☺ Was sind und was sollen die Typen? ☺

Ingo Blechschmidt
Curry Club Augsburg

14. April 2016

Was sind und was sollen die Zahlen?

Richard Dedekind
Technische Hochschule Braunschweig

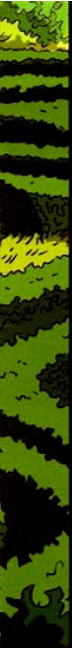
1893

§ 1 Mengen.

1. Im folgenden verstehe ich unter einem **Ding** jeden Gegenstand unseres Denkens. Um bequem von den Dingen sprechen zu können, bezeichnet man sie durch Zeichen, z. B. durch Buchstaben, und man erlaubt sich, kurz von dem Ding a oder gar von a zu sprechen, wo man in Wahrheit das durch a bezeichnete Ding, keineswegs den Buchstaben a selbst meint. Ein Ding ist vollständig bestimmt durch alles das, was von ihm ausgesagt oder gedacht werden kann. Ein Ding a ist dasselbe wie b (identisch mit b), und b dasselbe wie a, wenn alles, was von b gilt, auch von a gedacht werden kann, auch von b, und wenn alles, was von b gilt, auch von a gedacht werden kann. Daß a und b nur Zeichen oder Namen für ein und dasselbe Ding sind, wird durch das Zeichen $a = b$ und ebenso durch $b = a$ angedeutet. Ist außerdem $b = c$, ist also c ebenfalls, wie a, ein Zeichen für das mit b bezeichnete Ding, so ist auch $a = c$. Ist die obige Übereinstimmung des durch a bezeichneten Dinges mit dem durch b bezeichneten Dinge nicht vorhanden, so heißen diese Dinge a, b

Was sind Grundlagen?

- Grundlagen liefern den logischen Rahmen für Mathe.
- Ihre Details spielen oft keine Rolle.
- Aber ihre wesentlichen Konzepte schon.



advance Praise for *LOGICOMIX*

"It's difficult not to be dazzled by Apostolos Doxiadis and Christos Papadimitriou's *Logicomix*: It's a biography of the mathematician/philosopher Bertrand Russell, a fiercely engaging examination of his elusive attempt to isolate the logical foundations of mathematics, and a rousing historical yarn. And all of *Logicomix*'s storytelling and intellectual pyrotechnics are delineated in extraordinarily crisp, cleverly designed and beautifully colored artwork by the team of Alecos Papadatos and Annie Di Donna. What a comic book! Easily one of the most impressive combinations of popular art and serious history that I've encountered in prose or in comics."
—CALVIN REID, *Publishers Weekly*

"This is an extraordinary graphic novel, wildly ambitious in daring to put into words and drawings the life and thought of one of the great philosophers of the last century, Bertrand Russell. The book is a rare intellectual and artistic achievement, which will, I am sure, lead its readers to explore realms of knowledge they thought were forbidden to them."
—HOWARD ZINN

"This magnificent book is about ideas, passions, madness, and the fierce struggle between well-defined principle and the larger good. It follows the great mathematicians—Russell, Whitehead, Frege, Cantor, Hilbert—as they agonized to make the foundations of mathematics exact, consistent, and complete. And we see the band of artists and researchers—and the all-seeking dog Manga—creating, and participating in, this glorious narrative."
—BARRY MAZUR, Gerhard Gade University Professor at Harvard University, and author of *Imagining Numbers (particularly the square root of minus fifteen)*

"The lives of ideas (and those who think them) can be as dramatic and unpredictable as any superhero fantasy. *Logicomix* is witty, engaging, stylish, visually stunning, and full of surprising sound effects, a masterpiece in a genre for which there is as yet no name."
—MICHAEL HARRIS, professor of mathematics at Université Paris 7 and member of the Institut Universitaire de France

