

$[1]\overline{1}$



**TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DRESDEN**

---

**Fakultät Mathematik** Institut für Geometrie, Professur für Nichtlineare Analysis

---

# **PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN**

*Übungen*

**Prof. Dr. Friedemann Schuricht**

Sommersemester 2020

Autor : Eric Kunze  
E-Mail : [eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de](mailto:eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de)

**Aufgabe 1.** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $u \in C^2(U, \mathbb{R}^n)$ ,  $A \in C^1(U, \mathbb{R}^{m \times n})$ ,  $\varphi \in C^1(U)$  und  $c \in \mathbb{R}^m$ . Zeigen Sie:

- (a)  $\operatorname{div}((Du)^\top) = (D(\operatorname{div} u))^\top$ ,
- (b)  $\operatorname{div}(cA) = c \operatorname{div} A$ ,
- (c)  $\operatorname{div}(\varphi A) = A \cdot D\varphi + \varphi \operatorname{div} A$ .

*Hinweis:* Wir betrachten Vektoren im  $\mathbb{R}^n$  als Zeilenvektoren,  $\cdot$  ist das Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$ ,  $Du = (\partial_j u_i)_{i,j=1,\dots,n}$ ,  $\operatorname{div}$  und  $\cdot$  wirken auf eine Matrix *zeilenweise*.

Es seien nun  $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$  hinreichend glatt. Beweisen Sie die **Formel von Leibniz**:

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v$$

wobei für Multiindizes  $\alpha, \beta$  gilt:

$$D^\alpha u = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u, \quad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$$

und  $\beta \leq \alpha$  genau dann, wenn  $\beta_i \leq \alpha_i$  für  $i = 1, \dots, n$ .

(zu a) Sei  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in C^2$ . Wir notieren Vektoren verkürzt  $(u_i)_i = (u_i)_{i=1,\dots,n} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ . Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div}((Du)^\top) &= \operatorname{div} \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 & \cdots & \partial_n u_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 u_n & \partial_2 u_n & \cdots & \partial_n u_n \end{pmatrix}^\top = \operatorname{div} (\partial_j u_i)_{i,j}^\top = \operatorname{div} (\partial_i u_j)_{i,j} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_{11} u_1 & \partial_{12} u_2 & \cdots & \partial_{1n} u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1} u_1 & \partial_{n2} u_2 & \cdots & \partial_{nn} u_n \end{pmatrix} = \left( \sum_{j=1}^n \partial_{ij} u_j \right)_i \end{aligned}$$

und außerdem

$$(D(\operatorname{div} u))^\top = \left( D \left( \sum_{i=1}^n \partial_i u_i \right) \right)^\top = \begin{pmatrix} \partial_{11} u_1 + \partial_{21} u_2 + \cdots + \partial_{n1} u_n \\ \vdots \\ \partial_{1n} u_1 + \partial_{2n} u_2 + \cdots + \partial_{nn} u_n \end{pmatrix}^\top = \left( \sum_{j=1}^n \partial_{ji} u_j \right)_i$$

Wegen  $u \in C^2$  sind alle partiellen Ableitungen stetig und können somit vertauscht

werden. Daraus folgt die (zeilenweise) Gleichheit mit

$$\operatorname{div} \left( (Du)^\top \right) = \left( \sum_{j=1}^n \partial_{ij} u_j \right)_i = \left( \sum_{j=1}^n \partial_{ji} u_j \right)_i = (D(\operatorname{div} u))^\top$$

(zu b) Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(cA) &= \operatorname{div} \left( \sum_{j=1}^n c_j a_{ij} \right)_i = \sum_{i=1}^n \partial_i \sum_{j=1}^n c_j a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_i c_j a_{ij} \\ c \cdot \operatorname{div}(A) &= c \cdot \left( \sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij} \right)_i = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_j c_i a_{ij} \end{aligned}$$

und somit  $\operatorname{div}(cA) = c \cdot \operatorname{div}(A)$ .

(zu c) Man hat

$$\begin{aligned} A \cdot D\varphi &= A \cdot (\partial_i \varphi)_i = \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \partial_j \varphi \right)_i \\ \varphi \operatorname{div}(A) &= \varphi \cdot \left( \sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij} \right)_i = \left( \sum_{j=1}^n \varphi \partial_j a_{ij} \right)_i \\ \operatorname{div}(\varphi A) &= \operatorname{div} \left( (\varphi a_{ij})_{i,j} \right) = \left( \sum_{j=1}^n \partial_j (\varphi a_{ij}) \right)_i \end{aligned}$$

Für fixiertes  $i$  (also zeilenweise) erhält man mit der Produktregel für (partielle) Ableitungen

$$\sum_{j=1}^n \partial_j (\varphi a_{ij}) = \sum_{j=1}^n ((\partial_j \varphi) a_{ij} + \varphi (\partial_j a_{ij})) = \sum_{j=1}^n (\partial_j \varphi) a_{ij} + \sum_{j=1}^n \varphi (\partial_j a_{ij})$$

und somit  $\operatorname{div}(\varphi A) = A \cdot (D\varphi) + \varphi \cdot \operatorname{div}(A)$ .

**Leibnitz-Formel:** Vollständige Induktion über  $|\alpha| = k$ .

(IA)  $k = 0$  : Für  $|\alpha| = 0$ , also  $\alpha = 0$  ist

$$D^0(uv) = uv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} D^0 u D^0 v$$

(IV) Für  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i = k$  gilt  $D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v$ .

(IS)  $k \rightarrow k+1$  : Seien  $|\alpha| = |(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)| = k+1$  und  $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n - 1)$  sowie  $\beta' = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n + 1)$ . Dann ist  $|\alpha'| = k$  und  $|\beta'| = |\beta| + 1$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
D^\alpha(uv) &= \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}(uv) = \partial_{x_n} \left( \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n-1}(uv) \right) \\
&= \partial_{x_n} \left( D^{\alpha'}(uv) \right) \\
&\stackrel{\text{IV}}{=} \partial_{x_n} \left( \sum_{\beta \leq \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} D^\beta u D^{\alpha'-\beta} v \right) \\
&= \sum_{\beta \leq \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} \left( \partial_{x_n}(D^\beta u) D^{\alpha'-\beta} v + D^\beta u \partial_{x_n}(D^{\alpha'-\beta} v) \right) \\
&= \sum_{\beta \leq \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} \left( D^{\beta'} u D^{\alpha'-\beta} v + D^\beta u D^{\alpha-\beta} v \right) \\
&= \dots \\
&= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v
\end{aligned}$$

**Aufgabe 2.** Ermitteln Sie jeweils eine nichttriviale Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

- (a)  $v_y(x, y) = xy \cdot v(x, y)$
- (b)  $u_x(x, y) + y \cdot u(x, y) = 0$

(zu a) Wir gehen analog zur Vorlesung vor und betrachten die Gleichung für fixiertes  $x = \text{const.}$ . Dann erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$u'(y) = xy \cdot u(y)$$

und lösen entweder durch geübtes Hinschauen oder mit Trennung der Variablen: sei  $f(u(y)) = u(y)$  und  $g(y) = x \cdot y$ . Der Ansatz

$$\int^{u(y)} \frac{1}{f(\xi)} d\xi = \int^y g(\xi) d\xi \Rightarrow \ln(|u(y)|) = \frac{1}{2}xy^2 + C$$

Beachte, dass die unteren Integralgrenzen dabei in der Konstante  $C$  zusammengefasst sind, da wir keinen Anfangswert vorgegeben haben. Die Gleichung „umgestellt“ ergibt eine Lösung

$$u(y) = \exp\left(\frac{1}{2}xy^2\right) \quad \text{bzw.} \quad v(x, y) = \exp\left(\frac{1}{2}xy^2\right)$$

Eine kurze Probe ergibt

$$v_y(x, y) = xy \cdot \exp\left(\frac{1}{2}xy^2\right) = xy \cdot v(x, y)$$

(zu b) Wir fixieren erneut eine Variable, diesmal  $y = \text{const.}$  Diesmal sehen wir direkt eine Lösung, nämlich

$$u(x, y) = \exp(-xy)$$

Eine kurze Probe ergibt  $u_x(x, y) + y \cdot u(x, y) = -y \cdot \exp(-xy) + y \cdot \exp(-xy) = 0$ .

**Zusatzaufgabe 3.** Klassifizieren Sie die nachstehenden partiellen Differentialgleichungen nach folgenden Gesichtspunkten:

- (a) Ist die Differentialgleichung linear, semilinear, quasilinear oder voll nichtlinear?
- (b) Welche Ordnung hat die Differentialgleichung?

$$\Delta u = 0$$

$$-\Delta u = f(u)$$

$$|Du| = 1$$

$$u_t + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} = 0$$

$$\det(D^2 u) = f$$

$$\operatorname{div} \left( \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = 0$$

$$u_t - \Delta u = f(u)$$

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

$$u_t + \operatorname{div} F(u) = 0$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

$$au_t + \Delta u = 0$$

$$u_t + H(Du, x) = 0$$

$$u_t - \Delta(u^\gamma) = 0$$

$$-\Delta u = \lambda u$$

$$\operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) = 0$$

$$u_t + uu_x = 0$$

# Hausaufgaben

## Partielle Differentialgleichungen – Übungsblatt 2

Eric Kunze

Matr.-Nr. 4679202

Thema: Charakteristikenmethode

*Ich bitte um Entschuldigung, dass meine Lösung so lang geworden ist. Aber ich habe mich bemüht mein Vorgehen detailliert zu beschreiben. ☺*

**Aufgabe 4.** Finden Sie Lösungen  $u \in C^1$  der folgenden linearen Randwertprobleme:

- (a)  $-3u_x + 2u_y = 0$  mit  $u(x, y) = y^2 + 1$  auf  $\Gamma = \{(1, s) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in \mathbb{R}\}$
- (b)  $u_x + u_y - u_z = xe^{y-z}$  mit  $u(0, y, z) = g(y, z)$  für alle  $y, z \in \mathbb{R}$ , wobei  $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$  beliebig ist
- (c)  $2u_x - u_y = 2u - xe^x$  mit  $u(0, y) = y^2$  für alle  $y \in \mathbb{R}$

Erläutern Sie dabei Ihr Vorgehen und überprüfen Sie abschließend, ob die von Ihnen gefundene Lösung wirklich das Problem löst.

(zu a) Wir betrachten die Charakteristiken

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sei  $\alpha(t) := u(x(t), y(t))$ , d.h.  $\alpha$  beschreibt  $u$  entlang der Charakteristiken. Es gilt

$$\alpha'(t) = u_x \cdot x(t) + u_y \cdot y(t) = -3u_x + 2u_y = 0$$

und somit ist  $u$  konstant entlang der Charakteristiken. Parametrisiere die Kurve  $\Gamma$  durch  $x_0(s) = 1$  und  $y_0(s) = s$ . Dann ergibt sich die Randwertbedingung zu  $g(s) = s^2 + 1$ . Wir prüfen nun die nichtcharakteristische Bedingung, d.h. ob die Kurve  $\Gamma$  auch alle Charakteristiken  $\Xi_{(x_0, y_0)}$  durchläuft. Dazu prüfen wir den Tangentenvektor von  $\Gamma$ , nämlich  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$ , und den Tangentenvektor der Charakteristik  $\Xi_{(x_0, y_0)}$ , nämlich  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ , auf lineare Unabhängigkeit:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

Somit schneidet  $\Gamma$  alle Charakteristiken  $\Xi_{(x_0, y_0)}$ . Somit können wir die Schar der Charakteristiken beschreiben durch

$$\begin{aligned} x(s, t) = x_0(s) - 3t = 1 - 3t &\Rightarrow t(x, y) = \frac{1 - x}{3} \\ y(s, t) = y_0(s) + 2t = s + 2t &\Rightarrow s(x, y) = y - 2t = y - \frac{2}{3}(1 - x) = y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Nach Konstruktion in der Vorlesung erhalten wir damit eine Lösung

$$u(x, y) = g(s(x, y)) = \left(y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right)^2 + 1$$

Die Probe liefert mit den partiellen Ableitungen

$$\left. \begin{aligned} u_x(x, y) &= \frac{4}{3} \left( y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right)^2 \\ u_y(x, y) &= 2 \left( y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -3 \cdot \frac{4}{3} \left( y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right)^2 + 4 \left( y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right)^2 = 0$$

und außerdem  $u(1, y) = y^2 + 1$  für den Anfangswert. Somit ist  $u$  also Lösung der Differentialgleichung.

