TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

Fakultät Mathematik Institut für Analysis, Professur für Dynamik und Steuerung

FUNKTIONENTHEORIE

Übungen

Prof. Dr. Stefan Siegmund

Sommersemester 2020

Autor : Eric Kunze
E-Mail : eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

Hausaufgaben

Eric Kunze
Matr.-Nr. 4679202

Funktionentheorie – Übungsblatt 1

Thema: Komplexe Zahlen & Differenzierbarkeit

Aufgabe 1.1. Wo liegen in der Gaußschen Zahlenebene diejenigen Punkte z, für die gilt

(a) $0 < \operatorname{Re}(\imath z) < 2\pi$

(b) $|z - z_1| = |z - z_2|$ ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gegeben)

(c) $|z| + \operatorname{Re}(z) < 1$

(d) $z^5 = 1$

(e) $z = 3 - \imath + 5e^{\imath t}$ $(0 \leq t \leq \pi)$

(f) $z = te^{\imath t}$ $(t \geq 0)$

(zu a) Mit $z = a + b\imath$ ist $\imath \cdot z = -b + a\imath$, d.h. $\operatorname{Re}(\imath \cdot z) = -\operatorname{Im}(z)$.

(zu b) Der Term $|z - z_1|$ beschreibt den Abstand zwischen z und z_1, d.h. $|z - z_1| = |z - z_2|$ beschreibt alle Punkte, die von z_1 und z_2 den gleichen Abstand haben. Dies sind alle Punkte, die auf der Geraden mit Normale $n = \overline{z_1 z_2}$ liegen, d.h. z erfülle die Bedingung $\left\langle n\,,\, \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 - z \right\rangle = 0$, wobei z, z_1, z_2 als Punkte im $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt zu verstehen sind.

(zu c) Sei $z = a + b\imath$, dann lässt sich die Gleichung schreiben als

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2 + b^2} + a < 1 \;&\Leftrightarrow\; \sqrt{a^2 + b^2} < 1 - a \\
&\Leftrightarrow\; a^2 + b^2 < 1 - 2a + a^2 \\
&\Leftrightarrow\; y^2 < 1 - 2x \\
&\Leftrightarrow\; |y| < \sqrt{1 - 2x} \\
&\Leftrightarrow\; -\sqrt{1 - 2x} < y < \sqrt{1 - 2x}
\end{aligned}$$

Somit liegen alle gültigen z in dem von einer nach links geöffneten Parabel mit Scheitelpunkt in $(1/2, 0)$ eingeschlossenen Bereich.

(zu d) Die Einheitswurzeln liegen stets auf dem Einheitskreis. Insbesondere bilden die fünften Einheitswurzeln ein Fünfeck, wobei ein Eckpunkt auf der Realachse liegt (da stets $1^5 = 1$). Außerdem lassen sich alle Lösungen dieser Gleichung explizit angeben mit

$$z_k = \exp\left(\frac{2\pi\imath \cdot k}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi \cdot k}{5}\right) + \imath \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot k}{5}\right) \qquad (k = 0, 1 \ldots, 4)$$

(zu e) Wir schreiben $z = 3 - i + 5e^{\imath t} = 3 + 5\cos(t) + \imath \cdot (5\sin(t) - 1)$. Damit erhalten wir eine Parameterdarstellung eines Kreises mit Radius 5 und Zentrum $(3, -1)$. Da $t \in [0, \pi]$ liegen alle z nur auf dem oberen Halbkreis.

(zu f) Der Ausdruck $r \cdot e^{it}$ beschreibt einen Kreis mit Radius r um den Ursprung. Da t den Winkel zur Realachse beschreibt, wird der Radius von $t \cdot e^{it}$ mit wachsendem Winkel größer, d.h. es ergibt sich eine (unendliche) Spirale.

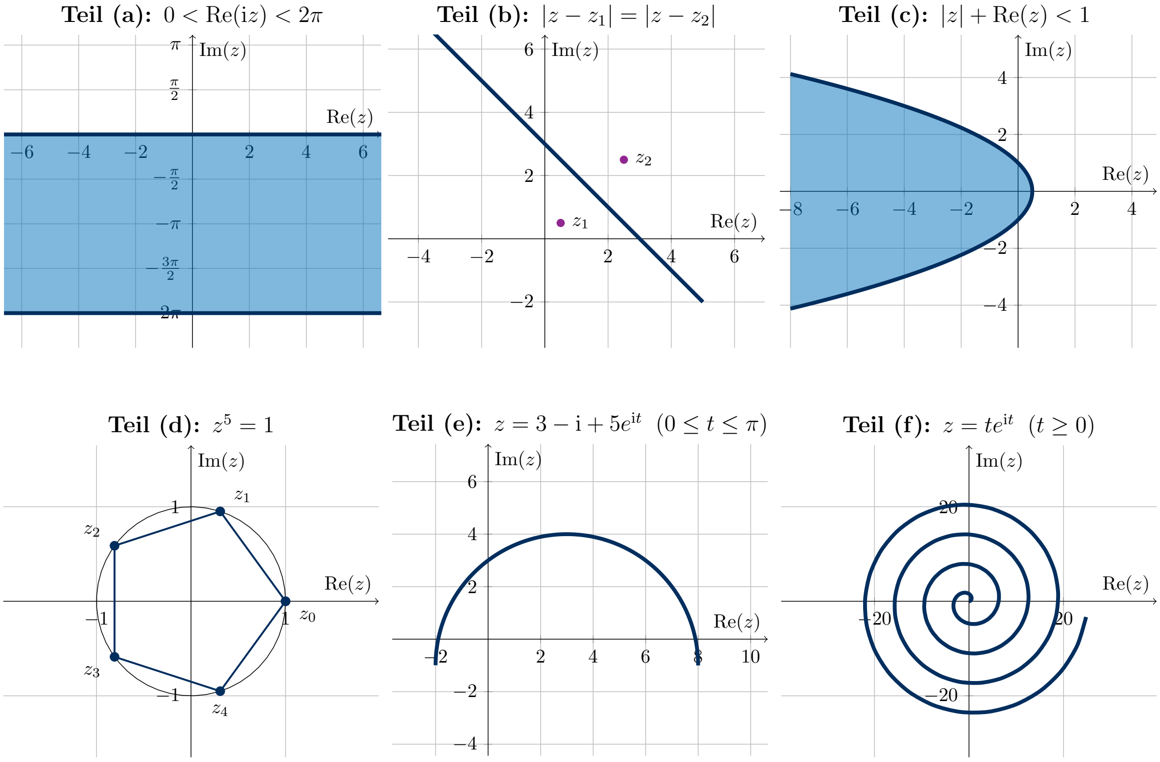

Abbildung 1.1: Darstellungen zu Aufgabe 1.1

Aufgabe 1.2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie: f ist genau dann in z_0 differenzierbar, wenn es $a \in \mathbb{C}$ und $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = 0$ gibt, sodass

$$f(z) = f(z_0) + a(z - z_0) + |z - z_0|\,\varphi(z) \qquad (z \in \Omega)$$

gilt. Es ist dann $f'(z_0) = a$.

(b) Sei $\Omega' \subseteq \mathbb{C}$ offen, $g\colon \Omega' \to \mathbb{C}$, $f(\Omega) \subseteq \Omega'$ und seien f in z_0 und g in $f(z_0)$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass $g \circ f$ in z_0 differenzierbar ist und dass

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

gilt (Kettenregel).

