Lógicas Modales

Bisimulaciones

Carlos Areces & Raul Fervari

1er Cuatrimestre 2017,
Córdoba, Argentina

Bibliografía

- Capítulo 2 (Sec. 2.1 y 2.2) y apéndice A del Modal Logic Book (Blackburn, Venema & de Rijke)

Isomorfismos, equivalencia estructural

- Tema de hoy: "equivalencias de modelos"
- ¿Cuál es la noción de igualdad para un modelo de primer orden?

Definición (Isomorfismo de modelos)

Sean $\mathcal{M} = \langle M, \cdot^{\mathcal{M}} \rangle$ y $\mathcal{N} = \langle N, \cdot^{\mathcal{N}} \rangle$ dos modelos de primer orden sobre la misma signatura. Decimos que $i : M \to N$ es un isomorfismo entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ si

I. i es biyectiva

II. $(x_1, \ldots, x_n) \in P^{\mathcal{M}}$ sii $(i(x_1), \ldots, i(x_n)) \in P^{\mathcal{N}}$

III. $i(f^{\mathcal{M}}(x_1, \ldots, x_n)) = f^{\mathcal{N}}(i(x_1), \ldots i(x_n))$

IV. $i(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$

Isomorfismos, equivalencia estructural

- Estamos acostumbrados a que *isomorfo* signifique *equivalente*
- Con lo cual no es sorpresa que...

Teorema

Si i es un isomorfismo entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, entonces, para toda g tenemos

$$\mathcal{M}, g \models \varphi \quad sii \quad \mathcal{N}, i \circ g \models \varphi$$

Demostración.

Fácil, por inducción estructural en φ □

Ojo ¡Prestar atención al sentido de la implicación!

¿Distingue siempre primer orden modelos no-isomorfos?

Sea $\mathcal{M}$ un modelo cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y definamos
$\Gamma = \{\varphi \mid \mathcal{M} \models \varphi\}$

1. Por definición, $\mathcal{M} \models \Gamma$, con lo cual, Γ es satisfacible
2. Por Löwenheim-Skolem, para algún $\mathcal{N}$ numerable, $\mathcal{N} \models \Gamma$
3. $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ tienen cardinales distintos…*no pueden ser isomorfos*

¿Podemos distinguir en primer orden a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$?

- $\mathcal{M} \models \varphi \Longrightarrow \varphi \in \Gamma \Longrightarrow \mathcal{N} \models \varphi$
- $\mathcal{M} \not\models \varphi \Longrightarrow \mathcal{M} \models \neg\varphi \Longrightarrow \neg\varphi \in \Gamma \Longrightarrow \mathcal{N} \models \neg\varphi \Longrightarrow \mathcal{N} \not\models \varphi$
- Es decir, $\mathcal{M} \models \varphi$ sii $\mathcal{N} \models \varphi$…¡no podemos distinguirlos!

Pregunta ¿Habrá una noción de equivalencia para primer orden más aproximada que isomorfismo?

Isomorfismos potenciales

Definición (Isomorfismo parcial)

Dados $\mathcal{M} = \langle M, \cdot^{\mathcal{M}}\rangle$ y $\mathcal{N} = \langle N, \cdot^{\mathcal{N}}\rangle$, decimos que $p : M' \to N'$ (con $M' \subseteq M$ y $N' \subseteq N$) es un *isomorfismo parcial* entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ si p es un isomorfismo entre $\mathcal{M} \restriction M'$ y $\mathcal{N} \restriction N'$

Definición (Isomorfismo potencial)

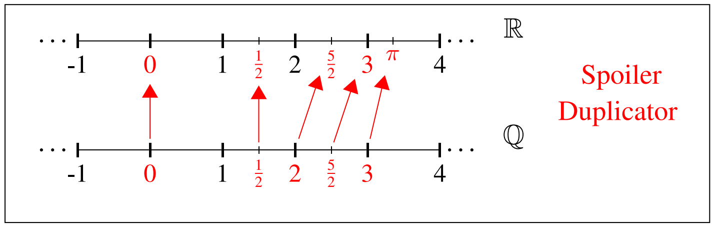
Un *isomorfismo potencial* entre dos modelos $\mathcal{M} = \langle M, \cdot^{\mathcal{M}}\rangle$ y $\mathcal{N} = \langle N, \cdot^{\mathcal{N}}\rangle$ es una colección F de isomorfismos parciales *finitos* entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ que satisfacen:

I. (zig) Si $p \in F$ y $x \in M$, existe $y \in N$ tal que $p \cup \{x \mapsto y\} \in F$
II. (zag) Si $p \in F$ e $y \in N$, existe $x \in M$ tal que $p \cup \{x \mapsto y\} \in F$

Isomorfismos potenciales

Ejemplo – Isomorfismo potencial entre $\langle \mathbb{R}, <\rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, <\rangle$

- Un juego entre dos jugadores: *Spoiler* y *Duplicator*
  - *Spoiler* elige elementos (los más difíciles que pueda)
  - *Duplicator* le responde extendiendo un isomorfismo parcial



- Como $\mathbb{Q}$ es denso, *Duplicator* siempre puede responder
- Cada estrategia ganadora induce un **isomorfismo potencial**

Preservación por isomorfismos potenciales

Proposición

Dos modelos numerables potencialmente isomorfos son isomorfos

Demostración.

(*Idea*) Tomar un isomorfismo potencial F entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ y elegir un $p \in F$. Por definición, p se puede extender tantas veces como uno quiera y, en el límite, esto nos da un isomorfismo. $\square$

Teorema

Si existe un isomorfismo potencial F entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, entonces, para toda fórmula de primer orden φ

$$\mathcal{M} \models \varphi \quad \textit{sii} \quad \mathcal{N} \models \varphi$$

¿Valdrá la vuelta?

- Consideremos $\mathcal{S} = \langle <, 0, 1, 2, \ldots \rangle$ y $\mathcal{S}' = \langle <, c, 0, 1, 2, \ldots \rangle$
- Y tomemos a $\mathbb{N}$ como modelo sobre la signatura $\mathcal{S}$
- Definamos $\Gamma_{\mathbb{N}} = \{\varphi \mid \mathbb{N} \models \varphi\}$ y $\Sigma = \{0 < c, 1 < c, 2 < c, \ldots\}$
- Por Compacidad, $\Gamma_{\mathbb{N}} \cup \Sigma$ es satisfacible
- Y por Löwenheim-Skolem, tiene algún modelo numerable $\mathcal{M}$
- Ahora, sea $\mathcal{M}_0$ la restricción de $\mathcal{M}$ a la signatura $\mathcal{S}$
- Observar que $\mathbb{N} \models \varphi$ sii $\mathcal{M}_0 \models \varphi$ (porque $\mathcal{M}_0 \models \Gamma_{\mathbb{N}}$)
- ¡Pero $\mathbb{N}$ y $\mathcal{M}_0$ no pueden ser isomorfos! (porque $c^{\mathcal{M}} \mapsto$???)
- Y por ser numerables, tampoco son potencialmente isomorfos

¿Buscamos más equivalencias?

Teorema (Keisler-Shelah Isomorphism Theorem)

$\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ coinciden en toda sentencia de primer orden sii existe un isomorfismo entre sus ultrapotencias

- Llegado este momento, tenemos dos alternativas:
  1. Dedicar el resto del cuatrimestre a entender lo que es la ultrapotencia de un modelo.
     The ultraproduct construction. Jerome Keisler. In "Ultrafilters Across Mathematics", ed. by V. Bergelson et. al., Contemporary Mathematics 530 (2010), pp. 163–179, Amer. Math. Soc.
  2. Pasar al caso modal...

Pero antes, recapitulemos...

- Isomorfismo
  - Noción "natural" de equivalencia de modelos
  - Hay modelos no-isomorfos que primer orden no puede distinguir
- Isomorfismo potencial
  - Generalización de isomorfismo a estructuras de distinto cardinal
  - Hay modelos no-potencialmente isomorfos que primer orden tampoco puede distinguir
- Isomorfismo de las ultrapotencias
  - Captura adecuadamente la noción de equivalencia de primer orden

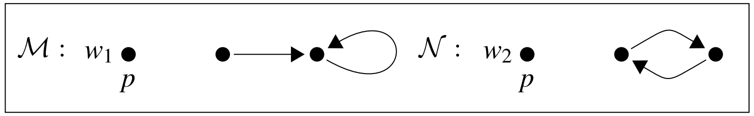
¿Y por modal cómo andamos?

