UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

NOTAS DE AULA
MAT236 – MÉTODOS ESTATÍSTICOS
2ª UNIDADE

Elaborada pelos professores:
Giovana Silva, Lia Moraes,
Rosana Castro e Rosemeire Fiaccone

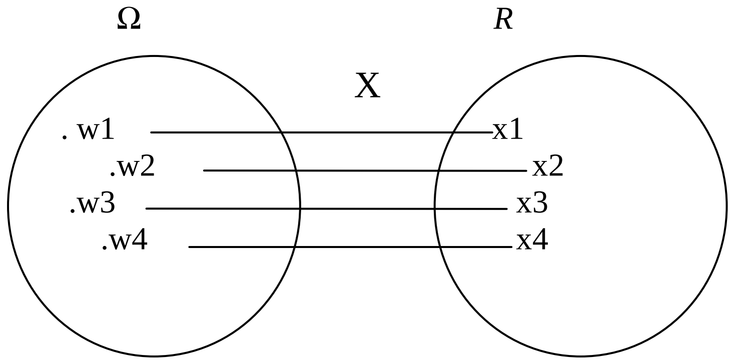
Revisada em 2010.2
Monitora: Tatiana Felix da Matta

8. VARIÁVEL ALEATÓRIA

8.1 Conceitos Básicos

Definição 1.

Sejam E um experimento e Ω um espaço amostral associado ao experimento. Uma função X que associe a cada elemento $w_i \in \Omega$ um número real, $X(w_i)$, é denominada variável aleatória.



Uma variável aleatória X é, portanto, uma função cujo domínio é o espaço amostral e contra-domínio é conjunto dos números reais, ou seja, X: $\Omega \rightarrow R$

Exemplo 1:

a) E: Lançamento de uma moeda.
Assim, Ω = {cara, coroa}={w_1, w_2}

$$X\ (w) = \begin{cases} 1,\ se\ \mathrm{w} = \mathrm{w}_1, ou\ \text{seja se}\ der\ cara, \\ 0,\ se\ \mathrm{w} = \mathrm{w}_2\ , \text{ou seja,}\ se\ der\ coroa \end{cases}$$

b) E: Lançamento de duas moedas.

Seja X o número de caras obtidas no experimento.
Vamos denotar c: cara e k:coroa.
Assim, Ω = { cc, ck, kc, kk }= { w_1, w_2, w_3, w_4 }

$X(w_1) = 2$
$X(w_2) = X(w_3) = 1$
$X(w_4) = 0$

c) E: Escolher um ponto ao acaso no intervalo [0,1]
Seja X o quadrado do valor escolhido.

Assim $\Omega = [0,1]$, e $X(w)= w^2\ \ \forall\ w \in \Omega$

d) E: Escolher um ponto ao acaso no círculo unitário.
Seja X a distância do ponto escolhido à origem.
Assim, $\Omega = \{ (x,y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $X(w)= \sqrt{x^2 + y^2}$

Definição 2 .
Seja X uma variável aleatória. Se X assume valores em um conjunto finito ou infinito enumerável, então X é denominada **variável aleatória discreta**.

Exemplo 2: Sorteio de n indivíduos de uma população.
X : o número de indivíduos do sexo masculino sorteados => $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, ..., n\}$

Definição 3.
Seja X uma variável aleatória. Se X assume valores em um conjunto infinito não enumerável, então X é denominada **variável aleatória contínua**.

Exemplo 3: Retirada ao acaso um parafuso da produção diária de uma fábrica e registro de seu diâmetro (em mm) e comprimento (em mm).
Suponha que esta fábrica produza parafusos com diâmetro entre 3 e 10 mm e comprimento entre 20 e 35 mm
X = Diâmetro do parafuso => $X(\Omega) = [3, 10]$
Y = Comprimento do parafuso $\Rightarrow$ $Y(\Omega) = [20, 35]$

8.2 Distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta

Seja X uma v.a. discreta que assume os valores $x_1, x_2, ..., x_n$.... A distribuição de probabilidades de X é o conjunto de pares de valores que associa a cada valor da variável x_i a probabilidade $P(X = x_i)$:

$$(x_1, P(X = x_1)), (x_2, P(X = x_2)), ..., (x_n, P(X = x_n)),...$$

De maneira que,

a) $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$

b) $P(X = x) = p(x) \geq 0$

Exemplo 4: E: lançamento de um dado honesto.
X: número da face observada => $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
A distribuição de probabilidade (ou função de probabilidade) de X é dada por:

X	1	2	3	4	5	6
P(X=x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Exemplo 5: Considere novamente o exemplo do lançamento de duas moedas. Seja X o número de caras

Resultados (w)	X (w)	Probabilidade $P(X = x_i)$
(Cara, Cara)	2	¼
(Cara, Coroa)	1	¼
(Coroa, Cara)	1	¼

(Coroa, Coroa)	0	¼

Obtemos então,

P (X = 0) = ¼
P (X = 1) = ¼ + ¼ = ½
P (X = 2) = ¼
$P(1 \le X < 2) = \frac{3}{4}$

Exemplo 6: (Morettin e Bussab, 2006)

Um empresário pretende estabelecer uma firma para montagem de um produto composto de uma esfera e um cilindro. As partes são adquiridas em fábricas diferentes, e a montagem consistirá em juntar as duas partes e pintá-las. O produto acabado deve ter o comprimento (definido pelo cilindro) e a espessura (definida pela esfera) dentro de certos limites, e isso só poderá ser verificado após a montagem. Para estudar a viabilidade do seu empreendimento, o empresário quer ter uma idéia da distribuição dos lucros por peça montada.

Sabe-se que cada componente pode ser classificado como BOM, LONGO ou CURTO, conforme sua medida esteja dentro da especificação, seja ela maior ou menor que a especificada. Além disso foram obtidos dos fabricantes o preço de cada componente (5 unidades de dinheiro) e as probabilidades de produção de cada componente com as características BOM , LONGO e CURTO. Estes valores estão na tabela abaixo:

Distribuição da produção das fábricas A e B, de acordo com as medidas das peças produzidas

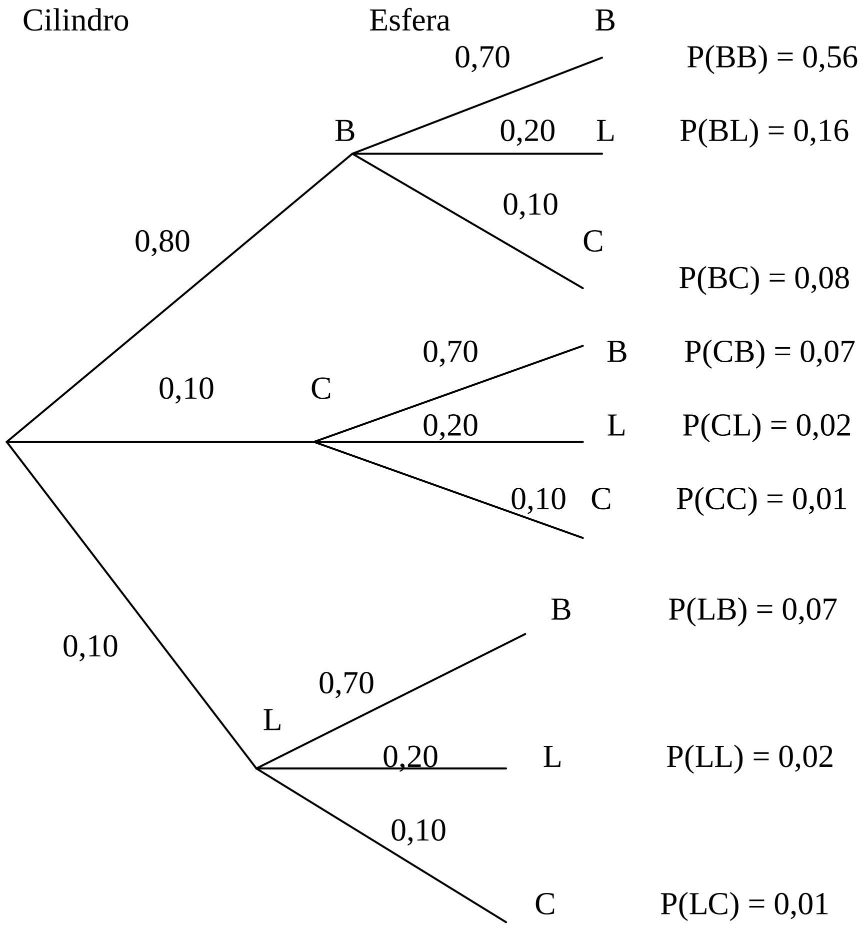
Produto	Fábrica A Cilindro	Fábrica B Esfera
Dentro das especificações ...... BOM (B)	0,80	0,70
Maior que as especificações ...... LONGO (L)	0,10	0,20
Menor que as especificações ...... CURTO (C)	0,10	0,10

Fonte: Retirada das especificações técnicas das fábricas A e B

Se o produto final apresentar algum componente com a característica C, ele será irrecuperável, e o conjunto será vendido como sucata ao preço de 5 unidades. Cada componente longo pode ser recuperado a um custo adicional de 5 unidades. Se o preço de venda de cada unidade é de 25 unidades, como seria a distribuição das frequências da variável X: lucro por conjunto montado?

A construção desta distribuição de frequências vai depender de certas suposições que faremos sobre o comportamento do sistema considerado. Em vista dessas suposições, estaremos trabalhando com um modelo da realidade, e a distribuição que obteremos será uma distribuição teórica, tanto mais próxima da distribuição de frequências real quanto mais fiéis à realidade forem as suposições.

Primeiramente, vejamos a construção do espaço amostral para a montagem dos conjuntos segundo as características de cada componente e suas respectivas probabilidades. Desde que os componentes vêm de fábricas diferentes, vamos supor que a classificação dos cilindros segundo suas características sejam eventos independentes; assim, obtemos a configuração abaixo.



O espaço amostral em questão está apresentado na tabela abaixo, junto com as respectivas probabilidades.

Tabela: Distribuição de probabilidade das possíveis composições das montagens

Montagem	Probabilidade	Lucro por montagem (X)
BB	0,56	15
BL	0,16	10
BC	0,08	-5
LB	0,07	10
LL	0,02	05
LC	0,01	-5
CB	0,07	-5
CL	0,02	-5
CC	0,01	-5

Fonte: Informações no texto

Assim, com os dados da tabela acima, vemos que X pode assumir um dos seguintes valores:

15 se ocorrer o evento $A_1 = \{BB\}$
10 se ocorrer o evento $A_2 = \{BL,LB\}$
05 se ocorrer o evento $A_3 = \{LL\}$
-5 se ocorrer o evento $A_4 = \{BC,LC,CB,CL,CC\}$

Cada um desses eventos tem uma probabilidade associada, ou seja,

$P(A_1) = 0{,}56$ $\quad$ $P(A_2) = 0{,}23$ $\quad$ $P(A_3) = 0{,}02$ $\quad$ $P(A_4) = 0{,}19$

o que nos permite escrever a distribuição de probabilidade da variável X, que o empresário poderá usar para julgar a viabilidade econômica do projeto que ele pretende realizar.

x	P(X = x)
15	0,56
10	0,23
05	0,02
-5	0,19
Total	1,00

Exercícios:

a) Suponha que X seja uma v.a. discreta e sua função distribuição de probabilidade seja P(X = k) = ck , para k = 1,2,3,4 e 5. Determine o valor da constante c. Res. $1/15$.

b) Considere um lote de peças que contém 20% de defeituosas. Extraímos ao acaso três peças com reposição para análise. Seja X a variável aleatória que representa o número de peças defeituosas. Estabeleça a função distribuição de probabilidade de X.

Resp. $P(X = x) = \binom{3}{x}(0{,}2)^x (0{,}8)^{3-x}$, x=0,1,2,3

c) Determine o valor de c para que p(x)= $\begin{cases} c\left(\frac{2}{3}\right)^x, \text{para } x = 1,2,3,\dots \\ 0 \quad, \text{caso contrário} \end{cases}$

seja uma função distribuição de probabilidade. Resp. $1/2$

8.3 Distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua

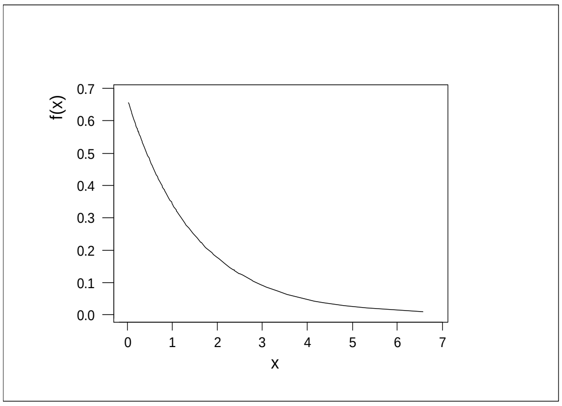
Seja X uma variável aleatória contínua. A distribuição de probabilidade é dada na forma de uma função, chamada de densidade de probabilidade e denotada por f(x).

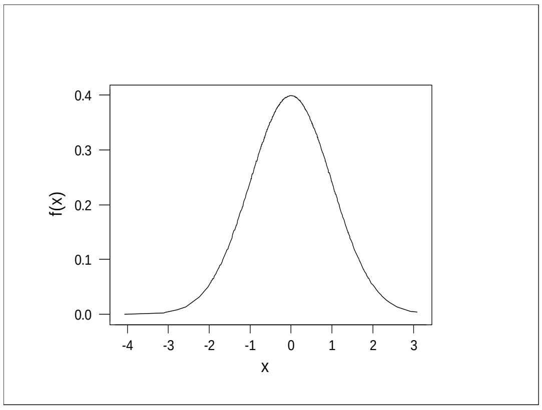
Uma função de densidade de probabilidade (fdp) satisfaz as seguintes condições:

a) $f(x) \geq 0$, $\forall x \in R$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

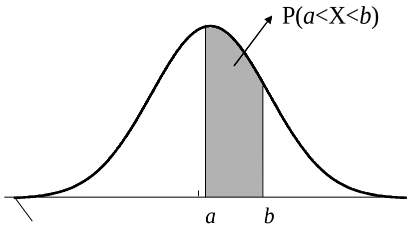
Exemplos de funções de densidade:





A função densidade, por definição, possui área sob a curva limitada pelo eixo x igual a 1 e a probabilidade de X tomar um valor entre *a* e *b* é obtida calculando-se a área compreendida entre esses dois valores. Isto é, para qualquer $a < b$ em *R*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$



Observações importantes para uma variável aleatória contínua:

1) Qualquer valor especificado de X tem probabilidade zero, isto é, $P(X = x_i) = 0$, pois

$$P(X = x_i) = \int_{x_i}^{x_i} f(x)dx = 0$$

2) Assim, as probabilidades abaixo serão todas iguais, se X for uma variável aleatória contínua:

$$P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b).$$

Exemplo 7: Dada a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x), & \text{para } 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ache o valor de k para que f(x) seja uma função densidade de probabilidade.

