

INTEGRACIÓN NUMÉRICA CON APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS

Teoría, Ejercicios y Aplicaciones en Ingeniería



Autores:

Carlos Andrés Tamayo Benjumea
José Javier Coronel Casadiego

Universidad Popular del Cesar – Seccional Aguachica
Facultad de Ingenierías y Tecnologías

Índice general

1. Fundamentos Teóricos y Conceptuales	6
1.1. Integración Numérica	6
1.2. Aprendizaje Basado en Problemas	7
2. Regla del Trapecio	9
2.1. Fundamentos Teóricos	9
2.2. Representación Gráfica y Fórmulas	9
2.3. Error de Truncamiento	10
2.4. Ventajas	11
2.5. Desventajas	11
2.6. Ejemplos Resueltos	11
2.7. Ejemplos Propuestos	25
3. Método de Simpson 1/3	30
3.1. Fundamentos Teóricos	30
3.2. Representación Gráfica y Fórmula	30
3.3. Error de Truncamiento	32
3.4. Ventajas	32
3.5. Desventajas	33
3.6. Ejemplos Resueltos	33
3.7. Ejemplos Propuestos	45
4. Método de Simpson 3/8	50
4.1. Fundamentos Teóricos	50
4.2. Representación Gráfica y Fórmula	50
4.3. Error de Truncamiento	52
4.4. Ventajas	52
4.5. Desventajas	53
4.6. Ejemplos Resueltos	53
4.7. Ejemplos Propuestos	66
5. Método de Romberg	73
5.1. Fundamentos Teóricos	73
5.1.1. Extrapolación de Richardson	73
5.2. Representación Gráfica y Fórmulas	74
5.3. Error de Truncamiento	77
5.4. Ventajas	77

5.5. Desventajas	78
5.6. Ejemplos Resueltos	78
5.7. Ejemplos propuestos	90

Introducción General

Un libro como este es un manual de aprendizaje que permite a cualquier estudiante de la asignatura Análisis Numérico (Métodos Numéricos) abordar de forma significativa y práctica el estudio de las técnicas de integración numérica ya que, se enfoca particularmente en la solución de situaciones reales y del contexto teniendo en cuenta la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP).

Este primer volumen está enfocado a estudiar las técnicas de integración como la regla del Trapecio, el método de Simpson $1/3$, el método de Simpson $3/8$ y la integración de Romberg, buscando pedagógicamente consolidar en los estudiantes los métodos clásicos y una mejor organización frente a otros métodos más avanzados o especializados como cuadratura Gaussiana, Monte Carlo y métodos adaptativos, entre otros, que serán temas de un segundo libro.

El Capítulo 1 aborda los fundamentos teóricos y conceptuales de los conceptos de Integración Numérica, aplicación e importancia en un sinnúmero de disciplinas del saber humano. También aborda la definición de la metodología ABP y sus características e importancia en el contexto educativo.

Los capítulos 2, 3, 4 y 5 contienen por separado el estudio de las técnicas de integración propuestas para este primer volumen. Inicialmente se da una definición basada en la expresión o expresiones (fórmulas) matemáticas de cada método con alguna demostración elemental y seguidamente se desarrollan 4 ejercicios o ejemplos. El primer ejemplo tiene como objetivo recordar algunas de las técnicas analíticas de integración numérica y contextualizar al estudiante con el nuevo método. Para esto incluye la solución de una integral de forma analítica y numérica, comparando los resultados de los dos métodos. El segundo ejemplo de cada capítulo aborda una integral que sólo tiene solución numérica, cuyo resultado aproximado se ejemplifica con el ajuste de error dada por la respectiva fórmula. Los ejemplos 3 y 4 de cada método o capítulo incluyen dos situaciones reales siguiendo la metodología ABP y algunos ejemplos incluyen información contenida en tablas (datos experimentales y discretos). Finalmente, en el capítulo 6, se propone una serie de problemas generales y otros con base a la metodología ABP que ayudaran al estudiante a afianzar y poner en práctica lo aprendido.

Nuestro objetivo es proporcionar al alumno un manual de estudio que le permita un primer contacto académico y significativo con la importancia y aplicación real de las técnicas de integración numérica clásicas, y respondan de forma modesta al interrogante de siempre: ¿para qué se estudia o se aprende tanta Matemática?

En palabras generadas por ChatGPT, “la integración numérica es mucho más que un conjunto de fórmulas. Es una puerta de entrada al pensamiento matemático aplicado, que conecta el rigor con la utilidad, la abstracción con lo concreto, y el cálculo con la realidad” (comunicación personal, 6 de julio de 2025).

Asimismo, es importante destacar que la estructura de los Ejercicios Propuestos incluidos en cada capítulo ha sido diseñada para favorecer una progresión pedagógica clara. Los ejercicios 1 y 2 están orientados al fortalecimiento de las competencias técnicas del método numérico abordado, permitiendo al estudiante afianzar los procedimientos matemáticos mediante problemas directos. Por su parte, los Ejercicios 3 y 4 se presentan como actividades contextualizadas que promueven el análisis de problemas reales mediante la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). En particular, los Ejercicios 4 se han concebido como proyectos cooperativos integradores, en los cuales los estudiantes deben asumir roles colaborativos, analizar información, construir modelos matemáticos, y entregar informes académicos que simulan prácticas propias del ejercicio profesional de la ingeniería. Este enfoque responde a las recomendaciones de Díaz Barriga (2005), quien sostiene que el ABP favorece la construcción de aprendizajes significativos a partir de problemas reales, y de Morales y Landa (2004), quienes reconocen la efectividad de esta metodología para el desarrollo de competencias en los campos de la ingeniería y las ciencias aplicadas.

La participación de las mujeres en las áreas STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas) es fundamental para la construcción de soluciones más diversas, inclusivas y sostenibles. Aunque su presencia ha aumentado en las últimas décadas, las cifras continúan siendo bajas en disciplinas como la ingeniería civil, donde representan menos del 30 % de la matrícula estudiantil. El caso de Laura Gómez, estudiante de Ingeniería Civil, ejemplifica el compromiso y la capacidad de las mujeres para aportar de manera significativa a los retos relacionados con la infraestructura, la tecnología y la innovación. Promover la participación femenina no solo contribuye a la equidad de género, sino que también enriquece la ciencia y la ingeniería al integrar perspectivas más amplias, colaborativas y socialmente responsables.

Según informes recientes de la UNESCO (2023), la participación femenina en las áreas STEM sigue siendo limitada, especialmente en campos como la ingeniería civil, donde las mujeres constituyen apenas alrededor del 30 % del estudiantado en Colombia. Visibilizar casos como el de Laura Gómez permite destacar la importancia de seguir fortaleciendo su presencia en proyectos académicos y profesionales vinculados al desarrollo científico, tecnológico y de infraestructura. La inclusión activa de mujeres en STEM es clave para la formulación de soluciones más diversas, sostenibles e integradoras, y contribuye de manera directa a la equidad de género en los ámbitos académico y profesional.

Cabe aclarar que los personajes y las situaciones presentadas en los ejemplos y ejercicios de este material son ficticios y han sido diseñados con fines exclusivamente pedagógicos,

para favorecer el aprendizaje técnico mediante la contextualización de problemas reales vinculados a la práctica profesional de la ingeniería.

Carlos Andrés Tamayo Benjumea & Jose Javier Coronel Casadiego

Capítulo 1

Fundamentos Teóricos y Conceptuales

1.1. Integración Numérica

La integración numérica es un conjunto de técnicas que permiten calcular de forma aproximada integrales definidas que no tienen solución analítica. En este sentido, los autores Infante del Río y Rey Cabezas (2018) afirman que “las fórmulas de integración numérica (que, de hecho, se conocen también por el nombre de fórmulas de cuadratura) tienen como objetivo aproximar el valor de la integral de una función en un intervalo: de la que sólo se conocen los valores en algunos puntos, o cuya primitiva es difícil de calcular, o cuya primitiva no se puede expresar en términos de funciones elementales”.

La integración numérica es una herramienta fundamental en el análisis aplicado, ya que, aparte de resolver integrales que no tienen solución analítica, permite estimar áreas, volúmenes o cantidades físicas con datos experimentales y discretos (tablas, gráficos, sensores), que son problemas muy comunes en las ciencias y las ingenierías.

Su aplicación en contextos reales y complejos es clave en áreas del conocimiento humano como: simulaciones, modelación computacional, estadística, física, finanzas, medicina. Dado el carácter algorítmico de la integración numérica, es fácil su automatización y programación en software como Excel, MATLAB, Python, así como su integración a sistemas de control en tiempo real.

La Regla Trapezoidal, las fórmulas de Simpson 1/3 y de los 3/8 son conocidas como fórmulas de Newton Cotes, las cuales utilizan nodos o puntos equidistantes y que según Izar Landeta (2018) “son quizás las fórmulas de integración numérica más conocidas en el ámbito de la ingeniería”. A pesar de que la restricción de elegir puntos equidistantes hace que los resultados de las fórmulas de Newton Cotes sean menos precisos (en términos de la definición matemática particular de precisión) que la cuadratura gaussiana, autores como Gutiérrez, Olmos y Casillas (2010), afirman que “puede suceder fácilmente que una fórmula de Newton Cotes de un valor numérico más cercano que la fórmula teórica gaussiana más precisa”.

Por otro lado, si al conjunto de fórmulas de Newton Cotes incluimos la integración de Romberg, obtenemos las técnicas clásicas de integración numérica conocidas con el nombre de cuadratura numérica, ya que históricamente, “cuadrar una figura” es calcular su área aproximada mediante números (sumas, subdivisiones), que viene ser la definición moderna de la integral de una función $\int_a^b f(x) dx$ (o área bajo la curva de una función dada).

Cabe resaltar, como afirman Burden y Faires (2002) que “los métodos de cuadratura numérica emplean una suma del tipo $\sum_0^n a_i f(x_i)$ para aproximar $\int_a^b f(x) dx$ y se basan en los polinomios interpolantes del tipo

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0$$

donde n es un número entero no negativo y a_0, \dots, a_n son constantes reales. Su importancia se debe a que aproximan de manera uniforme a las funciones continuas”.

1.2. Aprendizaje Basado en Problemas

Es una metodología educativa activa donde el proceso de aprendizaje se inicia y organiza alrededor de un problema real, complejo y abierto, que los estudiantes deben analizar y resolver. En palabras de Díaz Barriga (2005) “como metodología de enseñanza, el ABP requiere de la elaboración y presentación de situaciones reales o simuladas – siempre lo más auténticas y holistas posible – relacionadas con la construcción del conocimiento o el ejercicio reflexivo de determinada destreza en un ámbito de conocimiento, práctica o ejercicio profesional particular”

La metodología ABP permite desarrollar el pensamiento crítico en los estudiantes, ya que al enfrentarlo con problemas reales, este debe analizar, comparar estrategias y tomar decisiones fundamentales, dejando de lado los procedimientos mecánicos, muy comunes en las metodologías tradicionales de enseñanza y aprendizaje (modelos conductistas). El ABP es una metodología de enfoque constructivista, en particular del aprendizaje significativo, ya que el estudiante construye su conocimiento a partir de situaciones cercanas a la vida profesional y cotidiana, en este sentido específico, el estudiante entiende para qué se usa la integración numérica, más allá de la teoría.

Por otro lado, el ABP fomenta el trabajo colaborativo al hacer equipos de estudio, promoviendo la interacción, el diálogo matemático, el respeto por las ideas ajenas

y la responsabilidad compartida. Sin lugar a dudas, el hecho de que los estudiantes se enfrenten a la resolución de problemas reales y del contexto (en particular de su carrera), genera interés, curiosidad y compromiso, cuyo resultado no es otro que el de mejorar la actitud del estudiante frente a la asignatura.

A pesar de que el ABP nació como una metodología educativa en el campo de la salud, la aplicación de este modelo no se ha limitado a esta mera área. En este sentido, Morales & Landa (2004) afirman que: “por la efectividad del método para alcanzar las metas de formación de los estudiantes del mundo de hoy, se ha venido implementando en una diversidad de especialidades, como son las diferentes áreas de la ingeniería, en las ciencias económicas-administrativas (contabilidad, administración) y en las ciencias sociales (derecho, trabajo social, psicología)”.

Capítulo 2

Regla del Trapecio

2.1. Fundamentos Teóricos

La regla del trapecio es una técnica de integración numérica que mejora la aproximación del área bajo la curva al reemplazar los rectángulos por trapecios. Cada trapecio tiene como base el subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ y lados no verticales definidos por los valores de la función en los extremos $f(x_i)$ y $f(x_{i+1})$.

Esta regla consiste en dividir el intervalo de integración en n subintervalos y aproximar el área de cada uno por la del trapecio entre los puntos de las abscisas y las ordenadas de la función evaluada en esos valores.

2.2. Representación Gráfica y Fórmulas

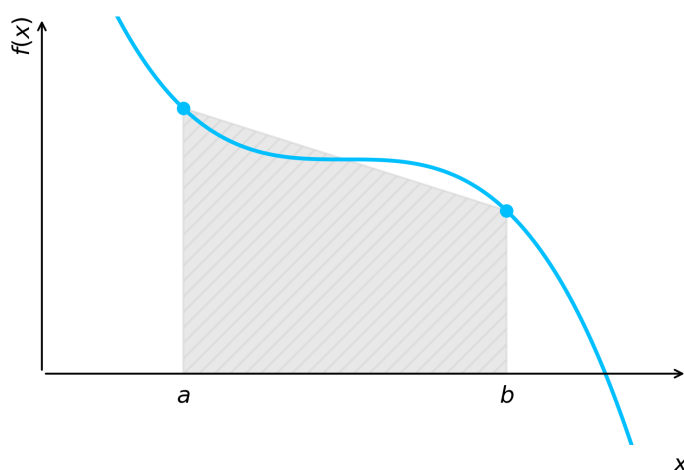


Figura 2.1: Descripción Gráfica de la Regla del Trapecio

De las formulas de Newton-Cotes, se tiene que para la regla trapezoidal:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_1(x) dx$$

y dado que:

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

El área bajo la línea recta que representa el polinomio de primer grado es una aproximación de la integral de $f(x)$ entre los límites a y b , es decir:

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx$$

La aproximación numérica en su forma compacta y expandida están dadas por:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] \text{ (Forma compacta)}$$

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} \left[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \right] \text{ (Forma expandida)}$$

donde:

- n : número de subintervalos
- $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- $x_i = a + i \cdot \Delta x$

En resumen, según Chapra y Canale (2011), “geométricamente, la regla del trapecio es equivalente a aproximar el área del trapecio bajo la línea recta que une $f(a)$ y $f(b)$ ”.

Para el uso o aplicación de este método, es fundamental lo que afirman Burden & Faires (2011): “El método del trapecio proporciona una manera sencilla de aproximar integrales definidas, pero su precisión depende críticamente de la suavidad de la función y del número de particiones usadas.”

2.3. Error de Truncamiento

Al calcular la integral bajo un segmento de línea recta para aproximar el área bajo una curva es importante tener en cuenta que siempre existe un error asociado al resultado, el cual depende de la forma de la función y del tamaño del intervalo considerado, y puede estimarse utilizando la siguiente expresión:

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot f''(\xi)$$

En donde $f''(\xi)$ es el valor máximo obtenido en el intervalo $[a, b]$, para $\xi \in [a, b]$

2.4. Ventajas

- Es uno de los métodos mas sencillos de realizar.
- Obtiene aproximaciones mas exactas si la función es continua y suave, es decir, no presenta cambios bruscos.
- Su implementación computacional requiere de bajo costo de procesamiento.

2.5. Desventajas

- Para aumentar la precisión requiere incrementar la cantidad de subintervalos(trapecios), lo que eleva el esfuerzo de cálculo.
- La fórmula de error depende de la segunda derivada de la función. Si esta es grande o cambia mucho, el error puede ser significativo.

2.6. Ejemplos Resueltos

Ejemplo 1

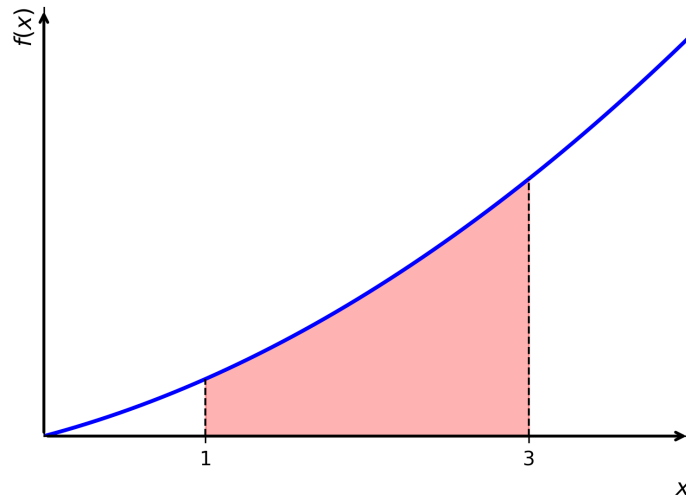
Considere la siguiente integral definida:

$$\int_1^3 (x^2 + 3x) dx$$

1. Resuelva la integral de forma **analítica**.
2. Aproxime el valor de la integral utilizando el **método del trapecio** para $n = 4$ y $n = 8$ subintervalos.
3. Utilice un **redondeo** de 4 decimales.
4. Calcule el **error** utilizando la fórmula.

