



**TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DRESDEN**

---

**Fakultät Mathematik** Institut für Analysis, Professur für Dynamik und Steuerung

---

# FUNKTIONENTHEORIE

*Übungen*

**Prof. Dr. Stefan Siegmund**

Sommersemester 2020

Autor : Eric Kunze  
E-Mail : [eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de](mailto:eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de)

### Thema: Komplexe Zahlen & Differenzierbarkeit

**Aufgabe 1.1.** Wo liegen in der Gaußschen Zahlenebene diejenigen Punkte  $z$ , für die gilt

- (a)  $0 < \operatorname{Re}(iz) < 2\pi$
- (b)  $|z - z_1| = |z - z_2|$  ( $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gegeben)
- (c)  $|z| + \operatorname{Re}(z) < 1$
- (d)  $z^5 = 1$
- (e)  $z = 3 - i + 5e^{it}$  ( $0 \leq t \leq \pi$ )
- (f)  $z = te^{it}$  ( $t \geq 0$ )

(zu a) Mit  $z = a + bi$  ist  $i \cdot z = -b + ai$ , d.h.  $\operatorname{Re}(i \cdot z) = -\operatorname{Im}(z)$ .

(zu b) Der Term  $|z - z_1|$  beschreibt den Abstand zwischen  $z$  und  $z_1$ , d.h.  $|z - z_1| = |z - z_2|$  beschreibt alle Punkte, die von  $z_1$  und  $z_2$  den gleichen Abstand haben. Dies sind alle Punkte, die auf der Geraden mit Normale  $n = \overline{z_1 z_2}$  liegen, d.h.  $z$  erfülle die Bedingung  $\left\langle n, \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 - z \right\rangle = 0$ , wobei  $z, z_1, z_2$  als Punkte im  $\mathbb{R}^2$  mit dem Standardskalarprodukt zu verstehen sind.

(zu c) Sei  $z = a + bi$ , dann lässt sich die Gleichung schreiben als

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + b^2} + a < 1 &\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} < 1 - a \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 < 1 - 2a + a^2 \\ &\Leftrightarrow b^2 < 1 - 2a \\ &\Leftrightarrow |b| < \sqrt{1 - 2a} \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{1 - 2a} < b < \sqrt{1 - 2a}\end{aligned}$$

Somit liegen alle gültigen  $z$  in dem von einer nach links geöffneten Parabel mit Scheitelpunkt in  $(1/2, 0)$  eingeschlossenen Bereich.

(zu d) Die Einheitswurzeln liegen stets auf dem Einheitskreis. Insbesondere bilden die fünften Einheitswurzeln ein Fünfeck, wobei ein Eckpunkt auf der Realachse liegt (da stets  $1^5 = 1$ ). Außerdem lassen sich alle Lösungen dieser Gleichung explizit angeben mit

$$z_k = \exp\left(\frac{2\pi i \cdot k}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi \cdot k}{5}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot k}{5}\right) \quad (k = 0, 1, \dots, 4)$$

(zu e) Wir schreiben  $z = 3 - i + 5e^{it} = 3 + 5\cos(t) + i \cdot (5\sin(t) - 1)$ . Damit erhalten wir eine Parameterdarstellung eines Kreises mit Radius 5 und Zentrum  $(3, -1)$ . Da  $t \in [0, \pi]$  liegen alle  $z$  nur auf dem oberen Halbkreis.

(zu f) Der Ausdruck  $r \cdot e^{it}$  beschreibt einen Kreis mit Radius  $r$  um den Ursprung. Da  $t$  den Winkel zur Realachse beschreibt, wird der Radius von  $t \cdot e^{it}$  mit wachsendem Winkel größer, d.h. es ergibt sich eine (unendliche) Spirale.

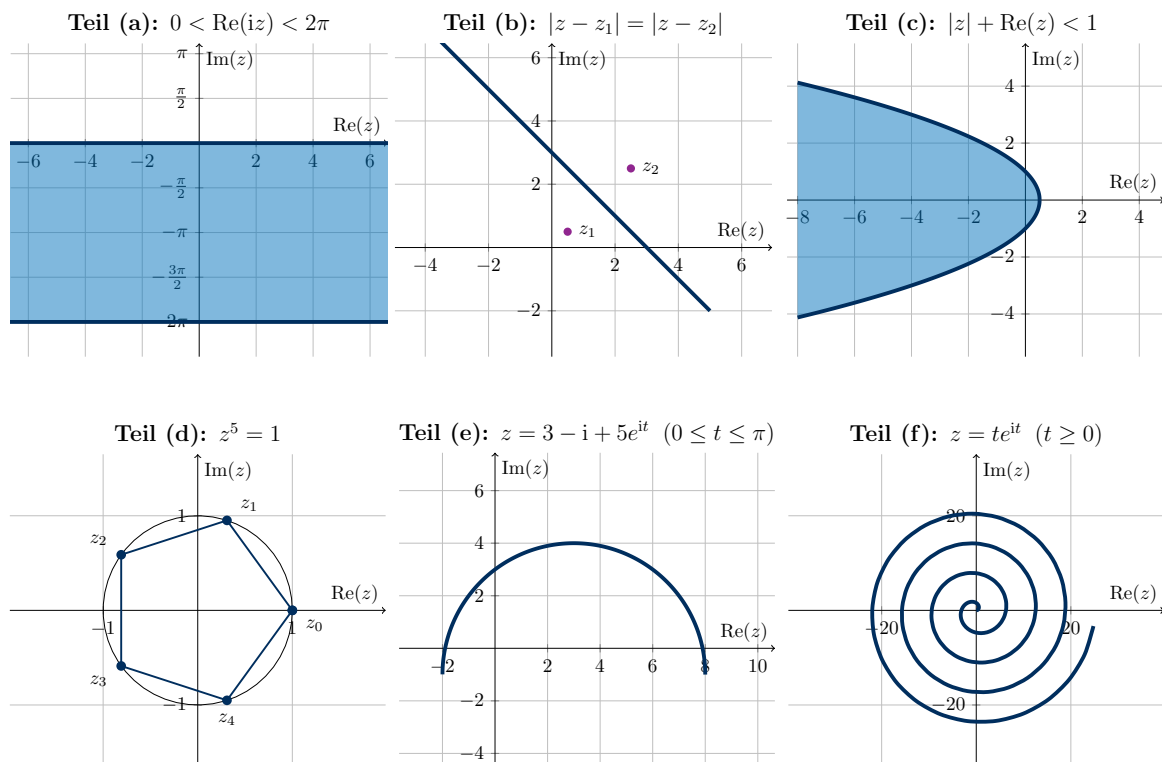


Abbildung 1.1: Darstellungen zu Aufgabe 1.1

**Aufgabe 1.2.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .

- (a) Zeigen Sie:  $f$  ist genau dann in  $z_0$  differenzierbar, wenn es  $a \in \mathbb{C}$  und  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = 0$  gibt, sodass

$$f(z) = f(z_0) + a(z - z_0) + |z - z_0| \varphi(z) \quad (z \in \Omega)$$

gilt. Es ist dann  $f'(z_0) = a$ .

- (b) Sei  $\Omega' \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $g: \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(\Omega) \subseteq \Omega'$  und seien  $f$  in  $z_0$  und  $g$  in  $f(z_0)$  differenzierbar. Zeigen Sie, dass  $g \circ f$  in  $z_0$  differenzierbar ist und dass

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

gilt (Kettenregel).

(zu a)  $(\Rightarrow)$   $f$  sei komplex differenzierbar in  $z_0$ , d.h.  $f'(z_0)$  existiert. Definieren wir  $a := f'(z_0)$  und

$$\varphi(z) := \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \cdot \tilde{\varphi}(z) \quad \text{mit} \quad \tilde{\varphi}(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & f(z_0) + a(z - z_0) + |z - z_0| \varphi(z) \\ = & f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + |z - z_0| \cdot \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \cdot \left( \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right) \\ = & f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) \\ = & f(z) \end{aligned}$$

Außerdem gilt aufgrund der Differenzierbarkeit von  $f$  auch  $\tilde{\varphi}(z) \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow z_0$  sowie

$$\left| \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \right| = \frac{|z - z_0|}{|z - z_0|} = 1$$

und somit ist der Ausdruck  $\frac{z - z_0}{|z - z_0|}$  beschränkt. Schließlich dominiert somit  $\tilde{\varphi}$  die Konvergenz von  $\varphi$  und es gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = 0$$

$(\Leftarrow)$  Es existieren  $a \in \mathbb{C}$  und  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\varphi(z) \rightarrow 0$  und  $f(z) = f(z_0) + a \cdot f'(z_0)(z - z_0) + |z - z_0| \cdot \varphi(z)$ . Daraus lässt sich umstellen

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= a + \varphi(z) \cdot |z - z_0| \cdot \frac{\overline{z - z_0}}{\overline{z - z_0}} \\ &= a + \varphi(z) \cdot (z - z_0) \cdot \frac{\overline{z - z_0}}{|z - z_0|} \quad \left( \frac{|z|}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|} \right) \\ \Rightarrow \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= a + \varphi(z) \cdot \frac{\overline{z - z_0}}{|z - z_0|} \end{aligned}$$

Somit ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a + \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{\varphi(z) \cdot \frac{\overline{z - z_0}}{|z - z_0|}}_{=: \tilde{\varphi}(z)}$$

Wie oben ist

$$\left| \frac{\overline{z - z_0}}{|z - z_0|} \right| = \frac{|z - z_0|}{|z - z_0|} = 1$$

und somit dominiert  $\varphi$  den Ausdruck  $\tilde{\varphi}$  zu Null, d.h.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a + \lim_{z \rightarrow z_0} \tilde{\varphi}(z) = a \Rightarrow a = f'(z_0)$$

(zu b) Es seien  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  in  $z_0$  und  $g: \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$  in  $f(z_0)$  komplex differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{f(z) - f(z_0)} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{f(z) - f(z_0)} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= g'(f(z_0)) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (g \text{ diffbar in } f(z_0)) \\ &= g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0) \quad (f \text{ diffbar in } z_0) \end{aligned}$$

Insbesondere existieren die Grenzwerte  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{f(z) - f(z_0)}$  und  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  und somit auch der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{z - z_0}$ , d.h.  $g \circ f$  ist komplex differenzierbar in  $z_0$ .