BLOOMSBURY

ISBN-10: 1-59691-452-1
ISBN-13: 978-1-59691-452-0
52295
9 781596 914520

www.bloomsbury.com

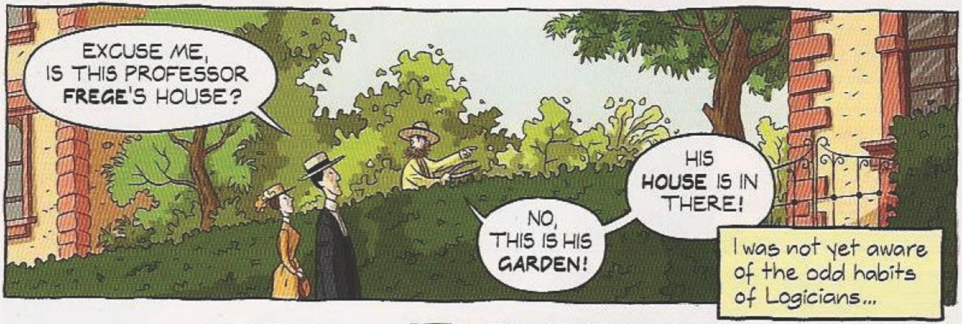
NEW YORK TIMES BESTSELLER

LOGICOMIX

AN EPIC SEARCH FOR TRUTH

APOSTOLOS DOXIADIS AND CHRISTOS H. PAPADIMITRIOU

ART BY ALECOS PAPADATOS AND ANNIE DI DONNA


EXCUSE ME, IS THIS PROFESSOR FREGE'S HOUSE?
NO, THIS IS HIS GARDEN!
HIS HOUSE IS IN THERE!
I was not yet aware of the odd habits of Logicians...

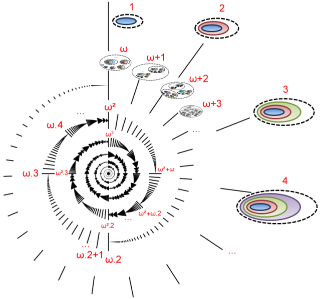
- Grundlagen erlauben uns, maximal präzise zu sein.
- Ein *Beweis* im üblichen mathematischen Sinn ist eine Anleitung, wie ein (niemals ausbuchstabierter) vollständig formaler Beweis zu konstruieren wäre.
- Die Korrektheit von formalen Beweisversuchen kann – anders als bei informalen Beweisversuchen – maschinell geprüft werden.

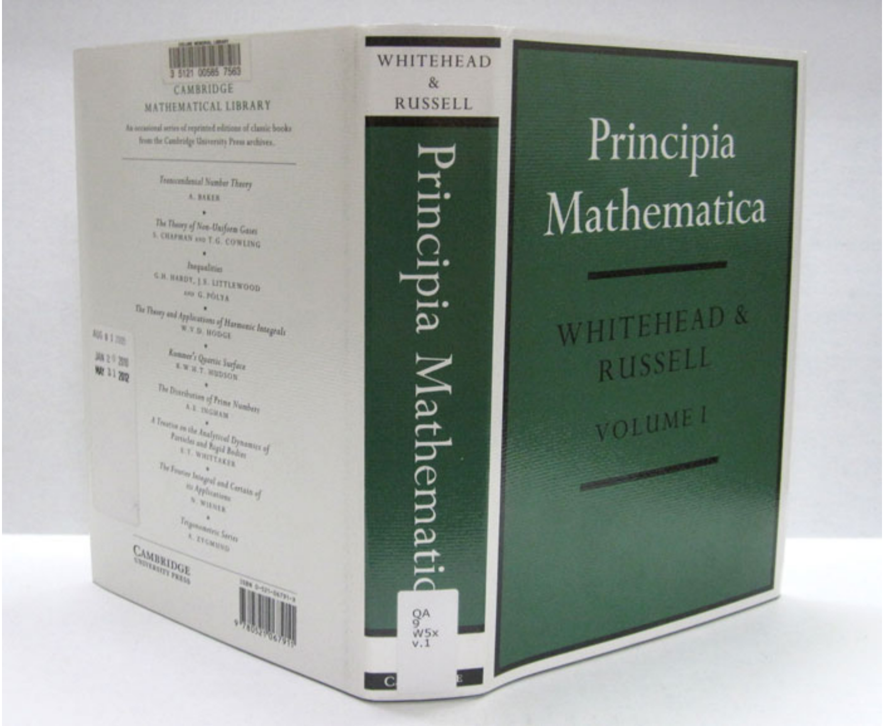
- Es gibt kein Theorem der Art „Das Sonnensystem ist genau dann stabil, wenn das folgende Axiom über große Kardinalzahlen gilt". Resultate in der Mathematik hängen nur sehr selten von speziellen Details der Fundierung ab.

