☺ Was sind und was sollen die Typen? ☺

Ingo Blechschmidt
Curry Club Augsburg

14. April 2016

Was sind und was sollen die Zahlen?

Richard Dedekind
Technische Hochschule Braunschweig

1893

§ 1 Mengen.

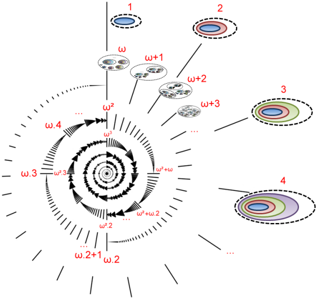
1. Im folgenden verstehe ich unter einem **Ding** jeden Gegenstand unseres Denkens. Um bequem von den Dingen sprechen zu können, bezeichnet man sie durch Zeichen, z. B. durch Buchstaben, und man erlaubt sich, kurz von dem Ding a oder gar von a zu sprechen, wo man in Wahrheit das durch a bezeichnete Ding, keineswegs den Buchstaben a selbst meint. Ein Ding ist vollständig bestimmt durch alles das, was von ihm ausgesagt oder gedacht werden kann. Ein Ding a ist dasselbe wie b (identisch mit b), und b dasselbe wie a, wenn alles, was von b gilt, auch von a gedacht werden kann, auch von b, und wenn alles, was von b gilt, auch von a gedacht werden kann. Daß a und b nur Zeichen oder Namen für ein und dasselbe Ding sind, wird durch das Zeichen $a = b$ und ebenso durch $b = a$ angedeutet. Ist außerdem $b = c$, ist also c ebenfalls, wie a, ein Zeichen für das mit b bezeichnete Ding, so ist auch $a = c$. Ist die obige Übereinstimmung des durch a bezeichneten Dinges mit dem durch b bezeichneten Dinge nicht vorhanden, so heißen diese Dinge a, b

Was sind Grundlagen?

- Grundlagen liefern den logischen Rahmen für Mathe.
- Ihre Details spielen oft keine Rolle.
- Aber ihre wesentlichen Konzepte schon.

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.

– David Hilbert, 1926



Paradoxa

- Paradox von Richard
- Paradox von Curry
- Die Russellsche Antinomie

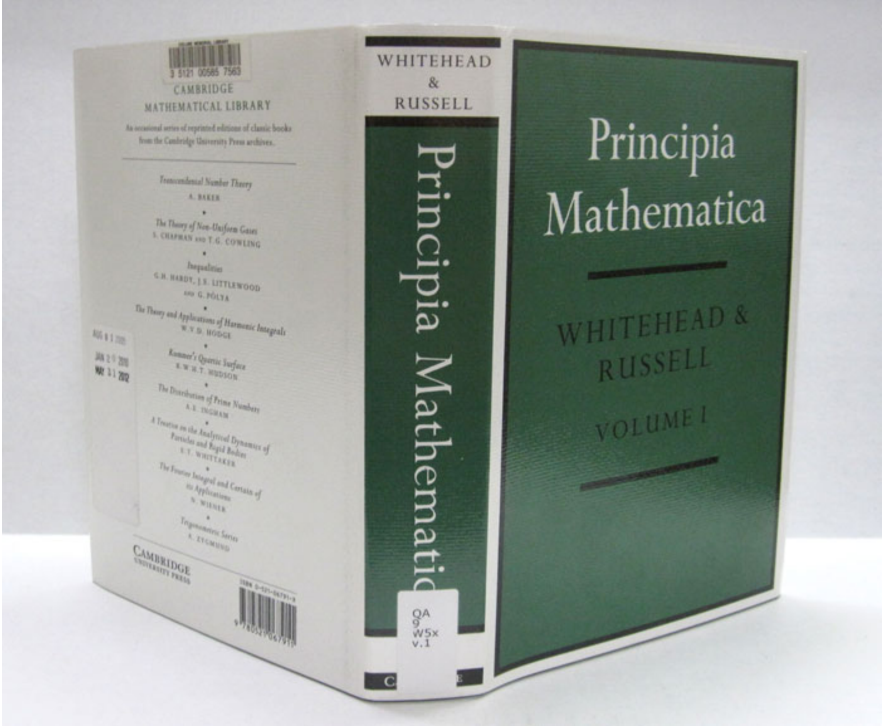
Was ist all diesen Paradoxa gemein?

Paradoxa

- Paradox von Richard
- Paradox von Curry
- Die Russellsche Antinomie

Was ist all diesen Paradoxa gemein?
Selbstbezüglichkeit.

Lösungsvorschläge:
Mengenlehre, Typtheorie.


