TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik Institut für Geometrie, Professur für Nichtlineare Analysis

PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Übungen

Prof. Dr. Friedemann Schuricht

Sommersemester 2020

Autor : Eric Kunze
E-Mail : `eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de`

Hausaufgaben

Eric Kunze

Partielle Differentialgleichungen – Übungsblatt 1

Matr.-Nr. 4679202

Aufgabe 1. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $u \in C^2(U, \mathbb{R}^n)$, $A \in C^1(U, \mathbb{R}^{m\times n})$, $\varphi \in C^1(U)$ und $c \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{div}((Du)^\top) = (D(\operatorname{div} u))^\top$,

(b) $\operatorname{div}(cA) = c \operatorname{div} A$,

(c) $\operatorname{div}(\varphi A) = A \cdot D\varphi + \varphi \operatorname{div} A$.

Hinweis: Wir betrachten Vektoren im $\mathbb{R}^n$ als Zeilenvektoren, $\cdot$ ist das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$, $Du = (\partial_j u_i)_{i,j=1,\dots,n}$, div und $\cdot$ wirken auf eine Matrix *zeilenweise*.

Es seien nun $u, v \colon U \to \mathbb{R}$ hinreichend glatt. Beweisen Sie die **Formel von Leibniz**:

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v$$

wobei für Multiindizes α, β gilt:

$$D^\alpha u = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u, \qquad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}, \qquad \alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$$

und $\beta \le \alpha$ genau dann, wenn $\beta_i \le \alpha_i$ für $i = 1, \dots, n$.

(zu a) Sei $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in C^2$. Wir notieren Vektoren verkürzt $(u_i)_i = (u_i)_{i=1,\dots,n} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Es ist

$$\operatorname{div}\left((Du)^\top\right) = \operatorname{div}\begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 & \cdots & \partial_n u_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 u_n & \partial_2 u_n & \cdots & \partial_n u_n \end{pmatrix}^\top = \operatorname{div}\left(\partial_j u_i\right)_{i,j}^\top = \operatorname{div}\left(\partial_i u_j\right)_{i,j}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_{11} u_1 & \partial_{12} u_2 & \cdots & \partial_{1n} u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1} u_1 & \partial_{n2} u_2 & \cdots & \partial_{nn} u_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ij} u_j\right)_i$$

und außerdem

$$(D(\operatorname{div} u))^\top = \left(D\left(\sum_{i=1}^n \partial_i u_i\right)\right)^\top = \begin{pmatrix} \partial_{11} u_1 + \partial_{21} u_2 + \cdots + \partial_{n1} u_n \\ \vdots \\ \partial_{1n} u_1 + \partial_{2n} u_2 + \cdots + \partial_{nn} u_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ji} u_j\right)_i$$

Wegen $u \in C^2$ sind alle partiellen Ableitungen stetig und können somit vertauscht werden. Daraus folgt die (zeilenweise) Gleichheit mit

$$\operatorname{div}\left((Du)^\top\right) = \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ij} u_j\right)_i = \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ji} u_j\right)_i = (D(\operatorname{div} u))^\top$$

(zu b) Es ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(cA) &= \operatorname{div}\left(\sum_{j=1}^n c_j a_{ij}\right)_i = \sum_{i=1}^n \partial_i \sum_{j=1}^n c_j a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_i c_j a_{ij} \\
c \cdot \operatorname{div}(A) &= c \cdot \left(\sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij}\right)_i = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_j c_j a_{ij}
\end{aligned}$$

und somit $\operatorname{div}(cA) = c \cdot \operatorname{div}(A)$.

(zu c) Man hat

$$\begin{aligned}
A \cdot D\varphi &= A \cdot (\partial_i \varphi)_i = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\ \partial_j \varphi\right)_i \\
\varphi \operatorname{div}(A) &= \varphi \cdot \left(\sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij}\right)_i = \left(\sum_{j=1}^n \varphi\ \partial_j a_{ij}\right)_i \\
\operatorname{div}(\varphi A) &= \operatorname{div}\left((\varphi a_{ij})_{i,j}\right) = \left(\sum_{j=1}^n \partial_j (\varphi a_{ij})\right)_i
\end{aligned}$$

Für fixiertes i (also zeilenweise) erhält man mit der Produktregel für (partielle) Ableitungen

$$\sum_{j=1}^n \partial_j(\varphi a_{ij}) = \sum_{j=1}^n ((\partial_j \varphi) a_{ij} + \varphi(\partial_j a_{ij})) = \sum_{j=1}^n (\partial_j \varphi) a_{ij} + \sum_{j=1}^n \varphi(\partial_j a_{ij})$$

und somit $\operatorname{div}(\varphi A) = A \cdot (D\varphi) + \varphi \cdot \operatorname{div}(A)$.