- Brücken werden nicht zusammenbrechen, wenn eine Logikerin eine Inkonsistenz in Zermelo–Fraenkel-Mengenlehre findet.

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.

– David Hilbert, 1926




CAMBRIDGE
MATHEMATICAL LIBRARY
An occasional series of reprinted editions of classic books from the Cambridge University Press archives.
Transcendental Number Theory
A. BAKER
The Theory of Non-Uniform Gases
S. CHAPMAN AND T.G. COWLING
Inequalities
G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD AND G. PÓLYA
The Theory and Applications of Harmonic Integrals
W.V.D. HODGE
Kummer's Quartic Surface
R.W.H.T. HUDSON
The Distribution of Prime Numbers
A.E. INGHAM
A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies
E.T. WHITTAKER
The Fourier Integral and Certain of its Applications
N. WIENER
Trigonometric Series
A. ZYGMUND
CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS
WHITEHEAD
&
RUSSELL
Principia Mathematica
QA
9
W5x
v.1
Principia
Mathematica
WHITEHEAD &
RUSSELL
VOLUME I

***54·42.** $\vdash :: \alpha \epsilon 2 . \supset :. \beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv . \beta \epsilon \iota''\alpha$

Dem.

$\vdash . *54·4 . \quad \supset \vdash :: \alpha = \iota'x \cup \iota'y . \supset :.$

$\qquad \beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \equiv : \beta = \Lambda . \vee . \beta = \iota'x . \vee . \beta = \iota'y . \vee . \beta = \alpha : \exists ! \beta :$

[*24·53·56.*51·161] $\quad \equiv : \beta = \iota'x . \vee . \beta = \iota'y . \vee . \beta = \alpha \quad (1)$

$\vdash . *54·25 . \text{Transp} . *52·22 . \supset \vdash : x \neq y . \supset . \iota'x \cup \iota'y \neq \iota'x . \iota'x \cup \iota'y \neq \iota'y :$

[*13·12] $\quad \supset \vdash : \alpha = \iota'x \cup \iota'y . x \neq y . \supset . \alpha \neq \iota'x . \alpha \neq \iota'y \quad (2)$

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash :: \alpha = \iota'x \cup \iota'y . x \neq y . \supset :.$

$\qquad \beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv : \beta = \iota'x . \vee . \beta = \iota'y :$

[*51·235] $\quad \equiv : (\exists z) . z \epsilon \alpha . \beta = \iota'z :$

[*37·6] $\quad \equiv : \beta \epsilon \iota''\alpha \quad (3)$

$\vdash . (3) . *11·11·35 . *54·101 . \supset \vdash . \text{Prop}$

***54·43.** $\vdash :. \alpha, \beta \epsilon 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \epsilon 2$

Dem.

$\vdash . *54·26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota'x . \beta = \iota'y . \supset : \alpha \cup \beta \epsilon 2 . \equiv . x \neq y .$

[*51·231] $\quad \equiv . \iota'x \cap \iota'y = \Lambda .$

[*13·12] $\quad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (1)$

$\vdash . (1) . *11·11·35 . \supset$

$\qquad \vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota'x . \beta = \iota'y . \supset : \alpha \cup \beta \epsilon 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (2)$

$\vdash . (2) . *11·54 . *52·1 . \supset \vdash . \text{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

***54·44.** $\vdash :. z, w \epsilon \iota'x \cup \iota'y . \supset_{z,w} . \phi(z, w) : \equiv . \phi(x, x) . \phi(x, y) . \phi(y, x) . \phi(y, y)$

Dem.

$\vdash . *51·234 . *11·62 . \supset \vdash :. z, w \epsilon \iota'x \cup \iota'y . \supset_{z,w} . \phi(z, w) : \equiv :$

$\qquad z \epsilon \iota'x \cup \iota'y . \supset_z . \phi(z, x) . \phi(z, y) :$

[*51·234.*10·29] $\equiv : \phi(x, x) . \phi(x, y) . \phi(y, x) . \phi(y, y) :. \supset \vdash . \text{Prop}$

***54·441.** $\vdash :: z, w \epsilon \iota'x \cup \iota'y . z \neq w . \supset_{z,w} . \phi(z, w) : \equiv :. x = y : \vee : \phi(x, y) . \phi(y, x)$

Dem.

