TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik Institut für Stochastik, Professur für Stoch. Analysis & Finanzmathematik

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE MIT MARTINGALEN

Übungen

Prof. Dr. Martin Keller-Ressel

Wintersemester 2020/21

Autor : Eric Kunze
E-Mail : eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

Hausaufgaben

Wahrscheinlichkeitstheorie mit Martingalen – Übungsblatt 1

Eric Kunze
Matr.-Nr. 4679202

Aufgabe 1. Seien $X, Y \in L^2(\mathcal{A})$ und $\mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$. Bedingte Varianz und bedingte Kovarianz von X bzw. X, Y bezüglich $\mathcal{F}$ sind definiert als

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X|\mathcal{F}) &:= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}\right])^2 \mid \mathcal{F}\right] \\ \mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y|\mathcal{F}) &:= \mathbb{E}\left[(X\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}\right])(Y - \mathbb{E}\left[Y|\mathcal{F}\right]) \mid \mathcal{F}\right] \end{aligned}$$

Zeige die Sätze von der totalen Varianz bzw. totalen Kovarianz:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{V}\mathrm{ar}(X|\mathcal{F})\right] + \mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}\right]) \\ \mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y|\mathcal{F})\right] + \mathbb{C}\mathrm{ov}(\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}\right], \mathbb{E}\left[Y|\mathcal{F}\right]) \end{aligned}$$

Sei $U := \mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}\right]$ und $V := \mathbb{E}\left[Y|\mathcal{F}\right]$. Mit der Turmregel gilt $\mathbb{E}\left[U\right] = \mathbb{E}\left[X\right]$ bzw. $\mathbb{E}\left[V\right] = \mathbb{E}\left[Y\right]$. Mit dem Verschiebungssatz gilt $\mathbb{V}\mathrm{ar}(U) = \mathbb{E}\left[U^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2$ und analog für V. Offenbar sind U und V nun $\mathcal{F}$-messbar. Es ist

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}\left[(X - U)|\mathcal{F}\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2XU + U^2|\mathcal{F}\right] = \mathbb{E}\left[X^2|\mathcal{F}\right] - 2U\underbrace{\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}\right]}_{=U} + \mathbb{E}\left[U^2\right]$$

und somit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\mathbb{V}\mathrm{ar}(X|\mathcal{F})\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X^2|\mathcal{F}\right] - 2U\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}\right] + \mathbb{E}\left[U^2\right]\right] &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}\left[U^2\right] + \mathbb{E}\left[U^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[U^2\right] \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\mathrm{ar}(U) &= \mathbb{E}\left[(U - \mathbb{E}\left[U\right])^2\right] = \mathbb{E}\left[U^2 - 2U\mathbb{E}\left[X\right] + \mathbb{E}\left[X\right]^2\right] = \mathbb{E}\left[U^2\right] - 2\mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[U\right] + \mathbb{E}\left[X\right]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[U^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2 \end{aligned}$$

Damit gilt schließlich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\mathbb{V}\mathrm{ar}(X|\mathcal{F})\right] + \mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}\right]) &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[U^2\right] + \mathbb{E}\left[U^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2 = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2 \\ &= \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) \end{aligned}$$

Analog verfahren wir beim Satz von der totalen Kovarianz: Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y|\mathcal{F})\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(X-U)(Y-V)\mid\mathcal{F}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[XY|\mathcal{F}\right] - \mathbb{E}\left[VX|\mathcal{F}\right] - \mathbb{E}[UY|\mathcal{F}] + \mathbb{E}\left[UV|\mathcal{F}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[XY\right] - \mathbb{E}[UV] - \mathbb{E}[UV] + \mathbb{E}[UV] \\
&= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[UV]
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\mathrm{ov}(U,V) &= \mathbb{E}\left[(U-\mathbb{E}\left[U\right])(V-\mathbb{E}\left[V\right])\right] \\
&= \mathbb{E}\left[UV - U\cdot\mathbb{E}\left[Y\right] - V\cdot\mathbb{E}\left[X\right] + \mathbb{E}\left[X\right]\cdot\mathbb{E}\left[Y\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[UV\right] - \mathbb{E}\left[X\right]\cdot\mathbb{E}\left[Y\right] - \mathbb{E}\left[X\right]\cdot\mathbb{E}\left[Y\right] + \mathbb{E}\left[X\right]\cdot\mathbb{E}\left[Y\right] \\
&= \mathbb{E}\left[UV\right] - \mathbb{E}\left[X\right]\cdot\mathbb{E}\left[Y\right]
\end{aligned}$$

