Grundlegende Räume der Analysis

Stetige Funktionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

$$C^k(\Omega, \mathbb{R}^m) := \{u \colon \Omega \to \mathbb{R}^m : D^\alpha u \text{ stetig auf } \Omega \ \forall |\alpha| \leq k\}$$

Norm: $\|u\|_{C^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|$

Raum	Definition
	STETIGE FUNKTIONEN
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.	
$C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$	$:= \{u \colon \Omega \to \mathbb{R}^m : D^\alpha u \text{ stetig auf } \Omega \ \forall \lvert\alpha\rvert \leq k\}$ **Norm:** $\lVert u\rVert_{C^k} := \sum\limits_{\lvert\alpha\rvert \leq k} \sup\limits_{x\in\Omega} \lvert D^\alpha u(x)\rvert$
Schreibe $C(\Omega) = C^0(\Omega)$	
$C^k_B(\Omega, \mathbb{R}^m)$	$:= \left\{u \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m) : D^\alpha u \text{ beschränkt auf } \Omega \ \forall \lvert\alpha\rvert \leq k\right\}$
$C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$	$:= \left\{u \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m) : D^\alpha u \text{ stetig fortsetzbar auf } \overline{\Omega} \ \forall \lvert\alpha\rvert \leq k\right\}$ **Normen:** • $\lVert u\rVert_0 := \max\limits_{\lvert\alpha\rvert\leq k} \sup\limits_{x\in\Omega} \lvert D^\alpha u(x)\rvert$ • $\lVert u\rVert_{W^{k,1}} := \sum\limits_{\lvert\alpha\rvert\leq k} \int\limits_\Omega \lvert D^\alpha u(x)\rvert \ \mathrm{d}x$
$C_0^\infty(\Omega)$	$:= \left\{u \in C^k(\Omega) \ \forall k \in \mathbb{N}, \operatorname{supp}(u) \subset\subset \Omega\right\}$ wobei $\operatorname{supp}(u) = \operatorname{cl}\left(\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}\right)$ keine Metrik / Norm!
	HÖLDERSTETIGE FUNKTIONEN
$C^{k,\gamma}$	$:= \left\{u \in C^k(\overline{\Omega}) : \text{Höl}_\gamma(D^\alpha u, \overline{\Omega}) < \infty \ \forall \lvert\alpha\rvert \leq k\right\}$ mit $\text{Höl}_\gamma(v, \overline{\Omega}) = \sup\limits_{x,y\in\overline{\Omega}, x\neq y} \left\lvert \frac{v(x)-v(y)}{\lvert x-y\rvert^\gamma} \right\rvert$ für $\gamma \in (0,1]$ **Norm:** $\lVert u\rVert_{C^{k,\gamma}} = \lVert u\rVert_{C^k} + \sum\limits_{\lvert\alpha\rvert\leq k} \text{Höl}_\gamma(D^\alpha u, \overline{\Omega})$
	LEBESQUE-RÄUME
$L^p(\Omega, \mu)$	$:= \{u \colon \Omega \to \mathbb{K} : u \text{ messbar}, \lVert u\rVert_{L^p} < \infty\}$ **Norm:** • $\lVert u\rVert_p = \left(\int_\Omega \lvert u\rvert^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$ für $1 \leq p < \infty$ • $\lVert u\rVert_\infty = \operatorname{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega} \lvert u(x)\rvert := \inf\limits_{\Omega_0\subseteq\Omega, \mu(\Omega_0)=0} \sup\limits_{x\in\Omega\setminus\Omega_0} \lvert u(x)\rvert$
	FOLGENRÄUME
ℓ^p	$:= \{x = \{x_k\}\ k \in \mathbb{N} : x_k \in \mathbb{K}^m, \lVert x\rVert_{\ell^p} < \infty\}$ **Norm:** • $\lVert u\rVert_{\ell^p} = \left(\sum\limits_{k=1}^\infty \lvert x_k\rvert^p\right)^{1/p}$ für $1 \leq p < \infty$ • $\lVert u\rVert_{\ell^\infty} = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \lvert x_k\rvert$
	SOBOLEV-RÄUME
$C_E^\infty(\overline{\Omega})$	$:= \{u \mid_{\overline{\Omega}} : u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ **Norm:** $\lVert u\rVert_{W^{k,p}} = \left(\sum\limits_{\lvert\alpha\rvert\leq k} \lVert D^\alpha u\rVert_{L^p}^p\right)^{1/p}$ (Sobolev-Norm)
$H^{k,p}(\Omega)$	$:=$ Vervollständigung von $C_E^\infty(\overline{\Omega})$ bzgl. $\lVert u\rVert_{W^{k,p}}$
$W^{k,p}(\Omega)$	$:= \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \text{ ex. und } D^\alpha u \in L^p(\Omega) \ \forall \lvert\alpha\rvert \leq k\}$