- Por simple transferencia, si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son potencialmente isomorfos, entonces para cada w existe un w' tal que

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \quad \text{sii} \quad \mathcal{N}, w' \models \varphi$$

- ¿Será lo mejor que podemos decir?

Ejemplo – ¿Son modalmente distinguibles $\langle \mathcal{M}, w_1 \rangle$ y $\langle \mathcal{N}, w_2 \rangle$?



- $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son modelos finitos, para nada esotéricos ...

Hacia una noción de equivalencia modal...

- Todas la nociones de equivalencia que vimos para primer orden consideran los modelos “en su totalidad”
  - Es razonable para FO: la extensión de una sentencia es todo el dominio o el conjunto vacío
- ¿Tiene sentido hacer lo mismo en modal?

Bisimulaciones

Definición

Una *bisimulación* entre dos modelos $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$ y $\mathcal{N} = \langle W', \{R_i'\}, V'\rangle$ es una relación no-vacía $Z \subseteq W \times W'$ tal que si wZw', entonces:

(atom) $w \in V(p)$ sii $w' \in V'(p)$ para todo p

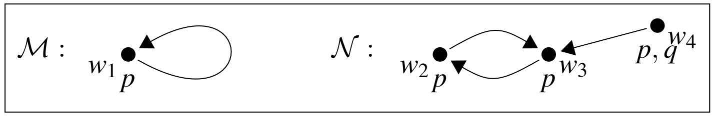
(zig) Si $R_i wv$, entonces existe v' tal que $R_i' w'v'$ y vZv'

(zag) Si $R_i' w'v'$, entonces existe v tal que $R_i wv$ y vZv'

Si existe una bisimulación entre $\mathcal{M}, w$ y $\mathcal{N}, w'$, decimos que éstos son *bisimilares*

Bisimulaciones (ejemplo)

Ejemplo



$$Z = \{(w_1, w_2), (w_1, w_3)\}$$

- Z es una bisimulación, ¿por qué?

Invarianza bajo bisimulaciones

Teorema

Si $\mathcal{M}, w$ y $\mathcal{N}, w'$ son bisimilares, entonces para toda fórmula φ de la lógica modal básica, $\mathcal{M}, w \models \varphi$ sii $\mathcal{N}, w' \models \varphi$.

Demostración.

Por inducción en φ, suponiendo wZw':

- Caso base: directo por la cláusula (atom)
- $\neg, \wedge, \ldots$: directo por hipótesis inductiva
- $\varphi = \langle r\rangle\psi$:
  - Si $\mathcal{M}, w \models \langle r\rangle\psi$, entonces
    - existe v tal que $R_r wv$ y $\mathcal{M}, v \models \psi$
    - luego, por (zig), existe v' tal que $R_r' w'v'$ y vZv'
    - y por HI, $\mathcal{N}, v' \models \psi$, con lo cual $\mathcal{N}, w' \models \langle r\rangle\psi$
  - Si $\mathcal{N}, w' \models \langle r\rangle\psi$, análogo con (zag)

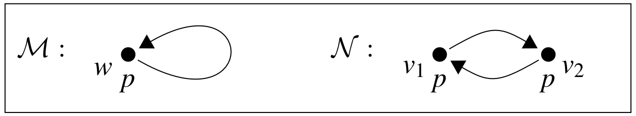
$\square$

Bisimulación y poder expresivo

- Teníamos una pregunta pendiente

  ¿Existe una traducción de fórmulas de FO2 con sólo una variable libre a la lógica modal básica?

- Consideremos estos modelos



- $Z = \{(w, v_1), (w, v_2)\}$ es una bisimulación
- Con lo cual para toda φ de la LMB, $\mathcal{M}, w \models \varphi$ sii $\mathcal{N}, v_1 \models \varphi$
- Ahora, $\mathcal{M}, g[x \mapsto w] \models R(x, x)$ pero $\mathcal{N}, g'[x \mapsto v_1] \not\models R(x, x)$
- ¡Con lo cual $R(x, x)$ no puede expresarse en lógica modal básica!

