# Lógica modal computacional

## Indecidibilidad y modelos infinitos

Carlos Areces & Raul Fervari

1er cuatrimestre de 2017
Córdoba, Argentina



## Temario de hoy

- Hasta ahora estuvimos viendo cuál era la complejidad de algunas lógicas modales.
- En esta clase vamos a ver algunos ejemplos de lógicas modales *indecidibles*
- Mostraremos algunas técnicas para probar indecidibilidad, y otras propiedades relacionadas.



## La lógica $\mathcal{HL}(\downarrow)$

- En la primera clase vimos que se podía pensar en una versión modal de un *binder*, el operador $\downarrow$
- Este operador nombra el punto actual de evaluación, y permite referirse a él en el resto de la fórmula
- Por ejemplo, $\downarrow x.\Diamond x$ caracteriza a los puntos reflexivos de un modelo.

A la signatura que definimos para la lógica modal básica le vamos a agregar un conjunto infinito numerable $\textsc{var}$ de variables. Dado entonces una signatura $\langle \textsc{prop}, \textsc{rel}, \textsc{var} \rangle$, la sintaxis de $\mathcal{HL}(\downarrow)$ es:

### Sintaxis de $\mathcal{HL}(\downarrow)$

$$\varphi ::= x \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \langle r \rangle \varphi \mid \downarrow x.\varphi$$

donde $p \in \textsc{prop}$, $r \in \textsc{rel}$, $x \in \textsc{var}$.



## La lógica $\mathcal{HL}(\downarrow)$

La semántica de esta lógica se define sobre los modelos de Kripke $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V \rangle$ usuales, más una *función de asignación* $g : \textsc{var} \to W$ que asigna variables a elementos del dominio.

- Dado un modelo $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V \rangle$ y una asignación $g$, la semántica es:

### Semántica de $\mathcal{HL}(\downarrow)$

| | | |
|---|---|---|
| $(\mathcal{M}, g), w \models p$ | sii | $w \in V(p)$ |
| $(\mathcal{M}, g), w \models x$ | sii | $g(x) = w$ |
| $(\mathcal{M}, g), w \models \neg\varphi$ | sii | $(\mathcal{M}, g), w \not\models \varphi$ |
| $(\mathcal{M}, g), w \models \varphi \wedge \psi$ | sii | $(\mathcal{M}, g), w \models \varphi$ y $(\mathcal{M}, g), w \models \psi$ |
| $(\mathcal{M}, g), w \models \langle r_i \rangle \varphi$ | sii | existe un $w'$ tal que $wR_iw'$ y $(\mathcal{M}, g), w' \models \varphi$ |
| $(\mathcal{M}, g), w \models \downarrow x.\varphi$ | sii | $(\mathcal{M}, g^x_w), w \models \varphi$ donde $g^x_w$ es identica a $g$ salvo que $g^x_w(x) = w$. |

## Modelo infinito

- Ya vimos que la lógica modal básica (y otras extensiones) tienen la propiedad de modelo finito
- Esto nos ayudó a probar la decidibilidad de estas lógicas (sabiendo además una cota para el tamaño del modelo)
- Vamos a ver que $\mathcal{HL}(\downarrow)$ es capaz de *forzar* un modelo infinito
- Esto no prueba por sí mismo indecidibilidad, pero es un indicador en esa dirección

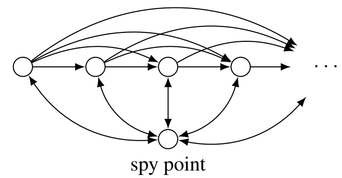


## Modelo infinito

- Informalmente, vamos a intentar escribir una fórmula que diga que existe un conjunto no vacío $B$ de elementos que forman un orden parcial estricto. Esto es:
  - Irreflexivo
  - Transitivo
- Y en donde todo elemento tiene un sucesor

Esto implica que $B$ es infinito.

- ¿Cómo hablamos de un conjunto de puntos con una fórmula modal que se va a evaluar en un *único* punto? *Spy Point!*






## Forzando un modelo infinito

Cada $s$-sucesor tiene un eje hacia $s$

$(Back)\quad \downarrow s.([r]\neg s \wedge \langle r\rangle\top \wedge [r]\langle r\rangle s)$

Los $s$-sucesores en dos pasos son $s$-sucesores en un paso

$(Spy)\quad \downarrow s.([r][r](\neg s \rightarrow (\downarrow x.\langle r\rangle(s \wedge \langle r\rangle x))))$