Leibnitz-Formel: Vollständige Induktion über $|\alpha| = k$.

(IA) $k = 0:$ Für $|\alpha| = 0$, also $\alpha = 0$ ist

$$D^0(uv) = uv = \binom{0}{0} D^0 u\ D^0 v$$

(IV) Für $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i = k$ gilt $D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v$.

(IS) $k \to k+1:$ Seien $|\alpha| = |(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)| = k+1$ und $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n - 1)$ sowie $\beta' = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n + 1)$. Dann ist $|\alpha'| = k$ und $|\beta'| = |\beta| + 1$. Es gilt

$$\begin{aligned}
D^\alpha(uv) &= \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}(uv) = \partial_{x_n}\left(\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n - 1}(uv)\right) \\
&= \partial_{x_n}\left(D^{\alpha'}(uv)\right) \\
&\overset{\text{IV}}{=} \partial_{x_n}\left(\sum_{\beta \le \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} D^\beta u \; D^{\alpha' - \beta} v\right) \\
&= \sum_{\beta \le \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} \left(\partial_{x_n}(D^\beta u) \; D^{\alpha'-\beta} v + D^\beta u \; \partial_{x_n}(D^{\alpha'-\beta} v)\right) \\
&= \sum_{\beta \le \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} \left(D^{\beta'} u \; D^{\alpha'-\beta} v + D^\beta u \; D^{\alpha-\beta} v\right) \\
&= \dots \\
&= \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u \; D^{\alpha-\beta} v
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Ermitteln Sie jeweils eine nichttriviale Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

(a) $v_y(x,y) = xy \cdot v(x,y)$

(b) $u_x(x,y) + y \cdot u(x,y) = 0$

(zu a) Wir gehen analog zur Vorlesung vor und betrachten die Gleichung für fixiertes $x = \text{const}$. Dann erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$u'(y) = xy \cdot u(y)$$

und lösen entweder durch geübtes Hinschauen oder mit Trennung der Variablen: sei $f(u(y)) = u(y)$ und $g(y) = x \cdot y$. Der Ansatz

$$\int^{u(y)} \frac{1}{f(\xi)} \mathrm{d}\xi = \int^y g(\xi) \mathrm{d}\xi \quad \Rightarrow \quad \ln(|u(y)|) = \frac{1}{2}xy^2 + C$$

Beachte, dass die unteren Integralgrenzen dabei in der Konstante C zusammengefasst sind, da wir keinen Anfangswert vorgegeben haben. Die Gleichung „umgestellt“ ergibt eine Lösung

$$u(y) = \exp\left(\frac{1}{2}xy^2\right) \qquad \text{bzw.} \qquad v(x,y) = \exp\left(\frac{1}{2}xy^2\right)$$

Eine kurze Probe ergibt

$$v_y(x,y) = xy \cdot \exp\left(\frac{1}{2}xy^2\right) = xy \cdot v(x,y)$$

(zu b) Wir fixieren erneut eine Variable, diesmal $y = \text{const}$. Diesmal sehen wir direkt eine Lösung, nämlich

$$u(x,y) = \exp(-xy)$$

Eine kurze Probe ergibt $u_x(x,y) + y \cdot u(x,y) = -y \cdot \exp(-xy) + y \cdot \exp(-xy) = 0$.

Zusatzaufgabe 3. Klassifizieren Sie die nachstehenden partiellen Differentialgleichungen nach folgenden Gesichtspunkten:

(a) Ist die Differentialgleichung linear, semilinear, quasilinear oder voll nichtlinear?

(b) Welche Ordnung hat die Differentialgleichung?

