Normalización por Evaluación

Miguel Pagano

December 6, 2010

Introducción

- Teoría de tipos
- Cálculo lambda simplemente tipado
- Semántica
- Normalización por Evaluación (NbE)
- NbE en tipos dependientes y trabajos futuros

El cálculo

Tipos:

$$\tau \in \text{Types} ::= \iota \mid \tau \to \tau$$

El cálculo

Tipos:

$$\tau \in \text{Types} ::= \iota \mid \tau \to \tau$$

Contextos:

$$x_1 : \tau_1, \ldots, x_n : \tau_n$$

El cálculo

Tipos:

$$\tau \in \text{Types} ::= \iota \mid \tau \to \tau$$

Contextos:

$$x_1 : \tau_1, \ldots, x_n : \tau_n$$

Términos:

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash t : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x.t : \tau \to \tau'}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \tau \to \tau' \qquad \Gamma \vdash t' : \tau}{\Gamma \vdash t\ t' : \tau'}$$

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau}$$

El cálculo

Tipos:

$$\tau \in \text{Types} ::= \iota \mid \tau \to \tau$$

Contextos:

$$x_1 : \tau_1, \ldots, x_n : \tau_n$$

Términos:

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash t : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x.t : \tau \to \tau'}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \tau \to \tau' \qquad \Gamma \vdash t' : \tau}{\Gamma \vdash t\ t' : \tau'}$$

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau}$$

Axioma:

$$(\lambda x.t)\ t' \rightsquigarrow t[x/t'] \qquad (\beta)$$

Computación

La regla β define una noción de computación: el *valor* de un término t es la forma normal de ese término; para obtenerla aplicamos la regla β tantas veces como sea posible.

Computación

La regla β define una noción de computación: el *valor* de un término t es la forma normal de ese término; para obtenerla aplicamos la regla β tantas veces como sea posible.

Podemos caracterizar las formas normales con las siguientes gramáticas:

$$
\begin{aligned}
Ne \ni k &::= x_i \mid k\ v \\
Nf \ni v &::= k \mid \lambda x_i . v
\end{aligned}
$$

La semántica

Fijamos un conjunto $[\![\iota]\!]$ para interpretar ι y (un sub-conjunto de) $[\![\tau]\!] \to [\![\tau']\!]$ para interpretar $\tau \to \tau'$.

La semántica

Fijamos un conjunto $[\![\iota]\!]$ para interpretar ι y (un sub-conjunto de) $[\![\tau]\!] \to [\![\tau']\!]$ para interpretar $\tau \to \tau'$.

Entonces podemos definir la interpretación del cálculo:

$$[\![\_]\!]\_ \in \mathrm{Terms} \times (\mathit{Vars} \to \bigcup_{\tau \in \mathsf{Types}} [\![\tau]\!]) \to [\![\tau]\!]$$

$$\begin{aligned} [\![x_i]\!]\eta &= \eta x_i \\ [\![\lambda x_i.t]\!]\eta &= d \mapsto [\![t]\!][\eta \,|\, x_i \mapsto d] \\ [\![t\ t']\!]\eta &= [\![t]\!]\eta\ ([\![t']\!]\eta) \end{aligned}$$

La semántica

Fijamos un conjunto $[\![\iota]\!]$ para interpretar ι y (un sub-conjunto de) $[\![\tau]\!] \to [\![\tau']\!]$ para interpretar $\tau \to \tau'$.

Entonces podemos definir la interpretación del cálculo:

$$[\![\_]\!]\_ \in \mathrm{Terms} \times (\mathit{Vars} \to \bigcup_{\tau \in \mathsf{Types}} [\![\tau]\!]) \to [\![\tau]\!]$$

$$[\![x_i]\!]\eta = \eta x_i$$

$$[\![\lambda x_i.t]\!]\eta = d \mapsto [\![t]\!][\eta \,|\, x_i \mapsto d]$$

$$[\![t\ t']\!]\eta = [\![t]\!]\eta\ ([\![t']\!]\eta)$$

Se puede probar **corrección**: si $\Gamma \vdash t = t' : \tau$ y η es un entorno apropiado para Γ, entonces $[\![t]\!]\eta = [\![t']\!]\eta \in [\![\tau]\!]$.

