



**TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN**

Fakultät Mathematik Institut für Analysis, Professur für Dynamik und Steuerung

FUNKTIONENTHEORIE

Übungen

Prof. Dr. Stefan Siegmund

Sommersemester 2020

Autor : Eric Kunze
E-Mail : eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

Hausaufgaben

Funktionentheorie – Übungsblatt 1

Eric Kunze

Matr.-Nr. 4679202

Thema: Komplexe Zahlen & Differenzierbarkeit

Aufgabe 1.1. Wo liegen in der Gaußschen Zahlenebene diejenigen Punkte z , für die gilt

- (a) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 2\pi$
- (b) $|z - z_1| = |z - z_2|$ ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gegeben)
- (c) $|z| + \operatorname{Re}(z) < 1$
- (d) $z^5 = 1$
- (e) $z = 3 - i + 5e^{it}$ ($0 \leq t \leq \pi$)
- (f) $z = te^{it}$ ($t \geq 0$)

(zu a) Mit $z = a + bi$ ist $i \cdot z = -b + ai$, d.h. $\operatorname{Re}(i \cdot z) = -\operatorname{Im}(z)$.

(zu b) Der Term $|z - z_1|$ beschreibt den Abstand zwischen z und z_1 , d.h. $|z - z_1| = |z - z_2|$ beschreibt alle Punkte, die von z_1 und z_2 den gleichen Abstand haben. Dies sind alle Punkte, die auf der Geraden mit Normale $n = \overline{z_1 z_2}$ liegen, d.h. z erfülle die Bedingung $\left\langle n, \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 - z \right\rangle = 0$, wobei z, z_1, z_2 als Punkte im \mathbb{R}^2 mit dem Standardskalarprodukt zu verstehen sind.

(zu c) Sei $z = a + bi$, dann lässt sich die Gleichung schreiben als

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + b^2} + a < 1 &\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} < 1 - a \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 < 1 - 2a + a^2 \\ &\Leftrightarrow b^2 < 1 - 2a \\ &\Leftrightarrow |b| < \sqrt{1 - 2a} \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{1 - 2a} < b < \sqrt{1 - 2a}\end{aligned}$$

Somit liegen alle gültigen z in dem von einer nach links geöffneten Parabel mit Scheitelpunkt in $(1/2, 0)$ eingeschlossenen Bereich.

(zu d) Die Einheitswurzeln liegen stets auf dem Einheitskreis. Insbesondere bilden die fünften Einheitswurzeln ein Fünfeck, wobei ein Eckpunkt auf der Realachse liegt (da stets $1^5 = 1$). Außerdem lassen sich alle Lösungen dieser Gleichung explizit angeben mit

$$z_k = \exp\left(\frac{2\pi i \cdot k}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi \cdot k}{5}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot k}{5}\right) \quad (k = 0, 1, \dots, 4)$$

(zu e) Wir schreiben $z = 3 - i + 5e^{it} = 3 + 5\cos(t) + i \cdot (5\sin(t) - 1)$. Damit erhalten wir eine Parameterdarstellung eines Kreises mit Radius 5 und Zentrum $(3, -1)$. Da $t \in [0, \pi]$ liegen alle z nur auf dem oberen Halbkreis.

(zu f) Der Ausdruck $r \cdot e^{it}$ beschreibt einen Kreis mit Radius r um den Ursprung. Da t den Winkel zur Realachse beschreibt, wird der Radius von $t \cdot e^{it}$ mit wachsendem Winkel größer, d.h. es ergibt sich eine (unendliche) Spirale.