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0 \\
-\Delta u &= f(u) \\
|Du| &= 1 \\
u_t + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} &= 0 \\
\det(D^2 u) &= f \\
\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) &= 0 \\
u_t - \Delta u &= f(u) \\
u_{tt} - \Delta u &= 0 \\
u_t + \operatorname{div} F(u) &= 0 \\
u_t + u u_x + u_{xxx} &= 0 \\
a u_t + \Delta u &= 0 \\
u_t + H(Du, x) &= 0 \\
u_t - \Delta(u^\gamma) &= 0 \\
-\Delta u &= \lambda u \\
\operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) &= 0 \\
u_t + u u_x &= 0
\end{aligned}$$

Hausaufgaben

Eric Kunze

Partielle Differentialgleichungen – Übungsblatt 2

Matr.-Nr. 4679202

Thema: Charakteristikenmethode

Ich bitte um Entschuldigung, dass meine Lösung so lang geworden ist. Aber ich habe mich bemüht mein Vorgehen detailliert zu beschreiben. ☺

Aufgabe 4. Finden Sie Lösungen $u \in C^1$ der folgenden linearen Randwertprobleme:

(a) $-3u_x + 2u_y = 0$ mit $u(x,y) = y^2 + 1$ auf $\Gamma = \{(1,s) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in \mathbb{R}\}$

(b) $u_x + u_y - u_z = xe^{y-z}$ mit $u(0,y,z) = g(y,z)$ für alle $y, z \in \mathbb{R}$, wobei $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ beliebig ist

(c) $2u_x - u_y = 2u - xe^x$ mit $u(0,y) = y^2$ für alle $y \in \mathbb{R}$

Erläutern Sie dabei Ihr Vorgehen und überprüfen Sie abschließend, ob die von Ihnen gefundene Lösung wirklich das Problem löst.

(zu a) Wir betrachten die Charakteristiken

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sei $\alpha(t) := u(x(t), y(t))$, d.h. α beschreibt u entlang der Charakteristiken. Es gilt

$$\alpha'(t) = u_x \cdot \dot{x}(t) + u_y \cdot \dot{y}(t) = -3u_x + 2u_y = 0$$

und somit ist u konstant entlang der Charakteristiken. Parametrisiere die Kurve Γ durch $x_0(s) = 1$ und $y_0(s) = s$. Dann ergibt sich die Randwertbedingung zu $g(s) = s^2 + 1$. Wir prüfen nun die nichtcharakteristische Bedingung, d.h. ob die Kurve Γ auch alle Charakteristiken $\Xi_{(x_0,y_0)}$ durchläuft. Dazu prüfen wir den Tangentenvektor von Γ, nämlich $\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, und den Tangentenvektor der Charakteristik $\Xi_{(x_0,y_0)}$, nämlich $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, auf lineare Unabhängigkeit:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

Somit schneidet Γ alle Charakteristiken $\Xi_{(x_0,y_0)}$. Somit können wir die Schar der Charakteristiken beschreiben durch

$$\begin{aligned} x(s,t) &= x_0(s) - 3t = 1 - 3t &&\Rightarrow \quad t(x,y) = \frac{1-x}{3} \\ y(s,t) &= y_0(s) + 2t = s + 2t &&\Rightarrow \quad s(x,y) = y - 2t = y - \frac{2}{3}(1-x) = y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Nach Konstruktion in der Vorlesung erhalten wir damit eine Lösung

$$u(x,y) = g(s(x,y)) = \left(y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right)^2 + 1$$

Die Probe liefert mit den partiellen Ableitungen

$$\left.\begin{array}{rcll} u_x(x,y) & = & \frac{4}{3} & \left(y+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)^2 \\ u_y(x,y) & = & 2 & \left(y+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow -3\cdot\frac{4}{3}\left(y+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)^2+4\left(y+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)^2=0$$

und außerdem $u(1,y)=y^2+1$ für den Anfangswert. Somit ist u also Lösung der Differentialgleichung.

(zu b) Wir betrachten die partielle Differentialgleichung $u_x+u_y-u_z=x\cdot e^{y-z}$ mit der Randbedingung $u(0,y,z)=g(y,z)$ für beliebiges $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$. Definieren wir den „Rand“ als die Fläche $\Gamma=\{(0,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y,z\in\mathbb{R}\}$. Diese lässt sich parametrisieren mit

$$\gamma(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix}x_0(\sigma,\tau)\\ y_0(\sigma,\tau)\\ z_0(\sigma,\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \sigma\\ \tau\end{pmatrix}$$

Für die Tangentialebene erhalten wir die Spannvektoren

$$\gamma_\sigma(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\qquad \gamma_\tau(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\dot\gamma(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Betrachten wir die Charakteristiken $\Xi_{\sigma,\tau}=\operatorname{Im}(\xi)$ mit

$$\xi(t,\sigma,\tau)=\begin{pmatrix}x(t,\sigma,\tau)\\ y(t,\sigma,\tau)\\ z(t,\sigma,\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0(\sigma,\tau)+t\\ y_0(\sigma,\tau)+t\\ z_0(\sigma,\tau)-t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ \sigma+t\\ \tau-t\end{pmatrix}\tag{2.1}$$