¿Y la vuelta?

Teorema
Si $\mathcal{M}, w$ y $\mathcal{N}, w'$ son bisimilares, entonces para toda fórmula φ de la lógica modal básica, $\mathcal{M}, w \models \varphi$ sii $\mathcal{N}, w' \models \varphi$.

¿Valdrá la vuelta de la implicación?

A veces vale la vuelta…

Teorema (Hennessy-Milner)
Si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son modelos cuyas relaciones tienen imagen finita, $\langle \mathcal{M}, w \rangle$ y $\langle \mathcal{N}, v \rangle$ son bisimilares sii son modalmente equivalentes.

Demostración.
Basta ver que $Z := \{(w, v) \mid$ para todo φ $\mathcal{M}, w \models \varphi$ sii $\mathcal{N}, v \models \varphi\}$ es una bisimulación. Para ello, suponemos wZv:

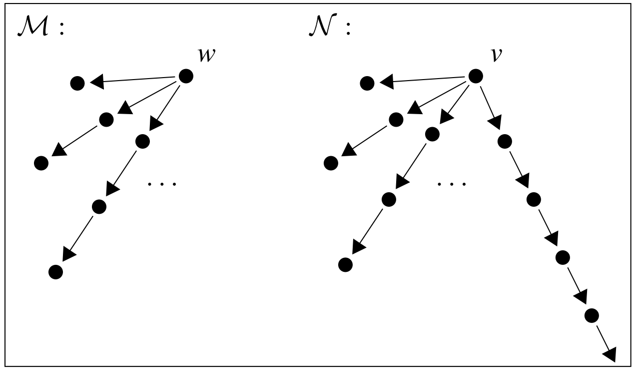
(atom) wZv implica $\mathcal{M}, w \models p$ sii $\mathcal{N}, v \models p$ para todo p

(zig)/(zag) Razonamos por el absurdo.

- Sea un Rww' tal que ningún v' cumple Rvv' y $w'Zv'$
- Definamos $S := \{v' \mid Rvv'\} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ $(k > 0)$
- Existe $\{\varphi_1 \ldots, \varphi_k\}$ con $\mathcal{M}, w' \models \varphi_i$ y $\mathcal{N}, v_i \not\models \varphi_i$
- $\mathcal{M}, w \models \Diamond(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)$ y $\mathcal{N}, v \not\models \Diamond(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)$
- Absurdo! $\square$

…pero no siempre!

Ejemplo – Modalmente equivalentes pero no bisimilares



¿Cómo hacer que valga la vuelta?

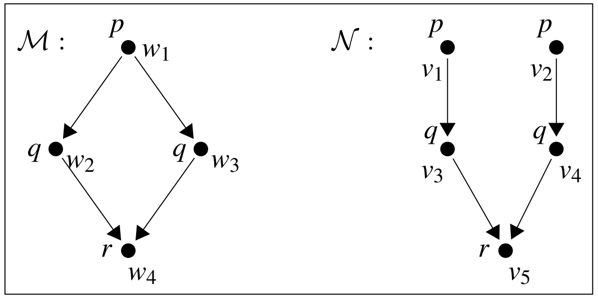
- En primer orden, necesitamos movernos a ultrapotencias para lograr que valga la vuelta
- En modal también necesitamos una construcción esotérica: las **ultrafilter extensions** (extensiones por ultrafiltros)

Teorema

Dos modelos son modalmente equivalentes sii sus extensiones por ultrafiltros son bisimilares

Unión de bisimulaciones

- Consideremos los siguientes modelos



- $Z_1 = \{(w_1, v_1), (w_2, v_3), (w_3, v_3), (w_4, v_5)\}$ y $Z_2 = \{(w_1, v_2), (w_2, v_4), (w_3, v_4), (w_4, v_5)\}$ son bisimulaciones
- ¿Es $Z_1 \cup Z_2$ una bisimulación?
- ¿Fue coincidencia?