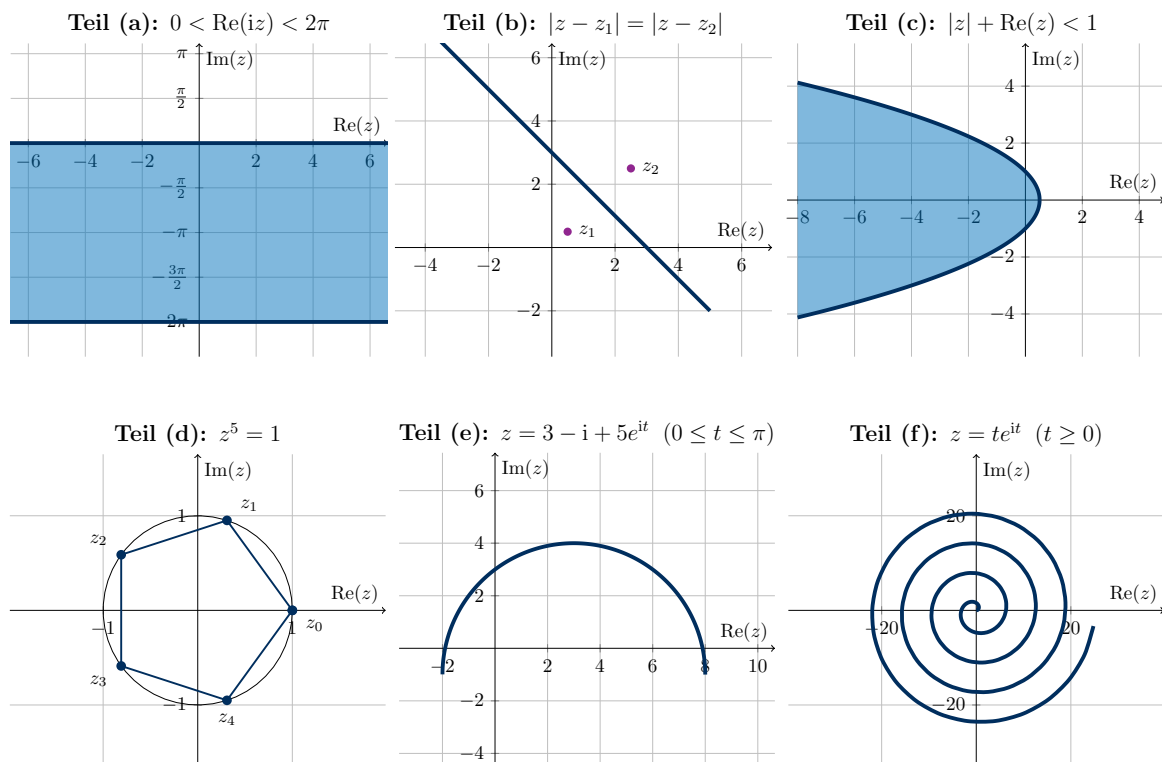


Abbildung 1.1: Darstellungen zu Aufgabe 1.1

Aufgabe 1.2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \mathbb{C}$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

- (a) Zeigen Sie: f ist genau dann in z_0 differenzierbar, wenn es $a \in \mathbb{C}$ und $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = 0$ gibt, sodass

$$f(z) = f(z_0) + a(z - z_0) + |z - z_0| \varphi(z) \quad (z \in \Omega)$$

gilt. Es ist dann $f'(z_0) = a$.

- (b) Sei $\Omega' \subseteq \mathbb{C}$ offen, $g: \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$, $f(\Omega) \subseteq \Omega'$ und seien f in z_0 und g in $f(z_0)$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass $g \circ f$ in z_0 differenzierbar ist und dass

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

gilt (Kettenregel).

(zu a) (\Rightarrow) f sei komplex differenzierbar in z_0 , d.h. $f'(z_0)$ existiert. Definieren wir $a := f'(z_0)$ und

$$\varphi(z) := \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \cdot \tilde{\varphi}(z) \quad \text{mit} \quad \tilde{\varphi}(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & f(z_0) + a(z - z_0) + |z - z_0| \varphi(z) \\ = & f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + |z - z_0| \cdot \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \cdot \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right) \\ = & f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) \\ = & f(z) \end{aligned}$$

Außerdem gilt aufgrund der Differenzierbarkeit von f auch $\tilde{\varphi}(z) \rightarrow 0$ für $z \rightarrow z_0$ sowie

$$\left| \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \right| = \frac{|z - z_0|}{|z - z_0|} = 1$$

und somit ist der Ausdruck $\frac{z - z_0}{|z - z_0|}$ beschränkt. Schließlich dominiert somit $\tilde{\varphi}$ die Konvergenz von φ und es gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = 0$$

(\Leftarrow) Es existieren $a \in \mathbb{C}$ und $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\varphi(z) \rightarrow 0$ und $f(z) = f(z_0) + a \cdot f'(z_0)(z - z_0) + |z - z_0| \cdot \varphi(z)$. Daraus lässt sich umstellen

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= a + \varphi(z) \cdot |z - z_0| \cdot \frac{\overline{z - z_0}}{\overline{z - z_0}} \\ &= a + \varphi(z) \cdot (z - z_0) \cdot \frac{\overline{z - z_0}}{|z - z_0|} \quad \left(\frac{|z|}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|} \right) \\ \Rightarrow \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= a + \varphi(z) \cdot \frac{\overline{z - z_0}}{|z - z_0|} \end{aligned}$$

Somit ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a + \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{\varphi(z) \cdot \frac{\overline{z - z_0}}{|z - z_0|}}_{=: \tilde{\varphi}(z)}$$

Wie oben ist

$$\left| \frac{\overline{z - z_0}}{|z - z_0|} \right| = \frac{|z - z_0|}{|z - z_0|} = 1$$

und somit dominiert φ den Ausdruck $\tilde{\varphi}$ zu Null, d.h.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a + \lim_{z \rightarrow z_0} \tilde{\varphi}(z) = a \Rightarrow a = f'(z_0)$$

(zu b) Es seien $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ in z_0 und $g: \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$ in $f(z_0)$ komplex differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{f(z) - f(z_0)} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{f(z) - f(z_0)} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= g'(f(z_0)) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (g \text{ diffbar in } f(z_0)) \\ &= g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0) \quad (f \text{ diffbar in } z_0) \end{aligned}$$

Insbesondere existieren die Grenzwerte $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{f(z) - f(z_0)}$ und $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ und somit auch der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{z - z_0}$, d.h. $g \circ f$ ist komplex differenzierbar in z_0 .