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$$

5. Analice el resultado: ¿el error fue alto o bajo? ¿Qué ocurre cuando se aumentó el número de subintervalos?

Solución AnalíticaFigura 2.2: Área bajo la curva de $f(x) = x^2 + 3x$

$$\int_1^3 (x^2 + 3x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_1^3$$

$$\int_1^3 (x^2 + 3x) dx = \left[\frac{1}{3}(3)^3 + \frac{3}{2}(3)^2 \right] - \left[\frac{1}{3}(1)^3 + \frac{3}{2}(1)^2 \right] = \frac{45}{2} - \frac{11}{6}$$

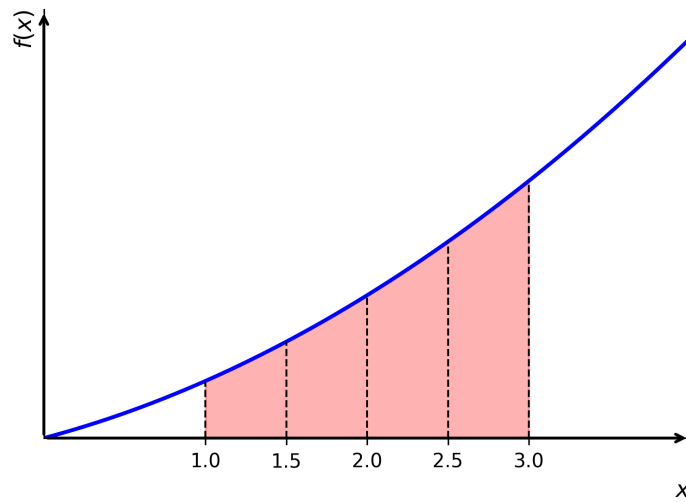
$$\int_1^3 (x^2 + 3x) dx = \frac{62}{3} = 20.6667$$

Solución Numérica $n = 4$ **Paso 1: Información del problema**

- Función: $f(x) = x^2 + 3x$
- Límite inferior: $a = 1$
- Límite superior: $b = 3$
- Número de subintervalos: $n = 4$
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{3 - 1}{4} = 0.5000$$

Figura 2.3: Área bajo la curva de $f(x) = x^2 + 3x$

i	x_i	$f(x_i)$
0	1.0	4.00
1	1.5	6.75
2	2.0	10.00
3	2.5	13.75
4	3.0	18.00

Cuadro 2.1: $f(x) = x^2 + 3x$ **Paso 5: Aplicación de la fórmula del trapecio compuesta**

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$\int_1^3 (x^2 + 3x) dx \approx \frac{0.50}{2} \left[4.00 + 2(6.75 + 10.00 + 13.75) + 18.00 \right]$$

$$\int_1^3 (x^2 + 3x) dx \approx 20.7500$$

Solución Numérica $n = 8$ **Paso 1: Información del problema**

- Función: $f(x) = x^2 + 3x$

- Límite inferior: $a = 1$
- Límite superior: $b = 3$
- Número de subintervalos: $n = 8$
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{3 - 1}{8} = 0.25$$

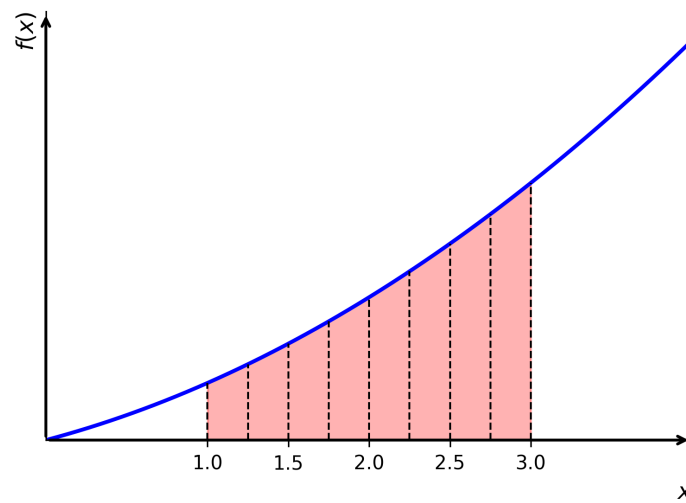


Figura 2.4: Área bajo la curva de $f(x) = x^2 + 3x$

i	x_i	$f(x_i)$
0	1.00	4.0000
1	1.25	5.3125
2	1.50	6.7500
3	1.75	8.3125
4	2.00	10.0000
5	2.25	11.8125
6	2.50	13.7500
7	2.75	15.8125
8	3.00	18.0000

Cuadro 2.2: $f(x) = x^2 + 3x$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$\int_1^3 (x^2 + 3x) dx \approx \frac{0.25}{2} \left[4.0000 + 2(5.3125 + 6.7500 + 8.3125 + 10.0000 + 11.8125 + 13.7500 + 15.8125) + 18.000 \right]$$

$$\int_1^3 (x^2 + 3x) dx \approx 20.6876$$

Cálculo del error

Información

- $f(x) = x^2 + 3x$
- $f''(x) = 2$
- Límite inferior: $a = 1$
- Límite superior: $b = 3$

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot f''(\xi)$$

Para $n = 4$

$$E_T = -\frac{(3-1)^3}{12 \cdot (4)^2} \cdot 2 = -0.0833$$

Para $n = 8$

$$E_T = -\frac{(3-1)^3}{12 \cdot (8)^2} \cdot 2 = -0.0208$$

Análisis y Conclusiones del Resultado

- El signo negativo del resultado del error indica que el valor aproximado (**área bajo la curva**) es mayor al valor real de la integral, es decir, el área es sobrestimada.
- Cuando se aumentó el número de intervalos se obtuvo una mejor aproximación al valor real, por ende un error menor, dado que el error E_T es inversamente proporcional al cuadrado del número de subintervalos n .
- El error obtenido para $n = 4$ es aproximadamente del 8% y para $n = 8$ es del 2%, lo que es bastante aceptable, dado que es cercano a 0

Ejemplo 2

Estimación de una integral no elemental

Considere la siguiente integral definida:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

1. Aproxime el valor de la integral utilizando el **método del trapecio** para $n = 4$ subintervalos.
2. Utilice un **redondeo** de 6 decimales.
3. Calcule el **error** utilizando la fórmula.

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$$

4. Analice el resultado: ¿el error fue alto o bajo?

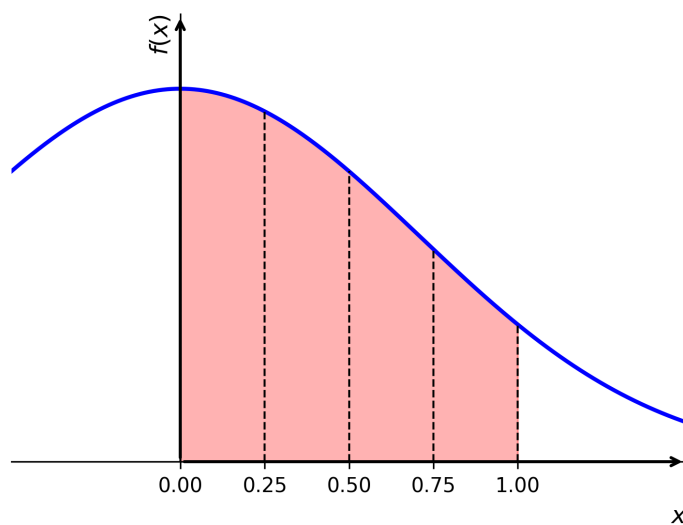
Solución Numérica

Paso 1: Información del problema

- Función: $f(x) = e^{-x^2}$
- Límite inferior: $a = 0$
- Límite superior: $b = 1$
- Número de subintervalos: $n = 4$
- Número de decimales: 6

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

Figura 2.5: Área bajo la curva de $f(x) = e^{-x^2}$.

i	x_i	$f(x_i)$
0	0.0	1.000000
1	0.25	0.939413
2	0.50	0.778801
3	0.75	0.569783
4	1.00	0.367879

Cuadro 2.3: $f(x) = e^{-x^2}$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$\int_0^1 (e^{-x^2}) dx \approx \frac{0.25}{2} \left[1.000000 + 2(0.939413 + 0.778801 + 0.569783) + 0.367879 \right]$$

$$\int_0^1 (e^{-x^2}) dx \approx 0.742984$$

Cálculo del error

Información

■ $f(x) = e^{-x^2}$

- $f''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$
- Límite inferior: $a = 0$
- Límite superior: $b = 1$

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot f''(\xi)$$

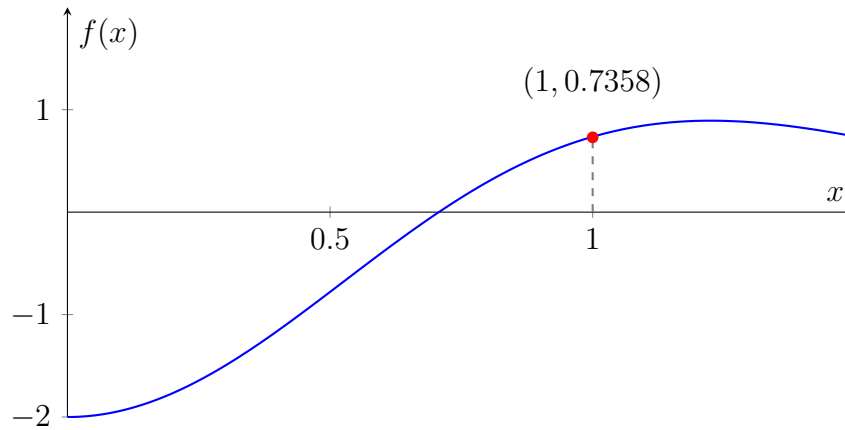


Figura 2.6: Representación gráfica de $f''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$

El punto máximo de la segunda derivada $f''(x)$ en el intervalo $[0,1]$ se encuentra en $x = 1.0$, es decir, $f''(1.0) \approx 0.7358$

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot f''(\xi)$$

$$E_T = -\frac{(1-0)^3}{12 \cdot (4)^2} \cdot (0.7358) = -\frac{1}{192} \cdot (0.7358) = -0.0038$$

Análisis y Conclusiones del Resultado

- El signo negativo del resultado del error indica que el valor aproximado (**área bajo la curva**) es mayor al valor real de la integral, es decir, el área es sobrestimada.
- Cuando se aumentó el número de intervalos se obtuvo una mejor aproximación al valor real, por ende un error menor, dado que el error E_T es inversamente proporcional al cuadrado del número de subintervalos n .
- El error obtenido para $n = 4$ es aproximadamente del 8% y para $n = 8$ es del 2%, lo que es bastante aceptable, dado que es cercano a 0

Ejemplo 3

Control térmico en proceso de pasteurización

Contextualización del problema

El control térmico es un aspecto fundamental en los procesos agroindustriales dedicados a la producción de alimentos, ya que permite garantizar la seguridad e inocuidad de los productos mediante la eliminación de microorganismos patógenos, sin comprometer su calidad. En particular, la pasteurización es una técnica ampliamente utilizada en la industria láctea para prolongar la vida útil de la leche y sus derivados, asegurando que cumplan con los estándares sanitarios establecidos por la normatividad vigente.

Dentro de los métodos existentes, el proceso LTLT (Low Temperature Long Time) constituye una alternativa efectiva para pequeñas y medianas plantas agroindustriales, ya que consiste en mantener la leche a temperaturas moderadas durante periodos prolongados, reduciendo riesgos sin alterar sus propiedades organolépticas.

Descripción y modelamiento del problema

La ingeniera agroindustrial Diana López, especialista en procesos térmicos aplicados a la industria de alimentos, lidera un proyecto de mejora continua en la planta agroindustrial Freska Leche. Su objetivo es optimizar el proceso de pasteurización mediante un control preciso de la temperatura, garantizando la eliminación de patógenos sin afectar la calidad del producto.

Durante la etapa de pasteurización, se aplica el método LTLT, que exige mantener la leche a una temperatura constante durante 30 minutos. En este caso particular, se requiere analizar la variación de la temperatura en un tanque de leche a lo largo del tiempo para estimar la energía térmica necesaria durante todo el proceso.

La temperatura en función del tiempo durante el proceso se modela mediante la función:

$$T(t) = 20 + 15 \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right)$$

donde:

- $T(t)$ es la temperatura en grados Celsius,
- t es el tiempo en minutos.

El objetivo es calcular la **energía térmica total requerida** Q durante el proceso de **pasteurización**. Inicialmente se debe calcular la energía acumulada en el tiempo E_t , la cual se calcula con la siguiente expresión:

$$E_t = m \cdot c \cdot \left(\int_{t_0}^{t_1} T(t) dt \right)$$

Considerando los siguientes datos:

- Masa de leche: $m = 100 \text{ kg}$
- Calor específico de la leche: $c = 3900 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$

En caso de presentarse un corte de energía eléctrica, la planta debe tener un generador de respaldo que pueda suministrar energía a los equipos involucrados en el proceso de pasteurización. Los ingenieros encargados han decidido el uso de un sistema de alimentación ininterrumpida (UPS: Uninterruptible Power Supply). que son baterías que proporcionan energía instantánea por un corto período de tiempo, estas pueden suministrar energía durante las interrupciones.

Pregunta problema

¿Qué capacidad mínima de vatios (W) debe tener la UPS para garantizar el proceso de pasteurización durante 30 minutos, considerando un margen de seguridad del 10 % sobre la potencia calculada?

Requisitos o condiciones del problema

- Utilizar el **método del trapecio** para calcular la energía total acumulada E_t .
- Evaluar la función en **5 subintervalos equidistantes**.
- Los resultados deben presentarse con un redondeo de **4 cifras decimales**.

Paso 1: Información del problema

- Función: $f(t) = 20 + 15 \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right)$
- Límite inferior: $a = 0$
- Límite superior: $b = 30$
- Número de subintervalos: $n = 5$
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta t = \frac{b - a}{n} = \frac{30 - 0}{5} = 6.0000$$

i	t_i	$f(t_i)$
0	0.0	35.0000
1	6.0	15.3647
2	12.0	7.8647
3	18.0	32.1353
4	24.0	24.6353
5	30.0	5.0000

Cuadro 2.4: $f(t) = 20 + 15 \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right)$ **Paso 5: Aplicación de la fórmula del trapecio compuesta**

$$\int_a^b f(t) dt \approx \frac{\Delta t}{2} \left[f(t_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) + f(t_n) \right]$$

$$\int_0^{30} \left(20 + 15 \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right) \right) dt \approx \frac{6.0}{2} \left[35.0000 + 2(15.3647 + 7.8647 + 32.1353 + 24.6353) + 5.0000 \right]$$

$$\int_0^{30} \left(20 + 15 \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right) \right) dt \approx 600^\circ\text{C} \cdot \text{min}$$

$$E_t = m \cdot c \cdot \left(\int_0^{30} T(t) dt \right)$$

$$E_t = (100 \text{ kg}) \cdot (3900 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})) \cdot (600^\circ\text{C} \cdot \text{min}) = 234.000.000 \text{ J} \cdot \text{min}$$

Para calcular la potencia, se necesita obtener la energía total necesaria, la cual se obtiene mediante la expresión.

$$Q = \frac{E_t}{\Delta t} = \frac{234.000.000}{30} = 7.800.000 \text{ J}$$

Dado que la potencia es igual a energía sobre tiempo, y se requiere que sea en vatios (W), es necesario convertir los minutos en segundos, es decir:

$$P = \frac{Q}{\Delta} = \frac{7.800.000}{1800} = 4333.3333 \text{ W}$$

La potencia mínima calculada fue:

$$P = 4333.3333 \text{ W}$$

Considerando un margen de seguridad del 10 %:

$$P_{\text{segura}} = P \cdot (1 + 0.10) = 4333.3333 \cdot 1.10 = 4766.6667 \text{ W}$$

Análisis y Conclusiones del Resultado

- En este problema primeramente se calculó la energía acumulada en el tiempo mediante el método de integración del trapecio y con esta información se obtuvo la energía y luego la potencia necesaria.
- La UPS necesaria para garantizar la energía en el proceso de pasteurización es de 4333.3333 W. Sin embargo, como se solicita adicionar un margen de seguridad del 10 % de la potencia, para eso se requiere una UPS con una capacidad mínima de al menos 4767 W o aproximadamente 4.8 kW.

Ejemplo 4

Estimación del espacio recorrido por un dron de fumigación

Contextualización del problema

En los procesos agroindustriales, la optimización en la aplicación de agroquímicos es un factor crítico para la rentabilidad y la sostenibilidad de los cultivos. Los drones de fumigación se han convertido en una herramienta necesaria para esta labor, permitiendo una aplicación precisa y eficiente.

Descripción y modelamiento del problema

Durante una prueba de vuelo automatizado, se registraron datos de velocidad de un dron en función del tiempo, mostrados en la siguiente tabla:

Tiempo	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Velocidad	3.2	3.5	6.8	4.6	6.1	7.7	8.1	9.0	9.3	9.9

Cuadro 2.5: Valores de Velocidad (V) vs. Tiempo (t)

donde:

- $v(t)$ es la velocidad en metros por segundo (m/s),
- t representa el tiempo en segundos.

Sabemos que la velocidad es la razón de cambio (derivada) del espacio con respecto al tiempo, es decir:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \rightarrow \int v(t) dt = \int ds \rightarrow s(t) = \int_{t_0}^{t_n} v(t) dt$$

Donde $s(t)$ es la distancia total recorrida en un tiempo t .

Dada la tabla de datos de velocidad en función del tiempo, El objetivo es calcular la distancia total recorrido por el dron, y como no se cuenta con una función explícita de velocidad $v(t)$, sino con los valores de velocidad para subintervalos iguales de tiempo t , se debe utilizar la integración numérica.

Pregunta problema

¿Con que cantidad exacta de plaguicida se debe equipar el dron para realizar el recorrido obtenido; sabiendo que para cubrir una hectárea (ha) el dron realiza un recorrido lineal de 1400 mt y se necesitan 12 lt/ha ?

Requisitos o condiciones del problema

- Utilizar el **método del trapecio** para estimar la integral.
- Los resultados deben presentarse con un redondeo de **4 cifras decimales**.

Paso 1: Información del problema

- Límite inferior: $a = 10$
- Límite superior: $b = 100$
- Número de subintervalos: $n = 9$
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta t = \frac{b - a}{n} = \frac{100 - 10}{9} = 10$$

i	t_i	$f(t_i)$
0	10	3.2
1	20	3.5
2	30	6.8
3	40	4.6
4	50	6.1
5	60	7.7
6	70	8.1
7	80	9.0
8	90	9.3
9	100	9.9

Cuadro 2.6

Paso 5: Aplicación de la fórmula del trapecio compuesta

$$\int_a^b f(t) dt \approx \frac{\Delta t}{2} \left[f(t_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) + f(t_n) \right]$$

$$s(t) \approx \int_{10}^{100} v(t) dt \approx \frac{10}{2} \left[3.2 + 2(3.5 + 6.8 + 4.6 + 6.1 + 7.7 + 8.1 + 9.0 + 9.3) + 9.9 \right]$$

$$s(t) \approx \int_0^{100} v(t) dt \approx 616.5 \text{ mt}$$

$$\text{Litros necesarios} = \frac{616.5 \cdot 12}{1400} = \frac{7398}{1400} \approx 5.2843 \text{ litros}$$

Análisis y Conclusiones del Resultado

- En este problema se encontro el área bajo la curva utilizando datos tabulados, teniendo en cuenta que la distancia entre los datos de la variable independiente t debe ser igual, para poder utilizar la integración numérica.
- Después de encontrar la distancia recorrida, se aplicó una regla de tres simple para calcular la cantidad en litros de plaguicida con que debe equiparse el drón para fumigar la distancia recorrida.
- El dron debe ser equipado con aproximadamente **5.2843 litros** de plaguicida para realizar el recorrido estimado de **616.5000 metros**, garantizando una aplicación eficiente y precisa sobre el cultivo.

2.7. Ejemplos Propuestos

Ejemplo 1

Considere la siguiente integral definida:

$$\int_0^2 2x \cdot \cos(x^2) dx$$

1. Resuelva la integral de forma **analítica**.
2. Aproxime el valor de la integral utilizando el **método del trapecio** para $n = 4$ y $n = 8$ subintervalos.
3. Utilice un **redondeo** de 4 decimales.
4. Calcule el **error** utilizando la fórmula.

