TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik Institut für Geometrie, Professur für Nichtlineare Analysis

PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Übungen

Prof. Dr. Friedemann Schuricht

Sommersemester 2020

Autor : Eric Kunze
E-Mail : `eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de`

Hausaufgaben

Eric Kunze
Matr.-Nr. 4679202

Partielle Differentialgleichungen – Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $u \in C^2(U, \mathbb{R}^n)$, $A \in C^1(U, \mathbb{R}^{m\times n})$, $\varphi \in C^1(U)$ und $c \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{div}((Du)^\top) = (D(\operatorname{div} u))^\top$,

(b) $\operatorname{div}(cA) = c \operatorname{div} A$,

(c) $\operatorname{div}(\varphi A) = A \cdot D\varphi + \varphi \operatorname{div} A$.

Hinweis: Wir betrachten Vektoren im $\mathbb{R}^n$ als Zeilenvektoren, $\cdot$ ist das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$, $Du = (\partial_j u_i)_{i,j=1,\dots,n}$, div und $\cdot$ wirken auf eine Matrix *zeilenweise*.

Es seien nun $u, v \colon U \to \mathbb{R}$ hinreichend glatt. Beweisen Sie die **Formel von Leibniz**:

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v$$

wobei für Multiindizes α, β gilt:

$$D^\alpha u = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u, \qquad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}, \qquad \alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$$

und $\beta \leq \alpha$ genau dann, wenn $\beta_i \leq \alpha_i$ für $i = 1, \dots, n$.

(zu a) Sei $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in C^2$. Wir notieren Vektoren verkürzt $(u_i)_i = (u_i)_{i=1,\dots,n} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Es ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left((Du)^\top\right) &= \operatorname{div} \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 & \cdots & \partial_n u_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 u_n & \partial_2 u_n & \cdots & \partial_n u_n \end{pmatrix}^\top = \operatorname{div}(\partial_j u_i)_{i,j}^\top = \operatorname{div}(\partial_i u_j)_{i,j} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_{11} u_1 & \partial_{12} u_2 & \cdots & \partial_{1n} u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1} u_1 & \partial_{n2} u_2 & \cdots & \partial_{nn} u_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ij} u_j \right)_i
\end{aligned}$$

und außerdem

$$(D(\operatorname{div} u))^\top = \left(D\left(\sum_{i=1}^n \partial_i u_i \right) \right)^\top = \begin{pmatrix} \partial_{11} u_1 + \partial_{21} u_2 + \cdots + \partial_{n1} u_n \\ \vdots \\ \partial_{1n} u_1 + \partial_{2n} u_2 + \cdots + \partial_{nn} u_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ji} u_j \right)_i$$

Wegen $u \in C^2$ sind alle partiellen Ableitungen stetig und können somit vertauscht werden. Daraus folgt die (zeilenweise) Gleichheit mit

$$\operatorname{div}\left((Du)^\top\right) = \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ij} u_j\right)_i = \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ji} u_j\right)_i = (D(\operatorname{div} u))^\top$$

(zu b) Es ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(cA) = \operatorname{div}\left(\sum_{j=1}^n c_j a_{ij}\right)_i &= \sum_{i=1}^n \partial_i \sum_{j=1}^n c_j a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_i c_j a_{ij} \\
c \cdot \operatorname{div}(A) = c \cdot \left(\sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij}\right)_i &= \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_j c_j a_{ij}
\end{aligned}$$

und somit $\operatorname{div}(cA) = c \cdot \operatorname{div}(A)$.

(zu c) Man hat

$$\begin{aligned}
A \cdot D\varphi = A \cdot (\partial_i \varphi)_i &= \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\ \partial_j \varphi\right)_i \\
\varphi \operatorname{div}(A) = \varphi \cdot \left(\sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij}\right)_i &= \left(\sum_{j=1}^n \varphi\ \partial_j a_{ij}\right)_i \\
\operatorname{div}(\varphi A) = \operatorname{div}\left((\varphi a_{ij})_{i,j}\right) &= \left(\sum_{j=1}^n \partial_j (\varphi a_{ij})\right)_i
\end{aligned}$$

Für fixiertes i (also zeilenweise) erhält man mit der Produktregel für (partielle) Ableitungen

$$\sum_{j=1}^n \partial_j(\varphi a_{ij}) = \sum_{j=1}^n ((\partial_j \varphi) a_{ij} + \varphi(\partial_j a_{ij})) = \sum_{j=1}^n (\partial_j \varphi) a_{ij} + \sum_{j=1}^n \varphi(\partial_j a_{ij})$$

und somit $\operatorname{div}(\varphi A) = A \cdot (D\varphi) + \varphi \cdot \operatorname{div}(A)$.

Leibnitz-Formel: Vollständige Induktion über $|\alpha| = k$.

(IA) $k = 0:$ Für $|\alpha| = 0$, also $\alpha = 0$ ist

$$D^0(uv) = uv = \binom{0}{0} D^0 u\ D^0 v$$

(IV) Für $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i = k$ gilt $D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v$.

(IS) $k \to k+1:$ Seien $|\alpha| = |(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)| = k+1$ und $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n - 1)$ sowie $\beta' = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n + 1)$. Dann ist $|\alpha'| = k$ und $|\beta'| = |\beta| + 1$. Es gilt

$$\begin{aligned}
D^\alpha(uv) &= \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}(uv) = \partial_{x_n}\left(\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n - 1}(uv)\right) \\
&= \partial_{x_n}\left(D^{\alpha'}(uv)\right) \\
&\overset{\text{IV}}{=} \partial_{x_n}\left(\sum_{\beta \leq \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} D^\beta u \; D^{\alpha'-\beta} v\right) \\
&= \sum_{\beta \leq \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} \left(\partial_{x_n}(D^\beta u) \; D^{\alpha'-\beta} v + D^\beta u \; \partial_{x_n}(D^{\alpha'-\beta} v)\right) \\
&= \sum_{\beta \leq \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} \left(D^{\beta'} u \; D^{\alpha'-\beta} v + D^\beta u \; D^{\alpha-\beta} v\right) \\
&= \ldots \\
&= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u \; D^{\alpha-\beta} v
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Ermitteln Sie jeweils eine nichttriviale Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

(a) $v_y(x,y) = xy \cdot v(x,y)$

(b) $u_x(x,y) + y \cdot u(x,y) = 0$

(zu a) Wir gehen analog zur Vorlesung vor und betrachten die Gleichung für fixiertes $x = \text{const}$. Dann erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$u'(y) = xy \cdot u(y)$$

und lösen entweder durch geübtes Hinschauen oder mit Trennung der Variablen: sei $f(u(y)) = u(y)$ und $g(y) = x \cdot y$. Der Ansatz

$$\int^{u(y)} \frac{1}{f(\xi)} \mathrm{d}\xi = \int^y g(\xi) \mathrm{d}\xi \quad \Rightarrow \quad \ln(|u(y)|) = \frac{1}{2}xy^2 + C$$

Beachte, dass die unteren Integralgrenzen dabei in der Konstante C zusammengefasst sind, da wir keinen Anfangswert vorgegeben haben. Die Gleichung „umgestellt" ergibt eine Lösung

$$u(y) = \exp\left(\frac{1}{2}xy^2\right) \qquad \text{bzw.} \qquad v(x,y) = \exp\left(\frac{1}{2}xy^2\right)$$

Eine kurze Probe ergibt

$$v_y(x,y) = xy \cdot \exp\left(\frac{1}{2}xy^2\right) = xy \cdot v(x,y)$$

(zu b) Wir fixieren erneut eine Variable, diesmal $y = \text{const}$. Diesmal sehen wir direkt eine Lösung, nämlich

$$u(x, y) = \exp(-xy)$$

Eine kurze Probe ergibt $u_x(x, y) + y \cdot u(x, y) = -y \cdot \exp(-xy) + y \cdot \exp(-xy) = 0$.

Zusatzaufgabe 3. Klassifizieren Sie die nachstehenden partiellen Differentialgleichungen nach folgenden Gesichtspunkten:

(a) Ist die Differentialgleichung linear, semilinear, quasilinear oder voll nichtlinear?

(b) Welche Ordnung hat die Differentialgleichung?

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0 \\
-\Delta u &= f(u) \\
|Du| &= 1 \\
u_t + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} &= 0 \\
\det(D^2 u) &= f \\
\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}\right) &= 0 \\
u_t - \Delta u &= f(u) \\
u_{tt} - \Delta u &= 0 \\
u_t + \operatorname{div} F(u) &= 0 \\
u_t + u u_x + u_{xxx} &= 0 \\
a u_t + \Delta u &= 0 \\
u_t + H(Du, x) &= 0 \\
u_t - \Delta(u^\gamma) &= 0 \\
-\Delta u &= \lambda u \\
\operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) &= 0 \\
u_t + u u_x &= 0
\end{aligned}$$

Hausaufgaben

Eric Kunze

Partielle Differentialgleichungen – Übungsblatt 2

Matr.-Nr. 4679202

Thema: Charakteristikenmethode

Ich bitte um Entschuldigung, dass meine Lösung so lang geworden ist. Aber ich habe mich bemüht mein Vorgehen detailliert zu beschreiben. ☺

Aufgabe 4. Finden Sie Lösungen $u \in C^1$ der folgenden linearen Randwertprobleme:

(a) $-3u_x + 2u_y = 0$ mit $u(x,y) = y^2 + 1$ auf $\Gamma = \{(1,s) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in \mathbb{R}\}$

(b) $u_x + u_y - u_z = xe^{y-z}$ mit $u(0,y,z) = g(y,z)$ für alle $y, z \in \mathbb{R}$, wobei $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ beliebig ist

(c) $2u_x - u_y = 2u - xe^x$ mit $u(0,y) = y^2$ für alle $y \in \mathbb{R}$

Erläutern Sie dabei Ihr Vorgehen und überprüfen Sie abschließend, ob die von Ihnen gefundene Lösung wirklich das Problem löst.

(zu a) Wir betrachten die Charakteristiken

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sei $\alpha(t) := u(x(t), y(t))$, d.h. α beschreibt u entlang der Charakteristiken. Es gilt

$$\alpha'(t) = u_x \cdot \dot{x}(t) + u_y \cdot \dot{y}(t) = -3u_x + 2u_y = 0$$

und somit ist u konstant entlang der Charakteristiken. Parametrisiere die Kurve Γ durch $x_0(s) = 1$ und $y_0(s) = s$. Dann ergibt sich die Randwertbedingung zu $g(s) = s^2 + 1$. Wir prüfen nun die nichtcharakteristische Bedingung, d.h. ob die Kurve Γ auch alle Charakteristiken $\Xi_{(x_0,y_0)}$ durchläuft. Dazu prüfen wir den Tangentenvektor von Γ, nämlich $\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, und den Tangentenvektor der Charakteristik $\Xi_{(x_0,y_0)}$, nämlich $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, auf lineare Unabhängigkeit:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

Somit schneidet Γ alle Charakteristiken $\Xi_{(x_0,y_0)}$. Somit können wir die Schar der Charakteristiken beschreiben durch

$$\begin{aligned} x(s,t) &= x_0(s) - 3t = 1 - 3t &&\Rightarrow \quad t(x,y) = \frac{1-x}{3} \\ y(s,t) &= y_0(s) + 2t = s + 2t &&\Rightarrow \quad s(x,y) = y - 2t = y - \frac{2}{3}(1-x) = y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Nach Konstruktion in der Vorlesung erhalten wir damit eine Lösung

$$u(x,y) = g(s(x,y)) = \left(y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right)^2 + 1$$

Die Probe liefert mit den partiellen Ableitungen

$$\left.\begin{array}{rcl} u_x(x,y) & = & \frac{4}{3} \quad \left(y+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)^2 \\ u_y(x,y) & = & 2 \quad \left(y+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -3\cdot\frac{4}{3}\left(y+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)^2+4\left(y+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)^2=0$$

und außerdem $u(1,y)=y^2+1$ für den Anfangswert. Somit ist u also Lösung der Differentialgleichung.

