edition, 2016.