**Aufgabe 1.3.** Seien  $f, g, h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$\begin{aligned} f(z) &:= x^2 + y^2 \\ g(z) &:= 2xy + y + 1(x^2 - y^2 - x) \\ h(z) &:= \frac{x - iy}{1 + x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Punkte in  $\mathbb{C}$ , in denen  $f$ ,  $g$  und  $h$  komplex differenzierbar sind.

Wir zerlegen die Funktionen immer in Real- und Imaginärfunktion, d.h.  $f(z) = f(x, y) = f_1(x, y) + i \cdot f_2(x, y)$ . Damit ist  $f_1(x, y) = x^2 + y^2$  und  $f_2(x, y) = 0$ . Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} \partial_x f_1(x, y) &= 2x & \partial_y f_1(x, y) &= 2y \\ \partial_x f_2(x, y) &= 0 & \partial_y f_2(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig, somit ist  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (reell) differenzierbar. Wir prüfen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_x f_1(x, y) &= \partial_y f_2(x, y) & \Leftrightarrow & 2x = 0 & \Leftrightarrow & x = 0 \\ \partial_y f_1(x, y) &= -\partial_x f_2(x, y) & \Leftrightarrow & 2y = 0 & \Leftrightarrow & y = 0 \end{aligned}$$

Damit sind die beiden Gleichungen nur für  $z = 0$  erfüllt und  $f$  ist nur in diesem Punkt komplex differenzierbar.

Es ist  $g_1(x, y) = 2xy + y$  und  $g_2(x, y) = x^2 - y^2 - x$ . Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} \partial_x g_1(x, y) &= 2y & \partial_y g_1(x, y) &= 2x + 1 \\ \partial_x g_2(x, y) &= 2x - 1 & \partial_y g_2(x, y) &= -2y \end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig, somit ist  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (reell) differenzierbar. Wir prüfen

die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\partial_x g_1(x, y) &= \partial_y g_2(x, y) &\Leftrightarrow 2y &= -2y &\Rightarrow y &= 0 \\ \partial_y g_1(x, y) &= -\partial_x g_2(x, y) &\Leftrightarrow 2x + 1 &= -2x + 1 &\Rightarrow x &= 0\end{aligned}$$

Damit sind die beiden Gleichungen nur für  $z = 0$  erfüllt und  $g$  ist nur in diesem Punkt komplex differenzierbar.

Es ist  $h_1(x, y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$  und  $h_2(x, y) = -\frac{y}{1+x^2+y^2}$ . Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}\partial_x h_1(x, y) &= \frac{1 - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} & \partial_y h_1(x, y) &= \frac{-2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \\ \partial_x h_2(x, y) &= \frac{-2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} & \partial_y h_2(x, y) &= -\frac{1 + x^2 - y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig für  $x \neq \pm\sqrt{-y^2 - 1}$ , somit ist  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dort (reell) differenzierbar. Wir prüfen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\partial_x h_1(x, y) &= \partial_y h_2(x, y) &\Leftrightarrow \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} &= -\frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2} &\Rightarrow 1 &= -1 \\ \partial_y h_1(x, y) &= -\partial_x h_2(x, y) &\Leftrightarrow \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} &= \frac{2xy}{(1+x^2+y^2)^2} &\Rightarrow -2xy &= 2xy\end{aligned}$$

Die erste Gleichung liefert aufgrund der falschen Aussage für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  die Unlösbarkeit des Gleichungssystems. Somit ist  $h$  nirgends komplex differenzierbar.

**Aufgabe 2.1.** Sei  $\Omega := B(0, 1) \subseteq \mathbb{C}$  (Einheitskreis),  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ . Zeigen Sie: Ist  $z_0 \in \Omega$ ,  $f$  komplex differenzierbar in  $z_0$ , dann gilt  $f'(z_0) = 0$ . Ist  $f$  (in  $\Omega$ ) holomorph, so ist  $f$  konstant.

Sei  $f \simeq (u, v)$ ,  $f = u + iv$  und  $z = x + iy \simeq (x, y)$ . Wegen  $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$  ist  $v \equiv 0$ . Da  $f$  in  $z_0 = x_0 + iy_0 \simeq (x_0, y_0)$  komplex differenzierbar ist, ist  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dort auch reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen  $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) = 0$  bzw.  $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) = 0$ . Somit ist auch  $u'(z) = 0$  und somit  $f'(x_0, y_0) \simeq f'(z_0) = 0$ .

Sei  $f$  holomorph auf  $\Omega$ . Dann gilt  $f'(z) = 0$  für alle  $z \in \Omega$ , insbesondere ist  $u', v' \equiv 0$  und dann sind  $u$  und  $v$  als reelle Funktionen konstant, also auch  $f = u + iv$ .

**Aufgabe 2.2.** (a) Weisen Sie nach, dass die Funktion

$$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad u(x, y) := e^{-x}(x \cdot \cos(y) + y \cdot \sin(y))$$

der Laplace-Differentialgleichung  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$  genügt.

- (b) Bestimmen Sie eine Funktion  $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $v(0, 0) = 0$  derart, dass  $u, v$  die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllen.
- (c) Schreiben Sie  $f = u + iv$  mithilfe der komplexen Exponentialfunktionen als Funktion von  $z = x + iy$ .

(zu a) Es ist

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= -e^{-x}(x \cdot \cos(y) + y \cdot \sin(y)) + e^{-x} \cdot \cos(y) \\ &= e^{-x}((1 - x) \cos(y) - y \sin(y)) \\ u_{xx}(x, y) &= e^{-x}(x \cos(y) + y \sin(y) - 2 \cos(y)) \\ &= e^{-x}((x - 2) \cos(y) + y \sin(y)) \\ u_y(x, y) &= e^{-x}(-x \sin(y) + \sin(y) + y \cos(y)) \\ &= e^{-x}((1 - x) \sin(y) + y \cos(y)) \\ u_{yy}(x, y) &= e^{-x}(-x \cos(y) + \cos(y) + \cos(y) - y \sin(y)) \\ &= -e^{-x}((x - 2) \cos(y) + y \sin(y)) \end{aligned}$$

Damit gilt  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ .

(zu b) Es gilt  $u_x(x, y) = e^{-x}((1 - x) \cos(y) - y \sin(y))$  und nach den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen muss  $u_x = v_y$  gelten. Löse diese Differentialgleichung für fixiertes  $x$

durch Integration:

$$\begin{aligned}
 v(x, y) &= \int u_x(x, y) \, dy = \int e^{-x} ((1-x) \cos(y) - y \sin(y)) \, dy \\
 &= e^{-x} \left( (1-x) \int \cos(y) \, dy - \int y \sin(y) \, dy \right) \\
 &= e^{-x} ((1-x) \sin(y) - \sin(y) + y \cos(y) + C) \\
 &= e^{-x} (-x \sin(y) + y \cos(y) + C)
 \end{aligned}$$

Prüfen wir die zweite Cauchy-Riemann-Differentialgleichung und bestimmten  $v_x$ :

$$\begin{aligned}
 v_x &= -e^{-x} (-x \sin(y) + y \cos(y) + C) + e^{-x} (-\sin(y)) \\
 &= -e^{-x} ((1-x) \sin(y) + y \cos(y) + C) \\
 &\stackrel{!}{=} u_y(x, y) \\
 &= -e^{-x} ((1-x) \sin(y) + y \cos(y))
 \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Konstante  $C = 0$  und als Lösung  $v(x, y) = e^{-x} (y \cos(y) - x \sin(y))$ .

Auch der Anfangswert  $v(0, 0) = 1 \cdot (0 - 0) = 0$  wird erfüllt. Die Probe ergibt

$$\begin{aligned}
 v_x(x, y) &= -e^{-x} (-x \sin(y) + y \cos(y)) - e^{-x} \sin(y) \\
 &= -e^{-x} ((1-x) \sin(y) + y \cos(y)) = -u_y(x, y) \\
 v_y(x, y) &= e^{-x} ((-x \cos(y) + \cos(y) - y \sin(y))) \\
 &= e^{-x} ((1-x) \cos(y) - y \sin(y)) = u_x(x, y)
 \end{aligned}$$

also  $u_x = v_y$  und  $u_y = -v_x$ .

(zu c) Sei  $z = x + iy$ .


