# Lógica modal computacional

## LTL – linear temporal logic

Carlos Areces & Raul Fervari

1er cuatrimestre de 2017
Córdoba, Argentina

## Propiedades temporales de un sistema

- Pensemos en propiedades de sistemas reactivos.
- Algunas propiedades que interesan en un semáforo:
  - La luz verde y la roja nunca se prenden simultáneamente
  - Una vez en rojo, la luz se volvera verde luego de haber estado amarilla por algun tiempo.
- Dos tipos importantes de propiedades:
  - Safety: el sistema no ingresa en un estado inválido
  - Liveness: el sistema siempre responde como debe
- Otra forma de pensarlo:
  - Safety: alcanza con mirar ejecuciones finitas
  - Liveness: no alcanza con mirar ejecuciones finitas

## Propositional Linear Temporal Logics (PLTL)

**Sintaxis**

$$FORM ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid X\varphi \mid \varphi\, U\, \psi$$

**Los modelos son *trazas***

- Una traza es una secuencia infinita de estados del sistema.
- Es decir, $\sigma = s_0 s_1 s_2 \ldots$ y cada $s_i$ es una valuación prop.
- Se puede pensar como un modelo de Kripke con $R$ lineal.

**Semántica**

Sea $\sigma = s_0 s_1 s_2 \ldots$ y llamemos $\sigma^i = s_i s_{i+1} \ldots$. Definimos:

| | | |
|---|---|---|
| $\sigma \models p$ | sii | $p \in s_0$ |
| $\sigma \models \neg\varphi$ | sii | $\sigma \not\models \varphi$ |
| $\sigma \models \varphi \wedge \psi$ | sii | $\sigma \models \varphi$ y $\sigma \models \psi$ |
| $\sigma \models X\varphi$ | sii | $\sigma^1 \models \varphi$ |
| $\sigma \models \varphi\, U\, \psi$ | sii | $\exists j \geq 0.(\sigma^j \models \psi$ y $(\forall 0 \leq k < j, \sigma^k \models \varphi))$ |

## Ejemplos

- Operadores derivados:

$$F\varphi \equiv \top\, U\, \varphi$$
$$G\varphi \equiv \neg F \neg\varphi$$

- Vuelta al semáforo
  - La luz verde y la roja nunca se prenden simultáneamente

$$\neg F(green \wedge red)$$

  - Una vez en rojo, la luz se volverá verde luego de haber estado amarilla por algún tiempo entre el rojo y el verde.

$$G(red \rightarrow (red\, U\, (yellow \wedge (yellow\, U\, green))))$$

## A qué llamamos *model-checking*?

***Model-checking* (de trazas) es model-checking**

- Dada una traza $\sigma$ y una fórmula $\varphi$, vale $\sigma \models \varphi$?
- En términos de IS, podemos pensarlo como un *monitoreo*.

***Model-checking* (en "verificación") no es model-checking!**

- Sea $\mathcal{M}$ una abstracción de un sistema $S$ (ie, un *modelo* de $S$)
- Y sea $\varphi$ una propiedad expresada en LTL.
- Verificar si $\mathcal{M}$ cumple $\varphi$ es comprobar si vale:

$$\sigma \models \varphi, \text{ para toda traza (ejecución) } \sigma \text{ de } \mathcal{M}$$

- Es decir, si vale $\mathcal{C} \models \varphi$ con $\mathcal{C} = \{\sigma \mid \sigma$ es una traza de $\mathcal{M}\}$.
- ¡Esto es validez respecto a una clase de modelos!

