Lógicas Modales Dinámicas

Clase #3

Carlos Areces & Raul Fervari

Febrero 2024, Río Cuarto, Argentina

Hasta ahora

- Lógica Modal Básica (LMB).
- Expresividad y Axiomatizaciones.
- Lógica de Anuncios Públicos (LAP).
- Expresividad: Igual a LMB.
- Axiomatización: Mediante axiomas de reducción.

Plan para hoy

- Cerramos axiomatización de LMB y LAP.
- Vamos a considerar otra alternativa de lógica dinámica.
- Introduciremos una lógica que elimina ejes en la relación de accesibilidad: *sabotage logic*.
  - Nos ayudará a comprender los efectos de tener operadores (realmente) dinámicos en el lenguaje.
  - Como venimos haciendo, discutimos: expresividad?, complejidad?, axiomatización?
- Vamos a mencionar otras alternativas de operadores dinámicos.

Axiomatización y Completitud de **K**

- El sistema axiomático **K** es el menor conjunto de fórmulas modales Δ que contiene:
  I. Todas las tautologías proposicionales.
  II. El axioma (K): $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.

  y está cerrado por:
  I. *modus ponens*: Si $\varphi \in \Delta$ y $\varphi \to \psi \in \Delta$ entonces $\psi \in \Delta$.
  II. *sustitución uniforme*: Si $\varphi \in \Delta$ entonces $\varphi[p/\psi] \in \Delta$ para cualquier $p \in \mathsf{PROP}$, y cualquier ψ.
  III. *necesitación* (Nec): $\varphi \in \Delta$ entonces $\Box\varphi \in \Delta$.

Axiomatización y Completitud de **K**

- El sistema axiomático **K** es el menor conjunto de fórmulas modales Δ que contiene:
  I. Todas las tautologías proposicionales.
  II. El axioma (K): $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.

  y está cerrado por:
  I. *modus ponens*: Si $\varphi \in \Delta$ y $\varphi \to \psi \in \Delta$ entonces $\psi \in \Delta$.
  II. *sustitución uniforme*: Si $\varphi \in \Delta$ entonces $\varphi[p/\psi] \in \Delta$ para cualquier $p \in \mathsf{PROP}$, y cualquier ψ.
  III. *necesitación* (Nec): $\varphi \in \Delta$ entonces $\Box\varphi \in \Delta$.
- Si $\varphi \in \Delta$ decimos que φ es un *teorema* de **K** ($\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$).

Axiomatización y Completitud de **K**

- El sistema axiomático **K** es el menor conjunto de fórmulas modales Δ que contiene:
  I. Todas las tautologías proposicionales.
  II. El axioma (K): $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.

  y está cerrado por:
  I. *modus ponens*: Si $\varphi \in \Delta$ y $\varphi \to \psi \in \Delta$ entonces $\psi \in \Delta$.
  II. *sustitución uniforme*: Si $\varphi \in \Delta$ entonces $\varphi[p/\psi] \in \Delta$ para cualquier $p \in \mathsf{PROP}$, y cualquier ψ.
  III. *necesitación* (Nec): $\varphi \in \Delta$ entonces $\Box\varphi \in \Delta$.
- Si $\varphi \in \Delta$ decimos que φ es un *teorema* de **K** ($\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$).
- Charlamos la demo de completitud por construcción del Modelo Canónico $M^{\mathbf{K}}$ que satisface todas las fórmulas **K**-consistentes.

Ejemplo de demostración

- Probemos que $\vdash_{\mathbf{K}} \Box A \to \Box(B \to A)$

1.	$A \to (B \to A)$	Taut
2.	$\Box(A \to (B \to A))$	Nec, 1
3.	$\Box(A \to (B \to A)) \to (\Box A \to \Box(B \to A))$	K
4.	$\Box A \to \Box(B \to A)$	MP, 2, 3

Completitud para $\mathbf{K}$

1. $\mathbf{K}$ es completa sii toda fórmula φ $\mathbf{K}$-consistente (i.e., no pasa $\varphi \vdash_{\mathbf{K}} \bot$) es satisfacible.
2. Lema de Lindenbaum: Todo conjunto consistente puede extenderse a uno maximal consistente (MCS).
3. $M^{\mathbf{k}}$ tiene por estados a todos MCS.
4. Lema de la Verdad y la Pertenencia (Truth Lemma): Si Δ es un estado de $M^{\mathbf{K}}$ y $\varphi \in \Delta$ entonces $M^{\mathbf{K}}, \Delta \models \varphi$.

Completitud via axiomas de reducción

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, y sea Δ una lógica modal construida sobre el lenguaje $\mathcal{L}$.

Completitud via axiomas de reducción

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, y sea Δ una lógica modal construida sobre el lenguaje $\mathcal{L}$.
2. Sea $\mathcal{L}'$ una extensión de $\mathcal{L}$ con un nuevo operador (Ejemplo: **PAL** extiende LMB con el operador $[!\psi]$).

Completitud via axiomas de reducción

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, y sea Δ una lógica modal construida sobre el lenguaje $\mathcal{L}$.
2. Sea $\mathcal{L}'$ una extensión de $\mathcal{L}$ con un nuevo operador (Ejemplo: **PAL** extiende LMB con el operador $[!\psi]$).
3. Supongamos que tenemos un conjunto de equivalencias en $\mathcal{L}'$ (es decir, fórmulas de la forma $\psi \leftrightarrow \psi'$) tal que dichas equivalencias permiten transformar cualquier fórmula de $\mathcal{L}'$ en una fórmula de $\mathcal{L}$, que sea equivalente. Llamamos a estas fórmulas axiomas de reducción.

Completitud via axiomas de reducción

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, y sea Δ una lógica modal construida sobre el lenguaje $\mathcal{L}$.
2. Sea $\mathcal{L}'$ una extensión de $\mathcal{L}$ con un nuevo operador (Ejemplo: **PAL** extiende LMB con el operador $[!\psi]$).
3. Supongamos que tenemos un conjunto de equivalencias en $\mathcal{L}'$ (es decir, fórmulas de la forma $\psi \leftrightarrow \psi'$) tal que dichas equivalencias permiten transformar cualquier fórmula de $\mathcal{L}'$ en una fórmula de $\mathcal{L}$, que sea equivalente. Llamamos a estas fórmulas axiomas de reducción.
4. En particular, me permite transformar aquellas que son tautologías.