(zu b) Wir betrachten die partielle Differentialgleichung $u_x+u_y-u_z=x\cdot e^{y-z}$ mit der Randbedingung $u(0,y,z)=g(y,z)$ für beliebiges $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$. Definieren wir den „Rand“ als die Fläche $\Gamma=\left\{(0,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y,z\in\mathbb{R}\right\}$. Diese lässt sich parametrisieren mit

$$\gamma(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix} x_0(\sigma,\tau)\\ y_0(\sigma,\tau)\\ z_0(\sigma,\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \sigma\\ \tau\end{pmatrix}$$

Für die Tangentialebene erhalten wir die Spannvektoren

$$\gamma_\sigma(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\qquad \gamma_\tau(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \dot\gamma(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Betrachten wir die Charakteristiken $\Xi_{\sigma,\tau}=\mathrm{Im}(\xi)$ mit

$$\xi(t,\sigma,\tau)=\begin{pmatrix}x(t,\sigma,\tau)\\ y(t,\sigma,\tau)\\ z(t,\sigma,\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0(\sigma,\tau)+t\\ y_0(\sigma,\tau)+t\\ z_0(\sigma,\tau)-t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ \sigma+t\\ \tau-t\end{pmatrix}\tag{2.1}$$

Prüfen wir die nichtcharakteristische Bedingung um sicherzustellen, dass auch jede Charakteristik $\Xi_{\sigma,\tau}$ von Γ durchlaufen wird:

$$\det(\dot\gamma \mid \dot\xi)=\det\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=1\neq 0$$

Bezeichne mit $f(u,x,y,z)=x\cdot e^{y-z}$ die rechte Seite der Differentialgleichung. Schreibe $\xi(t)=\xi(t,\sigma,\tau)$ für fixiertes σ und τ (x,y,z analog). Sei $\alpha(t):=u(\xi(t))$ die Funktion u entlang einer Charakteristik $\Xi_{\sigma,\tau}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\dot\alpha(t)&=Du\cdot\dot\xi=f(u(\xi(t)),\xi(t))=f(\alpha(t),t,\sigma+t,\tau-t)=t\cdot e^{(\sigma+t)-(\tau-t)}\\ &=t\cdot e^{\sigma-\tau+2t}\end{aligned}\tag{2.2}$$

und dem Anfangswert $\alpha(0)=\alpha(0,\sigma,\tau)=g(\sigma,\tau)$. Lösen wir also dieses Anfangswertproblem und integrieren dazu die rechte Seite in Gleichung (2.2) partiell:

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= \int t \cdot e^{\sigma-\tau+2t} \mathrm{d}t = \left(\frac{1}{2} e^{\sigma-\tau+2t}\right) t - \int \frac{1}{2} e^{\sigma-\tau+2t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} t \cdot e^{\sigma-\tau+2t} - \frac{1}{4} e^{\sigma-\tau+2t} + C(\sigma,\tau) \\
&= \left(\frac{1}{2} t - \frac{1}{4}\right) e^{\sigma-\tau+2t} + C(\sigma,\tau)
\end{aligned}$$

Mit dem Anfangswert $\alpha(0) = g(\sigma,\tau)$ ergibt sich die Konstante

$$\alpha(0) = \frac{1}{4} e^{\sigma-\tau} + C(\sigma,\tau) \overset{!}{=} g(\sigma,\tau) \quad \Rightarrow \quad C(\sigma,\tau) = \frac{1}{4} e^{\sigma-\tau} + g(\sigma,\tau)$$

und somit die konkrete Lösung

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2} t - \frac{1}{4}\right) e^{\sigma-\tau+2t} + \frac{1}{4} e^{\sigma-\tau} + g(\sigma,\tau)$$

Aus Gleichung (2.1) erhalten wir die Inverse von ξ als

$$\xi^{-1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} t(x,y,z) \\ \sigma(x,y,z) \\ \tau(x,y,u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-x \\ z+x \end{pmatrix}$$

Nach Konstruktion in der Vorlesung erhalten wir die Lösung

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= \alpha(\xi^{-1}(x,y,z)) \\
&= \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4}\right) e^{(y-x)-(z+x)+2x} + \frac{1}{4} e^{(y-x)-(z+x)} + g(y-x, z+x) \\
&= \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4}\right) e^{y-z} + \frac{1}{4} e^{y-z-2x} + g(y-x, z+x)
\end{aligned}$$

Nun prüfen wir noch, dass die gefundene Funktion auch wirklich eine Lösung der Differentialgleichung ist. Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}
u_x(x,y,z) &= \frac{1}{2} e^{y-z} - \frac{1}{2} e^{y-z-2x} - \partial_1 g(y-x, z+x) + \partial_2 g(y-x, z+x) \\
u_y(x,y,z) &= \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4}\right) e^{y-z} + \frac{1}{4} e^{y-z-2x} + \partial_1 g(y-x, z+x) \\
u_z(x,y,z) &= -\left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4}\right) e^{y-z} - \frac{1}{4} e^{y-z-2x} + \partial_2 g(y-x, z+x)
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}e^{y-z} - \frac{1}{2}e^{y-z-2x} - \partial_1 g(y-x, z+x) + \partial_2 g(y-x, z+x) \\
+ &\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + \partial_1 g(y-x, z+x) \\
+ &\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} - \partial_2 g(y-x, z+x) \\
= &\, e^{y-z} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) - e^{y-z-2x}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) \\
= &\, x \cdot e^{y-z}
\end{aligned}
$$

Außerdem ist die Randwertbedingung erfüllt, denn

$$
u(0, y, z) = -\frac{1}{4}e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z} + g(y, z) = g(y, z)
$$

und somit u tatsächlich Lösung der partiellen Differentialgleichung.

(zu c) Gegeben sei die partielle Differentialgleichung $2u_x - u_y = 2u + x \cdot e^x$ und die Randwertbedingung $u(0, y) = y^2$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Bezeichnen wir mit $f(u, x, y) = 2u - xe^x$ die rechte Seite. Die Randwerte werden auf der Kurve $\Gamma = \big\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\big\}$ angenommen. Diese können wir parametrisieren mit

$$
\gamma(s) = \begin{pmatrix} x_0(s) \\ y_0(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} \dot{x}_0(s) \\ \dot{y}_0(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Damit wird die Randwertbedingung zu $g(s) = s^2$. Betrachten wir die Charakteristiken Ξ_s mit

$$
\xi(t, s) = \begin{pmatrix} x(t, s) \\ y(t, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(s) + 2t \\ y_0(s) - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ s + t \end{pmatrix} \tag{2.3}
$$

Die nichtcharakteristische Bedingung ist hier erfüllt, denn

$$
\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0
$$

Betrachte nun die Funktion u entlang der Charakteristiken Ξ_s für fixiertes s beschrieben durch $\alpha(t) = u(\xi(t))$. Differenzieren ergibt

$$
\dot{\alpha}(t) = u_x \cdot \dot{x} + u_y \cdot \dot{y} = f(u(\xi(t)), \xi(t)) = f(\alpha(t), 2t, s+t) = 2\alpha - 2t \cdot e^{2t} \tag{2.4}
$$

bei $\alpha(0, s) = g(s) = s^2$. Dieses Anfangswertproblem lösen wir mit Variation der Konstanten. Das zugehörige homogene Problem besitzt offensichtlich die Lösung $\alpha(t) = c(t) \cdot e^{2t}$. Differenzieren wir diese Gleichung erhalten wir $\dot{\alpha}(t) = \dot{c}(t) \cdot e^{2t} + 2c(t) \cdot e^{2t}$. Setzen wir dies nun in Gleichung (2.4) ein, dann erhalten wir für ein $\hat{c} \in \mathbb{R}$

$$
\dot{c}(t) \cdot e^{2t} + 2c(t) \cdot e^{2t} = 2c(t) \cdot e^{2t} - 2t \cdot e^{2t} \quad \Rightarrow \quad \dot{c}(t) = -2t \quad \Rightarrow \quad c(t) = \hat{c} - t^2
$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung $\alpha(t) = e^{2t}(\hat{c} - t^2)$. Durch den Anfangswert gilt $\alpha(0) = \hat{c} = s^2$ und somit ist $\alpha(t) = e^{2t}(s^2 - t^2)$ konkrete Lösung des Anfangswertproblems, was sich auch leicht überprüfen lässt:

$$\dot{\alpha}(t) = 2\underbrace{e^{2t}(s^2 - t^2)}_{=\alpha(t)} - 2t \cdot e^{2t} = 2\alpha(t) - 2t \cdot e^{2t} \quad \text{und} \quad \alpha(0) = s^2$$

Aus Gleichung (2.3) erhalten wir

$$\xi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} t(x, y) \\ s(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x + y \end{pmatrix}$$

Damit folgt nach Konstruktion in der Vorlesung eine Lösung

$$\begin{aligned} u(x, y) = \alpha(s(x, y)) &= e^x \left(\left(\frac{1}{2}x + y \right)^2 - \frac{1}{4}x^2 \right) \\ &= e^x \left(\frac{1}{4}x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{4}x^2 \right) \\ &= e^x \left(y^2 + xy \right) \end{aligned}$$

Dann gilt für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \left(y^2 + xy \right) + y \cdot e^x \\ u_y &= e^x \left(2y + x \right) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} 2u_x - u_y &= 2e^x(y^2 + xy) + 2y \cdot e^x - e^x(2y + x) \\ &= 2u + e^x(2y - 2y - x) \\ &= 2u - x \cdot e^x \end{aligned}$$

und $u(0, y) = e^0(y^2 + 0 \cdot y) = y^2$. Damit ist also u tatsächlich Lösung der partiellen Differentialgleichung.

Hausaufgaben

Eric Kunze

Partielle Differentialgleichungen – Übungsblatt 3

Matr.-Nr. 4679202

Aufgabe 6. Bestimmen Sie eine Lösung $u \in C\acute{z}(U)$ des quasilinearen Randwertproblems

$$\begin{aligned} uu_x + u_y &= 1 \\ u(x,x) &= \frac{1}{2}x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\xi\} \end{aligned}$$

wobei $\xi \in \mathbb{R}$ geeignet gewählt und U eine geeignet gewählte Umgebung der Menge ist, auf der u vorgegeben ist. Nutzen Sie dazu die Methode der Charakteristiken, überprüfen Sie Ihr Ergebnis und skizzieren Sie einige Charakteristiken in der Nähe des Punktes (ξ, ξ).

