

## Tarefa 8 - Simulação da Modulação BPSK no Canal Rayleigh

---

### 1. Roteiro de Simulação para o Canal AWGN

- Traçar as curvas de desempenho teóricas da modulação BPSK, em termos da taxa de erro de bit (Bit Error Rate - BER), no canal AWGN e no canal com desvanecimento Rayleigh. Traçar o gráfico com escala de relação sinal-ruído (SNR),  $\bar{\gamma}$ , na faixa entre -5 e 35 dB (eixo  $x$ ) e probabilidade de erro de bit (eixo  $y$ ) entre  $10^{-5}$  e 1. Devemos realizar sempre o raciocínio em símbolos, ou seja, temos uma energia média de símbolo da constelação da modulação,  $\bar{E}_s$ . Como a modulação é binária, temos que  $\bar{E}_s = \bar{E}_b$ , portanto  $\bar{\gamma} = \bar{E}_b/N_0 = \bar{E}_s/N_0$ .

$$\text{Desempenho do BPSK no Canal AWGN: } P_b = \frac{1}{2} \cdot \text{erfc} \left( \sqrt{\bar{\gamma}} \right)$$

$$\text{Desempenho do BPSK no Canal Rayleigh: } P_b = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{1 + \bar{\gamma}}} \right] \approx \frac{1}{4\bar{\gamma}}$$

- Simular a transmissão de símbolos da constelação de sinal BPSK no canal AWGN, estimando a BER para valores de SNR entre 0 dB e 10 dB, em passos de 1 dB. Considerar os pontos da constelação com energia média unitária. Lembre que para a constelação M-PSK os pontos da constelação possuem a mesma energia, portanto a energia de cada ponto (símbolo) equivale à energia média da constelação. No caso do BPSK temos que  $s_0 = -\sqrt{\bar{E}_s}$  e  $s_1 = +\sqrt{\bar{E}_s}$ , onde  $\bar{E}_s$  representa a energia média de símbolo. Gerar o ruído térmico através de uma variável aleatória Gaussiana,  $\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(0, N_0/2)$ . O sinal recebido é dado por  $\mathbf{r} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}$ . A variância do ruído térmico,  $\sigma^2 = N_0/2$ , deve ser ajustada de forma a obter-se a SNR correta de simulação. A estrutura básica da simulação envolve os seguintes passos:
  - Sortear o bit a ser transmitido ( $b_i$ ).
  - Mapear o bit  $b_i$  ao respectivo símbolo (ponto/coordenada) da constelação,  $\mathbf{s}_i$ .
  - Sortear a amostra de ruído do canal AWGN,  $\mathbf{n}$ .
  - Definir o sinal recebido,  $\mathbf{r} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}$ .
  - Utilizando o critério de distância Euclidiana, decidir qual o símbolo decodificado da constelação,  $\hat{\mathbf{s}}_i$ , em função de sinal recebido,  $\mathbf{r}$ .
  - Contabilizar a ocorrência de erro na decisão ( $\hat{\mathbf{s}}_i \neq \mathbf{s}_i$ ), se houver.
  - Repetir o processo para um novo bit transmitido.

### 2. Roteiro de Simulação para o Canal com Desvanecimento Rayleigh

- O canal sem fio Rayleigh é modelado como uma variável aleatória complexa,

$$\mathbf{h} = h_{Re} + j h_{Im} = h \cdot e^{-j\theta}$$

onde a parte real ( $Re$ ) e imaginária ( $Im$ ) são variáveis aleatórias Gaussianas com média  $\mu = 0$  e variância  $\sigma^2 = 1/2$ . A amplitude (módulo)  $h = |\mathbf{h}|$  é uma variável aleatória com distribuição de probabilidade Rayleigh,

$$p(h) = \frac{h}{\sigma^2} e^{-\frac{h^2}{2\sigma^2}}, \quad h \geq 0$$

O modelo de canal com desvanecimento Rayleigh é um modelo razoável para um ambiente de transmissão *sem linha de visada* (NLOS), onde existe um grande número de ondas refletidas chegando ao receptor.