Completitud via axiomas de reducción

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, y sea Δ una lógica modal construida sobre el lenguaje $\mathcal{L}$.
2. Sea $\mathcal{L}'$ una extensión de $\mathcal{L}$ con un nuevo operador (Ejemplo: **PAL** extiende LMB con el operador $[!\psi]$).
3. Supongamos que tenemos un conjunto de equivalencias en $\mathcal{L}'$ (es decir, fórmulas de la forma $\psi \leftrightarrow \psi'$) tal que dichas equivalencias permiten transformar cualquier fórmula de $\mathcal{L}'$ en una fórmula de $\mathcal{L}$, que sea equivalente. Llamamos a estas fórmulas axiomas de reducción.
4. En particular, me permite transformar aquellas que son tautologías.
5. Entonces, una tautología de $\mathcal{L}'$ es tautología de $\mathcal{L}$; por completitud de Δ, también es un teorema de Δ.

Completitud via axiomas de reducción

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, y sea Δ una lógica modal construida sobre el lenguaje $\mathcal{L}$.
2. Sea $\mathcal{L}'$ una extensión de $\mathcal{L}$ con un nuevo operador (Ejemplo: **PAL** extiende LMB con el operador $[!\psi]$).
3. Supongamos que tenemos un conjunto de equivalencias en $\mathcal{L}'$ (es decir, fórmulas de la forma $\psi \leftrightarrow \psi'$) tal que dichas equivalencias permiten transformar cualquier fórmula de $\mathcal{L}'$ en una fórmula de $\mathcal{L}$, que sea equivalente. Llamamos a estas fórmulas axiomas de reducción.
4. En particular, me permite transformar aquellas que son tautologías.
5. Entonces, una tautología de $\mathcal{L}'$ es tautología de $\mathcal{L}$; por completitud de Δ, también es un teorema de Δ.
6. Por lo tanto, Δ + los axiomas de reducción forman un sistema completo para $\mathcal{L}'$.

Nota sobre sustitución

- Presentamos a **K** como LP +:
  - Axioma K: $\Box(p \to q) \to \Box p \to \Box q$
  - Reglas: MP, **(Nec)** (si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \Box\varphi$), y sustitución (si $\vdash \varphi(p)$ entonces $\vdash \varphi[p/\psi]$).
- Pero dijimos que sustitución no vale en LAP, entonces no podemos usar esta construcción para LAP!
- Presentación alternativa con axiomas esquema:
  - Axioma K: $\Box(\varphi \to \psi) \to \Box\varphi \to \Box\psi$.
  - Reglas: MP y **(Nec)** (si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \Box\varphi$).
- Para **K** es equivalente, pero para LAP no lo es.
- A partir de ahora trabajaremos con axiomas esquema.

Completitud para **PAL**

Teorema.
K + los axiomas de reducción forman un sistema correcto y fuertemente completo para **PAL** con respecto a la clase de todos los modelos.

Demostración.
Sea φ un teorema de **PAL**, obtengo φ' en LMB usando los axiomas de reducción. Como **K** es completa para LMB sobre la clase de todos los modelos, φ' es demostrable en esta clase.

Lógicas Estáticas vs. Lógicas Dinámicas

- Nos movimos a trabajar con operadores dinámicos, pero usando herramientas clásicas de la lógica modal.

Lógicas Estáticas vs. Lógicas Dinámicas

- Nos movimos a trabajar con operadores dinámicos, pero usando herramientas clásicas de la lógica modal.
- Pero dijimos que una lógica dinámica (**PAL**), es igualmente expresiva que la lógica estática LMB.

Lógicas Estáticas vs. Lógicas Dinámicas

- Nos movimos a trabajar con operadores dinámicos, pero usando herramientas clásicas de la lógica modal.
- Pero dijimos que una lógica dinámica (**PAL**), es igualmente expresiva que la lógica estática LMB. (Bisimulaciones? **(Ejercicio).**)

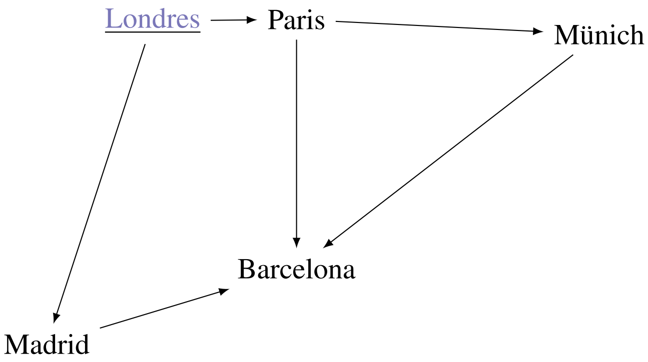
Lógicas Estáticas vs. Lógicas Dinámicas

- Nos movimos a trabajar con operadores dinámicos, pero usando herramientas clásicas de la lógica modal.
- Pero dijimos que una lógica dinámica (**PAL**), es igualmente expresiva que la lógica estática LMB. (Bisimulaciones? **(Ejercicio).**)
- ¿Decepcionados? No, porque a veces podemos representar estáticamente el operador dinámico, pero con algunas consecuencias.

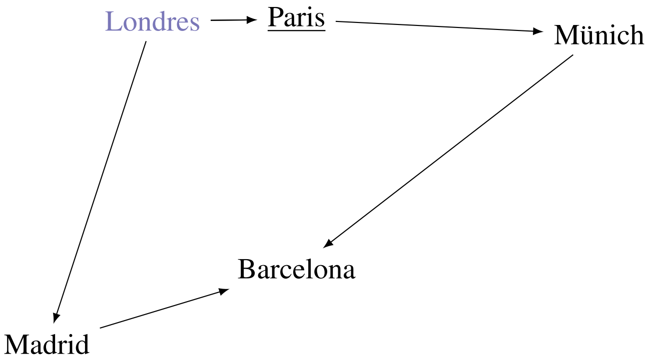
Lógicas Estáticas vs. Lógicas Dinámicas

- Nos movimos a trabajar con operadores dinámicos, pero usando herramientas clásicas de la lógica modal.
- Pero dijimos que una lógica dinámica (**PAL**), es igualmente expresiva que la lógica estática LMB. (Bisimulaciones? **(Ejercicio).**)
- ¿Decepcionados? No, porque a veces podemos representar estáticamente el operador dinámico, pero con algunas consecuencias.
- Mencionamos por ejemplo, que potencialmente tenemos una explosión exponencial en el tamaño de las fórmulas. A veces puede ser peor.

