PROGRAMMIERUNG

ÜBUNG 7: λ-KALKÜL (TEIL 2)

Eric Kunze
eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

INHALT

Der λ–Kalkül

Atome. x, y

Abstraktion. $(\lambda x.t)$ ($f(x) = t$, anonyme Funktion)

Applikation. $(t_1 \ \ t_2)$

Verabredungen:

- Applikation ist *linksassoziativ*:
  $((t_1\, t_2)\, t_3) = t_1\, t_2\, t_3$ für alle $t_1, t_2, t_3 \in \lambda(\Sigma)$
- mehrfache Abstraktion:
  $(\lambda x_1.(\lambda x_2.(\lambda x_3.t)))) = (\lambda x_1 x_2 x_3.t)$ für alle $t \in \lambda(\Sigma)$
- Applikation vor Abstraktion:

$$\begin{aligned}(\lambda x.xy) &= (\lambda x.(xy)) \\ &\neq ((\lambda x.x)y)\end{aligned}$$

α-KONVERSION & β-REDUKTION

β–Reduktion

Seien $s, t \in \lambda(\Sigma)$ gültige λ-Terme und es gilt $GV(t) \cap FV(s) = \emptyset$.

$$(\lambda x.t)\, s \quad \longrightarrow_\beta \quad t[x/s]$$

α–Konversion

Sei $t \in \lambda(\Sigma)$ und $z \notin GV(t) \cup FV(t)$.

$$(\lambda x.t) \quad \longrightarrow_\alpha \quad \lambda z.t[x/z]$$

CHURCH-NUMERALS

Dadurch, dass wir im Folgenden keine Symbole mehr zulassen (d.h. $\Sigma = \emptyset$), benötigen wir eine alternative Charakterisierung dieser. Zuerst beschäftigen uns die natürlichen Zahlen.

Darstellung der natürlichen Zahlen: *Church-Numerals*

$$\begin{aligned}
\langle 0 \rangle &= (\lambda xy\,.\,y) \\
\langle 1 \rangle &= (\lambda xy\,.\,xy) \\
\langle 2 \rangle &= (\lambda xy\,.\,x(xy)) \\
&\vdots \\
\langle n \rangle &= (\lambda xy\,.\,\underbrace{x(x\ldots(x}_{n}\,y)\ldots))
\end{aligned}$$

FIXPUNKTKOMBINATOR UND REKURSION

- Ein $t \in \Sigma(\lambda)$ heißt **geschlossener Term**, falls $FV(t) = \emptyset$.
  Ein geschlossender Term heißt auch **Kombinator**.
- **Fixpunktkombinator.**
  $\langle Y \rangle = \Big(\lambda z.\ (\lambda u.z(uu))\ (\lambda u.z(uu))\Big) \in \lambda(\emptyset)$
- Der Fixpunktkombinator ermöglicht Rekursion.
- weitere definierte λ-Terme (siehe Skript S. 198f.):

$$\langle true \rangle = (\lambda xy.x) \qquad \langle false \rangle = (\lambda xy.y)$$

$$\langle succ \rangle = (\lambda z.(\lambda xy.x(zxy))) \qquad \langle pred \rangle \langle 0 \rangle \Rightarrow^* \langle 0 \rangle$$

$$\langle succ \rangle \langle n \rangle \Rightarrow^* \langle n+1 \rangle \qquad \langle pred \rangle \langle n \rangle \Rightarrow^* \langle n-1 \rangle$$

$$\langle ite \rangle\ s\ s_1\ s_2 \Rightarrow^* \begin{cases} s_1 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle true \rangle \\ s_2 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle false \rangle \end{cases}$$

Übungsblatt 7

Aufgabe 1

AUFGABE 1 – TEIL (A)

$$
\begin{aligned}
& (\lambda f\, \underbrace{x.f\, f\, x}_{\mathrm{GV}=\{x\}})\ (\underbrace{\lambda y.x}_{\mathrm{FV}=\{x\}})\ z \\
\Rightarrow_\alpha\quad & (\lambda f\, \underbrace{x_1.f\, f\, x_1}_{\mathrm{GV}=\{x_1\}})\ (\underbrace{\lambda y.x}_{\mathrm{FV}=\{x\}})\ z \\
\Rightarrow_\beta\quad & (\lambda x_1.(\lambda y.\ \underbrace{x}_{\mathrm{GV}=\emptyset})\ (\underbrace{\lambda y.x}_{\mathrm{FV}=\{x\}})\ x_1)\ z \\
\Rightarrow_\beta\quad & (\lambda x_1.\ \underbrace{x x_1}_{\mathrm{GV}=\emptyset})\ \underbrace{z}_{\mathrm{FV}=\{z\}} \\
\Rightarrow_\beta\quad & xz
\end{aligned}
$$