(zu b) Wir betrachten die partielle Differentialgleichung  $u_x + u_y - u_z = x \cdot e^{y-z}$  mit der Randbedingung  $u(0, y, z) = g(y, z)$  für beliebiges  $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Definieren wir den „Rand“ als die Fläche  $\Gamma = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\}$ . Diese lässt sich parametrisieren mit

$$\gamma(\sigma, \tau) = \begin{pmatrix} x_0(\sigma, \tau) \\ y_0(\sigma, \tau) \\ z_0(\sigma, \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \\ \tau \end{pmatrix}$$

Für die Tangentialebene erhalten wir die Spannvektoren

$$\gamma_\sigma(\sigma, \tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_\tau(\sigma, \tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma(\sigma, \tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Betrachten wir die Charakteristiken  $\Xi_{\sigma, \tau} = \text{Im}(\xi)$  mit

$$\xi(t, \sigma, \tau) = \begin{pmatrix} x(t, \sigma, \tau) \\ y(t, \sigma, \tau) \\ z(t, \sigma, \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(\sigma, \tau) + t \\ y_0(\sigma, \tau) + t \\ z_0(\sigma, \tau) - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \sigma + t \\ \tau - t \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Prüfen wir die nichtcharakteristische Bedingung um sicherzustellen, dass auch jede Charakteristik  $\Xi_{\sigma, \tau}$  von  $\Gamma$  durchlaufen wird:

$$\det(\gamma \mid \xi) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Bezeichne mit  $f(u, x, y, z) = x \cdot e^{y-z}$  die rechte Seite der Differentialgleichung. Schreibe  $\xi(t) = \xi(t, \sigma, \tau)$  für fixiertes  $\sigma$  und  $\tau$  ( $x, y, z$  analog). Sei  $\alpha(t) := u(\xi(t))$  die Funktion  $u$  entlang einer Charakteristik  $\Xi_{\sigma, \tau}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= Du \cdot \xi = f(u(\xi(t)), \xi(t)) = f(\alpha(t), t, \sigma + t, \tau - t) = t \cdot e^{(\sigma+t) - (\tau-t)} \\ &= t \cdot e^{\sigma - \tau + 2t} \end{aligned} \quad (2.2)$$

und dem Anfangswert  $\alpha(0) = \alpha(0, \sigma, \tau) = g(\sigma, \tau)$ . Lösen wir also dieses Anfangswert-



problem und integrieren dazu die rechte Seite in ?? partiell:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \int t \cdot e^{\sigma-\tau+2t} dt = \left(\frac{1}{2}e^{\sigma-\tau+2t}\right)t - \int \frac{1}{2}e^{\sigma-\tau+2t} dt \\ &= \frac{1}{2}t \cdot e^{\sigma-\tau+2t} - \frac{1}{4}e^{\sigma-\tau+2t} + C(\sigma, \tau) \\ &= \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right)e^{\sigma-\tau+2t} + C(\sigma, \tau)\end{aligned}$$

Mit dem Anfangswert  $\alpha(0) = g(\sigma, \tau)$  ergibt sich die Konstante

$$\alpha(0) = \frac{1}{4}e^{\sigma-\tau} + C(\sigma, \tau) \stackrel{!}{=} g(\sigma, \tau) \Rightarrow C(\sigma, \tau) = \frac{1}{4}e^{\sigma-\tau} + g(\sigma, \tau)$$

und somit die konkrete Lösung

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right)e^{\sigma-\tau+2t} + \frac{1}{4}e^{\sigma-\tau} + g(\sigma, \tau)$$

Aus ?? erhalten wir die Inverse von  $\xi$  als

$$\xi^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} t(x, y, z) \\ \sigma(x, y, z) \\ \tau(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y - x \\ z + x \end{pmatrix}$$

Nach Konstruktion in der Vorlesung erhalten wir die Lösung

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= \alpha(\xi^{-1}(x, y, z)) \\ &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{(y-x)-(z+x)+2x} + \frac{1}{4}e^{(y-x)-(z+x)} + g(y-x, z+x) \\ &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + g(y-x, z+x)\end{aligned}$$

Nun prüfen wir noch, dass die gefundene Funktion auch wirklich eine Lösung der Differentialgleichung ist. Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}u_x(x, y, z) &= \frac{1}{2}e^{y-z} - \frac{1}{2}e^{y-z-2x} - \partial_1 g(y-x, z+x) + \partial_2 g(y-x, z+x) \\ u_y(x, y, z) &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + \partial_1 g(y-x, z+x) \\ u_z(x, y, z) &= -\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{y-z} - \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + \partial_2 g(y-x, z+x)\end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}e^{y-z} - \frac{1}{2}e^{y-z-2x} - \partial_1 g(y-x, z+x) + \partial_2 g(y-x, z+x) \\
& + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + \partial_1 g(y-x, z+x) \\
& + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} - \partial_2 g(y-x, z+x) \\
& = e^{y-z} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) - e^{y-z-2x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) \\
& = x \cdot e^{y-z}
\end{aligned}$$

Außerdem ist die Randwertbedingung erfüllt, denn

$$u(0, y, z) = -\frac{1}{4}e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z} + g(y, z) = g(y, z)$$

und somit  $u$  tatsächlich Lösung der partiellen Differentialgleichung.

(zu c) Gegeben sei die partielle Differentialgleichung  $2u_x - u_y = 2u + x \cdot e^x$  und die Randwertbedingung  $u(0, y) = y^2$  für alle  $y \in \mathbb{R}$ . Bezeichnen wir mit  $f(u, x, y) = 2u - x e^x$  die rechte Seite. Die Randwerte werden auf der Kurve  $\Gamma = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$  angenommen. Diese können wir parametrisieren mit

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} x_0(s) \\ y_0(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma(s) = \begin{pmatrix} x_0(s) \\ y_0(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit wird die Randwertbedingung zu  $g(s) = s^2$ . Betrachten wir die Charakteristiken  $\Xi_s$  mit

$$\xi(t, s) = \begin{pmatrix} x(t, s) \\ y(t, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(s) + 2t \\ y_0(s) - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ s + t \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Die nichtcharakteristische Bedingung ist hier erfüllt, denn

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

Betrachte nun die Funktion  $u$  entlang der Charakteristiken  $\Xi_s$  für fixiertes  $s$  beschrieben durch  $\alpha(t) = u(\xi(t))$ . Differenzieren ergibt

$$\alpha(t) = u_x \cdot x + u_y \cdot y = f(u(\xi(t)), \xi(t)) = f(\alpha(t), 2t, s+t) = 2\alpha - 2t \cdot e^{2t} \quad (2.4)$$

bei  $\alpha(0, s) = g(s) = s^2$ . Dieses Anfangswertproblem lösen wir mit Variation der Konstanten. Das zugehörige homogene Problem besitzt offensichtlich die Lösung  $\alpha(t) = c(t) \cdot e^{2t}$ . Differenzieren wir diese Gleichung erhalten wir  $\alpha(t) = c(t) \cdot e^{2t} + 2c(t) \cdot e^{2t}$ . Setzen wir dies nun in ?? ein, dann erhalten wir für ein  $\hat{c} \in \mathbb{R}$

$$c(t) \cdot e^{2t} + 2c(t) \cdot e^{2t} = 2c(t) \cdot e^{2t} - 2t \cdot e^{2t} \Rightarrow c(t) = -2t \Rightarrow c(t) = \hat{c} - t^2$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung  $\alpha(t) = e^{2t}(\hat{c} - t^2)$ . Durch den Anfangswert gilt  $\alpha(0) = \hat{c} = s^2$  und somit ist  $\alpha(t) = e^{2t}(s^2 - t^2)$  konkrete Lösung des Anfangswertproblems, was sich auch leicht überprüfen lässt:

$$\alpha(t) = 2 \underbrace{e^{2t}(s^2 - t^2)}_{=\alpha(t)} - 2t \cdot e^{2t} = 2\alpha(t) - 2t \cdot e^{2t} \quad \text{und} \quad \alpha(0) = s^2$$

Aus ?? erhalten wir

$$\xi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} t(x, y) \\ s(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x + y \end{pmatrix}$$

Damit folgt nach Konstruktion in der Vorlesung eine Lösung

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha(s(x, y)) = e^x \left( \left( \frac{1}{2}x + y \right)^2 - \frac{1}{4}x^2 \right) \\ &= e^x \left( \frac{1}{4}x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{4}x^2 \right) \\ &= e^x (y^2 + xy) \end{aligned}$$

Dann gilt für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} u_x &= e^x (y^2 + xy) + y \cdot e^x \\ u_y &= e^x (2y + x) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} 2u_x - u_y &= 2e^x(y^2 + xy) + 2y \cdot e^x - e^x(2y + x) \\ &= 2u + e^x(2y - 2y - x) \\ &= 2u - x \cdot e^x \end{aligned}$$

und  $u(0, y) = e^0(y^2 + 0 \cdot y) = y^2$ . Damit ist also  $u$  tatsächlich Lösung der partiellen Differentialgleichung.

**Aufgabe 6.** Bestimmen Sie eine Lösung  $u \in C^1(U)$  des quasilinearen Randwertproblems

$$\begin{aligned} uu_x + u_y &= 1 \\ u(x, x) &= \frac{1}{2}x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\xi\} \end{aligned}$$

wobei  $\xi \in \mathbb{R}$  geeignet gewählt und  $U$  eine geeignet gewählte Umgebung der Menge ist, auf der  $u$  vorgegeben ist. Nutzen Sie dazu die Methode der Charakteristiken, überprüfen Sie Ihr Ergebnis und skizzieren Sie einige Charakteristiken in der Nähe des Punktes  $(\xi, \xi)$ .

Aus der Vorlesung kennen wir die Notation  $a(u(x), x) \cdot Du + b(u(x), x) = 0$ . Wir notieren  $a(u(x, y), x, y) = (u(x, y), 1)$  und  $b(u(x, y), x, y) = -1$ . Aus der Randwertbedingung erhalten wir eine Kurve  $\Gamma = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \setminus \{\xi\}\}$  mit Parametrisierung  $\gamma(s) = \begin{pmatrix} x_0(s) \\ y_0(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix}$ , auf der  $g(s) = \frac{1}{2}s$  gilt. Wir überprüfen die nichtcharakteristische Bedingung gemäß Konstruktion in der Vorlesung als

$$\det(\gamma \mid a(g(s), \gamma(s))) = \det \begin{pmatrix} 1 & g(s) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}s \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - \frac{1}{2}s \neq 0 \quad \forall s \neq 2$$

Wähle somit also  $\xi = 2$ , um die Regularität zu sichern. Betrachten wir  $\alpha(t, s) = u(x(t, s), y(t, s))$  als die Funktion  $u$  entlang der Charakteristiken. Da die partielle Differentialgleichung quasilinear ist, reichen die beiden folgenden charakteristischen Gleichungen zu lösen aus:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= a(\alpha, x, y) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \\ \alpha &= -b(\alpha, x, y) = 1 \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten  $\alpha(0, s) = \frac{1}{2}s$ ,  $x(0, s) = s$  und  $y(0, s) = s$ . Lösen wir diese gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= t + c(s) & \xrightarrow{\text{AW}} c(s) &= \frac{1}{2}s & \Rightarrow \alpha(t, s) &= t + \frac{1}{2}s \\ y(t) &= t + c(s) & \xrightarrow{\text{AW}} c(s) &= s & \Rightarrow y(t, s) &= t + s \\ x(t) &= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + c(s) & \xrightarrow{\text{AW}} c(s) &= s & \Rightarrow x(t, s) &= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + s \end{aligned}$$

Wegen der charakteristischen Bedingung können wir dieses Gleichungssystem nach  $t$  und  $s$  auflösen:

$$\begin{aligned} y(t, s) &= t + s \Rightarrow s = y - t \\ x(t, s) &= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + s = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}(y - t)t + y - t = t \left( \frac{1}{2}y - 1 \right) + y \end{aligned}$$

also

$$t(x, y) = \frac{x - y}{\frac{1}{2}y - 1} \quad \text{und} \quad s(x, y) = y - \frac{x - y}{\frac{1}{2}y - 1}$$

