Lógica Computacional y Demostración Automática

Carlos Areces
areces@loria.fr
http://www.loria.fr/~areces

INRIA Nancy Grand Est, France

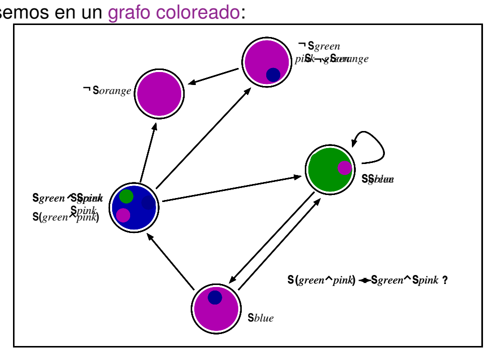
Diciembre 2008

Lo que hacemos hoy

- Describiendo estructuras relacionales
- Lógicas modales
- Sintaxis y semántica
- Lógicas híbridas
- Model Checking
- Aplicaciones
- El model checker `mcheck`

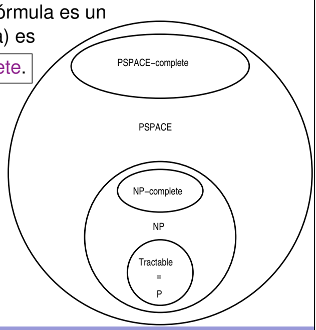
Estructuras Simples / Lenguajes Simples

Pensemos en un grafo coloreado:



Estructuras Simples / Lenguajes Simples

- Aun para este lenguaje (aparentemente) muy simple, decidir si una fórmula es un teorema (i.e., siempre cierta) es PSPACE-complete.



Una Familia de Lenguajes

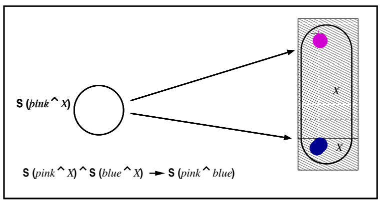
- El lenguaje que describimos puede ser inadecuado:
- En área de lógica modal, investiga el rango de posibles lenguajes que pueden usarse para describir estructuras relacionales.
- La preguntas más importantes son:
  - Podemos definir algoritmos de inferencia para estos lenguajes?
  - Cuan eficientes son?
  - Cuáles son los límites de expresividad de estos lenguajes?
- La tarea no es fácil, porque los distintos operadores del lenguaje pueden interactuar de formas inesperadas. E.g., agregar el operador S^* transforma el problema de satisfiabilidad del lenguaje en EXPTIME-complete!

Posibles Aplicaciones

- Los lenguajes de la familia de las lógicas modales pueden usarse en áreas muy diversas:
  - Verificación de Software y Hardware.
  - Representación de Conocimientos.
  - Criptografía.
  - Inteligencia Artificial.
  - Filosofía.
  - Linguística Computacional.
  - Epistemología.
  - ...
- **Porque?** Muchas cosas pueden ser representadas como grafos (i.e., estructuras relacionales).
  Y como vimos, los lenguajes modales fueron desarrollados especialmente para razonar sobre grafos y describir sus propiedades.

Lógicas Híbridas

- Vamos a presentar un tipo particular de lenguajes modales llamados lenguajes híbridos.
- Intuitivamente, los lenguajes híbridos son lenguajes modales que incluyen alguna noción de igualdad.



El Sabor de un Clásico...

- Todo muy moderno, muy superado, pero yo prefiero la lógica clásica.
- Aunque no parezca, estamos haciendo Lógica Clásica!!!
- Los lenguajes que estuvimos discutiendo son fragmentos del lenguaje de primer (o segundo) orden. Lo único que hicimos fue elegir 'el pedacito' que necesitábamos para una aplicación dada.
- Esta es exactamente la forma en que vemos hoy por hoy a los lenguajes modales, como una forma de investigar fragmentos particularmente interesantes de los lenguajes clásicos.
- Donde "interesantes" significa
  - Decidibles, expresivos, de "baja" complejidad, modulares, ...