AUFGABE 1 – TEIL (B)

$$\langle F \rangle = \Big(\lambda fxyz\,.\,\langle ite \rangle\,\big(\langle iszero \rangle\,(\langle sub \rangle xy)\big)\,\big(\langle add \rangle yz\big)\,\big(\langle succ \rangle\,(f\,(\langle pred \rangle x)\,(\langle succ \rangle y)\,(\langle mult \rangle\,\langle 2 \rangle z))\big)\Big)$$

Nebenrechnung: Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned}
\langle Y \rangle \langle F \rangle &= \Big(\lambda z.\,(\lambda u.z(uu))\,(\lambda u.z(uu))\Big)\,\langle F \rangle \\
&\Rightarrow^{\beta} \quad \Big(\lambda u.\langle F \rangle(uu)\Big)\,\Big(\lambda u.\langle F \rangle(uu)\Big) \qquad =: \langle Y_F \rangle \\
&\Rightarrow^{\beta} \quad \langle F \rangle \langle Y_F \rangle
\end{aligned}$$

AUFGABE 1 – TEIL (B)

$$
\begin{aligned}
\langle Y\rangle\langle F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle &\Rightarrow^* \langle F\rangle\langle Y_F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle \\
&\Rightarrow^* \langle ite\rangle\ \underbrace{(\langle iszero\rangle\ (\langle sub\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle))}_{\Rightarrow^* \langle false\rangle}\ (\ldots) \\
&\qquad\qquad (\langle succ\rangle(\langle Y_F\rangle\underbrace{(\langle pred\rangle\langle 6\rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 5\rangle}\underbrace{(\langle succ\rangle\langle 5\rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 6\rangle}\underbrace{(\langle mult\rangle\langle 2\rangle\langle 3\rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 6\rangle})) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle Y_F\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle F\rangle\langle Y_F\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle ite\rangle\ \underbrace{(\langle iszero\rangle(\langle sub\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle))}_{\Rightarrow^* \langle true\rangle}\ \underbrace{(\langle add\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 12\rangle}\ (\ldots)\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ \langle 12\rangle \\
&\Rightarrow^* \langle 13\rangle
\end{aligned}
$$

AUFGABE 1 – TEIL (C)

$$
\begin{aligned}
\langle G \rangle = \Bigg(\lambda gxy \,.\, \Big(& \langle ite \rangle \; (\langle iszero \rangle \; x) \\
& \quad (\langle mult \rangle \; \langle 2 \rangle \; (\langle succ \rangle y) \;) \\
& \quad \Big(\langle ite \rangle \; (\langle iszero \rangle \; y) \\
& \qquad\quad (\langle mult \rangle \; \langle 2 \rangle \; (\langle succ \rangle x)) \\
& \qquad\quad (\langle add \rangle \; \langle 4 \rangle \;\; g \; (\langle pred \rangle x \; \langle pred \rangle y) \;) \\
& \quad \Big) \\
& \Big) \\
\Bigg) &
\end{aligned}
$$

Übungsblatt 7

Aufgabe 2

AUFGABE 2 – TEIL (A)

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad g(x,y) := \begin{cases} x * x & \text{für } y = 0 \\ g(2 * x, y-1) & \text{für } y \geq 1 \end{cases}$$

$$\langle G \rangle = \Bigg(\lambda gxy \,.\, \Bigg(\langle ite \rangle \Big(\langle iszero \rangle\, y \Big) \Big(\langle mult \rangle\, x\, x \Big) \Big(g\, \big(\langle mult \rangle\, \langle 2 \rangle\, x \big)\, \big(\langle pred \rangle\, y \big) \Big) \Bigg) \Bigg)$$

AUFGABE 2 – TEIL (B)

$$\langle G\rangle = \Big(\lambda\, gxy\,.\,\langle ite\rangle\, \big(\langle iszero\rangle\, y\big)\, \big(\langle mult\rangle\, x\, x\big)\, \big(g\, (\langle mult\rangle\, \langle 2\rangle\, x)\, (\langle pred\rangle\, y)\big)\Big)$$

Nebenrechnung: Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned}
\langle Y\rangle\langle G\rangle = {} & \Big(\lambda z.\, (\lambda u.z(uu))\, (\lambda u.z(uu))\Big)\, \langle G\rangle \\
\Rightarrow^{\beta} \quad & \Big(\lambda u.\langle G\rangle(uu)\Big)\, \Big(\lambda u.\langle G\rangle(uu)\Big) \qquad =: \langle Y_G\rangle \\
\Rightarrow^{\beta} \quad & \langle G\rangle\langle Y_G\rangle
\end{aligned}$$