CAMBRIDGE
MATHEMATICAL LIBRARY
An occasional series of reprinted editions of classic books from the Cambridge University Press archives.
Transcendental Number Theory
A. BAKER
The Theory of Non-Uniform Gases
S. CHAPMAN AND T.G. COWLING
Inequalities
G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD AND G. PÓLYA
The Theory and Applications of Harmonic Integrals
W.V.D. HODGE
Kummer's Quartic Surface
R.W.H.T. HUDSON
The Distribution of Prime Numbers
A.E. INGHAM
A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies
E.T. WHITTAKER
The Fourier Integral and Certain of its Applications
N. WIENER
Trigonometric Series
A. ZYGMUND
CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS
3 5121 00565 7563
MAY 31 2012
WHITEHEAD
&
RUSSELL
Principia Mathematica
QA
9
W5x
v.1
Principia
Mathematica
WHITEHEAD &
RUSSELL
VOLUME I


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

***54·42.** $\vdash :: \alpha \in 2 \,.\supset :.\, \beta \subset \alpha \,.\, \exists !\, \beta \,.\, \beta \neq \alpha \,.\equiv .\, \beta \in \iota``\alpha$

Dem.

$\vdash .\,$*54·4 $.\supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y \,.\supset :.$

$\beta \subset \alpha \,.\, \exists !\, \beta \,.\equiv : \beta = \Lambda \,.\vee.\, \beta = \iota`x \,.\vee.\, \beta = \iota`y \,.\vee.\, \beta = \alpha : \exists !\, \beta :$

[*24·53·56.*51·161] $\equiv : \beta = \iota`x \,.\vee.\, \beta = \iota`y \,.\vee.\, \beta = \alpha$ (1)

$\vdash .\,$*54·25 . Transp . *52·22 $.\supset \vdash : x \neq y \,.\supset .\, \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`x \,.\, \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`y :$

[*13·12] $\supset \vdash : \alpha = \iota`x \cup \iota`y \,.\, x \neq y \,.\supset .\, \alpha \neq \iota`x \,.\, \alpha \neq \iota`y$ (2)

$\vdash .\,(1).(2).\supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y \,.\, x \neq y \,.\supset :.$

$\beta \subset \alpha \,.\, \exists !\, \beta \,.\, \beta \neq \alpha \,.\equiv : \beta = \iota`x \,.\vee.\, \beta = \iota`y :$

[*51·235] $\equiv : (\exists z) \,.\, z \in \alpha \,.\, \beta = \iota`z :$

[*37·6] $\equiv : \beta \in \iota``\alpha$ (3)

$\vdash .\,(3).\,$*11·11·35 . *54·101 $.\supset \vdash .$ Prop

***54·43.** $\vdash :.\, \alpha, \beta \in 1 \,.\supset : \alpha \cap \beta = \Lambda \,.\equiv .\, \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash .\,$*54·26 $.\supset \vdash :.\, \alpha = \iota`x \,.\, \beta = \iota`y \,.\supset : \alpha \cup \beta \in 2 \,.\equiv .\, x \neq y \,.$

[*51·231] $\equiv .\, \iota`x \cap \iota`y = \Lambda \,.$

[*13·12] $\equiv .\, \alpha \cap \beta = \Lambda$ (1)

$\vdash .\,(1).\,$*11·11·35 $.\supset$

$\vdash :.\, (\exists x, y) \,.\, \alpha = \iota`x \,.\, \beta = \iota`y \,.\supset : \alpha \cup \beta \in 2 \,.\equiv .\, \alpha \cap \beta = \Lambda$ (2)

$\vdash .\,(2).\,$*11·54 . *52·1 $.\supset \vdash .$ Prop

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

***54·44.** $\vdash :.\, z, w \in \iota`x \cup \iota`y \,.\supset_{z,w} .\, \phi(z,w) : \equiv .\, \phi(x,x) \,.\, \phi(x,y) \,.\, \phi(y,x) \,.\, \phi(y,y)$

Dem.

$\vdash .\,$*51·234 . *11·62 $.\supset \vdash :.\, z, w \in \iota`x \cup \iota`y \,.\supset_{z,w} .\, \phi(z,w) : \equiv :$

$z \in \iota`x \cup \iota`y \,.\supset_z .\, \phi(z,x) \,.\, \phi(z,y) :$

[*51·234.*10·29] $\equiv : \phi(x,x) \,.\, \phi(x,y) \,.\, \phi(y,x) \,.\, \phi(y,y) :. \supset \vdash .$ Prop

***54·441.** $\vdash :: z, w \in \iota`x \cup \iota`y \,.\, z \neq w \,.\supset_{z,w} .\, \phi(z,w) : \equiv :.\, x = y : \vee : \phi(x,y) \,.\, \phi(y,x)$

Dem.