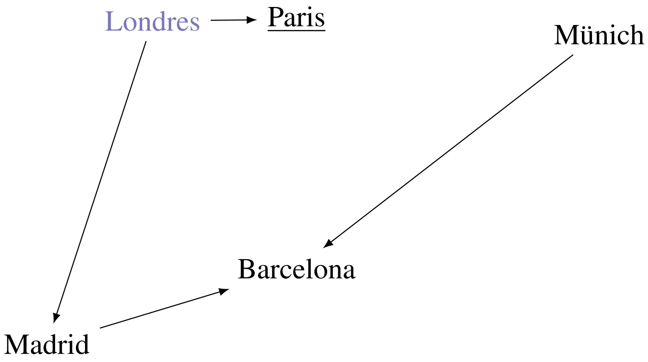
Cambiando el acceso



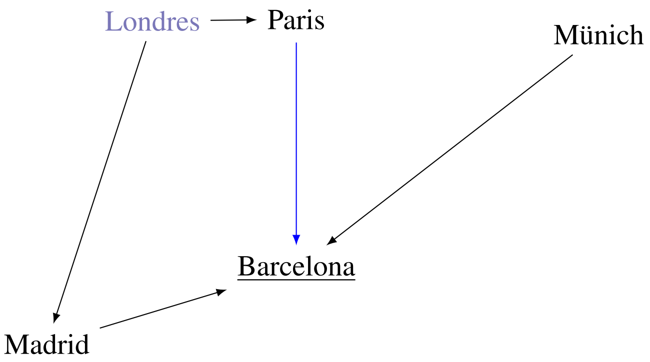
Cambiando el acceso



Cambiando el acceso



Cambiando el acceso



Una nueva lógica modal dinámica

Podemos extender la lógica modal básica, con un operador que modela sabotaje:

$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \varphi \text{ sii existe } (v, v') \in R \text{ tq. } \mathcal{M}^{-}_{vv'}, w \models \varphi,$$

Una nueva lógica modal dinámica

Podemos extender la lógica modal básica, con un operador que modela sabotaje:

$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \varphi \text{ sii existe } (v, v') \in R \text{ tq. } \mathcal{M}^-_{vv'}, w \models \varphi,$$

donde

$$\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle \qquad \mathcal{M}^-_{wv} = \langle W, R^-_{vv'}, V \rangle$$
$$R^-_{vv'} = R \setminus \{(v, v')\}$$

Una nueva lógica modal dinámica

Podemos extender la lógica modal básica, con un operador que modela sabotaje:

$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \varphi \text{ sii existe } (v, v') \in R \text{ tq. } \mathcal{M}^-_{vv'}, w \models \varphi,$$

donde

$$\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle \qquad \mathcal{M}^-_{wv} = \langle W, R^-_{vv'}, V \rangle$$
$$R^-_{vv'} = R \setminus \{(v, v')\}$$

Definimos LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a la lógica LMB extendida con $\langle \mathsf{sb} \rangle$.

Una nueva lógica modal dinámica

Podemos extender la lógica modal básica, con un operador que modela sabotaje:

$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \varphi \text{ sii existe } (v, v') \in R \text{ tq. } \mathcal{M}^{-}_{vv'}, w \models \varphi,$$

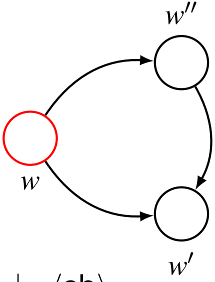
donde

$$\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle \qquad \mathcal{M}^{-}_{wv} = \langle W, R^{-}_{vv'}, V \rangle$$
$$R^{-}_{vv'} = R \setminus \{(v, v')\}$$

Definimos LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a la lógica LMB extendida con $\langle \mathsf{sb} \rangle$.

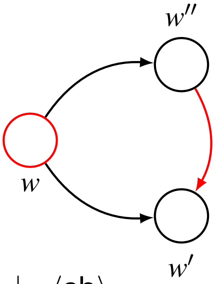
Definimos $[\mathsf{sb}]\varphi := \neg\langle \mathsf{sb} \rangle\neg\varphi$.

Ejemplo



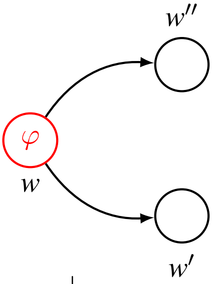
$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$$

Ejemplo



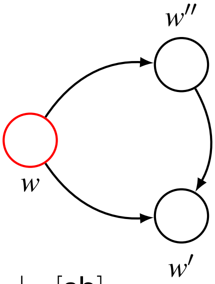
$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$

Ejemplo



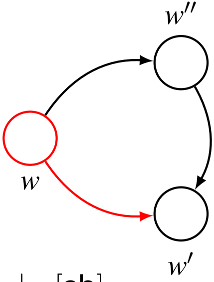
$$\mathcal{M}^{-}_{w'w''}, w \models \varphi$$

Ejemplo



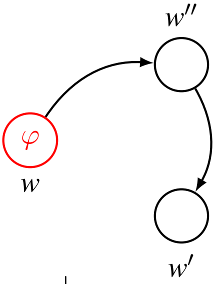
$$\mathcal{M}, w \models [\mathsf{sb}]\varphi$$

Ejemplo



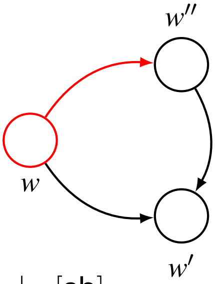
$\mathcal{M}, w \models [\mathsf{sb}]\varphi$

Ejemplo



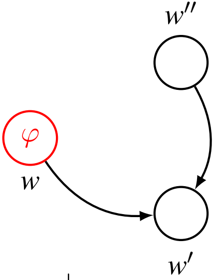
$$\mathcal{M}^{-}_{ww'}, w \models \varphi$$

Ejemplo



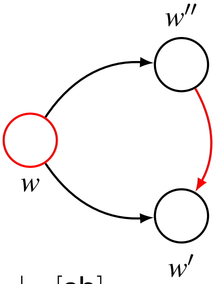
$$\mathcal{M}, w \models [\mathsf{sb}]\varphi$$