Setzen wir dies als Lösung  $u(x, y) = \alpha(t(x, y), s(x, y))$  zusammen, erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha\left(\frac{x-y}{\frac{1}{2}y-1}, y - \frac{x-y}{\frac{1}{2}y-1}\right) \\ &= \frac{x-y}{\frac{1}{2}y-1} + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\frac{x-y}{\frac{1}{2}y-1} \\ &= \frac{x-y}{y-2} + \frac{1}{2}y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 2 \end{aligned}$$

Überprüfen wir unser Ergebnis: Es gilt

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{x-y}{y-2} + \frac{1}{2}y \\ u_x(x, y) &= \frac{1}{y-2} \\ u_y(x, y) &= \frac{-1}{y-2} - \frac{x-y}{(y-2)^2} + \frac{1}{2} = \frac{2-x}{(y-2)^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die partielle Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x, y) \cdot u_x(x, y) + u_y(x, y) &= \left(\frac{x-y}{y-2} + \frac{1}{2}y\right) \cdot \frac{1}{y-2} + \frac{2-x-2y}{(y-2)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{x-y}{(y-2)^2} + \frac{1}{2}y \frac{1}{y-2} + \frac{2-x}{(y-2)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2-y}{(y-2)^2} + \frac{1}{2}y \frac{1}{y-2} + \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2}y - 1\right) \frac{1}{y-2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

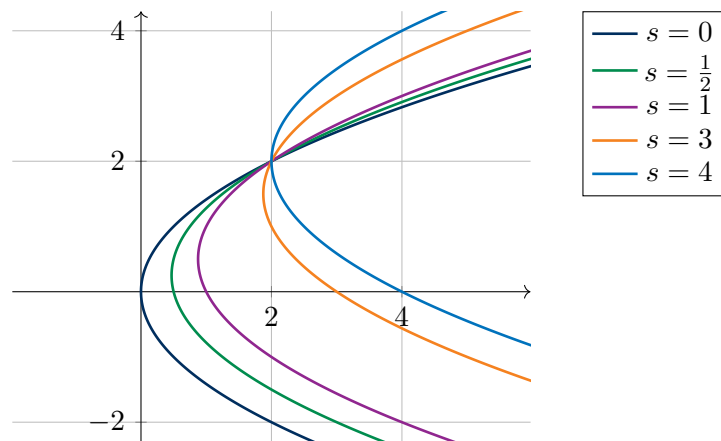
und für die Randwerte  $u(x, x) = \frac{1}{2}x$  für alle  $x \neq 2$ .

Betrachten wir die Charakteristiken beschrieben mit einer Parametrisierung für fixiertes  $s \neq 2$  und betrachten das Gleichungssystem

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + s \\ t + s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow t = 2 - s \Rightarrow 2 = \frac{1}{2}(2-s)^2 + \frac{1}{2}s(2-s) + s = 2$$

Somit sind die Gleichungen unabhängig von  $s \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$  erfüllt und alle Charakteristiken gehen durch den Punkt  $(2, 2)$ .

Charakteristiken  $x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + s \\ t + s \end{pmatrix}$



**Aufgabe 7.** Wir betrachten die *Burgers-Gleichung*

$$\begin{aligned}u_t + uu_x &= 0 && \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= g(x) && \text{für alle } x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

(a) Es sei zuerst  $g$  gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$v(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq \frac{1}{2}t, \\ 0 & \text{für } x < \frac{1}{2}t \end{cases} \quad \text{und} \quad w(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq t, \\ \frac{x}{t} & \text{für } x \in [0, t), \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

schwache Lösungen sind.

*Hinweis:* Es genügt, die Randwerte, die Rankine-Hugoniot-Bedingung auf Sprungkurven und die Differentialgleichung abseits dieser Kurven zu überprüfen.

(b) Es sei nun  $g$  gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

- i. Offenbar ist  $g \notin C^1(\mathbb{R})$ . Stellen Sie dennoch die charakteristischen Gleichungen auf und ermitteln Sie, welche Lösung man formal für  $t < 1$  erwarten würde.
- ii. In welchen Punkten  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, 1)$  gilt  $u_t + uu_x = 0$ ?
- iii. Setzen Sie  $u$  derart auf  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$  fort, dass nur eine Sprungkurve existiert und dass entlang dieser die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt ist.

*Hinweis:* Es bietet sich an, dass  $u$  für  $t \geq 1$  nur die Werte 0 und 1 annimmt.

Für die Burgers-Gleichung gilt in Anlehnung an die Notation der Vorlesung  $F(u)_x = uu_x$  und damit  $F(u) = \frac{1}{2}u^2$ .

(zu a) Wir betrachten die Funktion  $v$ . Für die Randwerte, d.h. für  $y = 0$  gilt

$$v(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} = g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Die Sprungkurve ist gegeben durch  $s(t) = \frac{1}{2}t$  mit  $s = \frac{1}{2}$ . Es gilt  $[[v]] = -1$  und  $[[F(v)]] = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ , also ist mit  $[[F(v)]] = s \cdot [[v]]$  die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt. Betrachte die Differentialgleichung abseits der Sprungkurve:

- Sei  $x > \frac{1}{2}t$ . Dann ist  $v$  gegeben durch  $v(x, t) = 1$  und somit  $v_t = v_x \equiv 0$ . Eingesetzt in die PDE ergibt dies  $v_t + vv_x = 0 + 1 \cdot 0 = 0$ . ✓
- Sei  $x < \frac{1}{2}t$ . Dann ist  $v$  gegeben durch  $v(x, t) = 0$  und somit  $v_t = v_x \equiv 0$ . Eingesetzt in die PDE ergibt dies  $v_t + vv_x = 0 + 0 \cdot 0 = 0$ . ✓

Betrachten wir nun die Funktion  $w$ . Die Randwerte werde wegen

$$w(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} = g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

erfüllt. Wir erhalten hier zwei Sprungkurven:

- Die Winkelhalbierende können wir durch  $s_1(t) = t$  parametrisieren, also ist  $s = 1$ . Dann ergibt sich für die Differenzen

$$[[F(w)]] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{und} \quad [[w]] = 1 - \frac{t}{t} = 0 \quad \Rightarrow \quad [[F(w)]] = s_1 \cdot [[w]]$$

- Für die andere Sprungkurve, die wir mit  $s_2(t) = 0$  parametrisieren ( $s = 0$ ), erhalten wir

$$[[F(w)]] = 0 - 0 = 0 \quad \text{und} \quad [[w]] = \frac{0}{t} - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad [[F(w)]] = s_2 \cdot [[w]]$$

Die Differentialgleichung wird abseits der Sprungkurven auch erfüllt:

- Sei  $x > t$ . Dann ist  $w$  gegeben durch  $w(x, t) = 1$  und somit  $w_t = w_x \equiv 0$ . Eingesetzt in die PDE ergibt dies  $w_t + ww_x = 0 + 1 \cdot 0 = 0$ . ✓
- Sei  $x \in [0, t)$ . Dann ist  $w$  gegeben durch  $w(x, t) = \frac{x}{t}$  und somit  $w_t = \frac{-x}{t^2}$  und  $w_x = \frac{1}{t}$ . Eingesetzt in die PDE ergibt dies  $w_t + ww_x = \frac{-x}{t^2} + \frac{x}{t} \frac{1}{t} = 0$ . ✓
- Sei  $x < 0$ . Dann ist  $w$  gegeben durch  $w(x, t) = 0$  und somit  $w_t = w_x \equiv 0$ . Eingesetzt in die PDE ergibt dies  $w_t + ww_x = 0 + 0 \cdot 0 = 0$ . ✓

Damit sind also  $v$  und  $w$  schwache Lösungen der partiellen Differentialgleichung.

(zu b) Mit  $y := (x, t)$ ,  $a(u, y) = \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $b(u, y) = 0$  hat die Burgersgleichung die quasilineare



Form der Vorlesung. Dann sind die charakteristischen Gleichungen gegeben durch

$$\begin{aligned} y(\tau, \sigma) &= \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = a(\alpha, y) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \\ \alpha(\tau, \sigma) &= a(\alpha, y) \cdot Du = -b(u, y) = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha(0, \sigma) = g(\sigma) \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir die Lösung  $\alpha(\tau, \sigma) = g(\sigma)$ , d.h.  $u$  ist entlang der Charakteristiken konstant. Aus der ersten Gleichung erhalten wir zum einen die Identifizierung  $\tau = t$ , d.h. die Charakteristiken können durch die Zeit  $t$  parametrisiert werden. Zum anderen die gewöhnliche Differentialgleichung  $x = \alpha$  mit der Lösung  $x(\tau, \sigma) = g(\sigma) \cdot \tau + s$  bzw. mit der Identifizierung dann  $x(t) = g(\sigma) \cdot t + \sigma$ . Setzen wir die Definition von  $g$  ein, so erhalten wir

$$x(t) = \begin{cases} t + \sigma & \sigma \leq 0 \\ (1 - \sigma)t + \sigma & 0 \leq \sigma \leq 1 \\ \sigma & \sigma \geq 1 \end{cases}$$

Für  $t \leq 1$  können wir jeden Fall umstellen und erhalten

$$\sigma = \begin{cases} x - t & x - t \leq 0 \\ \frac{x-t}{1-t} & x - t \geq 0 \wedge x \leq 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$$

Nach Konstruktion erhalten wir dann die Lösung

$$u(x, t) = \alpha(\tau, \sigma) = g(\sigma(t, x)) = \begin{cases} 1 & x - t \leq 0 \\ 1 - \frac{x-t}{1-t} & x - t \geq 0 \wedge x \leq 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

Sei nun  $t \in (0, 1)$ . Wir prüfen die Gültigkeit der Differentialgleichung:

- Sei  $x - t \leq 0$ . Dann ist also  $u(x, t) = 1$  und  $u_x = u_t \equiv 0$  und die Differentialgleichung erfüllt.
- Ist  $x - t \geq 0$  und  $x \leq 1$ , dann ist  $u(x, t) = 1 - \frac{x-t}{1-t}$  und  $u_x(x, t) = \frac{1}{1-t}$  sowie  $u_t(x, t) = \frac{(t-1)+(x-t)}{(1-t)^2}$ . In die Differentialgleichung eingesetzt ergibt dies

$$u_t + uu_x = \frac{(t-1)+(x-t)}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t} - \frac{x-t}{(1-t)^2} = 0 \quad \checkmark$$

- Sei  $x \geq 1$ . Dann ist  $u = u_x = u_t \equiv 0$  und die Differentialgleichung damit erfüllt.

Somit ist  $u$  Lösung der Differentialgleichung für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $t \in (0, 1)$ .

**Aufgabe 8.** Betrachten Sie das Beispiel „Ampel (von rot auf grün)“ aus der Vorlesung, modelliert durch

$$\begin{aligned} u_t + F(u)_x &= 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= g(x) & \text{für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit

$$F(u) = u(60 - \frac{2}{5}u) \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} 150 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) In der Vorlesung wurde in Teil a) eine Funktion  $u_a$  explizit gegeben. In Teil b) wurde eine weitere Lösung  $u_b$  skizziert. Ermitteln Sie  $u_b$  explizit.

*Hinweis:* Die charakteristischen Gleichungen geben  $u_b$  auf eine großen Menge vor. Ermitteln Sie  $u_b$  für die restlichen  $(x, t)$ , indem sie eine differenzierbare reelle Funktion  $v$  derart bestimmen, dass  $u_b(x, t) = v(\frac{x}{t})$  die Differentialgleichung löst.

- (b) Überprüfen Sie für  $u_a$  und  $u_b$  entlang aller Sprungkurven die Rankine-Hugoniot-Bedingung und die Entropiebedingung.