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$$

5. Analice el resultado: ¿el error fue alto o bajo? ¿Qué ocurre cuando se aumentó el número de subintervalos?

Ejemplo 2

Estimación de una integral no elemental

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}} dx$$

1. Aproxime el valor de la integral utilizando el **método del trapecio** para $n = 4$ subintervalos.
2. Utilice un **redondeo** de 6 decimales.
3. Calcule el **error** utilizando la fórmula.

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$$

4. Analice el resultado: ¿el error fue alto o bajo?

Ejemplo 3

En el monitoreo de redes de datos, es fundamental conocer la cantidad de información transferida en un intervalo de tiempo para optimizar recursos, prevenir saturación y calcular costos asociados al ancho de banda. El tráfico de datos no suele ser constante

durante el día; varía según la cantidad de usuarios, procesos programados o picos de uso en horarios laborales.

La cantidad total de datos transferidos se puede modelar como la siguiente integral:

$$D = \int_{t_0}^{t_f} B(t) dt$$

Donde:

- D = Cantidad de datos transferidos (Megabits)
- $B(t)$ = Ancho de banda utilizado (Mbps)
- t = Tiempo (en horas)

Un ingeniero de sistemas está realizando un estudio de monitoreo de red en la infraestructura tecnológica de un centro de datos de la Universidad del Rio Grande. Como parte de la gestión de la red, ha recolectado datos del **ancho de banda utilizado por uno de los servidores principales** durante las primeras 5 horas de operación del día.

Estas mediciones fueron obtenidas a través de las herramientas de monitoreo de red que registran el ancho de banda promedio consumido en intervalos de una hora.

Tiempo (h)	Ancho de Banda (Mbps)
0	40
1	50
2	70
3	100
4	90
5	60

Cuadro 2.7: Información

1. Analice el problema presentado y proponga un título técnico adecuado que refleje claramente su contexto, propósito y el área de conocimiento al que pertenece.
2. Desarrolle la solución de este problema siguiendo la estructura:
 - Contextualización del Problema.
 - Descripción y modelamiento del problema.
 - Pregunta problema.
3. Estime mediante la regla del trapecio la cantidad total de datos transferidos en Megabits durante las primeras 5 horas.
4. Si el costo de transferencia es de aproximadamente \$0.10 USD por Gigabyte transferido, ¿cuál sería el valor a pagar por la transferencia total registrada?

Ejemplo 4

La Universidad Tecnológica del Caribe (UTC), a través del Grupo de Investigación en Ciencia de Datos y Analítica Predictiva (GICDAP), se encuentra desarrollando un proyecto para la implementación de modelos de inteligencia artificial (IA) orientados a predecir la deserción universitaria. Esta iniciativa busca fortalecer las estrategias institucionales de permanencia y graduación, mediante el uso de herramientas tecnológicas que permitan anticipar comportamientos de abandono y tomar decisiones fundamentadas con base en datos.

Como parte del proceso investigativo, el equipo ha diseñado y entrenado dos modelos diferentes para predecir la deserción:

- **Modelo 1:** Regresión Logística (modelo clásico, ampliamente utilizado por su simplicidad y capacidad de interpretación).
- **Modelo 2:** Random Forest (modelo robusto, reconocido por su alta capacidad predictiva y manejo de datos no lineales).

Ambos modelos han sido evaluados en función del **F1-Score acumulado (%)** conforme se incrementa progresivamente la cantidad de datos de entrenamiento. Esta métrica ha sido seleccionada por el equipo debido a que ofrece una evaluación más equilibrada y robusta en comparación con la precisión simple, ya que considera tanto la capacidad del modelo para evitar falsos positivos como para identificar correctamente los casos positivos. Esto es esencial en contextos de clasificación binaria como la predicción de deserción.

Sin embargo, los datos disponibles presentan intervalos irregulares en el crecimiento de la muestra, lo que exige aplicar métodos matemáticos o soluciones computacionales para estimar el rendimiento acumulado total de cada modelo. A partir de estos resultados, la universidad espera definir cuál de las dos estrategias debe adoptar para su sistema institucional de monitoreo y prevención de la deserción.

Datos (x1000)	F1-Score (%)
0	0
0.5	55
1	65
1.5	68
2	70
2.5	71
3	72
4	74
5	75
6	75.5
7	76

Cuadro 2.8: Regresión Logística

Datos (x1000)	F1-Score (%)
0	0
0.5	60
1	61
1.5	72
2	74
2.5	74
3	78
4	73
5	70
6	81
7	82

Cuadro 2.9: Random Forest

El grupo completo se dividirá en dos subgrupos de trabajo, cada uno responsable de analizar un modelo específico. El trabajo debe desarrollarse de manera cooperativa bajo la siguiente estructura:

- **Subgrupo 1:** Analizará el modelo de **Regresión Logística**.
- **Subgrupo 2:** Analizará el modelo **Random Forest**.

Cada subgrupo desarrollará de forma independiente las siguientes actividades:

1. Analizar el problema y proponer un título técnico adecuado que refleje su contexto y su relación con la evaluación de modelos de clasificación.
2. Desarrollar la solución del problema siguiendo esta estructura:
 - Contextualización del problema.
 - Descripción y modelamiento matemático que justifique el uso del método asignado.
 - Formulación de una pregunta problema clara y técnica.
3. Aplicar correctamente el método de integración asignado (**Regla del Trapecio**) sobre los datos tabulados para estimar el área bajo la curva acumulada del F1-Score.
4. Explicar las características del modelo de clasificación asignado:
 - **Subgrupo 1:** Debe explicar el funcionamiento y las principales características del modelo de **Regresión Logística**, destacando sus ventajas, limitaciones y aplicaciones típicas.

- **Subgrupo 2:** Debe explicar el funcionamiento y las principales características del modelo **Random Forest**, resaltando su capacidad para manejar datos no lineales, su robustez y sus ventajas frente a otros métodos.
5. Reflexionar y responder: ¿Cómo contribuyen los sistemas de predicción basados en inteligencia artificial al desarrollo de soluciones para la **optimización de procesos educativos** y la **reducción de la deserción**? Fundamente su respuesta considerando los impactos en la eficiencia académica, económica e institucional.

Trabajo conjunto del grupo completo:

5. Comparar las áreas aproximadas calculadas para cada modelo. Si la diferencia entre los resultados es menor al **10 % del promedio de ambas áreas**, el grupo deberá seleccionar como modelo de clasificación aquel que demande menores recursos computacionales. Esta elección debe ser argumentada técnicamente, teniendo en cuenta la eficiencia, simplicidad y facilidad de interpretación del modelo.
6. Explicar de forma conjunta qué es el **F1-Score** y qué ventajas proporciona para medir el rendimiento global de modelos de clasificación binaria en problemas como la predicción de deserción. ¿Qué representa gráficamente? Justificar por qué esta métrica es adecuada para la comparación de los modelos presentados.
7. Presentar de forma consensuada el modelo seleccionado, argumentando la elección con base en el **mejor F1-Score acumulado** o en el **rendimiento computacional** del modelo. La decisión debe ser respaldada con evidencia numérica, técnica y referencias académicas pertinentes.

Entrega Final

El grupo deberá entregar un **informe académico final**, redactado de manera profesional bajo normas APA. El informe debe incluir:

- Desarrollo completo de cada actividad asignada a los subgrupos.
- Comparación y análisis conjunto de los resultados.
- Argumentación técnica y fundamentada de la elección del modelo seleccionado.
- Inclusión de gráficas, tablas y representaciones visuales que respalden los análisis y resultados presentados.
- Elaboración de una presentación de diapositivas (slides) para la sustentación oral del proyecto, que sintetice de forma clara y profesional el proceso, los resultados y la conclusión final.
- Referencias bibliográficas actualizadas y pertinentes que respalden las decisiones tomadas y los conceptos explicados.

Capítulo 3

Método de Simpson 1/3

3.1. Fundamentos Teóricos

El método de Simpson 1/3 es una técnica de integración numérica más precisa que los métodos del rectángulo y del trapecio. Utiliza parábolas en lugar de segmentos rectos o áreas planas para aproximar el comportamiento de la función en subintervalos, logrando así una mejor estimación del área bajo la curva.

3.2. Representación Gráfica y Fórmula

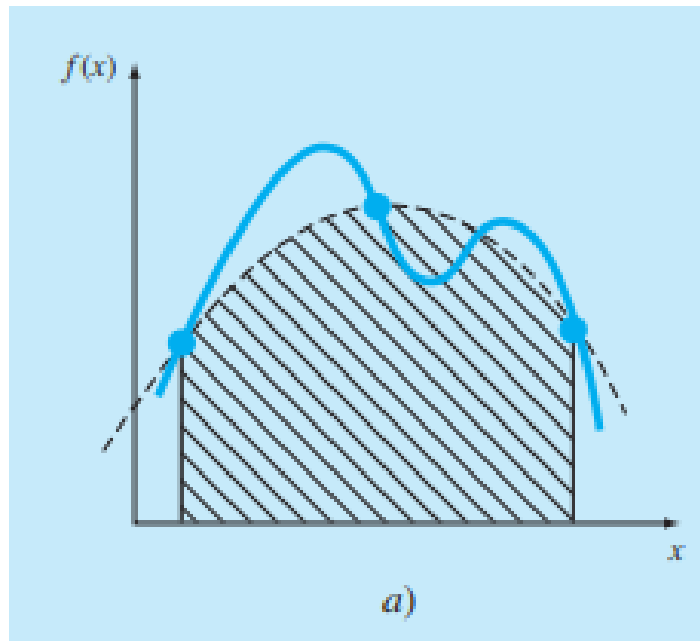


Figura 3.1: Descripción Gráfica del Método de Simpson 3/8)

Para aproximar la integral definida $\int_a^b f(x) dx$ mediante el método de Simpson 1/3, se sustituye la función $f(x)$ por un polinomio de segundo grado, dado que, como se observa en la gráfica, este método utiliza tres puntos ajustados a un polinomio cuadrático.

De aquí:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_2(x) dx$$

Considerando los puntos

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$$

Haciendo $a = x_0, b = x_2$ y aplicando interpolación de Lagrange para el polinomio de segundo grado $f_2(x)$, se tiene que:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \right] dx$$

El resultado de esta integral es:

$$I \approx \frac{\Delta x}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)], \text{ siendo } \Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Esta ecuación es la segunda fórmula de integración cerrada de Newton-Cotes. Otra forma de obtener dicha ecuación es integrando el polinomio de Newton-Gregory (Chapra & Canale, 2011).

Para llegar a la forma extendida, se tiene que, como $n = 2m$ subintervalos, hay m pares.

Denotando los nodos:

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$$

Para cada par (x_{2j}, x_{2j+2}) , tenemos que:

$$\int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} [f_{2j} + 4f_{2j+1} + f_{2j+2}]$$

Sumando sobre $j = 0, \dots, m - 1$, obtenemos:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \sum_{j=0}^{m-1} [f_{2j} + 4f_{2j+1} + f_{2j+2}]$$

Agrupando términos, teniendo en cuenta que:

- Los extremos f_0 y f_n aparecen una vez cada uno.

- Los nodos con índice impar aparecen 4 veces.
- Los nodos con índice par (interiores) aparecen 2 veces, excepto los extremos.

Nos queda:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \text{impar}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ \text{par}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

3.3. Error de Truncamiento

El error de truncamiento para el método de Simpson 1/3 viene dado por la fórmula

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$$

En donde $f^{(4)}(\xi)$ es el valor máximo obtenido en el intervalo $[a, b]$, para $\xi \in [a, b]$

Un análisis de esta fórmula nos revela que la regla de Simpson 1/3 es más exacta que la regla del trapecio, ya que no es proporcional a la tercera derivada sino a la cuarta, esto porque el término del coeficiente de tercer grado se hace cero durante la integración de la interpolación polinomial.

En consecuencia, como afirman Chapra & Canale (2011), “la regla de Simpson 1/3 alcanza una precisión de tercer grado aún cuando se basa en sólo tres puntos. En otras palabras, ¡da resultados exactos para polinomios cúbicos aún cuando se obtenga de una parábola!”.

3.4. Ventajas

- Ofrece una mayor precisión que el método del trapecio al utilizar una interpolación cuadrática.
- Es exacto para polinomios de hasta tercer grado, incluso cuando se basa únicamente en tres puntos.
- El error de truncamiento está relacionado con la cuarta derivada, lo que lo hace más eficiente en funciones suaves.
- Permite obtener buenos resultados con menos subintervalos en comparación con otros métodos básicos.

3.5. Desventajas

- Requiere un número par de subintervalos (n par), lo que puede limitar su aplicación directa.
- Es más complejo que el método del trapecio, tanto en la deducción teórica como en la implementación.
- Si la función no es suficientemente suave (por ejemplo, presenta cambios abruptos en la cuarta derivada), el método puede perder precisión.

3.6. Ejemplos Resueltos

Ejemplo 1

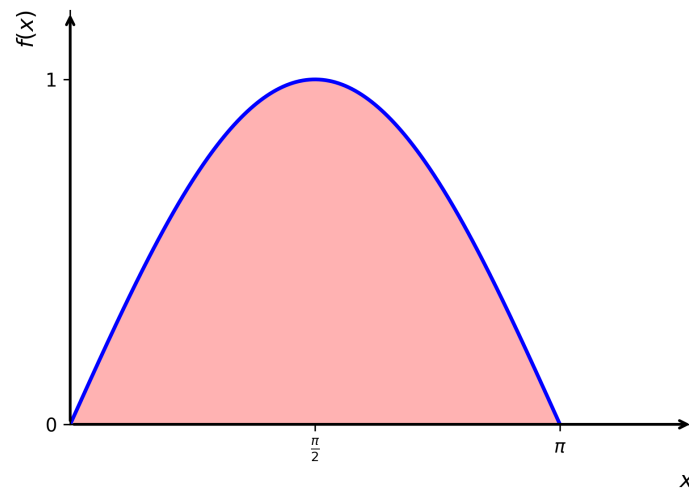
Considere la siguiente integral definida:

$$\int_0^{\pi} (\sin x) dx$$

1. Resuelva la integral de forma **analítica**.
2. Aproxime el valor de la integral utilizando el **método de simpson 1/3** para $n = 4$ y $n = 6$ subintervalos.
3. Calcule el **error** utilizando la fórmula.

$$E_T = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi), \quad \text{donde } \xi \in (a, b)$$

4. Utilice un **redondeo** de 4 decimales.
5. Analice el resultado: ¿el error fue alto o bajo? ¿Qué ocurre cuando se aumentó el número de subintervalos?

Solución AnalíticaFigura 3.2: Área bajo la curva de $f(x) = \sin(x)$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos(\pi)] - [-\cos(0)] = -(-1) - (-1)$$

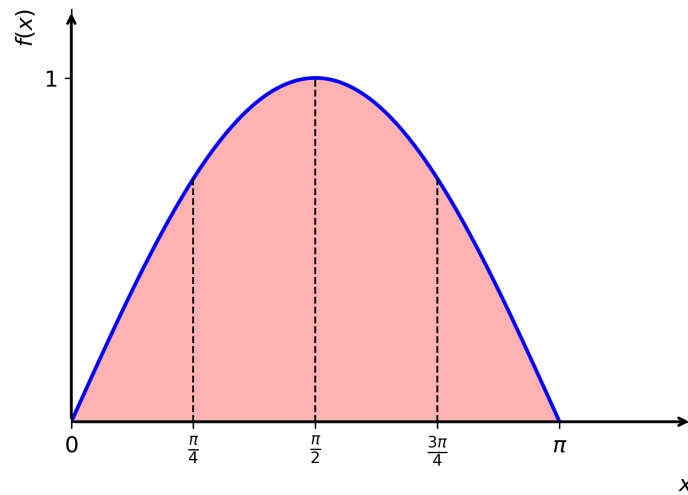
$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

Solución Numérica $n = 4$ **Paso 1: Información del problema**

- Función: $f(x) = \sin x$
- Límite inferior: $a = 0$
- Límite superior: $b = \pi$
- Número de subintervalos: $n = 4$
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Figura 3.3: Área bajo la curva de $f(x) = \sin(x)$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	0
1	$\frac{\pi}{4}$	0.7071
2	$\frac{\pi}{2}$	1.000
3	$\frac{3\pi}{4}$	0.7071
4	π	0

Cuadro 3.1: $f(x) = f(x) = \sin(x)$ **Paso 5: Aplicación de la fórmula del trapecio compuesta**

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \text{impar}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ \text{par}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$\int_0^\pi \sin x dx \approx \frac{\pi}{3} \left[0.00 + 4(0.7071 + 0.7071) + 2(1.0000) + 0.00 \right]$$

$$\int_0^\pi \sin x dx \approx 2.0045$$

Solución Numérica $n = 6$ **Paso 1: Información del problema**

- Función: $f(x) = \sin x$

- Límite inferior: $a = 0$
- Límite superior: $b = \pi$
- Número de subintervalos: $n = 6$
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{\pi - 0}{6} = \frac{\pi}{6}$$

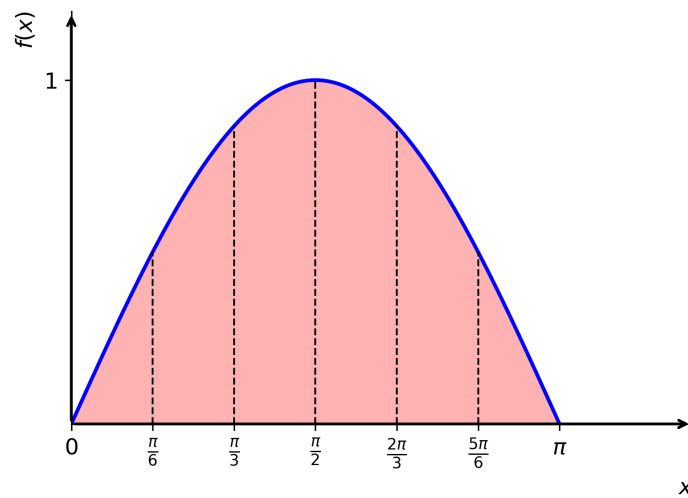


Figura 3.4: Área bajo la curva de $f(x) = \sin(x)$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	0
1	$\frac{\pi}{6}$	0.5000
2	$\frac{\pi}{3}$	0.8660
3	$\frac{\pi}{2}$	1.0000
4	$\frac{2\pi}{3}$	0.8660
5	$\frac{5\pi}{6}$	0.5000
6	π	0

Cuadro 3.2: $f(x) = \sin(x)$

Paso 5: Aplicación de la fórmula del trapecio compuesta

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \text{impar}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ \text{par}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$\int_0^\pi \sin x dx \approx \frac{\pi}{3} \left[0.00 + 4(0.5000 + 1.0000 + 0.5000) + 2(0.8660 + 0.8660) + 0.00 \right]$$

$$\int_0^\pi \sin x dx \approx 2.0008$$

Cálculo del error

Información

- $f(x) = \sin x$
- $f^{(4)}(x) = -\sin x$
- Límite inferior: $a = 0$
- Límite superior: $b = \pi$

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot f''(\xi)$$

$$E_T = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi), \quad \text{donde } \xi \in (a, b)$$

Para $n = 4$

$$E_T = -\frac{(3-1)^3}{12 \cdot (4)^2} \cdot 2 = -0.0833$$

Para $n = 8$

$$E_T = -\frac{(3-1)^3}{12 \cdot (8)^2} \cdot 2 = -0.0208$$

Análisis y Conclusiones del Resultado

- Hay que corregir esto.
- El signo negativo del resultado del error indica que el valor aproximado (**área bajo la curva**) es mayor al valor real de la integral.
- Cuando se aumentó el número de intervalos se obtuvo una mejor aproximación al valor real y un menor error, dado que el error E_T es inversamente proporcional al cuadrado del número de subintervalos n .
- El error obtenido para $n = 4$ es aproximadamente del 8 % y para $n = 8$ es del 2 %, lo que es bastante aceptable, dado que es cercano a 0.