Ejemplo



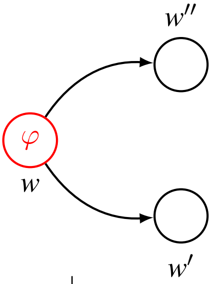
$$\mathcal{M}^{-}_{ww''}, w \models \varphi$$

Ejemplo



$$\mathcal{M}, w \models [\mathsf{sb}]\varphi$$

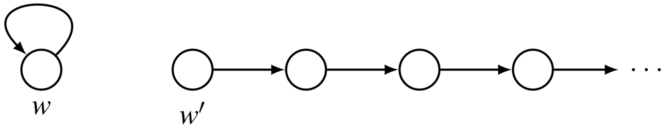
Ejemplo



$$\mathcal{M}^{-}_{w'w''}, w \models \varphi$$

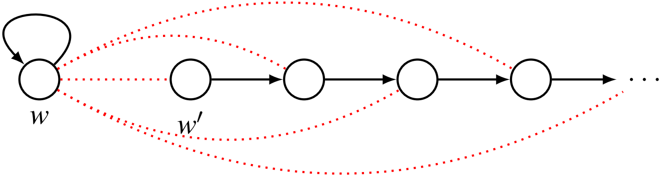
Poder Expresivo: Modelos de Árbol

Consideremos los siguientes modelos:



Poder Expresivo: Modelos de Árbol

Consideremos los siguientes modelos:



Los modelos son bisimilares para la LMB.

Observación: el modelo de la derecha es un árbol.

Tree Model Property para LMB

Teorema:

La LMB tiene la tree model property: para toda fórmula φ de LMB, si φ es satisfacible entonces φ es también satisfacible en la raíz de un árbol.

Tree Model Property para LMB

Teorema:

La LMB tiene la tree model property: para toda fórmula φ de LMB, si φ es satisfacible entonces φ es también satisfacible en la raíz de un árbol.

Idea de la prueba:

Sea $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ y $w \in W$, tal que $\mathcal{M}, w \models \varphi$. Construimos un árbol $\mathcal{T} = \langle W', R', V' \rangle$:

1. Tomar todas las secuencias de puntos que empiezan en w y que son alcanzables via R.
2. A cada secuencia $w \dots v$, le damos la misma valuación que v.
3. Si $(v, u) \in R$, ponemos $(w, \dots v, w \dots vu)$ en R'.
4. $\mathcal{T}$ es un árbol y $\mathcal{T}, w \models \varphi$.

Tree Model Property para LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

Teorema:
LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) no tiene la tree model property.

Tree Model Property para LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

Teorema:

LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) no tiene la tree model property.

Demo.

La fórmula $\Diamond\Diamond\top \wedge [\mathsf{sb}]\Box\bot$ es satisfacible (pensar en un único nodo con un loop) pero no se satisface en la raíz de un árbol.

Tree Model Property para LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

Teorema:
LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) no tiene la tree model property.

Demo.
La fórmula $\Diamond\Diamond\top \wedge [\mathsf{sb}]\Box\bot$ es satisfacible (pensar en un único nodo con un loop) pero no se satisface en la raíz de un árbol.

Corolario.
LMB $<$ LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$); es decir, LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) es estrictamente más expresiva que LMB.

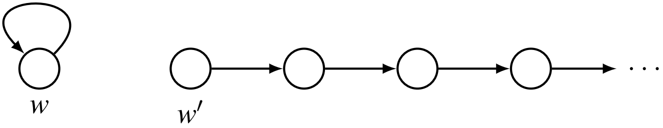
Tree Model Property para LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

Teorema:
LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) no tiene la tree model property.

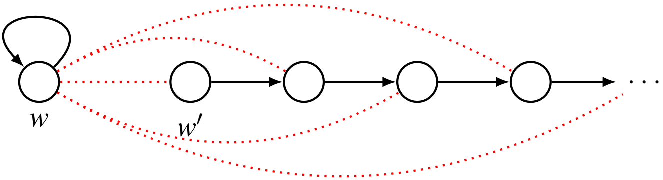
Demo.
La fórmula $\Diamond\Diamond\top \wedge [\mathsf{sb}]\Box\bot$ es satisfacible (pensar en un único nodo con un loop) pero no se satisface en la raíz de un árbol.

Corolario.
LMB $<$ LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$); es decir, LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) es estrictamente más expresiva que LMB.