(zu a) Für die skalare Erhaltungsgleichung erhalten wir die aus der Vorlesung bekannten Bezeichnungen mit  $y = (x, t)$ ,  $a(u, y) = (60 - \frac{4}{5}u, 1)$  und  $b \equiv 0$ . Außerdem sind die Startwerte der charakteristischen Gleichungen gegeben durch  $x_0(s) = s$ ,  $t_0(s) = 0$ , und als Randwerte  $g(s) = 150 \cdot \mathbb{1}_{\{s < 0\}}(s)$ . Wir erhalten die charakteristischen Gleichungen

$$\begin{aligned} y(\tau, \sigma) &= \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = a(\alpha, y) = \begin{pmatrix} 60 - \frac{4}{5}\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \\ \alpha(\tau, \sigma) &\stackrel{\text{DGI}}{=} -b(\alpha, y) = 0 \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile der ersten Gleichung erhalten wir dabei die Identifizierung  $t(\tau, \sigma) = \tau$ . Die zweite charakteristische Gleichung löst sich unter Nutzung des Anfangswertes  $\alpha(0, \sigma) = g(\sigma)$  zu  $\alpha(\tau, \sigma) = g(\sigma)$ . Setzen wir dies in die erste Zeile der ersten Gleichung ein, so erhalten wir  $x(\tau, \sigma) = 60 - \frac{4}{5}g(\sigma)$ . Dies löst sich mit dem Anfangswert  $x(0, \sigma) = \sigma$  zu

$$x(\tau, \sigma) = 60\tau - \frac{4}{5}g(\sigma) \cdot \tau + \sigma = \begin{cases} -60t + \sigma & \sigma < 0 \\ 60t + \sigma & \sigma \geq 0 \end{cases}$$

Für  $\tau = t > 0$  lässt sich dies umstellen zu

$$\sigma(x, t) = \begin{cases} x + 60t & x < 0 \\ x - 60t & x \geq 0 \end{cases}$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$u(x, t) = \alpha(t, \sigma) = \begin{cases} 150 & \sigma(x, t) < 0 \\ 0 & \sigma(x, t) \geq 0 \end{cases}$$

Da  $t \in (0, \infty)$  ist, ist somit  $u$  auf der Menge  $\{(x, t) : t \in (0, \infty), x \notin (-60t, 60t)\}$  eindeutig vorgegeben. Wir erweitern nun auf  $t \in \mathbb{R}$  und betrachte  $x \in (-60t, 60t)$ . Dabei soll eine Funktion  $v$  mit  $u(x, t) = v(\frac{x}{t})$  bestimmt werden, die die PDE erfüllt. Die Funktion  $u$  muss gemäß Vorlesung ihr Maximum auf der  $t$ -Achse, also für  $x = 0$  annehmen. Dementsprechend gilt  $u(0, t) = v(\frac{0}{t}) = v(0) = u_{\text{opt}} = 75$ . Da wir  $x \in (-60t, 60t)$  betrachten, gilt  $\frac{x}{t} \in (-60, 60)$ . Die Randwerte sollten dabei mit minimaler (rechts) bzw. maximaler (links) Dichte gegeben sein, d.h.  $v(-60) = 150$  und  $v(60) = 0$ . Diese drei Punkte definieren uns eine eindeutige Polynomfunktion zweiten Grades:

$$v(\xi) = -\frac{5}{4s}\xi + 75 \quad \text{auf } (-60, 60)$$

Damit können wir  $u$  definieren als

$$u(x, t) = v\left(\frac{x}{t}\right) = -\frac{5}{4} \frac{x}{t} + 75 \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ und } x \in (-60t, 60t)$$

Damit gilt  $u_x(x, t) = -\frac{5}{4} \frac{1}{t}$  und  $u_t(x, t) = \frac{5}{4} \frac{x}{t^2}$ . In die PDE eingesetzt liefert dies

$$\begin{aligned} u_t + F(u)_x &= u_t + \left(60 - \frac{4}{5}u\right) u_x \\ &= \frac{5}{4} \frac{x}{t^2} + \left(60 + \frac{x}{t} - 60\right) \left(-\frac{5}{4} \frac{1}{t}\right) = \frac{5}{4} \frac{x}{t^2} - \frac{5}{4} \frac{x}{t^2} = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Somit können wir  $u$  schlussendlich definieren als

$$u(t, x) = \begin{cases} 150 & x < -60t \\ -\frac{5}{4} \frac{x}{t} + 75 & -60t \leq x \leq 60t \\ 0 & x > 60t \end{cases}$$

(zu b) Definiere  $u_b := u$  von oben. Man sieht leicht, dass  $u_b$  eine stetige Funktion ist. Daher existieren keine Sprungkurven und die Rankine-Hugoniot- bzw. Entropie-Bedingungen müssen nicht betrachtet werden. (Die Rankine-Hugoniot-Bedingungen werden trivialerweise trotzdem erfüllt, aber die Entropie-Bedingung nicht mehr).

Aus der Vorlesung bekannt ist

$$u_a(x, t) = \begin{cases} 150 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

Wir betrachten die Sprungkurve  $x = s(t) = 0$ . Dann ist auch  $s = 0$  und mit  $F(u) = u\left(60 - \frac{2}{5}u\right)$  gilt

$$\left. \begin{aligned} [[u]] &= 150 \\ [[F(u)]] &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow [[F(u)]] = s \cdot [[u]]$$

Es ist  $F'(u) = 60 - \frac{4}{5}u$  und damit  $F'(u_l) = F'(150) = -60$  sowie  $F'(u_r) = F'(0) = 60$ . Somit ist die Entropie-Bedingung verletzt.

**Aufgabe 12.** Eine Funktion  $u \in C^2(U)$  über einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  heißt harmonisch, falls  $\Delta u = 0$  in  $U$ .

(a) Zeigen Sie, dass die durch

$$u(x) = \begin{cases} \ln(|x|) & \text{für } n = 2, \\ \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{für } n \geq 3 \end{cases}$$

definierte Funktion auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  harmonisch ist.

(b) Es sei  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch und  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthogonal. Zeigen Sie, dass durch  $v(x) = u(Ax)$  eine harmonische Funktion  $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiert wird.

(zu a) Sei  $n = 2$  und  $x = (x_1, x_2) \in U$ . Dann ist  $u(x) = \ln|x| = \ln(r(x))$  mit  $r(x) := |x|$ . Mit  $r_{x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|}$  ist

$$u_{x_i}(x) = \frac{1}{|x|} \cdot r_{x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|^2} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}$$

Leiten wir weiter nach  $x_i$  ab, dann erhalten wir

$$u_{x_i x_i}(x) = \partial_{x_i} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_i \cdot 2x_i}{|x|^4} = \frac{|x|^2 - 2x_i^2}{|x|^4}$$

und somit für den Laplace-Operator

$$\Delta u(x) = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = \frac{|x|^2 - 2x_1^2}{|x|^4} + \frac{|x|^2 - 2x_2^2}{|x|^4} = 0 \quad \checkmark$$

Sei  $n \geq 3$ . Dann ist  $u(x) = |x|^{2-n}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} u_{x_i}(x) &= (2-n) \cdot |x|^{1-n} \cdot \frac{x_i}{|x|} = (2-n) \cdot |x|^{-n} \cdot x_i \\ u_{x_i x_i}(x) &= (2-n) \cdot \partial_{x_i} \left( x_i \cdot |x|^{-n} \right) \\ &= (2-n) \cdot \left( |x|^{-n} - n \cdot |x|^{-n-1} \frac{x_i}{|x|} \cdot x_i \right) \\ &= (2-n) \cdot \left( |x|^{-n} - n \cdot |x|^{-n-2} \cdot x_i^2 \right) \end{aligned}$$

Damit gilt für den Laplace-Operator

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x) = (2-n) \cdot \left( \sum_{i=1}^n |x|^{-n} - n \cdot |x|^{-n-2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \\ &= (2-n) \left( n \cdot |x|^{-n} - n \cdot |x|^{-n-2} \cdot |x|^2 \right) \\ &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

(zu b) Sei  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch und  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthogonal, d.h.  $A^\top = A^{-1}$ . Betrachte

$$v_{x_i}(x) = Du(Ax) \cdot \partial_i Ax = Du(Ax) \cdot a_i = \sum_{k=1}^n u_{x_k}(Ax) \cdot a_{ki}$$

$$v_{x_i x_i}(x) = \partial_{x_i} \left( \sum_{k=1}^n u_{x_k}(Ax) \cdot a_{ki} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n u_{x_k x_\ell}(Ax) \cdot a_{ki} a_{\ell i}$$

Aufgrund der Orthogonalität von  $A$  ist  $\sum_{i=1}^n a_{ki} a_{\ell i} = \delta_{k\ell}$ . Somit ist

$$\Delta v(x) = \sum_{i=1}^n v_{x_i x_i}(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n u_{x_k x_\ell}(Ax) \cdot a_{ki} a_{\ell i} = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(Ax) = \Delta u(Ax) = 0 \quad \checkmark$$

und daher auch  $v$  harmonisch.

**Aufgabe 13.** Es sei  $\Phi$  die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung, d. h.

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln(|x|) & \text{für } n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{für } n \geq 3 \end{cases}$$

für  $x \neq 0$ . Zeigen Sie für  $x \neq 0$  die Abschätzungen  $|D\Phi(x)| \leq c|x|^{1-n}$  und  $|D^2\Phi(x)| \leq c|x|^{-n}$ .

Für  $n = 2$  gilt  $\Phi_{x_i}(x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x|} \cdot \frac{x_i}{|x|} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x_i}{|x|^2}$ . Leiten wir für  $n \geq 3$  nach  $x_i$  ab, so erhalten wir  $\Phi_{x_i}(x) = \frac{2-n}{n(n-2)\alpha(n)} \cdot |x|^{1-n} \frac{x_i}{|x|} = \frac{2-n}{n(n-2)\alpha(n)} \cdot x_i \cdot |x|^{-n}$ . Beide Fälle können wir mit einer universellen Konstante  $c$  zusammenfassen und erhalten mit  $\frac{x_i}{|x|} \leq 1$  auch folgende Abschätzung:

$$\Phi_{x_i}(x) = c \cdot x_i \cdot |x|^{-n} = c \cdot |x|^{1-n} \cdot \frac{x_i}{|x|} \leq c \cdot |x|^{1-n} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Damit erhalten wir für die erste Ungleichung

$$|D\Phi(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Phi_{x_i}(x)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (c \cdot |x|^{1-n})^2} = c \cdot n \cdot |x|^{1-n} = c \cdot |x|^{1-n}$$

Für die zweiten Ableitungen gilt dann entsprechend

$$\Phi_{x_i x_j}(x) = c \left( \delta_{ij} |x|^{-n} - n x_i |x|^{-n-1} \cdot \frac{x_j}{|x|} \right) = c \cdot |x|^{-n} \left( \delta_{ij} - n \cdot x_i x_j \cdot |x|^{-2} \right)$$

$$\Rightarrow \quad |D^2\Phi(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Phi_{x_i x_j}(x)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (|x|^{-n})^2 \cdot (c\delta_{ij} - n x_i x_j |x|^{-2})^2}$$

$$= |x|^{-n} \sqrt{nc^2 - 2n|x|^{-2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + n^2 |x|^{-4} \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{j=1}^n x_j^2}$$

$$= |x|^{-n} \cdot \sqrt{nc^2 - 2n + n^2}$$

$$\leq c |x|^{-n}$$

**Aufgabe 15.** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  eine Lösung von

$$-\Delta u = f(u, x) \quad \text{in } U, \quad u = g \quad \text{auf } \partial U,$$

wobei  $f$  und  $g$  im Folgenden spezifisch gewählt werden.

- (a) Es sei  $f(u, x) = u - u^3$  und  $g = 0$ . Beweisen Sie *mit elementaren Methoden* die Abschätzung  $-1 \leq u(x) \leq 1$  für alle  $x \in \bar{U}$ .
- (b) Es sei  $U = (-a, a)^n$  für ein  $a > 0$ ,  $f(u, x) = -1$  und  $g = 0$ . Finden Sie möglichst gute obere und untere Schranken für  $u(0)$ , indem Sie eine harmonische Funktion der Form  $v = u + w$  betrachten, wobei  $w$  geeignet zu wählen ist
- (c) Es sei  $U = B_1(0)$ ,  $f(u, x) = h(x)$  mit  $h, g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Zeigen Sie, dass es eine von  $n$ ,  $h$ ,  $g$  und  $u$  unabhängige Konstante  $c > 0$  gibt, für die gilt:

$$\max_{\bar{B}_1(0)} |u| \leq c \cdot \left( \max_{\bar{B}_1(0)} |g| + \max_{\bar{B}_1(0)} |h| \right)$$

*Hinweis:* Betrachten sie  $u - v$ , wobei  $v(x) = \max_{\bar{B}_1(0)} |g| + (e^2 - e^{x_1+1}) \max_{\bar{B}_1(0)} |h|$ .