$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= u(x, y) + i \cdot v(x, y) \\
 &= e^{-x} (x \cdot \cos(y) + y \cdot \sin(y) - i \cdot x \sin(y) + i \cdot y \cos(y)) \\
 &= e^{-x} ((x + iy) \cos(y) - i \cdot (x + iy) \sin(y)) \\
 &= e^{-x} \cdot z \cdot (\cos(-y) + i \sin(-y)) \\
 &= z \cdot e^{-x} \cdot e^{-iy} \\
 &= z \cdot e^{-z} = f(z)
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.3.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $f'$  stetig,  $z_0 \in \Omega$ ,  $f'(z_0) \neq 0$ . Zeigen Sie: Es gibt offene Umgebungen  $U \subseteq \Omega$  von  $z_0$  und  $V \subseteq \mathbb{C}$  von  $f(z_0)$ , sodass  $f: U \rightarrow V$  bijektiv und die daher existierende Abbildung  $f^{-1}: V \rightarrow U$  ebenfalls holomorph ist. Es gilt  $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$  für alle  $w \in V$ .

*Hinweis:* Betrachten Sie  $f = (f_1, f_2)$  als Abbildung von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$ . Deren Jacobi Determinante ist in  $z_0 = (x_0, y_0)$  ungleich Null. Anwendung des Satzes über die lokale Invertierbarkeit.



Wir erinnern uns gemäß Hinweis an zwei Sätze aus der Analysis 2:

**Lemma 2.1 (Satz über inverse Funktionen).** Sei  $f: U \subseteq \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  mit  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  stetig differenzierbar ( $U$  offen),  $x_0 \in U$ ,  $f'(x_0)$  regulär. Dann existiert eine offene Umgebung  $U_0 \subseteq U$  von  $x_0$ , sodass mit  $V_0 := f(U_0)$  die eingeschränkte Abbildung  $f: U_0 \rightarrow V_0$  Diffeomorphismus<sup>1</sup> ist (insbesondere ist  $V_0$  offene Umgebung von  $y_0 := f(x_0)$ ). 

**Lemma 2.2 (Ableitung der inversen Funktion).** Sei  $f: U \subseteq \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  injektiv und differenzierbar ( $D$  offen,  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ),  $f^{-1}$  differenzierbar in  $y \in \text{int}(f(D))$ . Dann ist

$$(f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y))^{-1} \quad \text{img alt="leaf icon" data-bbox="860 250 885 265"/>$$

Sei  $f = (f_1, f_2): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $z = x + iy \simeq (x, y)$  sowie  $z_0 = x_0 + iy_0 \simeq (x_0, y_0)$ . Da  $f$  holomorph ist in allen  $z_0 \in \Omega$ , ist  $f$  auch reell differenzierbar in  $(x_0, y_0)$  mit

$$f'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1(x_0, y_0) & \partial_y f_1(x_0, y_0) \\ \partial_x f_2(x_0, y_0) & \partial_y f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} =: J$$

Außerdem gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen  $\partial_x f_1(x_0, y_0) = \partial_y f_2(x_0, y_0)$  und  $\partial_y f_1(x_0, y_0) = -\partial_x f_2(x_0, y_0)$ . Damit besitzt  $J$  die Form  $J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  mit Determinante

$$\det(J) = \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$$

Angenommen es gilt  $\det(J) = a^2 + b^2 = 0$ . Dann ist  $a = 0$  und  $b = 0$ , d.h.  $f'(x_0, y_0) = 0$  im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist also  $f'(z_0) \simeq f'(x_0, y_0) \neq 0$  für alle  $z_0 \simeq (x_0, y_0) \in \Omega$ .

Außerdem ist  $f'$  stetig. Nach dem Satz über inverse Funktionen (Lemma 2.1) existiert dann eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  von  $(x_0, y_0)$ , sodass mit  $V = f(U)$  (und insbesondere  $f(x_0, y_0) \in V$ )  $f: U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus ist. Nach dem Satz über die Ableitung der inversen Funktion (Lemma 2.2) gilt dann

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x, y) &= f'(f^{-1}(x, y))^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x f_1(f^{-1}(x, y)) & \partial_y f_1(f^{-1}(x, y)) \\ \partial_x f_2(f^{-1}(x, y)) & \partial_y f_2(f^{-1}(x, y)) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\det(J(f^{-1}(x, y)))} \begin{pmatrix} \partial_y f_2(f^{-1}(x, y)) & \partial_x f_2(f^{-1}(x, y)) \\ \partial_y f_1(f^{-1}(x, y)) & \partial_x f_1(f^{-1}(x, y)) \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in V \end{aligned}$$

Aufgrund der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für  $f$  ist  $\det(J(f^{-1}(x, y))) = \partial_x f_1(f^{-1}(x, y)) \cdot \partial_y f_2(f^{-1}(x, y)) - \partial_x f_2(f^{-1}(x, y)) \cdot \partial_y f_1(f^{-1}(x, y)) \neq 0$  und

$$\begin{aligned} \partial_y f_2(f^{-1}(x, y)) &= \partial_x f_1(f^{-1}(x, y)) \\ \partial_y f_1(f^{-1}(x, y)) &= -\partial_x f_2(f^{-1}(x, y)) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> $f, f^{-1}$  stetig differenzierbar

auch die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für  $f^{-1}$ . Damit ist  $f^{-1}$  komplex differenzierbar auf dem entsprechenden  $V \subseteq \mathbb{C}$  mit der Ableitung

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(w) &= \lim_{z \rightarrow w} \frac{f^{-1}(z) - \lim_{z \rightarrow w} f^{-1}(w)}{z - w} = \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(w)}{f(f^{-1}(z)) - f(f^{-1}(w))} \\ &= \left( \lim_{z \rightarrow w} \frac{f(f^{-1}(z)) - f(f^{-1}(w))}{f^{-1}(z) - f^{-1}(w)} \right)^{-1} \\ &= \left( f'(f^{-1}(w)) \right)^{-1} \quad \forall w \in V\end{aligned}$$

**Aufgabe 3.1.** Das Doppelverhältnis  $[z_1, z_2, z_3, z_4]$  von verschiedenen Punkten  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$  ist folgendermaßen erklärt:

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} \quad z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$$

Ist  $z_j = \infty$ , so definieren wir das Doppelverhältnis als Grenzwert, z.B.

$$[\infty, z_2, z_3, z_4] := \lim_{z \rightarrow \infty} [z, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

- (a) Sei  $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  eine Möbius-Transformation. Beweisen Sie: Sind  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$  und  $z_j \neq z_k$  für  $j \neq k$ , so gilt

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)]$$

- (b) Benutzen Sie (a) um zu zeigen: Sind drei verschiedene Punkte  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$  und drei verschiedene Punkte  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$  gegeben, so existiert genau eine Möbius-Transformation  $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  mit der Eigenschaft  $f(z_j) = w_j$  für  $j = 1, 2, 3$ . Für  $z \notin \{z_1, z_2, z_3\}$  ist  $f(z)$  gegeben durch

$$[w_1, w_2, w_3, f(z)] = [z_1, z_2, z_3, z]$$

- (zu a) Sei  $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  eine Möbius-Transformation, d.h. es existieren  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  mit  $ad - bc \neq 0$ , sodass  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Wir definieren abkürzend  $\alpha(z) := cz + d$  und  $\delta := ad - bc$ . Außerdem gilt

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [z_2, z_1, z_4, z_3] = [z_3, z_4, z_1, z_2] \quad (\star)$$

- (i) Für  $x, y \in \mathbb{C}$  gilt

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \frac{ax+b}{cx+d} - \frac{ay+b}{cy+d} = \frac{(ax+b)(cy+d) - (ay+b)(cx+d)}{(cx+d)(cy+d)} \\ &= \frac{acxy + adx + bcy + bd - acxy - ady - bcx - bd}{\alpha(x)\alpha(y)} \\ &= \frac{(x-y) \cdot \delta}{\alpha(x) \cdot \alpha(y)} \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned}
[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] &= \frac{(f(z_1) - f(z_3)) \cdot (f(z_2) - f(z_4))}{(f(z_1) - f(z_4)) \cdot (f(z_2) - f(z_3))} \\
&= \frac{(z_1 - z_3) \cdot \delta \cdot (z_2 - z_4) \cdot \delta}{\alpha(z_1) \cdot \alpha(z_3) \cdot \alpha(z_2) \cdot \alpha(z_4)} \cdot \frac{\alpha(z_1) \cdot \alpha(z_4) \cdot \alpha(z_2) \cdot \alpha(z_3)}{(z_1 - z_4) \cdot \delta \cdot (z_2 - z_3) \cdot \delta} \\
&= \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} \\
&= [z_1, z_2, z_3, z_4]
\end{aligned}$$

- (ii) Genau ein  $z_k = \infty$  und  $c \neq 0$ . Wegen  $(\star)$  können wir oBdA annehmen, dass  $z_1 = \infty$ . Dann ist  $f(z_1) = \frac{a}{c}$  und es gilt

$$f(z_1) - f(z) = \frac{a}{c} - \frac{az + b}{cz + d} = \frac{acz + ad - acz - bc}{c(cz + d)} = \frac{\delta}{c \cdot \alpha(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] &= \frac{\delta(z_2 - z_4) \cdot c \cdot \alpha(z_4) \cdot c \cdot \alpha(z_2) \cdot \alpha(z_3)}{c \cdot \alpha(z_3) \cdot \alpha(z_2) \cdot \alpha(z_4) \cdot \delta \cdot (z_2 - z_3)} \\
&= \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \\
&= [z_1, z_2, z_3, z_4]
\end{aligned}$$