$\vdash . *5·6 . \supset \vdash :: z, w \epsilon \iota'x \cup \iota'y . z \neq w . \supset_{z,w} . \phi(z, w) : \equiv :.$

$\qquad z, w \epsilon \iota'x \cup \iota'y . \supset_{z,w} : z = w . \vee . \phi(z, w) :.$

[*54·44] $\quad \equiv : x = x . \vee . \phi(x, x) : x = y . \vee . \phi(x, y) :$

$\qquad y = x . \vee . \phi(y, x) : y = y . \vee . \phi(y, y) :$

[*13·15] $\quad \equiv : x = y . \vee . \phi(x, y) : y = x . \vee . \phi(y, x) :$

[*13·16.*4·41] $\equiv : x = y . \vee . \phi(x, y) . \phi(y, x)$

This proposition is used in *163·42, in the theory of relations of mutually exclusive relations.

***54·442.** $\vdash :: x \neq y . \supset :. z, w \epsilon \iota'x \cup \iota'y . z \neq w . \supset_{z,w} . \phi(z, w) : \equiv . \phi(x, y) . \phi(y, x)$

[*54·441]

Paradoxa

- Paradox von Richard
- Paradox von Curry
- Die Russellsche Antinomie

Was ist all diesen Paradoxa gemein?

Paradoxa

- Paradox von Richard
- Paradox von Curry
- Die Russellsche Antinomie

Was ist all diesen Paradoxa gemein?
Selbstbezüglichkeit.

Lösungsvorschläge:
Mengenlehre, Typtheorie.

Die Russellsche Antinomie verläuft wie folgt.

Wir definieren die Ansammlung

$$R := \{M \mid M \notin M\}$$

derjenigen Mengen, die sich nicht selbst enthalten. (Die meisten Mengen enthalten sich nicht selbst.)
Die Aussage $R \in R$ ist dann, nach Definition, äquivalent zu ihrer Negation $R \notin R$. Das ist ein Widerspruch (wieso genau?).
Die Russellsche Antinomie hat viele weitere Gesichter: die Barbierin, die genau diejenigen Leute rasiert, die sich nicht selbst rasieren; der Kreter, der behauptet, dass alle Kreter lügen; das Adjektiv „heterolog“.

Mengenlehre

$\boxed{\text{Alles ist eine Menge.}}$

- $0 := \emptyset, \quad 1 := \{0\}, \quad 2 := \{0, 1\}, \quad \ldots$
- $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ (Kuratowski-Paarung)
- $(x, y, z) := (x, (y, z))$
- Abbildungen sind Tupel (X, Y, R) mit $R \subseteq X \times Y$ und …
- **Eingeschränktes Mengenkomprehensionsprinzip.**

Wie wird die Russellsche Antinomie in nicht-naiver Mengenlehre aufgelöst?

Ist $P(x)$ eine Aussage, die eine freie Variable x enthält, so kann man ihre Extension

$$\{x \mid P(x)\}$$

bilden. Dieser Ausdruck beschreibt zunächst nur eine *Klasse* (oder *Unmenge* – vielen Dank an Ludwig Neidhart für diese Sprechweise), und zwar die Klasse all derjenigen *Mengen* x, für die $P(x)$ gilt. Echte Klassen sind nicht eigenständige mathematische Objekte, sondern nur syntaktischer Zucker.

Die Russellsche Antinomie kann man dann nicht mehr formulieren, weil „$R \in R$“ nicht länger eine wohlgeformte Aussage ist.

Mengenlehre?

Mengentheoretische Grundlagen …

- spiegeln nicht die typisierte mathematische Praxis wieder,
- respektieren nicht Äquivalenz von Strukturen und
- benötigen komplexe Kodierungen von höheren Konzepten – zum Nachteil interaktiver Beweisumgebungen.

- Beispiele für Fragen, die in Mengenlehre formuliert werden können?
  - Ist $2 = (0, 0)$? (Nicht bei den von mir angegebenen Definitionen.)
  - Ist $\sin \in \pi$? (Hängt von der nicht angegebenen Definition der reellen Zahlen ab.)

- In der mathematischen Praxis befindet man diese Fragen als unsinnig, denn sie missachten die *Typen* der beteiligten mathematischen Objekte und sind nicht invariant unter Isomorphie der beteiligten Strukturen. Man könnte eine konkrete Konstruktion der reellen Zahlen durch eine andere, gleich gute, ersetzen, und dann andere Antworten auf diese Fragen erhalten.

