Aufgabe 1a

Freitag, 22. Mai 2020

Aufgabe 1 (AGS 12.4.32)

(a) Berechnen Sie die Normalform des λ-Terms $(\lambda f x.\, f\, f\, x)\ (\lambda y.\, x)\ z$, indem Sie ihn *schrittweise* reduzieren. Geben Sie dabei vor jedem Schritt für die relevanten Teilausdrücke die Mengen der gebunden bzw. frei vorkommenden Variablen an.

$$(\lambda f.\,(\lambda x.\ \ldots))$$

$$((\lambda f\, \underbrace{x.\ f\ f\ x}_{GV=\{x\}})\ \underbrace{(\lambda y.\, x)}_{FV=\{x\}})\ z$$

$$\Rightarrow^{\alpha}\ (\cancel{\lambda f}\ \underbrace{x_1.\ \bar{f}\ \bar{f}\ x_1}_{GV=\{x_1\}})\ \underbrace{(\lambda y.\ x)}_{FV=\{x\}}\ \ z$$

$$\Rightarrow^{\beta}\ (\lambda x_1.\ (\cancel{\lambda y}.\underbrace{x}_{GV=\varnothing})\ \underbrace{(\lambda y.x)}_{FV=\{x\}}\ x_1\ )\ z$$

$$\Rightarrow^{\beta}\ (\lambda x_1.\ \underbrace{x\ \ x_1}_{GV=\varnothing}\ )\ \underbrace{z}_{FV=\{z\}}$$

$$\Rightarrow^{\beta}\ \ x\ z\ /\!/$$

Aufgabe 1b

Freitag, 22. Mai 2020

(b) Gegeben sei der λ-Term

$(0 == x-y)\ (y+z)$

$$\boxed{\langle F\rangle} = \Big(\lambda fxyz.\langle ite\rangle\ (\langle iszero\rangle\ (\langle sub\rangle\ x\, y))\ (\langle add\rangle\ y\, z)$$

$$\Big(\langle succ\rangle\ (f\,(\langle pred\rangle\ x)\ (\langle succ\rangle\ y)\ (\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ z))\Big)\Big)\,.$$

Berechnen Sie schrittweise die Normalform des Terms $\langle Y\rangle\langle F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle$. Schreiben Sie für jeden Aufruf von $\langle F\rangle$ jeweils zwei Zeilen: eine in der Sie die Werte der Parameter des Aufrufs protokollieren, und eine in der Sie ihre Auswertung skizzieren. Falls angebracht, führen Sie im Rechenprozess zweckmäßige Abkürzungen der λ-Terme ein.

Nebenrechnung: $\boxed{\langle Y\rangle\langle F\rangle} = (\lambda z.(\lambda u.z(u\,u))(\lambda u.z(u\,u)))\langle F\rangle$

$\Rightarrow^{\beta}\ (\lambda u.\langle F\rangle(u\,u))\underbrace{(\lambda u.\langle F\rangle(u\,u))}_{t_F} = (t_F\ t_F) = \langle Y_F\rangle$

$\Rightarrow^{\beta}\ \langle F\rangle((\lambda u.\langle F\rangle(u\,u))(\lambda u.\langle F\rangle(u\,u)))$

$= \langle F\rangle\ (\ t_F\ \ t_F\ )$

$= \langle F\rangle\langle Y_F\rangle$

$$\begin{tikzcd} \langle Y\rangle\langle F\rangle \arrow[r, Rightarrow] \arrow[rr, bend right, "1"] & \langle Y_F\rangle \arrow[r, Rightarrow] \arrow[r, bend left, "2"] & \langle F\rangle\langle Y_F\rangle \end{tikzcd}$$

$\langle Y\rangle\langle F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle \overset{1}{\Rightarrow^*} \langle F\rangle\langle Y_F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle$

$\Rightarrow^*\ \langle ite\rangle\ \underbrace{(\langle iszero\rangle\ (\underbrace{\langle sub\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 1\rangle}))}_{\Rightarrow^*\langle false\rangle}\ (\dots)$

$(\langle succ\rangle\ (\langle Y_F\rangle\ (\underbrace{\langle pred\rangle\langle 6\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 5\rangle})(\underbrace{\langle succ\rangle\langle 5\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 6\rangle})(\underbrace{\langle mult\rangle\langle 2\rangle\langle 3\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 6\rangle})))$

$\Rightarrow^*\ \langle succ\rangle\ (\langle Y_F\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle)$

$\overset{2}{\Rightarrow^*}\ \langle succ\rangle\ (\langle F\rangle\langle Y_F\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle)$

$\Rightarrow^*\ \langle succ\rangle\ (\ \langle ite\rangle\ \underbrace{(\langle iszero\rangle(\underbrace{\langle sub\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 0\rangle}))}_{\Rightarrow^*\langle true\rangle}\ (\underbrace{\langle add\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 12\rangle})\ (\dots))$

$\Rightarrow^*\ \langle succ\rangle\ \langle 12\rangle$

$\Rightarrow^*\ \langle 13\rangle$

Aufgabe 1c

Freitag, 22. Mai 2020

(c) Gegeben sei die folgende Haskell-Funktion:

```
g :: Int -> Int -> Int
g 0 y = 2 * (y + 1)
g x 0 = 2 * (x + 1)
g x y = 4 + g (x - 1) (y - 1)
```

Haskell-Ergebnis

Geben Sie einen λ-Term $\langle G\rangle$ an, so dass $\langle Y\rangle\langle G\rangle\langle x\rangle\langle y\rangle \Rightarrow^* \langle \mathtt{g}\ x\ y\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt.

Lambda-Ergebnis

$$
\begin{aligned}
\langle G\rangle = (\lambda \underline{gxy} . (&\langle ite\rangle\ (\langle iszero\rangle\ x) \\
&(\langle mult\rangle \langle 2\rangle\ (\langle succ\rangle\ y)) \\
&(\langle ite\rangle\ (\langle iszero\rangle\ y) \\
&\quad (\langle mult\rangle \langle 2\rangle (\langle succ\rangle\ x)) \\
&\quad (\langle add\rangle \langle 4\rangle\ g\ (\langle pred\rangle\ x)(\langle pred\rangle\ y)) \\
&) \\
&) \\
)
\end{aligned}
$$

$\langle Y_G\rangle \Rightarrow^* \langle G\rangle\underline{\langle Y_G\rangle\ldots}$