Sintaxis

- El lenguaje hibrido que vamos a usar se define sobre la signatura $S = \langle \mathrm{PROP}, \mathrm{REL}, \mathrm{NOM} \rangle$ donde
  - $\mathrm{PROP} = \{p, q, r, \ldots\}$ es el conjunto de simbolos de proposicion
  - $\mathrm{REL} = \{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ es el conjunto de simbolos de relacion
  - $\mathrm{NOM} = \{i, j, k, \ldots\}$ es el conjunto de simbolos de constantes (los llamamos nominales)
  - $\mathrm{VAR} = \{x, y, z, \ldots\}$ es el conjunto de variables
- Las formulas se definen entonces como

  $$\varphi := a \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi' \mid \langle r \rangle\varphi \mid \langle r \rangle^{-}\varphi \mid \mathrm{E}\varphi \mid @_i\varphi \mid {\downarrow}x.\varphi$$

  donde $a \in \mathrm{NOM} \cup \mathrm{PROP} \cup \mathrm{VAR}$, $r \in \mathrm{REL}$, $i \in \mathrm{NOM}$ y $x \in \mathrm{VAR}$.(La formula $[r]\varphi$ se define como $\neg\langle r \rangle\neg\varphi$ y $\mathrm{A}\varphi$ se define como $\neg\mathrm{E}\neg\varphi$)

Semantica

- Un modelo $\mathcal{M}$ es de la forma $\langle M, I \rangle$ donde M es no vacio, y
  - $I(r)$ es una relacion binaria sobre M para $r \in \mathrm{REL}$,
  - $I(p)$ es un subconjunto de M para $p \in \mathrm{PROP}$,
  - $I(i)$ es un elemento de M para $i \in \mathrm{NOM}$

  Una asignación g para $\mathcal{M}$ es una funcion $g : \mathrm{VAR} \to M$.
- Definimos

$$
\begin{array}{rll}
\mathcal{M}, g, m \models i & \text{sii} & m = I(i),\ i \in \mathrm{NOM} \\
\mathcal{M}, g, m \models p & \text{sii} & m \in I(p),\ p \in \mathrm{PROP} \\
\mathcal{M}, g, m \models \neg\varphi & \text{sii} & \mathcal{M}, g, m \not\models \varphi \\
\mathcal{M}, g, m \models \varphi \wedge \psi & \text{sii} & \mathcal{M}, g, m \models \varphi \text{ y } \mathcal{M}, g, m \models \psi \\
\mathcal{M}, g, m \models \langle r \rangle\varphi & \text{sii} & \exists m' \in M \text{ t.q. } (m, m') \in I(r) \;\&\; \mathcal{M}, g, m' \models \varphi \\
\mathcal{M}, g, m \models \langle r \rangle^{-}\varphi & \text{sii} & \exists m' \in M \text{ t.q. } (m', m) \in I(r) \;\&\; \mathcal{M}, g, m' \models \varphi \\
\mathcal{M}, g, m \models \mathrm{E}\varphi & \text{sii} & \exists m' \in M \text{ t.q. } \mathcal{M}, g, m' \models \varphi \\
\mathcal{M}, g, m \models @_i\varphi & \text{sii} & \mathcal{M}, g, I(i) \models \varphi \\
\mathcal{M}, g, m \models {\downarrow}x.\varphi & \text{sii} & \mathcal{M}, g[x \leftarrow m], m \models \varphi
\end{array}
$$

Que podemos escribir?

- Cuán expresivo es el lenguaje $\mathcal{L}(\mathrm{NOM}, @, \langle r \rangle, \langle r \rangle^{-}, E, \downarrow)$
- Empecemos con menos (y para los que saben. . .)
- Cual es el poder expresivo de $\mathcal{L}(\langle r \rangle, \langle r \rangle^{-})$
  - Es el lenguaje temporal básico (futuro y pasado)
  - SAT es decidible (PSPACE-complete).
  - El fragmento guarded de LPO^2.
- Cual es el poder expresivo de $\mathcal{L}(\mathrm{NOM}, \langle r \rangle, \langle r \rangle^{-})$
  - Es el lenguaje temporal hibrido básico
  - SAT es decidible (EXPTIME-complete).
  - El fragmento guarded de LPO^2 con constantes.
- Cual es el poder expresivo de $\mathcal{L}(\langle r \rangle, \downarrow, E)$
  - Es tan expresivo como LPO!!!
  - SAT es indecidible.
- Cual es el poder expresivo de $\mathcal{L}(\langle r \rangle, \downarrow)$
  - Es menos expresivo que LPO.
  - SAT es todavia indecidible.

Model Checking

- El problema de model checking global es el siguiente:
  - Dado un modelog $\mathcal{M}$
  - y una formula α,
  - retornar todos los estados de $\mathcal{M}$ en los que α es verdadero.
- Definimos el truth set de una fórmula α respecto de un modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ como:

  $$Truth(\mathcal{M}, \alpha) = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \alpha\}$$

- Un model checker es un programa que dado $\mathcal{M}$ y α retorna $Truth(\mathcal{M}, \alpha)$.

