Aufgabe 2a

Donnerstag, 7. Mai 2020 18:12

Aufgabe 2 (AGS 12.3.29)

Folgende Definitionen seien gegeben:

```haskell
data BinTree a = Node a (BinTree a) (BinTree a) | Leaf a

preOrder :: BinTree a -> [a]
preOrder (Leaf x) = [x]
preOrder (Node x l r) = [x] ++ preOrder l ++ preOrder r

mPostOrder :: BinTree a -> [a]
mPostOrder (Leaf x) = [x]
mPostOrder (Node x l r) = mPostOrder r ++ mPostOrder l ++ [x]
```

Sei außerdem `rev :: [a] -> [a]` eine Funktion, sodass für jeden Typ `a` folgende zwei Eigenschaften gelten:

$$\forall \texttt{x :: a}: \qquad \texttt{rev [x]} = \texttt{[x]} \qquad \text{(H1)}$$

$$\forall \texttt{xs, ys :: [a]}: \qquad \texttt{rev (xs ++ ys)} = \texttt{rev ys ++ rev xs} \qquad \text{(H2)}$$

Gehen Sie davon aus, dass die Funktion `(++) :: [a] -> [a] -> [a]` assoziativ ist.

(a) Sei `a` ein Typ, `x :: a` und `xs, ys :: [a]`. Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt:

$$\texttt{[x] ++ rev ys ++ rev xs} = \texttt{rev (xs ++ ys ++ [x])} \qquad \text{(H3)}$$

Hinweis: Sie dürfen (H1) und (H2) verwenden. Für den Beweis der Gültigkeit dieser Gleichung ist *keine* Induktion nötig.

$$[x] +\!+ (\text{rev } ys +\!+ \text{rev } xs)$$

$$\overset{H2}{=} [x] +\!+ \text{rev } (xs +\!+ ys)$$

$$\overset{H1}{=} \text{rev}([x]) +\!+ \text{rev}(xs +\!+ ys)$$

$$\overset{H2}{=} \text{rev } (\underbrace{(xs +\!+ ys)}_{xs} +\!+ \underbrace{[x]}_{ys})$$

Aufgabe 2b

Donnerstag, 7. Mai 2020 18:13

Aufgabe 2 (AGS 12.3.29)

Folgende Definitionen seien gegeben:

```
1 data BinTree a = Node a (BinTree a) (BinTree a) | Leaf a
2
3 preOrder :: BinTree a -> [a]
4 preOrder (Leaf x) = [x]
5 preOrder (Node x l r) = [x] ++ preOrder l ++ preOrder r
6
7 mPostOrder :: BinTree a -> [a]
8 mPostOrder (Leaf x) = [x]
9 mPostOrder (Node x l r) = mPostOrder r ++ mPostOrder l ++ [x]
```

Sei außerdem `rev :: [a] -> [a]` eine Funktion, sodass für jeden Typ `a` folgende zwei Eigenschaften gelten:

∀x :: a:	rev [x] = [x]	(H1)
∀xs, ys :: [a]:	rev (xs ++ ys) = rev ys ++ rev xs	(H2)

Gehen Sie davon aus, dass die Funktion `(++) :: [a] -> [a] -> [a]` assoziativ ist.

(a) Sei `a` ein Typ, `x :: a` und `xs, ys :: [a]`. Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt:

`[x] ++ rev ys ++ rev xs = rev (xs ++ ys ++ [x])` (H3)

Hinweis: Sie dürfen (H1) und (H2) verwenden. Für den Beweis der Gültigkeit dieser Gleichung ist *keine* Induktion nötig.

(b) Zeigen Sie durch strukturelle Induktion, dass die Aussage

`preOrder t = rev (mPostOrder t)`

Für jeden Typ `a` und jeden Baum `t :: BinTree a` gilt. Zeigen Sie dazu den Induktionsanfang und den Induktionsschritt; geben Sie beim Induktionsschritt die Induktionsvoraussetzung an. Geben Sie bei jeder Umformung die benutzte *Definition*, *Eigenschaft* bzw. *Induktionsvoraussetzung* an. Quantifizieren Sie alle Variablen.

Hinweis: Sie dürfen dafür die Eigenschaften (H1), (H2) und (H3) verwenden.

(IA) Sei x :: a und t = Leaf x.

- links: preOrder t = preOrder (Leaf x)
  $\overset{\#4}{=}$ [x]
  $\overset{H1}{=}$ rev [x]
  $\overset{\#8}{=}$ rev (mPostOrder (Leaf x))

- rechts: rev (mPostOrder t)
  = rev (mPostOrder (Leaf x))
  $\overset{\#8}{=}$ rev [x]
  $\overset{H1}{=}$ [x]

Somit links = rechts und Gleichung für alle „Blätter" Leaf x erfüllt.

(IV) Seien L, r :: BinTree a, sodass

- preOrder L = rev (mPostOrder L)
- preOrder r = rev (mPostOrder r)

(IS) Sei $x :: a$.

$$\begin{aligned}
& \text{preOrder (Node x l r)} \\
\overset{\#5}{=}\ & [x] \mathbin{++} \text{preOrder l} \mathbin{++} \text{preOrder r} \\
\overset{2.\ IV}{=}\ & [x] \mathbin{++} \text{rev (mPostOrder l)} \mathbin{++} \text{rev (mPostOrder r)} \\
\overset{H3}{=}\ & \text{rev (mPostOrder r} \mathbin{++} \text{mPostOrder l} \mathbin{++} [x]) \\
\overset{\#9}{=}\ & \text{rev (mPostOrder (Node x l r))}
\end{aligned}$$