Aufgabe 14. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ eine Lösung von

$$-\Delta u = f(u,x) \quad \text{in } U, \qquad u = g \quad \text{auf } \partial U,$$

wobei f und g im Folgenden spezifisch gewählt werden.

(a) Es sei $f(u,x) = u - u^3$ und $g = 0$. Beweisen Sie *mit elementaren Methoden* die Abschätzung $-1 \leq u(x) \leq 1$ für alle $x \in \overline{U}$.

(b) Es sei $U = (-a,a)^n$ für ein $a > 0$, $f(u,x) = -1$ und $g = 0$. Finden Sie möglichst gute obere und untere Schranken für $u(0)$, indem Sie eine harmonische Funktion der Form $v = u + w$ betrachten, wobei w geeignet zu wählen ist

(c) Es sei $U = B_1(0)$, $f(u,x) = h(x)$ mit $h, g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass es eine von n, h, g und u unabhängige Konstante $c > 0$ gibt, für die gilt:

$$\max_{B_1(0)} |u| \leq c \cdot \left(\max_{\partial B_1(0)} |g| + \max_{B_1(0)} |h| \right)$$

Hinweis: Betrachten sie $u - v$, wobei $v(x) = \max_{\partial B_1(0)} |g| + (e^2 - e^{x_1+1}) \max_{B_1(0)} |h|$.

(zu a) Es sei $f(u) = u - u^3$ und $g \equiv 0$. Da U beschränktes Gebiet ist und $\overline{U}$ eine abgeschlossene Menge, ist also $\overline{U}$ kompakt. Da u stetig auf $\overline{U}$ ist, nimmt u ein Maximum in einem $x_0 \in \overline{U}$ an. Nehmen wir an es sei $u(x_0) > 1$. Es gilt $\equiv g \equiv 0$ auf ∂U, d.h. um ein Maximum $u(x_0 > 1$ zu besitzen, muss $x_0 \in \operatorname{int} U$ sein. Da $u(x_0)$ Maximum ist mit $u \in C^2(U)$, gilt $u_{x_i x_i}(x_0) \leq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Nach Differentialgleichung ist dann also

$$0 \leq -\Delta u(x_0) = -\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x_0) = u(x_0) - u^3(x_0) = u(x_0) \left(1 - u(x_0)^2\right) \overset{u(x_0)>1}{<} 0$$

ein Widerspruch. Somit ist dann $u(x_0) \leq 1$ und aufgrund der Maximalität von $u(x_0)$ auch $u(x) \leq u(x_0) \leq 1$ für alle $x \in \overline{U}$.

Analog dazu nimmt u auf $\overline{U}$ ein globales Minimum in $x_0 \in \overline{U}$ an, für welches nach gleicher Argumentation wie oben $x_0 \in \operatorname{int} U$ gilt. Nehmen wir an, es sei $u(x_0) < -1$. Als Minimalstelle gilt $u_{x_i x_i}(x_0) \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Nach PDE gilt dann

$$0 \geq -\Delta u(x_0) = -\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x_0) = u(x_0) - u^3(x_0) = u(x_0) \left(1 - u(x_0)^2\right) \overset{u(x_0)<-1}{<} 0$$

ein Widerspruch. Somit ist $u(x) \geq u(x_0) \geq -1$ für alle $x \in \overline{U}$ und schließlich gilt die Einschließung $-1 \leq u(x) \leq 1$ für alle $x \in \overline{U}$.

(zu b) Sei $a > 0$ und $U = (-a, a)^n$ ein n-dimensionaler (offener) Quader. Weiter sei $f \equiv -1$ und $g \equiv 0$. Gesucht sind „gute“ (obere und untere) Schranken von $u(0)$. Wir betrachten eine harmonische Funktion v der Form $v = u+w$, d.h. $0 = \Delta v = \Delta u + \Delta w = -f(u,x) + \Delta w = 1 + \Delta w$. Somit suchen wir nun eine Funktion w mit $\Delta w = -1$. Eine Lösung dieser PDE erhalten wir beispielsweise mit $w(x) = -\frac{1}{2n}|x|^2 = -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n x_i^2$.