Unión de bisimulaciones

Proposición

Si Z_1 y Z_2 son bisimulaciones entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, $Z_1 \cup Z_2$ también lo es

Demostración.

Fácil, suponer $(w, v) \in Z_1 \cup Z_2$ y ver que se cumplen (atom), (zig) y (zag) □

Corolario

Si la unión de dos bisimulaciones entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ es una bisimulación, la unión de **todas** las bisimulaciones es una bisimulación!

Es decir, si existe una bisimulación, existe una *bisimulación máxima*

Composición de bisimulaciones

Proposición

Sean $Z_1 \subseteq \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ y $Z_2 \subseteq \mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_3$ dos bisimulaciones. Si $Z_1 \circ Z_2$ es no vacía, entonces es una bisimulación

Demostración.

Sea $Z_3 := Z_1 \circ Z_2$ y supongamos wZ_3w' (con lo cual, existe v tal que wZ_1v y vZ_2w')

atom
- Como wZ_1v, w y v coinciden proposicionalmente
- Pero v y w' también (porque vZ_2w')
- Luego w y w' tienen que coincidir

zig
- Supongamos que existe w_2 tal que $R^{\mathcal{M}_1}ww_2$
- Por zig de Z_1 existe v_2 tal que $R^{\mathcal{M}_2}vv_2$ y $w_2Z_1v_2$
- Ahora, por zig de Z_2 tiene que existir w_2' tal que $R^{\mathcal{M}_3}w'w_2'$ y $v_2Z_2w_2'$. Pero entonces $w_2Z_3w_2'$.

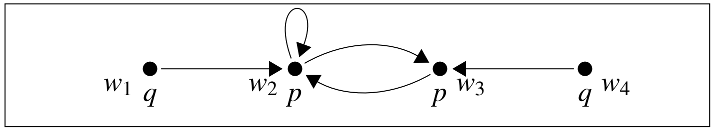
Autobisimulaciones

- Una bisimulación no relaciona (necesariamente) modelos enteros
- Relaciona partes de dos modelos
- Y nada impide que bisimulemos partes de un mismo modelo

Definición

Una *autobisimulación* es una bisimulación $Z \subseteq W \times W$ donde W es el dominio de un modelo $\mathcal{M}$

Ejemplo



- $\{(w_1, w_4), (w_2, w_3), (w_3, w_2), (w_2, w_2)\}$ es una autobisimulación

Autobisimulaciones máximas

- Dado $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$, la *relación identidad* dada por

$$Id = \{(w, w) \mid w \in W\}$$

es una autobisimulación
- Luego, por el corolario anterior, todo modelo tiene una *autobisimulación máxima*
- Ejercicio: Mostrar que una autobisimulación máxima es una relación de equivalencia (i.e., reflexiva, simétrica y transitiva)

Contracción por bisimulaciones

Definición (Contracción por bisimulaciones)

Sea $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$ y sea $Z_{\mathcal{M}}$ su máxima autobisimulación. La *contracción de $\mathcal{M}$ por bisimulación* es el modelo $\langle W', \{R'_i\}, V'\rangle$ donde

$$\begin{array}{lcl} W' & := & W/Z_{\mathcal{M}} \\ R'_i & := & \{([w], [v]) \mid (w, v) \in R_i\} \\ V'(p) & := & \{[w] \mid w \in V(p)\} \end{array}$$

Proposición

Si $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$ es un modelo y $\mathcal{M}'$ es su contracción por bisimulación, entonces $\langle \mathcal{M}, w\rangle$ y $\langle \mathcal{M}', [w]\rangle$ son bisimilares

Demostración.

Basta ver que $Z := \{(w, [w]) \mid w \in W\}$ es una bisimulación (ejercicio!) □

Contracción por bisimulaciones ≡ Modelo mínimo

Proposición

La contracción por bisimulación de $\mathcal{M}$ es un modelo bisimilar a $\mathcal{M}$ de cardinalidad mínima (lo notamos $\min(\mathcal{M})$*)*

Demostración.