Resolução:

Para ser função densidade temos que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, então $\int_0^1 k \; x(1-x)\,dx = 1 \Rightarrow$

$$k\left[\int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2\, dx\right] = k\left[\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1\right] = 1 \Rightarrow \; k = 6$$

Exercícios:

1) Dada a função densidade de probabilidade f(x) = $\begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Determine i. P(X ≤ ½) ii. P(1/3 ≤ X ≤ 2/3) iii. $P(X \le \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3})$

R : i) 1/4 ; ii)1/3 ; iii) 5/12

2) Seja X uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ kx, & 0 \le x \le 1/2 \\ 4(1-x), & 1/2 < x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

a) Determine k para que f(x) seja uma função densidade. Resp. 4

b) P(1/3 < X < 3/4). Resp.47/72.

8.4 Função de distribuição acumulada (FDA)

Seja X uma variável aleatória, discreta ou contínua. Define-se a função de distribuição acumulada F da variável aleatória X como

$$F(x) = P(X \le x).$$

Se X for uma variável aleatória discreta

$$F(x) = \sum_{j:\, x_j \le x} P(X = x_j)$$

em que o somatório é estendido a todos os valores x_j que satisfaçam à condição $x_j \le x$.

Se X for uma variável aleatória contínua com função densidade f(x),

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$$

Podemos utilizar a função distribuição acumulada para calcular probabilidade da seguinte maneira:

$$P(a < x \le b) = P(x \le b) - P(x \le a) = F(b) - F(a)$$

Exemplo 8: Considere um lote de peças que contém 20% de defeituosas. Extraímos ao acaso três peças com reposição para análise. Seja X a variável aleatória que representa o número de peças defeituosas. A função de probabilidade de X é

$$P(X = x) = \binom{3}{x}(0,2)^x(0,8)^{3-x}, \; x=0,1,2,3$$

e a função de distribuição acumulada de X.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 0,512, & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 0,896, & \text{se } 1 \le x \le 2 \\ 0,992, & \text{se } 2 < x < 3 \\ 1, & \text{se } x \ge 3 \end{cases}$$

Exemplo 9: Supõe-se que o diâmetro X de um cabo elétrico é uma variável aleatória contínua, com função densidade $f(x) = 6x(1 - x)$, $0 \le x \le 1$.

a) Obtenha a função de distribuição, F(x).
b) Calcule $P(X \le 1/2 \mid 1/3 < X < 2/3)$, utilizando F(x).

Resolução:

a) $F(x) = 0$, se $x < 0$

$$\int_0^x 6s(1-s)ds = 3x^2 - 2x^3, \text{ se } 0 \le x \le 1$$

1, se $x > 1$

b) $$P(X \le 1/2 \mid 1/3 < X < 2/3) = \frac{P(1/3 < X \le 1/2)}{P(1/3 < X < 2/3)} = \frac{F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right)}{F\left(\frac{2}{3}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right)} = 0,5$$

8.5 Valor esperado (Esperança) de uma variável aleatória

Como na estatística descritiva podemos falar de **medidas de tendência central e medidas de dispersão** (variabilidade) de uma distribuição de probabilidade. Estas medidas são muito importantes para compreender o comportamento de uma variável aleatória. A **média ou esperança** de uma distribuição, como o próprio nome diz, é a média dos valores da variável se observássemos a mesma repetindo o experimento um número muito grande de vezes.

Caso discreto:

Seja uma v. a. discreta *X* com a seguinte distribuição de probabilidades:

X	x_1	x_2	...	x_n …
P(X=x)	p_1	p_2	...	p_n …

O valor esperado de X é dado por:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Exemplo 10: Voltando ao exemplo 6, produto composto por uma esfera e um cilindro, uma pergunta que logo ocorreria ao empresário é qual o lucro médio por conjunto montado que ele espera conseguir.

Resolução:
Lucro médio = (0,56)(15) + (0,23)(10) + (0,02)(5) + (0,19)(-5) = 9,85
Isto é, caso sejam verdadeiras as suposições feitas para determinar a distribuição da variável aleatória, o empresário espera ter, em média, lucro de 9,85 unidades por conjunto montado.

Caso contínuo:
Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade f(x). O valor esperado de X é definido por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Exemplo 11: Uma certa liga é formada, combinando a mistura fundida de dois metais. A liga resultante contém uma certa porcentagem de chumbo X, que pode ser considerada uma v.a. com função densidade:

$$f(x) = \frac{3}{5}(10)^{-5} x(100 - x)\,,\ 0 \le x \le 100$$

Então,

$$E(X) = \int_{0}^{100} x \frac{3}{5}(10)^{-5} x(100 - x) dx = 50$$

Isto significa que em média a liga contém 50% de chumbo.

8.5.1 Propriedades da Esperança

1) Dada uma constante a, temos:

$$E(a+X) = a + E(X) \qquad e \qquad E(aX) = a \,.\, E(X)$$

2) Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias

$$E(X_1+X_2+...+X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$$

3) Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes. Então,

$$E(XY) = E(X) \,.\, E(Y)$$

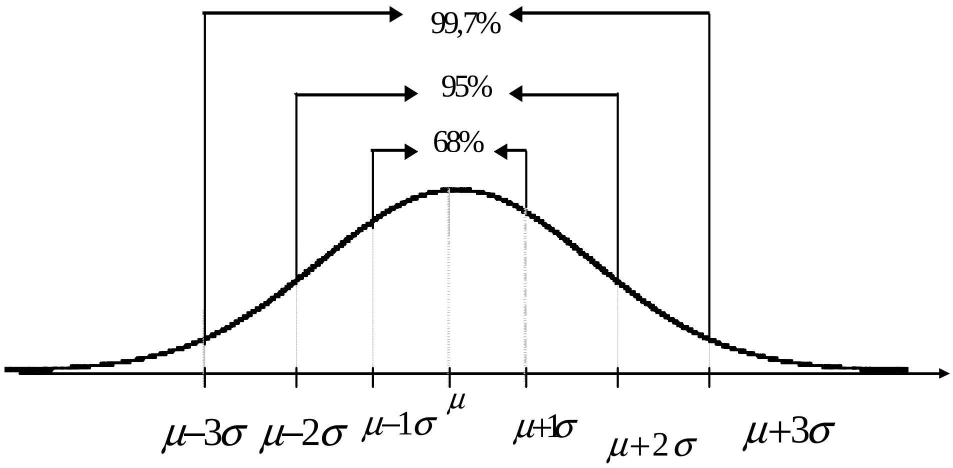
Exemplo 12: Suponha que L, o lucro líquido obtido na venda da liga do exemplo anterior (por unidade de peso), é a seguinte função da porcentagem de chumbo:

$L = C_1 + C_2X$.
Então o lucro esperado é:
$E(L) = E(C_1 + C_2X) = C_1 + C_2(50)$

8.6. Variância e Desvio padrão de uma variável aleatória

De modo geral, o desvio padrão é mais importante e mais útil medida de variação. O desvio padrão de um conjunto de valores é uma medida de variação dos valores em relação à média aritmética. A variância é o quadrado do desvio padrão. Ou podemos dizer que o desvio padrão é igual a raiz quadrada positiva da variância. Uma dificuldade com a variância é que ela não é expressa nas mesmas unidades dos dados originais, enquanto que o desvio padrão tem a mesma unidade de medida dos dados originais. Assim se um conjunto de dados tem desvio padrão de 3,00 dólares e uma variância de 9,00 dólares quadrado, temos que dólar quadrado é um conceito abstrato, logo a variância é difícil de ser compreendida.

Uma aplicação do desvio padrão, é quando temos um conjunto de dados com distribuição aproximadamente em **forma de sino**. Conforme a figura abaixo:



Essa figura mostra como a média e o desvio padrão estão relacionados com a proporção dos dados que se enquadram em determinados limites. Assim, com uma distribuição em forma de sino, temos que:

- Cerca de 68% dos valores estão a $\pm$ 1 desvio padrão a contar da média;
- Cerca de 95% dos valores estão a $\pm$ 2 desvios padrão a contar da média;
- Cerca de 99,7% dos valores estão a $\pm$ 3 desvios padrão a contar da média.

8.6.1 Variância de uma variável aleatória

Seja *X* uma v.a. com esperança E(X). Define-se a variância de *X* por:

$$V(X) = E[(X - E(X))^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

em que

$E(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 P(X = x_i)$, para X discreta

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$, para X contínua

Exemplo 13: Voltando ao exemplo 6, produto composto por uma esfera e um cilindro, calcule a variância.

X	$W = X^2$	$P(X = x)$	$P(W = x^2)$
15	225	0,56	0,56
10	100	0,23	0,23
05	25	0,02	0,02
-5	25	0,19	0,19
Total		1,00	1,00

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 . P(W = x_i^2) = 225.0,56 + 100 \;.\; 0,23 + 25.0,21 = 154,25$$

$$V(X) = 154,25 - (9,85)^2 = 57,23$$

Exemplo 14: Para o exemplo 11, a variância é:

$$E(X^2) = \int_0^{100} x^2 \frac{3}{5}(10)^{-5} x(100 - x)dx = 3000$$

$$V(X) = 3000 - (50)^2 = 500$$

8.6.1.1 Propriedades da variância

a) Dada uma constante *a*, temos:

$$V(X+a) = V(X)$$

b) Dada uma constante *a*, temos:

$$V(aX) = a^2 \;.\; V(X)$$

c) Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variáveis aleatórias independentes. Então

$$V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n)$$

Exemplo 15: No exemplo 12, a variância de L é:

$$V(L) = C_2^2 \; V(X) = C_2^2 \; (500)$$

8.6.2. Desvio padrão de uma variável aleatória

$$DP(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exercícios:

1) Suponha que uma caixa contenha 5 bolas (1 preta e 4 brancas). Retira-se aleatoriamente uma bola de cada vez (com reposição) até que saia 4 vezes a bola preta. Seja X o número de retiradas necessárias até que isto ocorra.

   a) Determine os possíveis valores de X e sua função de probabilidade.

Resp.: $P(X = x) = \binom{x-1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^{x-4}, \ x = 4,5,6,...$

2) O tempo T, em minutos, necessário para um operário processar certa peça, é uma v.a. com a seguinte distribuição de probabilidade:

T	2	3	4	5	6	7
P	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

a) Calcule o tempo médio de processamento. Resp. E(T) = 4.6

b) Estabeleça a função de distribuição acumulada.
Resp.:

$$F(T) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < 2 \\ 0,1 \text{ se } 2 \le t < 3 \\ 0,2 \text{ se } 3 \le t < 4 \\ 0,5 \text{ se } 4 \le t < 5 \\ 0,7 \text{ se } 5 \le t < 6 \\ 0,9 \text{ se } 6 \le t < 7 \\ 1 \text{se } t \ge 7 \end{cases}$$

Para cada peça processada, o operário ganha um fixo de 2,00 u.m. (unidade monetária), mas se ele processa a peça em menos de 6 minutos, ganha 0,50 u.m. por cada minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em 4 minutos, recebe a quantia adicional de 1,00 u.m.

c) Encontre a distribuição, a média e a variância da v.a. G: quantia em u.m. ganha por peça.

G	4	3,5	3	2,5	2	2
P	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

Resp.: $F(G)=\begin{cases} 0 & para\ G<2 \\ 0{,}3 & 2\le G\le 2{,}5 \\ 0{,}5 & 2{,}5\le G<3 \\ 0{,}8 & 3\le G<3{,}5 \\ 0{,}9 & 3{,}5\le G<4 \\ 1 & G\ge 4 \end{cases}$ e $E(X) = 2{,}75$, $VAR(X) = 0{,}4125$

3) Suponha que a demanda (X) por certa peça, numa loja de autopeças, siga a seguinte distribuição:

$$P(X = k) = \frac{a2^k}{k!} \qquad , k = 1,2,3,4.$$

a) Encontre o valor de a. Resp.: $a = \frac{1}{6}$

b) Calcule a demanda esperada. Resp.: $E(X) = \frac{19}{9}$

c) Qual é a variância da demanda da demanda? Resp.: $VAR(X) = \frac{680}{27}$

4) Seja X uma v.a. com função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 4x, & 0\le x<\frac{1}{2} \\ 4(1-x), & \frac{1}{2}\le x<1 \\ 0, & x\ge 1 \end{cases}$$

a) Determine a função de distribuição acumulada.

Resp.: $F(X)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 2x^2, & 0\le x<\frac{1}{2} \\ -2x^2+4x-1, & \frac{1}{2}\le x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$

b) Determine c, tal que $P(X \le c) = 0{,}5$. Resp.:c=0,5.

5) A demanda diária de arroz em um supermercado, em centenas de quilos, é uma v.a. X com função densidade.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x, & 0\le x<1\\ \frac{-x}{3}+1, & 1\le x<3\\ 0 & \text{c.c.}\end{cases}$$

a) Determine a função de distribuição acumulada.

$$\text{Resp.: } F(X)=\begin{cases}\frac{x^2}{3}, & 0\le x<1\\ -\frac{x^2}{6}+x-\frac{1}{2}, & 1\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$

b) Qual a probabilidade, em um dia escolhido ao acaso, a demanda ser superior a 150 kg? Resp.:0,625

c) Calcule a E(X) e V(X). Resp.: $E(X)=\frac{4}{3}$ e $VAR(X)=\frac{77}{9}$

6) A v.a. contínua X tem função densidade

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, -1\le x\le 0\\ 0\ ,\ \text{c.c.}\end{cases}$$

a) Se b for um número que satisfaça a -1 < b < 0, calcule P(X > b | X < b/2).

Resp.: $\frac{-7b^3}{b^3+8}$

b) Calcule E(Y) e V(Y), em que Y = 2X – 3/5. Resp.: $E(Y)=\frac{-21}{10}$ e $V(Y)=\frac{3}{20}$

3.ª Lista de Exercícios

1) Considere uma v.a. X com resultados possíveis: 0,1,2,... . Suponha que P(X = j) = (1-a) a^j , j = 0,1,2,.. . Para que valores de a o modelo representa uma legítima distribuição de probabilidade.

2) Uma urna contém 5 bolas de gude brancas e 3 pretas. Se 2 bolas de gude são extraídas aleatoriamente sem reposição e X denota o numero de bolas brancas obtidas, encontre a distribuição de probabilidades de X.

3) O número de carros vendidos semanalmente num stand é uma variável aleatória X com a seguinte função de probabilidade

X	1	2	3	4
P(X=x)	c	c/2	c/3	c/4

a) Determine a função de distribuição de X.
b) Calcule a probabilidade do número de carros vendidos não chegar a 4, sabendo que este valor é superior a 1.
c) Se os custos fixos semanais são de 30 unidades monetárias (u.m.) quando são vendidos 2 ou menos carros e 15 u.m. quando se vende mais de 2 carros e, além disso, por cada carro vendido há um lucro de 35 u.m., determine a função de distribuição da receita líquida semanal.

4) A probabilidade de que um bit seja transmitido com erro por um canal de transmissão digital é 0,1. Assuma que as transmissões sejam ensaios independentes.
a) Seja X o número de bits transmitidos até que ocorra o primeiro erro. Determine a distribuição de X.
b) Determine a probabilidade de se precisar observar mais que 5 ensaios de transmissão.
c) Determine a probabilidade de se precisar observar mais que 5 ensaios de transmissão, após já se ter observado 3 ensaios, sem que ocorresse erro.
d) Determine o número esperado de ensaios até o primeiro erro.
e) Seja Y o número de transmissões até a ocorrência do quarto erro. Determine a distribuição de Y.
f) Determine a probabilidade de se precisar observar no máximo 6 ensaios de transmissão.
g) Determine o número esperado do número de ensaios até o quarto erro.