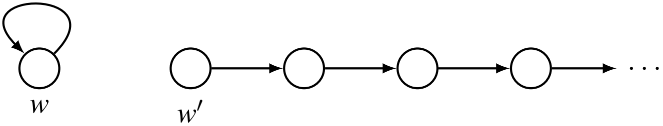
Bisimulaciones



Bisimulaciones

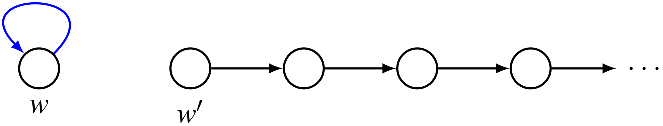


Bisimulaciones



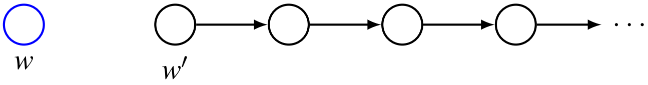
$[\mathsf{sb}]\Box\bot$

Bisimulaciones



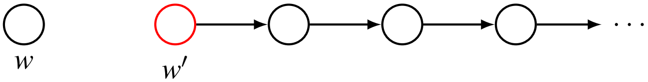
$[\mathsf{sb}]\Box\bot$

Bisimulaciones



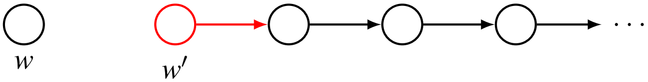
$\Box\bot$

Bisimulaciones



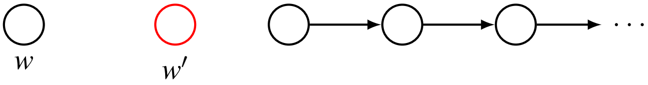
$[\mathsf{sb}]\Box\bot$

Bisimulaciones



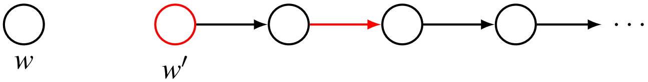
[sb]$\Box\bot$

Bisimulaciones



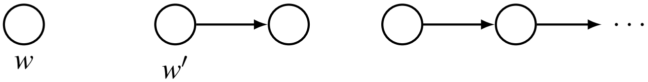
$\Box\bot$

Bisimulaciones



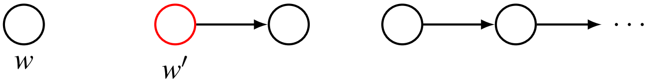
$[\mathsf{sb}]\Box\bot$

Bisimulaciones



$\Box\bot$

Bisimulaciones



$\xcancel{\Box\bot}$

Bisimulaciones y Poder Expresivo

- LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) más expresiva que LMB significa LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) captura ciertas propiedades que LMB no puede capturar.
- Las bisimulaciones relacionan estados o mundos con propiedades parecidas.
- Para LMB, estas son: información proposicional (atom), e información sobre los sucesores (zig y zag).

Bisimulaciones y Poder Expresivo

- LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) más expresiva que LMB significa LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) captura ciertas propiedades que LMB no puede capturar.
- Las bisimulaciones relacionan estados o mundos con propiedades parecidas.
- Para LMB, estas son: información proposicional (atom), e información sobre los sucesores (zig y zag).
- Para sabotage, estas condiciones no son suficientes.

Bisimulaciones y Poder Expresivo

- LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) más expresiva que LMB significa LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) captura ciertas propiedades que LMB no puede capturar.
- Las bisimulaciones relacionan estados o mundos con propiedades parecidas.
- Para LMB, estas son: información proposicional (atom), e información sobre los sucesores (zig y zag).
- Para sabotage, estas condiciones no son suficientes.
- ¿Qué propiedades necesitamos para sabotage?

Bisimulaciones y Poder Expresivo

- LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) más expresiva que LMB significa LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) captura ciertas propiedades que LMB no puede capturar.
- Las bisimulaciones relacionan estados o mundos con propiedades parecidas.
- Para LMB, estas son: información proposicional (atom), e información sobre los sucesores (zig y zag).
- Para sabotage, estas condiciones no son suficientes.
- ¿Qué propiedades necesitamos para sabotage?
- Claramente, información sobre la eliminación de ejes.

LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-bisimulaciones

En este caso, las bisimulaciones relaciona pares (estado,ejes).

LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-bisimulaciones

En este caso, las bisimulaciones relaciona pares (estado,ejes).

Sean $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ y $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ dos modelos.
$Z \subseteq (W \times 2^{W^2}) \times (W' \times 2^{W'^2})$ es una bisimulación si $(w, S)Z(w', S')$ implica:

(Atomic Harmony) $w \in V(p)$ sii $w' \in V'(p)$, para todo $p \in \mathsf{PROP}$;

(Zig) si $(w, v) \in S$ entonces existe v' tq. $(w', v') \in S'$ y $(v, S)Z(v', S')$;

(Zag) si $(w', v') \in S'$ entonces existe v tq. $(w, v) \in S$ y $(v, S)Z(v', S')$;

LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-bisimulaciones

En este caso, las bisimulaciones relaciona pares (estado,ejes).

Sean $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ y $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ dos modelos.
$Z \subseteq (W \times 2^{W^2}) \times (W' \times 2^{W'^2})$ es una bisimulación si $(w, S)Z(w', S')$ implica:

(Atomic Harmony) $w \in V(p)$ sii $w' \in V'(p)$, para todo $p \in \mathsf{PROP}$;
(Zig) si $(w, v) \in S$ entonces existe v' tq. $(w', v') \in S'$ y $(v, S)Z(v', S')$;
(Zag) si $(w', v') \in S'$ entonces existe v tq. $(w, v) \in S$ y $(v, S)Z(v', S')$;
($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zig) si $(x, y) \in S$ entonces existe $(x', y') \in S'$ tq. $(w, S^{-}_{xy})Z(w', S'^{-}_{x'y'})$;

LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-bisimulaciones

En este caso, las bisimulaciones relaciona pares (estado,ejes).

Sean $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ y $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ dos modelos.
$Z \subseteq (W \times 2^{W^2}) \times (W' \times 2^{W'^2})$ es una bisimulación si $(w, S)Z(w', S')$ implica:

(Atomic Harmony) $w \in V(p)$ sii $w' \in V'(p)$, para todo $p \in \mathsf{PROP}$;

(Zig) si $(w, v) \in S$ entonces existe v' tq. $(w', v') \in S'$ y $(v, S)Z(v', S')$;

(Zag) si $(w', v') \in S'$ entonces existe v tq. $(w, v) \in S$ y $(v, S)Z(v', S')$;

($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zig) si $(x, y) \in S$ entonces existe $(x', y') \in S'$ tq. $(w, S^{-}_{xy})Z(w', S'^{-}_{x'y'})$;

($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zag) si $(x', y') \in S'$ entonces existe $(x, y) \in S$ tq. $(w, S^{-}_{xy})Z(w', S'^{-}_{x'y'})$.

LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-bisimulaciones

En este caso, las bisimulaciones relaciona pares (estado,ejes).

Sean $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ y $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ dos modelos.
$Z \subseteq (W \times 2^{W^2}) \times (W' \times 2^{W'^2})$ es una bisimulación si $(w, S)Z(w', S')$ implica:

(Atomic Harmony) $w \in V(p)$ sii $w' \in V'(p)$, para todo $p \in \mathsf{PROP}$;
(Zig) si $(w, v) \in S$ entonces existe v' tq. $(w', v') \in S'$ y $(v, S)Z(v', S')$;
(Zag) si $(w', v') \in S'$ entonces existe v tq. $(w, v) \in S$ y $(v, S)Z(v', S')$;
($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zig) si $(x, y) \in S$ entonces existe $(x', y') \in S'$ tq. $(w, S^-_{xy})Z(w', S'^-_{x'y'})$;
($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zag) si $(x', y') \in S'$ entonces existe $(x, y) \in S$ tq. $(w, S^-_{xy})Z(w', S'^-_{x'y'})$.

