

PROGRAMMIERUNG

ÜBUNG 7: λ -KALKÜL (TEIL 2)

Eric Kunze

`eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de`

1. Funktionale Programmierung
 - 1.1 Einführung in Haskell: Listen
 - 1.2 Algebraische Datentypen
 - 1.3 Funktionen höherer Ordnung
 - 1.4 Typpolymorphie & Unifikation
 - 1.5 Beweis von Programmeigenschaften
 - 1.6 **λ -Kalkül**
2. Logikprogrammierung
3. Implementierung einer imperativen Programmiersprache
4. Verifikation von Programmeigenschaften
5. H_0 – ein einfacher Kern von Haskell

Der λ -Kalkül

Atome. x, y

Abstraktion. $(\lambda x. t)$ ($f(x) = t$, anonyme Funktion)

Applikation. $(t_1 \ t_2)$

Verabredungen:

- ▶ Applikation ist *linksassoziativ*:

$$((t_1 \ t_2) \ t_3) = t_1 \ t_2 \ t_3 \text{ für alle } t_1, t_2, t_3 \in \lambda(\Sigma)$$

- ▶ mehrfache Abstraktion:

$$(\lambda x_1. (\lambda x_2. (\lambda x_3. t))) = (\lambda x_1 x_2 x_3. t) \text{ für alle } t \in \lambda(\Sigma)$$

- ▶ Applikation vor Abstraktion:

$$\begin{aligned} (\lambda x. xy) &= (\lambda x. (xy)) \\ &\neq ((\lambda x. x)y) \end{aligned}$$

β -Reduktion

Seien $s, t \in \lambda(\Sigma)$ gültige λ -Terme und es gilt $GV(t) \cap FV(s) = \emptyset$.

$$(\lambda x. t) s \longrightarrow_{\beta} t[x/s]$$

α -Konversion

Sei $t \in \lambda(\Sigma)$ und $z \notin GV(t) \cup FV(t)$.

$$(\lambda x. t) \longrightarrow_{\alpha} \lambda z. t[x/z]$$

Dadurch, dass wir im Folgenden keine Symbole mehr zulassen (d.h. $\Sigma = \emptyset$), benötigen wir eine alternative Charakterisierung dieser. Zuerst beschäftigen uns die natürlichen Zahlen.

Darstellung der natürlichen Zahlen: *Church-Numerals*

$$\langle 0 \rangle = (\lambda xy . y)$$

$$\langle 1 \rangle = (\lambda xy . xy)$$

$$\langle 2 \rangle = (\lambda xy . x(xy))$$

$$\vdots$$

$$\langle n \rangle = (\lambda xy . \underbrace{x(x \dots (xy) \dots)}_n))$$

FIXPUNKTKOMBINATOR UND REKURSION

- ▶ Ein $t \in \Sigma(\lambda)$ heißt **geschlossener Term**, falls $FV(t) = \emptyset$.
Ein geschlossener Term heißt auch **Kombinator**.
- ▶ **Fixpunktkombinator.**
 $\langle Y \rangle = \left(\lambda z. (\lambda u. z(uu)) (\lambda u. z(uu)) \right) \in \lambda(\emptyset)$
- ▶ Der Fixpunktkombinator ermöglicht Rekursion.
- ▶ weitere definierte λ -Terme (siehe Skript S. 198f.):

$$\langle true \rangle = (\lambda xy. x) \qquad \langle false \rangle = (\lambda xy. y)$$

$$\langle succ \rangle = (\lambda z. (\lambda xy. x(zxy))) \qquad \langle pred \rangle \langle 0 \rangle \Rightarrow^* \langle 0 \rangle$$

$$\langle succ \rangle \langle n \rangle \Rightarrow^* \langle n + 1 \rangle \qquad \langle pred \rangle \langle n \rangle \Rightarrow^* \langle n - 1 \rangle$$

$$\langle ite \rangle s s_1 s_2 \Rightarrow^* \begin{cases} s_1 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle true \rangle \\ s_2 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle false \rangle \end{cases}$$