5) A probabilidade de um bem sucedido lançamento de foguete é 0,8. Suponha que tentativas de lançamento sejam feitas até que tenham ocorrido 3 lançamentos bem sucedidos.
a) Qual é a probabilidade de que exatamente 6 tentativas sejam necessárias?
b) Qual é a probabilidade de que menos de 6 tentativas sejam necessárias?
c) Se cada tentativa de lançamento custa 5.000 u.m. e se um lançamento falho custa 500 u.m. adicionais, determine o custo esperado da operação.
d) Suponha agora que as tentativas sejam feitas até que três lançamentos consecutivos sejam bem sucedidos. Responda novamente as perguntas (a) e (b) nesse caso.

6) Os valores abaixo representam a distribuição de probabilidade de D, a procura diária de um certo produto. Calcule E(D) e V(D):

D	1	2	3	4	5
P(D=d)	01	0,1	0,3	0,3	0,2

a) Calcule E(D) e V(D);
b) Estabeleça a função de distribuição acumulada.

7)O número de vendas realizadas por um agente de seguros diariamente é uma v.a. com função de probabilidade

x	0	1	2	3	4
P(X=x)	w	z	t	z	w

a. Sabendo que em 10% dos dias as vendas são inferiores a um e que em 70% dos dias são superiores a um, determine w, z e t.
b. Determine o número médio de seguros vendidos diariamente.
c. Determine $E[2X - 1]$ e $V[2X - 1]$.
d. Determine a probabilidade de que, quando considerados dois dias, as vendas sejam superiores, em cada um deles, a duas unidades.
e. Se cada seguro é feito por 15000 unidades monetárias, determine a função de probabilidade da receita obtida com a venda dos seguros num dia.
f. Se num dia a receita for inferior a 50000 unidades monetárias, determine a probabilidade de que seja superior a 20000 unidades monetárias.

8)Considere a variável aleatória discreta coma seguinte função distribuição

$$F(x) = \begin{cases} a, & x < 0 \\ 1/6, & 0 \le x < 2 \\ 1/4, & 2 \le x < 4 \\ b, & 4 \le x < 6 \\ c, & x \ge 6 \end{cases}$$

a) Sabendo que $P(X = 6) = 1/2$, determine, justificando, os valores de a, b e c.
b) Calcule o valor esperado e a variância da variável aleatória $Y = \dfrac{2 - 3X}{4}$.

9) Uma organização financeira verificou que o lucro unitário (L) obtido numa operação de investimentos é dado pela seguinte expressão : $L = 1{,}1V - 0{,}9C - 4{,}5$. Sabendo-se que o preço de venda unitário (V) tem uma distribuição com média 50 u.m. e desvio padrão de 2,0 u.m e que o preço de custo unitário (C) tem uma distribuição de média 45 u.m. e desvio padrão de 1,5 u.m.. Determinar a média e o desvio padrão do lucro unitário.

10) Um estudo do peso dos cérebros de homens suecos constatou que o peso X é uma variável aleatória, com média 1400 gramas e desvio padrão de 20 gramas. Determine número positivo *a* e o número *b* tais que $Y=aX+b$ tenha média 0 e desvio padrão 1.

11) Em uma determinada localidade, a distribuição de renda em mil u.m. é uma variável aleatória X com função densidade.

$$f(x) = \begin{cases} 1/10\,x + 1/10 \text{ , para } 0 \le x \le 2 \\ -\,3/40\,x + 9/20 \text{ , para } 2 < x \le 6 \\ 0 \text{ , para } x < 0 \text{ ou } x \;\; 6 . \end{cases}$$

a) Qual a renda média nesta localidade?

b) Escolhida uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade de sua renda ser superior a 3.000,00 u.m?

c) Estabeleça a função de distribuição acumulada.

12) Suponha que *X* seja uma variável aleatória com densidade:

$$f(x) = \begin{cases} k(1-|x|), & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

a) Determine o valor de k;

b) Determine P(1/2 < X < 2/3)

c) Determine P(1/2 < X < 2/3 | X > 0)

d) Determine a função de distribuição acumulada de *X* e utilize-a para determinar os quartis de *X* e o percentil 90

e) Determine a moda de *X*.

13)Seja X uma v.a. contínua, que representa o tempo necessário para a pintura de uma peça de automóvel, em horas, com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 9x^2 - 8x^3, \quad 0 \le x \le 1 \\ 0, x > 1 \end{cases}$$

Determine:

a) a probabilidade de gastar menos de meia hora para a pintura;

b) a probabilidade para que o tempo gasto se situe entre ½ e ¾ h;

c) o tempo médio gasto na pintura da peça;

d) o desvio padrão para o tempo gasto na pintura.

14) A percentagem de álcool (100 X) em certo composto pode ser considerada uma variável aleatória, onde X tem a seguinte função densidade:

$$f(x) = 20\, x^3\, (1-x)\ ,\ 0 < x < 1.$$

a) Estabeleça a função de distribuição acumulada.

b) Calcule P (X ≤ 2/3)

c) Suponha que o preço de venda desse composto dependa do conteúdo de álcool. Especificadamente, se 1/3 < X < 2/3, o composto é vendido por C_1 dólares/galão; caso contrário, é vendido por C_2 dólares/galão, determine o lucro médio por galão.

15)Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} ax\ ,\ 0 \le x < 1 \\ a\ ,\ 1 \le x < 2 \\ -ax + 3a\ ,\ 2 \le x < 3 \\ 0\ ,\ \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Determine a constante a;

b) Se X_1, X_2, X_3 forem três observações independentes de X, qual será a probabilidade de, exatamente, um desses três números ser maior que 1,5?

16)Considere X uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, -1 < x < 0 \\ 1 - x, 0 < x < 1 \\ 0, \text{c.c.} \end{cases}$$

Determine a esperança matemática e a variância.

17)A quantidade de cerveja vendida diariamente numa feira (em milhares de litros) é uma variável aleatória com a seguinte função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} kx, 0 \leq x \leq 4 \\ k(12 - 2x), 4 < x \leq 6 \\ 0, \text{c.c.} \end{cases}$$

a) Obtenha o valor de k e de E [3X + 2].
b) Considere os seguintes acontecimentos:
A = “venda diária superior a 4000 litros”
B = “venda diária entre 3000 e 5000 litros”
Indique, justificando, se A e B são independentes.

18)O tempo de vida, em horas, de um dispositivo, é dado pela função densidade.

$$f(t) = (1/50)e^{-(t/50)}, t \geq 0.$$

Qual a probabilidade de que um desses dispositivos dure mais de 25 horas e menos de 75 horas? Sabendo-se que tal ocorreu, qual a probabilidade de que tenha durado mais de 50 horas?

19) Um dispositivo é constituído de 3 elementos independentes que falham numa experiência com probabilidade 0,1. Dê a distribuição de probabilidade da v.a. X= número de elementos que falham numa experiência.

20) Na venda de um certo produto tem-se duas opções :

a) Cobrar 1 u.m. por peça sem inspeção ;
b) Classificar o lote em produto de 1.ª e 2.ª mediante a seguinte inspeção : retiramos 5 peças do lote e se não encontrarmos mais do que uma defeituosa o lote será de 1.ª qualidade, sendo de 2.ª qualidade o lote que não satisfizer tal condição. O preço de venda é de 1,20 u.m. por peça do lote de 1.ª e 0,80 u.m. por peça do lote de 2.ª .

Sabendo-se que cerca de 10% das peças produzidas são defeituosas, analisar qual das duas opções é a mais vantajosa para o vendedor.

Gabarito

1) $|a| < 1$
2)

x	0	1	2
P(X=x)	C	c/2	c/3

3) a)12/25 b)10/13

c)

r	5	40	90	125
P(R=r)	c	c/2	c/3	c/4

4) a) $P(X=x) = 0{,}9^{x-1}\,0{,}1$, x= 1,2,3,... (distribuição geométrica) b) 0,6561
c) 0,81 d) 10 e) $P(Y=y)= \binom{y-1}{4-1} 0{,}9^{y-4} 0{,}1^4$ (distrbuição binomial negativa)
f) 0,0012 g) 4,4444

5) a) 0,0409 b)0,9421 c) 19.125 d)0,0041 e 0,6349

6) E(D) = 3,4 V(D) = 1,44

$$F(d) = \begin{cases} 0, & d < 1 \\ 0{,}1, & 1 \le d < 2 \\ 0{,}2, & 2 \le d < 3 \\ 0{,}5, & 3 \le d < 4 \\ 0{,}8, & 4 \le d < 5 \\ 1, & d \ge 5. \end{cases}$$

7) a) w = 0,1, z = 0,2, t = 0,4. b) 2. c) E[2X − 1] = 3, V [2X − 1] = 4,8 d) 0,09
e) f)0,667

R	0	15000	30000	45000	60000
P(R=r)	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

8) a=0 b=7/12 c= 1 9) E(L) = 10 $\sqrt{V(L)} = 2{,}58$ 10) a=1/20 b= -70

11) a) 2,4667 b) 0,3375
c)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2/20 + x/10, & 0 \le x \le 2 \\ -(3/80)x^2 + (9/20)x - 28/80, & 2 < x \le 6 \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

12) a) 1 b) 17/144 c) 34/144 d) $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < -1, \\ x + x^2/2 + 1/2, -1 \le x < 0 \\ x - x^2/2 + 1/2, 0 \le x < 1 \\ 1, \text{ se } x \ge 1 \end{cases}$

Q_1=-0,293 Q_2=0 Q_3=0,293 P_{90}=0,5528 e) Mo=0

13) a) 0,25 b) 0,3828 c) 0,65 d) 0,47

14) a) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 5x^4 - 4x^5, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ b) 0,4609 c) C_1 (0,4156) + C_2 (0,5844)

15) a) a=0,5 b)0,375 16) a) E(x)=0 b) Var(x)= 1/6

17) a) k=1/12 E[3x+2]=11,99 b) Não são independentes 18) a) 0,3834 b) 0,3774

19) X~bin (3;0,1) 20) Opção B

9. Alguns modelos probabilísticos para variáveis aleatórias

9.1 Introdução

Existem modelos probabilísticos que ocorrem com frequência na prática. Nas próximas seções, serão definidos alguns modelos, apresentando as condições que devem ser satisfeitas e algumas características, tais como, esperança, variância e como calcular probabilidade.

9.2 Variáveis Aleatórias Discretas

9.2.1 Distribuição de Bernoulli

Muitos experimentos são tais que os resultados possíveis apresentam ou não uma determinada característica.

Exemplos:

a) Uma peça é escolhida, ao acaso, de um lote contendo 500 peças: esta peça é defeituosa ou não.
b) Uma pessoa é escolhida, ao acaso, dentre 1000 pessoas, é ou não do sexo masculino.
c) Uma pessoa é escolhida, ao acaso, entre os moradores de uma cidade, e pergunta-se se ela diz SIM ou NÃO a um projeto governamental.

Em um experimento aleatório com apenas dois resultados possíveis podemos associar o valor 1, se sucesso ocorre e o valor 0, se fracasso ocorre. Um experimento deste tipo é chamado de ensaio de Bernoulli. Suponha que um sucesso ocorra com probabilidade p.

Seja X uma v.a. definida para este experimento. Então,

X	1	0
P(X=x)	p	1-p =q

Função de distribuição de X: $F(x) = \begin{cases} 0\,,\ x < 0 \\ q\,,\ 0 \le x < 1 \\ 1,\ x \ge 1 \end{cases}$

Esperança de X: $E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$

Variância de X: $V(X) = p - p^2 = p(1 - p)$, onde $E(X^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p$

9.2.2 Distribuição Binomial

Consideremos n repetições independentes de ensaios de Bernoulli ($n \geq 2$). O modelo binomial fundamenta-se nas seguintes hipóteses:

a) n ensaios independentes e idênticos são realizados;

b) A probabilidade de "sucesso" é igual a "p" em cada ensaio e q é a probabilidade de fracasso, sendo $p + q = 1$.

Seja a variável aleatória Y o número de sucessos nos n ensaios. Nestas condições dizemos que Y tem distribuição binomial com parâmetros n e p, onde os valores possíveis de y são$\{0,1,2,...,n\}$:

n = número de repetições do experimento e
p = probabilidade de sucesso em cada repetição

Notação: $Y \sim B(n, p)$

$$P(Y = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,2,...n \\ 0, \text{ c.c} \end{cases}$$

Por meio do binômio de Newton, verifica-se que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1.$$

Exemplo 1:
Uma usina hidroelétrica tem 5 geradores que funcionam independentemente, cada um com probabilidade 0,98 de estar em operação. Qual a probabilidade de que exatamente dois estejam em funcionamento em determinado instante?

Y = número de geradores em funcionamento

p = 0,98 = probabilidade de um gerador estar em funcionamento (a probabilidade de sucesso)

Entre os 5 estabelecimentos, ou seja, n = 5, qual a probabilidade de 2 terem tratores:

$$P(Y = 2) = \binom{5}{2} (0{,}98)^2 (1 - 0{,}98)^{5-2} = 10. (0{,}98)^2.(0{,}02)^3 = 0{,}000077$$

- Esperança e Variância da distribuição Binomial

Se Y tem distribuição binomial de parâmetros n e p $\Rightarrow$

$$\begin{cases} E(Y) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np & \text{(média)} \\ Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = npq & \text{(variância),} \end{cases}$$

em que $E(Y^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Demonstração:

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Fazendo s = k-1, tem-se:

$$E(Y) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{n!}{(s)!(n-s-1)!} p^{s+1} (1-p)^{n-s-1} = np \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} p^s (1-p)^{n-s-1} = np.$$

Com variância: $V(X) = npq \Rightarrow DP(X) = \sqrt{npq}$

Exemplo 2:
Com os dados do exemplo anterior, calcular o número esperado de geradores em funcionamento, a variância e o desvio-padrão:

$E(X) = np = 5(0,98) = 4,9$

$Var(X) = npq = 5\,(0,98)\,(0,02) = 0,098$

$DP(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{0,098} = 0,3130$

Exercícios:

1) Das variáveis abaixo descritas, assinale quais são binomiais, e para estas dê os respectivos campos de definição e distribuição de probabilidades. Quando julgar que a variável não é binomial, aponte as razões de sua conclusão.

a) De uma urna com 10 bolas brancas e 20 pretas, vamos extrair, com reposição, cinco bolas.Seja X é o número de bolas brancas nas 5 extrações. Resp.: Binomial

b) Refaça o problema anterior, mas desta vez as n extrações são sem reposição. Resp.: Não é Binomial.

c) De 5 urnas com bolas pretas e brancas, vamos extrair de cada uma delas uma bola. Suponha que X é o número de bolas brancas obtidas no final. Resp.: Não é binomial.

d) Em uma indústria existem 100 máquinas que fabricam determinada peça. Cada peça é classificada como sendo boa ou defeituosa. Escolhemos ao acaso um instante de tempo, e verificamos uma peça de cada uma das máquinas. Suponha que X seja o número de peças defeituosas. Resp.: Não é Binomial

2) Um fabricante de peças de automóveis garante que uma caixa de suas peças conterá, no máximo, 2 defeituosas. Se a caixa contém 18 peças, e a experiência tem demonstrado que esse processo de fabricação produz 5% das peças defeituosas, qual a probabilidade de que uma caixa satisfaça a garantia? Resp.: 0,9419.