$\mathcal{M}, w \leftrightarrows_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ si $\exists$ una bisimulación Z tq. $(w, R)Z(w', R')$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarrows_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarrows_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Vamos a generalizar este enunciado:

Hipótesis inductiva

Para todo $S \subseteq W^2, S' \subseteq W'^2$, $(w, S) Z (w', S')$ implica $\langle W, S, V \rangle, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \langle W', S', V' \rangle, w'$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarroweq_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Vamos a generalizar este enunciado:

Hipótesis inductiva

Para todo $S \subseteq W^2, S' \subseteq W'^2$, $(w, S)Z(w', S')$ implica $\langle W, S, V \rangle, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \langle W', S', V' \rangle, w'$.

Demo.

Consideremos el caso para $\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$. Supongamos $\langle W, S, V \rangle, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarrows_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Vamos a generalizar este enunciado:

Hipótesis inductiva

Para todo $S \subseteq W^2, S' \subseteq W'^2$, $(w, S)Z(w', S')$ implica $\langle W, S, V \rangle, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \langle W', S', V' \rangle, w'$.

Demo.

Consideremos el caso para $\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$. Supongamos $\langle W, S, V \rangle, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.
Entonces existe $(x, y) \in S$ tq. $\langle W, S^{-}_{x,y}, V \rangle, w \models \psi$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarrows_{\mathrm{LMB}(\langle\mathsf{sb}\rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle\mathsf{sb}\rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Vamos a generalizar este enunciado:

Hipótesis inductiva

Para todo $S \subseteq W^2, S' \subseteq W'^2$, $(w, S)Z(w', S')$ implica $\langle W, S, V\rangle, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle\mathsf{sb}\rangle)} \langle W', S', V'\rangle, w'$.

Demo.

Consideremos el caso para $\langle\mathsf{sb}\rangle\varphi$. Supongamos $\langle W, S, V\rangle, w \models \langle\mathsf{sb}\rangle\psi$.
Entonces existe $(x, y) \in S$ tq. $\langle W, S^-_{x,y}, V\rangle, w \models \psi$.
Por ($\langle\mathsf{sb}\rangle$-Zig), existe $(x', y') \in S'$ tq. $(w, S^-_{xy})Z(w', S'^-_{x'y'})$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarrows_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Vamos a generalizar este enunciado:

Hipótesis inductiva

Para todo $S \subseteq W^2, S' \subseteq W'^2$, $(w, S)Z(w', S')$ implica $\langle W, S, V \rangle, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \langle W', S', V' \rangle, w'$.

Demo.

Consideremos el caso para $\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$. Supongamos $\langle W, S, V \rangle, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.
Entonces existe $(x, y) \in S$ tq. $\langle W, S^{-}_{x,y}, V \rangle, w \models \psi$.
Por ($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zig), existe $(x', y') \in S'$ tq. $(w, S^{-}_{xy})Z(w', S'^{-}_{x'y'})$.
Por HI, $\langle W', S'^{-}_{x'y'}, V' \rangle, w' \models \psi$ y por ($\models$) $\langle W', S', V' \rangle, w' \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarroweq_{\text{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\text{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Vamos a generalizar este enunciado:

Hipótesis inductiva

Para todo $S \subseteq W^2, S' \subseteq W'^2$, $(w, S)Z(w', S')$ implica $\langle W, S, V \rangle, w \equiv_{\text{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \langle W', S', V' \rangle, w'$.

Demo.

Consideremos el caso para $\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$. Supongamos $\langle W, S, V \rangle, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.
Entonces existe $(x, y) \in S$ tq. $\langle W, S^-_{x,y}, V \rangle, w \models \psi$.
Por ($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zig), existe $(x', y') \in S'$ tq. $(w, S^-_{xy})Z(w', S'^-_{x'y'})$.
Por HI, $\langle W', S'^-_{x'y'}, V' \rangle, w' \models \psi$ y por ($\models$) $\langle W', S', V' \rangle, w' \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.
Para la otra dirección usamos $\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zag.

•

Lógicas Modales como Fragmentos de Primer Orden

$$
\begin{array}{lcl}
\mathsf{ST}_x(p) & = & P(x) \\
\mathsf{ST}_x(\neg\varphi) & = & \neg\mathsf{ST}_x(\varphi) \\
\mathsf{ST}_x(\varphi \wedge \psi) & = & \mathsf{ST}_x(\varphi) \wedge \mathsf{ST}_x(\psi) \\
\mathsf{ST}_x(\langle r\rangle\varphi) & = & \exists y.(R_r(x,y) \wedge \mathsf{ST}_y(\varphi))
\end{array}
$$

Lógicas Modales como Fragmentos de Primer Orden

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{ST}_x(p) & = & P(x) \\ \mathsf{ST}_x(\neg\varphi) & = & \neg\mathsf{ST}_x(\varphi) \\ \mathsf{ST}_x(\varphi \wedge \psi) & = & \mathsf{ST}_x(\varphi) \wedge \mathsf{ST}_x(\psi) \\ \mathsf{ST}_x(\langle r \rangle \varphi) & = & \exists y.(R_r(x,y) \wedge \mathsf{ST}_y(\varphi)) \end{array}$$

- $\mathsf{ST}_x(\varphi)$ le hace corresponder, a cada fórmula φ, una fórmula de primer orden con exactamente una variable libre x.

Lógicas Modales como Fragmentos de Primer Orden

$$\begin{array}{lcl}
\mathsf{ST}_x(p) & = & P(x) \\
\mathsf{ST}_x(\neg\varphi) & = & \neg\mathsf{ST}_x(\varphi) \\
\mathsf{ST}_x(\varphi \wedge \psi) & = & \mathsf{ST}_x(\varphi) \wedge \mathsf{ST}_x(\psi) \\
\mathsf{ST}_x(\langle r\rangle\varphi) & = & \exists y.(R_r(x,y) \wedge \mathsf{ST}_y(\varphi))
\end{array}$$

- $\mathsf{ST}_x(\varphi)$ le hace corresponder, a cada fórmula φ, una fórmula de primer orden con exactamente una variable libre x.
- Esta variable libre da cuenta del punto de evaluación en la semántica modal (recordar la "perspectiva interna").