Aufgabe 1.3. Seien $f, g, h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(z) &:= x^2 + y^2 \\ g(z) &:= 2xy + y + 1(x^2 - y^2 - x) \\ h(z) &:= \frac{x - iy}{1 + x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Punkte in \mathbb{C} , in denen f , g und h komplex differenzierbar sind.

Wir zerlegen die Funktionen immer in Real- und Imaginärfunktion, d.h. $f(z) = f(x, y) = f_1(x, y) + i \cdot f_2(x, y)$. Damit ist $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ und $f_2(x, y) = 0$. Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} \partial_x f_1(x, y) &= 2x & \partial_y f_1(x, y) &= 2y \\ \partial_x f_2(x, y) &= 0 & \partial_y f_2(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig, somit ist $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (reell) differenzierbar. Wir prüfen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_x f_1(x, y) &= \partial_y f_2(x, y) & \Leftrightarrow & 2x = 0 & \Leftrightarrow & x = 0 \\ \partial_y f_1(x, y) &= -\partial_x f_2(x, y) & \Leftrightarrow & 2y = 0 & \Leftrightarrow & y = 0 \end{aligned}$$

Damit sind die beiden Gleichungen nur für $z = 0$ erfüllt und f ist nur in diesem Punkt komplex differenzierbar.

Es ist $g_1(x, y) = 2xy + y$ und $g_2(x, y) = x^2 - y^2 - x$. Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} \partial_x g_1(x, y) &= 2y & \partial_y g_1(x, y) &= 2x + 1 \\ \partial_x g_2(x, y) &= 2x - 1 & \partial_y g_2(x, y) &= -2y \end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig, somit ist $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (reell) differenzierbar. Wir prüfen

die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\partial_x g_1(x, y) &= \partial_y g_2(x, y) &\Leftrightarrow 2y &= -2y &\Rightarrow y &= 0 \\ \partial_y g_1(x, y) &= -\partial_x g_2(x, y) &\Leftrightarrow 2x + 1 &= -2x + 1 &\Rightarrow x &= 0\end{aligned}$$

Damit sind die beiden Gleichungen nur für $z = 0$ erfüllt und g ist nur in diesem Punkt komplex differenzierbar.

Es ist $h_1(x, y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$ und $h_2(x, y) = -\frac{y}{1+x^2+y^2}$. Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}\partial_x h_1(x, y) &= \frac{1 - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} & \partial_y h_1(x, y) &= \frac{-2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \\ \partial_x h_2(x, y) &= \frac{-2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} & \partial_y h_2(x, y) &= -\frac{1 + x^2 - y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig für $x \neq \pm\sqrt{-y^2 - 1}$, somit ist $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dort (reell) differenzierbar. Wir prüfen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\partial_x h_1(x, y) &= \partial_y h_2(x, y) &\Leftrightarrow \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} &= -\frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2} &\Rightarrow 1 &= -1 \\ \partial_y h_1(x, y) &= -\partial_x h_2(x, y) &\Leftrightarrow \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} &= \frac{2xy}{(1+x^2+y^2)^2} &\Rightarrow -2xy &= 2xy\end{aligned}$$

Die erste Gleichung liefert aufgrund der falschen Aussage für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Unlösbarkeit des Gleichungssystems. Somit ist h nirgends komplex differenzierbar.

Aufgabe 2.1. Sei $\Omega := B(0, 1) \subseteq \mathbb{C}$ (Einheitskreis), $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $z_0 \in \Omega$, f komplex differenzierbar in z_0 , dann gilt $f'(z_0) = 0$. Ist f (in Ω) holomorph, so ist f konstant.

Sei $f \simeq (u, v)$, $f = u + iv$ und $z = x + iy \simeq (x, y)$. Wegen $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ ist $v \equiv 0$. Da f in $z_0 = x_0 + iy_0 \simeq (x_0, y_0)$ komplex differenzierbar ist, ist $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dort auch reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) = 0$ bzw. $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) = 0$. Somit ist auch $u'(z) = 0$ und somit $f'(x_0, y_0) \simeq f'(z_0) = 0$.

Sei f holomorph auf Ω . Dann gilt $f'(z) = 0$ für alle $z \in \Omega$, insbesondere ist $u', v' \equiv 0$ und dann sind u und v als reelle Funktionen konstant, also auch $f = u + iv$.

Aufgabe 2.2. (a) Weisen Sie nach, dass die Funktion

$$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad u(x, y) := e^{-x}(x \cdot \cos(y) + y \cdot \sin(y))$$

der Laplace-Differentialgleichung $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ genügt.

