

El raonament matemàtic d'Euclides

Carlo Sala Gancho
Història de les Matemàtiques
Grau de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Març 2023

Enunciat d'Euclides II-11

Donarem l'enunciat de la traducció en català de l'historiador Josep Pla.

EII-11 *Volem tallar un segment [en dues parts] de manera que el rectangle determinat pel segment sencer i un dels segments sigui equivalent al quadrat de l'altre segment.*

Interpretació de l'enunciat

Tenim en compte que ens trobem al llibre segon d'Euclides, per tant no ens sorprèn trobar una proposició de caire geomètric. Ara bé, aquesta proposició té una particularitat que la fa sortir de la tònica habitual de l'autor i veurem més endavant.

Seguint amb l'enunciat, cal notar que, reordenant una mica les paraules, Euclides busca un segment dividit en dues parts (diferents, si són iguals l'enunciat és evidentment fals) en les quals el segment total sigui en relació al segment gran com el segment gran és al petit¹. Aquesta relació ens és familiar. En efecte, es tracta de la relació que actualment anomenem *proporció àuria*, i que els hel·lènics de l'època euclidiana anomenaven *mitja i extrema raó*.

El raonament matemàtic d'Euclides

La manera com Euclides construeix aquesta demostració ens fa donar una idea bastant representativa dels Elements. Cal diferenciar-ne dues fases. Primerament, comença amb la fase de construcció. En aquesta part no provarà res que el faci arribar al resultat final. Simplement, partint de les hipòtesis inicials construeix alguna cosa nova sense que, a priori, hagi de tenir cap relació (en aquest cas, partint del segment donat i només utilitzant regle i compàs, construeix una figura geomètrica). Tot això, ho fa amb moltíssima cura, sempre veient que pot fer cada una de les passes que fa. Veiem que, en aquest exemple, utilitza diverses proposicions del llibre primer tals com E_I46 , E_I10 i el primer postulat, entre d'altres.

La segona fase és la de demostració. En aquest cas sí que provarà certes propietats del que ha construït en la fase anterior per acostar-se i, eventualment, demostrar allò que s'havia proposat. La cura amb la qual fa cada passa es manté com una constant en tots els llibres i totes les fases de demostració.

¹Cometent un anacronisme greu, es deixa una nota pel lector del present per comprendre millor d'on surt la relació. Sigui x el segment sencer, i y, z les parts, amb $x = y + z$ i $y > z$. L'enunciat busca els y, z que fan que $y^2 = x \cdot z \iff \frac{x}{y} = \frac{y}{z}$. Queda per tant vist que tant l'enunciat d'Euclides com aquest alternatiu són equivalents.

La particularitat del II-11

En els Elements, veiem com cada una de les proposicions ens van acostant cada vegada més cap a la següent, i són impossibles de comprendre sense les anteriors. La proposició II-11 n'és una excepció. Veiem com, en la seva demostració, fa servir gairebé només proposicions, definicions i nocions comunes del llibre primer². A més, aquesta proposició no s'usa per demostrar-ne d'altres, cosa que sembla trencar una mica l'organització de l'obra. Tanmateix, trobem que aquesta proposició és l'excepció que confirma la regla, i tan bon punt la culmina continua amb la dinàmica habitual.

Conclusió

Euclides construeix una manera de pensar i fer matemàtiques realment digna de menció, i que el porta a escriure l'obra més editada de tots els temps, només superat per la Bíblia. Aquesta manera de fer ciència és la que ens ha arribat: construir el coneixement a sobre del ja existent és el que porta a la humanitat a evolucionar i revolucionar la ciència de forma tan ràpida i eficient. Sens dubte cal ser conscients que el mètode que Euclides ens va proposar ens ha fet no només aprendre matemàtiques, sinó aprendre a crear-les.

²Cal remarcar que, en un cert punt, usa $E_{II}6$