Lógicas Modales como Fragmentos de Primer Orden

$$\begin{array}{lcl}
\mathsf{ST}_x(p) & = & P(x) \\
\mathsf{ST}_x(\neg\varphi) & = & \neg\mathsf{ST}_x(\varphi) \\
\mathsf{ST}_x(\varphi \wedge \psi) & = & \mathsf{ST}_x(\varphi) \wedge \mathsf{ST}_x(\psi) \\
\mathsf{ST}_x(\langle r\rangle\varphi) & = & \exists y.(R_r(x,y) \wedge \mathsf{ST}_y(\varphi))
\end{array}$$

- $\mathsf{ST}_x(\varphi)$ le hace corresponder, a cada fórmula φ, una fórmula de primer orden con exactamente una variable libre x.
- Esta variable libre da cuenta del punto de evaluación en la semántica modal (recordar la "perspectiva interna").

Teorema

Para toda fórmula φ de la lógica modal básica, todo modelo $\mathcal{M}$, todo w en el dominio de $\mathcal{M}$ y toda asignación g,

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \textit{ sii } \mathcal{M}, g[x \mapsto w] \models \mathsf{ST}_x(\varphi)$$

Traducimos LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a LPO

Escribimos xy en vez de (x, y), y definimos:

$$
\begin{array}{lll}
nm = xy & \text{se define como} & n = x \wedge m = y \\
nm \neq xy & \text{se define como} & n \neq x \ \vee \ m \neq y \\
nm \in S & \text{se define como} & \bigvee_{xy \in S} nm = xy, \ \text{and} \\
nm \notin S & \text{se define como} & \bigwedge_{xy \in S} nm \neq xy,
\end{array}
$$

donde S es un conjunto finito de pares de variables.
En particular, $nm \in \emptyset$ es equivalente a $\bot$ y $nm \notin \emptyset$ es equivalente a $\top$.
Tambíen defininimos: $S^{-1} = \{mn \mid nm \in S\}$.

Traducción Estándar de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a FOL

Los casos no triviales de la traducción ST son:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{ST}_{x,S}(\langle r \rangle \varphi) & = & \exists y.(R_r(x,y) \wedge xy \notin S \wedge \mathsf{ST}_{y,S}(\varphi)) \\ \mathsf{ST}_{x,S}(\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi) & = & \exists yy'.(R_r(y,y') \wedge yy' \notin S \wedge \mathsf{ST}_{x,S \cup yy'}(\varphi)) \end{array}$$

donde y y y' son variables no utilizadas aún en la traducción.

Traducción Estándar de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a FOL

Los casos no triviales de la traducción ST son:

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{ST}_{x,S}(\langle r \rangle \varphi) & = & \exists y.(R_r(x,y) \wedge xy \notin S \wedge \mathsf{ST}_{y,S}(\varphi)) \\ \mathsf{ST}_{x,S}(\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi) & = & \exists yy'.(R_r(y,y') \wedge yy' \notin S \wedge \mathsf{ST}_{x,S \cup yy'}(\varphi)) \end{array}$$

donde y y y' son variables no utilizadas aún en la traducción.

- S guarda los pares que fueron borrados.

Traducción Estándar de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a FOL

Los casos no triviales de la traducción ST son:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{ST}_{x,S}(\langle r \rangle \varphi) & = & \exists y.(R_r(x,y) \wedge xy \notin S \wedge \mathsf{ST}_{y,S}(\varphi)) \\ \mathsf{ST}_{x,S}(\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi) & = & \exists yy'.(R_r(y,y') \wedge yy' \notin S \wedge \mathsf{ST}_{x,S \cup yy'}(\varphi)) \end{array}$$

donde y y y' son variables no utilizadas aún en la traducción.

- S guarda los pares que fueron borrados.
- Para $\langle r \rangle$ necesitamos agregar la condición $xy \notin S$.

Traducción Estándar de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a FOL

Los casos no triviales de la traducción ST son:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{ST}_{x,S}(\langle r \rangle \varphi) & = & \exists y.(R_r(x,y) \land xy \notin S \land \mathsf{ST}_{y,S}(\varphi)) \\ \mathsf{ST}_{x,S}(\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi) & = & \exists yy'.(R_r(y,y') \land yy' \notin S \land \mathsf{ST}_{x,S \cup yy'}(\varphi)) \end{array}$$

donde y y y' son variables no utilizadas aún en la traducción.

- S guarda los pares que fueron borrados.
- Para $\langle r \rangle$ necesitamos agregar la condición $xy \notin S$.
- Recordar: $nm \notin S = \bigwedge_{xy \in S} nm \neq xy$

Traducción Estándar de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a FOL

Los casos no triviales de la traducción ST son:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{ST}_{x,S}(\langle r \rangle \varphi) & = & \exists y.(R_r(x,y) \wedge xy \notin S \wedge \mathsf{ST}_{y,S}(\varphi)) \\ \mathsf{ST}_{x,S}(\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi) & = & \exists yy'.(R_r(y,y') \wedge yy' \notin S \wedge \mathsf{ST}_{x,S\cup yy'}(\varphi)) \end{array}$$

donde y y y' son variables no utilizadas aún en la traducción.

- S guarda los pares que fueron borrados.
- Para $\langle r \rangle$ necesitamos agregar la condición $xy \notin S$.
- Recordar: $nm \notin S = \bigwedge_{xy \in S} nm \neq xy$
- Similar para $\langle \mathsf{sb} \rangle$, pero agregando el nuevo par eliminado a S.

Complejidad de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-SAT

- Sabemos que LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-SAT es más expresiva que LMB (e.g., puede forzar un loop en un nodo.)
- Cuanto más?

Complejidad de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-SAT

- Sabemos que LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-SAT es más expresiva que LMB (e.g., puede forzar un loop en un nodo.)
- Cuanto más?
- Expresividad y Complejidad van de la mano. Usualmente, a mayor expresividad de un lenguaje, más difícil es razonar con él.
- Ejemplo: SAT para LPO es indecidible.

Complejidad de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-SAT

- Sabemos que LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-SAT es más expresiva que LMB (e.g., puede forzar un loop en un nodo.)
- Cuanto más?
- Expresividad y Complejidad van de la mano. Usualmente, a mayor expresividad de un lenguaje, más difícil es razonar con él.
- Ejemplo: SAT para LPO es indecidible.
- Cuál será la complejidad de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-SAT?