(zu a) **(⇒)** f sei komplex differenzierbar in z_0, d.h. $f'(z_0)$ existiert. Definieren wir $a := f'(z_0)$ und

$$\varphi(z) := \frac{z-z_0}{|z-z_0|} \cdot \widetilde{\varphi}(z) \quad \text{mit} \quad \widetilde{\varphi}(z) := \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & f(z_0) + a(z-z_0) + |z-z_0|\,\varphi(z) \\ = \; & f(z_0) + f'(z_0)\cdot(z-z_0) + |z-z_0| \cdot \tfrac{z-z_0}{|z-z_0|} \cdot \left(\tfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right) \\ = \; & f(z_0) + f'(z_0)\cdot(z-z_0) + f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0) \\ = \; & f(z) \end{aligned}$$

Außerdem gilt aufgrund der Differenzierbarkeit von f auch $\widetilde{\varphi}(z) \to 0$ für $z \to z_0$ sowie

$$\left|\frac{z-z_0}{|z-z_0|}\right| = \frac{|z-z_0|}{|z-z_0|} = 1$$

und somit ist der Ausdruck $\frac{z-z_0}{|z-z_0|}$ beschränkt. Schließlich dominiert somit $\widetilde{\varphi}$ die Konvergenz von φ und es gilt

$$\lim_{z\to z_0} \varphi(z) = 0$$

(⇐) Es existieren $a \in \mathbb{C}$ und $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\varphi(z) \to 0$ und $f(z) = f(z_0) + a \cdot f'(z_0)(z-z_0) + |z-z_0| \cdot \varphi(z)$. Daraus lässt sich umstellen

$$\begin{aligned} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= a + \varphi(z) \cdot |z-z_0| \cdot \frac{\overline{z-z_0}}{\overline{\overline{z-z_0}}} \\ &= a + \varphi(z) \cdot (z-z_0) \cdot \frac{\overline{z-z_0}}{|z-z_0|} \qquad \left(\tfrac{|z|}{\overline{z}} = \tfrac{z}{|z|}\right) \\ \Rightarrow \quad \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= a + \varphi(z) \cdot \frac{\overline{z-z_0}}{|z-z_0|} \end{aligned}$$

Somit ist

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = a + \lim_{z\to z_0} \underbrace{\varphi(z) \cdot \frac{\overline{z-z_0}}{|z-z_0|}}_{=:\widetilde{\varphi}(z)}$$

Wie oben ist

$$\left|\frac{\overline{z-z_0}}{|z-z_0|}\right| = \frac{|z-z_0|}{|z-z_0|} = 1$$

und somit dominiert φ den Ausdruck $\widetilde{\varphi}$ zu Null, d.h.

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = a + \lim_{z\to z_0} \widetilde{\varphi}(z) = a \quad \Rightarrow \quad a = f'(z_0)$$

(zu b) Es seien $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ in z_0 und $g\colon \Omega' \to \mathbb{C}$ in $f(z_0)$ komplex differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0} \frac{(g\circ f)(z)-(g\circ f)(z_0)}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0} \frac{(g\circ f)(z)-(g\circ f)(z_0)}{f(z)-f(z_0)} \cdot \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{(g\circ f)(z)-(g\circ f)(z_0)}{f(z)-f(z_0)} \cdot \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \\
&= g'(f(z_0)) \cdot \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} && (g \text{ diffbar in } f(z_0)) \\
&= g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0) && (f \text{ diffbar in } z_0)
\end{aligned}$$

Insbesondere existieren die Grenzwerte $\lim_{z\to z_0} \frac{(g\circ f)(z)-(g\circ f)(z_0)}{f(z)-f(z_0)}$ und $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ und somit auch der Grenzwert $\lim_{z\to z_0} \frac{(g\circ f)(z)-(g\circ f)(z_0)}{z-z_0}$, d.h. $g\circ f$ ist komplex differenzierbar in z_0.

Aufgabe 1.3. Seien $f, g, h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\begin{aligned}
f(z) &:= x^2 + y^2 \\
g(z) &:= 2xy + y + \imath(x^2 - y^2 - x) \\
h(z) &:= \frac{x - \imath y}{1 + x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Bestimmten Sie die Punkte in $\mathbb{C}$, in denen f, g und h komplex differenzierbar sind.

Wir zerlegen die Funktionen immer in Real- und Imaginärfunktion, d.h. $f(z) = f(x,y) = f_1(x,y) + \imath \cdot f_2(x,y)$. Damit ist $f_1(x,y) = x^2 + y^2$ und $f_2(x,y) = 0$. Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}
\partial_x f_1(x,y) &= 2x & \partial_y f_1(x,y) &= 2y \\
\partial_x f_2(x,y) &= 0 & \partial_y f_2(x,y) &= 0
\end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig, somit ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (reell) differenzierbar. Wir prüfen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{rclcrclcrcl}
\partial_x f_1(x,y) &=& \partial_y f_2(x,y) &\Leftrightarrow& 2x &=& 0 &\Leftrightarrow& x &=& 0 \\
\partial_y f_1(x,y) &=& -\partial_x f_2(x,y) &\Leftrightarrow& 2y &=& 0 &\Leftrightarrow& y &=& 0
\end{array}$$

Damit sind die beiden Gleichungen nur für $z = 0$ erfüllt und f ist nur in diesem Punkt komplex differenzierbar.

Es ist $g_1(x,y) = 2xy + y$ und $g_2(x,y) = x^2 - y^2 - x$. Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}
\partial_x g_1(x,y) &= 2y & \partial_y g_1(x,y) &= 2x + 1 \\
\partial_x g_2(x,y) &= 2x - 1 & \partial_y g_2(x,y) &= -2y
\end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig, somit ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (reell) differenzierbar. Wir prüfen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{rclclclcrcl} \partial_x g_1(x,y) & = & \partial_y g_2(x,y) & \Leftrightarrow & 2y & = & -2y & \Rightarrow & y & = & 0 \\ \partial_y g_1(x,y) & = & -\partial_x g_2(x,y) & \Leftrightarrow & 2x+1 & = & -2x+1 & \Rightarrow & x & = & 0 \end{array}$$

Damit sind die beiden Gleichungen nur für $z = 0$ erfüllt und g ist nur in diesem Punkt komplex differenzierbar.

Es ist $h_1(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$ und $h_2(x,y) = -\frac{y}{1+x^2+y^2}$. Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\partial_x h_1(x,y) = \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad \partial_y h_1(x,y) = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$
$$\partial_x h_2(x,y) = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad \partial_y h_2(x,y) = -\frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig für $x \neq \pm\sqrt{-y^2-1}$, somit ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dort (reell) differenzierbar. Wir prüfen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{rclclcrcl} \partial_x h_1(x,y) & = & \partial_y h_2(x,y) & \Leftrightarrow & \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} = -\frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2} & \Rightarrow & 1 & = & -1 \\ \partial_y h_1(x,y) & = & -\partial_x h_2(x,y) & \Leftrightarrow & \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(1+x^2+y^2)^2} & \Rightarrow & -2xy & = & 2xy \end{array}$$

Die erste Gleichung liefert aufgrund der falschen Aussage für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Unlösbarkeit des Gleichungssystems. Somit ist h nirgends komplex differenzierbar.

Hausaufgaben

Eric Kunze

Funktionentheorie – Übungsblatt 2

Matr.-Nr. 4679202

Aufgabe 2.1. Sei $\Omega := B(0,1) \subseteq \mathbb{C}$ (Einheitskreis), $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $z_0 \in \Omega$, f komplex differenzierbar in z_0, dann gilt $f'(z_0) = 0$. Ist f (in Ω) holomorph, so ist f konstant.