Aus der Vorlesung kennen wir die Notation $a(u(x), x) \cdot Du + b(u(x), x) = 0$. Wir notieren $a(u(x,y), x, y) = (u(x,y), 1)$ und $b(u(x,y), x, y) = -1$. Aus der Randwertbedingung erhalten wir eine Kurve $\Gamma = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \setminus \{\xi\}\}$ mit Parametrisierung $\gamma(s) = \left(\begin{smallmatrix} x_0(s) \\ y_0(s) \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} s \\ s \end{smallmatrix}\right)$, auf der $g(s) = \frac{1}{2}s$ gilt. Wir überprüfen die nichtcharakteristische Bedingung gemäß Konstruktion in der Vorlesung als

$$\det\left(\dot\gamma \mid a(g(s), \gamma(s))\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & g(s) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}s \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - \frac{1}{2}s \neq 0 \ \ \forall s \neq 2$$

Wähle somit also $\xi = 2$, um die Regularität zu sichern. Betrachten wir $\alpha(t,s) = u(x(t,s), y(t,s)$ als die Funktion u entlang der Charakteristiken. Da die partielle Differentialgleichung quasilinear ist, reichen die beiden folgenden charakteristischen Gleichungen zu lösen aus:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix} &= a(\alpha, x, y) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \\ \dot\alpha &= -b(\alpha, x, y) = 1 \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $\alpha(0,s) = \frac{1}{2}s$, $x(0,s) = s$ und $y(0,s) = s$. Lösen wir diese gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= t + c(s) && \overset{\text{AW}}{\Rightarrow} \ c(s) = \tfrac{1}{2}s && \Rightarrow \ \alpha(t,s) = t + \tfrac{1}{2}s \\ y(t) &= t + c(s) && \overset{\text{AW}}{\Rightarrow} \ c(s) = s && \Rightarrow \ y(t,s) = t + s \\ x(t) &= \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{2}st + c(s) && \overset{\text{AW}}{\Rightarrow} \ c(s) = s && \Rightarrow \ x(t,s) = \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{2}st + s \end{aligned}$$

Wegen der charakteristischen Bedingung können wir dieses Gleichungssystem nach t und s auflösen:

$$\begin{aligned} y(t,s) &= t + s \ \Rightarrow \ s = y - t \\ x(t,s) &= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + s = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}(y-t)t + y - t = t\left(\frac{1}{2}y - 1\right) + y \end{aligned}$$

also

$$t(x,y) = \frac{x-y}{\frac{1}{2}y - 1} \quad \text{und} \quad s(x,y) = y - \frac{x-y}{\frac{1}{2}y - 1}$$

Setzen wir dies als Lösung $u(x,y) = \alpha(t(x,y), s(x,y)$ zusammen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \alpha\left(\frac{x-y}{\frac{1}{2}y-1}\ ,\ y - \frac{x-y}{\frac{1}{2}y-1}\right) \\
&= \frac{x-y}{\frac{1}{2}y-1} + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\frac{x-y}{\frac{1}{2}y-1} \\
&= \frac{x-y}{y-2} + \frac{1}{2}y \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}, y \neq 2
\end{aligned}$$

Überprüfen wir unser Ergebnis: Es gilt

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{x-y}{y-2} + \frac{1}{2}y \\
u_x(x,y) &= \frac{1}{y-2} \\
u_y(x,y) &= \frac{-1}{y-2} - \frac{x-y}{(y-2)^2} + \frac{1}{2} = \frac{2-x}{(y-2)^2} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Setzen wir dies in die partielle Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
u(x,y) \cdot u_x(x,y) + u_y(x,y) &= \left(\frac{x-y}{y-2} + \frac{1}{2}y\right) \cdot \frac{1}{y-2} + \frac{2-x-2y}{(y-2)^2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{x-y}{(y-2)^2} + \frac{1}{2}y\frac{1}{y-2} + \frac{2-x}{(y-2)^2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{2-y}{(y-2)^2} + \frac{1}{2}y\frac{1}{y-2} + \frac{1}{2} \\
&= \left(\frac{1}{2}y - 1\right)\frac{1}{y-2} + \frac{1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

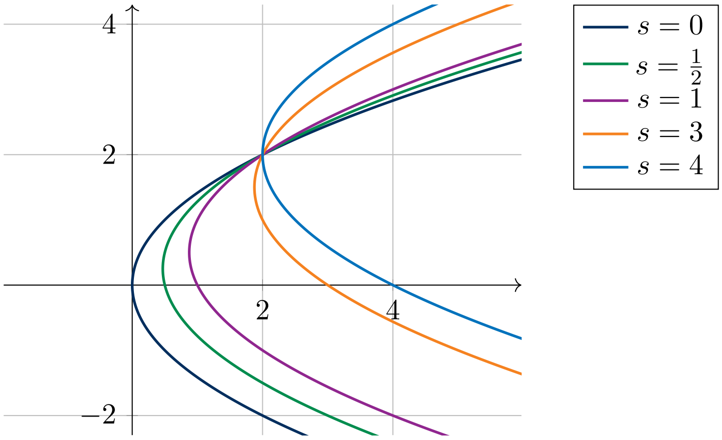
und für die Randwerte $u(x,x) = \frac{1}{2}x$ für alle $x \neq 2$.

Betrachten wir die Charakteristiken beschrieben mit einer Parametrisierung für fixiertes $s \neq 2$ und betrachten das Gleichungssystem

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + s \\ t+s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad t \quad = 2-s \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{1}{2}(2-s)^2 + \frac{1}{2}s(2-s) + s = 2$$

Somit sind die Gleichungen unabhängig von $s \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ erfüllt und alle Charakteristiken gehen durch den Punkt $(2,2)$.

Charakteristiken $x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + s \\ t + s \end{pmatrix}$



Hausaufgaben

Partielle Differentialgleichungen – Übungsblatt 4

Eric Kunze
Matr.-Nr. 4679202

Aufgabe 7. Wir betrachten die *Burgers-Gleichung*

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0 \qquad \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= g(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(a) Es sei zuerst g gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$v(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq \frac{1}{2}t, \\ 0 & \text{für } x < \frac{1}{2}t \end{cases} \qquad \text{und} \qquad w(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq t, \\ \frac{x}{t} & \text{für } x \in [0,t), \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

schwache Lösungen sind.

Hinweis: Es genügt, die Randwerte, die Rankine-Hugoniot-Bedingung auf Sprungkurven und die Differentialgleichung abseits dieser Kurven zu überprüfen.

(b) Es sei nun g gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

i. Offenbar ist $g \notin C^1(\mathbb{R})$. Stellen Sie dennoch die charakteristischen Gleichungen auf und ermitteln Sie, welche Lösung man formal für $t < 1$ erwarten würde.

ii. In welchen Punkten $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,1)$ gilt $u_t + uu_x = 0$?

iii. Setzen Sie u derart auf $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ fort, dass nur eine Sprungkurve existiert und dass entlang dieser die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt ist.

Hinweis: Es bietet sich an, dass u für $t \geq 1$ nur die Werte 0 und 1 annimmt.

Für die Burgers-Gleichung gilt in Anlehnung an die Notation der Vorlesung $F(u)_x = uu_x$ und damit $F(u) = \frac{1}{2}u^2$.

(zu a) Wir betrachten die Funktion v. Für die Randwerte, d.h. für $y = 0$ gilt

$$v(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} = g(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Die Sprungkurve ist gegeben durch $s(t) = \frac{1}{2}t$ mit $\dot{s} = \frac{1}{2}$. Es gilt $[[v]] = -1$ und $[[F(v)]] = 0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, also ist mit $[[F(v)]] = \dot{s} \cdot [[v]]$ die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt. Betrachte die Differentialgleichung abseits der Sprungkurve:

- Sei $x > \frac{1}{2}t$. Dann ist v gegeben durch $v(x,t) = 1$ und somit $v_t = v_x \equiv 0$. Eingesetzt in die PDE ergibt dies $v_t + vv_x = 0 + 1 \cdot 0 = 0$. ✓
- Sei $x < \frac{1}{2}t$. Dann ist v gegeben durch $v(x,t) = 0$ und somit $v_t = v_x \equiv 0$. Eingesetzt in die PDE ergibt dies $v_t + vv_x = 0 + 0 \cdot 0 = 0$. ✓

Betrachten wir nun die Funktion w. Die Randwerte werde wegen

$$w(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} = g(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

erfüllt. Wir erhalten hier zwei Sprungkurven:

- Die Winkelhalbierende können wir durch $s_1(t) = t$ parametrisieren, also ist $\dot{s} = 1$. Dann ergibt sich für die Differenzen

$$[[F(w)]] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{und} \quad [[w]] = 1 - \frac{t}{t} = 0 \quad \Rightarrow \quad [[F(w)]] = \dot{s_1} \cdot [[w]]$$

- Für die andere Sprungkurve, die wir mit $s_2(t) = 0$ parametrisieren ($\dot{s} = 0$), erhalten wir

$$[[F(w)]] = 0 - 0 = 0 \quad \text{und} \quad [[w]] = \frac{0}{t} - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad [[F(w)]] = \dot{s_2} \cdot [[w]]$$

Die Differentialgleichung wird abseits der Sprungkurven auch erfüllt:

- Sei $x > t$. Dann ist w gegeben durch $w(x,t) = 1$ und somit $w_t = w_x \equiv 0$. Eingesetzt in die PDE ergibt dies $w_t + ww_x = 0 + 1 \cdot 0 = 0$. ✓
- Sei $x \in [0,t)$. Dann ist w gegeben durch $w(x,t) = \frac{x}{t}$ und somit $w_t = \frac{-x}{t^2}$ und $w_x = \frac{1}{t}$. Eingesetzt in die PDE ergibt dies $w_t + ww_x = \frac{-x}{t^2} + \frac{x}{t}\frac{1}{t} = 0$. ✓
- Sei $x < 0$. Dann ist w gegeben durch $w(x,t) = 0$ und somit $w_t = w_x \equiv 0$. Eingesetzt in die PDE ergibt dies $w_t + ww_x = 0 + 0 \cdot 0 = 0$. ✓

Damit sind also v und w schwache Lösungen der partiellen Differentialgleichung.

(zu b) Mit $y := (x,t)$, $a(u,y) = \binom{u}{1}$ und $b(u,y) = 0$ hat die Burgergsgleichung die quasilineare

Form der Vorlesung. Dann sind die charakteristischen Gleichungen gegeben durch

$$\dot{y}(\tau,\sigma) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{t} \end{pmatrix} = a(\alpha, y) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\dot{\alpha}(\tau,\sigma) = a(\alpha, y) \cdot Du = -b(u, y) = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha(0,\sigma) = g(\sigma)$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir die Lösung $\alpha(\tau,\sigma) = g(\sigma)$, d.h. u ist entlang der Charakteristiken konstant. Aus der ersten Gleichung erhalten wir zum einen die Identifizierung $\tau = t$, d.h. die Charakteristiken können durch die Zeit t parametrisiert werden. Zum anderen die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{x} = \alpha$ mit der Lösung $x(\tau,\sigma) = g(\sigma) \cdot \tau + s$ bzw. mit der Identifizierung dann $x(t) = g(\sigma) \cdot t + \sigma$. Setzen wir die Definition von g ein, so erhalten wir

$$x(t) = \begin{cases} t+\sigma & \sigma \le 0 \\ (1-\sigma)t + \sigma & 0 \le \sigma \le 1 \\ \sigma & \sigma \ge 1 \end{cases}$$

Für $t \le 1$ können wir jeden Fall umstellen und erhalten

$$\sigma = \begin{cases} x-t & x-t \le 0 \\ \frac{x-t}{1-t} & x-t \ge 0 \wedge x \le 1 \\ x & x \ge 1 \end{cases}$$

Nach Konstruktion erhalten wir dann die Lösung

$$u(x,t) = \alpha(\tau,\sigma) = g(\sigma(t,x)) = \begin{cases} 1 & x-t \le 0 \\ 1 - \frac{x-t}{1-t} & x-t \ge 0 \wedge x \le 1 \\ 0 & x \ge 1 \end{cases}$$

Sei nun $t \in (0,1)$. Wir prüfen die Gültigkeit der Differentialgleichung:

- Sei $x-t \le 0$. Dann ist also $u(x,t) = 1$ und $u_x = u_t \equiv 0$ und die Differentialgleichung erfüllt.
- Ist $x - t \ge 0$ und $x \le 1$, dann ist $u(x,t) = 1 - \frac{x-t}{1-t}$ und $u_x(x,t) = \frac{1}{1-t}$ sowie $u_t(x,t) = \frac{(t-1)+(x-t)}{(1-t)^2}$. In die Differentialgleichung eingesetzt ergibt dies

$$u_t + uu_x = \frac{(t-1)+(x-t)}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t} - \frac{x-t}{(1-t)^2} = 0 \quad \checkmark$$

- Sei $x \ge 1$. Dann ist $u = u_x = u_t \equiv 0$ und die Differentialgleichung damit erfüllt.