und damit schlussendlich

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}\left(\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}\right],\mathbb{E}\left[Y|\mathcal{F}\right]\right) + \mathbb{E}\left[\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y|\mathcal{F})\right] = \mathbb{E}\left[XY\right] - \mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right] = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)$$

Aufgabe 2. (a) In einer bestimmten Population sei das Alter X bei erstmaliger Berufsunfähigkeit exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Für eine Versicherungsgesellschaft die gegen Berufsunfähigkeit versichert, ist das mittlere Alter bei Eintritt der Berufsunfähigkeit von Bedeutung, unter der Bedingung, dass die Berufsunfähigkeit zwischen den Altersgrenzen $0 \leq a < b$ eintritt. Bestimme diesen bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}\left[X|a \leq X \leq b\right]$.

(b) Welche der folgenden in der Vorlesung definierten mathematischen Objekte sind reelle Zahlen, Zufallsvariablen oder messbare Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$?

$$\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}\right], \quad \mathbb{P}(A|B), \quad \mathbb{E}\left[X|Y=y\right], \quad \mathbb{P}(A|\mathcal{F}), \quad \mathbb{E}\left[X|Y\right]$$

Wie üblich bezeichnet $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra, X und Y sind reellwertige Zufallsvariablen, y eine reelle Zahl und A und B sind Ereignisse.

(a) Es sei $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, d.h. X hat die Dichte $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. Da $[a,b] \subseteq [0,\infty]$ können wir rechnen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X \mid a \leq X \leq b\right] &= \int_{\mathbb{R}} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}\cdot\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\cdot\mathbb{1}_{[a,b]}(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b x\cdot\lambda e^{-\lambda x}\ \mathrm{d}x \\
&= \Big[-x\cdot e^{-\lambda x}\Big]_a^b + \int_a^b e^{-\lambda x}\ \mathrm{d}x \qquad \text{(partielle Integration)} \\
&= \Big[-x\cdot e^{-\lambda x}\Big]_a^b - \left[\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_a^b \\
&= \left(a+\frac{1}{\lambda}\right)\cdot e^{-\lambda a} - \left(b+\frac{1}{\lambda}\right)\cdot e^{-\lambda b}
\end{aligned}$$

(b) Es sind

- $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ und $\mathbb{E}[X|Y]$ Zufallsvariablen,
- $\mathbb{P}(A|B)$ und $\mathbb{P}(A|\mathcal{F})$ reelle Zahlen sowie
- $\mathbb{E}[X|Y=y]$ eine messbare Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3. Sei $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ eine quadratische, in Blöcke unterteilte Matrix von vollem Rang, wobei A und D ebenfalls quadratisch und von vollem Rang seien. Die Ausdrücke

$$(M/A) := (D - CA^{-1}B) \quad \text{und} \quad (M/D) := (A - BD^{-1}C)$$

heißen *Schurkomplement* von A in M bzw. D in M. Folgende Formel für die blockweise Inversion von M dürfen Sie als gegeben betrachten:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (M/D)^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -D^{-1}C(M/D)^{-1} & (M/A)^{-1} \end{pmatrix}$$

Verwenden Sie die Formel um folgende Teilaufgaben zu lösen:

(a) Sei M nun symmetrisch, d.h. A und D sind symmetrisch und $C = B^\top$. Zeige

$$\left(x^\top, y^\top\right) M^{-1} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - y^\top D^{-1} y = \widetilde{x}^\top (M/D)^{-1} \widetilde{x}$$

mit $\widetilde{x} = (x - BD^{-1}y)$ für alle x, y mit passender Dimension.