Sei $f \simeq (u,v)$, $f = u + \imath v$ und $z = x + \imath y \simeq (x,y)$. Wegen $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ ist $v \equiv 0$. Da f in $z_0 = x_0 + \imath y_0 \simeq (x_0, y_0)$ komplex differenzierbar ist, ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dort auch reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen $u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) = 0$ bzw. $u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) = 0$. Somit ist auch $u'(z) = 0$ und somit $f'(x_0,y_0) \simeq f'(z_0) = 0$.

Sei f holomorph auf Ω. Dann gilt $f'(z) = 0$ für alle $z \in \Omega$, insbesondere ist $u', v' \equiv 0$ und dann sind u und v als reelle Funktionen konstant, also auch $f = u + \imath v$.

Aufgabe 2.2. (a) Weisen Sie nach, dass die Funktion

$$u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad u(x,y) := e^{-x}(x \cdot \cos(y) + y \cdot \sin(y))$$

der Laplace-Differentialgleichung $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ genügt.

(b) Bestimmen Sie eine Funktion $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $v(0,0) = 0$ derart, dass u,v die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllen.

(c) Schreiben Sie $f = u + \imath v$ mithilfe der komplexen Exponentialfunktionen als Funktion von $z = x + \imath y$.

(zu a) Es ist

$$\begin{aligned}
u_x(x,y) &= -e^{-x}\left(x \cdot \cos(y) + y \cdot \sin(y)\right) + e^{-x} \cdot \cos(y) \\
&= e^{-x}\left((1-x)\cos(y) - y\sin(y)\right) \\
u_{xx}(x,y) &= e^{-x}\left(x\cos(y) + y\sin(y) - 2\cos(y)\right) \\
&= e^{-x}\left((x-2)\cos(y) + y\sin(y)\right) \\
u_y(x,y) &= e^{-x}\left(-x\sin(y) + \sin(y) + y\cos(y)\right) \\
&= e^{-x}\left((1-x)\sin(y) + y\cos(y)\right) \\
u_{yy}(x,y) &= e^{-x}\left(-x\cos(y) + \cos(y) + \cos(y) - y\sin(y)\right) \\
&= -e^{-x}\left((x-2)\cos(y) + y\sin(y)\right)
\end{aligned}$$

Damit gilt $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(zu b) Es gilt $u_x(x,y) = e^{-x}\left((1-x)\cos(y) - y\sin(y)\right)$ und nach den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen muss $u_x = v_y$ gelten. Löse diese Differentialgleichung für fixiertes x

durch Integration:

$$\begin{aligned}
v(x,y) &= \int u_x(x,y)\ \mathrm{d}y = \int e^{-x}\left((1-x)\cos(y) - y\sin(y)\right)\ \mathrm{d}y \\
&= e^{-x}\left((1-x)\int \cos(y)\ \mathrm{d}y - \int y\sin(y)\ \mathrm{d}y\right) \\
&= e^{-x}\left((1-x)\sin(y) - \sin(y) + y\cos(y) + C\right) \\
&= e^{-x}\left(-x\sin(y) + y\cos(y) + C\right)
\end{aligned}$$

Prüfen wir die zweite Cauchy-Riemann-Differentialgleichung und bestimmten v_x:

$$\begin{aligned}
v_x &= -e^{-x}\left(-x\sin(y) + y\cos(y) + C\right) + e^{-x}(-\sin(y)) \\
&= -e^{-x}\left((1-x)\sin(y) + y\cos(y) + C\right) \\
&\overset{!}{=} u_y(x,y) \\
&= -e^{-x}\left((1-x)\sin(y) + y\cos(y)\right)
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Konstante $C = 0$ und als Lösung $v(x,y) = e^{-x}\left(y\cos(y) - x\sin(y)\right)$. Auch der Anfangswert $v(0,0) = 1\cdot(0-0) = 0$ wird erfüllt. Die Probe ergibt

$$\begin{aligned}
v_x(x,y) &= -e^{-x}\left(-x\sin(y) + y\cos(y)\right) - e^{-x}\sin(y) \\
&= -e^{-x}\left((1-x)\sin(y) + y\cos(y)\right) = -u_y(x,y) \\
v_y(x,y) &= e^{-x}\left((-x\cos(y) + \cos(y) - y\sin(y))\right) \\
&= e^{-x}\left((1-x)\cos(y) - y\sin(y)\right) = u_x(x,y)
\end{aligned}$$

also $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$.

(zu c) Sei $z = x + \imath y$.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= u(x,y) + \imath\cdot v(x,y) \\
&= e^{-x}\left(x\cdot\cos(y) + y\cdot\sin(y) - \imath\cdot x\sin(y) + \imath\cdot y\cos(y)\right) \\
&= e^{-x}\left((x+\imath y)\cos(y) - \imath\cdot(x+\imath y)\sin(y)\right) \\
&= e^{-x}\cdot z\cdot(\cos(-y) + \imath\sin(-y)) \\
&= z\cdot e^{-x}\cdot e^{-\imath y} \\
&= z\cdot e^{-z} = f(z)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.3. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, f' stetig, $z_0 \in \Omega$, $f'(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie: Es gibt offene Umgebungen $U \subseteq \Omega$ von z_0 und $V \subseteq \mathbb{C}$ von $f(z_0)$, sodass $f\colon U \to V$ bijektiv und die daher existierende Abbildung $f^{-1}\colon V \to U$ ebenfalls holomorph ist. Es gilt $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$ für alle $w \in V$.
Hinweis: Betrachten Sie $f = (f_1, f_2)$ als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Deren Jabobi Determinante ist in $z_0 = (x_0, y_0)$ ungleich Null. Anwendung des Satzes über die lokale Invertierbarkeit.

Wir erinnern uns gemäß Hinweis an zwei Sätze aus der Analysis 2:

Lemma 2.1 (Satz über inverse Funktionen). *Sei $f\colon U \subseteq \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ stetig differenzierbar (U offen), $x_0 \in U$, $f'(x_0)$ regulär. Dann existiert eine offene Umgebung $U_0 \subseteq U$ von x_0, sodass mit $V_0 := f(U_0)$ die eingeschränkte Abbildung $f\colon U_0 \to V_0$ Diffeomorphismus[1] ist (insbesondere ist V_0 offene Umgebung von $y_0 := f(x_0)$).*

Lemma 2.2 (Ableitung der inversen Funktion). *Sei $f\colon U \subseteq \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ injektiv und differenzierbar (D offen, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$), f^{-1} differenzierbar in $y \in \operatorname{int}(f(D))$. Dann ist*

$$(f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y))^{-1}$$

Sei $f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $z = x + \imath y \simeq (x, y)$ sowie $z_0 = x_0 + \imath y_0 \simeq (x_0, y_0)$. Da f holomorph ist in allen $z_0 \in \Omega$, ist f auch reell differenzierbar in (x_0, y_0) mit

$$f'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1(x_0, y_0) & \partial_y f_1(x_0, y_0) \\ \partial_x f_2(x_0, y_0) & \partial_y f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} =: J$$

Außerdem gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen $\partial_x f_1(x_0, y_0) = \partial_y f_2(x_0, y_0)$ und $\partial_y f_1(x_0, y_0) = -\partial_x f_2(x_0, y_0)$. Damit besitzt J die Form $J = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ mit Determinante

$$\det(J) = \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$$

Angenommen es gilt $\det(J) = a^2 + b^2 = 0$. Dann ist $a = 0$ und $b = 0$, d.h. $f'(x_0, y_0) = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist also $f'(z_0) \simeq f'(x_0, y_0) \neq 0$ für alle $z_0 \simeq (x_0, y_0) \in \Omega$.