Prüfen wir die nichtcharakteristische Bedingung um sicherzustellen, dass auch jede Charakteristik $\Xi_{\sigma,\tau}$ von Γ durchlaufen wird:

$$\det(\dot\gamma\mid\dot\xi)=\det\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=1\neq0$$

Bezeichne mit $f(u,x,y,z)=x\cdot e^{y-z}$ die rechte Seite der Differentialgleichung. Schreibe $\xi(t)=\xi(t,\sigma,\tau)$ für fixiertes σ und τ (x,y,z analog). Sei $\alpha(t):=u(\xi(t))$ die Funktion u entlang einer Charakteristik $\Xi_{\sigma,\tau}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\dot\alpha(t)&=Du\cdot\dot\xi=f(u(\xi(t)),\xi(t))=f(\alpha(t),t,\sigma+t,\tau-t)=t\cdot e^{(\sigma+t)-(\tau-t)}\\&=t\cdot e^{\sigma-\tau+2t}\end{aligned}\tag{2.2}$$

und dem Anfangswert $\alpha(0)=\alpha(0,\sigma,\tau)=g(\sigma,\tau)$. Lösen wir also dieses Anfangswertproblem und integrieren dazu die rechte Seite in Gleichung (2.2) partiell:

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= \int t \cdot e^{\sigma-\tau+2t}\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{2}e^{\sigma-\tau+2t}\right)t - \int \frac{1}{2}e^{\sigma-\tau+2t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}t \cdot e^{\sigma-\tau+2t} - \frac{1}{4}e^{\sigma-\tau+2t} + C(\sigma,\tau) \\
&= \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right)e^{\sigma-\tau+2t} + C(\sigma,\tau)
\end{aligned}$$

Mit dem Anfangswert $\alpha(0) = g(\sigma,\tau)$ ergibt sich die Konstante

$$\alpha(0) = \frac{1}{4}e^{\sigma-\tau} + C(\sigma,\tau) \overset{!}{=} g(\sigma,\tau) \quad \Rightarrow \quad C(\sigma,\tau) = \frac{1}{4}e^{\sigma-\tau} + g(\sigma,\tau)$$

und somit die konkrete Lösung

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right)e^{\sigma-\tau+2t} + \frac{1}{4}e^{\sigma-\tau} + g(\sigma,\tau)$$

Aus Gleichung (2.1) erhalten wir die Inverse von ξ als

$$\xi^{-1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} t(x,y,z) \\ \sigma(x,y,z) \\ \tau(x,y,u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-x \\ z+x \end{pmatrix}$$

Nach Konstruktion in der Vorlesung erhalten wir die Lösung

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= \alpha(\xi^{-1}(x,y,z)) \\
&= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{(y-x)-(z+x)+2x} + \frac{1}{4}e^{(y-x)-(z+x)} + g(y-x, z+x) \\
&= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + g(y-x, z+x)
\end{aligned}$$

Nun prüfen wir noch, dass die gefundene Funktion auch wirklich eine Lösung der Differentialgleichung ist. Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}
u_x(x,y,z) &= \frac{1}{2}e^{y-z} - \frac{1}{2}e^{y-z-2x} - \partial_1 g(y-x, z+x) + \partial_2 g(y-x, z+x) \\
u_y(x,y,z) &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + \partial_1 g(y-x, z+x) \\
u_z(x,y,z) &= -\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{y-z} - \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + \partial_2 g(y-x, z+x)
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}e^{y-z} - \frac{1}{2}e^{y-z-2x} - \partial_1 g(y-x, z+x) + \partial_2 g(y-x, z+x) \\
+ &\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} + \partial_1 g(y-x, z+x) \\
+ &\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z-2x} - \partial_2 g(y-x, z+x) \\
= &\, e^{y-z} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) - e^{y-z-2x}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) \\
= &\, x \cdot e^{y-z}
\end{aligned}
$$

Außerdem ist die Randwertbedingung erfüllt, denn

$$u(0,y,z) = -\frac{1}{4}e^{y-z} + \frac{1}{4}e^{y-z} + g(y,z) = g(y,z)$$

und somit u tatsächlich Lösung der partiellen Differentialgleichung.