Ejemplo 2

Estimación de una integral no elemental

Aproximar el valor de la siguiente integral dada mediante la **Regla de Simpson 1/3** con 6 subintervalos, redondeando los resultados a 6 decimales.

$$\int_{0.25}^1 -\ln(\cos(x)) dx$$

Paso 1: Información del problema

- Función: $f(x) = -\ln(\cos(x))$
- Límite inferior: $a = 0.25$
- Límite superior: $b = 1$
- Número de subintervalos: $n = 6$
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0.25}{6} = 0.125$$

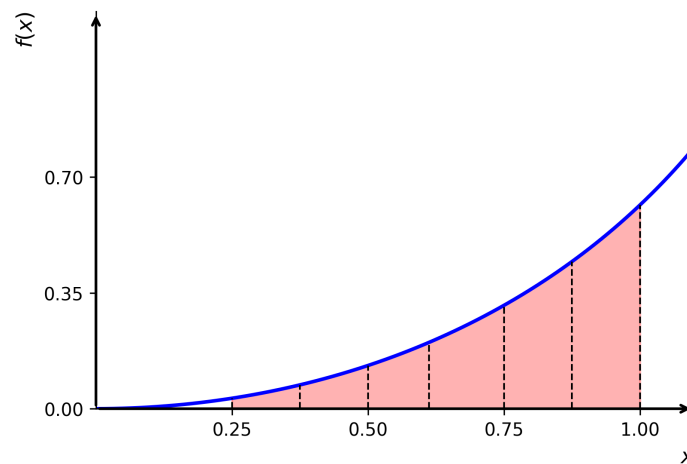


Figura 3.5: Área bajo la curva de $f(x) = -\ln(\cos x)$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0.2500	0.0316
1	0.3750	0.0720
2	0.5000	0.1306
3	0.6125	0.2006
4	0.7500	0.3124
5	0.8750	0.4447
6	1.0000	0.6156

Cuadro 3.3: $f(x) = -\ln(\cos(x))$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \text{impar}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ \text{par}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$\int_{0.25}^1 -\ln(\cos(x)) dx \approx \frac{0.125}{3} \left[0.00 + 4(0.0720 + 0.2006 + 0.4447) \right. \\ \left. 2(0.1306 + 0.3124) + 0.6156 \right]$$

$$\int_{0.25}^1 -\ln(\cos(x)) dx \approx 0.1821$$

Ejemplo 3

Estimación del costo de los cables de un puente colgante

Contextualización del problema

En ingeniería civil, el diseño de infraestructuras como puentes colgantes implica un análisis riguroso para garantizar la estabilidad, resistencia y seguridad estructural de las obras. En este tipo de estructuras, los cables que soportan el tablero del puente —la plataforma por donde circulan peatones y vehículos— son componentes fundamentales, ya que deben resistir las cargas previstas sin comprometer la integridad del sistema estructural. Para asegurar su correcto dimensionamiento, es necesario modelar matemáticamente la curvatura de los cables y calcular con precisión su longitud. Estos cálculos no solo garantizan la seguridad del puente, sino que también permiten estimar los costos asociados a los materiales necesarios para su construcción.

Descripción y modelamiento del problema

La estudiante de Ingeniería Civil Laura Gómez, como parte de su proyecto de grado, desarrolla un estudio sobre el diseño estructural de un puente colgante rural que conectará los corregimientos de Puerto Mosquito y Bodega Central en el departamento del Cesar. Una de las tareas fundamentales de su proyecto es estimar la longitud de los cables necesarios para sostener el tablero del puente, garantizando tanto su seguridad como su viabilidad económica.

Para lograr este objetivo, Laura debe modelar matemáticamente la curvatura del cable, la cual ha sido determinada como una parábola que describe su forma geométrica. Dicha función está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$$

donde:

- x representa la posición horizontal (en metros) a lo largo del tablero del puente,
- $y(x)$ es la altura del cable con respecto al nivel base del tablero (en metros).

La distancia a evaluar está entre los puntos $x = 0$ y $x = 6$ metros. Para calcular el presupuesto, se necesita estimar la **longitud real del cable** en esta sección.

La longitud de una curva definida por una función $y = f(x)$ se determina con la fórmula de longitud de arco:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Pregunta problema

¿Cuál es la longitud total aproximada del cable de suspensión requerida, incluyendo un 10 % adicional como margen de seguridad para el empalme y anclaje? Además, ¿cuál sería el costo total de 6 tramos de dicho cable si el valor por metro es de \$250.000?

Requisitos o condiciones del problema

- Resolver la integral mediante el **método de simpson 1/3**.
- Dividir el intervalo en **6 subintervalos**.
- Redondear los resultados a **4 cifras decimales**.

Paso 1: Información del problema

- Función: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

- Límite inferior: $a = 0$
- Límite superior: $b = 6$
- Número de subintervalos: $n = 6$
- Número de decimales: 4
- $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$

Solución numérica

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4}x^2 + 2 \right) = \frac{1}{2}x$$

Longitud de la curva:

$$L = \int_0^6 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2} dx = \int_0^6 \sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2} dx$$

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{6 - 0}{6} = 1$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	1.0000
1	1	1.1180
2	2	1.4142
3	3	1.8028
4	4	2.2361
5	5	2.6926
6	6	3.1623

Cuadro 3.4: $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2}$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \text{impar}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ \text{par}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$L = \int_0^6 \sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2} dx \approx \frac{1.00}{3} \left[1.00 + 4(1.1180 + 1.8028 + 2.6926) \right. \\ \left. 2(1.4142 + 2.2361) + 3.1623 \right]$$

$$L = \int_0^6 \sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2} dx \approx 11.3055 \text{ m}$$

Para 6 tramos de cable con el 10 % adicional se tiene:

$$L_t = (11.3055 \text{ m}) \cdot (1.1) \cdot (6) \approx 74.6163 \text{ m}$$

$$C = (74.6163) \cdot (250000) = \$ 18.654.075$$

Análisis y Conclusiones de los Resultados

- Inicialmente en la solución de este problema se halló la derivada de la función de la forma geométrica del cable, para poder reemplazarla en la formula de la distancia de una curva.
- Seguidamente se calculó la integral con el método de Simpson 1/3 con seis (6) subintervalos, redondeando los resultados a cuatro (4) decimales.
- A esta distancia calculada se le adiciono el 10 % como margen de seguridad exigido por las condiciones del problema, dando un total de 74.6163 m para los 6 tramos, y un costo total de \$ 18.654.075

Ejemplo 4

Estimación de la probabilidad de incumplimiento en el peso de productos

Contextualización del problema

Una investigación realizada por la Confederación Colombiana de Consumidores (CCC) ha descubierto que el peso real de los paquetes de azúcar de 5kg comercializados en tiendas y supermercados del país es inferior al peso oficial declarado en el empaque, generando un posible incumplimiento y afectación a los consumidores.

Como no es viable pesar todos los paquetes existentes en los puntos de venta, la CCC contrato un grupo experto en estadística de la Universidad Popular del Cesar seccional Aguachica, para determinar la cantidad de paquetes que no cumplen con las especificaciones del peso.

Descripción y modelamiento del problema

El grupo de estudio tomó una muestra aleatoria de 100 paquetes del producto para analizarlos, y encontró que el comportamiento estadístico del peso sigue una distribución normal estandarizada.

Basado en esto decide utilizar la siguiente función para calcular la probabilidad de que un paquete seleccionado al azar pese menos de 5kg.

$$P(x) = 0.5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{0.8} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Donde:

- La constante 0.5 representa la probabilidad acumulada hasta la media en una distribución normal simétrica.
- El valor 0.8 representa la desviación estándar estandarizada ($z = 0.8$) por debajo de la media, correspondiente al peso de 5kg.
- La integral evalúa la acumulación de probabilidad desde la media hasta dicho valor.

Pregunta problema

¿Cuál es la probabilidad de que un paquete de azúcar vendido en un supermercado pese menos de 5kg?

Requisitos o condiciones del problema

- Aplicar el método de integración numérica de **Simpson 1/3** para aproximar el valor de la integral.
- Utilizar **8 subintervalos**.
- Presentar el resultado con **4 cifras decimales**.

Paso 1: Información del problema

- Función: $P(x) = 0.5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{0.8} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$
- Límite inferior: $a = 0$
- Límite superior: $b = 0.8$
- Número de subintervalos: $n = 8$
- Número de decimales: 4

Solución numérica

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{0.8 - 0}{8} = 0.10$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0.00	1.0000
1	0.10	0.9900
2	0.20	0.9608
3	0.30	0.9139
4	0.40	0.8521
5	0.50	0.7788
6	0.60	0.6977
7	0.70	0.6126
8	0.80	0.5273

Cuadro 3.5: $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \text{impar}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ \text{par}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$I = \int_0^{0.8} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \approx \frac{0.10}{3} \left[1.00 + 4(0.9900 + 0.9139 + 0.7788 + 0.6126) \right. \\ \left. 2(0.9608 + 0.8521 + 0.6977) + 0.5273 \right]$$

$$I \approx 0.6577$$

$$P(x) = 0.5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot I$$

$$P(x) = 0.5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (0.6577) = 0.7624$$

Análisis y Conclusiones de los Resultados

- Para la solución de este problema primero se calculó la integral definida entre 0 y 0.8 que hace parte de la función de la probabilidad, mediante el método de Simpson 1/3 usando un redondeo a cuatro (4) decimales y ocho (8) subintervalos
- Seguidamente se calculó la probabilidad con la función dada obteniendo un valor de 0.7624, es decir 76.24 %.
- Dada la probabilidad obtenida 76.24 % se puede concluir que hay una alta irregularidad en el proceso de pesado y empaquetado de los paquetes de azúcar.

3.7. Ejemplos Propuestos

Ejemplo 1

Considere la siguiente integral definida:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$$

1. Resuelva la integral de forma **analítica**.
2. Aproxime el valor de la integral utilizando el **método de simpson 1/3** para $n = 4$ y $n = 6$ subintervalos.
3. Calcule el **error** utilizando la fórmula.

$$E_T = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi), \quad \text{donde } \xi \in (a, b)$$

4. Utilice un **redondeo** de 4 decimales.
5. Analice el resultado: ¿el error fue alto o bajo? ¿Qué ocurre cuando se aumentó el número de subintervalos?

Ejemplo 2

Estimación de una integral no elemental

Aproximar el valor de la siguiente integral dada mediante la **Regla de Simpson 1/3** con 6 subintervalos, redondeando los resultados a 4 decimales.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x^2) dx$$

Ejemplo 3

El Grupo de Investigación en Procesamiento del Lenguaje Natural e Inteligencia Artificial (GIPLIA) de la Universidad del Nuevo Sur (UNS) está realizando un ejercicio de simulación para evaluar el posible consumo económico asociado al desarrollo de una plataforma educativa que haga uso de APIs comerciales de modelos de lenguaje LLM (*Large Language Model*).

Con el fin de estimar el costo acumulado por consumo de tokens, el grupo ha recolectado datos simulados que representan el comportamiento esperado del sistema a lo largo de una jornada de 8 horas de funcionamiento continuo.

El costo total acumulado en dólares se modela mediante la siguiente integral:

$$C = k \cdot \int_{t_0}^{t_f} N(t) dt$$

Donde:

- C = Costo total en dólares (USD).
- $k = 0.0025$ (USD/hora)
- $N(t)$ = Tokens consumidos por hora.
- t = Tiempo (en horas).

Los datos contenidos en la siguiente tabla no provienen de un sistema en producción, sino de un ejercicio experimental que busca aproximar, de manera razonable, la carga de trabajo que implicaría para la API de un proveedor LLM en condiciones de uso académico.

Tiempo (h)	Tokens por hora
0	750
1	900
2	1100
3	1350
4	1500
5	1400
6	1200
7	950
8	800

Cuadro 3.6: Información

1. Analice el problema presentado y proponga un título técnico adecuado que refleje claramente su contexto, propósito y el área de conocimiento al que pertenece.
2. Desarrolle la solución de este problema siguiendo la estructura:
 - Contextualización del Problema.
 - Descripción y modelamiento del problema.
 - Pregunta problema.
3. Estime mediante la regla de Simpson 1/3 la cantidad total de tokens consumidos durante la prueba.
4. Calcule el costo total en pesos colombianos (COP) de los tokens utilizados durante la jornada simulada.
5. Explique brevemente: ¿Por qué es importante que un grupo de investigación como GIPLIA tenga claridad sobre estos costos en proyectos que dependen de servicios comerciales de APIs para modelos LLM?

Ejemplo 4

La empresa **EnerBioTech S.A.S.**, dedicada a soluciones sostenibles para el sector agroindustrial, se encuentra en proceso de definir qué sistema fotovoltaico instalar para abastecer energéticamente su planta de procesamiento. Tras evaluar propuestas comerciales, ha recibido dos ofertas distintas que deben ser analizadas a nivel técnico y económico para tomar la mejor decisión.

Información Técnica Suministrada por los Proveedores

Empresa A

Solución: Panel Solar Fijo

La Empresa A ha suministrado dos modelos teóricos para representar el comportamiento de la irradiancia solar a lo largo del día. Estas funciones, expresadas en unidades de W/m^2 , están definidas para dos intervalos de tiempo diferenciados. A continuación, se describen las características de cada modelo:

1. **Primer intervalo: 5:00 a.m. – 11:00 a.m.**

■ **Modelo matemático:**

$$I_1(t) = 600 \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi t}{12} \right)$$

- **Descripción:** Esta función modela el incremento progresivo de la irradiancia solar desde el amanecer hasta el mediodía, reflejando el aumento natural de la radiación solar durante las primeras horas del día.

2. **Segundo intervalo: 11:00 a.m. – 5:00 p.m.**

■ **Modelo matemático:**

$$I_2(t) = 300 \cdot \left(1 + \cos \left(\frac{\pi(t-3)}{6} \right) \right)$$

- **Descripción:** Esta función modela la disminución progresiva de la irradiancia solar a partir del mediodía, simulando el descenso de la radiación conforme avanza la tarde.

Empresa B

Solución: Panel Solar con Seguimiento Solar (Eje Único)

La Empresa B ha entregado datos experimentales de irradiancia solar medidos en campo de irradiancia solar a lo largo del día, expresados en unidades de W/m^2 . Dichos

datos corresponden a un sistema de seguimiento solar de un solo eje, diseñado para optimizar la captación de radiación durante todo el periodo de exposición solar.

Hora	Irradiancia
5:00 a.m.	0
6:00 a.m.	80
7:00 a.m.	150
8:00 a.m.	230
9:00 a.m.	300
10:00 a.m.	360
11:00 a.m.	400
11:30 a.m.	420
12:00 p.m.	440
12:30 p.m.	460

Hora	Irradiancia
1:00 p.m.	480
1:30 p.m.	490
2:00 p.m.	495
2:30 p.m.	500
3:00 p.m.	480
3:30 p.m.	470
4:00 p.m.	460
4:30 p.m.	455
5:00 p.m.	450

Los datos reflejan las mediciones reales de irradiancia registradas por el sistema de seguimiento solar durante la jornada de 5:00 am a 5:00 pm, evidenciando cómo esta tecnología optimiza la captación de radiación mediante el ajuste de la orientación del panel.

Solicitudes

La gerencia de la empresa solicita un informe técnico que permita fundamentar la mejor elección a partir de un análisis cuantitativo y cualitativo. Para esto el equipo de ingenieros se dividirá en dos subgrupos de trabajo, cada uno responsable de analizar una de las dos propuestas tecnológicas presentadas por las empresas proveedoras.

El trabajo debe desarrollarse de manera cooperativa bajo la siguiente estructura:

- **Subgrupo 1:** Analizará la propuesta de la **Empresa A (Panel Solar Fijo)**.
- **Subgrupo 2:** Analizará la propuesta de la **Empresa B (Panel Solar con Seguimiento Solar)**.

Cada subgrupo desarrollará de forma independiente las siguientes actividades:

1. Analizar el problema y proponer un título técnico adecuado que refleje su contexto y su relación con la evaluación de sistemas de generación de energía solar.
2. Desarrollar la solución del problema siguiendo esta estructura:
 - Contextualización del problema.
 - Descripción y modelamiento matemático que justifique el uso del método asignado (integración numérica).

- Formulación de una pregunta problema clara y técnica.
- 3. Aplicar correctamente la **Regla de Simpson 1/3** para estimar la energía total generada (Wh/m^2) por cada una de las propuestas, de acuerdo con la información suministrada.
- 4. Explicar brevemente las características técnicas de la solución asignada:
 - **Subgrupo 1:** Describir las características, ventajas y limitaciones del sistema de **panel solar fijo**, en términos de eficiencia, costos y sostenibilidad.
 - **Subgrupo 2:** Describir las características, ventajas y limitaciones del sistema de **panel solar con seguimiento**, resaltando su capacidad de optimizar la captación de energía a lo largo del día.
- 5. Reflexionar y responder: ¿Cómo contribuyen las soluciones de energía fotovoltaica al desarrollo sostenible, la eficiencia energética y la reducción de los costos operativos en empresas agroindustriales? Fundamente su respuesta considerando impactos ambientales, económicos y tecnológicos.

Trabajo conjunto del grupo completo:

- 6. Comparar las energías aproximadas obtenidas para cada tecnología y, de manera consensuada, seleccionar la alternativa más conveniente. Esta decisión debe estar fundamentada en criterios de eficiencia, simplicidad de operación, sostenibilidad, retorno de inversión y mayor aprovechamiento de la irradiancia solar. La elección debe ser respaldada con evidencia numérica, técnica y referencias pertinentes que demuestren su viabilidad económica y técnica.