Complejidad de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-SAT

- Sabemos que LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-SAT es más expresiva que LMB (e.g., puede forzar un loop en un nodo.)
- Cuanto más?
- Expresividad y Complejidad van de la mano. Usualmente, a mayor expresividad de un lenguaje, más difícil es razonar con él.
- Ejemplo: SAT para LPO es indecidible.
- Cuál será la complejidad de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-SAT? Indecidible!

Complejidad de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-SAT

- Sabemos que LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-SAT es más expresiva que LMB (e.g., puede forzar un loop en un nodo.)
- Cuanto más?
- Expresividad y Complejidad van de la mano. Usualmente, a mayor expresividad de un lenguaje, más difícil es razonar con él.
- Ejemplo: SAT para LPO es indecidible.
- Cuál será la complejidad de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-SAT? Indecidible!

C. Areces, R. Fervari, G. Hoffmann, and M. Martel.
Satisfiability for relation-changing logics.
Journal of Logic and Computation, 28(7):1443–1470, 2018.

Axiomatizando LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

- Consideremos la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond \top \rightarrow \langle \mathsf{sb} \rangle p$.

Axiomatizando LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

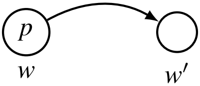
- Consideremos la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \rightarrow \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.

Axiomatizando LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

- Consideremos la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$.

Axiomatizando LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

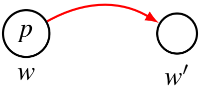
- Consideremos la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$.



$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$$

Axiomatizando LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

- Consideremos la fórmula $\varphi = p \land \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \land \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$.



$\langle \mathsf{sb} \rangle p \land \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$

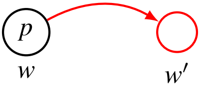
Axiomatizando LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

- Consideremos la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$.

$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$$

Axiomatizando LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

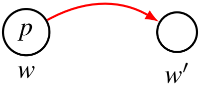
- Consideremos la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \rightarrow \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \rightarrow \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$.



$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \rightarrow \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$$

Axiomatizando LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

- Consideremos la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$.



$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$$

Axiomatizando LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

- Consideremos la fórmula $\varphi = p \land \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \land \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$.

$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \land \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$$

Axiomatizando LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

- Consideremos la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \rightarrow \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \rightarrow \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$.

$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \rightarrow \langle \mathsf{sb} \rangle \cancel{\langle \mathsf{sb} \rangle p}$$

Axiomatizando LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

- Consideremos la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$.

$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \cancel{\langle \mathsf{sb} \rangle p}$$

- Corolario: Sustitución uniforme falla en LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$).

Axiomatizando LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

- Consideremos la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$.

$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \cancel{\langle \mathsf{sb} \rangle p}$$

- Corolario: Sustitución uniforme falla en LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$).

CONTINUARÁ!

Otras transformaciones

Consideremos los siguientes operadores sobre relaciones:

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M}^{+}_{wv} = \langle W, R^{+}_{wv}, V \rangle \quad R^{+}_{wv} & = & R \cup \{(w, v)\} \\
\mathcal{M}^{*}_{wv} = \langle W, R^{*}_{wv}, V \rangle \quad R^{*}_{wv} & = & (R \backslash \{(v, w)\}) \cup \{(w, v)\}.
\end{array}
$$

Otras transformaciones

Consideremos los siguientes operadores sobre relaciones:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{M}^+_{wv} = \langle W, R^+_{wv}, V\rangle \quad R^+_{wv} & = & R \cup \{(w,v)\} \\ \mathcal{M}^*_{wv} = \langle W, R^*_{wv}, V\rangle \quad R^*_{wv} & = & (R \backslash \{(v,w)\}) \cup \{(w,v)\}. \end{array}$$

Definimos dos nuevas modalidades (bridge y swap):

$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{br} \rangle \varphi \quad \text{sii} \quad \text{existe v,v' tq. } (v, v') \notin R \text{ y } \mathcal{M}^+_{vv'}, w \models \varphi$$

Otras transformaciones

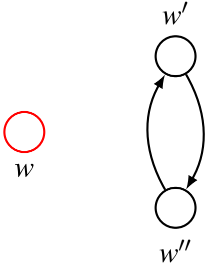
Consideremos los siguientes operadores sobre relaciones:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{M}^+_{wv} = \langle W, R^+_{wv}, V\rangle \quad R^+_{wv} & = & R \cup \{(w,v)\} \\ \mathcal{M}^*_{wv} = \langle W, R^*_{wv}, V\rangle \quad R^*_{wv} & = & (R\backslash\{(v,w)\}) \cup \{(w,v)\}. \end{array}$$

Definimos dos nuevas modalidades (bridge y swap):

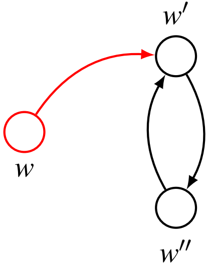
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{br}\rangle\varphi & \text{sii} & \text{existe v,v' tq. } (v,v') \notin R \text{ y } \mathcal{M}^+_{vv'}, w \models \varphi \\ \mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sw}\rangle\varphi & \text{sii} & \text{existe v,v' tq. } (v,v') \in R \text{ y } \mathcal{M}^*_{vv'}, w \models \varphi \end{array}$$

Bridge Logic - Ejemplo



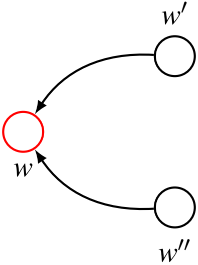
$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{br} \rangle \Diamond \top$$

Bridge Logic - Ejemplo



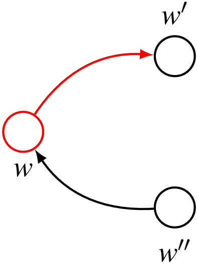
$$\mathcal{M}^+_{ww'}, w \models \Diamond\top$$

Swap Logic - Ejemplo



$\mathcal{M}, w \models \langle \textsf{sw} \rangle \Diamond \top$

Swap Logic - Ejemplo



$$\mathcal{M}^{*}_{w'w}, w \models \Diamond\top$$

Lo que vimos hoy

- Nuestra primera lógica dinámica mas expresiva LMB: lógica de sabotaje.
  - Falla de la Tree Model Property.
  - Bisimulación.
  - Traducción a FOL.
  - Falla de Sustitución Uniforme.
- Otros operadores dinámicos.

Lo que viene

- Cómo axiomatizamos LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)?