- Sea $\mathcal{M}$ bisimilar a $\mathcal{N}$ con una bisimulación total $Z \subseteq M \times N$ (i.e., Z cubre los dominios de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$).
- Sea $g : M \to N$ cualquier función tq. $g(w) = w'$ para wZw'.
- Sea $f : min(M) \to M$ definida como $f([w]) = w$.
- Claim: $g \circ f : min(M) \to N$ es inyectiva. □

Modelo mínimo: aplicaciones

Ejemplo - Verificación de software

Objetivo: Verificar propiedades de un sistema de software

Método:
- I. Se representa al sistema con un autómata finito $\mathcal{A}$
- II. Cada propiedad p se expresa con una fórmula φ_p
- III. Para cada p, se prueba si $\mathcal{A}, \mathsf{inicio} \models \varphi_p$

Idea:
- Determinar $\mathcal{A}, \mathsf{inicio} \models \varphi_p$ depende de $|\mathcal{A}|$
- Conviene determinar $\min(\mathcal{A}), [\mathsf{inicio}] \models \varphi_p$

Pero:
- Calcular $\min(\mathcal{A})$ también cuesta
- Hay que evaluar cuándo conviene

Unión disjunta de modelos

Definición

Dados una colección no vacía de modelos $\mathcal{M}^k = \langle W^k, \{R_i^k\}, V^k \rangle$, todos sobre la misma signatura $\mathcal{S}$, y donde $W^i \cap W^j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, la unión disjunta $\biguplus\{\mathcal{M}^k\} := \langle W, \{R_i\}, V \rangle$ es el modelo en $\mathcal{S}$ dado por:

$$\begin{array}{rcl} W & := & \bigcup_k W^k \\ R_i & := & \bigcup_k R_i^k \\ V(p) & := & \bigcup_k V^k(p) \end{array}$$

Invarianza sobre unión disjunta

Proposición

Sea C una colección de modelos disjuntos, y sea $\mathcal{M}$ un modelo en C. Para todo w en el dominio de $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M}, w \underline{\leftrightarrow} \biguplus C, w$$

Demostración.

Suponiendo que W es el dominio de $\mathcal{M}$, alcanza con ver que $\{(x,x) \mid x \in W\}$ es una bisimulación (fácil) $\square$

Corolario

Satisfacción de fórmulas de la lógica modal básica es invariante respecto de unión disjuntas

Unión disjunta y expresividad

¿Será verdad que la modalidad universal no puede expresarse en la lógica modal básica?

- Supongamos que no es verdad y que es posible expresarla
- A la fórmula $\mathsf{A}p$ debe corresponderle una fórmula φ
- Ahora, consideremos estos dos modelos:

$\mathcal{M}_1$: p, q • w $\qquad$ $\mathcal{M}_2$: q • v

- $\mathcal{M}_1, w \models \varphi$, y por lo tanto, $\biguplus\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}, w \models \varphi$
- Pero $\biguplus\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}, w \not\models \mathsf{A}p$ ¡Absurdo!

Submodelo generado

Definición (Submodelo)

Dados $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$ y $\mathcal{N} = \langle W', \{R'_i\}, V'\rangle$, decimos que $\mathcal{N}$ es un *submodelo* de $\mathcal{M}$ si

1. $W' \subseteq W$
2. $R'_i = R_i \cap (W' \times W')$
3. $V'(p) = V(p) \cap W'$

Definición (Submodelo generado)

Sean $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$ y $\mathcal{N} = \langle W', \{R'_i\}, V'\rangle$. Decimos que $\mathcal{N}$ es un *submodelo generado* de $\mathcal{M}$ si

1. $\mathcal{N}$ es un submodelo de $\mathcal{M}$
2. Para todo $w \in W'$, si existe $v \in W$ tal que $R_i wv$, entonces $v \in W'$

Invarianza sobre submodelos generados

Proposición

Sea $\mathcal{N}$ un submodelo generado de $\mathcal{M}$. Para todo w en el dominio de $\mathcal{N}$,

$$\mathcal{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathcal{N}, w$$

Demostración.

