Práctica 6

Lógicas Modales

1er cuatrimestre, 2017

Los ejercicios marcados con (E) son para entregar por todos. Los ejercicios marcados con (EP) son para entregar por los que estén tomando el curso como alumnos de posgrado.

Ejercicio 1. (E) Mostrar que los siguientes axiomas de K_h son válidos sobre la clase de los modelos híbridos

Self-dual	$@_i p \leftrightarrow \neg @_i \neg p$
Nom	$@_i j \wedge @_j p \rightarrow @_i p$
Introduction	$i \wedge p \rightarrow @_i p$
Back	$\Diamond @_i p \rightarrow @_i p$

Ejercicio 2. Demostrar que la fórmula Bridge: $\Diamond i \wedge @_i p \rightarrow \Diamond p$ es teorema de K_h. (Sugerencia, demostrar la contrapositiva, usando el teorema modal $(\Diamond q \wedge \Box p) \rightarrow \Diamond(q \wedge p)$ y los axiomas Introduction y Back).

Ejercicio 3. Sea Γ un K_h-MCS. Para cada nominal i definimos $\Delta_i = \{\varphi \mid @_i\varphi \in \Gamma\}$. Demostrar que

1. Δ_i es un K_h-MCS que contiene a i.
2. Para todo par de nominales i, j, si $i \in \Delta_j$ entonces $\Delta_i = \Delta_j$.

Ejercicio 4. EP Demostrar el caso de $@_i\varphi$ del Truth Lemma para K_h.

Ejercicio 5. Demostrar que la siguiente fórmula es satisfacible usando el cálculo de tableaux para K_t

$$\varphi = p_1 \wedge \Diamond p_2 \wedge \Diamond \Box^{-1} \Box(\neg p_2 \vee \Box^{-1} \neg p_1).$$

Ejercicio 6. Demostrar que el cálculo de tableaux dado en clase para K_t es correcto. Es decir, demostrar que si φ es satisfacible, entonces todo tableaux de φ tiene una rama abierta.

Ejercicio 7. (E) Demostrar que el cálculo de tableau dado en clase para K4 es correcto y completo.

Ejercicio 8. Considerar la lógica modal básica extendida con el operador $\Diamond^\star$, que representa la clausura reflexo-transitiva de la relación de accesibilidad (con su correspondiente dual, el operador $\Box^\star$). Para trabajar con esta lógica se propone extender el tableau etiquetado visto en clase con las siguientes reglas:

$$\frac{w : \Diamond^\star \varphi}{w : \varphi \mid w : \Diamond\Diamond^\star \varphi} \qquad \frac{w : \Box^\star \varphi}{\begin{array}{c} w : \varphi \\ w : \Box\Box^\star \varphi \end{array}}$$

1. Usando este tableau extendido, decidir la validez de la siguiente fórmula

$$(\Box^\star p \wedge \Diamond(q \vee \Diamond \neg p)) \rightarrow \Diamond q$$

2. Demostrar que el tableau no es completo mostrando una fórmula válida cuya negación no tenga todas sus ramas cerradas.