## Model-checking, lenguajes y autómatas

- Podemos ver una traza como un *string* sobre alfabeto $2^{\text{Prop}}$
- Sea $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ el conjunto de trazas que puede generar $\mathcal{M}$
- Y sea $\mathcal{L}(\varphi) = \{\sigma \mid \sigma \models \varphi\}$, las trazas que satisfacen $\varphi$.
- Entonces, $\mathcal{M}$ cumple la propiedad $\varphi$ sii $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{L}(\varphi)$.
- O lo que es equivalente: $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{L}(\varphi)^c = \emptyset$
- Si los representáramos con autómatas $A_{\mathcal{M}}$ y $A_\varphi$
  - Podemos computar un autómata que acepta $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ y $\mathcal{L}(\varphi)$
  - Y usar un algoritmo de alcanzabilidad para ver si su lenguaje es vacío
  - Son operaciones polinomiales en tamaño de los autómatas!

- Por propiedades de *liveness*, los strings deben ser *infinitos*
- Los autómatas "comunes" reconocen strings *finitos*

## Autómatas finitos (FA)

### Repaso

**Definición (FA)**

- Un FA es una 5-tupla $A = \langle \Sigma, S, S_0, \rho, F \rangle$ donde
  - $\Sigma \neq \emptyset$ es el alfabeto (finito)
  - $S$ es el conjunto de estados (finito)
  - $S_0 \subseteq S$ es el conjunto de estados iniciales ($S_0 \neq \emptyset$)
  - $\rho : S \times \Sigma \rightarrow 2^S$ es la función de transición
  - $F \subseteq S$ es el conjunto de estados finales
- $A$ es un autómata finito *determinístico* (DFA) si, además:
  - $|S_0| = 1$
  - $|\rho(s, a)| \leq 1$ para todo $s$ y $a$

**Definición (Corrida y aceptación)**

- Una corrida de $A$ sobre $w \in \Sigma^k$ es una $s \in S^k$ tal que:
  1. $s_0 \in S_0$
  2. $s_{i+1} \in \rho(s_i, w_i)$
- $A$ acepta $w$ si una corrida de $w$ en $A$, $s_0 \ldots s_k$, cumple $s_k \in F$

## Autómatas de Büchi (BA)

### Un autómata para palabras infinitas

**Definición (BA)**

- Un BA es una 5-tupla $A = \langle \Sigma, S, s_0, \rho, F \rangle$ donde
  - $\Sigma \neq \emptyset$ es el alfabeto (finito)
  - $S$ es el conjunto de estados (finito)
  - $S_0 \subseteq S$ es el conjunto de estados iniciales ($S_0 \neq \emptyset$)
  - $\rho : S \times \Sigma \rightarrow 2^S$ es la función de transición
  - $F \subseteq S$ es el conjunto de estados finales
- O sea... es igual! (ídem para determinístico – DBA)

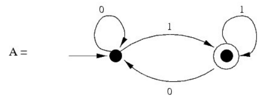
**Definición (Aceptación)**

$A$ acepta $w \in \Sigma^\omega$ si una corrida de $w$ en $A$, $s \in S^\omega$, cumple:

$$\mathit{inf}(s) \cap F \neq \emptyset$$

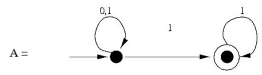
donde $\mathit{inf}(s) = \{s_i \mid s_i$ ocurre infinitas veces en $s\}$

## Ejemplos




- Qué lenguaje reconoce $A$ como AF?
  $\mathcal{L}(A) = (0|1)^*1$
- Qué lenguaje reconoce $A$ como BA?
  $\mathcal{L}(A) = ((0|1)^*1)^\omega$,
  los strings con un número infinito de unos.

## Ejemplos




- Qué lenguaje reconoce $A$ como FA?
  $\mathcal{L}(A) = (0|1)^*1$
- Qué lenguaje reconoce $A$ como BA?
  $\mathcal{L}(A) = (0|1)^*1^\omega$,
  los strings con un número finito de ceros.

