Aufgabe 1a

Aufgabe 1 (AGS 12.4.1 ⋆)

(a) Bestimmen Sie für jeden der folgenden λ-Terme t die Mengen $FV(t)$ und $GV(t)$:

- $(\lambda x.x\ y)\ (\lambda y.y)$
- $(\lambda x.(\lambda y.z\ (\lambda z.z\ (\lambda x.y))))$
- $(\lambda x.(\lambda y.x\ z\ (y\ z)))\ (\lambda x.y\ (\lambda y.y))$

- $(\lambda x.\underset{\text{geb.}}{\underline{x}}\ \underset{\text{frei}}{\underline{y}})\ (\lambda y.\underset{\text{geb.}}{\underline{y}})$

$$
\begin{aligned}
GV((\lambda x.xy)(\lambda y.y)) &= GV(\lambda x.xy) \cup GV(\lambda y.y)\\
&= GV(xy) \cup \underline{\{x\}} \cup GV(y) \cup \{y\}\\
&= GV(\underline{x}) \cup GV(\underline{y}) \cup \underline{\{x\}} \cup GV(\underline{y}) \cup \{y\}\\
&= \emptyset \cup \emptyset \cup \{x\} \cup \emptyset \cup \{y\}\\
&= \{x, y\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
FV((\lambda x.xy)(\lambda y.y)) &= FV(\lambda x.xy) \cup FV(\lambda y.y)\\
&= FV(xy) \setminus \{x\} \cup FV(y) \setminus \{y\}\\
&= (FV(\underline{x}) \cup FV(\underline{y})) \setminus \{x\} \cup FV(\underline{y}) \setminus \{y\}\\
&= (\{x\} \cup \{y\}) \setminus \{x\} \cup \{y\} \setminus \{y\}\\
&= \{x, y\} \setminus \{x\} \cup \{y\} \setminus \{y\}\\
&= \{y\} \cup \emptyset\\
&= \{y\} \ //
\end{aligned}
$$

- $(\lambda \underset{\text{geb}}{\underline{x}}.(\lambda \underset{\text{geb}}{y}.\underset{\text{frei}}{\underline{z}}\ (\lambda \underset{\text{geb}}{z}.\underset{\text{geb}}{z}\ (\lambda \underset{\text{geb}}{x}.\underset{\text{geb}}{\underline{y}}))))$

$GV = \{x, y, z\}$, $FV = \{z\}$

- $(\lambda \underset{\uparrow}{x}.(\lambda \underset{\uparrow}{y}.\underset{\text{geb}}{x}\ \underset{\text{frei}}{z}\ (\underset{\text{geb}}{y}\ \underset{\text{frei}}{z})))\ (\lambda \underset{\uparrow}{x}.\underset{\text{frei}}{y}\ (\lambda \underset{\uparrow}{y}.\underset{\text{geb}}{y}))$

$\uparrow$ = geb.

$GV = \{x, y\}$ $\quad$ $FV = \{y, z\}$

Aufgabe 1b

(b) Reduzieren Sie die folgenden λ-Terme zu Normalformen. Schreiben Sie – bevor Sie einen Ableitungsschritt ausführen – für die relevanten (Teil-)Ausdrücke die Mengen der freien bzw. der gebundenen Vorkommen von Variablen auf.

- $(\lambda x.(\lambda y.x\ z\ (y\ z)))\ (\lambda x.y\ (\lambda y.y))$
- $(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.z)))\ x\ (+\ y\ 1)$
- $(\lambda x.(\lambda y.x\ (\lambda z.y\ z)))\ (((\lambda x.(\lambda y.y))\ 8)\ (\lambda x.(\lambda y.y)\ x))$
- $(\lambda h.(\lambda x.h\ (x\ x))\ (\lambda x.h\ (x\ x)))\ ((\lambda x.x)\ (+\ 1\ 5))$
- $(\lambda f.(\lambda a.(\lambda b.f\ a\ b)))\ (\lambda x.(\lambda y.x))$

- $(\lambda x.\underbrace{(\lambda y.x\ z\ (y\ z))}_{GV=\{y\}})\ \underbrace{(\lambda x.y\ (\lambda y.y))}_{FV=\{y\}}$

