PROGRAMMIERUNG

ÜBUNG 4: TYPPOLYMORPHIE & UNIFIKATION

Eric Kunze

eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

INHALT

1. Funktionale Programmierung
   1.1 Einführung in Haskell: Listen
   1.2 Algebraische Datentypen
   1.3 Funktionen höherer Ordnung
   1.4 **Typpolymorphie & Unifikation**
   1.5 Beweis von Programmeigenschaften
   1.6 λ – Kalkül
2. Logikprogrammierung
3. Implementierung einer imperativen Programmiersprache
4. Verifikation von Programmeigenschaften
5. H_0 – ein einfacher Kern von Haskell

Typpolymorphie

TYPPOLYMORPHIE

- **bisher**: Funktionen mit konkreten Datentypen
  z.B. `length :: [Int] -> Int`
- **Problem**: Funktion würde auch auf anderen Datentypen funktionieren
  z.B. `length :: [Bool] -> Int`
- **Lösung**: Typvariablen und poylmorphe Funktionen
  z.B. `length :: [a] -> Int`

Bei konkreter Instanziierung wird Typvariable an entsprechenden Typbezeichner gebunden (z.B. `a = Int` oder `a = Bool`).

Übungsblatt 4

Aufgabe 1

AUFGABE 1 — TEIL (A)

Beispielbaum mit mindestens 5 Blättern

`data BinTree a = Branch a (BinTree a) (BinTree a) | Leaf a`

```
testTree :: BinTree Int
testTree = Branch 5
             (Leaf 1)
             (Branch 12
                (Branch 4
                   (Leaf 0)
                   (Leaf 0))
                (Branch 12
                   (Leaf 0)
                   (Leaf 1)))
```

minimale Tiefe eines Baumes

`data BinTree a = Branch a (BinTree a) (BinTree a) | Leaf a`

`depth :: BinTree a -> Int`

```
-- Aufgabe 1 (b)
depth :: BinTree a -> Int
depth (Leaf    _    ) = 1
depth (Branch _ l r) = min (depth l) (depth r)
```

Baum mit Beschriftungsfolge neu beschriften

```
data BinTree a = Branch a (BinTree a) (BinTree a) | Leaf a
paths :: BinTree a -> BinTree [a]
```

```haskell
-- Aufgabe 1 (c)
paths :: BinTree a -> BinTree [a]
paths = go []
where
  go :: [a] -> BinTree a -> BinTree [a]
  go prefix (Leaf    x     ) = Leaf    (prefix ++ [x])
  go prefix (Branch x l r)
    = Branch (prefix ++ [x])
      (go (prefix ++ [x]) l)
      (go (prefix ++ [x]) r)
```

Map für Bäume

`data BinTree a = Branch a (BinTree a) (BinTree a) | Leaf a`

`tmap :: (a -> b) -> BinTree a -> BinTree b`

```haskell
-- Aufgabe 1 (d)
tmap :: (a -> b) -> BinTree a -> BinTree b
tmap f (Leaf   x     ) = Leaf   (f x)
tmap f (Branch x l r) = Branch (f x) (tmap f l) (tmap
    f r)
```

Übungsblatt 4

Aufgabe 2

Liste von Paaren $\rightarrow$ Paare von Listen

```
unpairs :: [(a,b)] -> ([a], [b])
```

```
-- Aufgabe 2 (a)
unpairs :: [(a, b)] -> ([a], [b])
unpairs []          = ([], [])
unpairs ((a, b):xs) = let (as, bs) = unpairs xs
                      in (a:as, b:bs)
```

AUFGABE 2 — TEIL (B)

```haskell
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map _ []       = []
map f (x : xs) = f x : map f xs

uncurry :: (a -> b -> c) -> (a, b) -> c
uncurry f (x, y) = f x y
```

```
map (uncurry (+)) [(1,2), (3,4)]
= map (uncurry (+)) ((1,2):[(3,4)])
= uncurry (+) (1,2) : map (uncurry (+)) [(3,4)]
= (1 + 2) : map (uncurry (+)) [(3,4)]
= 3 : map (uncurry (+)) [(3,4)]
= 3 : map (uncurry (+)) ((3,4);[])
= 3 : uncurry (+) (3,4) : map (uncurry (+)) []
= 3 : (3 + 4) : map (uncurry (+)) []
= 3 : 7 : map (uncurry (+)) []
= 3 : 7 : []
= [3, 7]
```

Unifikation & Unifikationsalgorithmus

UNIFIKATION

Motivation: Typüberprüfung

```
f :: (t, Char) -> (t, [Char])
f (...) = ...

g :: (Int, [u]) -> Int
g (...) = ...

h = g . f
```

UNIFIKATION

Typausdrücke

- `Int`, `Bool`, `Floar`, `Char`, `String`
- Typvariablen
- Listen, Tupel, Funktionen

Typterme

- Übersetzung *trans*: Typausdruck $\to$ Typterm
- z.B.

$$trans(\texttt{(t,[Char])}) = ()^2(t, [](Char))$$

$$trans(\texttt{(Int, [u])}) = ()^2(Int, [](u))$$

Beide Typausdrücke können in Übereinstimmung gebracht werden, wenn die Typterme *trans*(`(t,[Char])`) und *trans*(`(Int, [u])`) unifizierbar sind $\to$ `t = Int` und `u = Char`

UNIFIKATIONSALGORITHMUS

- **gegeben:** zwei Typ*terme* t_1, t_2
- **Ziel:** entscheide, ob t_1 und t_2 unifizierbar sind