- Es gibt übrigens auch *strukturelle Ansätze* zu Mengenlehre ohne ein globales Zugehörigkeitsprädikat (z. B. ETCS), die diesen Mangel beheben.

Extensionale Typtheorie

- In Typtheorie gibt es **Werte** und **Typen**.
- Jeder Wert ist von genau einem Typ.
- Es gibt kein globales Gleichheitsprädikat.

Aus meiner Sicht beschreibt extensionale Typtheorie genau die Vorstellung von Mathematikerinnen.

Wie spezifiert man ein Typsystem?

- Wie sehen Regeln für Typen so aus? `https://ncatlab.org/nlab/show/type+theory#typeforming_rules`
- Wie sehen Regeln für die darübergelagerte Logik aus? siehe Abschnitt 2.3 des Pizzaseminarskripts: `https://pizzaseminar.speicherleck.de/skript2/konstruktive-mathematik.pdf#page=19`
- Geheimtipp von Makarius: Thompsons *Type Theory and Functional Programming*, `https://www.cs.kent.ac.uk/people/staff/sjt/TTFP/`

Intensionale Typtheorie

- Intensionale Typtheorie (entwickelt ca. 1960) ist wie extensionale Typtheorie, nur ohne das Konzept von Aussagen und einer darübergelagerten Logikschicht. Logik ergibt sich von selbst aus dem Typsystem!
- Homotopietyptheorie (vorgestellt 2005 von Voevodsky) ist intensionale Typtheorie plus das Univalenzaxiom.

Homotopietyptheorie ist sowohl (Homotopietyp)theorie als auch Homotopie(typtheorie).

Einige Gründe, wieso manche Mathematikerinnen sich für Homotopietyptheorie begeistern, sind: Sie ist …

- elegant,
- spiegelt die mathematische Praxis wieder,
- enthält wundersame neue Konzepte (Identitätstypen, Pfadinduktion, Kreisinduktion, …),
- stellt sicher, dass alles Äquivalenzen respektiert,
- vereinfacht die Grundlagen von Homotopietheorie und
- erlaubt zugängliche Computerformalisierung.

Gleichheitstypen

Sei X eine Menge und seien $x, y \in X$ Elemente.

- Dann ist “$x = y$” eine **Aussage**.

Sei X ein Typ in intensionaler Typtheorie und seien $x, y : X$ Werte.

- Es gibt einen **Gleichheitstyp** $\mathrm{Id}_X(x, y)$ oder $(x =_X y)$.
- Um “$x = y$” nachzuweisen, gib einen Wert von $(x = y)$ an.
- Wir haben $\mathrm{refl}_x : (x = x)$.
- Gleichheitstypen können Null oder **viele** Werte enthalten!

Intuition: $(x = y)$ ist der Typ der **Beweise** von “$x = y$”.

Gleichheitstypen

Sei X eine Menge und seien $x, y \in X$ Elemente.

- Dann ist "$x = y$" eine **Aussage**.

Sei X ein Typ in intensionaler Typtheorie und seien $x, y : X$ Werte.

- Es gibt einen **Gleichheitstyp** $\mathrm{Id}_X(x, y)$ oder $(x =_X y)$.
- Um "$x = y$" nachzuweisen, gib einen Wert von $(x = y)$ an.
- Wir haben $\mathsf{refl}_x : (x = x)$.
- Gleichheitstypen können Null oder **viele** Werte enthalten!

Intuition: $(x = y)$ ist der Typ der **Beweise** von "$x = y$".
Intuition: $(x = y)$ ist der Typ der **Pfade** $x \rightsquigarrow y$.