Außerdem ist f' stetig. Nach dem Satz über inverse Funktionen (Lemma 2.1) existiert dann eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von (x_0, y_0), sodass mit $V = f(U)$ (und insbesondere $f(x_0, y_0) \in V$) $f\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Nach dem Satz über die Ableitung der inversen Funktion (Lemma 2.2) gilt dann

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(x, y) &= f'(f^{-1}(x, y))^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_x f_1(f^{-1}(x, y)) & \partial_y f_1(f^{-1}(x, y)) \\ \partial_x f_2(f^{-1}(x, y)) & \partial_y f_2(f^{-1}(x, y)) \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{\det(J(f^{-1}(x, y)))} \begin{pmatrix} \partial_y f_2(f^{-1}(x, y)) & \partial_x f_2(f^{-1}(x, y)) \\ \partial_y f_1(f^{-1}(x, y)) & \partial_x f_1(f^{-1}(x, y)) \end{pmatrix} \qquad \forall (x, y) \in V
\end{aligned}$$

Aufgrund der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für f ist $\det(J(f^{-1}(x, y))) = \partial_x f_1(f^{-1}(x, y)) \cdot \partial_y f_2(f^{-1}(x, y)) - \partial_x f_2(f^{-1}(x, y)) \cdot \partial_y f_1(f^{-1}(x, y)) \neq 0$ und

$$\begin{aligned}
\partial_y f_2(f^{-1}(x, y)) &= \partial_x f_1(f^{-1}(x, y)) \\
\partial_y f_1(f^{-1}(x, y)) &= -\partial_x f_2(f^{-1}(x, y))
\end{aligned}$$

[1] f, f^{-1} stetig differenzierbar

auch die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für f^{-1}. Damit ist f^{-1} komplex differenzierbar auf dem entsprechenden $V \subseteq \mathbb{C}$ mit der Ableitung

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(w) &= \lim_{z \to w} \frac{f^{-1}(z) - \lim_{z \to w} f^{-1}(w)}{z - w} = \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(w)}{f(f^{-1}(z)) - f(f^{-1}(w))} \\
&= \left(\lim_{z \to w} \frac{f(f^{-1}(z)) - f(f^{-1}(w))}{f^{-1}(z) - f^{-1}(w)} \right)^{-1} \\
&= \Big(f'(f^{-1}(w)) \Big)^{-1} \qquad \forall w \in V
\end{aligned}$$

Hausaufgaben

Eric Kunze

Funktionentheorie – Übungsblatt 3

Matr.-Nr. 4679202

Aufgabe 3.1. Das Doppelverhältnis $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ von verschiedenen Punkten $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ ist folgendermaßen erklärt:

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} \qquad z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$$

Ist $z_j = \infty$, so definieren wir das Doppelverhältnis als Grenzwert, z.B.

$$[\infty, z_2, z_3, z_4] := \lim_{z \to \infty} [z, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

(a) Sei $f\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ eine Möbius-Transformation. Beweisen Sie: Sind $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ und $z_j \neq z_k$ für $j \neq k$, so gilt

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)]$$

(b) Benutzen Sie (a) um zu zeigen: Sind drei verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ und drei verschiedene Punkte $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ gegeben, so existiert genau eine Möbius-Transformation $f\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ mit der Eigenschaft $f(z_j) = w_j$ für $j = 1, 2, 3$. Für $z \notin \{z_1, z_2, z_3\}$ ist $f(z)$ gegeben durch

$$[w_1, w_2, w_3, f(z)] = [z_1, z_2, z_3, z]$$

(zu a) Sei $f\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ eine Möbius-Transformation, d.h. es existieren $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$, sodass $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Wir definieren abkürzend $\alpha(z) := cz + d$ und $\delta := ad - bc$. Außerdem gilt

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [z_2, z_1, z_4, z_3] = [z_3, z_4, z_1, z_2] \tag{$\star$}$$

(i) Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) = \frac{ax+b}{cx+d} - \frac{ay+b}{cy+d} &= \frac{(ax+b)(cy+d) - (ay+b(cx+d))}{(cx+d)(cy+d)} \\ &= \frac{acxy + adx + bcy + bd - acxy - ady - bcx - bd}{\alpha(x)\alpha(y)} \\ &= \frac{(x-y)\cdot\delta}{\alpha(x)\cdot\alpha(y)} \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned}
[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] &= \frac{\big(f(z_1) - f(z_3)\big) \cdot \big(f(z_2) - f(z_4)\big)}{\big(f(z_1) - f(z_4)\big) \cdot \big(f(z_2) - f(z_3)\big)} \\
&= \frac{(z_1 - z_3) \cdot \delta \cdot (z_2 - z_4) \cdot \delta}{\alpha(z_1) \cdot \alpha(z_3) \cdot \alpha(z_2) \cdot \alpha(z_4)} \cdot \frac{\alpha(z_1) \cdot \alpha(z_4) \cdot \alpha(z_2) \cdot \alpha(z_3)}{(z_1 - z_4) \cdot \delta \cdot (z_2 + z_3) \cdot \delta} \\
&= \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} \\
&= [z_1, z_2, z_3, z_4]
\end{aligned}$$

(ii) Genau ein $z_k = \infty$ und $c \neq 0$. Wegen $(\star)$ können wir oBdA annehmen, dass $z_1 = \infty$. Dann ist $f(z_1) = \frac{a}{c}$ und es gilt

$$f(z_1) - f(z) = \frac{a}{c} - \frac{az + b}{cz + d} = \frac{acz + ad - acz - bc}{c(cz + d)} = \frac{\delta}{c \cdot \alpha(z)} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] &= \frac{\delta(z_2 - z_4) \cdot c \cdot \alpha(z_4) \cdot c \cdot \alpha(z_2) \cdot \alpha(z_3)}{c \cdot \alpha(z_3) \cdot \alpha(z_2) \cdot \alpha(z_4) \cdot \delta \cdot (z_2 - z_3)} \\
&= \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \\
&= [z_1, z_2, z_3, z_4]
\end{aligned}$$

Für $c = 0$ ist $f(z_1) = \infty$ und somit $f(z_1) - f(z) = \infty$ für alle $z \in \mathbb{C}$, sowie $\alpha \equiv d$. Es gilt

$$[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = \frac{f(z_2) - f(z_4)}{f(z_2) - f(z_3)} = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \cdot \frac{\delta \cdot d^2}{\delta \cdot d^2} = [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

(iii) Es seien $z_1 = z_2 = \infty$. Dann ist $f(z_1) = f(z_2) = \frac{a}{c}$ für $c \neq 0$. Somit vereinfacht sich Fall (ii) weiter zu

$$\begin{aligned}
[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] &= \frac{\delta \cdot \delta}{c \cdot \alpha(z_3) \cdot c \cdot \alpha(z_4)} \cdot \frac{c \cdot \alpha(z_4) \cdot c \cdot \alpha(z_3)}{\delta \cdot \delta} \\
&= 1 \\
&= [z_1, z_2, z_3, z_4]
\end{aligned}$$

Für $c = 0$ ist $f(z_1) = f(z_2) = \infty$ und somit $[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = 1 = [z_1, z_2, z_3, z_4]$.

Sei $z_1 = z_3 = \infty$, dann folgt die Aussage in beiden Fällen mit ähnlicher Rechnung wie oben.