$\vdash .\,$*5·6 $.\supset \vdash :: z, w \in \iota`x \cup \iota`y \,.\, z \neq w \,.\supset_{z,w} .\, \phi(z,w) : \equiv :.$

$z, w \in \iota`x \cup \iota`y \,.\supset_{z,w} : z = w \,.\vee.\, \phi(z,w) :.$

[*54·44] $\equiv : x = x \,.\vee.\, \phi(x,x) : x = y \,.\vee.\, \phi(x,y) :$

$y = x \,.\vee.\, \phi(y,x) : y = y \,.\vee.\, \phi(y,y) :$

[*13·15] $\equiv : x = y \,.\vee.\, \phi(x,y) : y = x \,.\vee.\, \phi(y,x) :$

[*13·16.*4·41] $\equiv : x = y \,.\vee.\, \phi(x,y) \,.\, \phi(y,x)$

This proposition is used in *163·42, in the theory of relations of mutually exclusive relations.

***54·442.** $\vdash :: x \neq y \,.\supset :.\, z, w \in \iota`x \cup \iota`y \,.\, z \neq w \,.\supset_{z,w} .\, \phi(z,w) : \equiv .\, \phi(x,y) \,.\, \phi(y,x)$ [*54·441]

Mengenlehre

$$\boxed{\text{Alles ist eine Menge.}}$$

- $0 := \emptyset, \quad 1 := \{0\}, \quad 2 := \{0, 1\}, \quad \ldots$
- $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ (Kuratowski-Paarung)
- $(x, y, z) := (x, (y, z))$
- Abbildungen sind Tupel (X, Y, R) mit $R \subseteq X \times Y$ und …
- **Eingeschränktes Mengenkomprehensionsprinzip.**

Mengenlehre?

Mengentheoretische Grundlagen …

- spiegeln nicht die typisierte mathematische Praxis wieder,
- respektieren nicht Äquivalenz von Strukturen und
- benötigen komplexe Kodierungen von höheren Konzepten – zum Nachteil interaktiver Beweisumgebungen.

Extensionale Typtheorie

- In Typtheorie gibt es **Werte** und **Typen**.
- Jeder Wert ist von genau einem Typ.
- Es gibt kein globales Gleichheitsprädikat.

Aus meiner Sicht beschreibt extensionale Typtheorie genau die Vorstellung von Mathematikerinnen.

Wie spezifiert man ein Typsystem?

Intensionale Typtheorie

- Intensionale Typtheorie ist wie extensionale Typtheorie, nur ohne das Konzept von Aussagen.
- Homotopietyptheorie ist intensionale Typtheorie plus das Univalenzaxiom.

Gleichheitstypen

Sei X eine Menge und seien $x, y \in X$ Elemente.

- Dann ist "$x = y$" eine **Aussage**.

Sei X ein Typ in intensionaler Typtheorie und seien $x, y : X$ Werte.

- Es gibt einen **Gleichheitstyp** $\mathrm{Id}_X(x, y)$ or $(x =_X y)$.
- Um "$x = y$" nachzuweisen, gib einen Wert von $(x = y)$ an.
- Wir haben $\mathsf{refl}_x : (x = x)$.
- Gleichheitstypen können Null oder **viele** Werte enthalten!

Intuition: $(x = y)$ ist der Typ der **Beweise** von "$x = y$".

Gleichheitstypen

Sei X eine Menge und seien $x, y \in X$ Elemente.

- Dann ist "$x = y$" eine **Aussage**.

Sei X ein Typ in intensionaler Typtheorie und seien $x, y : X$ Werte.

- Es gibt einen **Gleichheitstyp** $\mathrm{Id}_X(x, y)$ or $(x =_X y)$.
- Um "$x = y$" nachzuweisen, gib einen Wert von $(x = y)$ an.
- Wir haben $\mathrm{refl}_x : (x = x)$.
- Gleichheitstypen können Null oder **viele** Werte enthalten!

Intuition: $(x = y)$ ist der Typ der **Beweise** von "$x = y$".
Intuition: $(x = y)$ ist der Typ der **Pfade** $x \rightsquigarrow y$.

Induktive Definitionen

Der **Kreislinie** S^1 wird erzeugt von

- einem Punkt $\mathsf{base} : S^1$ und
- einem Pfad $\mathsf{loop} : (\mathsf{base} = \mathsf{base})$.

Die **Kugeloberfläche** S^2 wird erzeugt von

- einem Punkt $\mathsf{base} : S^2$ und
- einem 2-Pfad $\mathsf{surf} : (\mathsf{refl}_{\mathsf{base}} = \mathsf{refl}_{\mathsf{base}})$.

Der **Torus** T^2 wird erzeugt von

- einem Punkt $b : T^2$,
- einem Pfad $p : (b = b)$,
- einem Pfad $q : (b = b)$ und
- einem 2-Pfad $t : (p \cdot q = q \cdot p)$.

Pfadinduktion

(Based) path induction sagt aus: Gegeben

- ein Wert a eines Typs A,
- eine Typfamilie $C : \prod_{x:A}((a = x) \to \mathcal{U})$ und
- einen Wert $c : C(a, \mathsf{refl}_a)$,

dann gibt es eine Funktion

$$f : \prod_{x:A} \prod_{p:(a=x)} C(x, p)$$

mit $f(a, \mathsf{refl}_a) \equiv c$.