(zu c) Gegeben sei die partielle Differentialgleichung $2u_x - u_y = 2u + x \cdot e^x$ und die Randwertbedingung $u(0,y) = y^2$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Bezeichnen wir mit $f(u,x,y) = 2u - xe^x$ die rechte Seite. Die Randwerte werden auf der Kurve $\Gamma = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$ angenommen. Diese können wir parametrisieren mit

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} x_0(s) \\ y_0(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} \dot{x}_0(s) \\ \dot{y}_0(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit wird die Randwertbedingung zu $g(s) = s^2$. Betrachten wir die Charakteristiken Ξ_s mit

$$\xi(t,s) = \begin{pmatrix} x(t,s) \\ y(t,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(s) + 2t \\ y_0(s) - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ s+t \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Die nichtcharakteristische Bedingung ist hier erfüllt, denn

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

Betrachte nun die Funktion u entlang der Charakteristiken Ξ_s für fixiertes s beschrieben durch $\alpha(t) = u(\xi(t))$. Differenzieren ergibt

$$\dot{\alpha}(t) = u_x \cdot \dot{x} + u_y \cdot \dot{y} = f(u(\xi(t)), \xi(t)) = f(\alpha(t), 2t, s+t) = 2\alpha - 2t \cdot e^{2t} \tag{2.4}$$

bei $\alpha(0,s) = g(s) = s^2$. Dieses Anfangswertproblem lösen wir mit Variation der Konstanten. Das zugehörige homogene Problem besitzt offensichtlich die Lösung $\alpha(t) = c(t) \cdot e^{2t}$. Differenzieren wir diese Gleichung erhalten wir $\dot{\alpha}(t) = \dot{c}(t) \cdot e^{2t} + 2c(t) \cdot e^{2t}$. Setzen wir dies nun in Gleichung (2.4) ein, dann erhalten wir für ein $\hat{c} \in \mathbb{R}$

$$\dot{c}(t) \cdot e^{2t} + 2c(t) \cdot e^{2t} = 2c(t) \cdot e^{2t} - 2t \cdot e^{2t} \quad \Rightarrow \quad \dot{c}(t) = -2t \quad \Rightarrow \quad c(t) = \hat{c} - t^2$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung $\alpha(t) = e^{2t}(\hat{c} - t^2)$. Durch den Anfangswert gilt $\alpha(0) = \hat{c} = s^2$ und somit ist $\alpha(t) = e^{2t}(s^2 - t^2)$ konkrete Lösung des Anfangswertproblems, was sich auch leicht überprüfen lässt:

$$\dot{\alpha}(t) = 2\underbrace{e^{2t}(s^2 - t^2)}_{=\alpha(t)} - 2t \cdot e^{2t} = 2\alpha(t) - 2t \cdot e^{2t} \quad \text{und} \quad \alpha(0) = s^2$$

Aus Gleichung (2.3) erhalten wir

$$\xi^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} t(x,y) \\ s(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x + y \end{pmatrix}$$

Damit folgt nach Konstruktion in der Vorlesung eine Lösung

$$\begin{aligned} u(x,y) = \alpha(s(x,y)) &= e^x \left(\left(\frac{1}{2}x + y \right)^2 - \frac{1}{4}x^2 \right) \\ &= e^x \left(\frac{1}{4}x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{4}x^2 \right) \\ &= e^x \left(y^2 + xy \right) \end{aligned}$$

Dann gilt für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \left(y^2 + xy \right) + y \cdot e^x \\ u_y &= e^x \left(2y + x \right) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} 2u_x - u_y &= 2e^x(y^2 + xy) + 2y \cdot e^x - e^x(2y + x) \\ &= 2u + e^x(2y - 2y - x) \\ &= 2u - x \cdot e^x \end{aligned}$$

und $u(0,y) = e^0(y^2 + 0 \cdot y) = y^2$. Damit ist also u tatsächlich Lösung der partiellen Differentialgleichung.

Hausaufgaben

Eric Kunze

Partielle Differentialgleichungen – Übungsblatt 3

Matr.-Nr. 4679202

Aufgabe 6. Bestimmen Sie eine Lösung $u \in C\acute{z}(U)$ des quasilinearen Randwertproblems

$$uu_x + u_y = 1$$
$$u(x,x) = \frac{1}{2}x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\xi\}$$

wobei $\xi \in \mathbb{R}$ geeignet gewählt und U eine geeignet gewählte Umgebung der Menge ist, auf der u vorgegeben ist. Nutzen Sie dazu die Methode der Charakteristiken, überprüfen Sie Ihr Ergebnis und skizzieren Sie einige Charakteristiken in der Nähe des Punktes (ξ, ξ).