Somit ist u Lösung der Differentialgleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ und $t \in (0,1)$.

Aufgabe 8. Betrachten Sie das Beispiel „Ampel (von rot auf grün)“ aus der Vorlesung, modelliert durch

$$u_t + F(u)_x = 0 \qquad \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$$
$$u(x,0) = g(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

mit

$$F(u) = u(60 - \frac{2}{5}u) \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} 150 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) In der Vorlesung wurde in Teil a) eine Funktion u_a explizit gegeben. In Teil b) wurde eine weitere Lösung u_b skizziert. Ermitteln Sie u_b explizit.

Hinweis: Die charakteristischen Gleichungen geben u_b auf eine großen Menge vor. Ermitteln Sie u_b für die restlichen (x,t), indem sie eine differenzierbare reelle Funktion v derat bestimmen, dass $u_b(x,t) = v(\frac{x}{t})$ die Differentialgleichung löst.

(b) Überprüfen Sie für u_a und u_b entlang aller Sprungkurven die Rankine-Hugoniot-Bedingung und die Entropiebedingung.

(zu a) Für die skalare Erhaltungsgleichung erhalten wir die aus der Vorlesung bekannten Bezeichnungen mit $y = (x,t)$, $a(u,y) = (60 - \frac{4}{5}u\ ,\ 1)$ und $b \equiv 0$. Außerdem sind die Startwerte der charakteristischen Gleichungen gegeben durch $x_0(s) = s$, $t_0(s) = 0$, und als Randwerte $g(s) = 150 \cdot \mathbb{1}_{\{s<0\}}(s)$. Wir erhalten die charakteristischen Gleichungen

$$\dot{y}(\tau,\sigma) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{t} \end{pmatrix} = a(\alpha, y) = \begin{pmatrix} 60 - \frac{4}{5}u \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\dot{\alpha}(\tau,\sigma) \overset{\text{DGl}}{=} -b(\alpha,y) = 0$$

Aus der letzten Zeile der ersten Gleichung erhalten wir dabei die Identifizierung $t(\tau,\sigma) = \tau$. Die zweite charakteristische Gleichung löst sich unter Nutzung des Anfangswertes $\alpha(0,\sigma) = g(\sigma)$ zu $\alpha(\tau,\sigma) = g(\sigma)$. Setzen wir dies in die erste Zeile der ersten Gleichung ein, so erhalten wir $\dot{x}(\tau,\sigma) = 60 - \frac{4}{5}g(\sigma)$. Dies löst sich mit dem Anfangswert $x(0,\sigma) = \sigma$ zu

$$x(\tau,\sigma) = 60\tau - \frac{4}{5}g(\sigma) \cdot \tau + \sigma = \begin{cases} -60t + \sigma & \sigma < 0 \\ 60t + \sigma & \sigma \geq 0 \end{cases}$$

Für $\tau = t > 0$ lässt sich dies umstellen zu

$$\sigma(x,t) = \begin{cases} x + 60t & x < 0 \\ x - 60t & x \geq 0 \end{cases}$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$u(x,t) = \alpha(t,\sigma) = \begin{cases} 150 & \sigma(x,t) < 0 \\ 0 & \sigma(x,t) \geq 0 \end{cases}$$

Da $t \in (0,\infty)$ ist, ist somit u auf der Menge $\{(x,t) : t \in (0,\infty), x \notin (-60t, 60t)\}$ eindeutig vorgegeben. Wir erweitern nun auf $t \in \mathbb{R}$ und betrachte $x \in (-60t, 60t)$. Dabei soll eine Funktion v mit $u(x,t) = v(\frac{x}{t})$ bestimmt werden, die die PDE erfüllt. Die Funktion u muss gemäß Vorlesung ihr Maximum auf der t-Achse, also für $x = 0$ annehmen. Dementsprechend gilt $u(0,t) = v(\frac{0}{t}) = v(0) = u_{\text{opt}} = 75$. Da wir $x \in (-60t, 60t)$ betrachten, gilt $\frac{x}{t} = (-60, 60)$. Die Randwerte sollten dabei mit minimaler (rechts) bzw. maximaler (links) Dichte gegeben sein, d.h. $v(-60) = 150$ und $v(60) = 0$. Diese drei Punkte definieren uns eine eindeutige Polynomfunktion zweiten Grades:

$$v(\xi) = -\frac{5}{4s}\xi + 75 \qquad \text{auf } (-60, 60)$$

Damit können wir u definieren als

$$u(x,t) = v(\frac{x}{t}) = -\frac{5}{4}\frac{x}{t} + 75 \qquad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ und } x \in (-60t, 60t)$$

Damit gilt $u_x(x,t) = -\frac{5}{4}\frac{1}{t}$ und $u_t(x,t) = \frac{5}{4}\frac{x}{t^2}$. In die PDE eingesetzt liefert dies

$$\begin{aligned} u_t + F(u)_x &= u_t + \left(60 - \frac{4}{5}u\right) u_x \\ &= \frac{5}{4}\frac{x}{t^2} + \left(60 + \frac{x}{t} - 60\right)\left(-\frac{5}{4}\frac{1}{t}\right) = \frac{5}{4}\frac{x}{t^2} - \frac{5}{4}\frac{x}{t^2} = 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Somit können wir u schlussendlich definieren als

$$u(t,x) = \begin{cases} 150 & x < -60t \\ -\frac{5}{4}\frac{x}{t} + 75 & -60t \le x \le 60t \\ 0 & x > 60t \end{cases}$$

(zu b) Definiere $u_b := u$ von oben. Man sieht leicht, dass u_b eine stetige Funktion ist. Daher existieren keine Sprungkurven und die Rankine-Hugoniot- bzw. Entropie-Bedingungen müssen nicht betrachtet werden. (Die Rankine-Hugoniot-Bedingungen werden trivialerweise trotzdem erfüllt, aber die Entropie-Bedingung nicht mehr).

Aus der Vorlesung bekannt ist

$$u_a(x,t) = \begin{cases} 150 & x < 0 \\ 0 & x \ge 0 \end{cases}$$

Wir betrachten die Sprungkurve $x = s(t) = 0$. Dann ist auch $\dot{s} = 0$ und mit $F(u) = u\left(60 - \frac{2}{5}u\right)$ gilt

$$\left.\begin{array}{rcl} [[u]] &=& 150 \\ [[F(u)]] &=& 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; [[F(u)]] = \dot{s} \cdot [[u]]$$

Es ist $F'(u) = 60 - \frac{4}{5}u$ und damit $F'(u_l) = F'(150) = -60$ sowie $F'(u_r) = F'(0) = 60$. Somit ist die Entropie-Bedingung verletzt.

Hausaufgaben

Eric Kunze
Matr.-Nr. 4679202

Partielle Differentialgleichungen – Übungsblatt 5

Aufgabe 12. Eine Funktion $u \in C^2(U)$ über einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt harmonisch, falls $\Delta u = 0$ in U.

(a) Zeigen Sie, dass die durch

$$u(x) = \begin{cases} \ln(|x|) & \text{für } n = 2, \\ \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{für } n \geq 3 \end{cases}$$

definierte Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ harmonisch ist.

(b) Es sei $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal. Zeigen Sie, dass durch $v(x) = u(Ax)$ eine harmonische Funktion $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert wird.

(zu a) Sei $n = 2$ und $x = (x_1, x_2) \in U$. Dann ist $u(x) = \ln|x| = \ln(r(x))$ mit $r(x) := |x|$. Mit $r_{x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|}$ ist

$$u_{x_i}(x) = \frac{1}{|x|} \cdot r_{x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|^2} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}$$

Leiten wir weiter nach x_i ab, dann erhalten wir

$$u_{x_i x_i}(x) = \partial_{x_i} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_i \cdot 2x_i}{|x|^4} = \frac{|x|^2 - 2x_i^2}{|x|^4}$$

und somit für den Laplace-Operator

$$\Delta u(x) = x_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = \frac{|x|^2 - 2x_2^2}{|x|^4} + \frac{|x|^2 - 2x_2^2}{|x|^4} = 0 \quad \checkmark$$

Sei $n \geq 3$. Dann ist $u(x) = |x|^{2-n}$. Es gilt

$$\begin{aligned} u_{x_i}(x) &= (2-n) \cdot |x|^{1-n} \cdot \frac{x_i}{|x|} = (2-n) \cdot |x|^{-n} \cdot x_i \\ u_{x_i x_i} &= (2-n) \cdot \partial_{x_i} \left(x_i \cdot |x|^{-n} \right) \\ &= (2-n) \cdot \left(|x|^{-n} - n \cdot |x|^{-n-1} \frac{x_i}{|x|} \cdot x_i \right) \\ &= (2-n) \cdot \left(|x|^{-n} - n \cdot |x|^{-n-2} \cdot x_i^2 \right) \end{aligned}$$

Damit gilt für den Laplace-Operator

$$\begin{aligned} \Delta u(x) = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x) &= (2-n) \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x|^{-n} - n \cdot |x|^{-n-2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \\ &= (2-n) \left(n \cdot |x|^{-n} - n \cdot |x|^{-n-2} \cdot |x|^2 \right) \\ &= 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

(zu b) Sei $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, d.h. $A^\top = A^{-1}$. Betrachte

$$\begin{aligned} v_{x_i}(x) &= Du(Ax)\cdot \partial_i Ax = Du(Ax)\cdot a_i = \sum_{k=1}^n u_{x_k}(Ax)\cdot a_{ki} \\ v_{x_ix_i}(x) &= \partial_{x_i}\left(\sum_{k=1}^n u_{x_k}(Ax)\cdot a_{ki}\right) = \sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n u_{x_kx_\ell}(Ax)\cdot a_{ki}a_{\ell i} \end{aligned}$$

Aufgrund der Orthogonalität von A ist $\sum_{i=1}^n a_{ki}a_{\ell i} = \delta_{k\ell}$. Somit ist

$$\Delta v(x) = \sum_{i=1}^n v_{x_ix_i}(x) = \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n u_{x_kx_\ell}(Ax)\cdot a_{ki}a_{\ell i} = \sum_{i=1}^n u_{x_ix_i}(Ax) = \Delta u(Ax) = 0 \quad \checkmark$$

und daher auch v harmonisch.

Aufgabe 13. Es sei Φ die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung, d. h.

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln(|x|) & \text{für } n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{für } n \geq 3 \end{cases}$$

für $x \neq 0$. Zeigen Sie für $x \neq 0$ die Abschätzungen $|D\Phi(x)| \leq c\,|x|^{1-n}$ und $\left|D^2\Phi(x)\right| \leq c\,|x|^{-n}$.