Suponiendo que W es el dominio de $\mathcal{N}$, alcanza con ver que $\{(x, x) \mid x \in W\}$ es una bisimulación (fácil) $\square$

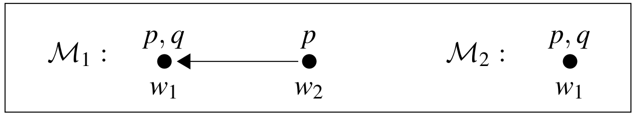
Corolario

Satisfacción de fórmulas de la lógica modal básica es invariante respecto de submodelos generados

Submodelo generado y expresividad

¿Será verdad que el operador de pasado no puede expresarse en la lógica modal básica?

- Supongamos que no es verdad y que podemos expresarlo
- A la fórmula $\langle R\rangle^{-1}p$ debe corresponderle una fórmula φ
- Ahora, consideremos estos dos modelos:



- $\mathcal{M}_2$ es un submodelo generado de $\mathcal{M}_1$
- Y como $\mathcal{M}_1, w_1 \models \varphi$ entonces $\mathcal{M}_2, w_1 \models \varphi$
- Pero $\mathcal{M}_2, w_1 \not\models \langle R\rangle^{-1}p$ ¡Absurdo!

Morfismos: una versión "funcional" de preservación

monomorfismos
epimorfismos
bimorfismos
isomorfismos
endomorfismos
automorfismos
holomorfismos
⋮

Morfismo Mapping de un objeto matemático a otro que preserva estructura

- Cuanta más estructura "se preserva", más resultados de invarianza se tienen
- Un isomorfismo preserva toda la estructura, en ambas direcciones (objetos isomorfos son matemáticamente equivalentes)
- ¿Cuál es la noción de morfismo apropiada para la lógica modal (básica)?

Morfismos: una versión "funcional" de preservación

Definición

Sean $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$ y $\mathcal{N} = \langle W', \{R_i'\}, V'\rangle$ modelos sobre la misma signatura. La función $f : W \to W'$ es un p-morfismo (o *pseudo-epimorphism* o *bounded morphism*) si se cumple:

- **atom** $w \in V(p)$ sii $f(w) \in V(p)$
- **zig** Si Rwv, entonces $R'f(w)f(v)$
- **zag** Si $R'f(w)v'$, entonces existe v tal que $f(v) = v'$ y Rwv

- f es "sólo" una bisimulación que, además, es función
- Pero la noción de bisimulación surge como generalización del p-morfismo

Tree model property

- Vamos a ver una aplicación de las operaciones entre modelos que preservan satisfacibilidad:

  Cualquier fórmula satisfacible es satisfecha en un modelo con forma de árbol.

- Esta propiedad se conoce como la *tree model property*.

Tree model property

Recordemos primero algunas definiciones:

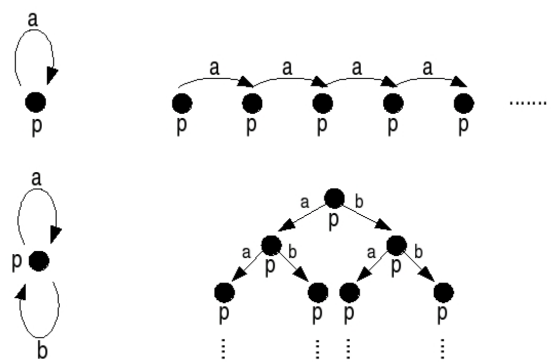
- Dados dos modelos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, y $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un morfismo acotado (p-morfismo), para toda fórmula φ y para todo $w \in \mathcal{M}$ se cumple que $\mathcal{M}, w \models \varphi$ sii $\mathcal{N}, f(w) \models \varphi$.
- Si hay un morfismo acotado *suryectivo* entre ambos modelos, se nota $\mathcal{M} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$.
- El pointed model $\mathcal{M}, w$ se dice *rooted* o *point generated* si todos los elementos son alcanzados desde w (a w se lo llama la *raíz* del modelo).