(zu a) Es sei  $f(u) = u - u^3$  und  $g \equiv 0$ . Da  $U$  beschränktes Gebiet ist und  $\bar{U}$  eine abgeschlossene Menge, ist also  $\bar{U}$  kompakt. Da  $u$  stetig auf  $\bar{U}$  ist, nimmt  $u$  ein Maximum in einem  $x_0 \in \bar{U}$  an. Nehmen wir an es sei  $u(x_0) > 1$ . Es gilt  $\equiv g \equiv 0$  auf  $U$ , d.h. um ein Maximum  $u(x_0) > 1$  zu besitzen, muss  $x_0 \in \text{int } U$  sein. Da  $u(x_0)$  Maximum ist mit  $u \in C^2(U)$ , gilt  $u_{x_i x_i}(x_0) \leq 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Nach Differentialgleichung ist dann also

$$0 \leq -\Delta u(x_0) = -\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x_0) = u(x_0) - u^3(x_0) = u(x_0) \left(1 - u(x_0)^2\right) \stackrel{u(x_0) > 1}{<} 0$$

ein Widerspruch. Somit ist dann  $u(x_0) \leq 1$  und aufgrund der Maximalität von  $u(x_0)$  auch  $u(x) \leq u(x_0) \leq 1$  für alle  $x \in \bar{U}$ .

Analog dazu nimmt  $u$  auf  $\bar{U}$  ein globales Minimum in  $x_0 \in \bar{U}$  an, für welches nach gleicher Argumentation wie oben  $x_0 \in \text{int } U$  gilt. Nehmen wir an, es sei  $u(x_0) < -1$ . Als Minimalstelle gilt  $u_{x_i x_i}(x_0) \geq 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Nach PDE gilt dann

$$0 \geq -\Delta u(x_0) = -\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x_0) = u(x_0) - u^3(x_0) = u(x_0) \left(1 - u(x_0)^2\right) \stackrel{u(x_0) < -1}{<} 0$$

ein Widerspruch. Somit ist  $u(x) \geq u(x_0) \geq -1$  für alle  $x \in \bar{U}$  und schließlich gilt die Einschließung  $-1 \leq u(x) \leq 1$  für alle  $x \in \bar{U}$ .

(zu b) Sei  $a > 0$  und  $U = (-a, a)^n$  ein  $n$ -dimensionaler (offener) Quader. Weiter sei  $f \equiv -1$  und  $g \equiv 0$ . Gesucht sind „gute“ (obere und untere) Schranken von  $u(0)$ . Wir betrachten eine harmonische Funktion  $v$  der Form  $v = u + w$ , d.h.  $0 = \Delta v = \Delta u + \Delta w = -f(u, x) + \Delta w = 1 + \Delta w$ . Somit suchen wir nun eine Funktion  $w$  mit  $\Delta w = -1$ . Eine Lösung dieser PDE erhalten wir beispielsweise mit  $w(x) = -\frac{1}{2n}|x|^2 = -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n x_i^2$ .

Wenden wir das Maximumsprinzip auf  $v$  an, dann nimmt damit  $v$  sein Maximum in einem  $x_0 \in U$  an. Aufgrund der Randwertbedingung gilt dort  $u \equiv 0$ . Wir betrachten oBdA den Randpunkt  $x_0 = (a, 0, \dots, 0) \in U$ . Dieser minimiert  $\sum_{i=1}^n x_i^2$ , da jeder andere Randpunkt auch mindestens eine Koordinate  $j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $x_j = \pm a$  besitzt. Somit gilt dann schlussendlich

$$u(0) = v(0) - w(0) = v(0) \leq \max_{x \in U} v(x) \leq \max_{x \in U} (u(x) + w(x)) \leq w(x_0) = -\frac{1}{2n}a^2$$

Analog liefert das Minimumsprinzip die Existenz des Minimum in  $x_0 \in U$ . Nach Randwertbedingung gilt dort wieder  $u(x_0) = 0$ . Die Funktion  $w$  wird auf dem Rand minimiert durch den Punkt  $x_0 = (a, \dots, a) \in U$  mit Minimalwert  $w(x_0) = -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n a^2 = -\frac{1}{2}a^2$ . Analog zu oben gilt nun

$$u(0) = v(0) - w(0) = v(0) \geq \min_{x \in U} v(x) \geq \min_{x \in U} (u(x) + w(x)) \geq w(x_0) = -\frac{1}{2}a^2$$

Somit ist schließlich  $-\frac{1}{2}a^2 \leq u(0) \leq -\frac{1}{2n}a^2$ .

(zu c) Sei  $U = B_1(0)$  und  $f(u, x) = h(x)$  für  $g, h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Gemäß Hinweis betrachten wir  $u - v$  mit  $v(x) := \max_{B_1(0)} |g| + (e^{-e^{x_1+1}}) \cdot \max_{\overline{B_1(0)}} |h|$ . Es ist  $\Delta v(x) = -e^{x_1+1} \cdot \max_{\overline{B_1(0)}} |h| \leq -\max_{\overline{B_1(0)}} |h|$ . Somit ist

$$-\Delta(u-v)(x) = -\Delta u(x) + \Delta v(x) = f(u, x) - \Delta v(x) \leq h(x) - \max_{\overline{B_1(0)}} |h| \leq 0 \quad \forall x \in B_1(0)$$

Damit ist  $u - v$  subharmonisch und mit dem Maximumsprinzip gilt auch hier, dass das Maximum in einem  $x_0 \in B_1(0)$  angenommen wird. Dementsprechend gilt

$$\max_{\overline{B_1(0)}} (u - v) \leq \max_{B_1(0)} (u - v) \leq \max_{B_1(0)} u + \max_{B_1(0)} (-v) = \max_{B_1(0)} |g| - \max_{B_1(0)} |g| = 0$$

sowie daraus folgend

$$\begin{aligned} \max_{\overline{B_1(0)}} u &\leq \max_{\overline{B_1(0)}} (u - v) + \max_{\overline{B_1(0)}} v = \max_{\overline{B_1(0)}} v \\ &= \max_{B_1(0)} |g| + \max_{\overline{B_1(0)}} |h| \cdot \max_{\overline{B_1(0)}} (e^2 - e^{x_1+1}) \\ &= \max_{B_1(0)} |g| + (e^2 - \underbrace{e^0}_{=1}) \cdot \max_{\overline{B_1(0)}} |h| \end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung funktioniert auch mit  $-u$  bzw.  $f(u, x) = -h(x)$ , sodass  $c := e^2 - 1$  vollständig unabhängig ist.

**Aufgabe 16.** Für  $t > 0$  ist die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung auf  $\mathbb{R}^n$  gegeben durch  $u(x, t) = (ct)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$  mit einer Konstante  $c > 0$ . Zeigen Sie:

- (a)  $u_t = \Delta u$  auf  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ .
- (b)  $\lim_{t \rightarrow 0+} u(x, t) = 0$  für  $x \neq 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0+} u(0, t) = \infty$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ .
- (c)  $\int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) dx = 1$  für alle  $t > 0$  und  $c = 4\pi$ .

(zu a) Es sei  $u(x, t) = (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 u_t(x, t) &= c^{-\frac{n}{2}} \left( -\frac{n}{2} \right) t^{-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \frac{4|x|^2}{16t^2} \\
 &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \left( -\frac{n}{2} t^{-1} + \frac{|x|^2}{4t^2} \right) \\
 &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \left( \frac{|x|^2 - 2nt}{4t^2} \right) \\
 u_{x_i}(x, t) &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \left( -\frac{2x_i}{4t} \right) = -(ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \frac{x_i}{2t} \\
 u_{x_i x_i}(x) &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \left( e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \frac{x_i}{2t} \cdot \frac{x_i}{2t} - \frac{1}{2t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) \\
 &= (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left( \frac{x_i^2}{4t^2} - \frac{1}{2t} \right) \\
 \Delta_x u(x, t) &= \sum_{i=1}^n x_{x_i x_i}(x) = (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left( \frac{1}{4t^2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n}{2t} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n x_{x_i x_i}(x) = (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left( \frac{|x|^2 - 2nt}{4t^2} \right)
 \end{aligned}$$

Somit gilt also  $u_t = \Delta u$  auf  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ .

(zu b) ■ Sei  $x \neq 0$ . Es ist

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{n}{2} \ln(t) + \frac{|x|^2}{4} \cdot \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2nt \ln(t) + |x|^2}{4t}$$

Betrachten wir zunächst den Ausdruck  $2nt \cdot \ln(t) = 2n \cdot \frac{\ln(t)}{\frac{1}{t}}$ . Mit der Regel von l'Hôpital erhalten wir

$$\lim_{t \rightarrow 0+} 2n \cdot \frac{\ln(t)}{\frac{1}{t}} = 2n \cdot \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = -2n \cdot \lim_{t \rightarrow 0+} t = 0$$

Damit erhalten wir dann recht einsichtig

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2nt \ln(t) + |x|^2}{4t} = \infty$$

und schließlich

$$\lim_{t \rightarrow 0+} (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = c' \cdot \lim_{t \rightarrow 0+} e^{\ln(t^{-\frac{n}{2}})} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = c' \cdot \lim_{t \rightarrow 0+} e^{-\left(\frac{n}{2} \ln(t) + \frac{|x|^2}{4t}\right)} = 0$$



- Sei  $t_k \rightarrow 0+$  für  $k \rightarrow \infty$ . Dann ist

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u(0, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} (c t_k)^{-\frac{n}{2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(c t_k)^{\frac{n}{2}}} = \infty$$

- Sei nun  $t_k \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$ . Dann ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (c t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(c t_k)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp\left(\lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{|x|^2}{4t_k}\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

(zu c) Wir wollen die Substitution  $y_i = \frac{x_i}{2\sqrt{t}}$  verwenden. Dabei ist  $\frac{d}{dx_i} y_i = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx \\ &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{4t}} dx_1 \dots dx_n \\ &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^n e^{-\frac{x_i^2}{4t}} dx_1 \dots dx_n \\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_i^2}{4t}} dx_i \\ &= \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_i^2}{4t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dx_i \\ &\stackrel{\text{subst.}}{=} \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-y_i^2} dy_i \\ &= \prod_{i=1}^n \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y_i^2} dy_i}_{=1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

**Aufgabe 18.** Für  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$  und  $r > 0$  ist

$$E(x, t; r) = \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq t, \Phi(x - y, t - s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}$$

wobei  $\Phi$  die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung ist. Zeigen Sie

$$E(0, 0; r) = \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq 0, |y|^2 \leq 2ns \ln \left( -\frac{4\pi s}{r^2} \right) \right\}$$

und bestimmen Sie für jedes  $s \in \mathbb{R}$  den Schnitt  $B_s := \{y \in \mathbb{R}^n \mid (y, s) \in E(0, 0; r)\}$

*Hinweis:*  $E(x, t; r)$  ist der aus der Vorlesung bekannte *Wärmeball*. Dabei ist  $\Phi(x, 0)$  als Grenzwert  $\lim_{s \rightarrow 0+} \Phi(x, s)$  zu interpretieren. Analoges gilt in der Darstellung von  $E(0, 0; r)$ .