(iv) Analog zu den bisher gezeigten Fällen, rechnet man auch alle weiteren Fälle nach.

Damit erhält man schließlich für alle $z_k \in \mathbb{C}_\infty$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ die Aussage $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)]$.

(zu b) Wir konstruieren eine Möbius-Transformation f mit $f(z_j) = w_j$ $(j = 1, 2, 3)$. Dazu betrachten wir das Doppelverhältnis $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ als Funktion τ in z, d.h.

$$\tau(z) := [z_1, z_2, z_3, z] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z)}{(z_1 - z)(z_2 - z_3)} = \frac{-(z_1 - z_3) \cdot z + (z_1 - z_3)z_2}{-(z_2 - z_3) + (z_2 - z_3)z_1}$$

Mit der zugeordneten Matrix $T := \left(\begin{smallmatrix} -(z_1-z_3) & (z_1-z_3)z_2 \\ -(z_2-z_3) & (z_2-z_3)z_1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\det(T) = (z_1 - z_3)(z_2 - z_3)(z_2 - z_1) \neq 0$, da $z_1 \neq z_2$ vorausgesetzt war, ist τ wieder eine Möbius-Transformation. Dabei gilt $\tau(z_1) = \infty$, $\tau(z_2) = 0$ und $\tau(z_3) = 1$. Sei σ nun das Doppelverhältnis der w_k und z als Funktion in z aufgefasst:

$$\sigma(z) := [w_1, w_2, w_3, z] = \frac{-(w_1 - w_3) \cdot z + (w_1 - w_3)w_2}{-(w_2 - w_3) + (w_2 - w_3)w_1}$$

Mit der gleichen Überlegung wie für τ ist auch σ wieder eine Möbius-Transformation mit der zugeordneten Matrix $S := \left(\begin{smallmatrix} -(w_1-w_3) & (w_1-w_3)w_2 \\ -(w_2-w_3) & (w_2-w_3)w_1 \end{smallmatrix}\right)$. Mit

$$S^{-1} = \frac{1}{w_1 + w_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{w_1-w_3} & -\frac{w_2}{w_2-w_3} \\ \frac{1}{w_1-w_3} & -\frac{1}{w_2-w_3} \end{pmatrix}$$

ist σ^{-1} wieder eine Möbius-Transformation und die Verkettung $\sigma^{-1} \circ \tau$ ist gegeben durch die Matrix

$$S^{-1} \cdot T = \frac{1}{w_1 + w_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{w_1-w_3} & -\frac{w_2}{w_2-w_3} \\ \frac{1}{w_1-w_3} & -\frac{1}{w_2-w_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(z_1 - z_3) & (z_1 - z_3)z_2 \\ -(z_2 - z_3) & (z_2 - z_3)z_1 \end{pmatrix} = \dots$$

Die zugehörige Möbius-Transformation $f := \sigma^{-1} \circ \tau$ erfüllt dann (wie man mit tausend mal mehr nachrechnen einsehen kann) gerade die Bedingungen $f(z_k) = w_k$ $(k = 1, 2, 3)$ und $[z_1, z_2, z_3, z] = [w_1, w_2, w_3, z]$.

Lemma 3.1. *Sei f eine Möbius-Transformation gegeben durch $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{C}_\infty$) mit $f \neq \mathrm{id}$. Dann hat f höchstens zwei Fixpunkte.*

Beweis. Die Fälle $c = 0$ und $a = 0$ sind klar. Betrachte die Fixpunktgleichung $z = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Umstellen ergibt die Polynomgleichung zweiten Grades

$$z(cz + c) = cz^2 + cz = az + b \;\;\Leftrightarrow\;\; 0 = c \cdot z^2 + (c - a)z - b$$

die nach dem Fundamentalsatz der Algebra höchstens zwei verschiedene Lösungen besitzt. Damit kann die Möbius-Transformation f maximal zwei Fixpunkte besitzen. □

Sei nun $\widetilde{f}$ eine weitere Möbius-Transformation, die die Interpolationsbedingungen erfüllt. Dann ist $f^{-1}(\widetilde{f}(z_k)) = f^{-1}(w_k) = z_k$ für alle $k = 1, 2, 3$. Somit hat $f^{-1} \circ \widetilde{f}$ also drei Fixpunkte. Jedoch kann eine Möbius-Transformation nur zwei Fixpunkte besitzen, wenn sie nicht die Identität ist. Somit muss $f^{-1} \circ \widetilde{f} = \mathrm{id}$ gelten, was äquivalent zu $\widetilde{f} = f$ ist. Somit ist das die Interpolationsbedingungen erfüllende f eindeutig bestimmt.

Aufgabe 3.2. Für $z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ sei der Hauptwert $\operatorname{Arg}(z)$ des Argumentes von z festgelegt durch $-\pi < \operatorname{Arg}(z) < \pi$ (Das Argument φ von z ist modulo 2π definiert durch $z = |z| + e^{i\varphi}$). Wir definieren $\operatorname{Ln}\colon \Omega \to \mathbb{C}$ durch

$$\operatorname{Ln}(z) := \ln|z| + \imath \cdot \operatorname{Arg}(z) \qquad \text{(Hauptzweig des Logarithmus)}$$

Beweisen Sie:

(a) Ln ist die Umkehrfunktion von $\exp\colon \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\} \to \Omega$.

(b) Ln ist holomorph. (Hinweis: Aufgabe 2.3)

(zu a) Sei $z \in \Omega$. Dann existiert $\varphi \in (-\pi, \pi)$, sodass $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$, d.h. $\varphi = \operatorname{Arg}(z)$. Es ist $\operatorname{Im}(\operatorname{Ln}(z)) = \operatorname{Arg}(z) = \varphi \in (-\pi, \pi)$. Somit können wir exp anwenden und erhalten

$$\exp(\operatorname{Ln}(z)) = \exp(\ln|z|) \cdot \exp(\imath \cdot \varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi} = z$$

Umgekehrt sei $z \in \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$. Dann gilt mit $z = a + b\imath$ und $b \in (-\pi, \pi)$ auch $\exp(a + b\imath) = \exp(a) \cdot \exp(b\imath) \in \Omega$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}(\exp(a + b\imath)) &= \operatorname{Arg}(\exp(a) \cdot \exp(b\imath)) = b \\ \ln|\exp(a + b\imath)| &= \ln(\exp(a)) \cdot \ln|\exp(b\imath)| = a \end{aligned}$$

und schließlich

$$\operatorname{Ln}(\exp(z)) = \ln|\exp(a + b\imath)| + \imath \cdot \operatorname{Arg}(\exp(a + b\imath)) = a + b\imath = z$$

Somit ist $\exp \circ \operatorname{Ln} = \mathrm{id} = \operatorname{Ln} \circ \exp$ und Ln die Umkehrung von exp als Abbildungen zwischen Ω und $\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$.

(zu b) Wir wissen, dass exp auf $\mathbb{C}$ stetig und holomorph ist mit $\exp'(z_0) = \exp(z_0) \neq 0$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$. Nach Aufgabe 2.3 existieren dann offene Umgebungen U von z_0 und V von $\exp(z_0)$, sodass $\exp\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Wir wissen außerdem, dass exp auf $\Omega' := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$ injektiv ist, d.h. wir können jede beliebige offene Umgebung $U \subseteq \Omega'$ mit $z_0 \in U$ wählen und erhalten mit $V = \exp(U) \subseteq \Omega$ eine offene Umgebung von $\exp(z_0)$. Somit ist die Umkehrabbildung $\operatorname{Ln}\colon V \to U$ auf allen offenen $V \subseteq \Omega$ holomorph, d.h. auch auf Ω selbst.