(b) Es sei (X, Y) multivariat normalverteilt mit Erwartungswert 0 und positiv definiter Kovarianzmatrix $\Sigma = \left(\begin{smallmatrix} \Sigma_X & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{XY} & \Sigma_Y \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist X bedingt auf Y normalverteilt mit $\mathbb{E}[X|Y] = \Sigma_{XY}\Sigma_Y^{-1}$ und Kovarianzmatrix (Σ/Σ_Y).
Hinweis: Es gilt $\det(\Sigma) = \det(\Sigma_Y) \cdot \det(\Sigma/\Sigma_Y)$.

(a) Wir notieren $M^{-1} = T = (T_{ij})_{i,j}$. Dabei ist T wieder symmetrisch, da zum Einen

$$(M/D)^\top = (A - BD^{-1}C)^\top = A^\top - C^\top \left(D^{-1}\right)^\top B^\top = A - BD^{-1}C = (M/D)$$

sowie $(M/A)^\top = (M/A)$ analog und zum Anderen

$$\begin{aligned} & A^{-1}B(M/A)^{-1} = (M/D)^{-1}BD^{-1} \\ \Leftrightarrow \quad & (M/D)A^{-1}B = BD^{-1}(M/A) \\ \Leftrightarrow \quad & (A - BD^{-1}C)A^{-1}B = BD^{-1}(D - CA^{-1}B) \\ \Leftrightarrow \quad & B - BD^{-1}CA^{-1}B = B - BD^{-1}CA^{-1}B \end{aligned} \tag{$\star$}$$

tautologisch ist. Betrachten wir nun $q(x,y) = \left(x^\top, y^\top\right) T \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - y^\top D^{-1} y$, so erhalten wir

$$q(x,y) = x^\top T_{11} x + x^\top T_{12} y + y^\top T_{21} x + y^\top (T_{22} - D^{-1}) y$$

Mit einer Matrix Λ können wir dies in die Form

$$q(x,y) = (x^\top - y^\top\Lambda^\top)T_{11}(x+\Lambda y) = x^\top T_{11}x - x^\top \underbrace{(T_{11}\Lambda)}_{=T_{12}} y - y^\top \underbrace{(\Lambda^\top T_{11})}_{=T_{21}} x + y^\top \underbrace{(\Lambda^\top T_{11}\Lambda)}_{=T_{22}-D^{-1}} y$$

Aus $-T_{11}\Lambda = T_{12}$ erhalten wir $\Lambda = -T_{11}T_{12} = (M/D)\cdot A^{-1}B(M/A)^{-1} \overset{(\star)}{=} BD^{-1}$. Außerdem gilt damit $T_{12} = T_{21}$ und

$$\begin{aligned}
&& (M/A)^{-1} - D^{-1} &= D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1} \\
\Leftrightarrow && (M/A)^{-1}DB^{-1} - B^{-1} &= D^{-1}C(M/D)^{-1} \\
\Leftrightarrow && DB^{-1}(M/D) - (M/A)B^{-1}(M/D) &= (M/A)D^{-1}C \\
\Leftrightarrow && DB^{-1}A - C - DB^{-1}A + C + C - CA^{-1}BD^{-1}C &= C - CA^{-1}BD^{-1}C
\end{aligned}$$

tautologisch. Somit ist mit $\widetilde{x} := (x - BD^{-1}y)$ schließlich

$$q(x,y) = \widetilde{x}^\top (M/D)^{-1}\widetilde{x}$$

und die Behauptung bewiesen.