Wir notieren die beiden Typterme als Spalten:

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} ()^2(t, [](Char)) \\ ()^2(Int, [](u)) \end{pmatrix}$$

Unifikationsalgorithmus erstellt eine Folge von Mengen M_i, wobei die M_{i+1} aus M_i hervorgeht, indem eine der vier Regeln angewendet wird.

$$M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{bzw.} \qquad M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} ()^2(t, [](Char)) \\ ()^2(Int, [](u)) \end{pmatrix} \right\}$$

UNIFIKATIONSALGORITHMUS – REGELN

- **Dekomposition.** Sei $\delta \in \Sigma$ ein k-stelliger Konstruktor, $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k$ Terme über Konstruktoren und Variablen.

$$\begin{pmatrix} \delta(s_1, \ldots, s_k) \\ \delta(t_1, \ldots, t_k) \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} s_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} s_k \\ t_k \end{pmatrix}$$

- **Elimination.** Sei x eine *Variable* !

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \emptyset$$

- **Vertauschung.** Sei t *keine* Variable.

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

- **Substitution.** Sei x eine Variable, t keine Variable und x kommt nicht in t vor (occur check). Dann ersetze in jedem anderen Term die Variable x durch t.

UNIFIKATIONSALGORITHMUS

Ende: keine Regel mehr anwendbar – Entscheidung:

- t_1**,** t_2 **unifizierbar**: M ist von der Form

$$\left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ t_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_k \\ t_k \end{pmatrix} \right\} \qquad \begin{matrix} \text{„Variablen“} \\ \text{„Terme ohne Variablen“} \end{matrix}$$

  wobei $u_1, u_2, \dots, u_k$ paarweise verschiedene Variablen sind und nicht in $t_1, t_2, \dots, t_k$ vorkommen.
  allgemeinster Unifikator φ:

$$\varphi(u_i) = t_i \qquad (i = 1, \dots, k)$$

$$\varphi(x) = x \quad \text{für alle nicht vorkommenden Variablen}$$

- t_1**,** t_2 **sind nicht unfizierbar**: M hat nicht diese Form und keine Regel ist anwendbar

Übungsblatt 4

Aufgabe 3

AUFGABE 3

$$
\begin{aligned}
&\left\{ \begin{pmatrix} \delta(\alpha, \sigma(x_1, \alpha), \quad \sigma(x_2, x_3)) \\ \delta(\alpha, \sigma(x_1, x_2), \sigma(x_2, \gamma(x_2))) \end{pmatrix} \right\} \\
\overset{\text{Dek.}}{\Longrightarrow} &\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma(x_1, \alpha) \\ \sigma(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma(x_2, x_3) \\ \sigma(x_2, \gamma(x_2)) \end{pmatrix} \right\} \\
\overset{\text{Dek.}}{\Longrightarrow}{}^{3} &\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix} \right\} \\
\overset{\text{El.}}{\Longrightarrow}{}^{2} &\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix} \right\} \\
\overset{\text{Vert.}}{\Longrightarrow} &\left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix} \right\} \\
\overset{\text{Subst.}}{\Longrightarrow} &\left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ \gamma(\alpha) \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

AUFGABE 3

allgemeinster Unifikator:

$$x_1 \mapsto x_1 \qquad x_2 \mapsto \alpha \qquad x_3 \mapsto \gamma(\alpha)$$

Teilaufgabe (b)

$$t_1 = (\texttt{a} \ , \ [\texttt{a}])$$
$$t_2 = (\texttt{Int} \ , \ [\texttt{Double}])$$
$$t_3 = (\texttt{b} \ , \ \texttt{c})$$

- t_1 und t_2 sind *nicht* unifizierbar
- t_1 und t_3 sind unifizierbar mit
  $\texttt{a} \mapsto \texttt{a} \qquad \texttt{b} \mapsto \texttt{a} \qquad \texttt{c} \mapsto [\texttt{a}]$
- t_2 und t_3 sind unifizierbar mit $\texttt{b} \mapsto \texttt{Int} \qquad \texttt{c} \mapsto [\texttt{Double}]$

Übungsblatt 4

Aufgabe 4

AUFGABE 4

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sigma(\sigma(x_1, \alpha), \sigma(\gamma(x_3), x_3)) \\ \sigma(\sigma(\gamma(x_2), \alpha), \sigma(x_2, x_3)) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{Dek.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} \sigma(x_1, \alpha) \\ \sigma(\gamma(x_2), \alpha) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma(\gamma(x_3), x_3)) \\ \sigma(x_2, x_3)) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{Dek.}}{\Longrightarrow}^2 \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{El.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{Dek.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{Vert.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix} \right\}$$

x_2 kommt nicht in $\gamma(x_3)$ vor

$$\overset{\text{Subst.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(\gamma(x_3)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix} \right\}$$

AUFGABE 4

allgemeinster Unifikator:

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(x_3)) \qquad x_2 \mapsto \gamma(x_3) \qquad x_3 \mapsto x_3$$

weitere Unifikatoren:

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)) \qquad x_2 \mapsto \gamma(\alpha) \qquad x_3 \mapsto \alpha$$
$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\gamma(\alpha))) \qquad x_2 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)) \qquad x_3 \mapsto \gamma(\alpha)$$

Fehlschlag beim occur-check:

Alphabet: $\Sigma = \{\gamma^{(1)}\}$

$$t_1 = x_1$$
$$t_2 = \gamma(x_1)$$

ENDE

Fragen?