tut07

Freitag, 22. Mai 2020

tut07

PROGRAMMIERUNG

ÜBUNG 6: λ-KALKÜL (TEIL 2)

Eric Kunze
eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

INHALT

Der λ-Kalkül

DER λ-KALKÜL

Atome.	x, y	
Abstraktion.	$(\lambda x.t)$	($f(x) = t$, anonyme Funktion)
Applikation.	$(t_1\ t_2)$	

Verabredungen:

- Applikation ist *linksassoziativ*:
  $((t_1\ t_2)\ t_3) = t_1\ t_2\ t_3$ für alle $t_1, t_2, t_3 \in \lambda(\Sigma)$
- mehrfache Abstraktion:
  $(\lambda x_1.(\lambda x_2.(\lambda x_3.t)))) = (\lambda x_1 x_2 x_3.t)$ für alle $t \in \lambda(\Sigma)$
- Applikation vor Abstraktion:

$$(\lambda x.xy) = (\lambda x.(xy))$$
$$\neq ((\lambda x.x)y)$$

α-KONVERSION & β-REDUKTION

β–Reduktion

Seien $s, t \in \lambda(\Sigma)$ gültige λ-Terme und es gilt $\mathrm{GV}(t) \cap \mathrm{FV}(s) = \emptyset$.

$$(\lambda x.t)\, s \quad \longrightarrow_\beta \quad t[x/s]$$

α–Konversion

Sei $t \in \lambda(\Sigma)$ und $z \notin \mathrm{GV}(t) \cup \mathrm{FV}(t)$.

$$(\lambda x.t) \quad \longrightarrow_\alpha \quad \lambda z.t[x/z]$$

CHURCH-NUMERALS

Dadurch, dass wir im Folgenden keine Symbole mehr zulassen (d.h. $\Sigma = \emptyset$), benötigen wir eine alternative Charakterisierung dieser. Zuerst beschäftigen uns die natürlichen Zahlen.

Darstellung der natürlichen Zahlen: *Church-Numerals*

$$\begin{aligned}
\langle 0 \rangle &= (\lambda xy\,.\,y) \\
\langle 1 \rangle &= (\lambda xy\,.\,xy) \\
\langle 2 \rangle &= (\lambda xy\,.\,x(xy)) \\
&\vdots \\
\langle n \rangle &= (\lambda xy\,.\,\underbrace{x(x \ldots (x\,y) \ldots)}_{n})
\end{aligned}$$

FIXPUNKTKOMBINATOR UND REKURSION

- Ein $t \in \Sigma(\lambda)$ heißt **geschlossener Term**, falls $FV(t) = \emptyset$.
  Ein geschlossender Term heißt auch **Kombinator**.
- **Fixpunktkombinator.**
  $\langle Y \rangle = \Big(\lambda z.\ \big(\lambda u.z(uu)\big)\ \big(\lambda u.z(uu)\big)\Big) \in \lambda(\emptyset)$
- Der Fixpunktkombinator ermöglicht Rekursion.
- weitere definierte λ-Terme (siehe Skript S. 198f.):

$$\langle true \rangle = (\lambda xy.x) \qquad \langle false \rangle = (\lambda xy.y)$$

$$\langle succ \rangle = (\lambda z.(\lambda xy.x(zxy))) \qquad \langle pred \rangle \langle 0 \rangle \Rightarrow^* \langle 0 \rangle$$

$$\langle succ \rangle \langle n \rangle \Rightarrow^* \langle n+1 \rangle \qquad \langle pred \rangle \langle n \rangle \Rightarrow^* \langle n-1 \rangle$$

$$\langle ite \rangle\ s\ s_1\ s_2 \Rightarrow^* \begin{cases} s_1 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle true \rangle \\ s_2 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle false \rangle \end{cases}$$