Normalización por Evaluación

Sea $\Gamma \vdash t : \tau$ y $\mathbf{nf}(t)$ la forma normal de t. La idea de NbE es evaluar t en un modelo apropiado del cual se puede recuperar su forma normal a través de una función de *reificación*.

$$
\begin{tikzcd}
t \arrow[rr, "{[\![\_]\!]\eta}"] \arrow[dr, dotted] & & d \in [\![\tau]\!] \arrow[dl, "\mathrm{R}\,\_"] \\
& \mathbf{nf}(t) &
\end{tikzcd}
$$

Normalización por Evaluación

Sea $\Gamma \vdash t : \tau$ y $\mathbf{nf}(t)$ la forma normal de t. La idea de NbE es evaluar t en un modelo apropiado del cual se puede recuperar su forma normal a través de una función de *reificación*.

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[rr, "{[\![_]\!]\eta}"] \arrow[dr, dotted] & & d \in [\![\tau]\!] \arrow[dl, "\mathrm{R}\ _"] \\
& \mathbf{nf}(t) &
\end{tikzcd}$$

El diagrama expresa la propiedad de **corrección** de NbE:

$$\Gamma \vdash t = \mathrm{R}\,([\![t]\!]\rho) : \tau$$

El modelo apropiado para NbE

Dado el conjunto de variables *Vars*, el modelo concreto que usamos es un dominio

$$D \cong Vars_{\perp} \oplus (D \times D) \oplus [D \to D]$$

con las inyecciones:

$$\begin{aligned} Var &: Vars \to D \\ App &: D \times D \to D \\ Lam &: [D \to D] \to D \end{aligned}$$

El modelo apropiado para NbE

Dado el conjunto de variables *Vars*, el modelo concreto que usamos es un dominio

$$D \cong Vars_{\perp} \oplus (D \times D) \oplus [D \to D]$$

con las inyecciones:

$$\begin{aligned} Var &: Vars \to D \\ App &: D \times D \to D \\ Lam &: [D \to D] \to D \end{aligned}$$

La aplicación se puede extender a una operación binaria sobre D

$$\begin{aligned} \_ \cdot \_ &\in D \times D \to D \\ d \cdot d' &= \begin{cases} f\ d' & \text{si } d = Lam\ f \\ App(d, d') & \text{cc} \end{cases} \end{aligned}$$

Función de reificación

La función de reificación $\mathrm{R}\_\,\_ : \mathbb{N} \times D \to \mathrm{Terms}$ toma un argumento que indica qué variable se puede usar para que la abstracción obtenida al reificar una función no capture ninguna variable.

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_j\,(\mathrm{App}(d, d')) &= (\mathrm{R}_j\, d)\ (\mathrm{R}_j\, d') \\
\mathrm{R}_j\,(\mathrm{Lam}\ f) &= \lambda x_j.\mathrm{R}_{j+1}\,(f(\mathrm{Var}\ x_j)) \\
\mathrm{R}_j\,(\mathrm{Var}\ x_i) &= x_i
\end{aligned}$$

El modelo apropiado para NbE

Ahora podemos definir sub-conjuntos del dominio que serán reificados siempre como términos neutrales o como formas normales:

$$d \in \mathcal{N}e \text{ sii } \mathrm{R}_j\, d \in Ne \text{ , para todo } j$$
$$d \in \mathcal{N}f \text{ sii } \mathrm{R}_j\, d \in Nf \text{ , para todo } j$$

El modelo apropiado para NbE

Ahora podemos definir sub-conjuntos del dominio que serán reificados siempre como términos neutrales o como formas normales:

$$d \in \mathcal{N}e \text{ sii } \mathsf{R}_j\, d \in Ne \text{ , para todo } j$$
$$d \in \mathcal{N}f \text{ sii } \mathsf{R}_j\, d \in Nf \text{ , para todo } j$$

Con estas definiciones definimos la semántica de tipos:

$$\begin{aligned} [\![\iota]\!] &= \mathcal{N}e \\ [\![\tau \to \tau']\!] &= \{d \in D \mid \text{para todo } d' \in [\![\tau]\!], d \cdot d' \in [\![\tau']\!]\} \end{aligned}$$

El modelo apropiado para NbE

Ahora podemos definir sub-conjuntos del dominio que serán reificados siempre como términos neutrales o como formas normales:

$$d \in \mathcal{N}e \text{ sii } \mathrm{R}_j\, d \in Ne \text{ , para todo } j$$
$$d \in \mathcal{N}f \text{ sii } \mathrm{R}_j\, d \in Nf \text{ , para todo } j$$