Entrega Final

El grupo deberá entregar un **informe académico final**, redactado de manera profesional bajo normas APA. El informe debe incluir:

- Desarrollo completo de cada actividad asignada a los subgrupos.
- Comparación y análisis conjunto de los resultados obtenidos.
- Argumentación técnica y fundamentada de la elección del sistema seleccionado.
- Inclusión de gráficas, tablas y representaciones visuales que respalden los análisis y resultados presentados.
- Elaboración de una presentación de diapositivas (slides) para la sustentación oral del proyecto, que sintetice de forma clara y profesional el proceso, los resultados y la conclusión final.
- Referencias bibliográficas actualizadas y pertinentes que respalden las decisiones tomadas y los conceptos explicados.

Capítulo 4

Método de Simpson 3/8

4.1. Fundamentos Teóricos

El método de Simpson 3/8 es una variación del método de Simpson 1/3, que utiliza tres subintervalos para ajustar una polinomio cúbico (polinomio de grado 3) sobre cada tramo. Aunque es menos común que el método de Simpson 1/3, es muy útil cuando el número de subintervalos no es divisible por 2 pero sí por 3, o cuando se desea mejorar la precisión de la aproximación en funciones más complejas.

4.2. Representación Gráfica y Fórmula

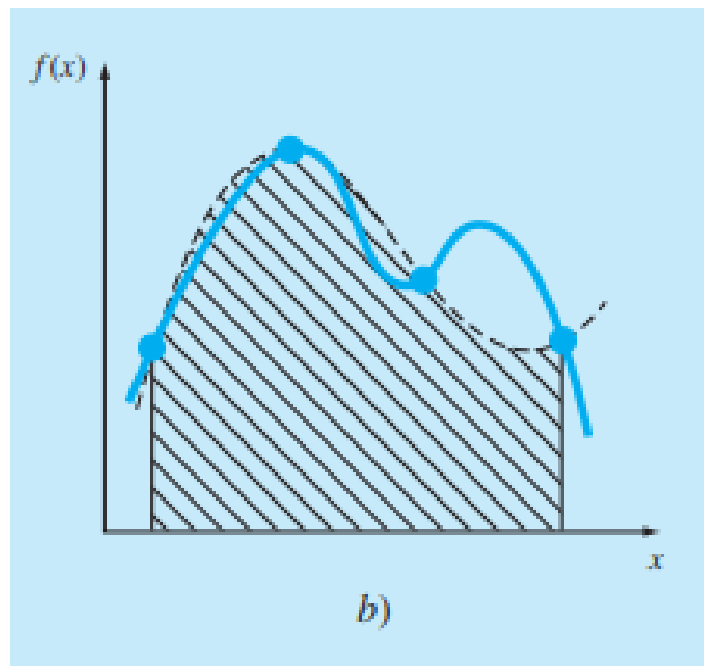


Figura 4.1: Descripción Gráfica del Método de Simpson 3/8)

Para aproximar la integral definida $\int_a^b f(x) dx$ mediante el método de Simpson 3/8, se sustituye la función $f(x)$ por un polinomio de tercer grado, ya que, como se observa en la gráfica correspondiente, este método utiliza cuatro puntos ajustados a un polinomio cúbico.

De aquí:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_3(x) dx$$

Considerando los puntos:

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, x_3 = x_0 + 3h$$

Haciendo $a = x_0, b = x_3$ y aplicando interpolación de Lagrange para el polinomio cúbico $f_3(x)$, se tiene que:

$$I = \int_{x_0}^{x_3} \left[\frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} f(x_1) \right. \\ \left. + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} f(x_2) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} f(x_3) \right] dx$$

El resultado de esta integral es:

$$I \approx \frac{3\Delta x}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)], \text{ siendo } \Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Esta es la tercera fórmula de integración cerrada de Newton-Cotes. Al igual que el método de Simpson 1/3, esta también puede deducirse usando el polinomio de Newton-Gregory.

Para llegar a la forma extendida, se requiere que el número de subintervalos n sea múltiplo de 3, es decir, $n = 3m$, lo que implica que hay m grupos de cuatro puntos.

Denotando los nodos:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

Para cada grupo $(x_{3j}, x_{3j+1}, x_{3j+2}, x_{3j+3})$, se tiene que:

$$\int_{x_{3j}}^{x_{3j+3}} f(x) dx \approx \frac{3\Delta x}{8} [f_{3j} + 3f_{3j+1} + 3f_{3j+2} + f_{3j+3}]$$

Sumando sobre $j = 0, \dots, m - 1$, obtenemos:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3\Delta x}{8} \sum_{j=0}^{m-1} [f_{3j} + 3f_{3j+1} + 3f_{3j+2} + f_{3j+3}]$$

Agrupando términos, se obtiene la fórmula compuesta del método de Simpson 3/8:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3\Delta x}{8} \left[f(x_0) + 3 \sum_{\substack{i=1 \\ i \bmod 3 \neq 0}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=3 \\ i \bmod 3 = 0}}^{n-3} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Donde:

- $f(x_0)$ y $f(x_n)$ aparecen una sola vez.
- Los nodos que no son múltiplos de 3 (interiores) aparecen con peso 3.
- Los nodos interiores múltiplos de 3 (excepto extremos) aparecen con peso 2.

4.3. Error de Truncamiento

El error de truncamiento para el método de Simpson 3/8 viene dado por la fórmula

$$E_t = -\frac{3(b-a)^6}{80n^5} f^{(4)}(\xi)$$

En donde $f^{(4)}(\xi)$ es el valor máximo obtenido en el intervalo $[a, b]$, para $\xi \in [a, b]$

Como explican Chapra & Canale (2011), aunque la regla de Simpson 3/8 requiere más nodos por aplicación que la 1/3, proporciona una alternativa más precisa en casos donde se dispone de un número de subintervalos múltiplo de 3, y su fórmula de error demuestra que alcanza exactitud para funciones cúbicas a pesar de integrar un polinomio de tercer grado.

4.4. Ventajas

- Proporciona mayor precisión que el método del trapecio o incluso que Simpson 1/3 en funciones que requieren un mejor ajuste cúbico.
- Es apropiado para integrales complejas, especialmente aquellas con variaciones suaves y continuas, donde un polinomio de tercer grado se ajusta mejor.
- Permite usarlo cuando el número de subintervalos es múltiplo de 3, lo que ofrece mayor flexibilidad en ciertos problemas prácticos.
- Tiene aplicaciones reales en áreas científicas, como:
 - Análisis térmico

- Cálculo de carga eléctrica
 - Modelos de propagación en epidemiología
 - Ingeniería y dinámica de fluidos
- Su implementación computacional es sencilla y se adapta bien a rutinas de integración numérica automatizadas.

4.5. Desventajas

- Requiere que el número de subintervalos sea múltiplo de 3, lo que limita su uso en dominios arbitrarios.
- Puede ser menos eficiente que Simpson 1/3 compuesto cuando se desea cubrir un número mayor de subintervalos sin restricción.
- El error depende de la cuarta derivada de la función, por lo que si esta es muy variable o difícil de estimar, puede generar imprecisiones.
- Si se aplica sobre funciones con cambios bruscos o discontinuidades, pierde precisión respecto a métodos adaptativos.
- Aunque se basa en un polinomio cúbico, no siempre mejora significativamente el resultado comparado con métodos más simples, pero más segmentados.

4.6. Ejemplos Resueltos

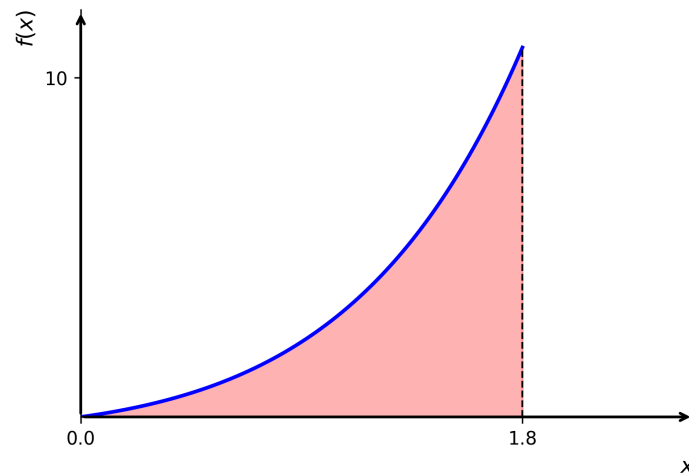
Ejemplo 1

Considere la siguiente integral definida:

$$\int_0^{1.8} x e^x dx$$

1. Resuelva la integral de forma **analítica**, utilizando la técnica de integración apropiada.
2. Aproxime el valor de la integral utilizando el **método de simpson 3/8** para $n = 3$ y $n = 6$ subintervalos.
3. Calcule el **error** del método de simpson $\frac{3}{8}$ utilizando la formula sugerida.
4. Utilice un **redondeo** de 4 decimales.
5. Analice el resultado: ¿el error fue alto o bajo? ¿Qué ocurre cuando se aumentó el número de subintervalos?

Solución Analítica

Figura 4.2: Área bajo la curva de $f(x) = xe^x$

$$\int_0^{1.8} xe^x dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow \int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\int_0^{1.8} xe^x dx = [xe^x]_0^{1.8} - \int_0^{1.8} e^x dx = xe^x - e^x$$

$$\int_0^{1.8} xe^x dx = [xe^x]_0^{1.8} - \int_0^{1.8} e^x dx = xe^x - e^x$$

$$\int_0^{1.8} xe^x dx = [xe^x - e^x]_0^{1.8}$$

$$\int_0^{1.8} xe^x dx = [(1.8)e^{1.8} - e^{1.8}] - [(0)e^0 - e^0] = 4.8397 - (-1)$$

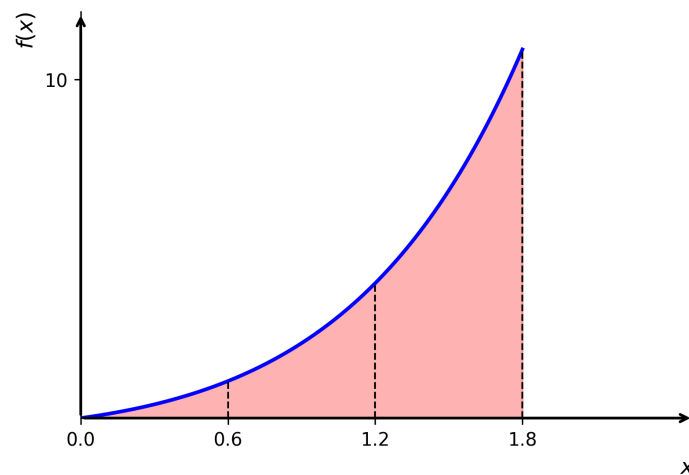
$$\int_0^{1.8} xe^x dx = 5.8397$$

Solución Numérica para $n = 3$ **Paso 1: Datos del problema**

- Función: $f(x) = xe^x$
- Límite inferior: $a = 0$
- Límite superior: $b = 1.8$
- Número de subintervalos: $n = 3$
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{1.8 - 0}{3} = 0.6$$

Figura 4.3: Área bajo la curva de $f(x) = xe^x$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	0.0000
1	0.6	1.0933
2	1.2	3.9841
3	1.8	10.8894

Cuadro 4.1: $f(x) = xe^x$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3\Delta x}{8} \left[f(x_0) + 3 \sum_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1,2(3)}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=3 \\ i \equiv 0(3)}}^{n-3} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$\int_0^{1.8} xe^x dx \approx \frac{3(0.60)}{8} \left[0.0000 + 3(1.0933 + 3.9841) + 10.8894 \right]$$

$$\int_0^{1.8} xe^x dx \approx 5.8774$$

Solución Numérica para $n = 6$

Paso 1: Datos del problema

- Función: $f(x) = xe^x$
- Límite inferior: $a = 0$
- Límite superior: $b = 1.8$
- Número de subintervalos: $n = 6$
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1.8-0}{6} = 0.3$$

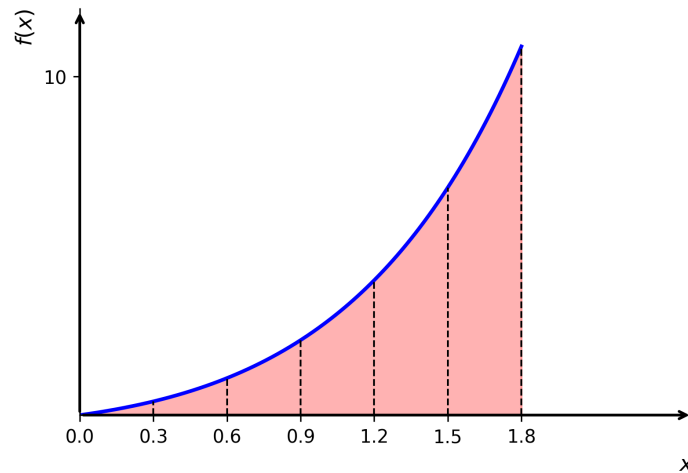


Figura 4.4: Área bajo la curva de $f(x) = xe^x$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	0.0000
1	0.3	0.4050
2	0.6	1.0933
3	0.9	2.2136
4	1.2	3.9841
5	1.5	6.7225
3	1.8	10.8894

Cuadro 4.2: $f(x) = xe^x$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3\Delta x}{8} \left[f(x_0) + 3 \sum_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1,2 \pmod{3}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=3 \\ i \equiv 0 \pmod{3}}}^{n-3} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$\int_0^{1.8} xe^x dx \approx \frac{3(0.30)}{8} \left[0.0000 + 3(0.4050 + 1.0933 + 3.9841 + 6.7225) + 2(2.2136) + 10.8894 \right]$$

$$\int_0^{1.8} xe^x dx \approx 5.8423$$

Ejemplo 2

Estimación de una integral no elemental

Aproximar el valor de la siguiente integral dada mediante la **Regla de Simpson 3/8** con 6 subintervalos, redondeando los resultados a 4 decimales.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx$$

Paso 1: Información del problema

- Función: $f(x) = \frac{\cos x}{x}$
- Límite inferior: $a = \frac{\pi}{4}$
- Límite superior: $b = \pi$

- Número de subintervalos: $n = 6$
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{6} = \frac{\pi}{8}$$

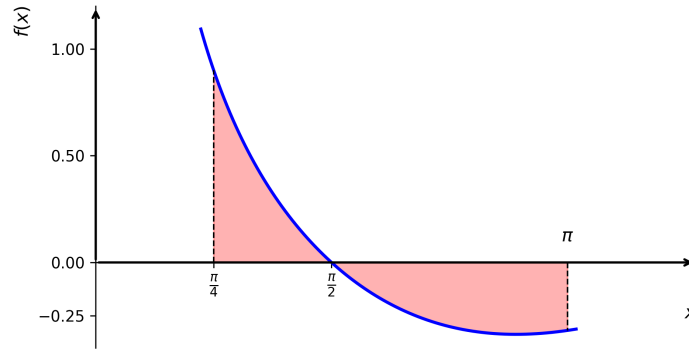


Figura 4.5: Área bajo la curva de $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

i	x_i	$f(x_i)$
0	$\frac{\pi}{4}$	0.9003
1	$\frac{3\pi}{8}$	0.3248
2	$\frac{1\pi}{2}$	0.0000
3	$\frac{5\pi}{8}$	-0.1949
4	$\frac{3\pi}{4}$	-0.3001
5	$\frac{7\pi}{8}$	-0.3361
6	π	-0.3183

Cuadro 4.3: $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3\Delta x}{8} \left[f(x_0) + 3 \sum_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1,2 \pmod{3}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=3 \\ i \equiv 0 \pmod{3}}}^{n-3} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx \approx \frac{3(\frac{\pi}{8})}{8} \left[0.9003 + 3(0.3248 + 0.0000 + (-0.3001) \right. \\ \left. + (-0.3361)) + 2((-0.1949)) + (-0.3183) \right]$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx \approx -0.1093$$

Ejemplo 3

Estimación de Activación y Control de Sobreajuste en Redes Neuronales Artificiales

Contextualización del problema

En el diseño de redes neuronales artificiales, las capas ocultas juegan un papel fundamental en la capacidad del modelo para aprender patrones complejos a partir de los datos. Cada neurona en estas capas recibe entradas ponderadas y aplica funciones de activación que determinan su nivel de respuesta frente a los estímulos. Durante el entrenamiento, es esencial monitorear cómo se comportan estas activaciones para evaluar si el modelo está generalizando correctamente o si, por el contrario, está aprendiendo de forma excesiva los datos de entrenamiento (sobreajuste).

Una forma de analizar el comportamiento colectivo de una capa oculta consiste en estudiar la **activación acumulada** de sus neuronas a lo largo de un intervalo de tiempo o durante una serie de estímulos. Esta métrica proporciona una estimación de la carga funcional de la capa, permitiendo diagnosticar posibles casos de activación excesiva.

Al estimar esta activación acumulada mediante métodos de integración numérica, es posible tomar decisiones fundamentadas sobre estrategias de regularización, como el uso del **DropOut**, que consiste en desactivar aleatoriamente un porcentaje de neuronas durante el entrenamiento para mejorar la generalización del modelo.

Descripción y modelamiento del problema

En una red neuronal artificial entrenada para reconocer señales biomédicas, se monitorea la respuesta (activación) de la capa oculta durante un intervalo de tiempo en el que recibe el conjunto de datos.

Para evaluar su comportamiento global durante una ventana de tiempo, es necesario calcular la **activación acumulada**, es decir, el área bajo la curva de activación. La función $A(t)$ describe la intensidad con la que las neuronas de la capa oculta se activan frente a los estímulos recibidos.

$$A(t) = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{1}{1 + e^{-0.5t}} \cos\left(\frac{t}{6}\right) \right) dt$$

donde:

- $A(t)$ representa la activación instantánea de la neurona (sin unidad),
- t es el tiempo en segundos, dentro del intervalo de análisis.

Al estimar esta activación acumulada mediante métodos de integración numérica, es posible tomar decisiones fundamentadas sobre estrategias de regularización, como el

uso del **DropOut**, que consiste en desactivar aleatoriamente un porcentaje de neuronas durante el entrenamiento para mejorar la generalización del modelo.

Una vez calculada la activación acumulada A de la capa oculta, se puede determinar si es necesario aplicar **DropOut** para evitar el sobreajuste (overfitting), y en qué proporción. Para ello, se define la siguiente función de decisión:

$$D(A) = \begin{cases} 0 \% & \text{si } A < 2 \quad (\text{no se requiere DropOut}) \\ 20 \% & \text{si } 2 \leq A < 3.5 \\ 30 \% & \text{si } 3.5 \leq A < 5 \\ 40 \% & \text{si } A \geq 5 \end{cases}$$

Pregunta problema

¿Cuál es la activación acumulada aproximada del conjunto de neuronas que conforman la capa oculta de la red neuronal artificial entre los segundos $t = 0$ y $t = 8$?. Basado en la función de decisión determine si es necesario utilizar la técnica de regularización DropOut en que porcentaje.