Wenden wir das Maximumsprinzip auf v an, dann nimmt damit v sein Maximum in einem $x_0 \in \partial U$ an. Aufgrund der Randwertbedingung gilt dort $u \equiv 0$. Wir betrachten oBdA den Randpunkt $x_0 = (a, 0, \ldots, 0) \in \partial U$. Dieser minimiert $\sum_{i=1}^n x_i^2$, da jeder andere Randpunkt auch mindestens eine Koordinate $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x_j = \pm a$ besitzt. Somit gilt dann schlussendlich

$$u(0) = v(0) - w(0) = v(0) \leq \max_{x \in U} v(x) \leq \max_{x \in \partial U} (u(x) + w(x)) \leq w(x_0) = -\frac{1}{2n}a^2$$

Analog liefert das Minimumsprinzip die Existenz des Minimum in $x_0 \in \partial U$. Nach Randwertbedingung gilt dort wieder $u(x_0) = 0$. Die Funktion w wird auf dem Rand minimiert durch den Punkt $x_0 = (a, \ldots, a) \in \partial U$ mit Minimalwert $w(x_0) = -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n a^2 = -\frac{1}{2}a^2$. Analog zu oben gilt nun

$$u(0) = v(0) - w(0) = v(0) \geq \min_{x \in U} v(x) \geq \min_{x \in \partial U} (u(x) + w(x)) \geq w(x_0) = -\frac{1}{2}a^2$$

Somit ist schließlich $-\frac{1}{2}a^2 \leq u(0) \leq -\frac{1}{2n}a^2$.

(zu c) Sei $U = B_1(0)$ und $f(u,x) = h(x))$ für $g, h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Gemäß Hinweis betrachten wir $u - v$ mit $v(x) := \max_{\partial B_1(0)} |g| + \left(e^{-} e^{x_1+1}\right) \cdot \max_{\overline{B_1(0)}} |h|$. Es ist $\Delta v(x) = -e^{x_1+1} \cdot \max_{\overline{B_1(0)}} |h| \leq -\max_{\overline{B_1(0)}} |h|$. Somit ist

$$-\Delta(u-v)(x) = -\Delta u(x) + \Delta v(x) = f(u,x) - \Delta v(x) \leq h(x) - \max_{\overline{B_1(0)}} |h| \leq 0 \quad \forall x \in B_1(0)$$

Damit ist $u - v$ subharmonisch und mit dem Maximumsprinzip gilt auch hier, dass das Maximum in einem $x_0 \in \partial B_1(0)$ angenommen wird. Dementsprechend gilt

$$\max_{\overline{B_1(0)}} (u-v) \leq \max_{\partial B_1(0)} (u-v) \leq \max_{\partial B_1(0)} u + \max_{\partial B_1(0)} (-v) = \max_{\partial B_1(0)} |g| - \max_{\partial B_1(0)} |g| = 0$$

sowie daraus folgend

$$\begin{aligned}
\max_{\overline{B_1(0)}} u \leq \max_{\overline{B_1(0)}} (u-v) + \max_{\overline{B_1(0)}} v = \max_{\overline{B_1(0)}} v& \\
&= \max_{\partial B_1(0)} |g| + \max_{\overline{B_1(0)}} |h| \cdot \max_{\overline{B_1(0)}} \left(e^2 - e^{x_1+1}\right) \\
&= \max_{\partial B_1(0)} |g| + (e^2 - \underbrace{e^0}_{=1}) \cdot \max_{\overline{B_1(0)}} |h|
\end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung funktioniert auch mit $-u$ bzw. $f(u,x) = -h(x)$, sodass $c := e^2 - 1$ vollständig unabhängig ist.