(b) Sei f_{XY} die gemeinsame Dichte von (X,Y) gegeben durch

$$\begin{aligned}
f_{XY}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left((x^\top, y^\top) - (\mu_X^\top, \mu_Y^\top)\right)\cdot \Sigma^{-1} \cdot \left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} \mu_X \\ \mu_Y\end{smallmatrix}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x^\top, y^\top)\cdot \Sigma^{-1}\cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\right)
\end{aligned}$$

Die Randverteilung von Y ist gegeben durch

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{p_Y}\det(\Sigma_Y)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} y^\top \cdot \Sigma_Y^{-1} \cdot y\right)$$

Damit erhalten wir die bedingte Dichte $f_{X|Y}$ als

$$\begin{aligned}
f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} &= \sqrt{(2\pi)^{p-p_Y}\cdot \frac{\det(\Sigma_Y)}{\det(\Sigma)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x^\top, y^\top)\cdot\Sigma^{-1}\cdot\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right) - y^\top\cdot\Sigma_Y^{-1}\cdot y\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{p-p_Y}\det(\Sigma/\Sigma_Y)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x^\top, y^\top)\cdot\Sigma^{-1}\cdot\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right) - \frac{1}{2}y^\top\cdot\Sigma_Y^{-1}\cdot y\right)
\end{aligned}$$

Mit Teil (a) erhalten wir

$$(x^\top, y^\top)\cdot\Sigma^{-1}\cdot\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right) - y^\top\cdot\Sigma_Y^{-1}\cdot y = \widetilde{x}(\Sigma/\Sigma_Y)^{-1}\widetilde{x}$$

mit $\widetilde{x} = x - \Sigma_{XY}\Sigma_Y^{-1}y$. Definieren wir $\widetilde{\mu} := \Sigma_{XY}\Sigma_Y y$, so hast $f_{X|Y=y}$ die Form

$$f_{X|Y=y}(x) = c\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\widetilde{\mu})\cdot(\Sigma/\Sigma_Y)^{-1}\cdot(x-\widetilde{\mu})\right)$$

Dies ist die Dichte einer Realisation von $X|Y$. Für $X|Y$ erhalten wir folglich

$$\mathbb{E}\left[X|Y=y\right]=\widetilde{\mu} \quad\Rightarrow\quad \mu=\mathbb{E}\left[X|Y\right]=\Sigma_{XY}\Sigma_Y^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbb{C}\mathrm{ov}(X|Y)=(\Sigma/\Sigma_Y)$$

Aufgabe 4. Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Martingale bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_n, Y_n \in L^2$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Beweisen Sie:

(a) $\mathbb{E}\left[X_mY_n|\mathcal{F}_m\right]=X_mY_m$ fast sicher für alle $m\le n$

(b) $\mathbb{E}\left[X_nY_n\right]-\mathbb{E}\left[X_0Y_0\right]=\sum_{j=1}^n\mathbb{E}\left[(X_j-X_{j-1})(Y_j-Y_{j-1})\right]$

(c) $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n)=\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_0)+\sum_{j=1}^n\mathbb{V}\mathrm{ar}(X-j-X_{j-1})$

(d) die Zufallsvariablen $X_0, X_1-X_0, X_2-X_1, \dots X_j-X_{j-1}$ sind paarweise orthogonal

(a) Seien $(X_n)_n$ und $(Y_n)_n$ Martingale bezüglich F_n. Da X_m $\mathcal{F}_m$-messbar ist, gilt für alle $m\le n$

$$\mathbb{E}[X_mY_n|\mathcal{F}_m]=X_m\cdot\mathbb{E}[Y_n\mid\mathcal{F}_m]=X_mY_m \quad \text{fast sicher}$$