### 3. Modelo do Sistema

- O sinal recebido no canal com desvanecimento Rayleigh é dado por:

$$\mathbf{y} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{n}$$

- $\mathbf{x}$  é o símbolo complexo transmitido da modulação. No caso do BPSK temos: (+1 ou -1)
- $\mathbf{y}$  é o sinal complexo recebido.
- $\mathbf{h}$  é o ganho complexo do canal correspondendo ao canal com múltiplos percursos Rayleigh.
- $\mathbf{n}$  é o ruído Gaussiano branco aditivo (AWGN) complexo.

### 4. Considerações

- O canal é assumido como sendo **flat fading** - Isso significa que o canal com múltiplos percursos possui apenas um *tap*. Portanto, a operação de convolução se reduz a apenas uma multiplicação.
- O canal varia aleatoriamente com o tempo. Isso significa que cada símbolo transmitido é multiplicado por um número complexo  $\mathbf{h}$  que varia aleatoriamente. Dado que  $\mathbf{h}$  modela o canal Rayleigh, a parte real e imaginária seguem uma distribuição Gaussiana com média  $\mu = 0$  e variância  $\sigma^2 = 1/2$ .
- O ruído térmico  $\mathbf{n}$  (parte real e imaginária) possui uma função densidade de probabilidade:

$$p(n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \mu = 0 \quad \sigma^2 = \frac{N_0}{2}$$

- O canal  $\mathbf{h}$  é conhecido (estimado) no receptor. A equalização é realizada no receptor dividindo-se o símbolo recebido  $\mathbf{y}$  pelo conhecimento a priori de  $\mathbf{h}$ , ou seja,

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{n}}{\mathbf{h}} = \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{n}}$$

onde  $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n}/\mathbf{h}$  é o ruído aditivo escalonado pelo coeficiente do canal.

### 5. Dedução da Probabilidade de Erro de Bit (BER)

- A probabilidade de erro de bit da modulação BPSK no canal AWGN é dada por:

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{\bar{E}_b}{N_0}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\bar{\gamma}} \right)$$

- Contudo, na presença do ganho de canal,  $\mathbf{h}$ , a relação sinal-ruído *instantânea* no receptor será:

$$\gamma = \frac{|\mathbf{h}|^2 \bar{E}_b}{N_0} = |\mathbf{h}|^2 \bar{\gamma}$$

- Neste caso, temos uma probabilidade de erro de bit condicionada ao ganho do canal,  $\mathbf{h}$ :

$$P_{b|\mathbf{h}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{|\mathbf{h}|^2 \bar{E}_b}{N_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} (\sqrt{\gamma})$$

- Para encontrar a probabilidade sobre todos os valores de  $|\mathbf{h}|^2$ , precisamos resolver a probabilidade condicional sobre a função de densidade de probabilidade de  $\gamma$ .

- Sabemos que  $|\mathbf{h}|$  segue uma distribuição Rayleigh e portanto  $|\mathbf{h}|^2$  segue uma distribuição chi-quadrada com dois graus de liberdade. Como  $|\mathbf{h}|^2$  é chi-quadrada, a relação sinal-ruído instantânea  $\gamma$  também segue a distribuição chi-quadrada. A função densidade de probabilidade de  $\gamma$  é dada por:

$$p(\gamma) = \frac{1}{\bar{\gamma}} e^{-\gamma/\bar{\gamma}}, \quad \gamma \geq 0$$

- A probabilidade de erro será dada por

$$P_b = \int_0^\infty \frac{1}{2} \operatorname{erfc} (\sqrt{\gamma}) p(\gamma) d\gamma = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma} + 1}} \right)$$

## 6. Modelo de Simulação (BPSK)

- a) Gerar uma sequência aleatória dos símbolos a serem transmitidos (+1 e -1).
- b) Multiplicar o símbolo pelo ganho do canal e então adicionar o ruído Gaussiano branco.
- c) No receptor, equalize (divida) o símbolo recebido pelo ganho do canal.
- d) Realize uma decodificação *hard decision* usando a constelação de sinais e contabilize os erros. Como a modulação é BPSK (binária), realizar a decisão usando a parte real de  $\hat{y}$ .
- e) Repita para diversos valores de  $E_b/N_0$ , na faixa entre -5 dB e 35 dB.

## 7. Resultados

- Os valores de BER simulados (AWGN/Rayleigh) devem ser plotados conjuntamente com as curvas teóricas para fins de comparação.
- Discutir como seria possível estimar na prática a condição do canal (ganho/fase).
- Implementar a simulação de uma modulação 8-QAM no canal AWGN e Rayleigh.