Für  $c = 0$  ist  $f(z_1) = \infty$  und somit  $f(z_1) - f(z) = \infty$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ , sowie  $\alpha \equiv d$ . Es gilt

$$[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = \frac{f(z_2) - f(z_4)}{f(z_2) - f(z_3)} = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \cdot \frac{\delta \cdot d^2}{\delta \cdot d^2} = [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

- (iii) Es seien  $z_1 = z_2 = \infty$ . Dann ist  $f(z_1) = f(z_2) = \frac{a}{c}$  für  $c \neq 0$ . Somit vereinfacht sich Fall (ii) weiter zu

$$\begin{aligned}
[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] &= \frac{\delta \cdot \delta}{c \cdot \alpha(z_3) \cdot c \cdot \alpha(z_4)} \cdot \frac{c \cdot \alpha(z_4) \cdot c \cdot \alpha(z_3)}{\delta \cdot \delta} \\
&= 1 \\
&= [z_1, z_2, z_3, z_4]
\end{aligned}$$

Für  $c = 0$  ist  $f(z_1) = f(z_2) = \infty$  und somit  $[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = 1 = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ .

Sei  $z_1 = z_3 = \infty$ , dann folgt die Aussage in beiden Fällen mit ähnlicher Rechnung wie oben.

- (iv) Analog zu den bisher gezeigten Fällen, rechnet man auch alle weiteren Fälle nach.

Damit erhält man schließlich für alle  $z_k \in \mathbb{C}_\infty$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) die Aussage  $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)]$ .

(zu b) Wir konstruieren eine Möbius-Transformation  $f$  mit  $f(z_j) = w_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Dazu betrachten wir das Doppelverhältnis  $[z_1, z_2, z_3, z]$  als Funktion  $\tau$  in  $z$ , d.h.

$$\tau(z) := [z_1, z_2, z_3, z] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z)}{(z_1 - z)(z_2 - z_3)} = \frac{-(z_1 - z_3) \cdot z + (z_1 - z_3)z_2}{-(z_2 - z_3) + (z_2 - z_3)z_1}$$

Mit der zugeordneten Matrix  $T := \begin{pmatrix} -(z_1 - z_3) & (z_1 - z_3)z_2 \\ -(z_2 - z_3) & (z_2 - z_3)z_1 \end{pmatrix}$  und  $\det(T) = (z_1 - z_3)(z_2 - z_3)(z_2 - z_1) \neq 0$ , da  $z_1 \neq z_2$  vorausgesetzt war, ist  $\tau$  wieder eine Möbius-Transformation. Dabei gilt  $\tau(z_1) = \infty$ ,  $\tau(z_2) = 0$  und  $\tau(z_3) = 1$ . Sei  $\sigma$  nun das Doppelverhältnis der  $w_k$  und  $z$  als Funktion in  $z$  aufgefasst:

$$\sigma(z) := [w_1, w_2, w_3, z] = \frac{-(w_1 - w_3) \cdot z + (w_1 - w_3)w_2}{-(w_2 - w_3) + (w_2 - w_3)w_1}$$


Mit der gleichen Überlegung wie für  $\tau$  ist auch  $\sigma$  wieder eine Möbius-Transformation mit der zugeordneten Matrix  $S := \begin{pmatrix} -(w_1 - w_3) & (w_1 - w_3)w_2 \\ -(w_2 - w_3) & (w_2 - w_3)w_1 \end{pmatrix}$ . Mit

$$S^{-1} = \frac{1}{w_1 + w_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{w_1 - w_3} & -\frac{w_2}{w_2 - w_3} \\ \frac{1}{w_1 - w_3} & -\frac{1}{w_2 - w_3} \end{pmatrix}$$

ist  $\sigma^{-1}$  wieder eine Möbius-Transformation und die Verkettung  $\sigma^{-1} \circ \tau$  ist gegeben durch die Matrix

$$S^{-1} \cdot T = \frac{1}{w_1 + w_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{w_1 - w_3} & -\frac{w_2}{w_2 - w_3} \\ \frac{1}{w_1 - w_3} & -\frac{1}{w_2 - w_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(z_1 - z_3) & (z_1 - z_3)z_2 \\ -(z_2 - z_3) & (z_2 - z_3)z_1 \end{pmatrix} = \dots$$

Die zugehörige Möbius-Transformation  $f := \sigma^{-1} \circ \tau$  erfüllt dann (wie man mit tausend mal mehr nachrechnen einsehen kann) gerade die Bedingungen  $f(z_k) = w_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) und  $[z_1, z_2, z_3, z] = [w_1, w_2, w_3, z]$ .

**Lemma 3.1.** Sei  $f$  eine Möbius-Transformation gegeben durch  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{C}_\infty$ ) mit  $f \neq \text{id}$ . Dann hat  $f$  höchstens zwei Fixpunkte. 

*Beweis.* Die Fälle  $c = 0$  und  $a = 0$  sind klar. Betrachte die Fixpunktgleichung  $z = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Umstellen ergibt die Polynomgleichung zweiten Grades

$$z(cz + c) = cz^2 + cz = az + b \Leftrightarrow 0 = c \cdot z^2 + (c - a)z - b$$

die nach dem Fundamentalsatz der Algebra höchstens zwei verschiedene Lösungen besitzt. Damit kann die Möbius-Transformation  $f$  maximal zwei Fixpunkte besitzen.  $\square$

Sei nun  $\tilde{f}$  eine weitere Möbius-Transformation, die die Interpolationsbedingungen erfüllt. Dann ist  $f^{-1}(\tilde{f}(z_k)) = f^{-1}(w_k) = z_k$  für alle  $k = 1, 2, 3$ . Somit hat  $f^{-1} \circ \tilde{f}$  also drei Fixpunkte. Jedoch kann eine Möbius-Transformation nur zwei Fixpunkte besitzen, wenn sie nicht die Identität ist. Somit muss  $f^{-1} \circ \tilde{f} = \text{id}$  gelten, was äquivalent zu  $\tilde{f} = f$  ist. Somit ist das die Interpolationsbedingungen erfüllende  $f$  eindeutig bestimmt.

**Aufgabe 3.2.** Für  $z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  sei der Hauptwert  $\text{Arg}(z)$  des Argumentes von  $z$  festgelegt durch  $-\pi < \text{Arg}(z) < \pi$  (Das Argument  $\varphi$  von  $z$  ist modulo  $2\pi$  definiert durch  $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$ ). Wir definieren  $\text{Ln}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\text{Ln}(z) := \ln |z| + i \cdot \text{Arg}(z) \quad (\text{Hauptzweig des Logarithmus})$$

Beweisen Sie:

- (a)  $\text{Ln}$  ist die Umkehrfunktion von  $\exp: \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im}(z) < \pi\} \rightarrow \Omega$ .
- (b)  $\text{Ln}$  ist holomorph. (Hinweis: Aufgabe 2.3)

(zu a) Sei  $z \in \Omega$ . Dann existiert  $\varphi \in (-\pi, \pi)$ , sodass  $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$ , d.h.  $\varphi = \text{Arg}(z)$ . Es ist  $\text{Im}(\text{Ln}(z)) = \text{Arg}(z) = \varphi \in (-\pi, \pi)$ . Somit können wir  $\exp$  anwenden und erhalten

$$\exp(\text{Ln}(z)) = \exp(\ln |z|) \cdot \exp(i \cdot \varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi} = z$$

Umgekehrt sei  $z \in \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$ . Dann gilt mit  $z = a + bi$  und  $b \in (-\pi, \pi)$  auch  $\exp(a + bi) = \exp(a) \cdot \exp(bi) \in \Omega$ . Somit gilt

$$\begin{aligned} \text{Arg}(\exp(a + bi)) &= \text{Arg}(\exp(a) \cdot \exp(bi)) = b \\ \ln |\exp(a + bi)| &= \ln(\exp(a)) \cdot \ln |\exp(bi)| = a \end{aligned}$$

und schließlich

$$\text{Ln}(\exp(z)) = \ln |\exp(a + bi)| + i \cdot \text{Arg}(\exp(a + bi)) = a + bi = z$$

Somit ist  $\exp \circ \text{Ln} = \text{id} = \text{Ln} \circ \exp$  und  $\text{Ln}$  die Umkehrung von  $\exp$  als Abbildungen zwischen  $\Omega$  und  $\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$ .

(zu b) Wir wissen, dass  $\exp$  auf  $\mathbb{C}$  stetig und holomorph ist mit  $\exp'(z_0) = \exp(z_0) \neq 0$  für alle  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Nach Aufgabe 2.3 existieren dann offene Umgebungen  $U$  von  $z_0$  und  $V$  von  $\exp(z_0)$ , sodass  $\exp: U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus ist. Wir wissen außerdem, dass  $\exp$  auf  $\Omega' := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$  injektiv ist, d.h. wir können jede beliebige offene Umgebung  $U \subseteq \Omega'$  mit  $z_0 \in U$  wählen und erhalten mit  $V = \exp(U) \subseteq \Omega$  eine offene Umgebung von  $\exp(z_0)$ . Somit ist die Umkehrabbildung  $\text{Ln}: V \rightarrow U$  auf allen offenen  $V \subseteq \Omega$  holomorph, d.h. auch auf  $\Omega$  selbst.