- In intensionaler Typtheorie sind Aussagen nicht eine zusätzlicher Bestandteil der Sprache neben Werten und Typen.
- Stattdessen *sind Aussagen Typen.*
- Eine Aussage zu beweisen bedeutet, einen Wert von ihr anzugeben. Ein solcher Wert kann als *Beweis* oder *Zeuge* für die Aussage angesehen werden.
- Intensionale Typtheorie ist *beweisrelevant.*
- Typen, für die je zwei Werte gleich sind, also Typen, für die lediglich zu wissen, dass sie bewohnt sind, schon alles ist, was man über sie wissen kann, heißen *mere propositions.*

Beispiele für komplexere Aussagen (Typen):

- „X enthält höchstens ein Element“: $\prod_{x:X} \prod_{y:X} (x = y)$
- „Addition ist kommutativ”: $\prod_{n:\mathbb{N}} \prod_{m:\mathbb{N}} (n + m = m + n)$
- „Jede natürliche Zahl ist gerade“: $\prod_{n:\mathbb{N}} \sum_{m:\mathbb{N}} (n = 2m)$

Indem man „$\prod_{x:X}$“ als „für alle $x : X$“ und „$\sum_{x:X}$“ als „es gibt $x : X$“ liest, erhalten diese Typen eine logische Interpretation. Zugleich aber kann man ihnen eine geometrische/homotopietheoretische Interpretation verleihen.

Der Typ der Monoidstrukturen auf einem Typ X ist

$$\sum_{\circ : X\times X\to X} \sum_{e:X} \Bigg(\Big(\prod_{x:X} (e \circ x = x)\Big) \times \Big(\prod_{x:X} (x \circ e = x)\Big) \times \\ \Big(\prod_{x,y,z:X} \big((x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)\big)\Big)\Bigg).$$

- Identitätszeugen können miteinander komponiert werden: Sei $p : (x = y)$ und $q : (y = z)$. Dann existiert ein kanonisch definierter Zeuge $p \cdot q : (x = z)$.

- Komposition von Identitätszeugen ist assoziativ. Der Beweis dieser Tatsache ist ein Wert des Typs

$$(p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r).$$

Typen als Räume

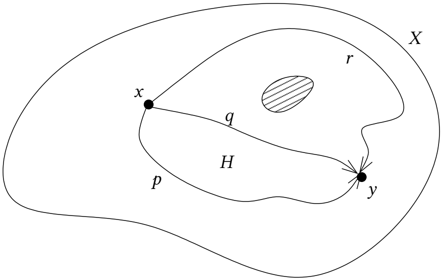
Homotopietheorie	Typtheorie
Raum X	Typ X
Punkt $x \in X$	Wert $x : X$
Pfad $x \rightsquigarrow y$	Wert von $(x = y)$
(stetige) Abbildung	Wert von $X \to Y$

- Eine **Homotopie** zwischen Abbildungen $f, g : X \to Y$ ist ein Wert von

$$(f \simeq g) :\equiv \prod_{x:X} (f(x) = g(x)).$$

- Ein Raum X ist genau dann **zusammenziehbar**, wenn

$$\mathsf{IsContr}(X) :\equiv \sum_{x:X} \prod_{y:X} (x = y).$$



- Dieser Typ X enthält die Werte $x, y : X$.
- Die Pfade p, q und r sind Werte von $(x = y)$.
- Da p und q „zueinander homotop sind“, haben wir $(p = q)$; ein Zeuge dieses Faktums ist der Wert $H : (p = q)$.
- Wegen des Lochs sind p (und q) nicht zu r homotop. Also $\neg(p = r)$; genauer gesagt ist der Typ $\neg(p = r) :\equiv ((p = r) \to \mathbf{0})$ bewohnt, wobei $\mathbf{0}$ der *leere Typ* ist.

Induktive Definitionen

Der **Kreislinie** S^1 wird erzeugt von

- einem Punkt $\mathsf{base} : S^1$ und
- einem Pfad $\mathsf{loop} : (\mathsf{base} = \mathsf{base})$.

Die **Kugeloberfläche** S^2 wird erzeugt von

- einem Punkt $\mathsf{base} : S^2$ und
- einem 2-Pfad $\mathsf{surf} : (\mathsf{refl}_{\mathsf{base}} = \mathsf{refl}_{\mathsf{base}})$.

Der **Torus** T^2 wird erzeugt von

- einem Punkt $b : T^2$,
- einem Pfad $p : (b = b)$,
- einem Pfad $q : (b = b)$ und
- einem 2-Pfad $t : (p \cdot q = q \cdot p)$.

- Note that a presentation of a type *determines*, but does not *explicitly describe* its higher identity types.

- Just like the free vector space spanned by set contains not only the given elements, but also their linear combinations, the type given by a higher inductive definition (or its higher identity types) may contain many more values than explicitly listed.