Für $n = 2$ gilt $\Phi_{x_i}(x) = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|x|}\cdot\frac{x_i}{|x|} = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{x_i}{|x|^2}$. Leiten wir für $n \geq 3$ nach x_i ab, so erhalten wir $\Phi_{x_i}(x) = \frac{2-n}{n(n-2)\alpha(n)}\cdot|x|^{1-n}\frac{x_i}{|x|} = \frac{2-n}{n(n-2)\alpha(n)}\cdot x_i\cdot|x|^{-n}$. Beide Fälle können wir mit einer universellen Konstante c zusammenfassen und erhalten mit $\frac{x_i}{|x|} \leq 1$ auch folgende Abschätzung:

$$\Phi_{x_i}(x) = c\cdot x_i\cdot|x|^{-n} = c\cdot|x|^{1-n}\cdot\frac{x_i}{|x|} \leq c\cdot|x|^{1-n} \qquad (i = 1,\dots,n)$$

Damit erhalten wir für die erste Ungleichung

$$|D\Phi(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Phi_{x_i}(x)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(c\cdot|x|^{1-n}\right)^2} = c\cdot n\cdot|x|^{1-n} = c\cdot|x|^{1-n}$$

Für die zweiten Ableitungen gilt dann entsprechend

$$\begin{aligned} \Phi_{x_ix_j}(x) &= c\left(\delta_{ij}\,|x|^{-n} - nx_i\,|x|^{-n-1}\cdot\frac{x_j}{|x|}\right) = c\cdot|x|^{-n}\left(\delta_{ij} - n\cdot x_ix_j\cdot|x|^{-2}\right) \\ \Rightarrow \qquad \left|D^2\Phi(x)\right| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \Phi_{x_ix_j}(x)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left(|x|^{-n}\right)^2\cdot\left(c\delta_{ij} - nx_ix_j\,|x|^{-2}\right)^2} \\ &= |x|^{-n}\sqrt{nc^2 - 2n\,|x|^{-2}\sum_{i=1}^n x_i^2 + n^2\,|x|^{-4}\sum_{i=1}^n x_i^2\sum_{j=1}^n x_j^2} \\ &= |x|^{-n}\cdot\sqrt{nc^2 - 2n + n^2} \\ &\leq c\,|x|^{-n} \end{aligned}$$

Hausaufgaben

Eric Kunze

Partielle Differentialgleichungen – Übungsblatt 6

Matr.-Nr. 4679202

Aufgabe 15. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ eine Lösung von

$$-\Delta u = f(u, x) \quad \text{in } U, \qquad u = g \quad \text{auf } \partial U,$$

wobei f und g im Folgenden spezifisch gewählt werden.

(a) Es sei $f(u,x) = u - u^3$ und $g = 0$. Beweisen Sie *mit elementaren Methoden* die Abschätzung $-1 \leq u(x) \leq 1$ für alle $x \in \overline{U}$.

(b) Es sei $U = (-a,a)^n$ für ein $a > 0$, $f(u,x) = -1$ und $g = 0$. Finden Sie möglichst gute obere und untere Schranken für $u(0)$, indem Sie eine harmonische Funktion der Form $v = u + w$ betrachten, wobei w geeignet zu wählen ist

(c) Es sei $U = B_1(0)$, $f(u,x) = h(x)$ mit $h, g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass es eine von n, h, g und u unabhängige Konstante $c > 0$ gibt, für die gilt:

$$\max_{B_1(0)} |u| \leq c \cdot \left(\max_{\partial B_1(0)} |g| + \max_{B_1(0)} |h| \right)$$

Hinweis: Betrachten sie $u - v$, wobei $v(x) = \max_{\partial B_1(0)} |g| + (e^2 - e^{x_1+1}) \max_{B_1(0)} |h|$.

(zu a) Es sei $f(u) = u - u^3$ und $g \equiv 0$. Da U beschränktes Gebiet ist und $\overline{U}$ eine abgeschlossene Menge, ist also $\overline{U}$ kompakt. Da u stetig auf $\overline{U}$ ist, nimmt u ein Maximum in einem $x_0 \in \overline{U}$ an. Nehmen wir an es sei $u(x_0) > 1$. Es gilt $\equiv g \equiv 0$ auf ∂U, d.h. um ein Maximum $u(x_0 > 1$ zu besitzen, muss $x_0 \in \operatorname{int} U$ sein. Da $u(x_0)$ Maximum ist mit $u \in C^2(U)$, gilt $u_{x_i x_i}(x_0) \leq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Nach Differentialgleichung ist dann also

$$0 \leq -\Delta u(x_0) = -\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x_0) = u(x_0) - u^3(x_0) = u(x_0) \left(1 - u(x_0)^2\right) \overset{u(x_0)>1}{<} 0$$

ein Widerspruch. Somit ist dann $u(x_0) \leq 1$ und aufgrund der Maximalität von $u(x_0)$ auch $u(x) \leq u(x_0) \leq 1$ für alle $x \in \overline{U}$.

Analog dazu nimmt u auf $\overline{U}$ ein globales Minimum in $x_0 \in \overline{U}$ an, für welches nach gleicher Argumentation wie oben $x_0 \in \operatorname{int} U$ gilt. Nehmen wir an, es sei $u(x_0) < -1$. Als Minimalstelle gilt $u_{x_i x_i}(x_0) \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Nach PDE gilt dann

$$0 \geq -\Delta u(x_0) = -\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x_0) = u(x_0) - u^3(x_0) = u(x_0) \left(1 - u(x_0)^2\right) \overset{u(x_0)<-1}{<} 0$$

ein Widerspruch. Somit ist $u(x) \geq u(x_0) \geq -1$ für alle $x \in \overline{U}$ und schließlich gilt die Einschließung $-1 \leq u(x) \leq 1$ für alle $x \in \overline{U}$.

(zu b) Sei $a > 0$ und $U = (-a, a)^n$ ein n-dimensionaler (offener) Quader. Weiter sei $f \equiv -1$ und $g \equiv 0$. Gesucht sind „gute“ (obere und untere) Schranken von $u(0)$. Wir betrachten eine harmonische Funktion v der Form $v = u+w$, d.h. $0 = \Delta v = \Delta u + \Delta w = -f(u,x) + \Delta w = 1 + \Delta w$. Somit suchen wir nun eine Funktion w mit $\Delta w = -1$. Eine Lösung dieser PDE erhalten wir beispielsweise mit $w(x) = -\frac{1}{2n}|x|^2 = -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n x_i^2$.

Wenden wir das Maximumsprinzip auf v an, dann nimmt damit v sein Maximum in einem $x_0 \in \partial U$ an. Aufgrund der Randwertbedingung gilt dort $u \equiv 0$. Wir betrachten oBdA den Randpunkt $x_0 = (a, 0, \ldots, 0) \in \partial U$. Dieser minimiert $\sum_{i=1}^n x_i^2$, da jeder andere Randpunkt auch mindestens eine Koordinate $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x_j = \pm a$ besitzt. Somit gilt dann schlussendlich

$$u(0) = v(0) - w(0) = v(0) \leq \max_{x \in U} v(x) \leq \max_{x \in \partial U} (u(x) + w(x)) \leq w(x_0) = -\frac{1}{2n}a^2$$

Analog liefert das Minimumsprinzip die Existenz des Minimum in $x_0 \in \partial U$. Nach Randwertbedingung gilt dort wieder $u(x_0) = 0$. Die Funktion w wird auf dem Rand minimiert durch den Punkt $x_0 = (a, \ldots, a) \in \partial U$ mit Minimalwert $w(x_0) = -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n a^2 = -\frac{1}{2}a^2$. Analog zu oben gilt nun

$$u(0) = v(0) - w(0) = v(0) \geq \min_{x \in U} v(x) \geq \min_{x \in \partial U} (u(x) + w(x)) \geq w(x_0) = -\frac{1}{2}a^2$$

Somit ist schließlich $-\frac{1}{2}a^2 \leq u(0) \leq -\frac{1}{2n}a^2$.

(zu c) Sei $U = B_1(0)$ und $f(u,x) = h(x))$ für $g, h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Gemäß Hinweis betrachten wir $u - v$ mit $v(x) := \max_{\partial B_1(0)} |g| + \left(e^{-} e^{x_1+1}\right) \cdot \max_{\overline{B_1(0)}} |h|$. Es ist $\Delta v(x) = -e^{x_1+1} \cdot \max_{\overline{B_1(0)}} |h| \leq -\max_{\overline{B_1(0)}} |h|$. Somit ist

$$-\Delta(u-v)(x) = -\Delta u(x) + \Delta v(x) = f(u,x) - \Delta v(x) \leq h(x) - \max_{\overline{B_1(0)}} |h| \leq 0 \quad \forall x \in B_1(0)$$

Damit ist $u - v$ subharmonisch und mit dem Maximumsprinzip gilt auch hier, dass das Maximum in einem $x_0 \in \partial B_1(0)$ angenommen wird. Dementsprechend gilt

$$\max_{\overline{B_1(0)}} (u - v) \leq \max_{\partial B_1(0)} (u - v) \leq \max_{\partial B_1(0)} u + \max_{\partial B_1(0)} (-v) = \max_{\partial B_1(0)} |g| - \max_{\partial B_1(0)} |g| = 0$$

sowie daraus folgend

$$\begin{aligned}
\max_{\overline{B_1(0)}} u \leq \max_{\overline{B_1(0)}} (u - v) + \max_{\overline{B_1(0)}} v = \max_{\overline{B_1(0)}} v& \\
&= \max_{\partial B_1(0)} |g| + \max_{\overline{B_1(0)}} |h| \cdot \max_{\overline{B_1(0)}} \left(e^2 - e^{x_1+1}\right) \\
&= \max_{\partial B_1(0)} |g| + (e^2 - \underbrace{e^0}_{=1}) \cdot \max_{\overline{B_1(0)}} |h|
\end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung funktioniert auch mit $-u$ bzw. $f(u,x) = -h(x)$, sodass $c := e^2 - 1$ vollständig unabhängig ist.

Aufgabe 16. Für $t > 0$ ist die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$ gegeben durch $u(x,t) = (ct)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ mit einer Konstante $c > 0$. Zeigen Sie:

(a) $u_t = \Delta u$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$.

(b) $\lim_{t\to 0+} u(x,t) = 0$ für $x \neq 0$, $\lim_{t\to 0+} u(0,t) = \infty$ und $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$.

(c) $\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)dx = 1$ für alle $t > 0$ und $c = 4\pi$.

(zu a) Es sei $u(x,t) = (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) &= c^{-\frac{n}{2}} \left(-\frac{n}{2}\right) t^{-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \frac{4\left|x\right|^2}{16t^2} \\
&= (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{n}{2} t^{-1} + \frac{\left|x\right|^2}{4t^2}\right) \\
&= (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \left(\frac{\left|x\right|^2 - 2nt}{4t^2}\right) \\
u_{x_i}(x,t) &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{2x_i}{4t}\right) = -(ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \frac{x_i}{2t} \\
u_{x_i x_i}(x) &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \left(e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \frac{x_i}{2t} \cdot \frac{x_i}{2t} - \frac{1}{2t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right) \\
&= (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\frac{x_i^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right) \\
\Delta_x u(x,t) &= \sum_{i=1}^n x_{x_i x_i}(x) = (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\frac{1}{4t^2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n}{2t}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n x_{x_i x_i}(x) = (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\frac{\left|x\right|^2 - 2nt}{4t^2}\right)
\end{aligned}$$

Somit gilt also $u_t = \Delta u$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$.