**Aufgabe 3.3.** (a) Finden Sie  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , sodass  $\text{Ln}(z_1 \cdot z_2) \neq \text{Ln}(z_1) + \text{Ln}(z_2)$ .

(b) Sei  $z_1 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  mit  $\text{Re}(z_1) = 0$  und  $\text{Im}(z_1) > 0$ . Finden Sie alle  $z_2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , für die  $\text{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \text{Ln}(z_1) + \text{Ln}(z_2)$  gilt.

(zu a) Sei  $z_1 = 1$  und  $z_2 = 1 - 1$ . Dann sind offensichtlich  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . Es gilt

$$\begin{aligned}\text{Ln}(1) &= \ln|1| + 1 \cdot \text{Arg}(1) = 0 + 1 \cdot \frac{\pi}{2} \\ \text{Ln}(1 - 1) &= \ln|1 - 1| + 1 \cdot \text{Arg}(1 - 1) = \ln(\sqrt{2}) + 1 \cdot \frac{3}{4}\pi\end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned}\text{Ln}(1 \cdot (1 - 1)) &= \text{Ln}(-1 - 1) = \ln|i + 1| + 1 \cdot \text{Arg}(-1 - 1) = \ln(\sqrt{2}) - 1 \cdot \frac{3}{4}\pi \\ \text{Ln}(i) + \text{Ln}(i - 1) &= \ln(\sqrt{2}) + 1 \cdot \frac{3}{4}\pi + 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \ln(\sqrt{2}) + 1 \cdot \frac{5}{4}\pi\end{aligned}$$

Wegen  $\text{Ln}(1) + \text{Ln}(1 - 1) - \text{Ln}(1 \cdot (1 - 1)) = 1 \cdot \frac{1}{2}\pi \neq 0$  ist  $\text{Ln}(z_1 \cdot z_2) \neq \text{Ln}(z_1) + \text{Ln}(z_2)$ .

(zu b) Sei  $z_k = r_k \cdot e^{i\varphi_k}$  für  $k = 1, 2$  und wegen  $\text{Re}(z_1) = 0$  sowie  $\text{Im}(z_1) > 0$  gilt  $r_1 > 0$  und  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ . Notiere daher im Folgenden  $\varphi := \varphi_2$ . Es gilt

$$\text{Ln}(z_1 z_2) = \ln|r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}| + 1 \cdot \text{Arg}\left(r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}\right) = \ln|r_1 r_2| + 1 \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \mod 2\pi\right)$$

und

$$\begin{aligned}\text{Ln}(z_1) + \text{Ln}(z_2) &= \ln|r_1 e^{i\frac{\pi}{2}}| + 1 \cdot \text{Arg}\left(r_1 e^{i\frac{\pi}{2}}\right) + \ln|r_2 e^{i\varphi}| + 1 \cdot \text{Arg}\left(r_2 e^{i\varphi}\right) \\ &= \ln|r_1 r_2| + 1 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\end{aligned}$$

Setzen wir nun beide Ausdrücke gleich, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\ln|r_1 r_2| + 1 \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \mod 2\pi\right) &= \ln|r_1 r_2| + 1 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \\ \Leftrightarrow \varphi + \frac{\pi}{2} \mod 2\pi &= \frac{\pi}{2} + \varphi\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird für alle  $\varphi + \frac{\pi}{2} \in (-\pi, \pi)$  erfüllt. Da aber auch  $\varphi \in (-\pi, \pi)$  als Hauptwert gilt, schränkt sich diese beiden Bedingungen gegenseitig ein zu  $\varphi \in (-\pi, \frac{\pi}{2})$ . Somit gilt die Gleichheit der zu zeigenden Aussage für alle  $z_2 = |z_2| \cdot e^{i\varphi}$  mit  $\varphi \in (-\pi, \frac{\pi}{2})$ .

**Aufgabe 4.1.** Berechnen Sie das Integral  $\int_{\gamma} |z| \cdot \bar{z} dz$  folgende Wege  $\gamma$  mit Anfangspunkt  $-1$  und Endpunkt  $+1$ .

- (a) geradlinige Verbindung
- (b) obere Halbkreislinie
- (c) untere Halbkreislinie

(zu a) Sei  $f(z) := |z| \cdot \bar{z}$ . Parametrisiere die geradlinige Verbindungsstrecke durch den Weg  $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(t) = t$  für alle  $t \in [-1, 1]$ . Dann ist  $\gamma'(t) = 1$  für  $t \in [-1, 1]$  und  $f(\gamma(t)) = |t| \cdot \bar{t} = \operatorname{sgn}(t) \cdot t^2$ , da  $t \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ . Somit gilt also

$$\int_{\gamma} |z| \bar{z} \, dz = \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(t) \cdot t^2 \, dt = \int_{-1}^0 -t^2 \, dt + \int_0^1 t^2 \, dt = \left[ -\frac{1}{3} t^3 \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

(zu b) Parametrisiere den Weg durch  $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(t) = -e^{-it}$ . Dann ist  $\gamma'(t) = ie^{-it}$  und  $f(\gamma(t)) = |\gamma(t)| \cdot \overline{\gamma(t)} = |-e^{-it}| \cdot (-e^{it}) = -e^{it}$ . Somit gilt

$$\int_{\gamma} |z| \bar{z} \, dz = \int_0^{\pi} -e^{it} \cdot ie^{-it} \, dt = -i \cdot \int_0^{\pi} 1 \, dt = -i\pi$$

(zu c) Parametrisiere den Weg durch  $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(t) = e^{it}$ . Dann ist  $\gamma'(t) = ie^{it}$  und  $f(\gamma(t)) = |\gamma(t)| \cdot \overline{\gamma(t)} = |e^{it}| \cdot (-e^{-it}) = -e^{-it}$ . Somit gilt

$$\int_{\gamma} |z| \bar{z} \, dz = \int_0^{\pi} -e^{-it} \cdot (ie^{it}) \, dt = i \cdot \int_0^{\pi} 1 \, dt = i\pi$$

**Aufgabe 4.2.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $f'$  stetig und  $\gamma$  ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in  $\Omega$ . Zeigen Sie:  $f \circ \gamma$  ist ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in  $\mathbb{C}$  und für  $g: \operatorname{Im}(f \circ \gamma) \rightarrow \mathbb{C}$  stetig gilt

$$\int_{f \circ \gamma} g(w) \, dw = \int_{\gamma} g(f(z)) \cdot f'(z) \, dz$$

Sei  $\gamma$  ein stückweise stetig differenzierbarer Weg auf dem Intervall  $[a, b]$ , d.h. es existiert eine Unterteilung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , sodass  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  für alle  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  stetig differenzierbar ist. Da  $f$  als holomorphe Funktion stetig ist und  $\gamma$  ein Weg, ist insbesondere auch  $f \circ \gamma$  stetig, also ein Weg. Wir betrachten ein fixiertes Intervall  $[t_i, t_{i+1}]$ . Dort ist  $f \circ \gamma$  nach Kettenregel differenzierbar mit  $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $f'$  und  $\gamma'$  auf dem oben gewählten Intervall, ist auch  $(f \circ \gamma)'$  stetig. Diese Betrachtung kann für jedes  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  ausgeführt werden mit dem Ergebnis, dass  $f \circ \gamma$  ein stückweise stetig differenzierbarer Weg ist. Mit der oben ausgeführten Kettenregel und der Definition für Integrale



über stückweise stetig differenzierbare Wege aus der Vorlesung gilt

$$\begin{aligned}
 \int_{f \circ \gamma} g(w) \, dw &= \int_a^b g(f(\gamma(t))) \cdot (f \circ \gamma)'(t) \, dt \\
 &= \int_a^b (g \circ (f \circ \gamma))(t) \cdot (f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)) \, dt \\
 &= \int_a^b \left( ((g \circ f) \circ \gamma)(t) \cdot f'(\gamma(t)) \right) \cdot \gamma'(t) \, dt \\
 &= \int_{\gamma} (g \circ f)(z) \cdot f'(z) \, dz
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 4.3.** Für  $\sigma \in \mathbb{C}$  sei  $f_{\sigma}: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$f_{\sigma}(z) := \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z))$$

mit dem Hauptzweig  $\operatorname{Ln}$  des Logarithmus (siehe Aufgabe 3.2). Zeigen Sie:

- (a) Für  $n \in \mathbb{Z}$  gilt  $f_n(z) = z^n$  ( $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ )
- (b) Für alle  $\sigma, \tau \in \mathbb{C}$  gilt  $f_{\sigma} \cdot f_{\tau} = f_{\sigma+\tau}$ .
- (c) Für  $\sigma \in [-1, 1]$  und  $\tau \in \mathbb{C}$  gilt  $f_{\tau} \circ f_{\sigma} = f_{\tau\sigma}$ . Gilt dies auch für beliebige  $\sigma \in \mathbb{C}$ .
- (d) Für  $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$  hat die binomische Reihe  $b_{\sigma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\sigma}{k} z^k$  den Konvergenzradius 1.
- (e) Für  $|z| < 1$  gilt  $f_{\sigma}(1+z) = b_{\sigma}(z)$ .