Übungsblatt 7

Aufgabe 1

AUFGABE 1 – TEIL (A)

$$\begin{aligned} & (\lambda \underbrace{f\ x.f\ f\ x}_{GV=\{x\}}) (\lambda \underbrace{y.x}_{FV=\{x\}}) z \\ \Rightarrow_{\alpha} & (\lambda \underbrace{f\ x_1.f\ f\ x_1}_{GV=\{x_1\}}) (\lambda \underbrace{y.x}_{FV=\{x\}}) z \\ \Rightarrow_{\beta} & (\lambda x_1. (\lambda y. \underbrace{x}_{GV=\emptyset}) (\lambda \underbrace{y.x}_{FV=\{x\}}) x_1) z \\ \Rightarrow_{\beta} & (\lambda x_1. \underbrace{xx_1}_{GV=\emptyset}) \underbrace{z}_{FV=\{z\}} \\ \Rightarrow_{\beta} & xz \end{aligned}$$

AUFGABE 1 – TEIL (B)

$$\langle F \rangle = \left(\lambda fxyz . \langle ite \rangle \left(\langle iszero \rangle (\langle sub \rangle xy) \right) \left(\langle add \rangle yz \right) \left(\langle succ \rangle (f (\langle pred \rangle x) (\langle succ \rangle y) (\langle mult \rangle \langle 2 \rangle z)) \right) \right)$$

Nebenrechnung: Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle \langle F \rangle &= \left(\lambda z . (\lambda u . z(uu)) (\lambda u . z(uu)) \right) \langle F \rangle \\ &\Rightarrow^\beta \left(\lambda u . \langle F \rangle (uu) \right) \left(\lambda u . \langle F \rangle (uu) \right) \quad =: \langle Y_F \rangle \\ &\Rightarrow^\beta \langle F \rangle \langle Y_F \rangle \end{aligned}$$

AUFGABE 1 – TEIL (B)

$$\begin{aligned}
 \langle Y \rangle \langle F \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle \langle 3 \rangle &\Rightarrow^* \langle F \rangle \langle Y_F \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle \langle 3 \rangle \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{ite} \rangle (\underbrace{\langle \text{iszero} \rangle (\langle \text{sub} \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle)}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle}) (\dots) \\
 &\quad (\langle \text{succ} \rangle (\langle Y_F \rangle (\underbrace{\langle \text{pred} \rangle \langle 6 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 5 \rangle}) (\underbrace{\langle \text{succ} \rangle \langle 5 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 6 \rangle}) (\underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 6 \rangle})))) \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{succ} \rangle (\langle Y_F \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle) \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{succ} \rangle (\langle F \rangle \langle Y_F \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle) \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{succ} \rangle (\langle \text{ite} \rangle (\underbrace{\langle \text{iszero} \rangle (\langle \text{sub} \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle)}_{\Rightarrow^* \langle \text{true} \rangle}) (\underbrace{\langle \text{add} \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 12 \rangle}) (\dots))) \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{succ} \rangle \langle 12 \rangle \\
 &\Rightarrow^* \langle 13 \rangle
 \end{aligned}$$

AUFGABE 1 – TEIL (C)

$$\langle G \rangle = \left(\lambda gxy . \left(\langle ite \rangle (\langle iszero \rangle x) \right. \right. \\
\left. \left. \left(\langle mult \rangle \langle 2 \rangle (\langle succ \rangle y) \right) \right. \right. \\
\left. \left. \left(\langle ite \rangle (\langle iszero \rangle y) \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left(\langle mult \rangle \langle 2 \rangle (\langle succ \rangle x) \right) \right. \right. \\
\left. \left. \left(\langle add \rangle \langle 4 \rangle g (\langle pred \rangle x (\langle pred \rangle y)) \right) \right. \right. \\
\left. \left. \right. \right) \\
\left. \right) \\
\left. \right)$$