9.2.3 Distribuição de Poisson

Em muitos casos, conhece-se o número de sucessos, porém se torna difícil e, às vezes, sem sentido, determinar o número de fracassos ou o número total de provas. Por exemplo: automóveis que passam numa esquina. Pode-se num determinado intervalo de tempo anotar o número de carros que passaram, porém, o número de carros que deixaram de passar pela esquina não poderá ser determinado. Veremos que a distribuição de Poisson se aplica nestes casos.

A distribuição de Poisson é largamente usada quando de deseja contar o número de eventos de um certo tipo, que ocorrem em um intervalo de tempo, superfície, ou volume.

Exemplos:

a) número de falhas de um computador em um dia de operação;
b) número de defeitos num pneu;
c) número de buracos por quilometro em uma rodovia;
d) número de clientes que chegam a uma determinada agência bancária durante o expediente.

Seja a variável aleatória X o número de eventos de um certo tipo, que ocorrem em um intervalo de tempo, ou superfície, ou volume. Suponha que estes eventos ocorrem em instantes aleatórios de tempo ou de espaço e que as hipóteses abaixo sejam válidas:

1) o número de ocorrências de um evento em um intervalo de tempo, ou superfície, ou volume é independente do número de ocorrências do evento em qualquer outro intervalo disjunto.
2) a probabilidade de duas ou mais ocorrências simultâneas é praticamente zero.
3) o número médio de ocorrências por unidade de tempo, ou superfície, ou volume, α, é constante ao longo do tempo, ou superfície, ou volume.

Nestas condições dizemos que X tem distribuição Poisson com parâmetro $\lambda = \alpha t$, α é o número médio de eventos por unidade de intervalo de tempo, ou superfície, ou volume.

Notação:

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda) \Rightarrow P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x=0,1,2, ...,n,...$$

Se X tem distribuição Poisson com parâmetro $\lambda \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \lambda & \text{(média)} \\ Var(X) = \lambda & \text{(variância)} \end{cases}$

Demonstração:

1. Sabe-se que $E(X) = \sum_{x=0}^{n} xP(X = x) = \sum_{x=0}^{n} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{n} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x(x-1)!} = \sum_{x=1}^{n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!}$

Fazendo x –1 = y, tem-se:

$$E(X) = \sum_{y=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y+1}}{y!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}$$

Utilizando-se a fórmula de Maclaurin (caso particular da fórmula de Taylor), $\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!} = e^{\lambda}$,

obtém-se, $E(X) = \lambda$

2. De acordo com a definição de variância, tem-se:

$V(X) = E(X^2) – [E(X)]^2$, onde já vimos que, $[E(X)]^2= \lambda^2$, e,

$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x^2\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x(x-1)!} = \sum_{x=1}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!}$, fazendo y = x – 1, tem-se:

$$E(X^2) = \sum_{y=0}^{\infty}(y+1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y+1}}{y!} = \lambda\sum_{y=0}^{\infty} y\frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} + \lambda\sum_{y=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} = \lambda^2 + \lambda$$

$V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$, assim $V(X) = \lambda$.

Se a variância é $\lambda \Rightarrow DP(X) = \sqrt{\lambda}$

Exemplo 3: Em média há duas chamadas por hora num certo telefone. Calcular a probabilidade de se receber no máximo 3 chamadas em duas horas e a probabilidade de nenhuma chamada em 90 minutos.

X= número de chamadas telefônicas em duas horas

Então,
$\alpha = 2$ (número médio chamadas por hora)
t = 2 horas
$\lambda = \alpha t = 4$ (número médio chamadas em duas horas)

$$P(X \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} P(X = x) = \sum_{x=0}^{3} \frac{e^{-4} 4^x}{x!} = 0{,}4331$$

Y= número de chamadas telefônicas 90 minutos
Então,
t = 90 minutos
α = 2/60 (número médio de chamadas por minuto)
$\lambda = \alpha t$ = 2/60 x 90 = 3 (número médio chamadas em 90 minutos)

$$P(Y = 0) = \frac{e^{-3}(3)^0}{0!} = 0{,}0498$$

Exercícios:

1) Uma fábrica produz tecidos com média de 2,2 defeitos por jarda quadrada. Determine as seguintes probabilidades:

   a) não mais de 4 defeitos numa jarda quadrada; Resp.:0,9275

   b) nenhum defeito em duas jardas quadradas; Resp.:0,0123

   c) duas jardas quadradas cada uma com dois defeitos. Resp.: 0,0719

2) O número de petroleiros que chegam a uma refinaria em cada dia ocorre segundo uma distribuição de Poisson, com λ = 2. As atuais instalações podem atender, no máximo, a 3 petroleiros por dia. Se mais de 3 aportarem num dia, o excesso é enviado a outro porto.

a) Em um dia, qual a probabilidade de se enviar petroleiros para outro porto? Resp.: 0,1431

b) De quanto deverão ser aumentadas as instalações para permitir atender a todos os navios que chegarem pelo menos em 95% dos dias? Resp.: 2

c) Qual o número médio de petroleiros que chegam por dia? Resp.: 2.

4ª Lista de Exercícios

1) Se X ~ B(n,p), sabendo-se que E(X) = 12 e $\sigma^2 = 3$, determinar:

a) n	e) E(Z) e V(Z),onde Z = (X-12)/$\sqrt{3}$
b) p	f) P(Y ≥ 14/16), onde Y = X/n
c) P(X < 12)	g) P(Y ≥ 12/16), onde Y = X/n
d) P(X ≥ 14)	

2) Uma fileira de luzes de Natal contém 20 lâmpadas ligadas em série, isto é, se uma delas falha, toda a fileira falhará. Cada lâmpada tem 0,02 de probabilidade de falhar

durante um período de 3 anos. As lâmpadas falham independente umas das outras. Qual é a probabilidade de toda a fileira de lâmpadas permanecer sem falhar durante três anos?

3)O número de partículas radioativas emitidas por uma fonte segue distribuição de Poisson com λ = 0,5 partículas por segundo. Determine a probabilidade de a fonte emitir:

a) uma partícula em um segundo?
b) mais de uma partícula em um segundo?
c) uma partícula em três segundos?
d) no máximo duas partículas em 3 segundos?
e) Uma chapa fotográfica é sensibilizada ao ser atingida por 3 ou mais partículas. Se 5 chapas são colocadas, uma após outra, durante 2 segundos cada uma em frente à fonte, qual a probabilidade de exatamente uma delas ser sensibilizada?

4) Seja X o número de peças defeituosas saídas de certa linha de produção. Sabe-se que, para determinado lote, X é binomial com média 240 e variância 48. Determine a distribuição de probabilidade de X e a probabilidade do lote não conter nenhuma peça defeituosa.

5) Um industrial fabrica peças, das quais 1/5 são defeituosas. Dois compradores, A e B, classificaram as partidas adquiridas em categorias I e II, pagando 1,20 u.m. e 0,80 u.m. respectivamente do seguinte modo:
Comprador A : retira uma amostra de 5 peças; se encontrar mais que uma defeituosa, classifica como II.
Comprador B : retira uma amostra de 10 peças; se encontrar mais que duas defeituosa, classifica como II.
Em média, qual comprador oferece maior lucro?

6) Numa via de mão única que termina numa ponte , quer se estudar o tráfego. Encontra-se que esse volume é de 120 veículos/hora, em média. Assume-se que a chegada de veículos constitui um processo de Poisson. Ache a probabilidade de que:

a) num período de um minuto mais de três veículos cheguem ao pedágio ;
b) em 3 minutos cheguem mais do que 1 veículo .

7) Numa linha adutora de água, de 60 km de extensão , o número de vazamento no período de um mês é em média 4 . Qual é a probabilidade de ocorrer, durante o mês, pelo menos um vazamento num setor de 3 km de extensão?

8) Um fabricante afirma que apenas 5% de todas as válvulas que produz tem duração inferior a 20 h. Uma indústria compra semanalmente um grande lote de válvulas desse fabricante, mas sob a seguinte condição: ela aceita o lote se, em 10 válvulas escolhidas ao acaso, no máximo uma tiver duração inferior a 20 horas; caso contrário o lote é rejeitado.

a) Se o fabricante de fato tem razão, qual a probabilidade de um lote ser rejeitado?
b) Suponha agora que o fabricante esteja mentindo, isto é, na verdade a proporção de válvulas com duração inferior a 20 h é de 10%. Qual a probabilidade do lote ser aceito, segundo o critério acima?

9) Certa fábrica produz fusíveis elétricos, dos quais 15% são defeituosos. Achar a probabilidade de que, numa amostra de 10 fusíveis selecionados ao acaso, tenhamos:

a) nenhum defeituoso.
b) pelo menos um defeituoso.
c) no máximo um defeituoso.

10) Um fabricante de peças de automóveis garante que uma caixa de suas peças conterá no máximo duas defeituosas. Se a caixa contém 18 peças, e a experiência tem demonstrado que este processo de fabricação produz 5% das peças defeituosas, qual a probabilidade de que uma caixa satisfaça a garantia?

11) Certa companhia aérea chegou à conclusão de que 4% das pessoas que compram passagens não comparecem ao embarque. De modo a obter maior aproveitamento nas vendas, passou a adotar o critério de vender 77 passagens para um vôo com 75 lugares. Determine a probabilidade de que todas as pessoas que compareçam encontrarão lugar no citado vôo.

12) Em um certo tipo de fabricação de fita magnética, ocorrem cortes a uma taxa de 1 por 2.000 cm. Qual a probabilidade de que um rolo com 2.000cm tenha:

a) nenhum corte?
b) no máximo dois cortes?
c) pelo menos dois cortes?

13)Numa determinada estrada ocorrem em média 2 acidentes para cada 100km. Qual a probabilidade de que :
a) em 250 km ocorram pelo menos 3 acidentes?
b) em 300 km ocorram 5 acidentes?

14)Uma fonte mineral contém um número médio de quatro bactérias por cm^3 de água. Dez tubos de ensaio, de 1 cm^3, são enchidos com este líquido. Supondo que a distribuição de Poisson é aplicável, encontre a probabilidade:

a) De que todos os 10 tubos de ensaio apresentem bactérias, isto é, contenham ao menos uma bactéria cada;
b) De que exatamente oito tubos de ensaio apresentem bactérias.

Gabarito

1) a) n = 16 e p=0,75 c) 0,3699 d) 0,1971 e) E(Z) = 0 e V(Z) = 1 f) 0,1971 g) 0,6301

2) 0,6676 3) a) 0,3033 b) 0,0902 c) 0,3347 d) 0,8088 e) 0,2873

4) n = 300 p=0,8 $P(X=0)=\binom{300}{0}\left(\frac{4}{5}\right)^0\left(\frac{1}{5}\right)^{300}$

5) Comprador A 6) a) 0,1429 b) 0,9826 7)0,1813 8) a) 0,0861 b) 1-0,2639

9) a) 0,1969 b) 0,8031 c) 0,5443 10) 0,9419 11) 0,8185

12) a) 0,3679 b) 0,9197 c) 0,2642 13) a) 0,8753 b) 0,1606

14) a) $(0,9816)^{10}$ b) 0,16%

9.3 Variáveis Aleatórias Contínuas

9.3.1. Distribuição Normal (ou Gaussiana)

Existem várias distribuições teóricas que podem ser usadas para representar fenômenos reais. Dentre estas, uma das mais importantes é a distribuição normal. A seguir faremos um breve estudo desta distribuição.

Importância da distribuição normal:

1- Representa com boa aproximação as distribuições de freqüências observadas de muitos fenômenos naturais e físicos;
2- Distribuições importantes, como por exemplo a binomial e Poisson, podem ser aproximadas pela normal, simplificando o cálculo de probabilidades;
3- A distribuição amostral das médias (e proporções) em grandes amostras se aproxima da distribuição normal, o que nos permite fazer estimações e testes estatísticos.

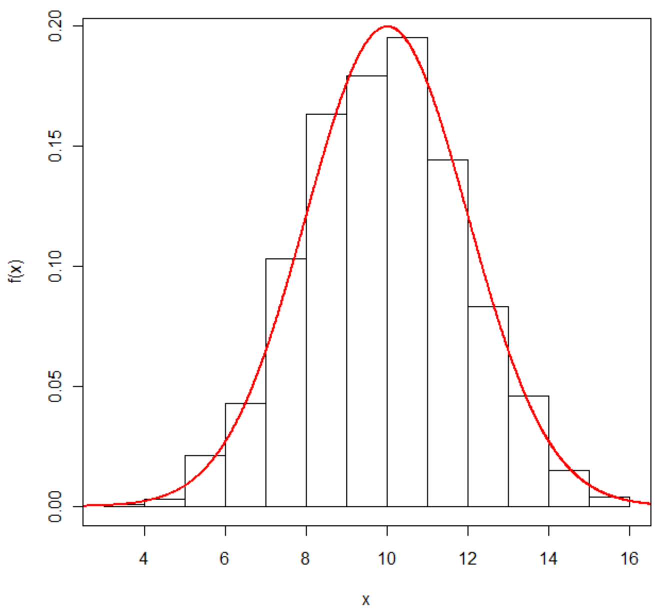
Uma variável aleatória X, que assume valores em R, tem distribuição normal com parâmetros μ e σ^2 se sua função de densidade probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma^2}} \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \mu < \infty \text{ e } \sigma > 0$$

Notação: $X \sim N(\mu\,,\sigma^2)$

O histograma a seguir foi construído a partir de dados provenientes de uma distribuição normal. A curva desenhada sobre o histograma representa a função densidade de uma distribuição normal. Vemos que este gráfico é do tipo simétrico.

Gráfico da função densidade da distribuição normal com parâmetros μ=10 e σ^2=4



É importante ressaltar a diferença que existe entre o histograma e a curva: o histograma é uma representação da distribuição dos elementos (dados) de uma amostra extraída de uma população, enquanto a curva representa a distribuição teórica que melhor se aproxima do histograma observado.