(zu b) ▪ Sei $x \neq 0$. Es ist

$$\lim_{t\to 0+} \frac{n}{2} \ln(t) + \frac{\left|x\right|^2}{4} \cdot \frac{1}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{2nt\ln(t) + \left|x\right|^2}{4t}$$

Betrachten wir zunächst den Ausdruck $2nt \cdot \ln(t) = 2n \cdot \frac{\ln(t)}{\frac{1}{t}}$. Mit der Regel von l'Hôpital erhalten wir

$$\lim_{t\to 0+} 2n \cdot \frac{\ln(t)}{\frac{1}{t}} = 2n \cdot \lim_{t\to 0+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = -2n \cdot \lim_{t\to 0+} t = 0$$

Damit erhalten wir dann recht einsichtig

$$\lim_{t\to 0+} \frac{2nt\ln(t) + \left|x\right|^2}{4t} = \infty$$

und schließlich

$$\lim_{t\to 0+} (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = c' \cdot \lim_{t\to 0+} e^{\ln(t^{-\frac{n}{2}})} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = c' \cdot \lim_{t\to 0+} e^{-\left(\frac{n}{2}\ln(t) + \frac{|x|^2}{4t}\right)} = 0$$

- Sei $t_k \to 0+$ für $k \to \infty$. Dann ist

$$\lim_{t\to 0+} u(0,t) = \lim_{k\to\infty} (c\ t_k)^{-\frac{n}{2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(c\ t_k)^{\frac{n}{2}}} = \infty$$

- Sei nun $t_k \to \infty$ für $k \to \infty$. Dann ist

$$\lim_{t\to\infty} (c\ t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(c\ t_k)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp\left(\lim_{k\to\infty} -\frac{|x|^2}{4t_k} \right) = 0 \cdot 1 = 0$$

(zu c) Wir wollen die Substitution $y_i = \frac{x_i}{2\sqrt{t}}$ verwenden. Dabei ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i} y_i = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\ \mathrm{d}x &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\ \mathrm{d}x \\
&= (ct)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-x_1^2 - \cdots - x_n^2}{4t}}\ \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \\
&= (ct)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{-x_i^2}{4t}}\ \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \\
&= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_i^2}{4t}}\ \mathrm{d}x_i \\
&= \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_i^2}{4t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}x_i \\
&\overset{\text{subst.}}{=} \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-y_i^2}\ \mathrm{d}y_i \\
&= \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y_i^2}\ \mathrm{d}y_i}_{=1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Hausaufgaben

Eric Kunze

Partielle Differentialgleichungen – Übungsblatt 7

Matr.-Nr. 4679202

Aufgabe 18. Für $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ ist

$$E(x,t;r) = \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq t, \Phi(x-y,t-s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}$$

wobei Φ die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung ist. Zeigen Sie

$$E(0,0;r) = \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq 0, |y|^2 \leq 2ns \, \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right) \right\}$$

und bestimmen Sie für jedes $s \in \mathbb{R}$ den Schnitt $B_s := \{ y \in \mathbb{R}^n \mid (y,s) \in E(0,0;r) \}$

Hinweis: $E(x,t;r)$ ist der aus der Vorlesung bekannte *Wärmeball*. Dabei ist $\Phi(x,0)$ als Grenzwert $\lim_{s\to 0+} \Phi(x,s)$ zu interpretieren. Analoges gilt in der Darstellung von $E(0,0;r)$.

Es ist $\Phi(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ für $t > 0$ die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichungen. Betrachten wir $E(0,0;r)$. Die Bedingung $s \leq t$ wird damit automatisch zu $s \leq 0$ und wir können umstellen:

$$\begin{aligned}
\Phi(-y,-s) = (-4\pi s)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{-4s}} \geq \frac{1}{r^n} \qquad &\Leftrightarrow \qquad e^{-\frac{|y|^2}{-4s}} \geq \frac{(-4\pi s)^{\frac{n}{2}}}{r^n} \\
&\Leftrightarrow \qquad -\frac{|y|^2}{-4s} \geq \ln\left(\frac{-4\pi s}{r^2}\right)^{\frac{n}{2}} \\
&\Leftrightarrow \qquad \frac{|y|^2}{-4s} \leq \frac{n}{2} \cdot \ln\left(\frac{r^2}{-4\pi s}\right) \\
&\Leftrightarrow \qquad |y|^2 \leq 2ns \cdot \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right)
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun $B_s := \{ y \in \mathbb{R}^n : (y,s) \in E(0,0;r) \}$. Wir unterscheiden fünf Fälle:

(i) Ist $s > 0$, so ist $B_s = \emptyset$.

(ii) Ist $s = 0$, so ist

$$\Phi(-y,0) = \lim_{t\to 0+} \Phi(-y,t) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } y \neq 0 \\ \infty & \text{wenn } y = 0 \end{cases}$$

Damit kann $\Phi(-y,0) \geq \frac{1}{r^2} > 0$ nur für $y = 0$ erfüllt sein, also $B_s = B_0 = \{(0,0)\}$.

(iii) Sein nun $s < 0$. Dann müssen wir in obiger Umstellung

$$|y|^2 \leq 2ns \cdot \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right)$$

beachten, wann die rechte Seite positiv bzw. Null wird. Da $s < 0$, sind alle Ausdrücke definiert. Es ist

$$0 = 2ns \cdot \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{4\pi s}{r^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s = -\frac{r^2}{4\pi}$$

und somit $B_s = B_{-\frac{r^2}{4\pi}} = \{(0,0)\}$. Abschließend ist

$$0 > 2ns \cdot \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{4\pi s}{r^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad s > -\frac{r^2}{4\pi}$$

d.h. $B_s = \emptyset$ für $s < -\frac{r^2}{4\pi}$ und

$$B_s = B_r(0) \text{ mit } r = \sqrt{2ns \cdot \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right)} \qquad \text{für } -\frac{r^2}{4\pi} < s < 0$$

Zusammengefasst gilt also

$$B_s = \begin{cases} \emptyset & \text{für } s > 0 \\ \{(0,0)\} & \text{für } s = 0 \\ \left\{ y \in \mathbb{R}^n : |y| \leq \sqrt{2ns \cdot \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right)} \right\} & \text{für } -\frac{r^2}{4\pi} < s < 0 \\ \{(0,0)\} & \text{für } s = -\frac{r^2}{4\pi} \\ \emptyset & \text{für } s < -\frac{r^2}{4\pi} \end{cases}$$

Aufgabe 19. Lösen Sie die *Wellengleichung* für $n = 1$, also das Problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = g, \quad u_t &= h \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\} \end{aligned}$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung $\overline{u}_{\eta\xi} = 0$ auf $\mathbb{R}^2$. gegeben ist durch $\overline{u}(\eta, \xi) = F(\eta) + G(\xi)$, wobei $F, G \in C^1(\mathbb{R})$ beliebig sind.

(b) Betrachten Sie im $\mathbb{R}^2$ die Koordinatentransormation

$$\varphi(t, x) = (t + x, t - x) \quad \text{für } x, t \in \mathbb{R}.$$

und zeigen Sie, dass die Gleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$ genau dann erfüllt ist, wenn $\overline{u}_{\eta\xi} = 0$ für $\overline{u}(\eta, \xi) := (u \circ \varphi^{-1})(\eta, \xi)$ gilt.

(c) Nutzen Sie (a) und (b), um die *Formel von d'Alembert* herzuleiten, also die Lösungsdarstellung

$$u(x, t) = \tfrac{1}{2}\left(g(x + t) + g(x - t)\right) + \tfrac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \, \mathrm{d}y$$

Hinweis: Die Wellengleichung wird demnächst Gegenstand der Vorlesung sein. Dort wird die Formel von d'Alembert geschickt mittels der Methode der Charakteristiken hergeleitet.

(zu a) Sei $\overline{u}(\eta, \xi) = F(\eta) + G(\xi)$ für $F, G \in C^1(\mathbb{R})$. Dann ist $\overline{u}_\eta(\eta, \xi) = F'(\eta)$ und $\overline{u}_{\eta\xi}(\eta, \xi) = 0$ für alle $\eta, \xi \in \mathbb{R}$.

(zu b) Es ist $\varphi^{-1}(\eta, \xi) = \frac{1}{2}(\eta + \xi, \eta - \xi)$. Damit gilt unter Nutzung des Satz von Schwarz

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} u\left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2}\right) \\ =\; & \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\tfrac{1}{2}\partial_1 u\left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\partial_2 u\left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2}\right)\right) \\ =\; & \tfrac{1}{4}\partial_{11} u\left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2}\right) - \tfrac{1}{4}\partial_{12} u\left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2}\right) \\ & + \tfrac{1}{4}\partial_{21} u\left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2}\right) - \tfrac{1}{4}\partial_{22} u\left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2}\right) \\ =\; & \tfrac{1}{4}\left(u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x)\right) \;=\; 0 \\ \Leftrightarrow \quad 0 \;=\; & u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) \end{aligned}$$

(zu c) Mit (a) und (b) ist $u\left(\frac{\eta+\xi}{2}, \frac{\eta-\xi}{2}\right) = F(\eta) + G(\xi)$ bzw. $u(x, t) = F(x + t) + G(x - t)$. Mit den Randwerten ist

$$\begin{aligned} u(x, 0) = F(x) + G(x) &= g(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \qquad \text{(I)} \\ u_t(x, 0) = F'(x) - G'(x) &= h(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Aus der zweiten Randwertbedingung erhalten wir

$$F(x) - G(x) = \int F'(x) - G'(x) \ \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} h(y) \ \mathrm{d}y \tag{II}$$

Addieren bzw. Subtrahieren wir Gleichungen (I) und (II) so erhalten wir

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}\left(g(x) + \int_{x_0}^{x} h(y) \ \mathrm{d}y\right) \\ G(x) &= \frac{1}{2}\left(g(x) - \int_{x_0}^{x} h(y) \ \mathrm{d}y\right) \end{aligned}$$

Setzen wir dies nun in die allgemeine Lösung von oben ein, dann erhält man mit

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(x-t) + \int_{x_0}^{x+t} h(y) \ \mathrm{d}y - \int_{x_0}^{x-t} h(y) \ \mathrm{d}y\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y) \ \mathrm{d}y \end{aligned}$$

die Formel von d'Alembert

Eric Kunze

Matr.-Nr. 4679202

Aufgabe 20. Lösen Sie die folgenden Probleme, indem Sie die Formel von d'Alembert aus Aufgabe 19 auf geeignete Hilfsprobleme anwenden.

a)
$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \text{ mit } c > 0, \\ u(x,0) &= x^2 |e^x - 1| && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= x|e^x - 1| && \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= x^2 && \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= x && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= 0 && \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(zu a) Definiere $v(x,t) := u(cx,t)$. Dann wird die partielle Differentialgleichung zu $v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = u_{tt}(cx,t) - c^2 u_{xx}(cx,t) = 0$ und die Anfangswerte zu $v(x,0) = u(cx,0) = (cx)^2 \left| e^{cx} - 1 \right| =: g(x)$ sowie $v_t(x,t) = u_t(cx,t) = cx \left| e^{cx} - 1 \right| =: h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir lösen nun das Integral $\int_{x-t}^{x+t} h(y) \ \mathrm{d}y$ und wollen zuerst eine Stammfunktion finden:

$$\begin{aligned} \int h(y) \ \mathrm{d}y &= \int cy \cdot |e^{cy} - 1| \ \mathrm{d}y \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot c \cdot \int y(e^{cy} - 1) \ \mathrm{d}y \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot c \cdot \int y \cdot e^{cy} - y \ \mathrm{d}y \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot c \cdot \left(\int y \cdot e^{cy} \ \mathrm{d}y - \int y \ \mathrm{d}y \right) \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot c \cdot \left(\frac{1}{c} y e^{cy} - \frac{1}{c} \int e^{cy} \ \mathrm{d}y - \frac{1}{2} y^2 \right) \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot c \cdot \left(\frac{1}{c} y e^{cy} - \frac{1}{c^2} e^{cy} - \frac{1}{2} y^2 \right) \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot \frac{2(cy-1)e^{cy} - c^2 y^2}{2c} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das bestimmte Integral

$$\begin{aligned} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \ \mathrm{d}y &= \frac{1}{2c} \left[\operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot \left(2(cy-1)e^{cy} - c^2 y^2 \right) \right]_{x-t}^{x+t} \\ &= \frac{1}{2c} \Big(\operatorname{sgn}(e^{c(x+t)} - 1) \cdot \left(2(c(x+t) - 1) e^{c(x+t)} - c^2 (x+t)^2 \right) \\ &\quad - \quad \operatorname{sgn}(e^{c(x-t)} - 1) \cdot \left(2(c(x-t) - 1) e^{c(x-t)} - c^2 (x-t)^2 \right) \Big) \end{aligned}$$

...