- (b) Bestimmen Sie eine Funktion $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $v(0, 0) = 0$ derart, dass u, v die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllen.
- (c) Schreiben Sie $f = u + iv$ mithilfe der komplexen Exponentialfunktionen als Funktion von $z = x + iy$.

(zu a) Es ist

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= -e^{-x}(x \cdot \cos(y) + y \cdot \sin(y)) + e^{-x} \cdot \cos(y) \\ &= e^{-x}((1 - x) \cos(y) - y \sin(y)) \\ u_{xx}(x, y) &= e^{-x}(x \cos(y) + y \sin(y) - 2 \cos(y)) \\ &= e^{-x}((x - 2) \cos(y) + y \sin(y)) \\ u_y(x, y) &= e^{-x}(-x \sin(y) + \sin(y) + y \cos(y)) \\ &= e^{-x}((1 - x) \sin(y) + y \cos(y)) \\ u_{yy}(x, y) &= e^{-x}(-x \cos(y) + \cos(y) + \cos(y) - y \sin(y)) \\ &= -e^{-x}((x - 2) \cos(y) + y \sin(y)) \end{aligned}$$

Damit gilt $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(zu b) Es gilt $u_x(x, y) = e^{-x}((1 - x) \cos(y) - y \sin(y))$ und nach den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen muss $u_x = v_y$ gelten. Löse diese Differentialgleichung für fixiertes x

durch Integration:

$$\begin{aligned}
 v(x, y) &= \int u_x(x, y) \, dy = \int e^{-x} ((1-x) \cos(y) - y \sin(y)) \, dy \\
 &= e^{-x} \left((1-x) \int \cos(y) \, dy - \int y \sin(y) \, dy \right) \\
 &= e^{-x} ((1-x) \sin(y) - \sin(y) + y \cos(y) + C) \\
 &= e^{-x} (-x \sin(y) + y \cos(y) + C)
 \end{aligned}$$

Prüfen wir die zweite Cauchy-Riemann-Differentialgleichung und bestimmten v_x :

$$\begin{aligned}
 v_x &= -e^{-x} (-x \sin(y) + y \cos(y) + C) + e^{-x} (-\sin(y)) \\
 &= -e^{-x} ((1-x) \sin(y) + y \cos(y) + C) \\
 &\stackrel{!}{=} u_y(x, y) \\
 &= -e^{-x} ((1-x) \sin(y) + y \cos(y))
 \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Konstante $C = 0$ und als Lösung $v(x, y) = e^{-x} (y \cos(y) - x \sin(y))$.

Auch der Anfangswert $v(0, 0) = 1 \cdot (0 - 0) = 0$ wird erfüllt. Die Probe ergibt

$$\begin{aligned}
 v_x(x, y) &= -e^{-x} (-x \sin(y) + y \cos(y)) - e^{-x} \sin(y) \\
 &= -e^{-x} ((1-x) \sin(y) + y \cos(y)) = -u_y(x, y) \\
 v_y(x, y) &= e^{-x} ((-x \cos(y) + \cos(y) - y \sin(y))) \\
 &= e^{-x} ((1-x) \cos(y) - y \sin(y)) = u_x(x, y)
 \end{aligned}$$

also $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$.


(zu c) Sei $z = x + iy$.

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= u(x, y) + i \cdot v(x, y) \\
 &= e^{-x} (x \cdot \cos(y) + y \cdot \sin(y) - i \cdot x \sin(y) + i \cdot y \cos(y)) \\
 &= e^{-x} ((x + iy) \cos(y) - i \cdot (x + iy) \sin(y)) \\
 &= e^{-x} \cdot z \cdot (\cos(-y) + i \sin(-y)) \\
 &= z \cdot e^{-x} \cdot e^{-iy} \\
 &= z \cdot e^{-z} = f(z)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, f' stetig, $z_0 \in \Omega$, $f'(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie: Es gibt offene Umgebungen $U \subseteq \Omega$ von z_0 und $V \subseteq \mathbb{C}$ von $f(z_0)$, sodass $f: U \rightarrow V$ bijektiv und die daher existierende Abbildung $f^{-1}: V \rightarrow U$ ebenfalls holomorph ist. Es gilt $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$ für alle $w \in V$.

Hinweis: Betrachten Sie $f = (f_1, f_2)$ als Abbildung von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 . Deren Jacobi Determinante ist in $z_0 = (x_0, y_0)$ ungleich Null. Anwendung des Satzes über die lokale Invertierbarkeit.

Wir erinnern uns gemäß Hinweis an zwei Sätze aus der Analysis 2:

Lemma 2.1 (Satz über inverse Funktionen). Sei $f: U \subseteq \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ stetig differenzierbar (U offen), $x_0 \in U$, $f'(x_0)$ regulär. Dann existiert eine offene Umgebung $U_0 \subseteq U$ von x_0 , sodass mit $V_0 := f(U_0)$ die eingeschränkte Abbildung $f: U_0 \rightarrow V_0$ Diffeomorphismus¹ ist (insbesondere ist V_0 offene Umgebung von $y_0 := f(x_0)$). 