AUFGABE 2 – TEIL (B)

$$
\begin{aligned}
& \langle Y\rangle \langle G\rangle \langle 1\rangle \langle 3\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle G\rangle \langle Y_G\rangle \langle 1\rangle \langle 3\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle ite\rangle \left(\underbrace{\langle iszero\rangle\ \langle 3\rangle}_{\Rightarrow^* \langle false\rangle}\right) \left(\ldots\right) \left(\langle Y_G\rangle \left(\underbrace{\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ \langle 1\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2\rangle}\right) \left(\underbrace{\langle pred\rangle\ \langle 3\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2\rangle}\right) \quad \Rightarrow^* \langle G\rangle\ \langle Y_G\rangle\ \langle 2\rangle\ \langle 2\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle ite\rangle \left(\underbrace{\langle iszero\rangle\ \langle 2\rangle}_{\Rightarrow^* \langle false\rangle}\right) \left(\ldots\right) \left(\langle Y_G\rangle \left(\underbrace{\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ \langle 2\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 4\rangle}\right) \left(\underbrace{\langle pred\rangle\ \langle 2\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 1\rangle}\right)\right) \Rightarrow^* \langle G\rangle\ \langle Y_G\rangle\ \langle 4\rangle\ \langle 1\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle ite\rangle \left(\underbrace{\langle iszero\rangle\ \langle 1\rangle}_{\Rightarrow^* \langle false\rangle}\right) \left(\ldots\right) \left(\langle Y_G\rangle \left(\underbrace{\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ \langle 4\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 8\rangle}\right) \left(\underbrace{\langle pred\rangle\ \langle 1\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 0\rangle}\right)\right) \Rightarrow^* \langle G\rangle\ \langle Y_G\rangle\ \langle 8\rangle\ \langle 0\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle ite\rangle \left(\underbrace{\langle iszero\rangle\ \langle 0\rangle}_{\Rightarrow^* \langle true\rangle}\right) \left(\underbrace{\langle mult\rangle\ \langle 8\rangle\ \langle 8\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 64\rangle}\right) \left(\ldots\right) \qquad \Rightarrow^* \langle 64\rangle
\end{aligned}
$$

ENDE

Fragen?

Übungsblatt 7

Zusatzaufgabe 1

ZUSATZAUFGABE 1

$$
\begin{aligned}
\langle pow \rangle \langle 2 \rangle = {} & \left(\lambda nfz\,.\,n\,(\lambda gx.g(gx))\,fz\right)\left(\lambda xy\,.\,x(xy)\right) \\
\Rightarrow^{\beta} {} & \left(\lambda fz\,.\left(\lambda xy\,.\,x(xy)\right)\left(\lambda gx.g(gx)\right) f\ z\right) \\
\Rightarrow^{\beta} {} & \left(\lambda fz\,.\left(\lambda y\,.\left(\lambda gx.g(gx)\right)\left((\lambda gx.g(gx))\ y\right)\right) f\ z\right) \\
\Rightarrow^{\beta} {} & \left(\lambda fz\,.\left(\lambda y\,.\left(\lambda x.\left((\lambda gx.g(gx))\ y\right)\left(((\lambda gx.g(gx))\ y)\ x\right)\right)\right) f\ z\right) \\
\Rightarrow^{\beta} {} & \left(\lambda fz\,.\left(\lambda yx\,.\left((\lambda gx.g(gx))\ y\right)\left(((\lambda gx.g(gx))\ y)\ x\right)\right) f\ z\right) \\
\Rightarrow^{\beta} {} & \left(\lambda fz\,.\left(\lambda yx\,.\left(\lambda x.y(yx)\right)\left((\lambda x.y(yx))\ x\right)\right) f\ z\right) \\
\Rightarrow^{\beta} {} & \left(\lambda fz\,.\left(\lambda yx\,.\left(\lambda x.y(yx)\right)\left(y(yx)\right)\right) f\ z\right) \\
\Rightarrow^{\beta} {} & \left(\lambda fz\,.\left(\lambda yx\,.y\left(y\ (y\ (yx))\right)\right) f\ z\right) \\
\Rightarrow^{\beta} {} & \left(\lambda fz\,.\left(\lambda x\,.f\left(f\ (f\ (fx))\right)\right) z\right) \\
\Rightarrow^{\beta} {} & \left(\lambda fz\,.f\ (f\ (f\ (fz)\,)\,)\,)\right) = \langle 4 \rangle
\end{aligned}
$$

ZUSATZAUFGABE 1

Teil (b)

$$f(n) = s^n$$

Teil (c)

$$g(n, m) = m^n$$

$$\langle pow' \rangle = \left(\lambda n\mathbf{m}fz.n\mathbf{m}fz \right)$$