La relación sobre los $s$-sucesores es irreflexiva

$(Irr)\quad [r]\neg(\downarrow x.\langle r\rangle x)$

Todos los $s$-sucesores tienen un sucesor que no es $s$

$(Succ)\quad \downarrow s.([r]\langle r\rangle\neg s)$

La relación sobre los $s$-sucesores es transitiva

$(Tran)\quad \downarrow s.[r]\downarrow x.[r](\neg s \rightarrow [r](\neg s \rightarrow \downarrow z.\langle r\rangle(s \wedge \langle r\rangle(x \wedge \langle r\rangle z))))$

Sea la fórmula $\varphi = Back \wedge Spy \wedge Irr \wedge Succ \wedge Tran$



## Forzando un modelo infinito

### Teorema

Si $\mathcal{M}, w \models \varphi$ entonces $\mathcal{M}$ es infinito

**Demostración.** Por construcción de $\varphi$.

Es fácil ver que efectivamente hay modelos para $\varphi$

### Teorema

Existe un modelo $\mathcal{M}$ y un punto $w \in \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M}, w \models \varphi$.

**Demostración.** Sea $B$ un conjunto infinito de elementos y $s$ un elemento tal que $s \notin B$. Sea $R$ la mínima relación tal que

- $R$ define un orden parcial estricto sobre $B$
- $wRb$ y $bRw$ para cada elemento $b \in B$

Luego el modelo $\mathcal{M} = \langle B \cup \{s\}, R, V\rangle$ (para cualquier $V$) verifica $\mathcal{M}, w \models \varphi$.

## Indecidibilidad

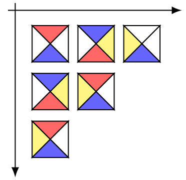
- ¿Cómo mostramos que una lógica es indecidible?
- Si quisieramos mostrarlo de forma directa, deberíamos escribir una fórmula que codifique ejecuciones arbitrarias en una máquina de Turing
- El problema de *tiling*, que ya se demostró indecidible, nos va a ayudar para el caso modal



## El problema de tiling

- Dado un conjunto finito de *tipos de tiles* $\mathcal{T}$

El *problema de tiling*: ¿Es posible colocar tiles de tipo $\mathcal{T}$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que cada par de tiles adyacentes tengan el mismo color?

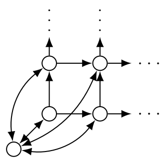


- El problema de tiling en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se sabe indecidible
- Dado un conjunto de tipos de tiles $\mathcal{T}$, buscamos escribir una fórmula $\varphi_{\mathcal{T}}$ tal que $\varphi_{\mathcal{T}}$ es satisfacible sii hay un tiling para $\mathcal{T}$



## El problema de tiling para $\mathcal{HL}(\downarrow)$

- La idea es intentar codificar este problema con una fórmula de $\mathcal{HL}(\downarrow)$
- Vamos a volver a usar la idea de definir un *spy point*

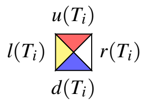



- Notar que, si bien puede parecer lo contrario, codificar el problema de tiling no implica forzar un modelo infinito (ni viceversa)

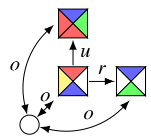


## El problema de tiling para $\mathcal{HL}(\downarrow)$

- Sea $T = \{T_1, \ldots, T_n\}$ un conjunto de tipos de tiles
- Dado un tipo de tile $T_i$, $u(T_i)$, $r(T_i)$, $d(T_i)$, $l(T_i)$ representan los colores de $T_i$ correspondientes a sus lados.




- Supongamos también que tenemos una modalidad $\langle o \rangle$ que vamos a usar para movernos desde el spy point a cada tile
- Y modalidades $\langle u \rangle$ y $\langle r \rangle$ para movernos entre tiles hacia arriba y a la derecha respectivamente.



## El problema de tiling para $\mathcal{HL}(\downarrow)$

Primero codificamos la grilla:

Cada $s$-sucesor tiene un eje hacia $s$

$(Back)\quad [o]\neg s \wedge \langle o\rangle\top \wedge [o]\langle o\rangle s$

El sucesor de un tile es un $s$-sucesor

$(Spy)\quad [o][\dagger](\downarrow x.\langle o\rangle(s \wedge \langle o\rangle x))\quad \dagger \in \{r,u\}$

Desde un tile no se llega a $s$ por r y u

$(Empty)\quad [o][\dagger]\neg s\quad \dagger \in \{r,u\}$

Todo tile tiene un tile arriba y a la derecha

$(Grid)\quad [o]\langle\dagger\rangle\top\quad \dagger \in \{r,u\}$

Cada tile tiene un único tile arriba y un único tile a la derecha

$(Func)\quad [o]\downarrow x.([\dagger]\downarrow y.(\langle o\rangle\langle o\rangle(x \wedge [\dagger]y)))\quad \dagger \in \{r,u\}$