Paso 1: Información del problema

- Función: $A(t) = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{1}{1+e^{-0.5t}} \cos\left(\frac{t}{6}\right) \right) dt$
- Límite inferior: $a = 0$
- Límite superior: $b = 9$
- Número de subintervalos: $n = 6$
- Número de decimales: 4

Solución numérica

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta t = \frac{b - a}{n} = \frac{9 - 0}{6} = 1.50$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0.00	0.5000
1	1.50	0.6581
2	3.00	0.7175
3	4.50	0.6619
4	6.00	0.5147
5	7.50	0.3081
6	9.00	0.0700

Cuadro 4.4: $f(t) = \frac{1}{1+e^{-0.5t}} \cos\left(\frac{t}{6}\right)$

$$\int_a^b f(t) dt \approx \frac{3\Delta t}{8} \left[f(t_0) + 3 \sum_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1,2 \pmod{3}}}^{n-1} f(t_i) + 2 \sum_{\substack{i=3 \\ i \equiv 0 \pmod{3}}}^{n-3} f(t_i) + f(t_n) \right]$$

$$A(t) = \int_0^9 \left(\frac{1}{1+e^{-0.5t}} \cos\left(\frac{t}{6}\right) \right) dt \approx \frac{3(1.50)}{8} \left[0.500 + 3(0.6581 + 0.7175 + 0.5147 + 0.3081) + 2(0.6619) + 0.0700 \right]$$

$$A(t) = \int_0^9 \left(\frac{1}{1+e^{-0.5t}} \cos\left(\frac{t}{6}\right) \right) dt \approx 4.7751$$

Análisis y Conclusiones de los Resultados

- Se calculó la activación acumulada de las neuronas de la capa oculta mediante el método de Simpson 3/8 para seis (6) subintervalos, obteniendo un valor de 4.7751.
- Según este valor de activación acumulada y basado en la función de decisión $D(A)$, se debe aplicar la técnica DropOut con un apagado del 30% de la cantidad de neuronas que conforman la capa oculta del modelo neuronal para evitar el sobreajuste del aprendizaje.

Ejemplo 4

Estimación de costos de fabricación de un brazo robótico

Contextualización del problema

En el desarrollo de sistemas robóticos industriales, el diseño de componentes mecánicos no solo debe satisfacer criterios funcionales como resistencia y movilidad, sino también optimizar aspectos relacionados con el uso de materiales, el peso y la estética, buscando una fabricación de prototipos eficientes tanto en volumen como en costos.

Para mejorar el rendimiento del brazo robótico y reducir su peso sin comprometer su rigidez estructural, los ingenieros han decidido fabricar una articulación a partir del giro de una curva suave alrededor del eje x , generando un sólido de revolución con un perfil ergonómico y aerodinámico.

Descripción y modelamiento del problema

Durante la etapa de evaluación de alternativas de diseño para un brazo robótico industrial, los estudiantes de la asignatura Modelamiento y Simulación de la Universidad Popular del Cesar, sede Aguachica proponen dos perfiles diferentes, obtenidos mediante la rotación de curvas alrededor del eje x . Esta operación genera sólidos de revolución cuya forma define el volumen total del material necesario para su fabricación.

Los perfiles a rotar y sus opciones de fabricación están dados por:

■ Diseño A:

- Curva: $f_A(x) = 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) e^{-0.15x}$
- Material: PLA reciclado
- Costo del material y fabricación: \$25.000 COP/m³

■ Diseño B:

- Curva: $f_B(x) = \ln(x^2 + 1) \cdot e^{-0.2x}$
- Material: Aluminio anodizado
- Costo del material y fabricación: \$103.000 COP/m³

La forma del brazo se genera al rotar cada curva alrededor del eje x , lo que permite calcular el volumen mediante:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Pregunta problema

- ¿Cuál es el volumen aproximado del segmento del brazo robótico para cada diseño, si se considera una longitud de 4 m?
- ¿Cuál opción representa un menor costo total basado en el precio del material y el proceso de fabricación?
- ¿Cuál es el costo de fabricación de 5 unidades con el diseño elegido ?

Requisitos o condiciones del problema

- Resolver cada integral mediante el **método de Simpson 3/8** para 6 subintervalos redondeando los resultados a **4 cifras decimales**.
- Adicionar un **5 % de volumen extra** por pérdidas de material.

Solución Numérica

Diseño A

Paso 1: Información del problema

- Función: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$
- Límite inferior: $a = 0$
- Límite superior: $b = 4$
- Número de subintervalos: $n = 6$
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta t = \frac{b - a}{n} = \frac{4 - 0}{6} = 0.6667$$

$$V_A = \pi \int_0^4 \left[\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) e^{-0.15x} \right]^2 dx$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0.0000	28.2743
1	0.6667	24.3423
2	1.3334	18.2365
3	2.0001	12.5656
4	2.6668	8.7070
5	3.3335	6.8322
6	4.0000	6.6160

Cuadro 4.5: $f_A(x) = \pi \left[2 + \cos \left(\frac{\pi x}{4} \right) e^{-0.15x} \right]^2$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3\Delta x}{8} \left[f(x_0) + 3 \sum_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1,2 \pmod{3}}}^{n-1} f(t_i) + 2 \sum_{\substack{i=3 \\ i \equiv 0 \pmod{3}}}^{n-3} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$V_A = \pi \int_0^4 \left[\cos \left(\frac{\pi x}{4} \right) e^{-0.15x} \right]^2 dx \approx \frac{3(0.6667)}{8} \left[28.2743 + 3(24.3423 + 18.2365 + 8.7070 + 6.8322) + 2(12.5656) + 6.6160 \right]$$

$$V_A = 58.5968 \text{ } m^3$$

Adicionando un 5 % según las condiciones del problema:

$$V_A = 58.5968(1 + 0.05) = 61.5266 \text{ } m^3$$

El costo de fabricación por unidad es:

$$C_A = (61.5266 \text{ } m^3)(25000 \text{ } COP/m^3) = 1.538.166 \text{ } COP$$

Diseño B

Paso 1: Información del problema

- Función: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$
- Límite inferior: $a = 0$
- Límite superior: $b = 4$

- Número de subintervalos: $n = 6$
- Número de decimales: 4

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta t = \frac{b - a}{n} = \frac{4 - 0}{6} = 0.6667$$

$$V_B = \pi \int_0^4 \left[\ln(x^2 + 1) \cdot e^{-0.2x} \right]^2 dx$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0.0000	0.0000
1	0.6667	0.3254
2	1.3334	1.9239
3	2.0001	3.6567
4	2.6668	4.7375
5	3.3335	5.1514
6	4.0000	5.0914

Cuadro 4.6: $f_B(x) = \pi \left[\ln(x^2 + 1) \cdot e^{-0.2x} \right]^2$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3\Delta x}{8} \left[f(x_0) + 3 \sum_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1,2 \pmod{3}}}^{n-1} f(t_i) + 2 \sum_{\substack{i=3 \\ i \equiv 0 \pmod{3}}}^{n-3} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$V_B = \pi \int_0^4 \left[\ln(x^2 + 1) \cdot e^{-0.2x} \right]^2 dx \approx \frac{3(0.6667)}{8} \left[0.00 + 3(0.3254 + 1.9239 + 4.7375 + 5.1514) + 2(3.6567) + 5.0914 \right]$$

$$V_B = 12.2055 \text{ } mt^3$$

Adicionando un 5 % según las condiciones del problema:

$$V_B = 12.2055(1 + 0.05) = 12.8158 \text{ } mt^3$$

El costo de fabricación por unidad es:

$$C_B = (12.8158 \text{ m}^3)(103000 \text{ COP/m}^3) = 1.320.027 \text{ COP}$$

Análisis y Conclusiones de los Resultados

- Se calculó el volumen de manera independiente para cada diseño mediante el método de Simpson 3/8 para seis (6) subintervalos, y a estos resultados se les adicionó el 5 % extra sugerido por perdidas de material en el proceso de fabricación.
- Para el diseño A se obtuvo un costo de 1.538.166 COP y para el diseño B de 1.320.027 COP, por lo cual se decide fabricar el brazo robótico con el material aluminio anodizado.
- El costo de fabricación de 5 unidades del diseño B es de 6.600.135 COP.

4.7. Ejemplos Propuestos

Ejemplo 1

Considere la siguiente integral definida:

$$\int_0^{3.6} e^x \sin x \, dx$$

1. Resuelva la integral de forma **analítica**, utilizando la técnica de integración apropiada.
2. Aproxime el valor de la integral utilizando el **método de simpson 3/8** para $n = 3$ y $n = 6$ subintervalos.
3. Calcule el **error** del método de simpson $\frac{3}{8}$ utilizando la formula sugerida.
4. Utilice un **redondeo** de 4 decimales.
5. Analice el resultado: ¿el error fue alto o bajo? ¿Qué ocurre cuando se aumentó el número de subintervalos?

Ejemplo 2

Estimación de una integral no elemental

Aproximar el valor de la siguiente integral dada mediante la **Regla de Simpson 3/8** con 6 subintervalos, redondeando los resultados a 4 decimales.

$$\int_0^{\ln 2} \sin(\ln x) \, dx$$

Ejemplo 3

El Semillero de Investigación en Aprendizaje Automático y Modelos Predictivos (SIAMP) de la Universidad Provincial del Oriente (UPO) está realizando un ejercicio de simulación para evaluar el rendimiento acumulado de un modelo de clasificación basado en redes neuronales, el cual se ha desarrollado como parte de una plataforma de apoyo al diagnóstico médico.

El rendimiento del modelo, medido como precisión (*accuracy*), varía en función del umbral de decisión aplicado a la probabilidad de clasificación positiva. Con el fin de analizar el comportamiento acumulado de la precisión a lo largo de distintos umbrales, el grupo ha recolectado datos simulados que representan la precisión obtenida para umbrales comprendidos entre 0.1 y 0.7.

La precisión total acumulada se modela mediante la siguiente integral:

$$P_{\text{total}} = \int_{t_0}^{t_f} \text{Acc}(t) dt$$

Donde:

- P_{total} = Precisión acumulada (unidades arbitrarias).
- $\text{Acc}(t)$ = Precisión del modelo en función del umbral t .
- t = Umbral de decisión (escala de 0 a 1).

Los datos contenidos en la siguiente tabla no provienen de un sistema en producción, sino de un ejercicio experimental que busca aproximar, de manera razonable, el comportamiento esperado del modelo para diferentes configuraciones de umbral.

Umbral t	Precisión $\text{Acc}(t)$
0.1	0.80
0.2	0.85
0.3	0.88
0.4	0.91
0.5	0.90
0.6	0.87
0.7	0.83

Cuadro 4.7: Simulación del comportamiento de la precisión en función del umbral.

1. Analice el problema presentado y proponga un título técnico adecuado que refleje claramente su contexto, propósito y el área de conocimiento al que pertenece.
2. Desarrolle la solución de este problema siguiendo la estructura:
 - Contextualización del problema.

- Descripción y modelamiento del problema.
 - Pregunta problema.
3. Estime mediante la regla de Simpson 3/8 la precisión acumulada del modelo durante el intervalo de umbrales evaluado.
4. Explique brevemente:
- ¿Qué es un umbral de decisión en un modelo de clasificación basado en redes neuronales?
 - ¿Por qué es importante analizar el rendimiento del modelo en función de diferentes umbrales y no limitarse a uno solo?
 - ¿La precisión (*accuracy*) es la única métrica adecuada para evaluar modelos de clasificación? Justifique su respuesta y mencione otras métricas que considere relevantes.

Ejemplo 4

El sector financiero ha convocado a dos empresas especializadas en inteligencia artificial para demostrar la capacidad de sus modelos de clasificación en la detección temprana de fraudes bancarios. Ambas buscan ganar un contrato estratégico para implementar su solución a nivel nacional. La institución financiera otorgará el contrato a la empresa que logre demostrar, con evidencia matemática y técnica, la mayor capacidad de detección sostenida (Recall acumulado) a lo largo del tiempo.

- **Empresa A:** Se ha enfocado en el desarrollo de modelos de Deep Learning basados en funciones de activación **ReLU** en sus capas ocultas, priorizando la eficiencia y la rapidez de entrenamiento. Esta empresa presenta sus resultados de clasificación directamente a través de cifras tabuladas que muestran el total de **TP**, **FN**, **FP** y **TN** en cada fase de prueba.
- **Empresa B:** Su enfoque ha sido el uso de Deep Learning con funciones de activación **tanh** en sus capas ocultas, buscando mejorar la capacidad del modelo para manejar patrones no lineales y distribuciones complejas. Como evidencia, entrega las matrices de confusión acumuladas a lo largo de las fases, mostrando visualmente el rendimiento de su sistema en la detección de fraudes.

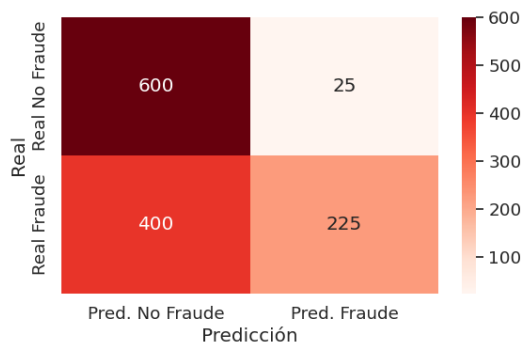
Resumen de Información Entregada

- **Empresa A:** Proporciona los siguientes datos numéricos por intervalos acumulados (en miles).

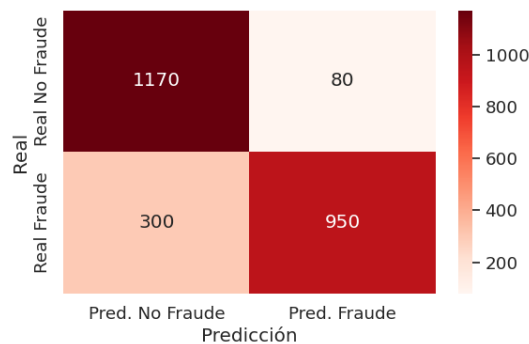
Datos (x1000)	TP	FN	FP	TN
0	0	0	0	0
0.5	150	50	50	250
1.0	300	100	100	500
1.5	450	150	150	750
2.5	750	250	250	1250
3.5	1050	350	350	1750
4.5	1350	450	450	2250
5.5	1650	550	550	2750
6.5	1950	650	650	3250
7.5	3450	300	150	3600

Cuadro 4.8: Evidencia presentada por la Empresa A sobre el rendimiento acumulado de su modelo en la detección de fraudes bancarios, mediante la tabulación de TP, FN, FP y TN por intervalos de datos.

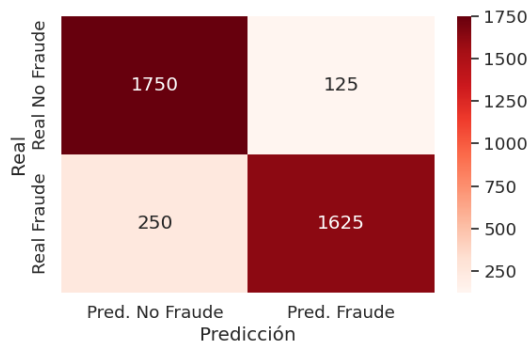
- **Empresa B:** Presenta sus resultados a través de imágenes de matrices de confusión acumuladas.



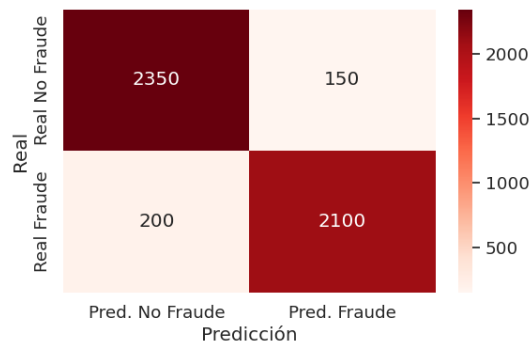
(a) conjunto de 1250 datos.



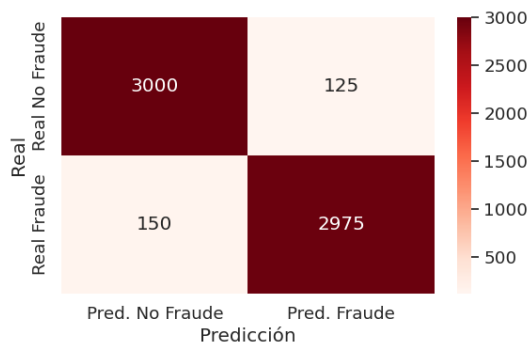
(b) conjunto de 2500 datos.



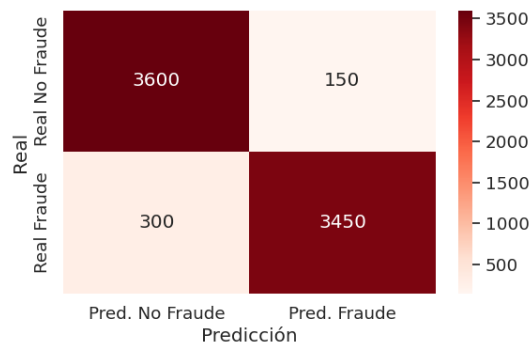
(c) conjunto de 3750 datos.



(d) conjunto de 5000 datos.



(e) conjunto de 6250 datos.



(f) conjunto de 7500 datos.

Figura 4.6: Evolución de la Matriz de Confusión por Conjunto de Datos (Empresa B)

[Descargar las imágenes ampliadas de las matrices de confusión del Ejercicio Propuesto 4 \(Empresa B\)](#)

Solicitudes

En este ejercicio académico, dos grupos de estudiantes representan a las empresas en competencia. Como parte del compromiso por fomentar la participación femenina en las áreas STEM, cada equipo es liderado por una estudiante del curso. Esta dinámica busca fortalecer las habilidades de liderazgo, trabajo colaborativo, argumentación técnica y comunicación científica entre los participantes.

El Departamento de Seguridad Informática de la institución financiera solicita un informe técnico que permita fundamentar la mejor elección a partir de un análisis cuantitativo y cualitativo. Para esto, cada equipo representa a una empresa distinta, defendiendo su propuesta tecnológica con base en los resultados entregados.

- **Empresa A:** Presentará su análisis de los datos entregados (TP, FN, FP, TN) a partir del modelo basado en **ReLU**.
- **Empresa B:** Presentará su análisis de las matrices de confusión acumuladas del modelo basado en **tanh**.

