

Aufgabe 1

Donnerstag, 7. Mai 2020 18:11

Aufgabe 1 (AGS 12.3.20)

Zeigen Sie unter Verwendung der folgenden Definitionen durch strukturelle Induktion die Gültigkeit der Gleichung $\text{sum} (\text{foo } xs) = 2 * \text{sum } xs - \text{length } xs$ für jedes $xs :: [\text{Int}]$.

```
1 foo :: [Int] -> [Int]
2 foo []      = []
3 foo (x:xs) = x : x : (-1) : foo xs
4
5 sum :: [Int] -> Int
6 sum []      = 0
7 sum (x:xs) = x + sum xs
8
9 length :: [Int] -> Int
10 length []      = 0
11 length (x:xs) = 1 + length xs
```

Zeigen Sie dazu den Induktionsanfang und den Induktionsschritt; geben Sie beim Induktionsschritt die Induktionsvoraussetzung an. Geben Sie bei jeder Umformung die benutzte *Definition*, *Eigenschaft* bzw. *Induktionsvoraussetzung* an. Quantifizieren Sie alle Variablen.

(IA) Sei $xs = []$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ links: } \text{sum} (\text{foo } xs) &= \text{sum} (\text{foo } []) \\ &\stackrel{(\#2)}{=} \text{sum } [] \\ &\stackrel{(\#6)}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ rechts: } 2 * \text{sum } xs - \text{length } xs \\ &= 2 * \text{sum } [] - \text{length } [] \\ &\stackrel{(\#10)}{=} 2 * \text{sum } [] - 0 \\ &\stackrel{(\#6)}{=} 2 * 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

(IV) Sei $xs :: [\text{Int}]$, sodass gilt

$$\text{sum} (\text{foo } xs) = 2 * \text{sum } xs - \text{length } xs$$

(IS) Sei $x :: \text{Int}$. Dann gilt:

$$\text{sum} (\text{foo } (x:xs))$$

$$\text{sum (foo (x:xs))}$$

#3
=

$$\text{sum (x : x : (-1) : foo xs)}$$

3. #7
=

$$x + x + (-1) + \text{sum (foo xs)}$$

IV
=

$$x + x + (-1) + 2 * \text{sum xs} - \text{length xs}$$

Comm., Distr.
=

$$2 * x + 2 * \text{sum xs} - (1 + \text{length xs})$$

Distr.
=

$$2 * (\underline{x + \text{sum xs}}) - (1 + \text{length xs})$$

#7
=

$$2 * \text{sum (x:xs)} - (1 + \text{length xs})$$

#11
=

$$2 * \text{sum (x:xs)} - \underline{\text{length (x:xs)}}$$