Aufgabe 3.3. (a) Finden Sie $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, sodass $\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) \neq \mathrm{Ln}(z_1) + \mathrm{Ln}(z_2)$.

(b) Sei $z_1 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ mit $\mathrm{Re}(z_1) = 0$ und $\mathrm{Im}(z_1) > 0$. Finden Sie alle $z_2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, für die $\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}(z_1) + \mathrm{Ln}(z_2)$ gilt.

(zu a) Sei $z_1 = \imath$ und $z_2 = \imath - 1$. Dann sind offensichtlich $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Ln}(\imath) &= \ln|\imath| + \imath \cdot \mathrm{Arg}(\imath) = 0 + \imath \cdot \frac{\pi}{2} \\ \mathrm{Ln}(\imath - 1) &= \ln|\imath - 1| + \imath \cdot \mathrm{Arg}(\imath - 1) = \ln(\sqrt{2}) + \imath \cdot \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned} \mathrm{Ln}(\imath \cdot (\imath - 1)) &= \mathrm{Ln}(-\imath - 1) = \ln|i + 1| + \imath \cdot \mathrm{Arg}(-\imath - 1) = \ln(\sqrt{2}) - \imath \cdot \frac{3}{4}\pi \\ \mathrm{Ln}(i) + \mathrm{Ln}(i - 1) &= \ln(\sqrt{2}) + \imath \cdot \frac{3}{4}\pi + \imath \cdot \frac{\pi}{2} = \ln(\sqrt{2}) + \imath \cdot \frac{5}{4}\pi \end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{Ln}(\imath) + \mathrm{Ln}(\imath - 1) - \mathrm{Ln}(\imath \cdot (\imath - 1)) = \imath \cdot \frac{1}{2}\pi \neq 0$ ist $\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) \neq \mathrm{Ln}(z_1) + \mathrm{Ln}(z_2)$.

(zu b) Sei $z_k = r_k \cdot e^{\imath \varphi_k}$ für $k = 1, 2$ und wegen $\mathrm{Re}(z_1) = 0$ sowie $\mathrm{Im}(z_1) > 0$ gilt $r_1 > 0$ und $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$. Notiere daher im Folgenden $\varphi := \varphi_2$. Es gilt

$$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \ln\left|r_1 r_2 \cdot e^{\imath(\varphi + \frac{\pi}{2})}\right| + \imath \cdot \mathrm{Arg}\left(r_1 r_2 \cdot e^{\imath(\varphi + \frac{\pi}{2})}\right) = \ln|r_1 r_2| + \imath \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \mod 2\pi\right)$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{Ln}(z_1) + \mathrm{Ln}(z_2) &= \ln\left|r_1 e^{i\frac{\pi}{2}}\right| + \imath \cdot \mathrm{Arg}\left(r_1 e^{i\frac{\pi}{2}}\right) + \ln\left|r_2 e^{i\varphi}\right| + \imath \cdot \mathrm{Arg}\left(r_2 e^{i\varphi}\right) \\ &= \ln|r_1 r_2| + \imath \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \end{aligned}$$

Setzen wir nun beide Ausdrücke gleich, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \ln|r_1 r_2| + \imath \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \mod 2\pi\right) &= \ln|r_1 r_2| + \imath \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \\ \Leftrightarrow \qquad \varphi + \frac{\pi}{2} \mod 2\pi &= \frac{\pi}{2} + \varphi \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird für alle $\varphi + \frac{\pi}{2} \in (-\pi, \pi)$ erfüllt. Da aber auch $\varphi \in (-\pi, \pi)$ als Hauptwert gilt, schränkt sich diese beiden Bedingungen gegenseitig ein zu $\varphi \in \left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right)$. Somit gilt die Gleichheit der zu zeigenden Aussage für alle $z_2 = |z_2| \cdot e^{\imath\varphi}$ mit $\varphi \in \left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right)$

Hausaufgaben

Eric Kunze

Funktionentheorie – Übungsblatt 4

Matr.-Nr. 4679202

Aufgabe 4.1. Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma |z| \cdot \overline{z} \mathrm{d}z$ folgende Wege γ mit Anfangspunkt -1 und Endpunkt $+1$.

(a) geradlinige Verbindung
(b) obere Halbkreislinie
(c) untere Halbkreislinie

(zu a) Sei $f(z) := |z| \cdot \overline{z}$. Parametrisiere die geradlinige Verbindungsstrecke durch den Weg $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = t$ für alle $t \in [-1,1]$. Dann ist $\gamma'(t) = 1$ für $t \in [-1,1]$ und $f(\gamma(t)) = |t| \cdot \overline{t} = \operatorname{sgn}(t) \cdot t^2$, da $t \in [-1,1] \subset \mathbb{R}$. Somit gilt also

$$\int_\gamma |z|\,\overline{z}\ \mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(t) \cdot t^2\ \mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} -t^2\ \mathrm{d}t + \int_0^1 t^2\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{3}t^2\right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

(zu b) Parametrisiere den Weg durch $\gamma\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = -e^{-\imath t}$. Dann ist $\gamma'(t) = \imath e^{-\imath t}$ und $f(\gamma(t)) = |\gamma(t)| \cdot \overline{\gamma(t)} = |-e^{-\imath t}| \cdot (-e^{\imath t}) = -e^{\imath t}$. Somit gilt

$$\int_\gamma |z|\,\overline{z}\ \mathrm{d}z = \int_0^\pi -e^{\imath t} \cdot \imath e^{-\imath t}\ \mathrm{d}t = -\imath \cdot \int_0^\pi 1\ \mathrm{d}t = -\pi\imath$$

(zu c) Parametrisiere den Weg durch $\gamma\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = -e^{\imath t}$. Dann ist $\gamma'(t) = -\imath e^{\imath t}$ und $f(\gamma(t)) = |\gamma(t)| \cdot \overline{\gamma(t)} = |-e^{\imath t}| \cdot (-e^{-\imath t}) = -e^{-\imath t}$. Somit gilt

$$\int_\gamma |z|\,\overline{z}\ \mathrm{d}z = \int_0^\pi -e^{-\imath t} \cdot \left(-\imath e^{\imath t}\right)\ \mathrm{d}t = \imath \cdot \int_0^\pi 1\ \mathrm{d}t = \pi\imath$$

Aufgabe 4.2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, f' stetig und γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in Ω. Zeigen Sie: $f \circ \gamma$ ist ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in $\mathbb{C}$ und für $g\colon \operatorname{Im}(f \circ \gamma) \to \mathbb{C}$ stetig gilt

$$\int_{f\circ\gamma} g(w)\ \mathrm{d}w = \int_\gamma g(f(z)) \cdot f'(z)\ \mathrm{d}z$$