Propriedades:

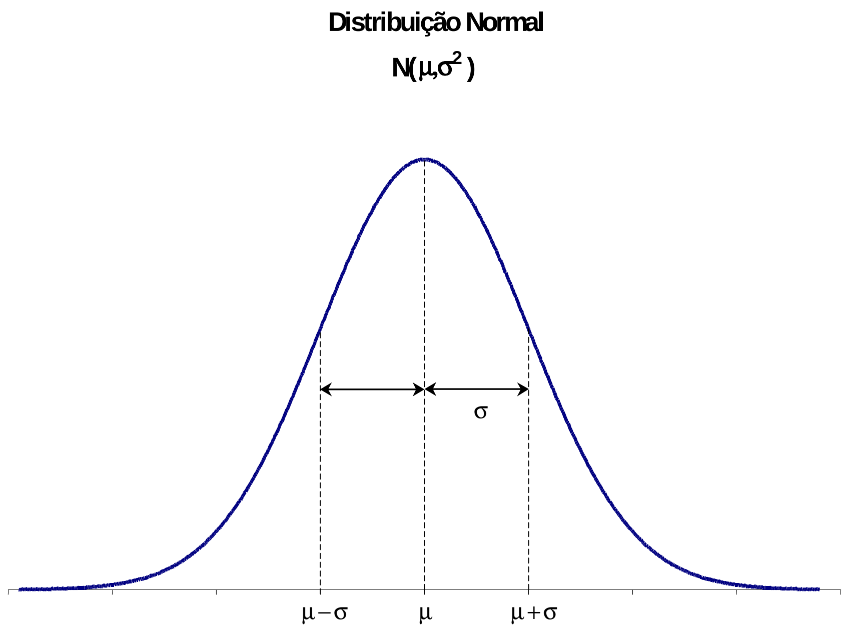
a) $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2$ (σ - desvio padrão);

b) A curva normal é simétrica com relação a sua média μ, ou seja:

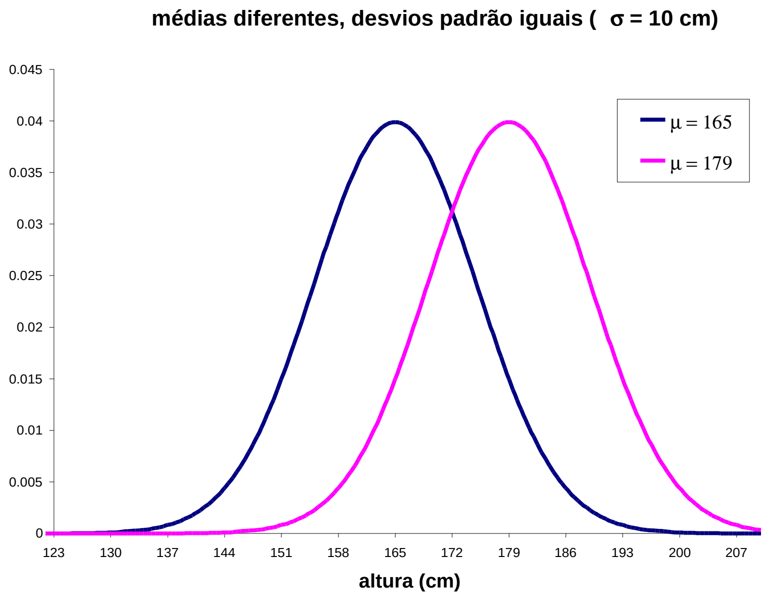
- $f(\mu+x) = f(\mu-x)$;
- $P(-x \leq X \leq \mu) = P(\mu \leq X \leq x)$;
- $P(X > \mu) = P(X < \mu) = 0,5$.

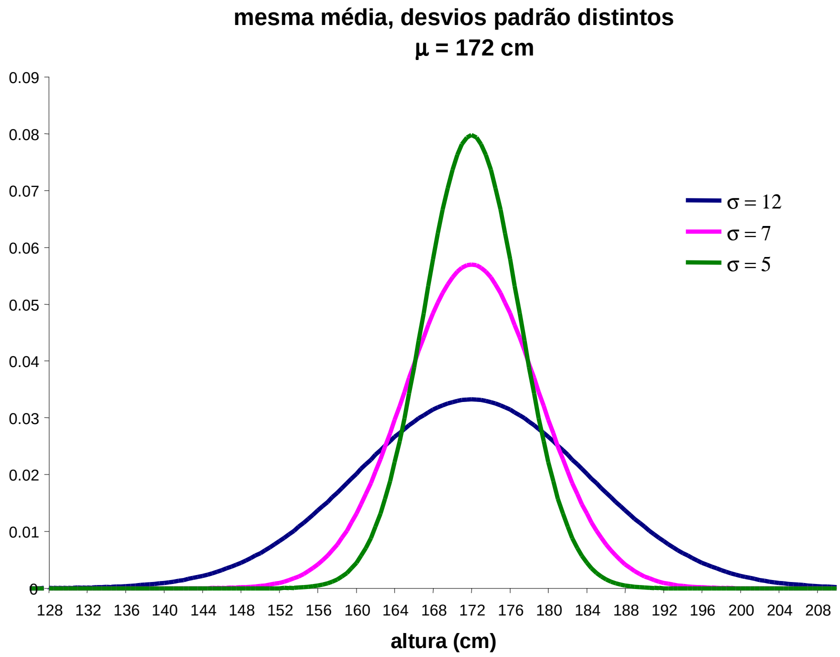
c) A moda e a mediana de X são iguais a μ;

d) A distância entre μ e os pontos de inflexão da curva é igual a σ;



Exemplos de curvas da distribuição normal para diferentes valores dos parâmetros





Cálculo das probabilidades de uma distribuição normal

A probabilidade de uma variável aleatória normal X assumir valores entre dois números a e b (a < b) é igual à área sob a curva no intervalo [a,b], isto é,

$$P(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

Esta probabilidade pode ser obtida através de uma transformação na variável aleatória X como veremos a seguir.

A distribuição normal possui um importante propriedade que permite que qualquer variável aleatória com esta distribuição possa ser transformada em uma outra variável com distribuição normal com parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$.

Teorema:

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então a variável transformada $Z = \frac{(X-\mu)}{\sigma}$ tem distribuição N(0,1), isto é, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}} \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{z}^{\mathbf{2}}/\mathbf{2}}, -\infty < z < \infty$.

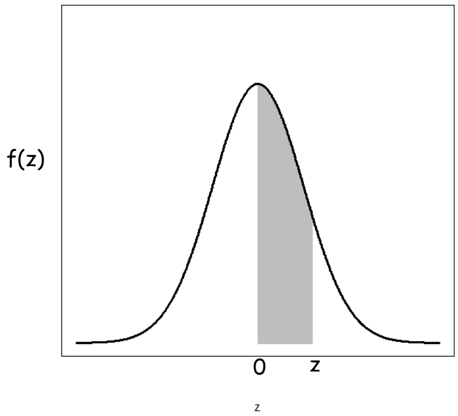
Portanto, $P(X \le a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P(Z \le z)$ com $Z = \frac{(X-\mu)}{\sigma}$

As probabilidades para a distribuição normal (0,1) também chamada de Normal Padrão ou Normal Padronizada estão tabeladas. Pelo exposto acima vemos que através desta tabela podemos obter as probabilidades para qualquer outra distribuição normal.

Há vários tipos de tabelas que nos fornece as probabilidades para a distribuição normal padrão. Faremos uso do tipo que está em anexo. Essa tabela fornece a área sob a curva no intervalo de zero até o ponto z, isto é, $P(0 \leq Z \leq z)$. Os elementos dessa tabela são:

- Na primeira coluna encontra-se a parte inteira e a primeira casa decimal do valor de z;
- A primeira linha refere-se à segunda casa decimal do valor de *z*;
- As probabilidades são encontradas no cruzamento das linhas com as colunas.

Graficamente, a probabilidade fornecida pela tabela é a seguinte:



A área sombreada no gráfico corresponde à seguinte probabilidade:

$$P(0 < Z < z) = \int_0^z f(z)dz.$$

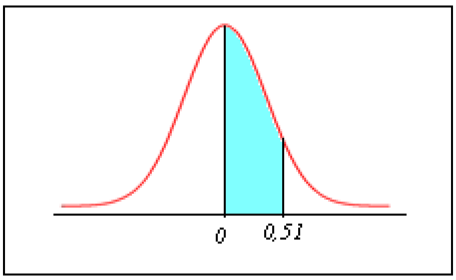
Como a curva normal padrão é uma função simétrica em relação 0:

- *f(z)=f (- z) ;*
- *$P(- z \leq Z \leq 0)= P(0 \leq Z \leq z)$;*
- $P(Z > 0) = P (Z < 0) = 0,5$.

Exemplos de uso da tabela da distribuição normal padrão:

- Calcule $P(0 \leq Z \leq 0,51)$

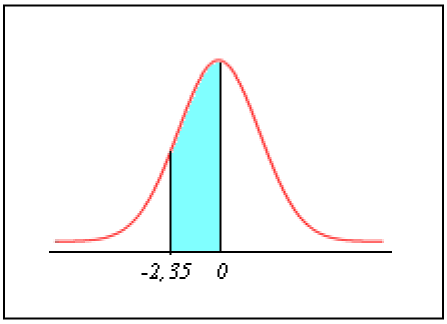
  A área que representa esta probabilidade é:



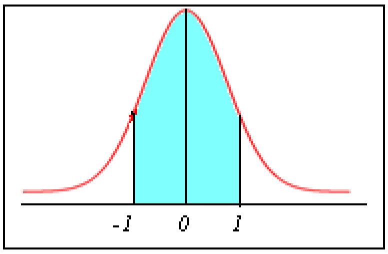
A seguir, como obter essa probabilidade na tabela da distribuição normal padrão

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000000	0.0039894	0.0079783	0.0119665	0.0159534	0.0199388	0.0239222	0.0279032	0.0318814	0.0358564
0.1	0.0398278	0.0437953	0.0477584	0.0517168	0.0556700	0.0596177	0.0635595	0.0674949	0.0714237	0.0753454
0.2	0.0792597	0.0831662	0.0870644	0.0909541	0.0948349	0.0987063	0.1025681	0.1064199	0.1102612	0.1140919
0.3	0.1179114	0.1217195	0.1255158	0.1293000	0.1330717	0.1368307	0.1405764	0.1443088	0.1480273	0.1517317
0.4	0.1554217	0.1590970	0.1627573	0.1664022	0.1700314	0.1736448	0.1772419	0.1808225	0.1843863	0.1879331
0.5	0.1914625	0.1949743	0.1984682	0.2019440	0.2054015	0.2088403	0.2122603	0.2156612	0.2190427	0.2224047
0.6	0.2257469	0.2290691	0.2323711	0.2356527	0.2389137	0.2421539	0.2453731	0.2485711	0.2517478	0.2549029

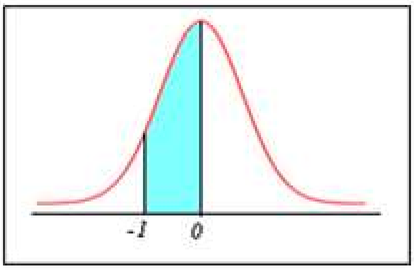
- Calcule P(-2,35 ≤ Z≤ 0)



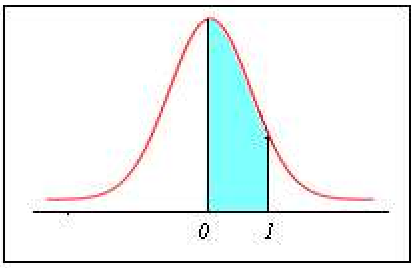
- Calcule P(-1≤ Z ≤ 1)
    - A área que representa esta probabilidade é:



Esta área pode ser separada em duas subáreas, que são:

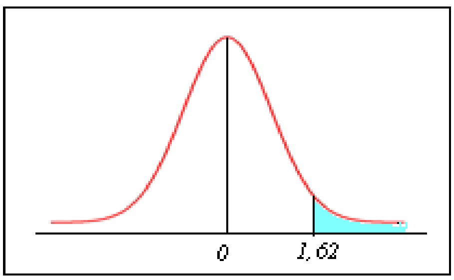


e

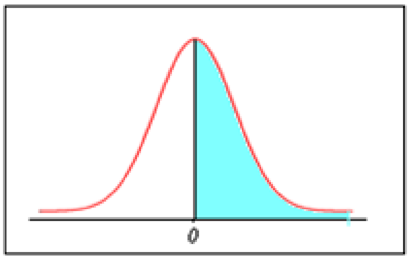


P(-1 ≤ Z ≤ 1) = P(-1 ≤ Z ≤ 0) + P(0 ≤ Z ≤ 1) = 0, 3413 + 0, 3413 = 0, 6826

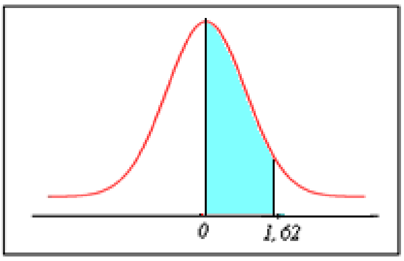
- Calcule P(Z ≥ 1,62)



Esta área pode ser pensada da seguinte forma :



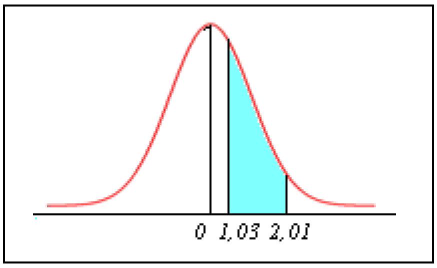
-



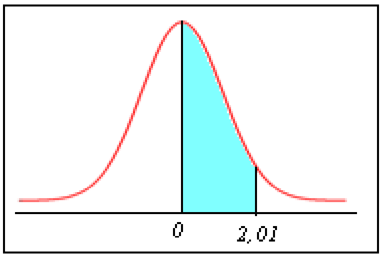
$P(Z \geq 1,62) = 0,5 – P(0 \leq Z \leq 1,62\ ) = 0,5 – 0,4474 = 0,0526$

- Calcule $P(1,03 \leq Z \leq 2,01\ )$

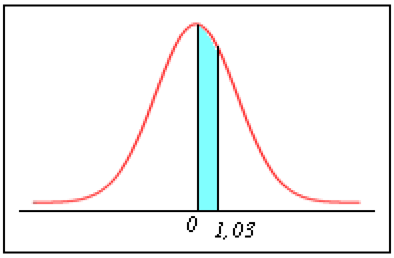
A área que representa esta probabilidade é :



Esta área pode ser pensada da seguinte forma:

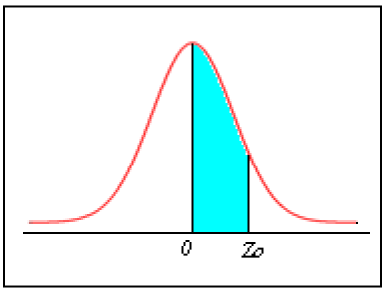


–



$P(1,03 \leq Z \leq 2,01\ ) = P(0 \leq Z \leq 2,01) - P(0 \leq Z \leq 1,03)$

- Determine z tal que $P(0 \leq Z \leq z_0) = 0,395$



Para encontrar o ponto z_0 , que corresponda à probabilidade $P(0 \leq Z \leq z_0)$ = 0,395, procure no meio da tabela da curva normal padrão o valor da área exata ou o mais próximo possível da requerida. Neste caso, o ponto procurado é 1,25. Logo, z_0 = 1,25

Exemplos:

1) Usando a tabela da normal padrão podemos obter:
$P(0 \leq Z \leq 1) = 0,3413$
$P(-2,55 \leq Z \leq 1,2) = 0,4946 + 0,3849 = 0,8795$
$P(Z \geq 1,93) = 0,5 - 0,4732 = 0,0268$

2) A característica da qualidade de interesse, associada a um processo que está sob controle estatístico, é normalmente distribuída com média 100 e desvio padrão 5. As especificações estabelecidas para esta característica da qualidade são 95 ± 10.

a) Qual e a proporção de não-conformidade referente a esta característica?
b) Qual e a proporção de não-conformidade referente a esta característica, se o processo passasse a operar centrado no valor 95, chamado valor nominal da especificação?

Resolução:

a) $P(X > 105) + P(X < 85) = P\left(Z > \frac{105-100}{5}\right) + P\left(Z < \frac{85-100}{5}\right) =$

$= P(Z > 1) + P(Z < -3) = (0,5 - 0,3413) + (0,5 - 0,4987) = 0,1600$

b) $\mu = 95$

$P(X > 105) + P(X < 85) = P\left(Z > \frac{105-95}{5}\right) + P\left(Z < \frac{85-95}{5}\right) =$

$= P(Z > 2) + P(Z < -2) = 2\,(0,5 - 0,4772) = 0,0456$

9.3.2 Distribuição Log-normal

Seja X uma variável aleatória contínua com valores positivos. Dizemos que X tem distribuição log-normal com parâmetros μ e σ^2, para $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma^2 > 0$, se a variável $Y = \ln X$ é normalmente distribuída com média μ e variância σ^2.