Cada empresa desarrollará de forma independiente las siguientes actividades:

1. Analizar el problema y proponer un título técnico adecuado que refleje su contexto y su relación con la evaluación de sistemas de detección de fraudes bancarios mediante Deep Learning.
2. Desarrollar la solución del problema siguiendo esta estructura:
 - Contextualización del problema.
 - Descripción y modelamiento matemático que justifique el uso del método asignado (cálculo de Recall acumulado e **integración numérica**).
 - Formulación de una pregunta problema clara y técnica.
3. Aplicar correctamente la **Regla de Simpson 3/8** para estimar el **Recall acumulado (%)** por cada una de las propuestas, de acuerdo con la información suministrada.
4. Explicar de forma clara y precisa los conceptos fundamentales relacionados con los modelos de clasificación en inteligencia artificial:
 - Significado de **TP (True Positives)**, **FP (False Positives)**, **TN (True Negatives)** y **FN (False Negatives)**, y su representación en la matriz de confusión.
 - Definición, propósito y relevancia del **Recall** como métrica de evaluación.
 - Estructura de una red neuronal completamente conectada (fully connected) y la función de cada una de sus capas: entrada, ocultas y salida.
 - Función de activación: qué es y cuál es su propósito en el aprendizaje de redes neuronales.
5. Explicar brevemente las características técnicas de la solución asignada:

- **Empresa A:** Describir las características, ventajas y limitaciones del uso de redes neuronales y función de activación ReLU en modelos de clasificación para problemas de detección de fraude.
 - **Empresa B:** Describir las características, ventajas y limitaciones del uso de redes neuronales y función de activación tanh en modelos de clasificación para problemas de detección de fraude.
6. Reflexionar y responder: ¿Cómo contribuyen las soluciones de clasificación basadas en Deep Learning a la mejora de la detección de fraudes financieros y a la protección de los sistemas bancarios? Fundamente su respuesta considerando impactos técnicos, económicos y sociales.

Entrega Final

Cada equipo deberá entregar un informe académico final, redactado de manera profesional bajo normas APA. El informe debe incluir:

- Desarrollo completo de cada actividad asignada.
- Análisis individual y detallado de los resultados obtenidos por cada empresa.
- Presentar una defensa técnica y argumentada que sustente la superioridad de su modelo de clasificación, destacando sus ventajas y aportes frente a la propuesta rival.
- Inclusión de gráficas, tablas y representaciones visuales que respalden los análisis y resultados presentados.
- Elaboración de una presentación de diapositivas (slides) para la sustentación oral del proyecto, que sintetice de forma clara y profesional el proceso, los resultados y la conclusión final.
- Referencias bibliográficas actualizadas y pertinentes que respalden las decisiones tomadas y los conceptos explicados.

Capítulo 5

Método de Romberg

5.1. Fundamentos Teóricos

La integración de Romberg es una de las técnicas más eficaces para aproximar integrales definidas ya que combina la regla del trapecio con la extrapolación de Richardson haciendo que la convergencia sea más rápida.

La idea fundamental consiste en aplicar el método del trapecio con distintos tamaños de paso Δx , y luego combinar esos resultados usando fórmulas que eliminan progresivamente los términos de error, generando así mejores aproximaciones de la integral.

5.1.1. Extrapolación de Richardson

Como se sabe, el error en la regla del trapecio es directamente proporcional a h^2 y viene dada por la expresión:

$$E(h) = -\frac{b-a}{12} \cdot h^2 f''(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

Lo que indica que al usar pesos cada vez más pequeños $(h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \frac{h}{8})$, se obtienen aproximaciones con errores cada vez menores. Pero en vez de seguir reduciendo estos pasos, la integración de Romberg utiliza la extrapolación de Richardson para eliminar el término dominante del error. Dicha fórmula viene dada por la expresión:

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^j - 1}$$

5.2. Representación Gráfica y Fórmulas

Para cada aproximación de la regla del trapecio compuesta con paso h , se tiene que:

$$R_{k,0} = I + Ch_k^2 + Dh_k^4 + O(h_k^6)$$

donde:

- I es el valor de la integral exacta.
- C y D son constantes desconocidas.
- $h_k = \frac{b-a}{2^k}$

de aquí que para:

- $k = 0 \rightarrow h_0 = b - a$
- $k = 1 \rightarrow h_1 = \frac{b-a}{2}$
- $k = 2 \rightarrow h_2 = \frac{b-a}{4}$
- $k = 3 \rightarrow h_3 = \frac{b-a}{8}$

Sí lo que se quiere es cancelar el término Ch_k^2 , tomamos para ellos dos aproximaciones:

$$A = R_{k,0} = I + Ch_k^2 + Dh_k^4 + \dots$$

$$B = R_{k-1,0} = I + C(2h_k)^2 + D(2h_k)^4 + \dots$$

Como se observa $(2h_k)^2 = 4h_k^2$ Entonces:

$$B = I + 4Ch_k^2 + 16Dh_k^4 + \dots$$

Buscamos la combinación lineal de la forma:

$$R = \alpha A - \beta B$$

Se quiere que:

$$R = I + (\text{términos de orden superior})$$

es decir:

$$\alpha Ch_k^2 - \beta(4Ch_k^2) = 0$$

Lo que da la relación:

$$\alpha - 4\beta = 0 \rightarrow \alpha = 4\beta$$

Ponderando de forma que el coeficiente de I sea $\alpha - \beta = 3$, dividimos entre 3 y obtenemos:

$$R = \frac{4A - B}{3} \quad (\text{Primer nivel de extrapolación ó } R_{k,j})$$

En general, para cualquier nivel j , tenemos que

$$R_{k,j-1} = I + C_j h_k^{2^j}$$

Sí duplicamos el paso $h_k \rightarrow 2h_k$, el error se duplica, es decir 2^{2^j} , obteniendo:

$$R_{k-1,j-1} = I + C_j (2h_k)^{2^j} + \dots$$

Resolviendo, se obtiene:

$$R_{k-1,j-1} = I + C_j 2^{2^j} h_k^{2^j} + \dots$$

Para el término $C_j h_k^{2^j}$, combinamos para obtener:

$$R_{k,j} = \frac{2^{2^j} R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{2^{2^j} - 1}$$

Como $2^{2^j} = 4^j$, nos queda:

$$R_{k,j} = \frac{4^j R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^j - 1}$$

o bien

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^j - 1}$$

Interpretación paso a paso del Método de Romberg

Primera columna ($j = 1$)

Estas son las aproximaciones obtenidas aplicando la regla del trapecio compuesta con diferentes números de subintervalos:

$$\begin{aligned}
R_{1,1} &= \frac{h}{2} [f(a) + f(b)] \\
R_{2,1} &= \frac{1}{2} \left[R_{1,1} + h \cdot f \left(a + \frac{h}{2} \right) \right] \\
R_{3,1} &= \frac{1}{2} \left[R_{2,1} + \frac{h}{2} \cdot \left(f \left(a + \frac{h}{4} \right) + f \left(a + \frac{3h}{4} \right) \right) \right] \\
R_{4,1} &= \frac{1}{2} \left[R_{3,1} + \frac{h}{4} \cdot \left(f \left(a + \frac{h}{8} \right) + f \left(a + \frac{3h}{8} \right) + f \left(a + \frac{5h}{8} \right) + f \left(a + \frac{7h}{8} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

Segunda columna ($j = 2$)

Primera extrapolación de Richardson:

$$R_{k,2} = R_{k,1} + \frac{R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3}$$

$$R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{R_{2,1} - R_{1,1}}{3}$$

$$R_{3,2} = R_{3,1} + \frac{R_{3,1} - R_{2,1}}{3}$$

$$R_{4,2} = R_{4,1} + \frac{R_{4,1} - R_{3,1}}{3}$$

Tercera columna ($j = 3$)

Segunda extrapolación de Richardson:

$$R_{k,3} = R_{k,2} + \frac{R_{k,2} - R_{k-1,2}}{15}$$

$$R_{3,3} = R_{3,2} + \frac{R_{3,2} - R_{2,2}}{15}$$

$$R_{4,3} = R_{4,2} + \frac{R_{4,2} - R_{3,2}}{15}$$

Cuarta columna ($j = 4$)

Tercera extrapolación de Richardson:

$$R_{4,4} = R_{4,3} + \frac{R_{4,3} - R_{3,3}}{63}$$

Resumen en forma de tabla triangular

k	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
1	$R_{1,1}$			
2	$R_{2,1}$	$R_{2,2}$		
3	$R_{3,1}$	$R_{3,2}$	$R_{3,3}$	
4	$R_{4,1}$	$R_{4,2}$	$R_{4,3}$	$R_{4,4}$

5.3. Error de Truncamiento

Para calcular el error en la integración de Romberg no se conoce una fórmula cerrada simple que genere el error exacto, tal como sucede con la regla del trapecio o los métodos de Simpson, cuyas expresiones dependen de derivadas en un punto intermedio o del valor máximo de la derivada en el intervalo $[a, b]$.

Lo anterior se debe a que en la integración de Romberg ocurre:

- Cada paso de extrapolación cancela los términos dominantes del error (Burden, 2011).
- El error residual depende de derivadas de orden más alto y constantes que no se conocen explícitamente.

Lo que si se puede es estimar el error comparando dos niveles sucesivos de extrapolación. Así:

$$E_e \approx |R_{k,j} - R_{k-1,j-1}|$$

Fórmula que indica cuanto ha cambiado la aproximación al aumentar el refinamiento y la extrapolación.

5.4. Ventajas

- Permite obtener resultados de alta precisión en la integración numérica mediante la extrapolación sucesiva.
- El método reduce considerablemente el error en cada nivel, pasando de orden $O(h^2)$ a $O(h^4)$, $O(h^6)$, etc.
- Utiliza de forma eficiente las aproximaciones previas del método del trapecio, evitando cálculos repetitivos.
- Es adecuado para funciones continuas y suaves, y puede ser muy efectivo incluso con pocas subdivisiones.

5.5. Desventajas

- Requiere cálculos adicionales para cada nivel de extrapolación, lo que aumenta la complejidad respecto a métodos básicos.
- No es eficiente si la función presenta discontinuidades, cambios bruscos o irregularidades.
- Puede volverse inestable o inútil si no se respetan correctamente los refinamientos de los subintervalos.
- Si se aplica de forma innecesaria en problemas simples, puede implicar un gasto computacional mayor sin justificación.

5.6. Ejemplos Resueltos

Ejemplo 1

Considere la siguiente integral definida:

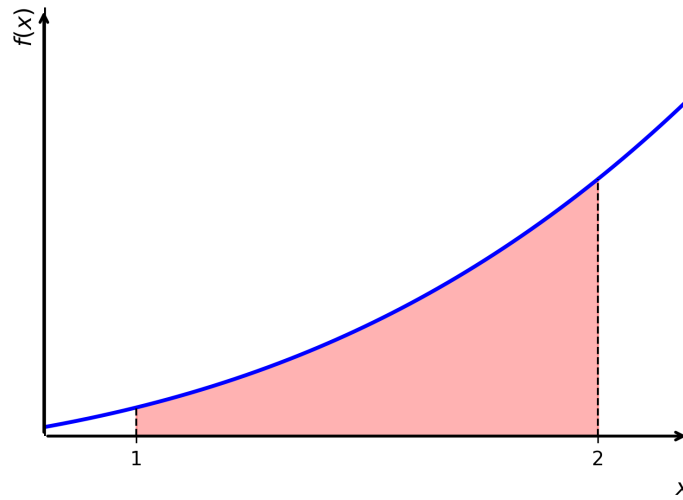
$$\int_1^2 (x^3 + x - 1) dx$$

1. Resuelva la integral de forma **analítica**.
2. Aproxime el valor de la integral utilizando el **método de Romberg** hasta un nivel de refinamiento 3, es decir, calcule el valor de $R_{4,4}$.
3. Estime el **error aproximado** entre niveles sucesivos, utilizando la fórmula:

$$E_e \approx |R_{k,j} - R_{k-1,j-1}|$$

Para esto, calcule:

- El error entre $R_{4,4}$ y su anterior $R_{3,3}$.
 - El error entre $R_{3,3}$ y su anterior $R_{2,2}$.
4. Utilice un **redondeo** de 4 decimales.
 5. Analice los resultados obtenidos: ¿El error entre niveles sucesivos fue alto o bajo? ¿Qué comportamiento observa al aumentar progresivamente el número de subintervalos? Explique su respuesta a partir de la teoría del método de Romberg, teniendo en cuenta el propósito de la extrapolación para mejorar la precisión de la aproximación.

Solución AnalíticaFigura 5.1: Área bajo la curva de $f(x) = x^3 + x - 1$

$$\int_1^2 (x^3 + x - 1) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^2$$

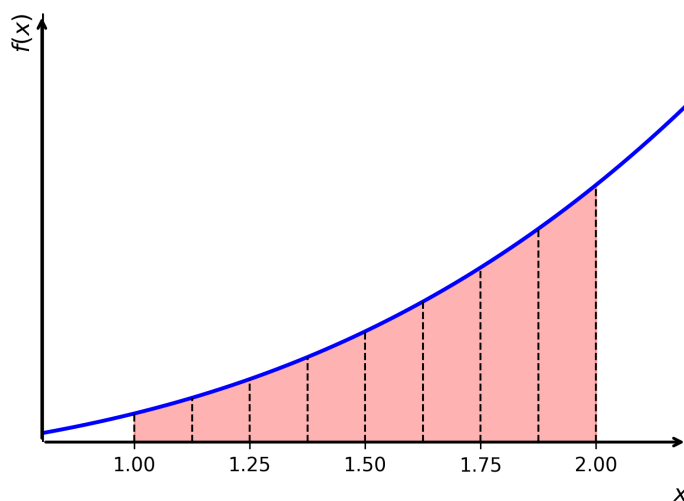
$$\int_1^2 (x^3 + x - 1) dx = \left[\frac{1}{4}(2)^4 + \frac{1}{2}(2)^2 - (2) \right] - \left[\frac{1}{4}(1)^3 + \frac{1}{2}(1)^2 - (1) \right] = 4 - \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\int_1^2 (x^3 + x - 1) dx = 4.25$$

Nivel de Refinamiento $n = 3$ **Paso 1: Información del problema**

- Función: $f(x) = x^3 + x - 1$
- Límite inferior: $a = 1$
- Límite superior: $b = 2$
- Número de decimales: 6

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

Figura 5.2: Área bajo la curva de $f(x) = x^3 + x - 1$

$$\Delta x = \frac{b-a}{8} = \frac{2-1}{8} = 0.1250$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	1.000000	1.000000
1	1.125000	1.548828
2	1.250000	2.203125
3	1.375000	2.974609
4	1.500000	3.875000
5	1.625000	4.916016
6	1.750000	6.109375
7	1.875000	7.466797
8	2.000000	9.000000

Cuadro 5.1: $f(x) = x^3 + x - 1$

$$h = b - a = 2 - 1 = 1$$

$$R_{1,1} = \frac{1}{2} \left[9.000000 + 1.000000 \right] = 5.000000$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2} \left[5.000000 + (1) \cdot 3.875000 \right] = 4.437500$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2} \left[4.437500 + \frac{1}{2} \cdot [2.203125 + 6.109375] \right] = 4.296875$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2} \left[4.296875 + \frac{1}{4} \cdot [1.548828 + 2.974609 + 4.916016 + 7.466797] \right] = 4.261719$$

$$R_{2,2} = 4.437500 + \frac{4.437500 - 5.000000}{3} = 4.250000$$

$$R_{3,2} = 4.296875 + \frac{4.296875 - 4.437500}{3} = 4.250000$$

$$R_{4,2} = 4.261719 + \frac{4.261719 - 4.296875}{3} = 4.250000$$

$$R_{3,3} = 4.2500 + \frac{4.2500 - 4.2500}{15} = 4.2500$$

$$R_{4,3} = 4.2500 + \frac{4.2500 - 4.2500}{15} = 4.2500$$

$$R_{4,4} = 4.2500 + \frac{4.2500 - 4.2500}{63} = 4.2500$$

Ejemplo 2

Estimación de una integral no elemental

Aproxime el valor de la siguiente integral utilizando el **método de Romberg** hasta obtener $R_{4,4}$. Redondee todos los resultados intermedios y finales a 6 decimales

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

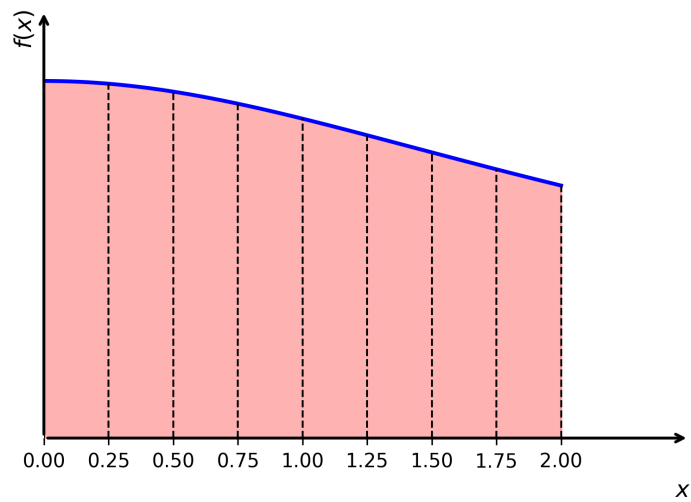


Figura 5.3: Área bajo la curva de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0.0000	0.5000
1	0.2500	0.4961
2	0.5000	0.4851
3	0.7500	0.4682
4	1.0000	0.4472
5	1.2500	0.4240
6	1.5000	0.4000
7	1.7500	0.3763
8	2.0000	0.3536

Cuadro 5.2: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

$$h = b - a = 2 - 0 = 2$$

$$R_{1,1} = \frac{2}{2} \left[0.5000 + 0.3536 \right] = 0.8536$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2} \left[0.8536 + (2) \cdot 0.4472 \right] = 0.8740$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2} \left[0.8740 + \frac{2}{2} \cdot [0.4851 + 0.4000] \right] = 0.8796$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2} \left[0.8796 + \frac{2}{4} \cdot [0.4961 + 0.4682 + 0.4240 + 0.3763] \right] = 0.8810$$

$$R_{2,2} = 0.8740 + \frac{0.8740 - 0.8536}{3} = 0.8808$$

$$R_{3,2} = 0.8796 + \frac{0.8796 - 0.8740}{3} = 0.8815$$

$$R_{4,2} = 0.8810 + \frac{0.8810 - 0.8796}{3} = 0.8815$$

$$R_{3,3} = 0.8815 + \frac{0.8815 - 0.8808}{15} = 0.8815$$

$$R_{4,3} = 0.8815 + \frac{0.8815 - 0.8815}{15} = 0.8815$$

$$R_{4,4} = 0.8815 + \frac{0.8815 - 0.8815}{15} = 0.8815$$

Ejemplo 3

Evaluación energética de un servidor y selección óptima de sistema de refrigeración

Contextualización del problema

Los centros de datos modernos albergan servidores de alto rendimiento que operan de forma continua procesando grandes volúmenes de información. Estos equipos, al realizar operaciones complejas y simultáneas, generan una cantidad considerable de energía térmica que debe ser gestionada eficazmente para evitar sobrecalentamientos, fallos del sistema y reducción de la vida útil de los componentes electrónicos.

Para garantizar la estabilidad del sistema y evitar interrupciones en los servicios, se hace necesario implementar un sistema de refrigeración capaz de disipar eficientemente el calor generado.