Aufgabe 15. Für $t > 0$ ist die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$ gegeben durch $u(x,t) = (ct)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ mit einer Konstante $c > 0$. Zeigen Sie:

(a) $u_t = \Delta u$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$.

(b) $\lim_{t\to 0+} u(x,t) = 0$ für $x \neq 0$, $\lim_{t\to 0+} u(0,t) = \infty$ und $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$.

(c) $\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)dx = 1$ für alle $t > 0$ und $c = 4\pi$.

(zu a) Es sei $u(x,t) = (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) &= c^{-\frac{n}{2}} \left(-\frac{n}{2}\right) t^{-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \frac{4\,|x|^2}{16t^2} \\
&= (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{n}{2} t^{-1} + \frac{|x|^2}{4t^2}\right) \\
&= (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \left(\frac{|x|^2 - 2nt}{4t^2}\right) \\
u_{x_i}(x,t) &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{2x_i}{4t}\right) = -(ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \frac{x_i}{2t} \\
u_{x_i x_i}(x) &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \left(e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \frac{x_i}{2t} \cdot \frac{x_i}{2t} - \frac{1}{2t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right) \\
&= (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\frac{x_i^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right) \\
\Delta_x u(x,t) &= \sum_{i=1}^n x_{x_i x_i}(x) = (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\frac{1}{4t^2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n}{2t}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n x_{x_i x_i}(x) = (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\frac{|x|^2 - 2nt}{4t^2}\right)
\end{aligned}$$

Somit gilt also $u_t = \Delta u$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$.

(zu b)
- Sei $x \neq 0$. Es ist

$$\lim_{t\to 0+} \frac{n}{2} \ln(t) + \frac{|x|^2}{4} \cdot \frac{1}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{2nt\ln(t) + |x|^2}{4t}$$

Betrachten wir zunächst den Ausdruck $2nt \cdot \ln(t) = 2n \cdot \frac{\ln(t)}{\frac{1}{t}}$. Mit der Regel von l'Hôpital erhalten wir

$$\lim_{t\to 0+} 2n \cdot \frac{\ln(t)}{\frac{1}{t}} = 2n \cdot \lim_{t\to 0+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = -2n \cdot \lim_{t\to 0+} t = 0$$

Damit erhalten wir dann recht einsichtig

$$\lim_{t\to 0+} \frac{2nt\ln(t) + |x|^2}{4t} = \infty$$

und schließlich

$$\lim_{t\to 0+} (ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = c' \cdot \lim_{t\to 0+} e^{\ln(t^{-\frac{n}{2}})} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = c' \cdot \lim_{t\to 0+} e^{-\left(\frac{n}{2}\ln(t) + \frac{|x|^2}{4t}\right)} = 0$$

- Sei $t_k \to 0+$ für $k \to \infty$. Dann ist

$$\lim_{t\to 0+} u(0,t) = \lim_{k\to\infty} (c\ t_k)^{-\frac{n}{2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(c\ t_k)^{\frac{n}{2}}} = \infty$$

- Sei nun $t_k \to \infty$ für $k \to \infty$. Dann ist

$$\lim_{t\to\infty} (c\ t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(c\ t_k)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp\left(\lim_{k\to\infty} -\frac{|x|^2}{4t_k}\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

(zu c) Wir wollen die Substitution $y_i = \frac{x_i}{2\sqrt{t}}$ verwenden. Dabei ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i} y_i = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \ \mathrm{d}x &= (ct)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \ \mathrm{d}x \\
&= (ct)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-x_1^2 - \cdots - x_n^2}{4t}} \ \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \\
&= (ct)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{-x_i^2}{4t}} \ \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \\
&= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_i^2}{4t}} \ \mathrm{d}x_i \\
&= \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_i^2}{4t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \ \mathrm{d}x_i \\
&\overset{\text{subst.}}{=} \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-y_i^2} \ \mathrm{d}y_i \\
&= \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y_i^2} \ \mathrm{d}y_i}_{=1} \\
&= 1
\end{aligned}$$