Damit gilt dann mit der Formel von d'Alembert

$$g(x+t)+g(x-t)=c^2(x+t)^2\left|e^{cx+ct}-1\right|+c^2(x-t)^2\left|e^{cx-ct}-1\right|$$

und abschließend also

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \tfrac{1}{2}\left(g(x+t)+g(x-t)\right)+\tfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\left(c^2(x+t)^2\left|e^{cx+ct}-1\right|+c^2(x-t)^2\left|e^{cx-ct}-1\right|\right) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{1}{2c}\Big(\operatorname{sgn}(e^{c(x+t)}-1)\cdot\left(2(c(x+t)-1)e^{c(x+t)}-c^2(x+t)^2\right) \\
&\quad - \operatorname{sgn}(e^{c(x-t)}-1)\cdot\left(2(c(x-t)-1)e^{c(x-t)}-c^2(x-t)^2\right)\Big)
\end{aligned}$$

...

(zu b) Definiere $v(x,t) \coloneqq u(x,t)+\frac{1}{12}x^4$. Lösen wir nun das Hilfsproblem $v_{tt}(x,t)-v_{xx}(x,t)=u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)-x^2=0$ mit den Anfangswerten $v(x,0)=u(x,0)+\frac{1}{12}x^4=x+\frac{1}{12}x^4 =: g(x)$ sowie $v_t(x,0)=u_t(x,0)=0 =: h(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Wir wollen die Formel von d'Alembert anwenden und erhalten wegen $\int_{x-t}^{x+t} h(y)\ \mathrm{d}y=0$

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \tfrac{1}{2}\left(g(x+t)+g(x-t)\right)+\tfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\ \mathrm{d}y \\
&= \tfrac{1}{2}\left((x+t)+\tfrac{1}{12}(x+t)^4+(x-t)+\tfrac{1}{12}(x-t)^4\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(2x+\tfrac{1}{12}\left(t^4+4t^3x+6t^2x^2+4tx^3+x^4+t^4-4t^3x+6t^2x^2-4tx^3+x^4\right)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(2x+\tfrac{1}{12}\left(2t^4+12t^2x^2+2x^4\right)\right) \\
&= x+\tfrac{1}{12}t^4+\tfrac{1}{2}t^2x^2+\tfrac{1}{12}x^4
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$u(x,t)=v(x,t)-\tfrac{1}{12}x^4=x+\tfrac{1}{12}t^4+\tfrac{1}{2}t^2x^2$$

Testen wir diese Lösung: Es ist

$$\left.\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= t^2+x^2 \\ u_{xx}(x,t) &= t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)=t^2+x^2-t^2=x^2$$

Außerdem sind die Randwerte erfüllt, da $u(x,0)=x$ und $u_t(x,0)=\frac{1}{3}t^3+x^2t\ \Big|_{t=0}=0$.

Aufgabe 21. Es sei u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ das *sphärische Mittel*

$$v(y,t) \coloneqq M_u(x, |y|, t) \coloneqq \fint_{\partial B_1(0)} u(x + |y|\, z, t) \; \mathrm{d}O(z)$$

ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

Hinweis: Die Vorlesung vom 28. Mai kann inspirierend sein.

Hausaufgaben

Eric Kunze

Partielle Differentialgleichungen – Übungsblatt 9

Matr.-Nr. 4679202

Aufgabe 25. Es seien $g \in C_0^2(\mathbb{R})$ und $h \in C_0^1(\mathbb{R})$ Funktionen mit kompaktem Träger, und es sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = g \ , \ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases}$$

Die „kinetische Energie" k und die „potentielle Energie" p seien definiert durch

$$k(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x,t) \ \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad p(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x,t) \ \mathrm{d}x \quad (t > 0)$$

Zeigen Sie:

(a) $k + p$ ist konstant.

(b) $k(t) = p(t)$ für alle genügend großen t.

(zu a) Wir betrachten die Formel von d'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \ \mathrm{d}y$$

Das Integral können wir mittels $y = x + zt$ und $\mathrm{d}y = t\mathrm{d}z$ transformieren zu $t \cdot \int_{-1}^{1} h(x + zt) \ \mathrm{d}z$. Damit können wir problemlos nach x und t ableiten, wobei aufgrund der kompakten Träger die Reihenfolge von Integration und Differentiation vertauschbar ist. Es gilt also:

$$\begin{aligned}
u_x(x,t) &= \frac{1}{2} \left(g'(x+t) + g'(x-t) + t \int_{-1}^{1} h'(x+zt) \ \mathrm{d}z \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(g'(x+t) + g'(x-t) + h(x+t) - h(x-t)\right) \\
u_{xx}(x,t) &= \frac{1}{2} \left(g''(x+t) + g''(x-t) + h'(x+t) - h'(x-t)\right) \\
u_{xt}(x,t) &= \frac{1}{2} \left(g''(x+t) - g''(x-t) + h'(x+t) + h'(x-t)\right) \\
u_t(x,t) &= \frac{1}{2} \left(g'(x+t) - g'(x-t) + \int_{-1}^{1} h(x+zt) \ \mathrm{d}z + t \int_{-1}^{1} h'(x+zt) \cdot z \ \mathrm{d}z \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(g'(x+t) - g'(x-t) + h(x+t) + h(x-t)\right)
\end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass

$$(k+p)'(t) = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t) \ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t) \underbrace{u_{tt}(x,t)}_{=u_{xx}(x,t)} + u_x(x,t) u_{xt}(x,t) \ \mathrm{d}x$$

Durch Einsetzen und Ausmultiplizieren erhalten wir einen fürchterlichen Term:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}u_t(x,t)u_{xx}(x,t)+u_x(x,t)u_{xt}(x,t)\\ =\ & g'(x+t)g''(x+t)+g'(x+t)h'(x+t)-g'(x-t)g''(x-t)+g'(x-t)h'(x-t)+\\ & h(x+t)g''(x+t)+h(x+t)h'(x+t)+h(x-t)g''(x-t)-h(x-t)h'(x-t)\end{aligned}$$

Nun sind in jedem Summanden die inneren Ableitungen nach t gleich, das heißt die Vorzeichen spielen bei der Integration über x keine Rolle und wir erhalten

$$(k+p)'(t)=\int_{-\infty}^{\infty}4\cdot\left(g'(z)h'(z)+g''(z)h(z)\right)\ \mathrm{d}z$$

sowie mit partieller Integration für den zweiten Summanden

$$\int_{-\infty}^{\infty}g''(z)h(z)\ \mathrm{d}z=\left[g'(z)h(z)\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}g'(z)h'(z)\ \mathrm{d}z=-\int_{-\infty}^{\infty}g'(z)h'(z)\ \mathrm{d}z$$

Damit ist nun schlussendlich

$$\begin{aligned}(k+p)'(t)&=4\cdot\int_{-\infty}^{\infty}g'(z)h'(z)\ \mathrm{d}z+4\cdot\int_{-\infty}^{\infty}g''(z)h(z)\ \mathrm{d}z\\ &=4\cdot\int_{-\infty}^{\infty}g'(z)h'(z)\ \mathrm{d}z-4\cdot\int_{-\infty}^{\infty}g'(z)h'(z)\ \mathrm{d}z=0\end{aligned}$$

und folglich also $k+p$ konstant für alle $t>0$.

(zu b) Betrachten wir nun $k-p$. Der ausmultiplizierte Integrant ergibt sich als

$$u_x^2(x,t)-u_t^2(x,t)=g'(x+t)g'(x-t)-g'(x+t)h(x-t)+g'(x-t)h(x+t)-h(x+t)h(x-t)$$

Die Funktionen g und h leben auf kompakten Trägern, d.h. es existieren Radien $R_g,R_h>0$, sodass $\mathrm{supp}(g)\subseteq B_{R_g}(0)$, $\mathrm{supp}(h)\subseteq B_{R_h}(0)$ und auch $\mathrm{supp}(g')\subseteq B_{R_g}(0)$. Ist t nun hinreichend groß, d.h. $t>R\coloneqq\{R_g,R_h\}$, dann ist $x+t\notin B_R(0)$ oder $x-t\notin B_R(0)$. Somit wird stets einer der beiden Faktoren in obigen Summanden außerhalb des Trägers liegen und somit gleich Null sein. Das heißt also, dass $u_x^2(x,t)-u_t^2(x,t)=0$ für alle $t>R$ und $x\in R$ bzw. $p(t)-k(t)=0\equiv p(t)=k(t)$ für hinreichend große t.

Aufgabe 26. Es seien $g,h\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ gegeben und es sei $u\in C^2(\mathbb{R}^3\times[0,\infty))$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\begin{cases}u_{tt}-\Delta u=0 & \text{auf } \mathbb{R}^3\times(0,\infty),\\ u=g\ ,\ u_t=h & \text{auf } \mathbb{R}^3\times\{0\}.\end{cases}$$

Zeigen Sie:

$$\exists C>0\ \forall x\in\mathbb{R}^3,t\in(0,\infty):|u(x,t)|\le\frac{C}{t}$$

Schätzen Sie dazu $u(x,t)$ auf geeigneten Teilbereichen von $\mathbb{R}^3\times[0,\infty)$ ab.

Mit der Kirchhoff'schen Formel erhalten wir als Darstellung der Lösung

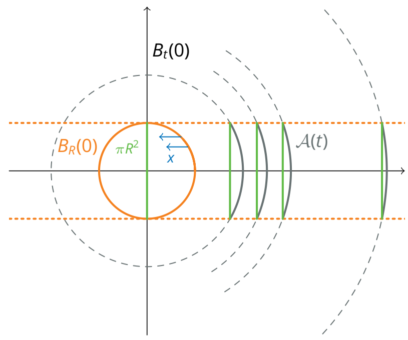
$$u(x,t) = \frac{1}{3t^2\alpha(3)} \int_{\partial B_t(0)} th(x+z) + g(x+z) + Dg(x+z)\cdot z \;\, \mathrm{d}O(z)$$

Schreibe von nun an $\alpha \coloneqq \alpha(3)$. Gemäß Voraussetzung leben g und h auf kompakten Trägern, d.h. es existieren Radien $R_g, R_h > 0$, sodass $\operatorname{supp}(g) \subseteq B_{R_g}(0)$ und $\operatorname{supp}(h) \subseteq B_{R_h}(0)$ sowie insbesondere auch $\operatorname{supp}(Dg) \subseteq B_{R_g}(0)$. Auf diesen kompakten Trägern nehmen die stetigen Funktionen auch ein Maximum an, d.h. $g(x) \le g_{\max} \coloneqq \max_{x\in\mathbb{R}^3} |g(x)|$, $h(x) \le h_{\max} \coloneqq \max_{x\in\mathbb{R}^3} |h(x)|$, $Dg(x) \le g'_{\max} \coloneqq \max_{x\in\mathbb{R}^3} |Dg(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt mit $R \coloneqq \max\{R_g, R_h\}$ für $t \le R$

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &\le \frac{1}{3t^2\alpha} \int_{\partial B_t(0)} |t|\cdot|h(x+z)| + |g(x+z)| + |Dg(x+z)|\cdot|z| \;\, \mathrm{d}O(z) \\
&\le \frac{1}{3t\alpha}\int_{\partial B_R(0)} h_{\max} \;\, \mathrm{d}O(z) + \frac{1}{3t^2\alpha}\int_{\partial B_R(0)} g_{\max} \;\, \mathrm{d}O(z) + \frac{1}{3t\alpha}\int_{\partial B_R(0)} g'_{\max} \;\, \mathrm{d}O(z) \\
&= \frac{R^2 h_{\max}}{t} + \frac{R^2 h_{\max}}{t^2} + \frac{R^2 g'_{\max}}{t} \qquad\qquad (|\partial B_R(0)| = R^2\cdot 3\alpha)
\end{aligned}$$

Für hinreichend große t ist $\frac{1}{t} \approx \frac{1}{t^2}$, d.h. mit $C_1 \coloneqq R^2\left(h_{\max} + g_{\max} + g'_{\max}\right) > 0$ gilt die Abschätzung $|u(x,t)| \le \frac{C_1}{t}$. Für kleine t in einer Umgebung der Null ist $u(x,t) \xrightarrow{t\to 0} |g(x)| \le g_{\max}$ beschränkt, d.h. ex existiert ein $C_1' > 0$, sodass $|u(x,t)| \le \frac{C_1'}{t}$.