Descripción y modelamiento del problema

En el centro de datos de la Universidad Popular del Cesar, se están evaluando las condiciones térmicas del servidor principal que opera con tráfico intenso en ciertas horas del día. Para garantizar su correcto funcionamiento, se requiere conocer cuánta

energía se convierte en calor durante una jornada de 10 minutos de máxima carga, con el fin de determinar el sistema de refrigeración más adecuado.

El equipo de ingenieros encargados de esta tarea debe seleccionar entre dos opciones, teniendo en cuenta factores como la capacidad de extracción de calor, los costos y la temperatura ambiente.

Sistema A: Ventilación por aire forzada

- Capacidad máxima de extracción térmica: 86.000J cada 10 min
- Costo de instalación: 1.300.000 COP
- Mantenimiento semestral: 650.000 COP
- Desempeño disminuye un 20 % si la temperatura ambiente supera los 30°C

Sistema B: Refrigeración líquida

- Capacidad máxima de extracción térmica: 100.000J cada 10 min
- Costo de instalación: 3.850.000 COP
- Mantenimiento semestral: 1.000.000 COP
- Funciona con eficiencia constante sin importar la temperatura ambiente

La potencia que consume el servidor (en watts) está modelada por la función:

$$P(t) = 180 + 40t \cdot e^{-0.3t} + 25 \cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)$$

donde t es el tiempo en minutos.

La energía total consumida en Julios en ese intervalo está dada por:

$$Q_{\text{total}} = 60 \int_0^{10} P(t) dt$$

El 65 % de la energía total (Q_{total}) se convierte en calor que debe ser extraído por el sistema de refrigeración:

$$Q_{\text{calor}} = 0.65 \cdot Q_{\text{total}}$$

Pregunta problema

1. ¿Cuál es la energía calórica generada por el servidor durante los 10 minutos?
2. ¿Cuál sería la capacidad real del sistema A si se considera el efecto del clima?
3. ¿Qué sistema de refrigeración es más adecuado técnicamente y calcule su costo de instalación y mantenimiento para un año ?

Requisitos o condiciones del problema

- Resolver la integral utilizando el método de Romberg para $n = 8$ subintervalos.
- Presentar los resultados utilizando un redondeo con 4 cifras decimales.
- Justificar la elección del sistema con base en los tres criterios.

Paso 1: Información del problema

- Función: $P(t) = 180 + 40t \cdot e^{-0.3t} + 25 \cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)$
- Límite inferior: $a = 0$
- Límite superior: $b = 10$
- Número de subintervalos: $n = 8$
- Número de decimales: 4
- Temperatura ambiente promedio de Valledupar es de 32°C

Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo

$$\Delta t = \frac{b - a}{n} = \frac{10 - 0}{8} = 1.250$$

i	t_i	$P(t_i)$
0	0.0000	205.0000
1	1.2500	232.0421
2	2.5000	227.2367
3	3.7500	211.0202
4	5.0000	199.6260
5	6.2500	200.6611
6	7.5000	211.6198
7	8.7500	223.0316
8	10.0000	224.9148

Cuadro 5.3: $P(t) = 180 + 40t \cdot e^{-0.3t} + 25 \cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)$

$$h = b - a = 10 - 0 = 10$$

$$R_{1,1} = \frac{10}{2} \left[205.00 + 224.9148 \right] = 2149.5740$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2} \left[2149.5740 + (10) \cdot 199.6260 \right] = 2072.9170$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2} \left[2072.9170 + \frac{10}{2} \cdot [227.2367 + 211.6198] \right] = 2133.7248$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2} \left[2133.7248 + \frac{10}{4} \cdot [232.0421 + 211.0202 + 200.6611 + 223.0316] \right] = 2150.2435$$

$$R_{2,2} = 2072.9170 + \frac{2072.9170 - 2149.5740}{3} = 2047.3647$$

$$R_{3,2} = 2133.7248 + \frac{2133.7248 - 2072.9170}{3} = 2153.9940$$

$$R_{4,2} = 2150.2435 + \frac{2150.2435 - 2133.7248}{3} = 2155.7497$$

$$R_{3,3} = 2153.9940 + \frac{2153.9940 - 2047.3647}{15} = 2161.1026$$

$$R_{4,3} = 2155.7497 + \frac{2155.7497 - 2153.9940}{15} = 2155.8668$$

$$R_{4,4} = 2155.8668 + \frac{2155.8668 - 2161.1026}{63} = 2155.7837$$

Es decir:

$$\int_0^{10} P(t) dt = \int_0^{10} \left(180 + 40t \cdot e^{-0.3t} + 25 \cos \left(\frac{\pi t}{5} \right) \right) dt = 2155.7837 \text{ W} \cdot \text{min}$$

La energía total es:

$$Q_{\text{total}} = 60 \int_0^{10} P(t) dt = (60) \cdot (2155.7837 \text{ W} \cdot \text{min}) = 129347.0220 \text{ J}$$

La energía calórica del sistema es:

$$Q_{\text{calor}} = 0.65 \cdot Q_{\text{total}} = (0.65) \cdot (129347.0220 \text{ J}) = 84075.5643 \text{ J}$$

Análisis y Conclusiones de los Resultados

- Inicialmente se calculó la integral de la potencia mediante el método de Romberg para ocho (8) subintervalos, obteniendo como resultado 2155.7837 W · min.
- Luego se obtuvo el calor total (Q_{total}) multiplicando por 60 el resultado de la integral de la potencia, obteniendo 129347.0220 J.
- Seguidamente se obtuvo la energía calórica (Q_{calor}), con un valor de 84075.5643 J.
- Considerando que la temperatura del ambiente en Valledupar es superior a 30°C, la capacidad de extracción térmica del sistema de refrigeración A se ve disminuida en un 20 %, es decir tendría una capacidad de 67260.4514 J.
- Dado que el sistema de refrigeración A reduce su desempeño en un 20 % cuando la temperatura ambiente supera los 30°C —condición común en la ciudad de Valledupar—, su capacidad efectiva de extracción térmica resulta insuficiente para disipar el calor generado por el servidor. En contraste, el sistema de refrigeración B mantiene un rendimiento constante y cumple con las especificaciones técnicas requeridas, por lo que se considera la opción más adecuada para garantizar el funcionamiento seguro y eficiente del equipo.
- El costo de instalación y mantenimiento para un año del sistema de refrigeración seleccionado es de 5.850.000 COP

Ejemplo 4

Evaluación de eficiencia hídrica en un sistema de riego por goteo

Contextualización del problema

El riego es una de las prácticas agrícolas más determinantes para garantizar la producción sostenible de alimentos, especialmente en regiones donde la disponibilidad de agua no es constante o las lluvias son insuficientes. A través del suministro controlado de agua a los cultivos, los sistemas de riego permiten mantener la humedad del suelo dentro de niveles óptimos, lo que favorece el desarrollo radicular, la absorción de nutrientes y, en consecuencia, el rendimiento de las cosechas.

En la actualidad, la implementación de sistemas de riego tecnificados —como el riego por goteo, por aspersión o automatizado— representa una solución eficiente frente a la escasez hídrica y los retos del cambio climático. Estos sistemas permiten reducir el consumo de agua, minimizar pérdidas por evaporación o escorrentía, y focalizar el recurso directamente en la zona radicular de cada planta, mejorando significativamente la eficiencia del uso del agua.

Descripción y modelamiento del problema

La granja experimental de la Universidad Popular del Cesar sede Aguachica se encuentra ubicada a 12 km del casco urbano de la ciudad, específicamente en la vereda Cerro

Redondo. En este espacio agrícola se cultiva principalmente maíz, y para su hidratación se ha implementado un sistema de riego por goteo alimentado por una bomba solar. La eficiencia del sistema depende de la cantidad de agua absorbida por cada planta durante el ciclo de riego. La presión del sistema varía levemente con el paso del tiempo, lo que afecta la velocidad de salida del agua en los goteros.

La tasa de flujo de agua por gotero (en litros por minuto) se modela con la función:

$$f(t) = 0.2 + t^2 \cdot e^{-0.3t}$$

La cantidad total de agua absorbida por planta viene dada por:

$$A = 0.1 \int_0^t f(t) dt$$

Además, el agricultor tiene instalados 50 goteros y sabe que:

- Cada planta debe recibir al menos 7 litros en 30 minutos.

Pregunta problema

- ¿Cuánta agua absorbe una planta en 30 minutos?
- ¿Se cumple el mínimo de 7 litros por planta?
- Si el cultivo presenta una densidad de 1000 plantas de maíz por hectárea, ¿Que cantidad de volumen de agua se desperdicia durante el ciclo de riego de 30 min para una hectárea?

Requisitos o condiciones del problema

- Resolver la integral utilizando el método de Romberg para $n = 8$ subintervalos.
- Presentar los resultados utilizando un redondeo con 4 cifras decimales.

Paso 1: Información del problema

- Función: $f(t) = 0.2 + t^2 \cdot e^{-0.3t}$
- Límite inferior: $a = 0$
- Límite superior: $b = 30$
- Número de subintervalos: $n = 8$
- Número de decimales: 4

Solución numérica**Paso 2: Cálculo de la amplitud del subintervalo**

$$\Delta t = \frac{b-a}{n} = \frac{30-0}{8} = 3.75$$

i	t_i	$f(t_i)$
0	0.0000	0.2000
1	3.7500	4.7654
2	7.5000	6.1287
3	11.2500	4.5307
4	15.0000	2.6995
5	18.7500	1.4679
6	22.5000	0.7928
7	26.2500	0.4619
8	30.0000	0.3111

Cuadro 5.4: $f(t) = 0.2 + t^2 \cdot e^{-0.3t}$

$$h = b - a = 30 - 0 = 10$$

$$R_{1,1} = \frac{30}{2} \left[0.2000 + 0.3111 \right] = 7.6665$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2} \left[7.6665 + (30) \cdot 2.6995 \right] = 44.3258$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2} \left[44.3258 + \frac{30}{2} \cdot [6.1287 + 0.7928] \right] = 74.0742$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2} \left[74.0742 + \frac{30}{4} \cdot [4.7654 + 4.5307 + 1.4679 + 0.4619] \right] = 79.1342$$

$$R_{2,2} = 44.3258 + \frac{44.3258 - 7.6665}{3} = 56.5456$$

$$R_{3,2} = 74.0742 + \frac{74.0742 - 44.3258}{3} = 83.9903$$

$$R_{4,2} = 79.1342 + \frac{79.1342 - 74.0741}{3} = 80.8209$$

$$R_{3,3} = 83.9903 + \frac{83.9903 - 56.5456}{15} = 85.8199$$

$$R_{4,3} = 80.8209 + \frac{80.8209 - 83.9903}{15} = 80.6096$$

$$R_{4,4} = 80.6096 + \frac{80.6096 - 85.8199}{63} = 80.5269$$

Es decir:

$$A = 0.1 \int_0^{30} f(t) dt = 0.1 \int_0^{30} (0.2 + t^2 \cdot e^{-0.3t}) dt$$

$$A = 0.1 \cdot (80.5269 \text{ lt}) = 8.0527 \text{ lt}$$

Análisis y Conclusiones de los Resultados

- Inicialmente se calculó la cantidad de agua absorbida por una planta en 30 min mediante la formula dada con el método de Romberg para ocho (8) subintervalos, obteniendo como resultado 8.0527 lt.
- Con el sistema de riego actual se garantiza que cada planta reciba la cantidad de agua mínima, siendo en este caso 8.0527 lt.
- Por cada hectárea de cultivo se están desperdiciando $(8.0527 \text{ lt} - 7.00 \text{ lt}) \cdot 1000$, para un total de 1052.7 lt de agua.

5.7. Ejemplos propuestos

Ejemplo 1

Considere la siguiente integral definida:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

1. Resuelva la integral de forma **analítica**.
2. Aproxime el valor de la integral utilizando el **método de Romberg** hasta un nivel de refinamiento 3, es decir, calcule el valor de $R_{4,4}$.

3. Estime el **error aproximado** entre niveles sucesivos, utilizando la fórmula:

$$E_e \approx |R_{k,j} - R_{k-1,j-1}|$$

Para esto, calcule:

- El error entre $R_{4,4}$ y su anterior $R_{3,3}$.
 - El error entre $R_{3,3}$ y su anterior $R_{2,2}$.
4. Utilice un **redondeo** de 4 decimales.
5. Analice los resultados obtenidos: ¿El error entre niveles sucesivos fue alto o bajo? ¿Qué comportamiento observa al aumentar progresivamente el número de subintervalos? Explique su respuesta a partir de la teoría del método de Romberg, teniendo en cuenta el propósito de la extrapolación para mejorar la precisión de la aproximación.

Ejemplo 2

Estimación de una integral no elemental

Aproxime el valor de la siguiente integral utilizando el **método de Romberg** hasta obtener $R_{4,4}$. Redondee todos los resultados intermedios y finales a 4 decimales.

$$\int_0^5 \frac{1}{1 + e^{-0.5x}} dx$$

Ejemplo 3

El doctor en Ciencias de la Computación Sebastián Andrade Gómez, docente e investigador de la Universidad Tecnológica del Sur (UTS) está realizando una prueba de simulación para analizar el desempeño de un modelo de clasificación del nivel de producción de energía fotovoltaica a partir de condiciones ambientales basado en redes neuronales. Una de las métricas fundamentales para evaluar este tipo de modelos es el **área bajo la curva ROC (AUC)**, la cual refleja la capacidad del modelo para discriminar entre clases positivas y negativas a diferentes umbrales de decisión.

La curva ROC se ha aproximado experimentalmente mediante los siguientes puntos, que representan pares de *False Positive Rate (FPR)* y *True Positive Rate (TPR)* para distintos umbrales:

FPR	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
TPR	0.0	0.4	0.6	0.75	0.85	0.9	0.93	0.95	0.97	0.98	1.0

Cuadro 5.5: Aproximación experimental de la curva ROC (formato horizontal).

El área bajo esta curva se puede aproximar mediante la siguiente integral definida:

$$AUC = \int_0^1 TPR(FPR) dFPR$$

Observación:

La notación $TPR(FPR)$ indica que el **True Positive Rate (TPR)** depende del valor del **False Positive Rate (FPR)**. Por lo tanto, se está integrando una función que describe cómo varía el TPR a medida que cambia el FPR. Esta expresión no debe interpretarse como un producto entre TPR y FPR .

1. Analice el problema y proponga un título técnico adecuado que refleje su contexto y su relación con la evaluación de modelos de clasificación.
2. Desarrolle la solución del problema siguiendo esta estructura:
 - Contextualización del problema.
 - Descripción y modelamiento matemático.
 - Pregunta problema.
3. Aplique el **método de Romberg** para aproximar el área bajo la curva ROC utilizando los datos tabulados.
4. Explique qué es una **curva ROC** y qué representa gráficamente en la evaluación de modelos de clasificación binaria. ¿Cuál es la relación entre la curva ROC y el **AUC (Área Bajo la Curva)**? ¿Cómo se interpreta el valor del AUC en relación con la capacidad del modelo para realizar una clasificación correcta?
5. En el contexto de la clasificación binaria, explique qué representan las **clases positivas** y **clases negativas**. Dé un ejemplo aplicado a la predicción del nivel de producción de energía solar fotovoltaica. ¿Por qué es importante contar con modelos de clasificación precisos en este tipo de sistemas?
6. ¿Cómo contribuyen los sistemas de predicción basados en inteligencia artificial al desarrollo de soluciones para la **optimización y aprovechamiento de energías sostenibles**, como la energía fotovoltaica? Fundamente su respuesta en el impacto ambiental, económico o social.

Referencias

- Bisong, E. (2019). *Google Colaboratory*. In *Building Machine Learning and Deep Learning Models on Google Cloud Platform* (pp. 59–64). Apress. https://doi.org/10.1007/978-1-4842-4470-8_7
- Bolaños Romero, L. M., & Buitrago Hurtado, A. F. (2022). *Recomendaciones de política pública para el fomento de vocaciones científicas en niñas y jóvenes colombianas* [Tesis de Maestría, Universidad Externado de Colombia].
- Carrera Mora, M. P., & Pérez Solano, R. (2021). *Factores sociales, curriculares, geográficos y personales, que influyen en la elección de una carrera universitaria en áreas STEM*.
- Casas, R. (2020). *Políticas públicas de ciencia y tecnología en América Latina. Ante la encrucijada de los cambios políticos*. *Teuken Bidikay*, 11(16), 21–28.
- CONPES. (2021). *Política Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación 2022-2031*.
- Díaz Barriga, F. (2005). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista*. McGraw-Hill.
- Morales, J. & Landa, J. (2004). El aprendizaje basado en problemas: una estrategia para la enseñanza de las ciencias. *Revista de Educación en Ciencias*, 5(1), 45-56.
- Grimalt-Álvaro, C., & Couso, D. (2022). *¿Qué sabemos del posicionamiento STEM del alumnado?* *Revista de Investigación Educativa*, 40(2), 531–547.
- Hernández, J. G., & Hijón Neira, R. (2022). *Brecha en la vocación de los estudiantes por profesiones STEM y el mercado laboral europeo*.
- Hunter, J. D. (2007). Matplotlib: A 2D graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, 9(3), 90–95. <https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.55>
- Mejía, J. (2020). *Epistemología de las políticas de ciencia y tecnología en América Latina*. *Cinta de Moebio*, 67, 14–25.
- Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación. (2020). *Lineamientos para fomentar la vocación científica en jóvenes*.
- OpenAI. (2024). *ChatGPT*. <https://chat.openai.com/>

Zhou, Y., Zhang, X., Liu, Z., & Wang, J. (2023). The emergence of Generative AI in education: A systematic review. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, 4, 100151. <https://doi.org/10.1016/j.caeai.2023.100151>

Anexos Digitales

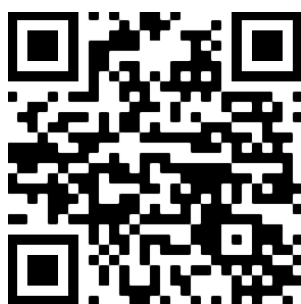


Figura 5.4: Acceso directo al repositorio de anexos del libro en GitHub. Incluye notebooks, gráficas, códigos y recursos complementarios para la integración numérica con ABP.

Todo el material complementario de este libro está disponible en el siguiente repositorio de GitHub:

Repositorio de Anexos del Libro en GitHub

A continuación, se proporciona un acceso directo a los recursos más relevantes, organizados en carpetas:

- **Notebooks:** Ejercicios prácticos en Python sobre métodos de integración numérica, así como ejemplos de clasificación en Machine Learning y Deep Learning.
- **Imágenes:** Gráficas generadas para apoyar la interpretación y explicación de resultados.
- **Datasets:** Conjuntos de datos utilizados en los ejemplos y ejercicios desarrollados en este libro.
- **Códigos fuente:** Scripts en Python para la implementación de los métodos numéricos estudiados.
- **Guías:** Instrucciones detalladas para la generación de gráficas académicas y la documentación de resultados científicos.