A função de densidade de probabilidade de X é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{x.\sigma.\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \text{para } x > 0$$

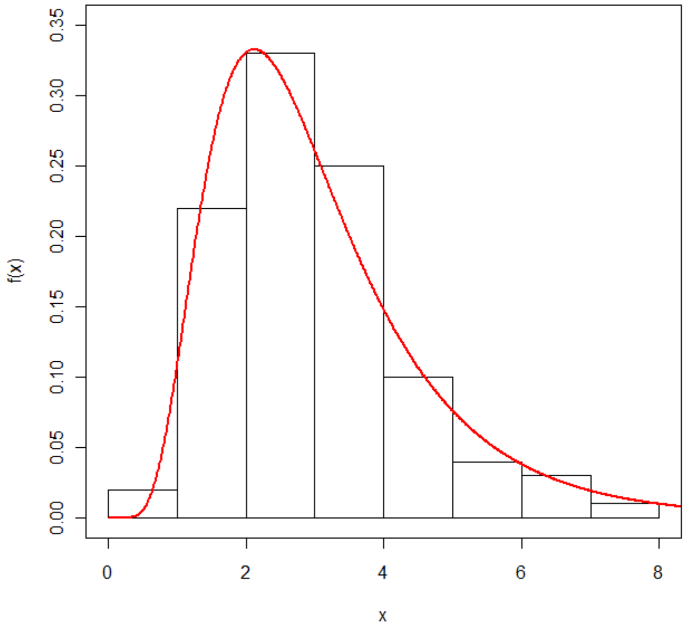
Propriedades:

1) $E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$

2) $V(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$

O histograma a seguir foi construído a partir de dados provenientes de uma distribuição log-normal. A curva desenhada sobre o histograma representa a função densidade de uma distribuição log-normal. Vemos que este gráfico é do tipo assimétrico positivo.

Gráfico da função densidade da distribuição log-normal com parâmetros $\mu=1$ e $\sigma^2=0{,}2$



Exemplo 3: Apenas para ilustrar a forma da distribuição log-normal, que é acentuadamente assimétrica positiva, supondo que a distribuição tem $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, calcular a probabilidade da variável aleatória X assumir um valor inferior a 2.

$$P(X < 2) = \int_0^2 \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2} dx = 0{,}7549 \quad \text{(Faça y = ln x)}$$

Exemplo 4: Em uma série de experiências verificou-se que os ganhos de corrente de certos transistores (os quais são proporcionais ao logaritmo neperiano de $\frac{I_S}{I_E}$, relação das intensidades de corrente de saída e de entrada) seguem distribuição normal com parâmteros 2 e 0,01. Qual é a probabilidade de que tenhamos $\frac{I_S}{I_E}$ entre 6,1 e 8,2?

Solução:

Como o ganho de corrente se mede com unidades tais que se igualam a $\ln\left(\frac{I_S}{I_E}\right)$ e se os ganhos seguem uma distribuição normal então $\frac{I_S}{I_E}$ segue a distribuição log-normal.

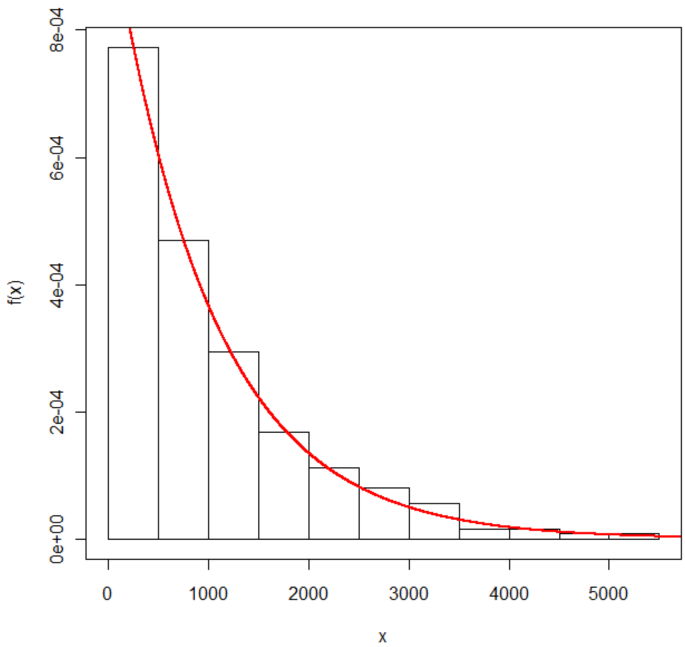
Daí, $P\left(6{,}1 \leq \frac{I_S}{I_E} \leq 8{,}2\right) = 0{,}8508 - 0{,}0274 = 0{,}8234$

9.3.3 Distribuição Exponencial

Esta distribuição é bastante utilizada na teoria da confiabilidade para modelar os tempos de espera entre ocorrências de eventos em um Processo de Poisson. Em geral este modelo probabilístico é também utilizado para modelar tempo de espera em uma fila, tempo de sobrevivência de um grupo de pacientes após o início de um tratamento e tempo de vida de material eletrônico.

O histograma a seguir foi construído a partir de dados provenientes de uma distribuição exponencial. A curva desenhada sobre o histograma representa a função densidade de uma distribuição exponencial. Vemos que este gráfico é do tipo assimétrico positivo.

Gráfico da função densidade da Distribuição exponencial com parâmetro α=1000



Uma variável aleatória contínua X, que assume valores não-negativos, terá uma distribuição exponencial com parâmetro $\alpha > 0$, se sua fdp for dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{1}{\alpha}x} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

Notação: X ~ $\exp(\alpha)$

Propriedades:

a) A função de distribuição é dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{1}{\alpha}x} ds = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\alpha}} & , x \geq 0 \end{cases}$$

Portanto, $P(X > x) = e^{-(1/\alpha)x}$

b) $E(X) = \int_0^{\infty} x \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{1}{\alpha}x} dx = \alpha$

c) $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 2\alpha^2 - \alpha^2 = \alpha^2$ em que $E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{1}{\alpha}x} dx = \alpha^2$.

d) $P(X > s + t \mid X > s) = \frac{P(X > s + t \text{ e } X > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\frac{1}{\alpha}(s+t)}}{e^{-\frac{1}{\alpha}s}} = e^{-\frac{1}{\alpha}t}$ para quaisquer $s, t > 0$

Este último resultado mostra que a distribuição exponencial apresenta a propriedade de "não possuir memória". Isto significa que a probabilidade de "sobreviver" mais *t* unidades de tempo é a mesma, quer já se tenham passado s unidades de tempo, ou 0 unidades. Ou seja, não há envelhecimento. Esta hipótese é frequentemente razoável para a vida de materiais eletrônicos.

Exemplo 5: Uma lâmpada tem a duração de acordo com a densidade exponencial com α=1000.
Determinar:
a) a probabilidade de que essa lâmpada queime antes de 1.000 horas;
b) a probabilidade de que ela queime depois de sua duração média;
c) a variância da distribuição do tempo de duração dessa lâmpada.

Resolução: Seja T o tempo de duração da lâmpada.

a) $P(T < 1.000) = \int_0^{1000} \frac{1}{1000} e^{-\frac{1}{1000}t} dt = 1 - e^{-1} = 1 - 0{,}3679 = 0{,}6321$

b) $P(T > 1000) = 0{,}3679$

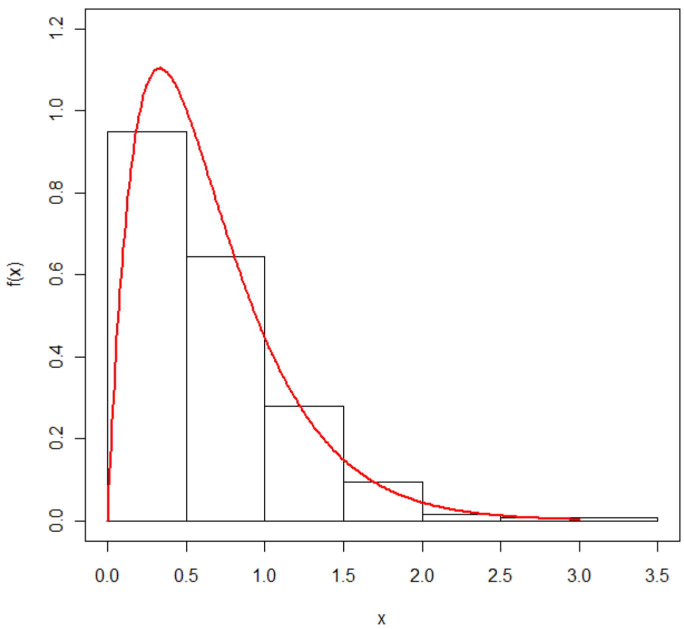
c) $V(T) = (1000)^2$

9.3.3 Distribuição Gama

A distribuição gama tem aplicação em Teoria de Confiabilidade.

O histograma a seguir foi construído a partir de dados provenientes de uma distribuição gama. A curva desenhada sobre o histograma representa a função densidade desta distribuição que também é do tipo assimétrico positivo.

Gráfico da função densidade da distribuição gama com parâmetros r=2 e α=3



Uma variável aleatória contínua X, que assume valores não-negativos, terá uma distribuição gama com parâmetros $\alpha > 0$ e $r > 0$, se sua fdp for dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha^r \Gamma(r)} (x)^{r-1} e^{-x/\alpha} & , x > 0 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

Na densidade acima, o símbolo Γ denota a função gama, que é dada por:

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx, \text{ definida para } k > 0.$$

Pode-se mostrar que se p for um número inteiro positivo, obtém-se que $\Gamma(k) = (k-1)!$

Notação: $X \sim \text{gama}(r, \alpha)$

Propriedades:

a) Se r=1 tem-se $f(x) = \dfrac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}}$ que é a densidade de uma distribuição exponencial. Portanto, a distribuição exponencial é um caso particular da distribuição gama.

b) $E(X) = r\alpha$;

c) $V(X) = r\alpha^2$

d) Um caso particular, muito importante, da distribuição gama será obtido se $r = n/2$ e $\alpha = 2$, em que n é um inteiro positivo. Esta distribuição é denominada qui-quadrado com n graus de liberdade.

Exemplo 6: Em certa cidade o consumo diário de água (em milhões de litros) segue aproximadamente uma distribuição Gama (2,3). Se a capacidade diária para essa cidade é de 9 milhões de litros de água, qual é a probabilidade que em um certo dia o fornecimento de água seja inadequado?

Resolução:
X: Consumo diário de água em milhões de litros

$$P(X > 9) = \int_9^{\infty} \frac{1}{3^2\Gamma(2)} x^{2-1} e^{-\frac{x}{3}} dx = 0{,}1992$$

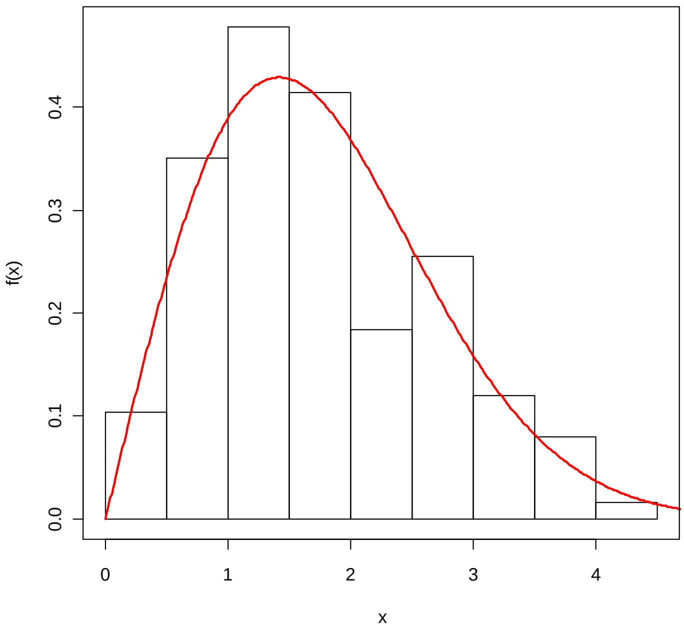
Obs.: Esta integral deve ser resolvida por partes, lembrando também que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para n inteiro positivo.

9.3.4. Distribuição Weibull

A distribuição Weibull tem uma aplicação importante em Teoria de Confiabilidade.

O histograma a seguir foi construído a partir de dados provenientes de uma distribuição Weibull. A curva desenhada sobre o histograma representa a função densidade desta distribuição, que também é do tipo assimétrico positivo.

Gráfico da função densidade da Distribuição Weibull com parâmetros α=2 e γ=2



Uma variável aleatória contínua X, que assume valores não-negativos, terá uma distribuição Weibull com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, se sua fdp for dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{\alpha^{\gamma}} x^{\gamma-1} \exp\left\{-\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^{\gamma}\right\}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

Propriedades:

a) E(X) = $\alpha\,\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)$

b) V(X) = $\alpha^2\left\{\Gamma\left(\frac{2}{\gamma}+1\right)-\left[\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)\right]^2\right\}$

c) $F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ 1-\exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma}\right\} & x\geq 0\end{cases}$

d) Se γ=1 tem-se $f(x)=\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{x}{\alpha}}$. Portanto, a distribuição exponencial é um caso particular da distribuição Weibull.

Exemplo 7: O tempo de vida, em horas, de um componente eletrônico segue a distribuição Weibull com α = 0,4 e γ = 0,5.

a) Qual é a vida média?
b) Calcule a variância do tempo de vida desse componente.
c) Qual é a probabilidade do tempo de vida desse componente ultrapassar 30 horas?

Resolução:
T: tempo de vida do componente eletrônico em horas

a) E(T) = $(0,4)\Gamma(3)=0,8$

b) V(T) = $(0,4)\left\{\Gamma(5)-[\Gamma(3)]^2\right\}=8$

c) P(T > 30) = $\exp\left\{-\left(\frac{30}{0,4}\right)^{-0,5}\right\}$ = 0,8909

9.4 – Introdução à Teoria da Confiabilidade

9.4.1 – Conceitos

Considere que um componente será observado sob condições de esforço, desde o instante t=0 até que pare de funcionar adequadamente sob o esforço aplicado. A duração até falhar ou duração da vida pode ser considerada como uma variável aleatória contínua T com alguma função densidade de probabilidade f(t).

Alguns exemplos deste tipo de experimento são: observar uma lâmpada até que queime, uma viga sob uma carga até a ruptura, um fusível intercalado em um circuito ou um dispositivo eletrônico posto em serviço até que falhe.

Definição 1.

A confiabilidade de um componente na época t, denotada por R(t), é definida como

$$R(t) = P(T > t),$$

em que T é a duração da vida do componente. R é denominada ***função de confiabilidade***.

Esta definição simplesmente afirma que a confiabilidade de um componente é igual à probabilidade de que o componente não falhe durante o intervalo [0, t].