Sein nun $t > R$. In diesem Fall muss $x+z$ nicht mehr unbedingt in den jeweiligen Trägern von g oder h liegen. Dies ist jedoch der Fall, wenn $|x+z| < R$. Wählen wir nun ein $z \in \partial B_R(0)$, d.h. auf dem Rand der R-Kugel, die kleiner ist als die t-Kugel. Für ein fixiertes x kann die Bedingung $|x+z| < R$ höchstens für eine Hemisphäre gelten (für die jeweils andere Hemisphäre „zeigt x aus der Kugel“). Der Flächeninhalt einer solchen Sphäre ist $\mathcal{A}(t) = \pi R^2 + \omega(t)$, wobei $\omega(t)$ den Flächenzuwachs durch die Wölbung der t-Kugel beschreibt. Je größer t wird, desto geringer wird die Wölbung, da der „Ausschnitt“ der gleiche bleibt, d.h. ω fällt monoton und für $t \to \infty$ gilt $\omega(t) \to 0$, d.h. $\mathcal{A}(t) \to \pi R^2$. Somit ist $\mathcal{A}$ beschränkt durch $\pi R^2 \le \mathcal{A}(t) \le \pi R^2 + \omega(R)$ für alle $t > R$. Somit ist



$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &\le \frac{1}{3t^2\alpha}\int_{\partial B_t(0)} |th(x+z)| + |g(x+z)| + |Dg(x+z)|\cdot|z| \;\, \mathrm{d}O(z) \\
&\le \mathcal{A}(t)\cdot\left(\frac{h_{\max}}{3t\alpha} + \frac{g_{\max}}{3t^2\alpha} + \frac{g'_{\max}}{3t\alpha}\right) \\
&= \underbrace{\mathcal{A}(t)\frac{h_{\max} + g_{\max} + g'_{\max}}{3\alpha}}_{=:C_2}\cdot\frac{1}{t} = \frac{C_2}{t}
\end{aligned}$$

Definiere abschließend $C \coloneqq \max\{C_1, C_1', C_2\}$, dann ist $|u(x,t)| \le \frac{C}{t}$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$.

Hausaufgaben

Eric Kunze

Partielle Differentialgleichungen – Übungsblatt 10

Matr.-Nr. 4679202

Aufgabe 28. Es sei $u\colon (0,1) \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Ist u stetig und stückweise stetige differenzierbar mit gleichmäßig beschränkter Ableitung, so hat u eine stückweise stetige schwache Ableitung.

(b) Ist u stückweise gleichmäßig stetig und ist $x_0 \in (0,1)$ eine Sprungstelle von u, so hat u *keine* schwache Ableitung.

(zu a) Sei $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$ eine Zerlegung des Intervalls $(0,1)$, sodass $u|_{(x_i,x_{i+1})} =: u_i$ für alle $i = 0, \dots, n-1$ stetig differenzierbar ist. Aufgrund der gleichmäßigen Beschränktheit von u' existiert ein $0 < C < \infty$, sodass $u_i'(x) \leq C$ für alle $x \in (x_i, x_{i+1})$ und alle $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Dann gilt

$$\int_0^1 u'(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_i'(x)\ \mathrm{d}x \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} C\ \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} C \cdot \underbrace{|x_{i+1} - x_i|}_{\leq 1} \leq (n+1)C < \infty$$

und somit $u' \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,1)$. Außerdem gilt mit stückweiser partieller Integration für alle $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u \cdot \varphi'\ \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_i \cdot \varphi'\ \mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n-1} [u_i \cdot \varphi]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_i' \cdot \varphi\ \mathrm{d}x \\
&= [u \cdot \varphi]_0^1 - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_i' \cdot \varphi\ \mathrm{d}x \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_i' \cdot \varphi\ \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 u' \cdot \varphi\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

wobei $[u\varphi]_0^1 = 0$, da $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ wegen $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$. Somit ist $u' \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,1)$ und es gilt $\int_0^1 u\varphi'\ \mathrm{d}x = -\int_0^1 u'\varphi\ \mathrm{d}x$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$, d.h. u' ist schwache Ableitung von u auf $(0,1)$. Die stückweise Stetigkeit folgt dabei aus der stetigen Differenzierbarkeit von u_i für alle $i \in \{0,\dots,n-1\}$.

(zu b) —

Aufgabe 29. Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $u, v \in W^{k,p}(U)$. Zeigen Sie:

(a) $D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u$, für alle α, β mit $|\alpha| + |\beta| \leq k$.

(b) $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ mit $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $|\alpha| \leq k$.

(c) $u|_V \in W^{k,p}(V)$ für jede offene Menge $V \subset U$.

(zu a) Sei $v \coloneqq D^\alpha u$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(-1)^{|\alpha|} \int_U v D^\beta \varphi \ \mathrm{d}x &= (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u \cdot D^\beta \varphi \ \mathrm{d}x \\
&= \int_U u \cdot D^\alpha (D^\beta \varphi) \ \mathrm{d}x && \text{(partielle Integration)} \\
&= \int_U u \cdot D^{\alpha+\beta} \varphi \ \mathrm{d}x && \text{(klassische Ableitung vertauschbar)} \\
&= (-1)^{|\alpha+\beta|} \int_U D^{\alpha+\beta} u \cdot \varphi \ \mathrm{d}x && \text{(partielle Integration)} \\
&= (-1)|\alpha| + |\beta| \int_U D^{\alpha+\beta} u \cdot \varphi \ \mathrm{d}x && (\alpha, \beta \geq 0)
\end{aligned}$$

Und somit ist $D^\beta v = D^{\alpha+\beta} u$, also gerade die Behauptung.

(zu b) Der Sobolev-Raum $W^{k,p}(U)$ ist ein Banachraum, d.h. insbesondere ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$. Somit ist er abgeschlossen unter Linearkombination und aus $u, v \in W^{k,p}(U)$ folgt auch, dass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ schon $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$. Weiterhin ist wegen $u, v \in W^{k,p}(U)$ für $|\alpha| \leq k$ auch

$$\begin{aligned}
\int_U (\lambda u + \mu v) \cdot D^\alpha \varphi \ \mathrm{d}x &= \int_U \lambda u \cdot D^\alpha \varphi + \mu v \cdot D^\alpha \varphi \ \mathrm{d}x \\
&= \lambda \cdot \int_U u \cdot D^\alpha \varphi \ \mathrm{d}x + \mu \int_U v \cdot D^\alpha \varphi \ \mathrm{d}x \\
&= \lambda \cdot (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_U D^\alpha u \cdot \varphi \ \mathrm{d}x + \mu \cdot (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha v \cdot \varphi \ \mathrm{d}x \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_U \underbrace{(\lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v)}_{= D^\alpha(\lambda u + \mu v)} \cdot \varphi \ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

und daher $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$ für alle $u, v \in W^{k,p}(U)$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sowie $|\alpha| \leq k$.

(zu c) —

Eric Kunze

Matr.-Nr. 4679202

Aufgabe 31. Bestimmen Sie die Mengen im $\mathbb{R}^2$, auf denen der Differentialoperator

$$(Lu)(x,y) \coloneqq (1+x)u_{xx}(x,y) + 2xyu_{xy}(x,y) - y^2u_{yy}(x,y)$$

elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist.

Die Koeffizientenmatrix des Differentialoperators ist gegeben durch

$$A(x,y) = -\begin{pmatrix} 1+x & 2xy \\ 0 & -y^2 \end{pmatrix}$$

Um die Eigenwerte zu bestimmen, betrachten wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A von $A(x,y)$ gegeben durch

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \operatorname{id} - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda+1+x & 2xy \\ 0 & \lambda - y^2 \end{pmatrix} = (\lambda+1+x)\cdot(\lambda-y^2)$$

Die Nullstellen von χ_A und damit Eigenwerte von $A(x,y)$ sind also $\lambda_1 = -1-x$ und $\lambda_2 = y^2$.

- L ist per Definition genau dann **elliptisch**, wenn alle Eigenwerte von $A(x,y)$ positiv sind. Es ist $\lambda_1 > 0$ genau dann, wenn $x < -1$ und $\lambda_2 = y^2 > 0$ genau dann, wenn $y \neq 0$. Somit ist L elliptisch auf $(-\infty,-1) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.
- L ist genau dann **hyperbolisch**, wenn genau ein Eigenwert negativ ist und alle anderen positiv. Nun ist $\lambda_2 = y^2 \geq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$, d.h. es kann nur λ_1 negativ sein. Das ist genau dann der Fall, wenn $x > -1$. In diesem Fall ist $\lambda_2 = y^2 > 0$ genau dann, wenn $y \neq 0$. Schlussendlich ist also L hyperbolisch auf $(-1,\infty) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.
- L ist genau dann **parabolisch**, wenn mindestens ein Eigenwert gleich Null ist. Es ist
  - ▷ $\lambda_1 = -1-x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$ für alle $y \in \mathbb{R}$
  - ▷ $\lambda_2 = y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

  Somit ist also L parabolisch auf $\{(-1,y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 32. Beweisen Sie den ersten Teil von Satz 15 (Poincaré-Ungleichung) der Vorlesung: Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, und $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es eine Konstante $c > 0$ mit

$$\|u\|_{L_p} \leq c\|\nabla u\|_{L_p} \quad \text{für alle } u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Führen Sie den Beweis unter Verwendung der Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Ungleichung.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Weiter sei $u \in W_0^{1,p}(U)$ mit $1 \leq p < \infty$. Dann existiert nach Theorem 8 (Approximation durch glatte Funktionen) eine Folge $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(U) \cap W^{1,p}(U)$ mit $u_m \overset{W^{1,p}(U)}{\longrightarrow} u$. Nun setzen wir die u_m zu Funktionen $\widetilde{u}_m$ auf $\mathbb{R}^n$ fort, wobei auch $\widetilde{u}_m \overset{W^{1,p}(U)}{\longrightarrow} u$. Nach Satz 11 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Ungleichung) existiert dann eine (universelle) Konstante $c > 0$ mit

$$\|\widetilde{u}_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \cdot \|D\widetilde{u}_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

und somit

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \cdot \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Da u kompakten Träger hat, ist auch

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq c \cdot \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{mit} \qquad p^* = \tfrac{np}{n-p} \tag{$\star$}$$

Da U als beschränkte Menge ein endliches Maß besitzt, ist $L^q(U) \hookrightarrow L^{p^*}(U)$ für alle $q \leq p^*$. Demnach ist für alle $q \leq p^*$

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq c \cdot \|u\|_{L^{p^*}(U)} \overset{(\star)}{\leq} c \cdot \|Du\|_{L^p(U)}$$

Somit gilt also $\|u\|_{L^q(U)} \leq c \cdot \|Du\|_{L^p(U)}$ für alle $q \leq p^*$, also insbesondere auch für $q = p$, da $p \leq p^*$.