- For instance, there is a nontrivial element in $(\mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_{\mathsf{base}}} = \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_{\mathsf{base}}})$, where base : S^2, corresponding to the *Hopf fibration.*

- More generally, higher-dimensional paths are forced into existence by *proofs*. For instance, in $(\mathsf{base} = \mathsf{base})$ where base : S^1, there are the values $\mathsf{loop} \cdot (\mathsf{loop} \cdot \mathsf{loop})$ and $(\mathsf{loop} \cdot \mathsf{loop}) \cdot \mathsf{loop}$. They are the same by a witness of type $(\mathsf{loop} \cdot (\mathsf{loop} \cdot \mathsf{loop}) = (\mathsf{loop} \cdot \mathsf{loop}) \cdot \mathsf{loop})$.

- Also, different generators may turn out to give rise to the same element.

Pfadinduktion

(Based) path induction sagt aus: Gegeben

- ein Wert a eines Typs A,
- eine Typfamilie $C : \prod_{x:A}((a = x) \to \mathcal{U})$ und
- einen Wert $c : C(a, \mathsf{refl}_a)$,

dann gibt es eine Funktion

$$f : \prod_{x:A} \prod_{p:(a=x)} C(x, p)$$

mit $f(a, \mathsf{refl}_a) \equiv c$.

- In particular, in proving that a proposition depending on a value x and an identity witness $p : (a = x)$ holds for all thoses values and witnesses, it suffices to prove it for the special value a and the canonical identity witness refl_a.

- Note that this does not mean that any value of $(a = x)$ is equal to refl_a! Indeed, this claim is not even well-typed.

- The induction principle only makes a statement about the whole *type family* of the $(a = x)$'s with x varying, not about individual types.

- Compare with the classical based path space: In it, any element (any path starting at a) is connected to the trivial path at a. But this does not mean that any path is homotopic to the trivial path.

As an example, let's define the path reversal function

$$\mathsf{inv} : \prod_{x:A} ((a = x) \longrightarrow (x = a)),$$

where $a : A$ is a fixed value, by path induction. For this, we define the type family

$$C :\equiv ((x : A, p : (a = x)) \mapsto (x = a)) : \prod_{x:A} ((a = x) \to \mathcal{U})$$

and note that we have the value

$$c :\equiv \mathsf{refl}_a : C(a, \mathsf{refl}_a).$$

Therefore, by path induction, we obtain a function

$$f : \prod_{x:A} \prod_{p:(a=x)} (x = a).$$

This is inv.

- Working informally, we would write the construction more concisely:

  "Let $p : (a = x)$ be given, we want to construct $\mathsf{inv}(p) : (x = a)$. By path induction, we may assume that $p \equiv \mathsf{refl}_a$. In this case, we define $\mathsf{inv}(p)$ as refl_a."

- Here is how we construct the path composition function:

  "Let $p : (a = b)$ and $q : (b = c)$ be given. By path induction, we may assume that $p \equiv \mathsf{refl}_a$. Again by path induction, we may assume that $q \equiv \mathsf{refl}_a$. In this case, we define $p \cdot q$ as refl_a."

- Here is how to construct the function $\mathsf{ap}_g : (x = y) \to (g(x) = g(y))$, if g is some given function:

  "By path induction, it suffices to define $\mathsf{ap}_g(p)$ when p is refl_x. In this case, we declare $\mathsf{ap}_g(p)$ to be $\mathsf{refl}_{g(x)}$."

Path induction does not allow to replace any paths whatsoever by the canonical reflexivity witnesses. For instance, the following "proof" of

$$p \cdot q = q \cdot p$$

for all paths p and q is bogus:
"By path induction, we may assume that p and q are refl_a. In this case, $p \cdot q$ and $q \cdot p$ both equal $\mathsf{refl}_a \cdot \mathsf{refl}_a = \mathsf{refl}_a$."
Indeed, the claimed statement is not even well-typed:

$$\prod_{x,y,z:X} \prod_{p:(x=y)} \prod_{q:(y=z)} (p \cdot q = q \cdot p).$$

The composition $q \cdot p$ is not defined. Weakening the statement to

$$\prod_{x:X} \prod_{p:(x=x)} \prod_{q:(x=x)} (p \cdot q = q \cdot p)$$

does not help either, since in this statement there is no free endpoint, so path induction does not apply.