PROGRAMMIERUNG

ÜBUNG 12: HOARE-KALKÜL

Eric Kunze

eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

INHALT

HOARE-Kalkül

HOARE-KALKÜL

- Beweis / Verifikation von Programmeigenschaften
- Verifikationsformeln der Form $\{P\}$ **A** $\{Q\}$
  - P und Q sind Zusicherungen (prädikatenlogische Ausdrücke)
  - P heißt **Vorbedingung**, Q heißt **Nachbedingung**
  - Beschreibung der Veränderung von Zusicherungen
  - **Bedeutung**: Wenn die Variablenwerte vor Ausführung von **A** die Zusicherung P erfüllen und **A** terminiert, dann erfüllen die Variablen nach Ausführung von **A** die Zusicherung Q
- Aufstellen eines Beweisbaumes mit zur Verfügung stehenden Regeln

HOARE-KALKÜL – REGELN

- Zuweisungsaxiom
- Sequenzregel
- CompRegel
- Iterationsregel
- (erste und zweite) Alternativregel
- Konsequenzregeln
  - stärkere Vorbedingung
  - schwächere Nachbedingung

SCHLEIFENINVARIANTE

Für die Iterationsregel benötigen wir die Schleifeninvariante *SI*. In den meisten unserer Fälle ist diese von der Form $SI = A \land B$, wobei

- A den Zusammenhang zwischen Zählvariable und Akkumulationsvariablen beschreibt. Führe dazu einige Iterationen der Schleife durch und leite daraus einen Zusammenhang her.
- B die abgeschwächte Schleifenbedingung ist. Dabei nehmen wir die letztmögliche Variablenbelegung, für die die Schleifenbedingung π noch wahr ist und führen den Schleifenrumpf noch einmal darauf aus ($\rightarrow \pi'$).
  $\Rightarrow B = \pi \cup \pi'$

Aufgabe 1

AUFGABE 1 – TEIL (A)

Verfikationsformel:

$$\underbrace{\{(\mathtt{x} \geq 0) \land (\mathtt{x} = \mathtt{x1}) \land (\mathtt{z} = 0) \land (\mathtt{y} \geq 0)\}}_{\text{Vorbedingung}} \ \texttt{while (x1 > 0) \{x1 = x1-1; z = z + y;\}} \ \underbrace{\{(\mathtt{z} = \mathtt{y} * \mathtt{x})\}}_{\text{Nachbedingung}}$$

Schleifeninvariante:

$SI = A \land B$

#	x1	z
0	x	0
1	$x-1$	y
2	$x-2$	$2y$
N	$x-N$	Ny

Als Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \mathtt{x1} &= \mathtt{x - N} \\ \mathtt{z} &= \mathtt{N * y} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ A = (\mathtt{z = (x-x1) * y})$$

AUFGABE 1 – TEIL (A)

$\boxed{SI = A \wedge B}$ und wir wissen schon $A = (\texttt{z = (x-x1) * y})$

abgeschwächte Schleifenbedingung:

- Schleifenbedingung: $\pi = (\texttt{x1 > 0})$
- Schleifenbedingung letztmalig wahr für `x1 = 1`
- Wert nach nochmaligem Schleifendurchlauf:
  $\pi' = (\texttt{x1 = 0})$
- $B = \pi \cup \pi' = (\texttt{x1} \geq \texttt{0})$ *(symbolische Schreibweise)*

$$\boxed{\Longrightarrow SI = A \wedge B = (\texttt{z = (x-x1) * y}) \wedge (\texttt{x1} \geq \texttt{0})}$$

Verfikationsformel:

$\{(x \geq 0) \wedge (x = x1) \wedge (z = 0) \wedge (y \geq 0)\}$ `while (x1 > 0) {x1 = x1-1; z = z+y;}` $\{(z = y * x)\}$

Sei $SI = A \wedge B = (\texttt{z=(x-x1)*y}) \wedge (\texttt{x1} \geq 0)$ und $\pi = (\texttt{x1 > 0})$.

$$A = C = D = G = SI$$

$$B = SI \wedge \neg\pi = (\texttt{z=(x-x1)*y}) \wedge (\texttt{x1} \geq 0) \wedge \neg(\texttt{x1 > 0})$$

$$E = SI \wedge \pi = (\texttt{z=(x-x1)*y}) \wedge (\texttt{x1} \geq 0) \wedge (\texttt{x1 > 0})$$

AUFGABE 1 – TEIL (C)

$$(z = (x - x1) * y) \wedge (x1 \geq 0) \wedge (x1 > 0) \Rightarrow (z + y = (x - (x1 - 1)) * y) \wedge (x1 - 1 \geq 0)$$

$$\left\{(z + y = (x - (x1 - 1)) * y) \wedge (x1 - 1 \geq 0)\right\}\ \texttt{x1 = x1 - 1}\ \left\{(z + y = (x - x1) * y) \wedge (x1 \geq 0)\right\}$$

(SV)

$$\left\{(z = (x - x1) * y) \wedge (x1 \geq 0) \wedge (x1 > 0)\right\}\ \texttt{x1 = x1 - 1}\ \left\{(z + y = (x - x1) * y) \wedge (x1 \geq 0)\right\}$$

wobei (beachte: $x1$ ist Ganzzahl)

$$
\begin{aligned}
& (z = (x - x1) * y) \wedge (x1 \geq 0) \wedge (x1 > 0) \\
\Leftrightarrow\ & (z + y = (x - x1) * y + y) \wedge (x1 \geq 0) \wedge (x1 > 0) \\
\Leftrightarrow\ & (z + y = (x - x1 + 1) * y) \wedge (x1 \geq 0) \wedge (x1 > 0) \\
\Leftrightarrow\ & (z + y = (x - (x1 - 1)) * y) \wedge (x1 \geq 0) \wedge (x1 > 0) \\
\Leftrightarrow\ & (z + y = (x - (x1 - 1)) * y) \wedge (x1 \geq 0) \wedge (x1 - 1 \geq 0)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

AUFGABE 2 – TEIL (A)

$A = \text{true} \wedge (y < 0)$

$B = \text{true} \wedge \neg (y < 0)$

$C = A$

$D = A$

$E = (-(3 * y) + 1 \geq 0)$

$F = E$

$G = E$

$H = (-x + 1 \geq 0)$

$J = H$

$K = (y \geq 0)$

$L = \text{stärkere Vorbedingung}$

$M = \text{Sequenzregel}$

AUFGABE 2 – TEIL (B)

zu zeigen: true $\wedge$ $(y < 0) \;\Rightarrow\; (-3 * y + 1 \geq 0)$

$$\begin{aligned} \text{true} \wedge (y < 0) &\Rightarrow & y &< 0 \\ &\Rightarrow & -3 * y &> 0 \\ &\Rightarrow & -3 * y + 1 &> 1 \\ &\Rightarrow & -3 * y + 1 &\geq 0 \end{aligned}$$