Sei γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg auf dem Intervall $[a,b]$, d.h. es existiert eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, sodass $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ für alle $i \in \{1,\dots,n-1\}$ stetig differenzierbar ist. Da f als holomorphe Funktion stetig ist und γ ein Weg, ist insbesondere auch $f \circ \gamma$ stetig, also ein Weg. Wir betrachten ein fixiertes Intervall $[t_i, t_{i+1}]$. Dort ist $f \circ \gamma$ nach Kettenregel differenzierbar mit $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$. Aufgrund der Stetigkeit von f' und γ' auf dem oben gewählten Intervall, ist auch $(f \circ \gamma)'$ stetig. Diese Betrachtung kann für jedes $i \in \{1,\dots,n-1\}$ ausgeführt werden mit dem Ergebnis, dass $f \circ \gamma$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg ist. Mit der oben ausgeführten Kettenregel und der Definition für Integrale über stückweise stetig differenzierbare Wege aus der Vorlesung gilt

$$\begin{aligned}
\int_{f\circ\gamma} g(w)\ \mathrm{d}w &= \int_a^b g(f(\gamma(t)))\cdot(f\circ\gamma)'(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b (g\circ(f\circ\gamma))(t)\cdot\big(f'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\big)\ \ \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \Big(((g\circ f)\circ\gamma)(t)\cdot f'(\gamma(t))\Big)\cdot\gamma'(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_\gamma (g\circ f)(z)\cdot f'(z)\ \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.3. Für $\sigma\in\mathbb{C}$ sei $f_\sigma\colon \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]\to\mathbb{C}$ definiert durch

$$f_\sigma(z) := \exp(\sigma\ \operatorname{Ln}(z))$$

mit dem Hauptzweig Ln des Logarithmus (siehe Aufgabe 3.2). Zeigen Sie:

(a) Für $n\in\mathbb{Z}$ gilt $f_n(z)=z^n$ $(z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0])$

(b) Für alle $\sigma,\tau\in\mathbb{C}$ gilt $f_\sigma\cdot f_\tau=f_{\sigma+\tau}$.

(c) Für $\sigma\in[-1,1]$ und $\tau\in\mathbb{C}$ gilt $f_\tau\circ f_\sigma=f_{\tau\sigma}$. Gilt dies auch für beliebige $\sigma\in\mathbb{C}$.

(d) Für $\sigma\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}_0$ hat die binomische Reihe $b_\sigma(z)=\sum_{k=0}^\infty\binom{\sigma}{k}z^k$ den Konvergenzradius 1.

(e) Für $|z|<1$ gilt $f_\sigma(1+z)=b_\sigma(z)$.

Hinweis: Taylor-Entwicklung von $z\mapsto f_\sigma(1+z)$ um $z=0$.

(zu a) Sei $\varphi=\operatorname{Arg}(z)\in(-\pi,\pi)$. Dann gilt $z=|z|\cdot e^{\imath\varphi}$.

$$f_n(z)=e^{n\cdot(\ln|z|+\imath\operatorname{Arg}(z))}=\left(e^{\ln|z|}\right)^n\cdot(e^{\imath\varphi})^n=(|z|\cdot e^{\imath\varphi})^n=z^n$$

(zu b) $(f_\sigma\cdot f_\tau)(z)=\exp(\sigma\operatorname{Ln}(z))\cdot\exp(\tau\operatorname{Ln}(z))=\exp((\sigma+\tau)\operatorname{Ln}(z))=f_{\sigma+\tau}(z)$

(zu c) Sei $\sigma\in[-1,1]$ und $\tau\in\mathbb{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(f_\tau\circ f_\sigma)(z)=e^{\tau\operatorname{Ln}\left(e^{\sigma\operatorname{Ln}(z)}\right)} &= e^{\tau\operatorname{Ln}\left(e^{\sigma\ln|z|+\sigma\imath\operatorname{Arg}(z)}\right)} \\
&= e^{\tau\ln\left|e^{\sigma\ln|z|+\sigma\imath\operatorname{Arg}(z)}\right|+\tau\imath\operatorname{Arg}\left(e^{\sigma\ln|z|+\sigma\imath\operatorname{Arg}(z)}\right)} \\
&= e^{\tau\ln\left|e^{\sigma\ln|z|}\right|+\tau\imath\operatorname{Arg}\left(e^{\sigma\imath\operatorname{Arg}(z)}\right)} && (\operatorname{Im}(\sigma)=0) \\
&= e^{\sigma\tau\ln|z|+\sigma\tau\imath\operatorname{Arg}(z)} && (\operatorname{Re}(\sigma)\le 1) \\
&= e^{\sigma\tau(\ln|z|+\imath\operatorname{Arg}(z))} \\
&= e^{\sigma\tau\operatorname{Ln}(z)}=f_{\sigma\tau}(z)
\end{aligned}$$

Da wir sowohl $\operatorname{Im}(\sigma)=0$ als auch $\operatorname{Re}(\sigma)\le 1$ ausgenutzt haben, funktioniert der Beweis nicht für alle $\sigma\in\mathbb{C}$.

(zu d) Sei $a_n := \binom{\sigma}{n} = \prod_{j=1}^{n} \frac{\sigma-j+1}{j}$. Dann gilt nach Quotientenkriterium für den Konvergenzradius R von $b_\sigma(z)$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\prod_{j=1}^{n} \frac{\sigma-j+1}{j}}{\prod_{j=1}^{n+1} \frac{\sigma-j+1}{j}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{\frac{\sigma-(n+1)+1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{\sigma-n}\right| = 1$$

(zu e) Wir betrachten die Taylor-Entwicklung von $f_\sigma(1+z)$ um $z=0$. Es gilt für die Ableitungen

$$f_\sigma^{(n)}(z) = \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \cdot \left(\frac{1}{z^n} \prod_{j=1}^{n} (\sigma - j + 1)\right)$$

Vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$:

(IA) $n = 0:$ Es ist $\exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \cdot \left(\frac{1}{z^0} \prod_{j=1}^{0} (\sigma - j + 1)\right) = \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) = f_\sigma^{(0)}(z)$.

(IS) Definiere $\varphi_\sigma(n) := \prod_{j=1}^{n} (\sigma - j + 1)$.

$$\begin{aligned}
f_\sigma^{(n+1)}(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \cdot \left(\frac{1}{z^n}\varphi_\sigma(n)\right)\right) \\
&= \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \cdot \frac{\sigma}{z} \left(\frac{1}{z^n}\varphi_\sigma(n)\right) - \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \left(\frac{n}{z^{n+1}}\varphi_\sigma(n)\right) \\
&= \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \left(\frac{\sigma}{z^{n+1}}\varphi_\sigma(n)\right) - \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \left(\frac{n}{z^{n+1}}\varphi_\sigma(n)\right) \\
&= \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \left(\frac{\sigma - n}{z^{n+1}}\varphi_\sigma(n)\right) \\
&= \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \left(\frac{1}{z^{n+1}}\varphi_\sigma(n+1)\right) \\
&= \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \left(\frac{1}{z^{n+1}} \prod_{j=1}^{n+1} (\sigma - j + 1)\right)
\end{aligned}$$

Somit ist $f_\sigma^{(n)}(1) = \varphi_\sigma(n) = \prod_{j=1}^{n} (\sigma - j + 1)$. Setzen wir dies in die Taylorreihe ein, so erhalten wir

$$f_\sigma(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_\sigma^{(n)}(1)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{\sigma - j + 1}{j} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\sigma}{n} z^n = b_\sigma(z)$$

für alle $|z| < 1$.