Lemma 2.2 (Ableitung der inversen Funktion). Sei $f: U \subseteq \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ injektiv und differenzierbar (D offen, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$), f^{-1} differenzierbar in $y \in \text{int}(f(D))$. Dann ist

$$(f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y))^{-1} \quad \text{img alt="leaf icon" data-bbox="860 250 885 265"/>$$

Sei $f = (f_1, f_2): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $z = x + iy \simeq (x, y)$ sowie $z_0 = x_0 + iy_0 \simeq (x_0, y_0)$. Da f holomorph ist in allen $z_0 \in \Omega$, ist f auch reell differenzierbar in (x_0, y_0) mit

$$f'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1(x_0, y_0) & \partial_y f_1(x_0, y_0) \\ \partial_x f_2(x_0, y_0) & \partial_y f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} =: J$$

Außerdem gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen $\partial_x f_1(x_0, y_0) = \partial_y f_2(x_0, y_0)$ und $\partial_y f_1(x_0, y_0) = -\partial_x f_2(x_0, y_0)$. Damit besitzt J die Form $J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit Determinante

$$\det(J) = \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$$

Angenommen es gilt $\det(J) = a^2 + b^2 = 0$. Dann ist $a = 0$ und $b = 0$, d.h. $f'(x_0, y_0) = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist also $f'(z_0) \simeq f'(x_0, y_0) \neq 0$ für alle $z_0 \simeq (x_0, y_0) \in \Omega$.

Außerdem ist f' stetig. Nach dem Satz über inverse Funktionen (Lemma 2.1) existiert dann eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von (x_0, y_0) , sodass mit $V = f(U)$ (und insbesondere $f(x_0, y_0) \in V$) $f: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist. Nach dem Satz über die Ableitung der inversen Funktion (Lemma 2.2) gilt dann

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x, y) &= f'(f^{-1}(x, y))^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x f_1(f^{-1}(x, y)) & \partial_y f_1(f^{-1}(x, y)) \\ \partial_x f_2(f^{-1}(x, y)) & \partial_y f_2(f^{-1}(x, y)) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\det(J(f^{-1}(x, y)))} \begin{pmatrix} \partial_y f_2(f^{-1}(x, y)) & \partial_x f_2(f^{-1}(x, y)) \\ \partial_y f_1(f^{-1}(x, y)) & \partial_x f_1(f^{-1}(x, y)) \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in V \end{aligned}$$

Aufgrund der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für f ist $\det(J(f^{-1}(x, y))) = \partial_x f_1(f^{-1}(x, y)) \cdot \partial_y f_2(f^{-1}(x, y)) - \partial_x f_2(f^{-1}(x, y)) \cdot \partial_y f_1(f^{-1}(x, y)) \neq 0$ und

$$\begin{aligned} \partial_y f_2(f^{-1}(x, y)) &= \partial_x f_1(f^{-1}(x, y)) \\ \partial_y f_1(f^{-1}(x, y)) &= -\partial_x f_2(f^{-1}(x, y)) \end{aligned}$$

¹ f, f^{-1} stetig differenzierbar

auch die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für f^{-1} . Damit ist f^{-1} komplex differenzierbar auf dem entsprechenden $V \subseteq \mathbb{C}$ mit der Ableitung

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(w) &= \lim_{z \rightarrow w} \frac{f^{-1}(z) - \lim_{z \rightarrow w} f^{-1}(w)}{z - w} = \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(w)}{f(f^{-1}(z)) - f(f^{-1}(w))} \\ &= \left(\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(f^{-1}(z)) - f(f^{-1}(w))}{f^{-1}(z) - f^{-1}(w)} \right)^{-1} \\ &= \left(f'(f^{-1}(w)) \right)^{-1} \quad \forall w \in V\end{aligned}$$

Aufgabe 3.1. Das Doppelverhältnis $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ von verschiedenen Punkten $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ ist folgendermaßen erklärt:

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} \quad z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$$

Ist $z_j = \infty$, so definieren wir das Doppelverhältnis als Grenzwert, z.B.

$$[\infty, z_2, z_3, z_4] := \lim_{z \rightarrow \infty} [z, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

- (a) Sei $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ eine Möbius-Transformation. Beweisen Sie: Sind $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ und $z_j \neq z_k$ für $j \neq k$, so gilt

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)]$$

- (b) Benutzen Sie (a) um zu zeigen: Sind drei verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ und drei verschiedene Punkte $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ gegeben, so existiert genau eine Möbius-Transformation $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ mit der Eigenschaft $f(z_j) = w_j$ für $j = 1, 2, 3$. Für $z \notin \{z_1, z_2, z_3\}$ ist $f(z)$ gegeben durch

$$[w_1, w_2, w_3, f(z)] = [z_1, z_2, z_3, z]$$

- (zu a) Sei $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ eine Möbius-Transformation, d.h. es existieren $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$, sodass $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Wir definieren abkürzend $\alpha(z) := cz + d$ und $\delta := ad - bc$. Außerdem gilt