Más formalmente entonces:

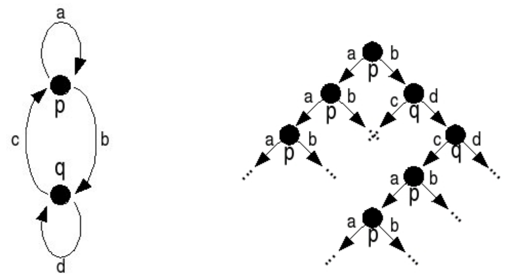
- *Tree model property*: Para cualquier modelo rooted $\mathcal{M}, w$ existe un modelo $\mathcal{T}$ con forma de árbol tal que $\mathcal{T} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$.
- *Corolario:* Cualquier fórmula satisfacible es satisfecha en un modelo con forma de árbol.

Tree model property

Veamos primero unos ejemplos de cómo se puede transformar un modelo en otro con forma de árbol, que preserve satisfacibilidad:



Tree model property



Tree model property

La idea intuitiva entonces es construir un modelo en donde:

- Los elementos del modelo sean *secuencias finitas* de sucesores desde la raíz.
- Las secuencias van a estar relacionadas teniendo en cuenta la relación de accesibilidad original.
- La valuación va a depender del último elemento de la secuencia.

Intentemos definir formalmente esto ...

Tree model property

Dado un modelo $\mathcal{M}$ con raíz w, vamos a construir $\mathcal{M}' = (W', \{R'_a\}_{a \in \mathsf{REL}}, V')$.

- Los elementos de W' son todas las secuencias finitas $(w \stackrel{R_{a_1}}{\rightarrow} u_1 \cdots \stackrel{R_{a_n}}{\rightarrow} u_n)$ tal que haya un path $wR_{a_1}u_1R_{a_2}u_2 \ldots R_{a_n}u_n$ en $\mathcal{M}$.
- $(w \stackrel{R_{a_1}}{\rightarrow} u_1 \cdots \stackrel{R_{a_n}}{\rightarrow} u_n)R'_a(w \stackrel{R_{a'_1}}{\rightarrow} v_1 \cdots \stackrel{R_{a'_m}}{\rightarrow} v_m)$ sii $m = n+1, v_i = u_i, a_i = a'_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, $R_{a'_m} = R_a$ y $u_nR_av_m$ vale en $\mathcal{M}$.
- V' está definida como $(w \stackrel{R_{a_1}}{\rightarrow} u_1 \cdots \stackrel{R_{a_n}}{\rightarrow} u_n) \in V'(p)$ sii $u_n \in V(P)$.

Claramente $\mathcal{M}'$ tiene forma de árbol. Tenemos que demostrar que el mapeo $f : (w \stackrel{R_{a_1}}{\rightarrow} u_1 \cdots \stackrel{R_{a_n}}{\rightarrow} u_n) \rightarrow u_n$ define un morfismo acotado suryectivo.

Tree model property

Recordemos lo que era un morfismo acotado:

Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$ modelos. Un mapeo $f : \mathcal{M} = (W, R, V) \rightarrow \mathcal{M}' = (W', R', V')$ es un *morfismo acotado* si:

I. w y $f(w)$ satisfacen las mismas variables proposicionales.
II. Si wRv entonces $f(w)R'f(v)$.
III. Si $f(w)R'v'$, entonces existe un v tal que wRv y $f(v) = v'$.

A partir de la manera en la que construimos $\mathcal{M}'$ no es difícil ver que $f : (w \stackrel{R_{a_1}}{\rightarrow} u_1 \cdots \stackrel{R_{a_n}}{\rightarrow} u_n) \rightarrow u_n$ define un morfismo acotado suryectivo.

Tree model property

Entonces, resumiendo lo que hicimos, supongamos que φ es satisfecha en un modelo $\mathcal{M}$, en un punto w:

1. Construimos $\mathcal{M}'$, el submodelo generado a partir de w. Como los submodelos generados preservan satisfacibilidad, sabemos que $\mathcal{M}', w \models \varphi$.
2. Como $\mathcal{M}'$ es un modelo con raíz en w, podemos generar un modelo $\mathcal{M}''$ con forma de árbol (siguiendo el procedimiento que acabamos de ver), en donde además $\mathcal{M}'', w \models \varphi$.

Entonces, cualquier fórmula satisfacible puede ser satisfecha en un modelo con forma de árbol.