Hausaufgaben

Eric Kunze

Funktionentheorie – Übungsblatt 5

Matr.-Nr. 4679202

Thema: Kompakte Konvergenz, Integralberechnung, Nullhomologie & –homotopie

Aufgabe 5.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, (f_n) eine Folge von stetigen Funktionen $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) (f_n) ist kompakt konvergent gegen f, d.h. gleichmäßig konvergent auf kompakten Teilmengen von Ω: Für alle $K \subseteq \Omega$ kompakt mit $K \neq \emptyset$ gilt

$$\sup\{|f(\zeta) - f_n(\zeta)| : \zeta \in K\} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

(ii) (f_n) ist lokal gleichmäßig konvergent gegen f, d.h. für alle $z \in \Omega$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq \Omega$ von z, sodass

$$\sup\{|f(\zeta) - f_n(\zeta)| : \zeta \in U\} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

($\Rightarrow$) Sei $f_n \to f$ kompakt und $z \in \Omega$. Da Ω offen ist, existiert eine Umgebung $B_\varepsilon(z) \subseteq \Omega$ mit $\overline{B_\varepsilon(z)} \subseteq \Omega$. Da $\overline{B_\varepsilon(z)}$ beschränkt und abgeschlossen ist, ist $\overline{B_\varepsilon(z)}$ kompakt. Nach Voraussetzung konvergiert also $f_n \to f$ gleichmäßig auf $\overline{B_\varepsilon(z)}$, d.h. $\sup\left\{|f(\zeta) - f_n(\zeta)| : \zeta \in \overline{B_\varepsilon(z)}\right\} \to 0$. Somit ist auch $\sup\{|f(\zeta) - f_n(\zeta)| : \zeta \in B_\varepsilon(z)\} \to 0$ für alle $z \in \Omega$ und daher $f_n \to f$ lokal gleichmäßig.

($\Leftarrow$) Sei $f_n \to f$ lokal gleichmäßig, d.h. für jedes $z \in \Omega$ existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(z) \subseteq \Omega$ und $\sup\{|f(\zeta) - f_n(\zeta)| : \zeta \in B_\varepsilon(z)\} \to 0$. Sei nun $K \subseteq \Omega$ eine beliebige kompakte Menge und $\{B_\varepsilon(z)\}_{z \in K}$ eine offene Überdeckung von K mit $f_n \to f$ gleichmäßig auf jeder Umgebung $B_\varepsilon(z)$ $(z \in K)$. Aufgrund der Kompaktheit von K existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{B_{\varepsilon_i}(z_i)\}_{i=1}^n$. Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz existiert dann für $1 \leq i \leq n$ ein N_i, sodass $\sup\{|f(\zeta) - f_n(\zeta)| : \zeta \in B_\varepsilon(z)\} < \varepsilon$ für alle $n > N_i$. Setze nun $N := \max\{N_i : 1 \leq i \leq n\}$ und $B := \bigcup_{i=1}^n B_{\varepsilon_i}(z_i)$. Dann ist $\sup\{|f(\zeta) - f_n(\zeta)| : \zeta \in B\} < \varepsilon$ für alle $n > N$, d.h. $\sup\{|f(\zeta) - f_n(\zeta)| : \zeta \in B\} \to 0$ für $n \to \infty$. Somit konvergiert $f_n \to f$ gleichmäßig auf B, also auch auf dem beliebigen Kompaktum K und daher ist f_n kompakt konvergent gegen f.

Aufgabe 5.2. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig und die Einschränkung von f auf $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \neq 0\}$ sei holomorph. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\triangle(a,b,c)} f(z)\ \mathrm{d}z = 0$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{C}$. Mit dem Satz von Morera ist dann f holomorph.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = 0$ für jeden geschlossenen Weg $\gamma\colon [a,b] \to \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$.

Aufgabe 5.3. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

auf folgende Weise: Sei $R > 2$ und γ_R der nebenstehende geschlossene Weg. Ermitteln Sie $\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$ mithilfe der Cauchyschen Integralformel und benutze $1 + z^2 = (z+\imath)(z-\imath)$. Dann Grenzübergang $R \to \infty$.

Hier darf folgende Variante des Zentrierungslemmas ohne Beweis verwendet werden: Ist $f\colon \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > -\frac{1}{2}\right\} \setminus \{\imath\} \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt $\int_{\gamma_R} f(z) \, \mathrm{d}z = \int_{|z-\imath|=1} f(z) \, \mathrm{d}z$.

Berechnen Sie obiges Integral zur Probe auch mithilfe einer Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Parametrisiere den Weg $\gamma_R = \gamma_R^1 \dotplus \gamma_R^2$ wie folgt: $\gamma_R^1 := \mathrm{id}_{[-R,R]}$ und $\gamma_R^2(t) := R \cdot e^{\imath t}$ für $t \in [0, \pi]$. Dann gilt

$$\left| \int_{\gamma_R^2} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \right| \leq \pi R \cdot \sup\left\{ \left| \frac{1}{1+x^2} \right| : |x| = R, \mathrm{Im}(x) \geq 0 \right\} \leq \frac{\pi R}{1+R^2} \to 0 \qquad (R \to \infty)$$

Mit der Cauchyschen Integralformel (CIF) erhält man dann

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^1} \frac{1}{1+z^2} \, \mathrm{d}z \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2} \, \mathrm{d}z \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{|z-\imath|=1} \frac{1}{(z-\imath)(z+\imath)} \, \mathrm{d}z \\
&= \lim_{R\to\infty} 2\pi\imath \cdot \frac{1}{2\imath} && \text{(CIF)} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Zur Probe: Für $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist eine Stammfunktion gegeben durch $F(x) = \arctan(x)$. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} (\arctan(R) - \arctan(-R)) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Aufgabe 5.4. Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg. Zeigen Sie:

$$\gamma \text{ nullhomotop} \quad \Rightarrow \quad \gamma \text{ nullhomolog}$$

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und γ nullhomotop in Ω, d.h. homotop zu einem konstanten Weg $c\colon [0,1] \to \mathbb{C}$. Dann gilt nach einer Bemerkung der Vorlesung für alle $f\colon \Omega \to CC$ holomorph, dass $\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = \int_c f(z) \, \mathrm{d}z$. Da c konstant ist, ist

$$\int_c f(z) \, \mathrm{d}z = \int_0^1 f(c(t)) \cdot \underbrace{c'(t)}_{=0} \, \mathrm{d}t = 0$$

und somit also $\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = 0$ für alle holomorphen $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Nach Folgerung 9.4 ist dies äquivalent zur Nullhomologie von γ.

Aufgabe 5.5. Beweisen Sie das *Schwarzsche Lemma*: Sei $f\colon E \to E$ eine holomorphe Abbildung der Einheitskreisscheibe E in sich selbst mit $f(0) = 0$. Dann gilt $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in E$. Gibt es ein $z_0 \neq 0$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$ oder gilt $|f'(0)| = 1$, so ist f eine Drehung mit $f(z) = e^{\imath\theta} \cdot z$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$ und alle $z \in E$.

Wir definieren uns eine Funktion

$$g\colon E \to \mathbb{C} \text{ mit } g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{falls } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{falls } z = 0 \end{cases}$$

Damit ist g stetig, denn

$$g(0) = f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} g(z)$$

Damit ist dann auch g holomorph auf E. Für $r < 1$ gilt mit dem Maximumprinzip für $|z| \leq r$

$$|g(z)| \leq \max_{|z|=r} |g(z)| = \frac{1}{r} \cdot \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{1}{r} \leq 1$$

Somit ist also $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in E$, d.h. $\left|\frac{f(z)}{z}\right| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \leq |z|$ und $|f'(0)| \leq 1$. Ist $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \neq 0$ oder $|f'(0)| = 1$, so hat $|g|$ im Inneren von E ein lokales Maximum, was nach dem Maximumprinzip bedeutet, dass g konstant ist, d.h. $g \equiv \lambda$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ bzw. in Polardarstellung von $\lambda = e^{\imath\theta}$ mit $\theta \in \mathbb{R}$ geschrieben als $f(z) = e^{\imath\theta} \cdot z$ für alle $z \in E$.