## FA vs. BA – parecidos y diferencias

**FA**

- Cerrados por $\cap, \cup$
- Cerrados por $\cdot^c$
- $\mathcal{L}(FA) = \mathcal{L}(DFA)$
- Decidir si $\mathcal{L}(A) = \emptyset$ es NLOGSPACE-complete
- Decidir si $\mathcal{L}(A) = \emptyset^c$ es PSPACE-complete

**BA**

- Cerrados por $\cap$ y $\cup$
- Cerrados por $\cdot^c$ (no DBA)
- $\mathcal{L}(BA) \neq \mathcal{L}(DBA)$
- Decidir si $\mathcal{L}(A) = \emptyset$ es NLOGSPACE-complete
- Decidir si $\mathcal{L}(A) = \emptyset^c$ es PSPACE-complete

## El problema de emptyness de un BA

**Teorema**

Dado un BA $A = \langle \Sigma, S, S_0, \rho, F \rangle$, $\mathcal{L}(A) \neq \emptyset$ sii existen $s \in S_0$ y $t \in F$, tales que $t$ es alcanzable desde $s$ y $t$ se alcanza a sí mismo.

**Corolario**

Dado un BA $A$, podemos determinar linealmente si $\mathcal{L}(A) = \emptyset$.

**Demostración (Algoritmo)**

- Descomponer el BA en Maximal Strongly Connected Components empezando desde $s \in S_0$ (Alg. de Tarjan)
- Chequear que al menos uno de los MSCC interseca $F$ en forma no vacía
- Ambos pueden hacerse en tiempo lineal

## Autómatas de Büchi generalizados (GBA)

Más flexibles pero igual de expresivos

**Diferencias en las condiciones de aceptación**

- $F \subseteq S$ (BA) vs. $F = \{F_1, \ldots F_k\}$ con $F_i \subseteq S$ (GBA)
- En un GBA una corrida $r$ es aceptada sii

$$inf(r) \cap F_i \neq \emptyset \text{ para todo } F_i \in F$$

**Teorema**

Un GBA es polinomialmente transformable en BA equivalente

**Demostración (Idea)**

- Si $F = \{F_1, \ldots F_k\}$, tomar como estados $S \times \{1 \ldots k\}$.
- Si $(s, a) \mapsto t$ y $s \in F_i$, $(\langle s, i \rangle, a) \mapsto \langle t, i + 1 \mod k \rangle$.
- Si $(s, a) \mapsto t$ y $s \notin F_i$, $(\langle s, i \rangle, a) \mapsto \langle t, i \rangle$.
- $F' = F_k \times \{k\}$

## De STS a autómatas

**Definición (State Transition System – STS)**

- Un STS es una tupla $\langle S, I, R, Label \rangle$ donde
  - $S$ es un conjunto contable no vacío de estados,
  - $I \subseteq S$ es un conjunto de estados iniciales,
  - $R \subseteq S \times S$ es la relación de transición tal que $\forall s \in S.(\exists s' \in S.R(s, s'))$
  - $Label : S \to 2^{PROP}$ es una valuación que describe cada estado
- Se usan para describir o especificar sistemas

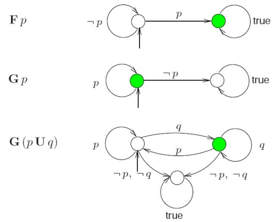
**BA asociado a un STS**

- Sea $S = \langle S, I, R, Label \rangle$ un STS
- Buscamos un BA $A_S$ que acepte todas y sólo las trazas de $S$
- Definimos $A_{\mathcal{M}} = \langle 2^{PROP}, S, I, \rho, S \rangle$ donde

$$\rho(u, a) = \{v \mid R(u, v) \text{ y } a = Label(u)\}$$

## De fórmulas a autómatas

Cuál es la idea?




- Ojo, en las transiciones hay valuaciones!
- Hay muchas traducciones posibles! Cuál es mejor?

## De fórmulas a autómatas, un ejemplo

Los ladrillos

**Definición**

$Sub(\varphi)$ es la clausura de $\varphi$ bajo subfórmulas y neg. simples.