Em termos da função densidade de T, temos:

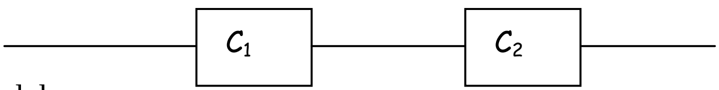
$$R(t) = \int_t^\infty f(s)\,ds$$

Para a função de distribuição acumulada temos:

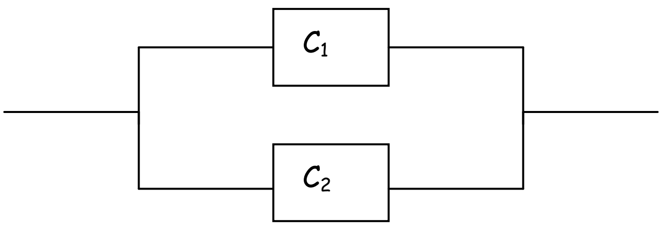
$$R(t) = 1 - P(T \le t) = 1 - F(t)$$

O conceito de confiabilidade é um dos mais importantes para um estudo dos "modelos de falhas". Estudaremos as seguintes questões:

a) Que "lei de falhas" subjacente será razoável admitir, isto é, que forma a função densidade de T deve ter ?
b) Suponha-se que temos dois componentes, C1 e C2, com leis de falhas conhecidas. Esses componentes podem estar associados em série



Ou em paralelo,



para constituir um sistema. Qual será a confiabilidade do sistema? Qual a densidade razoável para a descrição do fenômeno de interesse?

Abaixo descreveremos os modelos mais usuais utilizados para descrever falhas de componentes.

9.4.2 A lei de falhas exponencial

Ao estudarmos a distribuição exponencial vimos que a propriedade de falta de memória é característica da mesma. A hipótese subjacente para a utilização deste modelo de falhas é, portanto, de que não haja desgaste do componente ou peça. Isto significa que mesmo depois que a peça estiver em uso sua probabilidade de falhar não se altera com o passar do tempo.

Uma consequência desta suposição é, que a fdp da variável aleatória associada à duração até falhar, T, será dada por: $f(t) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{1}{\alpha}t} \quad t \geq 0$ (distribuição exponencial).

"É bastante razoável admitir-se que um fusível ou rolamento de rubis sejam "tão bons quanto novos", enquanto estiverem ainda funcionando. Isto é, se o fusível não tiver fundido, estará praticamente em estado novo; nem o rolamento se alterará muito devido a desgaste. Em casos, tais como esses, a lei de falhas exponencial representa um modelo adequado com o qual se estudem as características de falhas da peça. Entretanto existem situações em que a exponencial não é satisfatória, por exemplo, se um pedaço de aço for submetido a esforço continuado, haverá obviamente alguma deterioração." *Paul Meye*r

Exemplo 8: (Meyer, 1983)
Seja um componente eletrônico que segue a lei de falhas exponencial. Dados os parâmetros
$\alpha = 100$ e $R(t) = 0,90$, determine o valor de t, número de horas.

$0,90=e^{-0,01t} \Rightarrow t = 10,54$ horas

Logo, se cada um de 100 desses componentes estiver operando durante 10,54 horas, aproximadamente 90 não falharão durante aquele período.

Exemplo 9: (Meyer, 1983)
Considere um circuito eletrônico constituído de 4 transistores de silício, 10 díodos de silício, 20 resistores sintéticos e 10 capacitores cerâmicos, operando em série contínua e os componentes são independentes. Suponha que sob certas condições de trabalho, isto é , tensão, corrente e temperatura prescritas, cada uma dessas peças siga a lei de falhas exponencial com os seguintes parâmetros:

diodos de silício:	1/0,000002
transistores de silício:	1/0,000010
resistores sintéticos:	1/0,000001
capacitores cerâmicos:	1/0,000002

Qual a confiabilidade do sistema para t = 10 horas?

Resolução:

Para componentes independentes ligados em série temos que a confiabilidade do sistema é o produto das confiabilidades individuais dos componentes. Portanto,

$R(t) = (e^{-t.0,000002})^{10}. (e^{-t.0,00001})^{4}(e^{-t.0,000001})^{20}. (e^{-t.0,000002})^{10} = e^{-0,000\,1t}$

Assim, para um período de 10 horas de operação, a probabilidade de que o circuito não falhe será dada por $e^{-0,0001(10)} = 0,999$. A duração até falhar esperada do circuito é igual a 1/0,0001 = 10.000 horas.

Exemplo 10: (Meyer,1983)
Suponhamos que três unidades sejam operadas em paralelo. Admita-se que todas sigam a lei de falhas exponencial com o parâmetro $\alpha = 100$. Qual a confiabilidade do sistema?

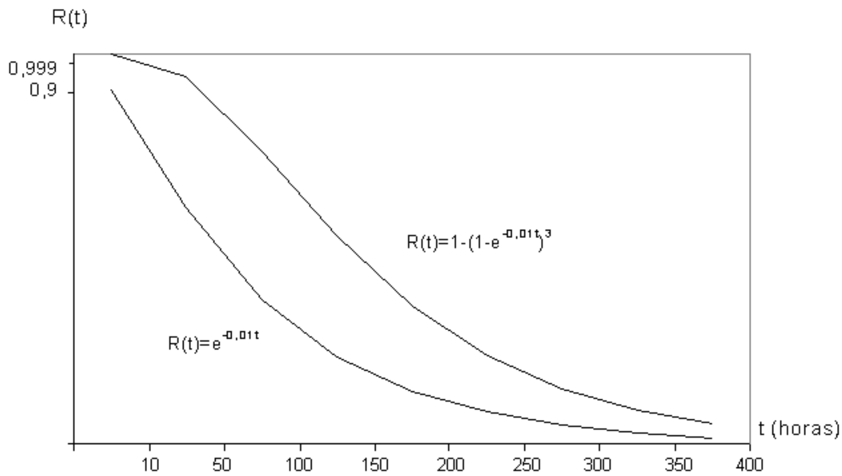
Resolução:

Para a unidade isolada, $R_1(t) = e^{-(1/\alpha)t}$, enquanto para as três unidades em paralelo, $R_2(t) = 1 – (1 – e^{-(1/\alpha)t})^3$.

Tabela: Confiabilidade para três unidades operando em paralelo, taxa de falhas constante $\alpha = 100$

T	t/α	$e^{-(1/\alpha)t}$	$R_1(t)$	$1-e^{-(1/\alpha)t}$	$(1-e^{-(1/\alpha)t})^3$	$R_2(t)$
10	0,10	0,9048	0,9048	0,0952	0,0009	0,9991
50	0,50	0,6065	0,6065	0,3935	0,0609	0,9391
100	1,00	0,3679	0,3679	0,6321	0,2526	0,7474
150	1,50	0,2231	0,2231	0,7769	0,4689	0,5311
200	2,00	0,1353	0,1353	0,8647	0,6465	0,3535
250	2,50	0,0821	0,0821	0,9179	0,7734	0,2266
300	3,00	0,0498	0,0498	0,9502	0,8580	0,1420
350	3,50	0,0302	0,0302	0,9698	0,9121	0,0879
400	4,00	0,0183	0,0183	0,9817	0,9461	0,0539

No gráfico a seguir vemos as curvas de confiabilidade para a unidade isolada e, também, para três unidades em paralelo. Note que a curva de confiabilidade para as três unidades em paralelo está sempre acima, mostrando que a ligação de componentes em



paralelo tem sempre maior confiabilidade do que quando utilizamos um único componente.

9.4.3 A lei de falhas Weibull

A distribuição de Weibull representa um modelo adequado para uma lei de falhas, sempre que o sistema for composto de vários componentes e a falha seja devida à “mais grave” imperfeição ou irregularidade dentre um grande número de imperfeições do sistema.

Seja T o tempo até a falha de um componente, com fdp dada por:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{\alpha^{\gamma}} t^{\gamma\text{-}1} \exp\left\{ -\left(\dfrac{t}{\alpha}\right)^{\gamma} \right\}, & t \geq 0, \alpha > 0, \gamma > 0 \\ 0 & \text{, caso contrario} \end{cases}$$

Já vimos que esta é a densidade de Weibull com parâmetros α e γ.

A função de confiabilidade R é dada por $R(t) = \exp\left\{ -\left(\dfrac{t}{\alpha}\right)^{\gamma} \right\}$, que é uma função decrescente de t.

Exemplo 9: Dois dispositivos eletrônicos com lei de falhas Weibull, com parâmetros respectivamente: α_1= 1000, γ_1=2 ; α_2=1200, γ_2=3, são ligados em paralelo formando um único sistema com funcionamento independente. Determinar:

a) a confiabilidade de cada um dos dispositivos após 1000h;
b) a confiabilidade do sistema.

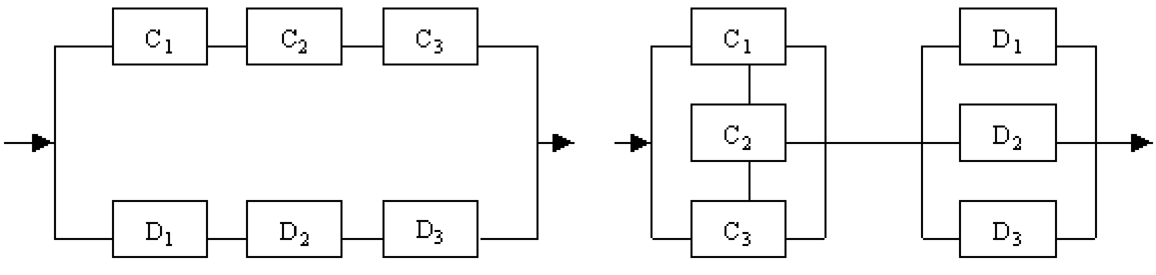
Resolução:

a) $R_1(t) = e^{-\left(\frac{1000}{1000}\right)^2} = e^{-1} = 0{,}3679$

$R_2(t) = e^{-\left(\frac{1000}{1200}\right)^3} = e^{-\left(\frac{5}{6}\right)^3} = 0{,}5606$

b) $R(t) = e^{-1} + e^{-\left(\frac{5}{6}\right)^3} - \left(e^{-1}.e^{-\left(\frac{5}{6}\right)^3} \right) = 0{,}7223$

Há várias outras maneiras de combinar componentes, e apenas selecionamos algumas delas:



(a) Séries em paralelo (b) Paralelos em série

(c) Sistema de reserva. Consideramos dois componentes, o segundo dos quais fica “de reserva” e funciona se, e somente se, o primeiro componente falhar. Neste caso, o segundo componente arranca (instantaneamente) e funciona no lugar do primeiro componente.

Exercícios:

1. Testes para medir a duração de aparelhos eletrodomésticos mostram que o modelo adequado é o normal com μ = 26.000 horas e σ = 4.000 horas. Pede-se a probabilidade de que um aparelho escolhido ao acaso dure:

a) mais que 25.000 horas;
b) menos que 30.000 horas;
c) sabe-se que se um defeito aparecer dentro do tempo de garantia a fábrica deve consertá-lo, tendo assim um prejuízo. Qual deve ser a garantia para que a porcentagem de aparelhos consertados dentro da garantia seja inferior a 10%?
d) Quanto espera o fabricante ganhar por produto se o custo de fabricação é A u.m., o preço de venda é B u.m. e o custo do conserto, quando dentro da garantia (veja item c) é C u.m.?

2) O número de pedidos para compra de certo produto que uma companhia recebe por semana distribui-se normalmente com média de 150 unidades e desvio padrão de 30 unidades. Se em uma semana o estoque disponível é de 180 unidades, qual a probabilidade de que os pedidos sejam atendidos? Qual deveria ser o estoque para que, com probabilidade de 0,97 pudéssemos atender aos pedidos?

3) O tempo que uma pessoa leva para ser servida numa lanchonete é uma variável aleatória tendo distribuição exponencial com média de 4 minutos. Qual é a probabilidade que uma pessoa seja servida em menos do que 3 minutos em ao menos 4 dos próximos 6 dias?

4) Suponha que um sistema contém certo tipo de componente cujo tempo de vida em anos até falhar é dado pela variável aleatória T distribuída aleatoriamente com parâmetro α = 5. Se cinco desses componentes são instalados em diferentes sistemas, qual é a probabilidade que ao menos dois estejam funcionando ao fim de 8 anos?

5) Sabe-se que a variável aleatória T (duração de um componente) segue o modelo Weibull com α = 5.000 e γ = 0,7. Ache t para que R(t) = 0,80 e R(500).

5ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Seja Z uma variável aleatória com distribuição normal padrão. Determine o valor de z:

a) $P(Z<z)=0{,}09$
b) $P(-1{,}71<Z<z)=0{,}25$
c) $P(-z<Z<z)= 0{,}90$
d) $P(-z<Z<z)= 0{,}99$

2) Sejam z1 e z2, simétricos, dois particulares valores de Z. Determine-os tais que:

a) $P (z_1 \leq Z \leq z_2) = 0{,}9216$
b) $P (z_1 \leq Z \leq z_2) = 0{,}8858$

3) Suponha que as amplitudes de vida de dois aparelhos elétricos, D_1 e D_2, tenham distribuição N(42,36) e N(45,9), respectivamente. Se o aparelho e para ser usado por período de 45 horas, qual aparelho deve ser preferido?

3) Uma enchedora automática de garrafas de refrigerante esta regulada para que o volume médio de liquido em cada garrafa seja de 1.000 cm^3 e o desvio padrão de 10 cm^3. Pode-se admitir que a distribuição da variável seja normal.
a) Qual a probabilidade de garrafas em que o volume de liquido e menor que 990 cm^3?
b) Qual a probabilidade de garrafas em que o volume de liquido não se desvia da média em mais que dois desvios padrão?

4) Uma empresa produz televisores e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar algum defeito grave no prazo de 6 meses. Ela produz televisores do tipo A comum e do tipo B luxo, com um lucro respectivo de 1.000 u.m. e 2.000 u.m. caso não haja restituição, e com um prejuízo de 3.000 u.m. e 8.000 u.m. se houver restituição. Suponha que o tempo para a ocorrência de algum defeito grave seja, em ambos os casos, uma variável aleatória com distribuição normal, respectivamente, com medias 9 meses e 12 meses, e variâncias 4 $meses^2$ e 9 $meses^2$. Se tivesse que planejar uma estratégia de marketing para a empresa, você incentivaria as vendas dos aparelhos do tipo A ou do tipo B?

5) Suponha que o diâmetro médio dos parafusos produzidos por uma fabrica é de 0,25 polegadas e o desvio padrão 0,02 polegadas. Um parafuso é considerado defeituoso se seu diâmetro é maior que 0,28 polegadas ou menor que 0,20 polegadas. Suponha distribuição normal.
a) encontre a probabilidade de parafusos defeituosos; qual deve ser a medida mínima para que tenhamos no máximo 12% de parafusos defeituosos.

7) A duração de certos tipos de amortecedores, em km rodados é normalmente distribuída, possui duração média de 5000 km e desvio-padrão de 1000 km
a) Qual a probabilidade de um amortecedor escolhido ao acaso durar entre 4500 e 6350 km?
b) Se o fabricante desejasse fixar uma garantia de quilometragem, de tal forma que se a duração do amortecedor fosse inferior a garantia, o amortecedor seria trocado, de quanto deveria ser esta garantia para que somente 1% dos amortecedores fossem trocados?

8) Suponha que T, a duração ate falhar de uma peca, seja normalmente distribuída com E(T) = 90 horas e desvio padrão 5 horas. Quantas horas de operação devem ser consideradas, a fim de se achar uma confiabilidade de 0,90.

9) Suponha que a duração de vida de um dispositivo eletrônico seja exponencialmente distribuída. Sabe-se que a confiabilidade desse dispositivo para um período de 100 horas de operação é de 0,90. Quantas horas de operação devem ser levadas em conta para conseguir-se uma confiabilidade de 0,95?