$GV \cap FV = \{y\} \cap \{y\} = \{y\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow_\alpha\ (\lambda x.\underbrace{(\lambda y_1.x\ z\ (y_1\ z))}_{GV=\{y_1\}})\ \underbrace{(\lambda x.y\ (\lambda y.y))}_{FV=\{y\}}$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda y_1.(\lambda x.\underbrace{y\ (\lambda y.y)}_{GV=\{y\}})\ \underbrace{z}_{FV=\{z\}}\ (y_1\ z))$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda y_1.(y\ (\lambda y.y))\ (y_1\ z))$

$=(\lambda y_1.\ y\ (\lambda y.y)\ (y_1\ z))$

- $((\lambda x.\underbrace{(\lambda y.(\lambda z.z))}_{GV=\{y,z\}})\ \underbrace{x}_{FV=\{x\}})\ (+\ y\ 1)$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda y.\underbrace{(\lambda z.z)}_{GV=\{z\}})\ \underbrace{(+\ y\ 1)}_{FV=\{y\}}$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda z.z)$

- $(\lambda x.(\lambda y.x\ (\lambda z.y\ z)))\ (((\lambda x.\underbrace{(\lambda y.y)}_{GV=\{y\}})\ \underbrace{8}_{FV=\emptyset})\ (\lambda x.(\lambda y.y)\ x))$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda x.(\lambda y.x\ (\lambda z.y\ z)))\ ((\lambda y.y)\ (\lambda x.\underbrace{(\lambda y.y)}_{GV=\emptyset}\ \underbrace{x}_{FV=\{x\}}))$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda x.(\lambda y.x\ (\lambda z.y\ z)))\ ((\lambda y.\underbrace{y}_{GV=\emptyset})\ \underbrace{(\lambda x.x)}_{FV=\emptyset})$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda x.\underbrace{(\lambda y.x\ (\lambda z.y\ z))}_{GV=\{y,z\}})\ \underbrace{(\lambda x.x)}_{FV=\emptyset}$

$\Rightarrow_\beta \; (\lambda x.\underbrace{(\lambda y.\,x\,(\lambda z.\,y\,z))}_{GV=\{y,z\}})\;\underbrace{(\lambda x.\,x)}_{FV=\emptyset}$

$\Rightarrow_\beta \; (\lambda y.\;(\lambda x.\underbrace{x}_{GV=\emptyset})\;\underbrace{(\lambda z.\,y\,z)}_{FV=\{y\}})$

$\Rightarrow_\beta \; (\lambda y.(\lambda z.\,y\,z)) = (\lambda y z.\,y z)$

- $(\lambda h.(\lambda x.h\;(x\;x))\;(\lambda x.h\;(x\;x)))\;((\lambda x.\underbrace{x}_{GV=\emptyset})\;\underbrace{(+\;1\;5)}_{FV=\emptyset})$

$\Rightarrow_\beta \; (\lambda h.\;(\lambda x.\underbrace{h\;(x\;x)}_{GV=\emptyset}))\;\underbrace{(\lambda x.\,h\;(x\;x))}_{FV=\{h\}})\;(+\;1\;5)$

$\Rightarrow_\beta \; (\lambda h.\;h\;(\lambda x.\,h\,(x\;x))(\lambda x.\,h\,(x\;x)))\;(+\;1\;5)$

$\Rightarrow_\beta \; \ldots\; \underbrace{\rightarrow \text{unendliche Rekursion}}_{GV=\{x\}} \quad \underbrace{}_{FV=\emptyset}$

$\Rightarrow_\beta \; (+\;1\;5)\;\underbrace{(\lambda x.\;(+\;1\;5)\;(x\;x))}\underbrace{(\lambda x.\;(+\;1\;5)\;(x\;x))}$

$\Rightarrow$ es ex. keine Normalform

- $(\lambda f.\underbrace{(\lambda a.(\lambda b.f\;a\;b))}_{GV=\{a,b\}})\;\underbrace{(\lambda x.(\lambda y.x))}_{FV=\emptyset}$

$\Rightarrow_\beta \; (\lambda a.\,(\lambda b.\;(\lambda x.\underbrace{(\lambda y.\,x)}_{GV=\{y\}})\;\underbrace{a}_{FV=\{a\}}\;b\;))$

$\Rightarrow_\beta \; (\lambda a.\;(\lambda b.\;(\lambda y.\underbrace{a}_{GV=\emptyset})\;\underbrace{b}_{FV=\{b\}}))$

$\Rightarrow_\beta \; (\lambda a.\,(\lambda b.\;a)) = (\lambda ab.\,a)$