Aus der Vorlesung kennen wir die Notation $a(u(x), x) \cdot Du + b(u(x), x) = 0$. Wir notieren $a(u(x,y), x, y) = (u(x,y), 1)$ und $b(u(x,y), x, y) = -1$. Aus der Randwertbedingung erhalten wir eine Kurve $\Gamma = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \setminus \{\xi\}\}$ mit Parametrisierung $\gamma(s) = \binom{x_0(s)}{y_0(s)} = \binom{s}{s}$, auf der $g(s) = \frac{1}{2}s$ gilt. Wir überprüfen die nichtcharakteristische Bedingung gemäß Konstruktion in der Vorlesung als

$$\det\left(\dot{\gamma} \mid a(g(s), \gamma(s))\right) = \det \begin{pmatrix} 1 & g(s) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}s \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - \frac{1}{2}s \neq 0 \;\; \forall s \neq 2$$

Wähle somit also $\xi = 2$, um die Regularität zu sichern. Betrachten wir $\alpha(t,s) = u(x(t,s), y(t,s)$ als die Funktion u entlang der Charakteristiken. Da die partielle Differentialgleichung quasilinear ist, reichen die beiden folgenden charakteristischen Gleichungen zu lösen aus:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = a(\alpha, x, y) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\dot{\alpha} = -b(\alpha, x, y) = 1$$

mit den Anfangswerten $\alpha(0,s) = \frac{1}{2}s$, $x(0,s) = s$ und $y(0,s) = s$. Lösen wir diese gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= t + c(s) && \overset{\text{AW}}{\Rightarrow} c(s) = \tfrac{1}{2}s && \Rightarrow \alpha(t,s) = t + \tfrac{1}{2}s \\
y(t) &= t + c(s) && \overset{\text{AW}}{\Rightarrow} c(s) = s && \Rightarrow y(t,s) = t + s \\
x(t) &= \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{2}st + c(s) && \overset{\text{AW}}{\Rightarrow} c(s) = s && \Rightarrow x(t,s) = \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{2}st + s
\end{aligned}$$

Wegen der charakteristischen Bedingung können wir dieses Gleichungssystem nach t und s auflösen:

$$y(t,s) = t + s \;\; \Rightarrow \;\; s = y - t$$
$$x(t,s) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + s = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}(y-t)t + y - t = t\left(\frac{1}{2}y - 1\right) + y$$

also

$$t(x,y) = \frac{x - y}{\frac{1}{2}y - 1} \qquad \text{und} \qquad s(x,y) = y - \frac{x-y}{\frac{1}{2}y - 1}$$

Setzen wir dies als Lösung $u(x,y) = \alpha(t(x,y), s(x,y)$ zusammen, erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \alpha\left(\frac{x-y}{\frac{1}{2}y-1}\ ,\ y - \frac{x-y}{\frac{1}{2}y-1}\right) \\ &= \frac{x-y}{\frac{1}{2}y-1} + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\frac{x-y}{\frac{1}{2}y-1} \\ &= \frac{x-y}{y-2} + \frac{1}{2}y \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}, y \neq 2 \end{aligned}$$

Überprüfen wir unser Ergebnis: Es gilt

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{x-y}{y-2} + \frac{1}{2}y \\ u_x(x,y) &= \frac{1}{y-2} \\ u_y(x,y) &= \frac{-1}{y-2} - \frac{x-y}{(y-2)^2} + \frac{1}{2} = \frac{2-x}{(y-2)^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die partielle Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x,y)\cdot u_x(x,y) + u_y(x,y) &= \left(\frac{x-y}{y-2} + \frac{1}{2}y\right)\cdot\frac{1}{y-2} + \frac{2-x-2y}{(y-2)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{x-y}{(y-2)^2} + \frac{1}{2}y\frac{1}{y-2} + \frac{2-x}{(y-2)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2-y}{(y-2)^2} + \frac{1}{2}y\frac{1}{y-2} + \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2}y - 1\right)\frac{1}{y-2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

und für die Randwerte $u(x,x) = \frac{1}{2}x$ für alle $x \neq 2$.

Betrachten wir die Charakteristiken beschrieben mit einer Parametrisierung für fixiertes $s \neq 2$ und betrachten das Gleichungssystem

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + s \\ t+s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad t \quad = 2 - s \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{1}{2}(2-s)^2 + \frac{1}{2}s(2-s) + s = 2$$

Somit sind die Gleichungen unabhängig von $s \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ erfüllt und alle Charakteristiken gehen durch den Punkt $(2,2)$.

Charakteristiken $x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + s \\ t + s \end{pmatrix}$