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [z_2, z_1, z_4, z_3] = [z_3, z_4, z_1, z_2] \quad (\star)$$

- (i) Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \frac{ax+b}{cx+d} - \frac{ay+b}{cy+d} = \frac{(ax+b)(cy+d) - (ay+b)(cx+d)}{(cx+d)(cy+d)} \\ &= \frac{acxy + adx + bcy + bd - acxy - ady - bcx - bd}{\alpha(x)\alpha(y)} \\ &= \frac{(x-y) \cdot \delta}{\alpha(x) \cdot \alpha(y)} \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned}
[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] &= \frac{(f(z_1) - f(z_3)) \cdot (f(z_2) - f(z_4))}{(f(z_1) - f(z_4)) \cdot (f(z_2) - f(z_3))} \\
&= \frac{(z_1 - z_3) \cdot \delta \cdot (z_2 - z_4) \cdot \delta}{\alpha(z_1) \cdot \alpha(z_3) \cdot \alpha(z_2) \cdot \alpha(z_4)} \cdot \frac{\alpha(z_1) \cdot \alpha(z_4) \cdot \alpha(z_2) \cdot \alpha(z_3)}{(z_1 - z_4) \cdot \delta \cdot (z_2 - z_3) \cdot \delta} \\
&= \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} \\
&= [z_1, z_2, z_3, z_4]
\end{aligned}$$

- (ii) Genau ein $z_k = \infty$ und $c \neq 0$. Wegen (\star) können wir oBdA annehmen, dass $z_1 = \infty$. Dann ist $f(z_1) = \frac{a}{c}$ und es gilt

$$f(z_1) - f(z) = \frac{a}{c} - \frac{az + b}{cz + d} = \frac{acz + ad - acz - bc}{c(cz + d)} = \frac{\delta}{c \cdot \alpha(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] &= \frac{\delta(z_2 - z_4) \cdot c \cdot \alpha(z_4) \cdot c \cdot \alpha(z_2) \cdot \alpha(z_3)}{c \cdot \alpha(z_3) \cdot \alpha(z_2) \cdot \alpha(z_4) \cdot \delta \cdot (z_2 - z_3)} \\
&= \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \\
&= [z_1, z_2, z_3, z_4]
\end{aligned}$$

Für $c = 0$ ist $f(z_1) = \infty$ und somit $f(z_1) - f(z) = \infty$ für alle $z \in \mathbb{C}$, sowie $\alpha \equiv d$. Es gilt

$$[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = \frac{f(z_2) - f(z_4)}{f(z_2) - f(z_3)} = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \cdot \frac{\delta \cdot d^2}{\delta \cdot d^2} = [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

- (iii) Es seien $z_1 = z_2 = \infty$. Dann ist $f(z_1) = f(z_2) = \frac{a}{c}$ für $c \neq 0$. Somit vereinfacht sich Fall (ii) weiter zu

$$\begin{aligned}
[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] &= \frac{\delta \cdot \delta}{c \cdot \alpha(z_3) \cdot c \cdot \alpha(z_4)} \cdot \frac{c \cdot \alpha(z_4) \cdot c \cdot \alpha(z_3)}{\delta \cdot \delta} \\
&= 1 \\
&= [z_1, z_2, z_3, z_4]
\end{aligned}$$

Für $c = 0$ ist $f(z_1) = f(z_2) = \infty$ und somit $[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = 1 = [z_1, z_2, z_3, z_4]$.

Sei $z_1 = z_3 = \infty$, dann folgt die Aussage in beiden Fällen mit ähnlicher Rechnung wie oben.

- (iv) Analog zu den bisher gezeigten Fällen, rechnet man auch alle weiteren Fälle nach.

Damit erhält man schließlich für alle $z_k \in \mathbb{C}_\infty$ ($k = 1, 2, 3, 4$) die Aussage $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)]$.

(zu b) Wir konstruieren eine Möbius-Transformation f mit $f(z_j) = w_j$ ($j = 1, 2, 3$). Dazu betrachten wir das Doppelverhältnis $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ als Funktion τ in z , d.h.

$$\tau(z) := [z_1, z_2, z_3, z] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z)}{(z_1 - z)(z_2 - z_3)} = \frac{-(z_1 - z_3) \cdot z + (z_1 - z_3)z_2}{-(z_2 - z_3) + (z_2 - z_3)z_1}$$

Mit der zugeordneten Matrix $T := \begin{pmatrix} -(z_1 - z_3) & (z_1 - z_3)z_2 \\ -(z_2 - z_3) & (z_2 - z_3)z_1 \end{pmatrix}$ und $\det(T) = (z_1 - z_3)(z_2 - z_3)(z_2 - z_1) \neq 0$, da $z_1 \neq z_2$ vorausgesetzt war, ist τ wieder eine Möbius-Transformation. Dabei gilt $\tau(z_1) = \infty$, $\tau(z_2) = 0$ und $\tau(z_3) = 1$. Sei σ nun das Doppelverhältnis der w_k und z als Funktion in z aufgefasst:

$$\sigma(z) := [w_1, w_2, w_3, z] = \frac{-(w_1 - w_3) \cdot z + (w_1 - w_3)w_2}{-(w_2 - w_3) + (w_2 - w_3)w_1}$$