**Definición**

Dadas $\sigma$ y $\varphi$, satseq$(\sigma, \varphi) \in (2^{Sub(\varphi)})^\omega$ es la secuencia tal que:

$$\text{satseq}(\sigma, \varphi) = \pi(\sigma, \varphi, 0)\pi(\sigma, \varphi, 1)\pi(\sigma, \varphi, 3) \ldots$$

donde $\pi(\sigma, \varphi, i) = \{\psi \in Sub(\varphi) \mid \sigma^i \models \psi\}$

## De fórmulas a autómatas, un ejemplo

### Otra vez los Hintikka sets

**Supongamos que $\sigma \models \varphi$, entonces se cumple que…**

1. $\varphi \in \text{satseq}(\sigma, \varphi, 0)$
2. si $p \in Sub(\varphi)$, $p \in \text{satseq}(\sigma, \varphi, i)$ sii $p \in \sigma[i]$
3. si $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in Sub(\varphi)$, $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \text{satseq}(\sigma, \varphi, i)$ sii $\varphi_{1,2} \in \sigma$
4. si $\neg\varphi \in Sub(\varphi)$, $\neg\varphi \in \text{satseq}(\sigma, \varphi, i)$ sii $\varphi \notin \sigma$
5. si $X\varphi \in Sub(\varphi)$, $X\varphi \in \text{satseq}(\sigma, \varphi, i)$ sii $\varphi \in \text{satseq}(\sigma, \varphi, i+1)$
6. si $\varphi_1\, U\, \varphi_2 \in Sub(\varphi)$, $\varphi_1\, U\, \varphi_2 \in \text{satseq}(\sigma, \varphi, i)$ sii
   1. $\varphi_2 \in \text{satseq}(\sigma, \varphi, i)$ ó ($\varphi_1 \in \text{satseq}(\sigma, \varphi, i)$ y $\varphi_1\, U\, \varphi_2 \in \text{satseq}(\sigma, \varphi, i+1)$), y
   2. existe $j \geq i$ tal que $\varphi_2 \in \text{satseq}(\sigma, \varphi, j)$

**Definición (Hintikka set para LTL)**

Decimos que $\alpha \subseteq Sub(\varphi)$ es un Hintikka set para $\varphi$ si satisface las condiciones 1-4. $Hin(\varphi)$ son todos los Hintikka sets para $\varphi$.

## De fórmulas a autómatas, un ejemplo

### Construcción del GBA

**Idea**

- Dado $\varphi$, vamos a construir un *GBA* $A_\varphi$ tal que:
  - Acepta una traza $\sigma$ sii $\sigma \models \varphi$
  - Una corrida que acepta $\sigma$, es una $\text{satseq}(\sigma, \varphi)$

$$A_\varphi = \langle 2^{PROP}, Hin(\varphi), S_0, \rho, \{F_1, \ldots, F_k\} \rangle$$

donde

- $S_0 = \{\alpha \mid \alpha \in Hin(\varphi), \varphi \in \alpha\}$
- $\rho(\alpha, s) = \emptyset$, si $s \not\subseteq \alpha$
- $\rho(\alpha, s) = \{\alpha' \mid \alpha'$ cumple R1 y R2$\}$, si $s \subseteq \alpha$
  - R1 $X\varphi \in \alpha$ sii $\varphi \in \alpha'$
  - R2 $\varphi_1\, U\, \varphi_2 \in \alpha$ sii $\varphi_2 \in \alpha$ ó ($\varphi_1 \in \alpha$ y $\varphi_1\, U\, \varphi_2 \in \alpha'$)
- $\{F_1, \ldots, F_k\} = \{F_{\varphi_1\, U\, \varphi_2} \mid \varphi_1\, U\, \varphi_2 \in Sub(\varphi)\}$
  - donde $F_{\varphi_1\, U\, \varphi_2} = \{\alpha \mid \varphi_1\, U\, \varphi_2 \notin \alpha$ o $\varphi_2 \in \alpha\}$