Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ciencias

PROYECTO DE TESIS I

“Un esquema de diferencias finitas para resolver problemas de advección-difusión lineal no estacionario con la técnica del limitador de flujo”

Elaborado por:

Carlos Alonso Aznarán Laos

0000-0001-8314-2271

Asesor:

Dr. Jonathan Alfredo Munguía La Cotera

0000-0002-1237-286X

Asesor Externo:

MSc. John Doe

0000-0000-0000-0000

LIMA - PERÚ

2024

Aznarán Laos, Carlos Alonso
caznaranl@uni.pe
949346302

Dedicatoria

Dedicado a lo(a)s matemático(a)s
peruano(a)s del pasado y del futuro.

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a los profesores y trabajadores de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería por su contribución en mi formación humana y técnico-matemática, además del apoyo moral y paciencia de mi familia y amigos.

ÍNDICE

Resumen

Este proyecto de tesis I se ocupa de los esquemas numéricos de alta resolución[1] que emplea limitadores de pendiente para resolver el problema de Cauchy de la ecuación diferencial parcial *advección-difusión*:

$$\partial_t u + \mathrm{div}\,(vu - D\triangle u) = 0 \text{ para } (x,t) \in \Omega \times [0,T]. \tag{0.1}$$

Si todos los términos están presentes, la ecuación (0.1) es parábolica

Parabólica	$\partial_t u + \mathrm{div}\,(D\triangle u) = 0$	$\partial_t u - \mathrm{div}\,(D\triangle u) = 0$
Elíptica	$\mathrm{div}\,(vu - D\triangle u) = 0$	$-\mathrm{div}\,(D\triangle u) = 0$
Hiperbólica	$\partial_t u + \mathrm{div}\,(vu) = 0$	$\mathrm{div}\,(D\triangle u) = 0$

TABLA N° 0.1: Taxonomía de la ecuación.

Este modelo base permite estudiar la cinética de sistemas de reacciones químicas y el transporte de contaminantes en fenómenos meteorológicos.

Nuestro estudio inicia con la presentación de la ley de conservación escalar y la deducción de la ecuación de advección-difusión lineal. Introducimos los esquemas de discretización de primer y segundo orden para espacio y tiempo, así como los esquemas de alta resolución. Para el caso bidimensional, utilizamos la técnica de separación de la dimensión, en el cual resolvemos un sistema EDP unidimensional. Se estudia la consistencia, estabilidad y convergencia de los métodos de primer orden Upwind (FOU), adelante en tiempo - centrado en espacio (FTCS), Lax-Friedrichs, Leap-Frog, Lax-Wendroff. Finalmente, se analiza los resultados de convergencia en las pruebas numéricas sometidos a los esquemas presentados.

Palabras clave: Diferencias Finitas, Esquemas de Alta Resolución, Problemas de convección dominada, Limitadores de flujo, análisis de estabilidad.

Clasificación de materias de matemáticas AMS: 35L04, 35L65, 35Q35, 65L12, 65M06, 65M12, 65M20, 65N06, 76M20, 76R50.

[1] Acuñado por Harten en el año 1983.

Abstract

In this thesis project I, we present the mathematical formulation of the linear *advection-difussion* partial differential equation. This base model allows studying the kinetics of systems of chemical reactions and the transport of contaminants in meteorological phenomena. Our study begins with the presentation of the differential and integral forms of conservation law and the deduction of the one-dimensional advection-difussion equation. We introduce first and second order discretization schemes for space and time. The consistency and stability of the main methods are studied. Finally, the convergence results in the numerical tests subjected to the schemes shown are discussed.

Keywords: Finite Differences, High-resolution schemes, Convection-dominated problems, Flux limiters, stability analysis.

AMS subject classifications: 35L04, 35L65, 35Q35, 65L12, 65M06, 65M12, 65M20, 65N06, 76M20, 76R50.