Es ist  $\Phi(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$  für  $t > 0$  die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichungen. Betrachten wir  $E(0, 0; r)$ . Die Bedingung  $s \leq t$  wird damit automatisch zu  $s \leq 0$  und wir können umstellen:

$$\begin{aligned} \Phi(-y, -s) = (-4\pi s)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{-4s}} \geq \frac{1}{r^n} & \Leftrightarrow e^{-\frac{|y|^2}{-4s}} \geq \frac{(-4\pi s)^{\frac{n}{2}}}{r^n} \\ & \Leftrightarrow -\frac{|y|^2}{-4s} \geq \ln \left( \frac{-4\pi s}{r^2} \right)^{\frac{n}{2}} \\ & \Leftrightarrow \frac{|y|^2}{-4s} \leq \frac{n}{2} \cdot \ln \left( \frac{r^2}{-4\pi s} \right) \\ & \Leftrightarrow |y|^2 \leq 2ns \cdot \ln \left( -\frac{4\pi s}{r^2} \right) \end{aligned}$$

Betrachten wir nun  $B_s := \{y \in \mathbb{R}^n : (y, s) \in E(0, 0; r)\}$ . Wir unterscheiden fünf Fälle:

(i) Ist  $s > 0$ , so ist  $B_s = \emptyset$ .

(ii) Ist  $s = 0$ , so ist

$$\Phi(-y, 0) = \lim_{t \rightarrow 0+} \Phi(-y, t) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } y \neq 0 \\ \infty & \text{wenn } y = 0 \end{cases}$$

Damit kann  $\Phi(-y, 0) \geq \frac{1}{r^2} > 0$  nur für  $y = 0$  erfüllt sein, also  $B_s = B_0 = \{(0, 0)\}$ .

(iii) Seien nun  $s < 0$ . Dann müssen wir in obiger Umstellung

$$|y|^2 \leq 2ns \cdot \ln \left( -\frac{4\pi s}{r^2} \right)$$

beachten, wann die rechte Seite positiv bzw. Null wird. Da  $s < 0$ , sind alle Ausdrücke

definiert. Es ist

$$0 = 2ns \cdot \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right) \Leftrightarrow -\frac{4\pi s}{r^2} = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{r^2}{4\pi}$$

und somit  $B_s = B_{-\frac{r^2}{4\pi}} = \{(0,0)\}$ . Abschließend ist

$$0 > 2ns \cdot \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right) \Leftrightarrow -\frac{4\pi s}{r^2} < 0 \Leftrightarrow s > -\frac{r^2}{4\pi}$$

d.h.  $B_s = \emptyset$  für  $s < -\frac{r^2}{4\pi}$  und

$$B_s = B_r(0) \text{ mit } r = \sqrt{2ns \cdot \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right)} \quad \text{für } -\frac{r^2}{4\pi} < s < 0$$

Zusammengefasst gilt also

$$B_s = \begin{cases} \emptyset & \text{für } s > 0 \\ \{(0,0)\} & \text{für } s = 0 \\ \left\{y \in \mathbb{R}^n : |y| \leq \sqrt{2ns \cdot \ln\left(-\frac{4\pi s}{r^2}\right)}\right\} & \text{für } -\frac{r^2}{4\pi} < s < 0 \\ \{(0,0)\} & \text{für } s = -\frac{r^2}{4\pi} \\ \emptyset & \text{für } s < -\frac{r^2}{4\pi} \end{cases}$$

**Aufgabe 19.** Lösen Sie die *Wellengleichung* für  $n = 1$ , also das Problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u &= g, \quad u_t = h \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\} \end{aligned}$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- (a) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung  $\bar{u}_{\eta\xi} = 0$  auf  $\mathbb{R}^2$ . gegeben ist durch  $\bar{u}(\eta, \xi) = F(\eta) + G(\xi)$ , wobei  $F, G \in C^1(\mathbb{R})$  beliebig sind.
- (b) Betrachten Sie im  $\mathbb{R}^2$  die Koordinatentransformation

$$\varphi(t, x) = (t + x, t - x) \quad \text{für } x, t \in \mathbb{R}.$$

und zeigen Sie, dass die Gleichung  $u_{tt} - u_{xx} = 0$  genau dann erfüllt ist, wenn  $\bar{u}_{\eta\xi} = 0$  für  $\bar{u}(\eta, \xi) := (u \circ \varphi^{-1})(\eta, \xi)$  gilt.

- (c) Nutzen Sie (a) und (b), um die *Formel von d'Alembert* herzuleiten, also die Lösungsdarstellung

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy$$

*Hinweis:* Die Wellengleichung wird demnächst Gegenstand der Vorlesung sein. Dort wird die Formel von d'Alembert geschickt mittels der Methode der Charakteristiken hergeleitet.

(zu a) Sei  $\bar{u}(\eta, \xi) = F(\eta) + G(\xi)$  für  $F, G \in C^1(\mathbb{R})$ . Dann ist  $\bar{u}_\eta(\eta, \xi) = F'(\eta)$  und  $\bar{u}_{\eta\xi}(\eta, \xi) = 0$  für alle  $\eta, \xi \in \mathbb{R}$ .

(zu b) Es ist  $\varphi^{-1}(\eta, \xi) = \frac{1}{2}(\eta + \xi, \eta - \xi)$ . Damit gilt unter Nutzung des Satz von Schwarz

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} u \left( \frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{2} \partial_1 u \left( \frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) + \frac{1}{2} \partial_2 u \left( \frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \partial_{11} u \left( \frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) - \frac{1}{4} \partial_{12} u \left( \frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) \\ & \quad + \frac{1}{4} \partial_{21} u \left( \frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) - \frac{1}{4} \partial_{22} u \left( \frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x)) = 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) \end{aligned}$$

(zu c) Mit (a) und (b) ist  $u \left( \frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right) = F(\eta) + G(\xi)$  bzw.  $u(x, t) = F(x+t) + G(x-t)$ . Mit den Randwerten ist

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= F(x) + G(x) = g(x) & \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) &= F'(x) - G'(x) = h(x) & \text{für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{I}$$

Aus der zweiten Randwertbedingung erhalten wir

$$F(x) - G(x) = \int F'(x) - G'(x) \, dx = \int_{x_0}^x h(y) \, dy \quad (\text{II})$$

Addieren bzw. Subtrahieren wir Gleichungen (I) und (II) so erhalten wir

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \left( g(x) + \int_{x_0}^x h(y) \, dy \right) \\ G(x) &= \frac{1}{2} \left( g(x) - \int_{x_0}^x h(y) \, dy \right) \end{aligned}$$

Setzen wir dies nun in die allgemeine Lösung von oben ein, dann erhält man mit

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2} \left( g(x+t) - g(x-t) + \int_{x_0}^{x+t} h(y) \, dy - \int_{x_0}^{x-t} h(y) \, dy \right) \\ &= \frac{1}{2} (g(x+t) - g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \, dy \end{aligned}$$

die Formel von d'Alembert

**Aufgabe 20.** Lösen Sie die folgenden Probleme, indem Sie die Formel von d'Alembert aus Aufgabe 19 auf geeignete Hilfsprobleme anwenden.

a) 
$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \text{ mit } c > 0, \\ u(x, 0) &= x^2 |e^x - 1| \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= x |e^x - 1| \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) 
$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= x^2 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(zu a) Definiere  $v(x, t) := u(cx, t)$ . Dann wird die partielle Differentialgleichung zu  $v_{tt}(x, t) - v_{xx}(x, t) = u_{tt}(cx, t) - c^2 u_{xx}(cx, t) = 0$  und die Anfangswerte zu  $v(x, 0) = u(cx, 0) = (cx)^2 |e^{cx} - 1| =: g(x)$  sowie  $v_t(x, t) = u_t(cx, t) = cx |e^{cx} - 1| =: h(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Wir lösen nun das Integral  $\int_{x-t}^{x+t} h(y) \, dy$  und wollen zuerst eine Stammfunktion finden:

$$\begin{aligned} \int h(y) \, dy &= \int cy \cdot |e^{cy} - 1| \, dy \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot c \cdot \int y(e^{cy} - 1) \, dy \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot c \cdot \int y \cdot e^{cy} - y \, dy \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot c \cdot \left( \int y \cdot e^{cy} \, dy - \int y \, dy \right) \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot c \cdot \left( \frac{1}{c} y e^{cy} - \frac{1}{c} \int e^{cy} \, dy - \frac{1}{2} y^2 \right) \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot c \cdot \left( \frac{1}{c} y e^{cy} - \frac{1}{c^2} e^{cy} - \frac{1}{2} y^2 \right) \\ &= \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot \frac{2(cy - 1)e^{cy} - c^2 y^2}{2c} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das bestimmte Integral

$$\begin{aligned} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \, dy &= \frac{1}{2c} \left[ \operatorname{sgn}(e^{cy} - 1) \cdot \left( 2(cy - 1)e^{cy} - c^2 y^2 \right) \right]_{x-t}^{x+t} \\ &= \frac{1}{2c} \left( \operatorname{sgn}(e^{c(x+t)} - 1) \cdot \left( 2(c(x+t) - 1)e^{c(x+t)} - c^2(x+t)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sgn}(e^{c(x-t)} - 1) \cdot \left( 2(c(x-t) - 1)e^{c(x-t)} - c^2(x-t)^2 \right) \right) \end{aligned}$$

...

Damit gilt dann mit der Formel von d'Alembert

$$g(x+t) + g(x-t) = c^2(x+t)^2 \left| e^{cx+ct} - 1 \right| + c^2(x-t)^2 \left| e^{cx-ct} - 1 \right|$$

und abschließend also

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \, dy \\ &= \frac{1}{2} \left( c^2(x+t)^2 \left| e^{cx+ct} - 1 \right| + c^2(x-t)^2 \left| e^{cx-ct} - 1 \right| \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{2c} \left( \operatorname{sgn}(e^{c(x+t)} - 1) \cdot \left( 2(c(x+t) - 1)e^{c(x+t)} - c^2(x+t)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sgn}(e^{c(x-t)} - 1) \cdot \left( 2(c(x-t) - 1)e^{c(x-t)} - c^2(x-t)^2 \right) \right) \end{aligned}$$

...

(zu b) Definiere  $v(x, t) := u(x, t) + \frac{1}{12}x^4$ . Lösen wir nun das Hilfsproblem  $v_{tt}(x, t) - v_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) - x^2 = 0$  mit den Anfangswerten  $v(x, 0) = u(x, 0) + \frac{1}{12}x^4 = x + \frac{1}{12}x^4 =: g(x)$  sowie  $v_t(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 =: h(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Wir wollen die Formel von d'Alembert anwenden und erhalten wegen  $\int_{x-t}^{x+t} h(y) \, dy = 0$

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \, dy \\ &= \frac{1}{2} \left( (x+t) + \frac{1}{12}(x+t)^4 + (x-t) + \frac{1}{12}(x-t)^4 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 2x + \frac{1}{12} \left( t^4 + 4t^3x + 6t^2x^2 + 4tx^3 + x^4 + t^4 - 4t^3x + 6t^2x^2 - 4tx^3 + x^4 \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 2x + \frac{1}{12} \left( 2t^4 + 12t^2x^2 + 2x^4 \right) \right) \\ &= x + \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^2x^2 + \frac{1}{12}x^4 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$u(x, t) = v(x, t) - \frac{1}{12}x^4 = x + \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^2x^2$$

Testen wir diese Lösung: Es ist

$$\left. \begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= t^2 + x^2 \\ u_{xx}(x, t) &= t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = t^2 + x^2 - t^2 = x^2$$

Außerdem sind die Randwerte erfüllt, da  $u(x, 0) = x$  und  $u_t(x, 0) = \frac{1}{3}t^3 + x^2t \big|_{t=0} = 0$ .

**Aufgabe 21.** Es sei  $u$  eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung  $u_t - \Delta u = 0$  in  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ . Zeigen Sie, dass für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  das *sphärische Mittel*

$$v(y, t) := M_u(x, |y|, t) := \oint_{\partial B_1(0)} u(x + |y| z, t) \, dO(z)$$

ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

*Hinweis:* Die Vorlesung vom 28. Mai kann inspirierend sein.



**Aufgabe 25.** Es seien  $g \in C_0^2(\mathbb{R})$  und  $h \in C_0^1(\mathbb{R})$  Funktionen mit kompaktem Träger, und es sei  $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  eine Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = g, \quad u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases}$$

Die „kinetische Energie“  $k$  und die „potentielle Energie“  $p$  seien definiert durch

$$k(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x, t) \, dx \quad \text{und} \quad p(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x, t) \, dx \quad (t > 0)$$

Zeigen Sie:

- (a)  $k + p$  ist konstant.
- (b)  $k(t) = p(t)$  für alle genügend großen  $t$ .