10) A duração de vida de um satélite é uma variável aleatória exponencialmente distribuída, com duração de vida esperada igual a 1,5 anos. Se três desses satélites forem lançados simultaneamente, qual será a probabilidade de que ao menos dois deles ainda venham a estar em órbita depois de 2 anos?

11) Suponha que n componentes, que funcionem independentemente, sejam ligados em série. Admita que a duração até falhar, de cada componente, seja normalmente distribuída, com esperança de 50 horas e desvio padrão de 5 horas.

a) se n=4, qual será a probabilidade de que o sistema ainda esteja a funcionar depois de 52 horas de operação?
b) se n componentes forem instalados em paralelo, qual deverá ser o valor de n, para que a probabilidade de falhar durante as primeiras 55 horas seja aproximadamente igual a 0,01?

12) Estudos meteorológicos indicam que a precipitação pluviométrica mensal em períodos de seca numa certa região pode ser considerada como seguindo a distribuição Normal de média 30mm e variância 16mm^2.

a) Qual a probabilidade de que a precipitação pluviométrica mensal no período da seca esteja entre 24mm e 38mm?

b) Qual seria o valor da precipitação pluviométrica de modo que exista apenas 10% de chance de haver uma precipitação inferior a esse valor?

c) Construa um intervalo central em torno da média que contenha 80% dos possíveis valores de precipitação pluviométrica.

13) Se a altura de 300 estudantes são normalmente distribuída com média igual a 172,72cm e variância 49,5cm^2, determine:

a) quantos estudantes têm altura superior a 182,88cm;

b) qual a altura que separa os estudantes em dois grupos de forma que um deles seja formado pelos 30% mais altos.

14) Suponha que as notas de um vestibular tenham distribuição normal com média 60 e desvio-padrão de 15 pontos.

a) se você prestou este vestibular e obteve nota igual a 80 pontos, qual a sua posição em termos de unidades de desvios padrão, com relação a média das notas?

b) Se foram considerados aprovados os candidatos que obtiveram nota mínima correspondente a 1 desvio padrão acima da média, qual a nota mínima de aprovação na escala original?

15) Em uma fábrica de chocolate verifica-se que os “bombons” são acondicionados automaticamente em caixas com aproximadamente 1 Kg. Verifica-se que 25,14% das caixas tem peso inferior a 1 Kg. A máquina de acondicionamento foi regulada aumentando-se o peso médio da caixa de 3g e verificou-se então que a porcentagem com peso inferior a 1 Kg foi de 12,5%. Admitir distribuição normal.

a) Calcular a média e o desvio-padrão
b) De quanto deve ser novamente aumentado o peso médio para que essa porcentagem caia para 4%?

16) Experimentam-se três elementos que trabalham independentemente entre si. A duração de trabalho sem falhas dos elementos tem respectivamente para o 1º., 2º e 3º. as seguintes funções densidades:

$f_1(t) = 0.1\,e^{-0.1\,t} \qquad f_2(t) = 0.2\,e^{-0.2\,t} \qquad f_3(t) = 0.3\,e^{-0.3\,t}$

Ache a probabilidade que no intervalo de tempo (0, 10)

i. Falhe ao menos um elemento
ii. Falhem não menos que dois elementos

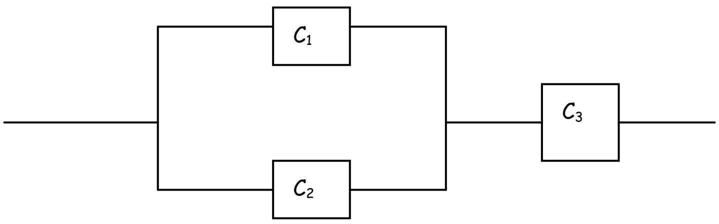
17) Um componente eletrônico tem distribuição exponencial, com média de 50 horas. Suposta uma produção de 10 000 unidades, quanto deles espera-se que durem entre 45 e 55 horas?

18) O tempo de vida de certo dispositivo eletrônico é de 4.000 h e segue uma distribuição exponencial. Determine a probabilidade de que:
a) um dispositivo esteja funcionando no final de 2.000 h, dado que está funcionando no final de 1.000 h;
b) num conjunto de 4 dispositivos, somente um queime antes de 3.000 h de funcionamento.

19) Dois dispositivos eletrônicos com lei de falhas exponencial com média respectivamente 5h e 10 h são ligados em paralelos formando um único sistema e funcionando independentemente. Determinar:
a) A confiabilidade de cada um dos dispositivos após 20 horas;
b) A confiabilidade do sistema todo após 20 horas;

20) Encontrou-se num certo processo de "trituração de pedras" que os diâmetros D das pedras quebradas seguem aproximadamente uma distribuição log-normal com média 1,5 cm e desvio padrão 0,3 cm.
a) Qual é a probabilidade de uma pedra exceder 2 cm?
b) Qual é a probabilidade de uma pedra ser menor que 1 cm?

21) Três componentes, que funcionam independentemente, são ligados em um sistema único, como está indicado a figura abaixo. Suponha que a confiabilidade de cada um dos componentes, para um período de operação de t horas seja R(t) = $e^{-0.03\,t}$ .Se T for a duração até falhar do sistema completo (em horas), qual será a confiabilidade do sistema?



22) Determine a probabilidade de trabalho sem falha de uma peça no decorrer de 1000h se a confiabilidade da mesma está subordinada a distribuição gama com r =4 e α=1/1000h.

23) Sabe-se que T, tempo de operação sem falhas de um componente segue a distribuição de Weibull.
a) Se α = 2000, γ = 0,5 determine R(22), E(T) e V(T).
b) Se α = 1/2000, γ = 1,5 determine t para que R(t) = 0,90.

24) Seja *X* uma variável aleatória com distribuição Weibull com α=200 e γ=3.
a) Determine os quartis de *X*
b) Suponha que *X* represente o tempo de vida de um componente. Determine a confiabilidade desse componente para 50 horas.

c) Determine a probabilidade de que o componente dure mais que 250 horas, uma vez que já esteja em funcionamento por 200 horas.
d) Determine a duração esperada do componente. Use os seguintes fatos: $\Gamma(1,3) = 0,8975$.

25) Sabe-se que o tempo de falha (em anos) de certo transistor tem distribuição exponencial com α=20 anos.
a) que proporção desse transistor sobreviverá a 6 anos de uso?
b) qual o tempo mediano de vida?
c) este transistor será utilizado em um produto cujo fabricante irá estipular certo período de garantia. Qual tempo de garantia passível de ser estipulado, caso o fabricante concorde em arcar com o custo de no máximo 5% de falhas neste período?
d) se o fabricante desejar estipular um período de garantia de 2 anos, qual a proporção esperada de falhas associadas ao transistor neste período?

26) A densidade do tempo de falha para um pequeno sistema de computador tem distribuição de Weibull, com γ=1/4 e α=200.
a) Que proporção dessas unidades sobreviverá a 1000 horas de uso?
b) Qual o tempo médio de falha?

Gabarito

1) a)-1,34 b) -0,54 c) 1,64 d) 2,58 2) a) -1,76 e 1,76 b) -1,58 e 1,58

3) D2 4) a) 0,1587 b) 0,9545 5) Tipo B 6) a) 0,072 b) 0,2178

6) a) 0,60295 b) 2670 km 8) 83,6 horas 9) 51,29 horas 10) 0,1719

11) a) 0,014 b) 27 12) a) 0,9104 b) 24,88 c) [24,88 ; 35,12]

13) a) 22 b) 176,41 14) a) 1,333 b) 75

15) a) média=1,0042Kg e desvio=0,0063 Kg b) 0,006825g

16) a) 0,9975 b) 0,9301 17) a) 737 18) a) 0,7788 b) 0,2224

19) a) α=1/10; 0,135 e α=1/5; 0,0183 b) 0,1512

20) a) 6,2% b) 2,6% 21) $2e^{-0,06t} - e^{-0,09t}$ 22) 0,981

23) a) R(22)= 0,9004 ; E(T)= 4000 horas ; V(T)=80000000 horas b) 446,15 horas

24) a) Q_1=132,03 Q_2=176,99 Q_3=223,01 c)0,9845 c)0,3855 d)179,5

25) a) 0,7408 b) 13,86 anos c) aprox. 1 ano d) 0,0952

26) a) 0,2242 b) 4800

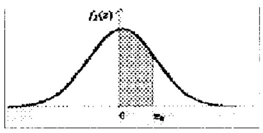
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MEYER, Paul L. **Probabilidade :** aplicações à estatística. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1983. 426.

MONTGOMERY, Douglas C.; RUNGER, George C.; HUBELE, Norma Faris. **Estatística aplicada à engenharia.** Rio de Janeiro: LTC, 2004. 335 p.

MORETTIN, Pedro Alberto; BUSSAB, Wilton de Oliveira. **Estatística básica.** 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2006. 526 p.

Áreas sob a curva da distribuição Normal Padrão - P(0 ≤ Z ≤ z)



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.000000	0.003989	0.007978	0.011967	0.015953	0.019939	0.023922	0.027903	0.031881	0.035856
0.1	0.039828	0.043795	0.047758	0.051717	0.055670	0.059618	0.063559	0.067495	0.071424	0.075345
0.2	0.079260	0.083166	0.087064	0.090954	0.094835	0.098706	0.102568	0.106420	0.110261	0.114092
0.3	0.117911	0.121719	0.125516	0.129300	0.133072	0.136831	0.140576	0.144309	0.148027	0.151732
0.4	0.155422	0.159097	0.162757	0.166402	0.170031	0.173645	0.177242	0.180822	0.184386	0.187933
0.5	0.191462	0.194974	0.198468	0.201944	0.205402	0.208840	0.212260	0.215661	0.219043	0.222405
0.6	0.225747	0.229069	0.232371	0.235653	0.238914	0.242154	0.245373	0.248571	0.251748	0.254903
0.7	0.258036	0.261148	0.264238	0.267305	0.270350	0.273373	0.276373	0.279350	0.282305	0.285236
0.8	0.288145	0.291030	0.293892	0.296731	0.299546	0.302338	0.305106	0.307850	0.310570	0.313267
0.9	0.315940	0.318589	0.321214	0.323814	0.326391	0.328944	0.331472	0.333977	0.336457	0.338913
1.0	0.341345	0.343752	0.346136	0.348495	0.350830	0.353141	0.355428	0.357690	0.359929	0.362143
1.1	0.364334	0.366500	0.368643	0.370762	0.372857	0.374928	0.376976	0.378999	0.381000	0.382977
1.2	0.384930	0.386860	0.388767	0.390651	0.392512	0.394350	0.396165	0.397958	0.399727	0.401475
1.3	0.403199	0.404902	0.406582	0.408241	0.409877	0.411492	0.413085	0.414656	0.416207	0.417736
1.4	0.419243	0.420730	0.422196	0.423641	0.425066	0.426471	0.427855	0.429219	0.430563	0.431888
1.5	0.433193	0.434478	0.435744	0.436992	0.438220	0.439429	0.440620	0.441792	0.442947	0.444083
1.6	0.445201	0.446301	0.447384	0.448449	0.449497	0.450529	0.451543	0.452540	0.453521	0.454486
1.7	0.455435	0.456367	0.457284	0.458185	0.459071	0.459941	0.460796	0.461636	0.462462	0.463273
1.8	0.464070	0.464852	0.465621	0.466375	0.467116	0.467843	0.468557	0.469258	0.469946	0.470621
1.9	0.471284	0.471933	0.472571	0.473197	0.473810	0.474412	0.475002	0.475581	0.476148	0.476705
2.0	0.477250	0.477784	0.478308	0.478822	0.479325	0.479818	0.480301	0.480774	0.481237	0.481691
2.1	0.482136	0.482571	0.482997	0.483414	0.483823	0.484222	0.484614	0.484997	0.485371	0.485738
2.2	0.486097	0.486447	0.486791	0.487126	0.487455	0.487776	0.488089	0.488396	0.488696	0.488989
2.3	0.489276	0.489556	0.489830	0.490097	0.490358	0.490613	0.490863	0.491106	0.491344	0.491576
2.4	0.491802	0.492024	0.492240	0.492451	0.492656	0.492857	0.493053	0.493244	0.493431	0.493613
2.5	0.493790	0.493963	0.494132	0.494297	0.494457	0.494614	0.494766	0.494915	0.495060	0.495201
2.6	0.495339	0.495473	0.495603	0.495731	0.495855	0.495975	0.496093	0.496207	0.496319	0.496427
2.7	0.496533	0.496636	0.496736	0.496833	0.496928	0.497020	0.497110	0.497197	0.497282	0.497365
2.8	0.497445	0.497523	0.497599	0.497673	0.497744	0.497814	0.497882	0.497948	0.498012	0.498074
2.9	0.498134	0.498193	0.498250	0.498305	0.498359	0.498411	0.498462	0.498511	0.498559	0.498605
3.0	0.498650	0.498694	0.498736	0.498777	0.498817	0.498856	0.498893	0.498930	0.498965	0.498999
3.1	0.499032	0.499064	0.499096	0.499126	0.499155	0.499184	0.499211	0.499238	0.499264	0.499289
3.2	0.499313	0.499336	0.499359	0.499381	0.499402	0.499423	0.499443	0.499462	0.499481	0.499499
3.3	0.499517	0.499533	0.499550	0.499566	0.499581	0.499596	0.499610	0.499624	0.499638	0.499650
3.4	0.499663	0.499675	0.499687	0.499698	0.499709	0.499720	0.499730	0.499740	0.499749	0.499758
3.5	0.499767	0.499776	0.499784	0.499792	0.499800	0.499807	0.499815	0.499821	0.499828	0.499835
3.6	0.499841	0.499847	0.499853	0.499858	0.499864	0.499869	0.499874	0.499879	0.499883	0.499888
3.7	0.499892	0.499896	0.499900	0.499904	0.499908	0.499912	0.499915	0.499918	0.499922	0.499925
3.8	0.499928	0.499930	0.499933	0.499936	0.499938	0.499941	0.499943	0.499946	0.499948	0.499950
3.9	0.499952	0.499954	0.499956	0.499958	0.499959	0.499961	0.499963	0.499964	0.499966	0.499967
4.0	0.499968	0.499970	0.499971	0.499972	0.499973	0.499974	0.499975	0.499976	0.499977	0.499978
4.1	0.499979	0.499980	0.499981	0.499982	0.499983	0.499983	0.499984	0.499985	0.499985	0.499986
4.2	0.499987	0.499987	0.499988	0.499988	0.499989	0.499989	0.499990	0.499990	0.499991	0.499991
4.3	0.499991	0.499992	0.499992	0.499993	0.499993	0.499993	0.499993	0.499994	0.499994	0.499994
4.4	0.499995	0.499995	0.499995	0.499995	0.499995	0.499996	0.499996	0.499996	0.499996	0.499996
4.5	0.499997	0.499997	0.499997	0.499997	0.499997	0.499997	0.499997	0.499998	0.499998	0.499998
4.6	0.499998	0.499998	0.499998	0.499998	0.499998	0.499998	0.499998	0.499998	0.499999	0.499999
4.7	0.499999	0.499999	0.499999	0.499999	0.499999	0.499999	0.499999	0.499999	0.499999	0.499999
4.8	0.499999	0.499999	0.499999	0.499999	0.499999	0.499999	0.499999	0.499999	0.499999	0.499999