Übungsblatt 7

Aufgabe 2

AUFGABE 2 – TEIL (A)

$$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad g(x, y) := \begin{cases} x * x & \text{für } y = 0 \\ g(2 * x, y - 1) & \text{für } y \geq 1 \end{cases}$$

$$\langle G \rangle = \left(\lambda gxy . \left(\langle ite \rangle \left(\langle iszero \rangle y \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left(\langle mult \rangle x x \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left(g \left(\langle mult \rangle \langle 2 \rangle x \right) \left(\langle pred \rangle y \right) \right) \right) \right)$$

AUFGABE 2 – TEIL (B)

$$\langle G \rangle = \left(\lambda gxy . \langle ite \rangle \left(\langle iszero \rangle y \right) \left(\langle mult \rangle x x \right) \left(g \left(\langle mult \rangle \langle 2 \rangle x \right) \left(\langle pred \rangle y \right) \right) \right)$$

Nebenrechnung: Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle \langle G \rangle &= \left(\lambda z . (\lambda u . z(uu)) (\lambda u . z(uu)) \right) \langle G \rangle \\ &\Rightarrow^\beta \left(\lambda u . \langle G \rangle (uu) \right) \left(\lambda u . \langle G \rangle (uu) \right) \quad =: \langle Y_G \rangle \\ &\Rightarrow^\beta \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \end{aligned}$$

AUFGABE 2 – TEIL (B)

$$\begin{aligned}
 & \langle Y \rangle \langle G \rangle \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{ite} \rangle \left(\underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 3 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle} \right) \left(\dots \right) \left(\langle Y_G \rangle \left(\underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2 \rangle} \right) \left(\underbrace{\langle \text{pred} \rangle \langle 3 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2 \rangle} \right) \right) \Rightarrow^* \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 2 \rangle \langle 2 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{ite} \rangle \left(\underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 2 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle} \right) \left(\dots \right) \left(\langle Y_G \rangle \left(\underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 2 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 4 \rangle} \right) \left(\underbrace{\langle \text{pred} \rangle \langle 2 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 1 \rangle} \right) \right) \Rightarrow^* \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 4 \rangle \langle 1 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{ite} \rangle \left(\underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle} \right) \left(\dots \right) \left(\langle Y_G \rangle \left(\underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 4 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 8 \rangle} \right) \left(\underbrace{\langle \text{pred} \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 0 \rangle} \right) \right) \Rightarrow^* \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 8 \rangle \langle 0 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{ite} \rangle \left(\underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 0 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{true} \rangle} \right) \left(\underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 8 \rangle \langle 8 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 64 \rangle} \right) \left(\dots \right) \Rightarrow^* \langle 64 \rangle
 \end{aligned}$$

Fragen?

Übungsblatt 7

Zusatzaufgabe 1

ZUSATZAUFGABE 1

$$\begin{aligned}\langle \text{pow} \rangle \langle 2 \rangle &= (\lambda n f z . n (\lambda g x . g(gx)) fz) (\lambda x y . x(xy)) \\&\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda x y . x(xy)) (\lambda g x . g(gx)) f z) \\&\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y . (\lambda g x . g(gx)) ((\lambda g x . g(gx)) y))) f z \\&\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y . (\lambda x . ((\lambda g x . g(gx)) y) (((\lambda g x . g(gx)) y) x)))) f z \\&\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y x . ((\lambda g x . g(gx)) y) (((\lambda g x . g(gx)) y) x))) f z \\&\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y x . (\lambda x . y(yx)) ((\lambda x . y(yx)) x))) f z \\&\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y x . (\lambda x . y(yx)) (y(yx)))) f z \\&\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y x . y (y (y(yx)))) f z) \\&\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda x . f (f (f (f x)))) z) \\&\Rightarrow^\beta (\lambda f z . f (f (f (f z)))) = \langle 4 \rangle\end{aligned}$$

Teil (b)

$$f(n) = s^n$$

Teil (c)

$$g(n, m) = m^n$$

$$\langle \text{pow}' \rangle = \left(\lambda n \textcolor{brown}{m} \text{fz} . n \textcolor{brown}{m} \text{fz} \right)$$