Mit der gleichen Überlegung wie für τ ist auch σ wieder eine Möbius-Transformation mit der zugeordneten Matrix $S := \begin{pmatrix} -(w_1 - w_3) & (w_1 - w_3)w_2 \\ -(w_2 - w_3) & (w_2 - w_3)w_1 \end{pmatrix}$. Mit

$$S^{-1} = \frac{1}{w_1 + w_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{w_1 - w_3} & -\frac{w_2}{w_2 - w_3} \\ \frac{1}{w_1 - w_3} & -\frac{1}{w_2 - w_3} \end{pmatrix}$$

ist σ^{-1} wieder eine Möbius-Transformation und die Verkettung $\sigma^{-1} \circ \tau$ ist gegeben durch die Matrix

$$S^{-1} \cdot T = \frac{1}{w_1 + w_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{w_1 - w_3} & -\frac{w_2}{w_2 - w_3} \\ \frac{1}{w_1 - w_3} & -\frac{1}{w_2 - w_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(z_1 - z_3) & (z_1 - z_3)z_2 \\ -(z_2 - z_3) & (z_2 - z_3)z_1 \end{pmatrix} = \dots$$

Die zugehörige Möbius-Transformation $f := \sigma^{-1} \circ \tau$ erfüllt dann (wie man mit tausend mal mehr nachrechnen einsehen kann) gerade die Bedingungen $f(z_k) = w_k$ ($k = 1, 2, 3$) und $[z_1, z_2, z_3, z] = [w_1, w_2, w_3, z]$.

Lemma 3.1. Sei f eine Möbius-Transformation gegeben durch $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{C}_\infty$) mit $f \neq \text{id}$. Dann hat f höchstens zwei Fixpunkte. 

Beweis. Die Fälle $c = 0$ und $a = 0$ sind klar. Betrachte die Fixpunktgleichung $z = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Umstellen ergibt die Polynomgleichung zweiten Grades

$$z(cz + c) = cz^2 + cz = az + b \Leftrightarrow 0 = c \cdot z^2 + (c - a)z - b$$

die nach dem Fundamentalsatz der Algebra höchstens zwei verschiedene Lösungen besitzt. Damit kann die Möbius-Transformation f maximal zwei Fixpunkte besitzen. \square

Sei nun \tilde{f} eine weitere Möbius-Transformation, die die Interpolationsbedingungen erfüllt. Dann ist $f^{-1}(\tilde{f}(z_k)) = f^{-1}(w_k) = z_k$ für alle $k = 1, 2, 3$. Somit hat $f^{-1} \circ \tilde{f}$ also drei Fixpunkte. Jedoch kann eine Möbius-Transformation nur zwei Fixpunkte besitzen, wenn sie nicht die Identität ist. Somit muss $f^{-1} \circ \tilde{f} = \text{id}$ gelten, was äquivalent zu $\tilde{f} = f$ ist. Somit ist das die Interpolationsbedingungen erfüllende f eindeutig bestimmt.

Aufgabe 3.2. Für $z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ sei der Hauptwert $\text{Arg}(z)$ des Argumentes von z festgelegt durch $-\pi < \text{Arg}(z) < \pi$ (Das Argument φ von z ist modulo 2π definiert durch $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$). Wir definieren $\text{Ln}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\text{Ln}(z) := \ln |z| + i \cdot \text{Arg}(z) \quad (\text{Hauptzweig des Logarithmus})$$

Beweisen Sie:

- (a) Ln ist die Umkehrfunktion von $\exp: \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im}(z) < \pi\} \rightarrow \Omega$.
- (b) Ln ist holomorph. (Hinweis: Aufgabe 2.3)

(zu a) Sei $z \in \Omega$. Dann existiert $\varphi \in (-\pi, \pi)$, sodass $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$, d.h. $\varphi = \text{Arg}(z)$. Es ist $\text{Im}(\text{Ln}(z)) = \text{Arg}(z) = \varphi \in (-\pi, \pi)$. Somit können wir \exp anwenden und erhalten

$$\exp(\text{Ln}(z)) = \exp(\ln |z|) \cdot \exp(i \cdot \varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi} = z$$

Umgekehrt sei $z \in \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$. Dann gilt mit $z = a + bi$ und $b \in (-\pi, \pi)$ auch $\exp(a + bi) = \exp(a) \cdot \exp(bi) \in \Omega$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \text{Arg}(\exp(a + bi)) &= \text{Arg}(\exp(a) \cdot \exp(bi)) = b \\ \ln |\exp(a + bi)| &= \ln(\exp(a)) \cdot \ln |\exp(bi)| = a \end{aligned}$$

und schließlich

$$\text{Ln}(\exp(z)) = \ln |\exp(a + bi)| + i \cdot \text{Arg}(\exp(a + bi)) = a + bi = z$$

Somit ist $\exp \circ \text{Ln} = \text{id} = \text{Ln} \circ \exp$ und Ln die Umkehrung von \exp als Abbildungen zwischen Ω und $\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$.