Con estas definiciones definimos la semántica de tipos:

$$\begin{aligned} [\![\iota]\!] &= \mathcal{N}e \\ [\![\tau \to \tau']\!] &= \{d \in D \mid \text{para todo } d' \in [\![\tau]\!], d \cdot d' \in [\![\tau']\!]\} \end{aligned}$$

Se puede probar que la semántica de cada tipo es saturada:

$$\mathcal{N}e \subseteq [\![\tau]\!] \subseteq \mathcal{N}f \quad .$$

El modelo apropiado para NbE

Ahora podemos definir sub-conjuntos del dominio que serán reificados siempre como términos neutrales o como formas normales:

$$d \in \mathcal{N}e \text{ sii } \mathrm{R}_j\, d \in Ne\ \text{, para todo } j$$
$$d \in \mathcal{N}f \text{ sii } \mathrm{R}_j\, d \in Nf\ \text{, para todo } j$$

Con estas definiciones definimos la semántica de tipos:

$$\begin{aligned} [\![\iota]\!] &= \mathcal{N}e \\ [\![\tau \to \tau']\!] &= \{d \in D \mid \text{para todo } d' \in [\![\tau]\!], d \cdot d' \in [\![\tau']\!]\} \end{aligned}$$

Se puede probar que la semántica de cada tipo es saturada:

$$\mathcal{N}e \subseteq [\![\tau]\!] \subseteq \mathcal{N}f \quad .$$

El entorno $\rho x_i = Var\ x_i$ es apropiado para cualquier contexto, entonces definimos: $\mathbf{nbe}(t) = \mathrm{R}_0\,([\![t]\!]\rho)$

NbE en tipos dependientes

El trabajo presentado aquí se basa en un trabajo conjunto con Coquand y Abel para tipos dependientes, que simplifica versiones previas de NbE.

1. En teoría de tipos dependientes hay una noción de igualdad entre tipos, y esa igualdad participa en las reglas de tipado.

NbE en tipos dependientes

El trabajo presentado aquí se basa en un trabajo conjunto con Coquand y Abel para tipos dependientes, que simplifica versiones previas de NbE.

1. En teoría de tipos dependientes hay una noción de igualdad entre tipos, y esa igualdad participa en las reglas de tipado.
2. El chequeador de tipos depende de un procedimiento de decisión de la igualdad entre tipos. Alcanza con un procedimiento de normalización correcto y completo: se calcula la forma normal y se comparan sintácticamente las formas normales.

NbE en tipos dependientes

El trabajo presentado aquí se basa en un trabajo conjunto con Coquand y Abel para tipos dependientes, que simplifica versiones previas de NbE.

1. En teoría de tipos dependientes hay una noción de igualdad entre tipos, y esa igualdad participa en las reglas de tipado.
2. El chequeador de tipos depende de un procedimiento de decisión de la igualdad entre tipos. Alcanza con un procedimiento de normalización correcto y completo: se calcula la forma normal y se comparan sintácticamente las formas normales.
3. Los modelos apropiados para poder definir NbE dependen de la teoría; por ejemplo, si uno tiene la regla η es necesario un modelo con relaciones de equivalencia parcial.

NbE en tipos dependientes

El trabajo presentado aquí se basa en un trabajo conjunto con Coquand y Abel para tipos dependientes, que simplifica versiones previas de NbE.

1. En teoría de tipos dependientes hay una noción de igualdad entre tipos, y esa igualdad participa en las reglas de tipado.
2. El chequeador de tipos depende de un procedimiento de decisión de la igualdad entre tipos. Alcanza con un procedimiento de normalización correcto y completo: se calcula la forma normal y se comparan sintácticamente las formas normales.
3. Los modelos apropiados para poder definir NbE dependen de la teoría; por ejemplo, si uno tiene la regla η es necesario un modelo con relaciones de equivalencia parcial.
4. La prueba de corrección de NbE requiere el uso de *relaciones lógicas* (relaciones entre los términos sintácticos y los elementos de la semántica).

Próximos trabajos

- Probar ciertos meta-teoremas usando NbE.
- Definir NbE para Pure Type Systems.
- Extender una caracterización categórica (CwF) de los modelos de teoría de tipos, de manera que el modelo con PERs sea una instancia.
- Definir NbE categóricamente.
- Utilizar NbE para teorías con axiomas de asociatividad-conmutatividad (por ejemplo, los naturales vistos como un monoide aditivo conmutativo).