Hinweis: Taylor-Entwicklung von  $z \mapsto f_{\sigma}(1+z)$  um  $z = 0$ .

(zu a) Sei  $\varphi = \operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi)$ . Dann gilt  $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$ .

$$f_n(z) = e^{n \cdot (\ln|z| + i \operatorname{Arg}(z))} = \left(e^{\ln|z|}\right)^n \cdot (e^{i\varphi})^n = (|z| \cdot e^{i\varphi})^n = z^n$$

(zu b)  $(f_{\sigma} \cdot f_{\tau})(z) = \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \cdot \exp(\tau \operatorname{Ln}(z)) = \exp((\sigma + \tau) \operatorname{Ln}(z)) = f_{\sigma+\tau}(z)$

(zu c) Sei  $\sigma \in [-1, 1]$  und  $\tau \in \mathbb{C}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 (f_{\tau} \circ f_{\sigma})(z) &= e^{\tau \operatorname{Ln}(e^{\sigma \operatorname{Ln}(z)})} = e^{\tau \operatorname{Ln}(e^{\sigma \ln|z| + \sigma i \operatorname{Arg}(z)})} \\
 &= e^{\tau \ln|e^{\sigma \ln|z| + \sigma i \operatorname{Arg}(z)}| + \tau i \operatorname{Arg}(e^{\sigma \ln|z| + \sigma i \operatorname{Arg}(z)})} \\
 &= e^{\tau \ln|e^{\sigma \ln|z|}| + \tau i \operatorname{Arg}(e^{\sigma i \operatorname{Arg}(z)})} && (\operatorname{Im}(\sigma) = 0) \\
 &= e^{\sigma \tau \ln|z| + \sigma \tau i \operatorname{Arg}(z)} && (\operatorname{Re}(\sigma) \leq 1) \\
 &= e^{\sigma \tau (\ln|z| + i \operatorname{Arg}(z))} \\
 &= e^{\sigma \tau \operatorname{Ln}(z)} = f_{\sigma\tau}(z)
 \end{aligned}$$

Da wir sowohl  $\operatorname{Im}(\sigma) = 0$  als auch  $\operatorname{Re}(\sigma) \leq 1$  ausgenutzt haben, funktioniert der Beweis nicht für alle  $\sigma \in \mathbb{C}$ .

(zu d) Sei  $a_n := \binom{\sigma}{n} = \prod_{j=1}^n \frac{\sigma-j+1}{j}$ . Dann gilt nach Quotientenkriterium für den Konvergenzradius  $R$  von  $b_\sigma(z)$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\prod_{j=1}^n \frac{\sigma-j+1}{j}}{\prod_{j=1}^{n+1} \frac{\sigma-j+1}{j}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\frac{\sigma-(n+1)+1}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{\sigma-n} \right| = 1$$

(zu e) Wir betrachten die Taylor-Entwicklung von  $f_\sigma(1+z)$  um  $z=0$ . Es gilt für die Ableitungen

$$f_\sigma^{(n)}(z) = \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \cdot \left( \frac{1}{z^n} \prod_{j=1}^n (\sigma-j+1) \right)$$

Vollständige Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ :

**(IA)**  $n=0$  : Es ist  $\exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \cdot \left( \frac{1}{z^0} \prod_{j=1}^0 (\sigma-j+1) \right) = \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) = f_\sigma^{(0)}(z)$ .

**(IS)** Definiere  $\varphi_\sigma(n) := \prod_{j=1}^n (\sigma-j+1)$ .

$$\begin{aligned} f_\sigma^{(n+1)}(z) &= \frac{d}{dz} \left( \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \cdot \left( \frac{1}{z^n} \varphi_\sigma(n) \right) \right) \\ &= \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \cdot \frac{\sigma}{z} \left( \frac{1}{z^n} \varphi_\sigma(n) \right) - \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \left( \frac{n}{z^{n+1}} \varphi_\sigma(n) \right) \\ &= \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \left( \frac{\sigma}{z^{n+1}} \varphi_\sigma(n) \right) - \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \left( \frac{n}{z^{n+1}} \varphi_\sigma(n) \right) \\ &= \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \left( \frac{\sigma-n}{z^{n+1}} \varphi_\sigma(n) \right) \\ &= \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \left( \frac{1}{z^{n+1}} \varphi_\sigma(n+1) \right) \\ &= \exp(\sigma \operatorname{Ln}(z)) \left( \frac{1}{z^{n+1}} \prod_{j=1}^{n+1} (\sigma-j+1) \right) \end{aligned}$$

Somit ist  $f_\sigma^{(n)}(1) = \varphi_\sigma(n) = \prod_{j=1}^n (\sigma-j+1)$ . Setzen wir dies in die Taylorreihe ein, so erhalten wir

$$f_\sigma(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_\sigma^{(n)}(1)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{j=1}^n \frac{\sigma-j+1}{j} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\sigma}{n} z^n = b_\sigma(z)$$

für alle  $|z| < 1$ .

Thema: Kompakte Konvergenz, Integralberechnung, Nullhomologie & -homotopie

**Aufgabe 5.1.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $(f_n)$  eine Folge von stetigen Funktionen  $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (i)  $(f_n)$  ist kompakt konvergent gegen  $f$ , d.h. gleichmäßig konvergent auf kompakten Teilmengen von  $\Omega$ : Für alle  $K \subseteq \Omega$  kompakt mit  $K \neq \emptyset$  gilt

$$\sup \{|f(\zeta) - f_n(\zeta)| : \zeta \in K\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

- (ii)  $(f_n)$  ist lokal gleichmäßig konvergent gegen  $f$ , d.h. für alle  $z \in \Omega$  gibt es eine Umgebung  $U \subseteq \Omega$  von  $z$ , sodass

$$\sup \{|f(\zeta) - f_n(\zeta)| : \zeta \in U\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

( $\Rightarrow$ ) Sei  $f_n \rightarrow f$  kompakt und  $z \in \Omega$ . Da  $\Omega$  offen ist, existiert eine Umgebung  $B_\varepsilon(z) \subseteq \Omega$  mit  $\overline{B_\varepsilon(z)} \subseteq \Omega$ . Da  $\overline{B_\varepsilon(z)}$  beschränkt und abgeschlossen ist, ist  $\overline{B_\varepsilon(z)}$  kompakt. Nach Voraussetzung konvergiert also  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig auf  $\overline{B_\varepsilon(z)}$ , d.h.  $\sup \{|f(\zeta) - f_n(\zeta)| : \zeta \in \overline{B_\varepsilon(z)}\} \rightarrow 0$ . Somit ist auch  $\sup \{|f(\zeta) - f_n(\zeta)| : \zeta \in B_\varepsilon(z)\} \rightarrow 0$  für alle  $z \in \Omega$  und daher  $f_n \rightarrow f$  lokal gleichmäßig.

( $\Leftarrow$ ) Sei  $f_n \rightarrow f$  lokal gleichmäßig, d.h. für jedes  $z \in \Omega$  existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $B_\varepsilon(z) \subseteq \Omega$  und  $\sup \{|f(\zeta) - f_n(\zeta)| : \zeta \in B_\varepsilon(z)\} \rightarrow 0$ . Sei nun  $K \subseteq \Omega$  eine beliebige kompakte Menge und  $\{B_\varepsilon(z)\}_{z \in K}$  eine offene Überdeckung von  $K$  mit  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig auf jeder Umgebung  $B_\varepsilon(z)$  ( $z \in K$ ). Aufgrund der Kompaktheit von  $K$  existiert eine endliche Teilüberdeckung  $\{B_{\varepsilon_i}(z_i)\}_{i=1}^n$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz existiert dann für  $1 \leq i \leq n$  ein  $N_i$ , sodass  $\sup \{|f(\zeta) - f_n(\zeta)| : \zeta \in B_{\varepsilon_i}(z_i)\} < \varepsilon$  für alle  $n > N_i$ . Setze nun  $N := \max \{N_i : 1 \leq i \leq n\}$  und  $B := \bigcup_{i=1}^n B_{\varepsilon_i}(z_i)$ . Dann ist  $\sup \{|f(\zeta) - f_n(\zeta)| : \zeta \in B\} < \varepsilon$  für alle  $n > N$ , d.h.  $\sup \{|f(\zeta) - f_n(\zeta)| : \zeta \in B\} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Somit konvergiert  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig auf  $B$ , also auch auf dem beliebigen Kompaktum  $K$  und daher ist  $f_n$  kompakt konvergent gegen  $f$ .

**Aufgabe 5.2.** Sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und die Einschränkung von  $f$  auf  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \neq 0\}$  sei holomorph. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\Delta(a,b,c)} f(z) \, dz = 0$$

für alle  $a, b, c \in \mathbb{C}$ . Mit dem Satz von Morera ist dann  $f$  holomorph.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass  $\int_\gamma f(z) \, dz = 0$  für jeden geschlossenen Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ .

Dort ist  $f$  holomorph und nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt dann  $\int_{\gamma+\varepsilon} f(z) \, dz = 0$ .

von  $\gamma$  auf  $\mathcal{I}_i$  ist  $f \circ \gamma$  stetig auf kompaktem  $\mathcal{I}_i$  für alle  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Somit existiert

$$= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\gamma(t)) \, dt \quad (\text{majorisierte Konvergenz})$$

Es ist damit

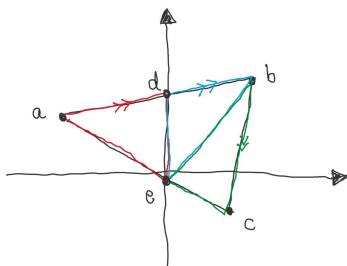
$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma + \varepsilon} f(z) \, dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b f(\gamma(t) + \varepsilon) \cdot \gamma'(t) \, dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \int_{\gamma} f(z) \, dz$$

Analog gilt dieses Resultat auch für alle Wege  $\gamma: [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{C}^-}$ .

Liegen nun  $a, b$  und  $c$  in der gleichen Halbebene  $\overline{\mathbb{C}^+}$  oder  $\overline{\mathbb{C}^-}$ , dann lässt sich das Dreieck  $\triangle(a, b, c)$

$$\int_{\Delta(a,b,c)} f(z) \, dz = \int_{\sigma_{a,b} + \sigma_{b,c} + \sigma_{c,a}} f(z) \, dz = 0$$

Nun zum schwierigeren Fall: das Dreieck erstreckt sich über beide Halbebenen. Ohne Ein-



Die Summe aller drei Wege ist wieder das originale Dreieck. Außerdem liegen alle „kleinen“ Dreiecke nur in einer von beiden Halbebenen. Definiere

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &:= \sigma_{a,d} \dot{+} \sigma_{d,e} \dot{+} \sigma_{e,a} \\ \gamma_2 &:= \sigma_{d,b} \dot{+} \sigma_{b,e} \dot{+} \sigma_{e,d} \\ \gamma_3 &:= \sigma_{b,c} \dot{+} \sigma_{c,e} \dot{+} \sigma_{e,b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \gamma_3$$

wobei  $\text{im}(\gamma_1) \subseteq \overline{\mathbb{C}^-}$  und  $\text{im}(\gamma_2), \text{im}(\gamma_3) \subseteq \overline{\mathbb{C}^+}$ . Mit dem Hinweis gilt dann

$$\int_{\gamma_i} f(z) \, dz = 0 \quad \text{für alle } i \in \{1, 2, 3\}$$

Somit ist dann auch  $\int_{\Delta(a,b,c)} f(z) \, dz = 0$ .

**Aufgabe 5.3.** Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

auf folgende Weise: Sei  $R > 2$  und  $\gamma_R$  der nebenstehende geschlossene Weg. Ermitteln Sie  $\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+x^2} \, dx$  mithilfe der Cauchyschen Integralformel und benutze  $1+z^2 = (z+1)(z-1)$ . Dann Grenzübergang  $R \rightarrow \infty$ .

Hier darf folgende Variante des Zentrierungslemmas ohne Beweis verwendet werden: Ist  $f: \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > -\frac{1}{2}\} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so gilt  $\int_{\gamma_R} f(z) \, dz = \int_{|z-1|=1} f(z) \, dz$ .

Berechnen Sie obiges Integral zur Probe auch mithilfe einer Stammfunktion von  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ .

Parametrisiere den Weg  $\gamma_R = \gamma_R^1 \dot{+} \gamma_R^2$  wie folgt:  $\gamma_R^1 := \text{id}_{[-R,R]}$  und  $\gamma_R^2(t) := R \cdot e^{it}$  für  $t \in [0, \pi]$ . Dann gilt

$$\left| \int_{\gamma_R^2} \frac{1}{1+x^2} \, dx \right| \leq \pi R \cdot \sup \left\{ \left| \frac{1}{1+x^2} \right| : |x| = R, \text{Im}(x) \geq 0 \right\} \leq \frac{\pi R}{1+R^2} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

Mit der Cauchyschen Integralformel (CIF) erhält man dann

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^2} \, dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^1} \frac{1}{1+z^2} \, dz \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2} \, dz \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z-1|=1} \frac{1}{(z-1)(z+1)} \, dz \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} \\ &= \pi \end{aligned} \quad (\text{CIF})$$

Zur Probe: Für  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  ist eine Stammfunktion gegeben durch  $F(x) = \arctan(x)$ . Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^2} \, dx = \lim_{R \rightarrow \infty} (\arctan(R) - \arctan(-R)) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

**Aufgabe 5.4.** Sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  ein geschlossener Weg. Zeigen Sie:

$$\gamma \text{ nullhomotop} \Rightarrow \gamma \text{ nullhomolog}$$

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $\gamma$  nullhomotop in  $\Omega$ , d.h. homotop zu einem konstanten Weg  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann gilt nach einer Bemerkung der Vorlesung für alle  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, dass  $\int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_c f(z) \, dz$ . Da  $c$  konstant ist, ist

$$\int_c f(z) \, dz = \int_0^1 f(c(t)) \cdot \underbrace{c'(t)}_{=0} \, dt = 0$$

und somit also  $\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0$  für alle holomorphen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Nach Folgerung 9.4 ist dies äquivalent zur Nullhomologie von  $\gamma$ .

**Aufgabe 5.5.** Beweisen Sie das *Schwarzsche Lemma*: Sei  $f: E \rightarrow E$  eine holomorphe Abbildung der Einheitskreisscheibe  $E$  in sich selbst mit  $f(0) = 0$ . Dann gilt  $|f'(0)| \leq 1$  und  $|f(z)| \leq |z|$  für alle  $z \in E$ . Gibt es ein  $z_0 \neq 0$  mit  $|f(z_0)| = |z_0|$  oder gilt  $|f'(0)| = 1$ , so ist  $f$  eine Drehung mit  $f(z) = e^{i\theta} \cdot z$  für ein  $\theta \in \mathbb{R}$  und alle  $z \in E$ .

Wir definieren uns eine Funktion

$$g: E \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{falls } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{falls } z = 0 \end{cases}$$

Damit ist  $g$  stetig, denn

$$g(0) = f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} g(z)$$

Damit ist dann auch  $g$  holomorph auf  $E$ . Für  $r < 1$  gilt mit dem Maximumprinzip für  $|z| \leq r$

$$|g(z)| \leq \max_{|z|=r} |g(z)| = \frac{1}{r} \cdot \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{1}{r} \leq 1$$

Somit ist also  $|g(z)| \leq 1$  für alle  $z \in E$ , d.h.  $\left| \frac{f(z)}{z} \right| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1 \Rightarrow |f(z)| \leq |z|$  und  $|f'(0)| \leq 1$ . Ist  $|f(z_0)| = |z_0|$  für ein  $z_0 \neq 0$  oder  $|f'(0)| = 1$ , so hat  $|g|$  im Inneren von  $E$  ein lokales Maximum, was nach dem Maximumprinzip bedeutet, dass  $g$  konstant ist, d.h.  $g \equiv \lambda$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $|\lambda| = 1$  bzw. in Polardarstellung von  $\lambda = e^{i\theta}$  mit  $\theta \in \mathbb{R}$  geschrieben als  $f(z) = e^{i\theta} \cdot z$  für alle  $z \in E$ .

# Hausaufgaben

Funktionentheorie – Übungsblatt 6

Eric Kunze

Matr.-Nr. 4679202

Thema: Reihenentwicklung & Zusammenhang

**Aufgabe 6.1.** Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung mit dem Mittelpunkt  $z_0 \neq a$  für die Funktionen

$$f_0(z) = \frac{1}{z-a} \quad f_1(z) = \frac{1}{(z-a)^2} \quad f_2(z) = \frac{1}{(z-a)^3}$$

Hinweis: Beachten Sie, dass  $f_1 = -f_0'$  und  $f_2 = -\frac{1}{2}f_1'$ .

Unter Nutzung der geometrischen Reihe gilt

$$\begin{aligned} f_0(z) &= \frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-z_0) + z_0-a} = \frac{1}{z_0-a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-z_0}{z_0-a}} = \frac{1}{z_0-a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z_0-a)^k} \cdot (z-z_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z_0-a)^{k+1}} \cdot (z-z_0)^k \end{aligned}$$

d.h. wir haben eine Potenzreihe in  $z_0$  mit Koeffizienten  $a_k := (z_0-a)^{-(k+1)}$ . Nutzen wir nun die Holomorphie und gliedweise Differenzierbarkeit infolge der Analytizität und erhalten

$$f_1(z) = -f_0'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z_0-a)^{k+1}} \cdot (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(k+1)}{(z_0-a)^{k+2}} \cdot (z-z_0)^k$$

sowie

$$f_2(z) = -\frac{1}{2}f_1'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \frac{-(k+1)}{(z_0-a)^{k+2}} \cdot (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2(z_0-a)^{k+3}} \cdot (z-z_0)^k$$

**Aufgabe 6.2.** Sei  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) := 2e^{it}$ . Berechnen Sie mithilfe der Cauchyschen Integralformeln für die Ableitungen das Integral  $\int_{\gamma} f(z) \, dz$  der folgenden Funktionen:

(a)  $f(z) = \frac{\cos(z)}{z^2}$

(b)  $f(z) = \frac{z^3}{(z+1)^3}$

(c)  $f(z) = \frac{z \cdot \cos(z)}{(z-\frac{\pi}{2})^2}$

(d)  $f(z) = \frac{z \cdot e^z}{(z-4)^3}$

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  und  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf  $B_r(z_0)$ . Weiter sei  $z \notin \partial B_r(z_0)$ . Dann gilt die Cauchysche Integralformel für die Ableitung von  $g$  mit

$$g^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=r} \frac{g(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}} \, d\xi$$

(zu a) Betrachten wir  $g(z) := \cos(z)$  holomorph auf  $\mathbb{C}$  und  $z = 0 \notin \partial B_2(0)$  sowie  $z_0 = 0$ . Dann gilt für die erste Ableitung ( $k = 1$ )

$$g'(0) = \frac{1!}{2\pi i} \int_{|\xi|=2} \frac{\cos(\xi)}{\xi^2} d\xi$$

und somit

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot \cos'(0) = -2\pi i \sin(0) = 0$$

(zu b) Betrachte  $g(z) := z^3$  holomorph auf  $\mathbb{C}$  und  $z = -1 \notin \partial B_2(0)$ . Für die zweite Ableitung gilt diesmal

$$g''(-1) = \frac{2}{2\pi i} \int_{|\xi|=2} \frac{\xi^3}{(\xi + 1)^3} d\xi$$

Damit berechnen wir das Integral

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \pi i \cdot g''(-1) = \pi i \cdot 6(-1) = 6\pi i$$

(zu c) Betrachte nun  $g(z) := z \cdot \cos(z)$  holomorph auf  $\mathbb{C}$  und  $z = \frac{\pi}{2} \notin B_2(0)$ . Dann ist

$$g'(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=2} \frac{\xi \cdot \cos(\xi)}{(\xi - \frac{\pi}{2})^2} d\xi$$

d.h. für das Integral

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot \left. \frac{d}{dz} z \cdot \cos(z) \right|_{z=\frac{\pi}{2}} = 2\pi i \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = -i\pi^2$$

(zu d) Betrachte  $g(z) := z \cdot e^z$  holomorph auf  $\mathbb{C}$  und  $z = 4 \notin \partial B_2(0)$ . Die zweite Ableitung ist

$$g''(4) = \frac{2}{2\pi i} \int_{|\xi|=2} \frac{\xi \cdot e^{\xi}}{(\xi - 4)^3} d\xi$$

und damit

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \pi i \cdot g''(4) = \pi i e^z (z + 2)|_{z=4} = 6\pi i \cdot e^4$$

**Aufgabe 6.3.** Entwickeln Sie die Funktion  $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$  in Laurentreihen, die in folgenden Ringgebieten konvergieren:

(a)  $|z| < 1$

(b)  $1 < |z| < 2$

(c)  $|z| > 2$

(d)  $|z-1| > 1$



Wir zerlegen die Funktion in

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

(zu a) Die Laurententwicklung von  $f$  soll für alle  $|z| < 1$  konvergieren. Mit der geometrischen Reihe erhalten wir

$$\frac{2}{2-z} = -1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{2^k} z^k$$

mit Konvergenzradius 2. Der andere Summand ergibt sich zu

$$\frac{-1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

mit Konvergenzradius 1. Damit konvergiert die Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) z^k$$

ohne Hauptteil auf dem Schnitt der Konvergenzgebiete der beiden Summanden, d.h.  $f$  konvergiert für alle  $|z| < 1$  wie gefordert.

(zu b) Wir wollen das Konvergenzgebiet  $1 < |z| < 2$  erreichen. Dazu nutzen wir den ersten Summanden aus (a) mit Konvergenz auf  $B_2(0)$ . Für den zweiten erhalten wir

$$\frac{-1}{z-1} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} = -\sum_{k=-1}^{\infty} z^k$$

mit Konvergenz auf  $\mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$  und wir erhalten für die Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2^k} z^k + \sum_{k=-1}^{\infty} -z^k$$

das Konvergenzgebiet  $B_2(0) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}) = B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)}$ , d.h. Konvergenz für alle  $1 < |z| < 2$ .

(zu c) Nun wollen wir Konvergenz für alle  $|z| > 2$  erreichen und nutzen dafür unsere Darstellung aus Teil (b) sowie

$$\frac{2}{z-2} = \frac{2}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{2}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{2}{z}\right|^k = \sum_{k=-1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k z^k$$

mit Konvergenz auf  $|z| > 2$ . Der zweite Summand in Teil (b) hatte Konvergenz auf  $|z| > 1$  und somit ist die Laurentreihenentwicklung von  $f$  gegeben durch

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k z^k + \sum_{k=-1}^{\infty} -z^k = \sum_{k=-1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1\right) \cdot z^k$$

konvergent für alle  $|z| > 2$ .

(zu d) Betrachten wir den ersten Summanden:

$$\frac{2}{z-2} = \frac{2}{(z-1)-1} = \frac{2}{z-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} = 2 \sum_{k=-1}^{-\infty} (z-1)^k$$

Für den zweiten betrachten wir eine weitere Zerlegung: es ist

$$\frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} = \sum_{k=-1}^{-\infty} (z-1)^k$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)-1} &= \frac{z-2-z+1}{(z-1)((z-1)-1)} = \frac{-1}{(z-1)^2-(z-1)} = -\frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} \\ &= -\sum_{k=-2}^{-\infty} (z-1)^k \end{aligned}$$

Alle drei Reihen konvergieren nun auf  $\mathbb{C} \setminus \overline{B_1(1)}$ . Nun können wir  $f$  darstellen als

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2}{z-2} - \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)-1} \right) - \frac{1}{(z-1)-1} \\ &= 2 \sum_{k=-1}^{-\infty} (z-1)^k + \sum_{k=-2}^{-\infty} (z-1)^k - \sum_{k=-1}^{-\infty} (z-1)^k \\ &= \sum_{k=-2}^{-\infty} (z-1)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} (z-1)^k \\ &= \sum_{k=-1}^{-\infty} (2 - \delta_{-1}(k))(z-1)^k \quad \text{wobei } \delta_{-1}(k) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Laurentreihe konvergiert also für alle  $|z-1| > 1$ .

**Aufgabe 6.4.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann ist

$$\Omega \text{ ist zusammenhängend} \Leftrightarrow \Omega \text{ ist wegzusammenhängend}$$

( $\Leftarrow$ ) Diese Richtung haben wir bereits in der Vorlesung bewiesen.

( $\Rightarrow$ ) Sei  $\Omega \neq \emptyset$  (sonst klar). Dann existiert  $z_0 \in \Omega$  — betrachte

$$\mathcal{G}_{z_0} = \{z \in \Omega : \text{ex. Weg } \gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega \text{ mit } \gamma(0) = z_0 \text{ und } \gamma(1) = z\}$$

Mit dem konstanten Weg ist stets  $z_0 \in \mathcal{G}_{z_0}$ , d.h.  $\mathcal{G}_{z_0} \neq \emptyset$  für alle  $z_0 \in \Omega$ .

Sei  $z_0 \in \Omega$  beliebig. Da  $\Omega$  offen ist und  $\mathcal{G}_{z_0} \subseteq \Omega$ , existiert für alle  $z \in \mathcal{G}_{z_0}$  ein  $\varepsilon > 0$  sodass  $B_\varepsilon(z) \subseteq \Omega$ . Die  $\varepsilon$ -Kugeln sind wegzusammenhängend, d.h. wir können den Weg von  $z_0$  nach  $z$  fortsetzen zu einem Weg von  $z_0$  nach  $\bar{z} \in B_\varepsilon(z)$ . Demnach ist  $B_\varepsilon(z) \subseteq \mathcal{G}_{z_0}$  für alle  $z \in \mathcal{G}_{z_0}$  und  $\mathcal{G}_{z_0}$  also offen für alle  $z_0 \in \Omega$ .

Betrachte  $\mathcal{H}_{z_0} := \Omega \setminus \mathcal{G}_{z_0}$ . Gibt es  $\omega \in \mathcal{H}_{z_0}$ , dann gibt es auch  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(\omega) \subseteq \Omega$

(Offenheit von  $\Omega$ ). Angenommen es gibt nun ein  $\bar{z} \in \mathcal{G}_{z_0} \cap B_\varepsilon(\omega)$ . Dann existiert für den Weg von  $z_0$  nach  $\bar{z}$  (da  $\bar{z} \in \mathcal{G}_{z_0}$ ) eine Fortsetzung bis  $\omega$ , was heißen würde, dass  $\omega \in \mathcal{G}_{z_0}$  im Widerspruch zur Annahme. Damit ist  $B_\varepsilon(\omega) \subseteq \mathcal{H}_{z_0}$ .

Damit ist  $\Omega = \mathcal{G}_{z_0} \cup \mathcal{H}_{z_0}$  offen. Jedoch ist  $\Omega$  nach Voraussetzung zusammenhängend und  $\mathcal{G}_{z_0} \neq \emptyset$ , d.h. es muss  $\mathcal{H}_{z_0} = \emptyset$  und  $\Omega = \mathcal{G}_{z_0}$  gelten. Damit ist  $\Omega$  wegzusammenhängend.

**Aufgabe 6.5.** Man beweise, dass es eindeutig bestimmte ganze Funktionen  $J_n$  gibt, sodass für alle  $(z, \zeta) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$  die Gleichung

$$\exp\left(\frac{z}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \cdot \zeta^n$$

gilt.