(zu b) Wir wissen, dass \exp auf \mathbb{C} stetig und holomorph ist mit $\exp'(z_0) = \exp(z_0) \neq 0$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$. Nach Aufgabe 2.3 existieren dann offene Umgebungen U von z_0 und V von $\exp(z_0)$, sodass $\exp: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist. Wir wissen außerdem, dass \exp auf $\Omega' := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$ injektiv ist, d.h. wir können jede beliebige offene Umgebung $U \subseteq \Omega'$ mit $z_0 \in U$ wählen und erhalten mit $V = \exp(U) \subseteq \Omega$ eine offene Umgebung von $\exp(z_0)$. Somit ist die Umkehrabbildung $\text{Ln}: V \rightarrow U$ auf allen offenen $V \subseteq \Omega$ holomorph, d.h. auch auf Ω selbst.

Aufgabe 3.3. (a) Finden Sie $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, sodass $\text{Ln}(z_1 \cdot z_2) \neq \text{Ln}(z_1) + \text{Ln}(z_2)$.

(b) Sei $z_1 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ mit $\text{Re}(z_1) = 0$ und $\text{Im}(z_1) > 0$. Finden Sie alle $z_2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, für die $\text{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \text{Ln}(z_1) + \text{Ln}(z_2)$ gilt.

(zu a) Sei $z_1 = 1$ und $z_2 = 1 - 1$. Dann sind offensichtlich $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Es gilt

$$\begin{aligned}\text{Ln}(1) &= \ln|1| + 1 \cdot \text{Arg}(1) = 0 + 1 \cdot \frac{\pi}{2} \\ \text{Ln}(1 - 1) &= \ln|1 - 1| + 1 \cdot \text{Arg}(1 - 1) = \ln(\sqrt{2}) + 1 \cdot \frac{3}{4}\pi\end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned}\text{Ln}(1 \cdot (1 - 1)) &= \text{Ln}(-1 - 1) = \ln|i + 1| + 1 \cdot \text{Arg}(-1 - 1) = \ln(\sqrt{2}) - 1 \cdot \frac{3}{4}\pi \\ \text{Ln}(i) + \text{Ln}(i - 1) &= \ln(\sqrt{2}) + 1 \cdot \frac{3}{4}\pi + 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \ln(\sqrt{2}) + 1 \cdot \frac{5}{4}\pi\end{aligned}$$

Wegen $\text{Ln}(1) + \text{Ln}(1 - 1) - \text{Ln}(1 \cdot (1 - 1)) = 1 \cdot \frac{1}{2}\pi \neq 0$ ist $\text{Ln}(z_1 \cdot z_2) \neq \text{Ln}(z_1) + \text{Ln}(z_2)$.

(zu b) Sei $z_k = r_k \cdot e^{i\varphi_k}$ für $k = 1, 2$ und wegen $\text{Re}(z_1) = 0$ sowie $\text{Im}(z_1) > 0$ gilt $r_1 > 0$ und $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$. Notiere daher im Folgenden $\varphi := \varphi_2$. Es gilt

$$\text{Ln}(z_1 z_2) = \ln|r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}| + 1 \cdot \text{Arg}\left(r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}\right) = \ln|r_1 r_2| + 1 \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \mod 2\pi\right)$$

und

$$\begin{aligned}\text{Ln}(z_1) + \text{Ln}(z_2) &= \ln|r_1 e^{i\frac{\pi}{2}}| + 1 \cdot \text{Arg}\left(r_1 e^{i\frac{\pi}{2}}\right) + \ln|r_2 e^{i\varphi}| + 1 \cdot \text{Arg}\left(r_2 e^{i\varphi}\right) \\ &= \ln|r_1 r_2| + 1 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\end{aligned}$$

Setzen wir nun beide Ausdrücke gleich, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\ln|r_1 r_2| + 1 \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \mod 2\pi\right) &= \ln|r_1 r_2| + 1 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \\ \Leftrightarrow \varphi + \frac{\pi}{2} \mod 2\pi &= \frac{\pi}{2} + \varphi\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird für alle $\varphi + \frac{\pi}{2} \in (-\pi, \pi)$ erfüllt. Da aber auch $\varphi \in (-\pi, \pi)$ als Hauptwert gilt, schränkt sich diese beiden Bedingungen gegenseitig ein zu $\varphi \in (-\pi, \frac{\pi}{2})$. Somit gilt die Gleichheit der zu zeigenden Aussage für alle $z_2 = |z_2| \cdot e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in (-\pi, \frac{\pi}{2})$.