(b) Für $1\le j\le n$ betrachten wir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(X_j-X_{j-1})(Y_j-Y_{j-1})]\\
=\;&\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_jY_j-X_jY_{j-1}-X_{j-1}Y_j+X_{j-1}Y_{j-1}|\mathcal{F}_{j-1}]] && \text{(Turmregel)}\\
=\;&\mathbb{E}[X_jY_j]-\mathbb{E}[X_{j-1}Y_{j-1}]-\mathbb{E}[X_{j-1}Y_{j-1}]+\mathbb{E}[X_{j-1}Y_{j-1}] && \text{((a) \& Turmregel)}\\
=\;&\mathbb{E}[X_jY_j]-\mathbb{E}[X_{j-1}Y_{j-1}]
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\sum_{j=1}^n\mathbb{E}[(X_j-X_{j-1})(Y_j-Y_{j-1})]=\sum_{j=1}^n\mathbb{E}[X_jY_j]-\mathbb{E}[X_{j-1}Y_{j-1}]=\mathbb{E}[X_nY_n]-\mathbb{E}[X_0Y_0]$$

mithilfe einer Teleskopsumme.

(c) Für Martingale $(X_n)_n$ gilt $\mathbb{E}[X_n]=\text{const.}$ für alle $n\in\mathbb{N}$, da $\mathbb{E}\left[X_0\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{F}_0\right]\right]=\mathbb{E}\left[X_n\right]$ für alle $n\ge 0$. Damit gilt dann unter Nutzung des Verschiebunssatzes

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n)-\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_0)=\mathbb{E}[X_n^2]-\mathbb{E}[X_n]^2-\mathbb{E}[X_0^2]+\mathbb{E}[X_0]^2=\mathbb{E}[X_n^2]-\mathbb{E}[X_0^2]$$

sowie auch $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_j-X_{j-1})=\mathbb{E}[(X_j-X_{j-1}-\mathbb{E}[X_j-X_{j-1}])^2]=\mathbb{E}[(X_j-X_{j-1})^2]$ für $1\le j\le n$. Mit der Überlegung aus Teil (b) und $Y_j=X_j$ erhalten wir $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_j-X_{j-1})=\mathbb{E}[X_j^2]-\mathbb{E}[X_{j-1}^2]$. Mit einem Teleskopsummenargument gilt dann

$$\sum_{j=1}^n\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_j-X_{j-1})=\sum_{j=1}^n\mathbb{E}[X_j^2]-\mathbb{E}[X_{j-1}^2]=\mathbb{E}[X_n^2]-\mathbb{E}[X_0^2]$$

Damit ist also

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n) - \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_0) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_j - X_{j-1})$$

woraus die Behauptung folgt.

(d) Seien $i, j \in \mathbb{N}$, wobei wir annehmen, dass $i \leq j$. Es gilt

$$\langle X_0 \, , \, X_j - X_{j-1} \rangle = \mathbb{E}\left[X_0(X_j - X_{j-1})\right] = \mathbb{E}\left[X_0 X_j - X_0 X_{j-1}\right] = \mathbb{E}\left[X_0 X_j\right] - \mathbb{E}\left[X_0 X_{j-1}\right]$$

Mit der Turmregel und Teil (a) erhalten wir

$$\mathbb{E}\left[X_0 X_j\right] - \mathbb{E}\left[X_0 X_{j-1}\right] = \mathbb{E}[\mathbb{E}\left[X_0 X_j | \mathcal{F}_0\right]] - \mathbb{E}[\mathbb{E}\left[X_0 X_{j-1} | \mathcal{F}_0\right]] = \mathbb{E}\left[X_0^2\right] - \mathbb{E}\left[X_0^2\right] = 0$$

für alle $j \geq 1$. Außerdem gilt mit analogem Vorgehen

$$\begin{aligned}
\langle X_i - X_{i-1} \, , \, X_j - X_{j-1} \rangle &= \mathbb{E}[(X_i - X_{i-1})(X_j - X_{j-1})] \\
&= \mathbb{E}[X_i X_j - X_i X_{j-1} - X_{i-1} X_j + X_{i-1} X_{j-1}] \\
&= \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_{i-1}^2] + \mathbb{E}[X_{i-1}^2] \qquad \text{((a) \& Turmregel)} \\
&= 0
\end{aligned}$$