(zu a) Wir betrachten die Formel von d'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \, dy$$

Das Integral können wir mittels  $y = x + zt$  und  $dy = t dz$  transformieren zu  $t \cdot \int_{-1}^1 h(x + zt) \, dz$ . Damit können wir problemlos nach  $x$  und  $t$  ableiten, wobei aufgrund der kompakten Träger die Reihenfolge von Integration und Differentiation vertauschbar ist. Es gilt also:

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \frac{1}{2} \left( g'(x+t) + g'(x-t) + t \int_{-1}^1 h'(x + zt) \, dz \right) \\ &= \frac{1}{2} (g'(x+t) + g'(x-t) + h(x+t) - h(x-t)) \\ u_{xx}(x, t) &= \frac{1}{2} (g''(x+t) + g''(x-t) + h'(x+t) - h'(x-t)) \\ u_{xt}(x, t) &= \frac{1}{2} (g''(x+t) - g''(x-t) + h'(x+t) + h'(x-t)) \\ u_t(x, t) &= \frac{1}{2} \left( g'(x+t) - g'(x-t) + \int_{-1}^1 h(x + zt) \, dz + t \int_{-1}^1 h'(x + zt) \cdot z \, dz \right) \\ &= \frac{1}{2} (g'(x+t) - g'(x-t) + h(x+t) + h(x-t)) \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass

$$(k+p)'(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) \underbrace{u_{tt}(x, t)}_{=u_{xx}(x, t)} + u_x(x, t) u_{xt}(x, t) \, dx$$

Durch Einsetzen und Ausmultiplizieren erhalten wir einen fürchterlichen Term:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}u_t(x,t)u_{xx}(x,t) + u_x(x,t)u_{xt}(x,t) \\ &= g'(x+t)g''(x+t) + g'(x+t)h'(x+t) - g'(x-t)g''(x-t) + g'(x-t)h'(x-t) + \\ & \quad h(x+t)g''(x+t) + h(x+t)h'(x+t) + h(x-t)g''(x-t) - h(x-t)h'(x-t) \end{aligned}$$

Nun sind in jedem Summanden die inneren Ableitungen nach  $t$  gleich, das heißt die Vorzeichen spielen bei der Integration über  $x$  keine Rolle und wir erhalten

$$(k+p)'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 4 \cdot (g'(z)h'(z) + g''(z)h(z)) \, dz$$

sowie mit partieller Integration für den zweiten Summanden

$$\int_{-\infty}^{\infty} g''(z)h(z) \, dz = [g'(z)h(z)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g'(z)h'(z) \, dz = - \int_{-\infty}^{\infty} g'(z)h'(z) \, dz$$

Damit ist nun schlussendlich

$$\begin{aligned} (k+p)'(t) &= 4 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g'(z)h'(z) \, dz + 4 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g''(z)h(z) \, dz \\ &= 4 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g'(z)h'(z) \, dz - 4 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g'(z)h'(z) \, dz = 0 \end{aligned}$$

und folglich also  $k+p$  konstant für alle  $t > 0$ .

(zu b) Betrachten wir nun  $k-p$ . Der ausmultiplizierte Integrant ergibt sich als

$$u_x^2(x,t) - u_t^2(x,t) = g'(x+t)g'(x-t) - g'(x+t)h(x-t) + g'(x-t)h(x+t) - h(x+t)h(x-t)$$

Die Funktionen  $g$  und  $h$  leben auf kompakten Trägern, d.h. es existieren Radien  $R_g, R_h > 0$ , sodass  $\text{supp}(g) \subseteq B_{R_g}(0)$ ,  $\text{supp}(h) \subseteq B_{R_h}(0)$  und auch  $\text{supp}(g') \subseteq B_{R_g}(0)$ . Ist  $t$  nun hinreichend groß, d.h.  $t > R := \{R_g, R_h\}$ , dann ist  $x+t \notin B_R(0)$  oder  $x-t \notin B_R(0)$ . Somit wird stets einer der beiden Faktoren in obigen Summanden außerhalb des Trägers liegen und somit gleich Null sein. Das heißt also, dass  $u_x^2(x,t) - u_t^2(x,t) = 0$  für alle  $t > R$  und  $x \in \mathbb{R}$  bzw.  $p(t) - k(t) = 0 \equiv p(t) = k(t)$  für hinreichend große  $t$ .

**Aufgabe 26.** Es seien  $g, h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  gegeben und es sei  $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$  eine Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ u = g, \, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{0\}. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

$$\exists C > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^3, t \in (0, \infty) : |u(x, t)| \leq \frac{C}{t}$$

Schätzen Sie dazu  $u(x, t)$  auf geeigneten Teilbereichen von  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$  ab.

Mit der Kirchhoff'schen Formel erhalten wir als Darstellung der Lösung

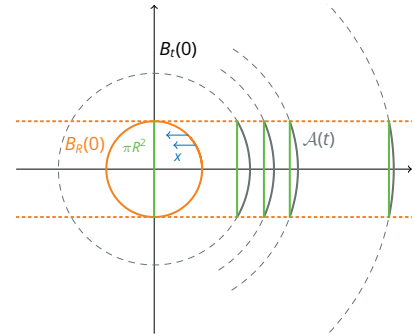
$$u(x, t) = \frac{1}{3t^2\alpha(3)} \int_{B_t(0)} th(x+z) + g(x+z) + Dg(x+z) \cdot z \, dO(z)$$

Schreibe von nun an  $\alpha := \alpha(3)$ . Gemäß Voraussetzung leben  $g$  und  $h$  auf kompakten Trägern, d.h. es existieren Radien  $R_g, R_h > 0$ , sodass  $\text{supp}(g) \subseteq B_{R_g}(0)$  und  $\text{supp}(h) \subseteq B_{R_h}(0)$  sowie insbesondere auch  $\text{supp}(Dg) \subseteq B_{R_g}(0)$ . Auf diesen kompakten Trägern nehmen die stetigen Funktionen auch ein Maximum an, d.h.  $g(x) \leq g_{\max} := \max_{x \in \mathbb{R}^3} |g(x)|$ ,  $h(x) \leq h_{\max} := \max_{x \in \mathbb{R}^3} |h(x)|$ ,  $Dg(x) \leq g'_{\max} := \max_{x \in \mathbb{R}^3} |Dg(x)|$  für alle  $x \in \mathbb{R}^3$ . Dann gilt mit  $R := \max\{R_g, R_h\}$  für  $t \leq R$

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \frac{1}{3t^2\alpha} \int_{B_t(0)} |t| \cdot |h(x+z)| + |g(x+z)| + |Dg(x+z)| \cdot |z| \, dO(z) \\ &\leq \frac{1}{3t\alpha} \int_{B_R(0)} h_{\max} \, dO(z) + \frac{1}{3t^2\alpha} \int_{B_R(0)} g_{\max} \, dO(z) + \frac{1}{3t\alpha} \int_{B_R(0)} g'_{\max} \, dO(z) \\ &= \frac{R^2 h_{\max}}{t} + \frac{R^2 h_{\max}}{t^2} + \frac{R^2 g'_{\max}}{t} \quad (|B_R(0)| = R^2 \cdot 3\alpha) \end{aligned}$$

Für hinreichend große  $t$  ist  $\frac{1}{t} \approx \frac{1}{t^2}$ , d.h. mit  $C_1 := R^2(h_{\max} + g_{\max} + g'_{\max}) > 0$  gilt die Abschätzung  $|u(x, t)| \leq \frac{C_1}{t}$ . Für kleine  $t$  in einer Umgebung der Null ist  $u(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} |g(x)| \leq g_{\max}$  beschränkt, d.h. es existiert ein  $C'_1 > 0$ , sodass  $|u(x, t)| \leq \frac{C'_1}{t}$ .

Sei nun  $t > R$ . In diesem Fall muss  $x+z$  nicht mehr unbedingt in den jeweiligen Trägern von  $g$  oder  $h$  liegen. Dies ist jedoch der Fall, wenn  $|x+z| < R$ . Wählen wir nun ein  $z \in B_R(0)$ , d.h. auf dem Rand der  $R$ -Kugel, die kleiner ist als die  $t$ -Kugel. Für ein fixiertes  $x$  kann die Bedingung  $|x+z| < R$  höchstens für eine Hemisphäre gelten (für die jeweils andere Hemisphäre „zeigt  $x$  aus der Kugel“). Der Flächeninhalt einer solchen Sphäre ist  $\mathcal{A}(t) = \pi R^2 + \omega(t)$ , wobei  $\omega(t)$  den Flächenzuwachs durch die Wölbung der  $t$ -Kugel beschreibt. Je größer  $t$  wird, desto geringer wird die Wölbung, da der „Ausschnitt“ der gleiche bleibt, d.h.



$\omega$  fällt monoton und für  $t \rightarrow \infty$  gilt  $\omega(t) \rightarrow 0$ , d.h.  $\mathcal{A}(t) \rightarrow \pi R^2$ . Somit ist  $\mathcal{A}$  beschränkt durch  $\pi R^2 \leq \mathcal{A}(t) \leq \pi R^2 + \omega(R)$  für alle  $t > R$ . Somit ist

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \frac{1}{3t^2\alpha} \int_{B_t(0)} |th(x+z)| + |g(x+z)| + |Dg(x+z)| \cdot |z| \, dO(z) \\ &\leq \mathcal{A}(t) \cdot \left( \frac{h_{\max}}{3t\alpha} + \frac{g_{\max}}{3t^2\alpha} + \frac{g'_{\max}}{3t\alpha} \right) \\ &= \mathcal{A}(t) \underbrace{\frac{h_{\max} + g_{\max} + g'_{\max}}{3\alpha}}_{=: C_2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{C_2}{t} \end{aligned}$$

Definiere abschließend  $C := \max\{C_1, C'_1, C_2\}$ , dann ist  $|u(x, t)| \leq \frac{C}{t}$  für alle  $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$ .

**Aufgabe 28.** Es sei  $u: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ . Zeigen Sie:

- (a) Ist  $u$  stetig und stückweise stetig differenzierbar mit gleichmäßig beschränkter Ableitung, so hat  $u$  eine stückweise stetige schwache Ableitung.
- (b) Ist  $u$  stückweise gleichmäßig stetig und ist  $x_0 \in (0, 1)$  eine Sprungstelle von  $u$ , so hat  $u$  keine schwache Ableitung.

(zu a) Sei  $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$  eine Zerlegung des Intervalls  $(0, 1)$ , sodass  $u|_{(x_i, x_{i+1})} =: u_i$  für alle  $i = 0, \dots, n-1$  stetig differenzierbar ist. Aufgrund der gleichmäßigen Beschränktheit von  $u'$  existiert ein  $0 < C < \infty$ , sodass  $u'_i(x) \leq C$  für alle  $x \in (x_i, x_{i+1})$  und alle  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Dann gilt

$$\int_0^1 u'(x) \, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_i(x) \, dx \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} C \, dx = \sum_{i=0}^{n-1} C \underbrace{[x_{i+1} - x_i]}_{\leq 1} \leq (n+1)C < \infty$$

und somit  $u' \in L^1_{\text{loc}}(0, 1)$ . Außerdem gilt mit stückweiser partieller Integration für alle  $\varphi \in C_0^\infty(0, 1)$

$$\begin{aligned} \int_0^1 u \cdot \varphi' \, dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_i \cdot \varphi' \, dx = \sum_{i=0}^{n-1} [u_i \cdot \varphi]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_i \cdot \varphi \, dx \\ &= [u \cdot \varphi]_0^1 - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_i \cdot \varphi \, dx \\ &= - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_i \cdot \varphi \, dx \\ &= - \int_0^1 u' \cdot \varphi \, dx \end{aligned}$$

wobei  $[u\varphi]_0^1 = 0$ , da  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$  wegen  $\varphi \in C_0^\infty(0, 1)$ . Somit ist  $u' \in L^1_{\text{loc}}(0, 1)$  und es gilt  $\int_0^1 u\varphi' \, dx = - \int_0^1 u'\varphi \, dx$  für alle  $\varphi \in C_0^\infty(0, 1)$ , d.h.  $u'$  ist schwache Ableitung von  $u$  auf  $(0, 1)$ . Die stückweise Stetigkeit folgt dabei aus der stetigen Differenzierbarkeit von  $u_i$  für alle  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ .

(zu b) —

**Aufgabe 29.** Es seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt und  $u, v \in W^{k,p}(U)$ . Zeigen Sie:

- (a)  $D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta}u$ , für alle  $\alpha, \beta$  mit  $|\alpha| + |\beta| \leq k$ .
- (b)  $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$  mit  $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$  für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  und  $|\alpha| \leq k$ .
- (c)  $u|_V \in W^{k,p}(V)$  für jede offene Menge  $V \subset U$ .

(zu a) Sei  $v := D^\alpha u$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
(-1)^{|\alpha|} \int_U v D^\beta \varphi \, dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u \cdot D^\beta \varphi \, dx \\
&= \int_U u \cdot D^\alpha (D^\beta \varphi) \, dx && \text{(partielle Integration)} \\
&= \int_U u \cdot D^{\alpha+\beta} \varphi \, dx && \text{(klassische Ableitung vertauschbar)} \\
&= (-1)^{|\alpha+\beta|} \int_U D^{\alpha+\beta} u \cdot \varphi \, dx && \text{(partielle Integration)} \\
&= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_U D^{\alpha+\beta} u \cdot \varphi \, dx && (\alpha, \beta \geq 0)
\end{aligned}$$

Und somit ist  $D^\beta v = D^{\alpha+\beta} u$ , also gerade die Behauptung.

(zu b) Der Sobolev-Raum  $W^{k,p}(U)$  ist ein Banachraum, d.h. insbesondere ein Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{R}$ . Somit ist er abgeschlossen unter Linearkombination und aus  $u, v \in W^{k,p}(U)$  folgt auch, dass für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  schon  $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ . Weiterhin ist wegen  $u, v \in W^{k,p}(U)$  für  $|\alpha| \leq k$  auch

$$\begin{aligned}
\int_U (\lambda u + \mu v) \cdot D^\alpha \varphi \, dx &= \int_U \lambda u \cdot D^\alpha \varphi + \mu v \cdot D^\alpha \varphi \, dx \\
&= \lambda \cdot \int_U u \cdot D^\alpha \varphi \, dx + \mu \int_U v \cdot D^\alpha \varphi \, dx \\
&= \lambda \cdot (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_U D^\alpha u \cdot \varphi \, dx + \mu \cdot (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha v \cdot \varphi \, dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_U \underbrace{(\lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v)}_{=D^\alpha(\lambda u + \mu v)} \cdot \varphi \, dx
\end{aligned}$$

und daher  $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$  für alle  $u, v \in W^{k,p}(U)$  und alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  sowie  $|\alpha| \leq k$ .

(zu c) —

**Aufgabe 31.** Bestimmen Sie die Mengen im  $\mathbb{R}^2$ , auf denen der Differentialoperator

$$(Lu)(x, y) := (1 + x)u_{xx}(x, y) + 2xyu_{xy}(x, y) - y^2u_{yy}(x, y)$$

elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist.

Die Koeffizientenmatrix des Differentialoperators ist gegeben durch

$$A(x, y) = - \begin{pmatrix} 1 + x & 2xy \\ 0 & -y^2 \end{pmatrix}$$

Um die Eigenwerte zu bestimmen, betrachten wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $\chi_A$  von  $A(x, y)$  gegeben durch

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \text{id} - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 + x & 2xy \\ 0 & \lambda - y^2 \end{pmatrix} = (\lambda + 1 + x) \cdot (\lambda - y^2)$$

Die Nullstellen von  $\chi_A$  und damit Eigenwerte von  $A(x, y)$  sind also  $\lambda_1 = -1 - x$  und  $\lambda_2 = y^2$ .

- $L$  ist per Definition genau dann **elliptisch**, wenn alle Eigenwerte von  $A(x, y)$  positiv sind. Es ist  $\lambda_1 > 0$  genau dann, wenn  $x < -1$  und  $\lambda_2 = y^2 > 0$  genau dann, wenn  $y \neq 0$ . Somit ist  $L$  elliptisch auf  $(-\infty, -1) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ .
- $L$  ist genau dann **hyperbolisch**, wenn genau ein Eigenwert negativ ist und alle anderen positiv. Nun ist  $\lambda_2 = y^2 \geq 0$  für alle  $y \in \mathbb{R}$ , d.h. es kann nur  $\lambda_1$  negativ sein. Das ist genau dann der Fall, wenn  $x > -1$ . In diesem Fall ist  $\lambda_2 = y^2 > 0$  genau dann, wenn  $y \neq 0$ . Schlussendlich ist also  $L$  hyperbolisch auf  $(-1, \infty) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ .
- $L$  ist genau dann **parabolisch**, wenn mindestens ein Eigenwert gleich Null ist. Es ist
  - ▷  $\lambda_1 = -1 - x = 0 \Leftrightarrow x = -1$  für alle  $y \in \mathbb{R}$
  - ▷  $\lambda_2 = y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$Somit ist also  $L$  parabolisch auf  $\{(-1, y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ .

**Aufgabe 32.** Beweisen Sie den ersten Teil von Satz 15 (Poincaré-Ungleichung) der Vorlesung: Es seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und offen, und  $1 \leq p < \infty$ . Dann gibt es eine Konstante  $c > 0$  mit

$$\|u\|_{L_p} \leq c \|\nabla u\|_{L_p} \quad \text{für alle } u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Führen Sie den Beweis unter Verwendung der Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Ungleichung.

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Weiter sei  $u \in W_0^{1,p}(U)$  mit  $1 \leq p < \infty$ . Dann existiert nach Theorem 8 (Approximation durch glatte Funktionen) eine Folge  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(U) \cap W^{1,p}(U)$  mit  $u_m \xrightarrow{W^{1,p}(U)} u$ . Nun setzen wir die  $u_m$  zu Funktionen  $\tilde{u}_m$  auf  $\mathbb{R}^n$  fort, wobei auch  $\tilde{u}_m \xrightarrow{W^{1,p}(U)} u$ . Nach Satz 11 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Ungleichung) existiert dann eine (universelle) Konstante  $c > 0$  mit

$$\|\tilde{u}_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \cdot \|D\tilde{u}_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

und somit

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \cdot \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Da  $u$  kompakten Träger hat, ist auch

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq c \cdot \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \text{mit} \quad p^* = \frac{np}{n-p} \quad (\star)$$

Da  $U$  als beschränkte Menge ein endliches Maß besitzt, ist  $L^q(U) \hookrightarrow L^{p^*}(U)$  für alle  $q \leq p^*$ . Demnach ist für alle  $q \leq p^*$

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq c \cdot \|u\|_{L^{p^*}(U)} \stackrel{(\star)}{\leq} c \cdot \|Du\|_{L^p(U)}$$

Somit gilt also  $\|u\|_{L^q(U)} \leq c \cdot \|Du\|_{L^p(U)}$  für alle  $q \leq p^*$ , also insbesondere auch für  $q = p$ , da  $p \leq p^*$ .

**Aufgabe 34.** Es sei  $U = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ . Zeigen Sie, dass die PDE

$$((1+|x|)u_x(x,y))_x + \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(x)u_y(x,y))_x + \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(x)u_x(x,y))_y + u_{yy}(x,y) = -\sin(xy) \quad \text{auf } U$$

in  $U$  eine eindeutige schwache Lösung  $u \in H_0^1(U)$  besitzt.

Wir notieren die mit  $-1$  multiplizierte PDE in Divergenzform, d.h. als  $-\operatorname{div}(A^\top Du) + b \cdot Du + c \cdot u = f$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1+|x| & \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x) \\ \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x) & 1 \end{pmatrix}, \quad b = 0, \quad c = 0$$

Nach Theorem 3 hat das Randwertproblem  $Lu + \mu u = f$  in  $U$  und  $u = 0$  auf  $U$  eine eindeutige schwache Lösung  $u \in H_0^1(U)$  für alle  $\mu \geq \gamma$ , sofern  $L$  gleichmäßig elliptisch ist und die Koeffizientenfunktionen in  $L^\infty(U)$  liegen. Wegen  $b = 0$  und  $c = 0$  erhalten wir  $\gamma = 0$ , d.h. wir können insbesondere  $\mu = 0$  wählen, sodass unser Randwertproblem jenem in Theorem 3 entspricht. Außerdem sind die Koeffizientenfunktionen  $a^{12}$ ,  $a^{21}$  und  $a^{22}$  offensichtlich durch 1 beschränkt und somit in  $L^\infty(U)$ . Weiter ist  $|a^{11}| = |1+|x|| \leq 1+|x| \leq 2$ , da  $x \in B_1(0)$  und somit auch  $a^{11} \in L^\infty(U)$ . Schließlich ist auch  $f(x,y) = \sin(xy) \in L^2(U)$ .

Nun ist noch zu zeigen, dass  $L$  gleichmäßig elliptisch ist. Sei dazu  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$  beliebig. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\xi|^2} \cdot \sum_{i,j=1}^2 a^{ij} \xi_i \xi_j &= \frac{1}{|\xi|^2} \cdot \left( (1+|x|)\xi_1^2 + \operatorname{sgn}(x)\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 \right) \\ &\geq \frac{1}{|\xi|^2} \cdot \left( \xi_1^2 + \xi_2^2 - |\xi_1\xi_2| \right) \\ &= 1 - \underbrace{\frac{|\xi_1\xi_2|}{\xi_1^2 + \xi_2^2}}_{\leq \frac{1}{2}} \\ &\geq \frac{1}{2} =: c \in (0, \infty) \end{aligned}$$

Damit ist  $L$  gleichmäßig elliptisch auf  $U$  und nach Theorem 3 existiert nun also eine eindeutige schwache Lösung  $u \in H_0^1(U)$  der partiellen Differentialgleichung.



**Aufgabe 35.** Beweisen Sie die beiden folgenden Transformationsaussagen:

- (a) Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt, und  $a^{ij}, b^i, c: U \rightarrow \mathbb{R}$  seien gegebene Koeffizientenfunktionen mit  $a^{ij} \in C^1(U)$ . Dann lässt sich der Differentialoperator

$$(Lu)(x) = - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x)u_{x_i}(x))_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i}(x) + c(x)u(x)$$

stets in die Form

$$(Lu)(x) = - \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}^{ij}(x)u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i}(x) + c(x)u(x)$$

bringen und umgekehrt.

- (b) Es sei  $L \equiv \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$  ein elliptischer Operator und  $C = (c^{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  eine orthogonale Matrix. Dann geht  $L$  durch die Transformation  $y = Cx$  und die Wahl

$$b^{kl} = \sum_{i,j=1}^n c^{ki} a^{ij} c^{lj} \quad (k, l = 1, \dots, n), \quad \text{d. h. } B = CAC^T,$$

über in den elliptischen Operator

$$\tilde{L} = \sum_{k,l=1}^n b^{kl} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l}.$$

(zu a) Mit der Produktregel können wir die Divergenzform umschreiben zu

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &= - \sum_{i,j=1}^n \left( a^{ij}(x) \cdot u_{x_i}(x) \right)_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) \cdot u_{x_i}(x) + c(x) \cdot u(x) \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \left( a^{ij}(x) \cdot u_{x_i x_j}(x) \right) + a_{x_j}^{ij}(x) \cdot u_{x_i}(x) + \sum_{i=1}^n b^i(x) \cdot u_{x_i}(x) + c(x) \cdot u(x) \\ &= - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \cdot u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^n \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n b^i(x) - a_{x_j}^{ij}(x) \right)}_{=: \tilde{b}^i(x)} \cdot u_{x_i}(x) + c(x) \cdot u(x) \end{aligned}$$

Mit den Koeffizienten  $A$ ,  $\tilde{b}$  und  $c$  hat  $L$  dann Nicht-Divergenz-Form. Sei umgekehrt  $L$  in Nicht-Divergenz-Form und  $a^{ij} \in C^1(U)$ , dann existiert  $a_{x_j}^{ij}$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  und wir können  $\tilde{b}^i(x) := \sum_{j=1}^n b^i(x) - a_{x_j}^{ij}(x)$  definieren. Mit obiger Rechnung und der Produktregel „rückwärts“ erhalten wir dann  $L$  in Divergenzform.