Introducción

I: Parte introductoria del trabajo

A Generalidades

B Descripción del problema de investigación

C Objetivos de estudio

1 Objetivo general

2 Objetivos específicos

D Antecedentes investigativos

II: Marco teórico y conceptual

A Marco teórico

B Marco conceptual

III: Desarrollo del trabajo de investigación

IV: Análisis y discusión de los resultados

V: Conclusiones

VI: Recomendaciones

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bore, S. L. (2015). *High-Resolution Large Time-Step Schemes for Hyperbolic Conservation Laws.*

Choksi, R. (2022). *Partial Differential Equations: A First Course*. American Mathematical Society.

Godunov, S. K. (1959). A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Matematicheskii Sbornik*, *89*(3), 271-306.

Harten, A. (1983). High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, *49*(3), 357-393.

Hesthaven, J. S. (2018). *Numerical Methods for Conservation Laws*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Hirsch, C. (2007). *Numerical Computation of Internal and External Flows*. Butterworth-Heinemann.

Hundsdorfer, W., y Verwer, J. (2003). *Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations* (Vol. 33). Berlin, Heidelberg: Springer.

Ketcheson, D. I., LeVeque, R. J., y del Razo, M. J. (2020). *Riemann problems and jupyter solutions*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics.

LeVeque, R. J. (1992). *Numerical Methods for Conservation Laws*. Basel: Birkhäuser.

LeVeque, R. J. (2007). *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Masatsuka, K. (2024). *I do like CFD: Governing Equations and Exact Solutions* (2.ª ed., Vol. 1).

Salgado, A. J., y Wise, S. M. (2022). *Classical Numerical Analysis: A Comprehensive Course*. Cambridge University Press.

Sousa, E. (2001). *Finite differences for the convection-diffusion equation* (Doctoral Dissertation). University of Oxford.

Zoppou, C. (1994). *Numerical solution of the advective-diffusion equation.*

Anexos

LISTA DE SÍMBOLOS Y SIGLAS

SÍMBOLOS

δ_h	Operador de diferencia hacia adelante.
$\bar{\delta}_h$	Operador de diferencia hacia atrás.
$\mathring{\delta}_h$	Operador de diferencia centrada.
$\mathbb{Z}_h^d$	Vectores en $\mathbb{R}^d$ de la forma hz con $z \in \mathbb{Z}^d$.
$C_b(\Omega)$	Espacio de funciones continuas $\Omega \to \mathbb{R}$ y acotadas en Ω.
Ω_h	$(0,1)^d \cap \mathbb{Z}_h^d$.
$\overline{\Omega}_h$	$[0,1]^d \cap \mathbb{Z}_h^d$.
$\partial\Omega_h$	$\overline{\Omega}_h \setminus \Omega_h$.
X	Conjunto nodal $X \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$.
$\mathcal{I}_X$	Operador de interpolación subordinado a X.
$\mathcal{L}_X$	Base nodal de Lagrange para X.
$\mathcal{V}(\mathbb{C})$	Espacio de funciones $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.
$\Vert A \Vert_{\text{máx}}$	Norma del máximo de la matriz A.
$\Vert \cdot \Vert_{L_h^p}$	Para $p \in [1,\infty]$, norma discreta L_h^p del espacio de funciones malla.
$\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$	Espacio de polinomios de grado a lo más n con coeficientes en $\mathbb{K}$.
$L_h^2(\mathbb{Z}_h)$	Funciones cuadrado sumable que están en $\mathcal{V}(\mathbb{Z}_h)$.

SIGLAS

CFL	Condición Courant-Friedrichs-Levy
EDP	Ecuación Diferencial Parcial
EE	Euler Explícito
EI	Euler Implícito
ETL	Error de Truncamiento Local
MC	Método de las Características
MDF	Método de las Diferencias Finitas
ML	Método de las Líneas
MVF	Método de los Volúmenes Finitos
PVI	Problema de Valor Inicial
PVF	Problema de Valor de Frontera
RK	Runge-Kutta
RKE	Runge-Kutta Explícito