Hay confluencia entre arriba-derecha y derecha-arriba

$(Conf)\quad [o]\downarrow x.(\langle u\rangle\langle r\rangle\downarrow y.(\langle o\rangle\langle o\rangle(x \wedge \langle r\rangle\langle u\rangle y)))$



## El problema de tiling para $\mathcal{HL}(\downarrow)$

Y finalmente que en cada punto de la grilla hay un tile y que los colores coinciden:

Cada punto tiene un único tipo de tile

$(Unique)\quad [o]\left(\bigvee_{1\leq i\leq n} t_i \wedge \bigwedge_{1\leq i<j\leq n}(t_i \rightarrow \neg t_j)\right)$

Cada tile tiene a la derecha un adyacente del color apropiado

$(Vert)\quad [o]\bigwedge_{1\leq i\leq n}\left(t_i \rightarrow \langle u\rangle \bigvee_{1\leq j\leq n, u(T_i)=d(T_j)} t_j\right)$

Cada tile tiene a arriba un adyacente del color apropiado

$(Horiz)\quad [o]\bigwedge_{1\leq i\leq n}\left(t_i \rightarrow \langle r\rangle \bigvee_{1\leq j\leq n, r(T_i)=l(T_j)} t_j\right)$

Sea

$\varphi_T = \downarrow s.(Back \wedge Empty \wedge Spy \wedge Grid \wedge Func \wedge Conf \wedge Unique \wedge Vert \wedge Horiz)$



## El problema de tiling para $\mathcal{HL}(\downarrow)$

### Teorema

Sea $T$ un conjunto de tipos de tiles. Luego $\varphi_T$ es satisfacible sii con $T$ se pueder armar un tiling en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Demostración:

($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathcal{M}, w \models \varphi_T$. Por construcción, $\mathcal{M}$ representa un tiling de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \rightarrow T$ es un tiling de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Definimos el modelo $\mathcal{M} = \langle W, \{R_o, R_u, R_r\}, V\rangle$:

- $W = \mathbb{N}\times\mathbb{N} \cup \{w\}$
- $R_o = \{(w,v),(v,w) \mid v \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$
- $R_u = \{(x,y),(x,y+1) \mid x,y \in \mathbb{N}\}$
- $R_r = \{(x,y),(x+1,y) \mid x,y \in \mathbb{N}\}$
- $V(t_i) = \{x \mid x \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, f(x) = T_i\}$

No es difícil ver que $\mathcal{M}, w \models \varphi_T$

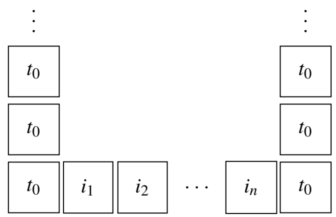


## Un tiling para cada necesidad

- Codificar el problema de tiling no sólo sirve para probar indecidibilidad
- Variaciones de la definición de este problema también sirven para probar cotas de complejidad y otros grados de indecidibilidad. Por ejemplo:
  - El problema de tiling que acabamos de ver es $\Pi^0_1$-completo
  - Si distinguimos $T_1$, un tipo de tile en particular, el problema de tiling de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ donde $T_1$ ocurre infinitamente seguido en la primera fila del tiling es $\Sigma^1_1$-completo
  - El "two person corridor tiling" es EXPTIME-completo

## Two person corridor tiling

- Este tiling tiene 3 jugadores: Spoiler, Duplicator y un réferi.
- Del conjunto finito de tipos de tiles $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_{s+1}\}$ vamos a distinguir $t_0$ y $t_{s+1}$
- Como parámetro de entrada también nos dan un $n \in \mathbb{N}$, que define el ancho del corredor
- El juego comienza con el réferi poniendo tiles de la siguiente manera






## Two person corridor tiling

- Las reglas para ir llenando el corredor son estrictas: desde abajo y de izquierda a derecha
- Los jugadores no pueden elegir dónde poner un tile, sólo pueden elegir el tipo del tile
- Las reglas de coincidencia de color son las de siempre (e incluyen los “bordes” del corredor)
- Los jugadores juegan alternativamente, y Spoiler juega primero.
- Cuándo los jugadores ganan o pierden?
  - Si después de finitas jugadas un tile de tipo $t_{s+1}$ es puesto en la primera columna, Spoiler gana
  - En otro caso (si alguno de los jugadores no puede hacer ningún movimiento válido, $t_{s+1}$ no está en la columna 1, o el juego se prolonga infinitamente) gana Duplicator
- El problema de determinar si Spoiler tiene una estrategia ganadora se sabe EXPTIME-completo.



## Two person corridor tiling

- Usando el “two person corridor tiling” se puede demostrar que PDL es EXPTIME-hard, codificando el árbol de posibles jugadas entre Spoiler y Duplicator.
- También se puede usar para demostrar que $K + A$ es EXPTIME-hard.