El Model Checker MCLite

- MCLite es un model checker para el lenguaje $\mathcal{L}(NOM, \langle r \rangle, \langle r \rangle^{-}, @, E)$.
- Por simplicidad, trabajaremos con lógicas monomodales (sólo $\langle r \rangle$) pero la extensión a lógicas multimodales es simple.
- El algoritmo usa una estrategia bottom-up: examina las subfórmulas de la fórmula input α en forma incremental, hasta que finalmente el obtenemos el truth set de α.
- Si una subfórmula β de α es verdadera en un estado w, el model checker marca w con β.

Tipos de Datos y Funcionaes Auxiliares

- Sea $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ un modelo y α la fórmula que queremos chequear.
- Sea $sub(\alpha)$ el conjunto de subfórmulas de α.
- El model checker mantendrá una bit table L de tamaño $|sub(\alpha)| \times |W|$ tal que, para cada subfórmula β de α y cada $w \in W$,

  $L(\beta, w) = 1$ if $M, w \models \beta$ y $L(\beta, w) = 0$ if $M, w \not\models \beta$
- Ademas, sea $L(\beta) = \{w \in W \mid L(\beta, w) = 1\}$
- Al terminar la corrida tendremos que $Truth(M, \alpha) = L(\alpha)$
- Finalente dado $w \in W$, sea $R(w)$ el conjunto de R-sucesores de w y $R^{-}(w)$ el conjunto de R-predecesores de w.

MCLite(M, α)

```
for β ∈ sub(α), w ∈ W do: L(β, w) ← 0
for i ← 1 to |α| do:
  for β ∈ sub(α) such that |β| = i do:
    case of β
      • β ∈ ATOM  : ∀w ∈ W, if w ∈ V(β) then L(β, w) ← 1
      • β = β1 ∧ β2 : ∀w ∈ W, if L(β1, w) = L(β2, w) = 1 then L(β, w) ← 1
      • β = ¬β1   : ∀w ∈ W, if L(β1, w) = 0 then L(β, w) ← 1
      • β = ⟨r⟩β1  : MC⟨r⟩(M, β1)
      • β = ⟨r⟩⁻β1 : MC⟨r⟩⁻(M, β1)
      • β = Eβ1   : MC_E(M, β1)
      • β = @iβ1  : MC@(M, i, β1)
return L(α)
```


$\mathbf{MC}_{\langle r \rangle}(M, \alpha)$

```
for w ∈ L(α) do
  for v ∈ R⁻¹(w) do
    L(⟨r⟩α, v) ← 1
```

$\mathbf{MC}_{\langle r \rangle^{-}}(M, \alpha)$

```
for w ∈ L(α) do
  for v ∈ R(w) do
    L(⟨r⟩⁻α, v) ← 1
```

$\mathbf{MC}_{E}(M, \alpha)$

```
if L(α) ≠ ∅ then
  for w ∈ W do
    L(Eα, w) ← 1
```

$\mathbf{MC}_{@}(M, i, \alpha)$

```
let {v} = V(i)
if L(α, v) = 1 then
  for w ∈ M do
    L(@iα, w) ← 1
```

Worst-case Complexity de MCLite

- Dado $f, g : N \rightarrow N$, recordemos que

$$f(n) = O(g(n))$$

significa que hay una constante $c > 0$ y un número natural $n_0 \geq 1$ tal que

$$f(n) \leq c \times g(n)$$

para todo $n \geq n_0$.
- Por ejemplo, $2n + 1 = O(n)$.

Contamos...

- Sea $n = |W|$, $m = |R|$, y k el tamaño de α.
- Notar que $|sub(\alpha)| = O(k)$. Ademas, chequear y cambiar $L(\beta, w)$ es $O(1)$. Igual que $w \in V(p)$ si V es un bit table.
- Entonces, inicializar L toma $O(k \times n)$. El loop principal itera $O(k)$ veces. La complejidad de cada iteracion depende de β.
- In particular,
  - if $\beta \in ATOM$, then the check of β takes $O(n)$;
  - if $\beta = \beta_1 \wedge \beta_2$, then the check of β takes $O(n)$;
  - if $\beta = \neg\beta_1$, then the check of β takes $O(n)$;
  - if $\beta = E\beta_1$, then the check of β takes $O(2n) = O(n)$;
  - if $\beta = @_i\beta_1$, then the check of β takes $O(2n) = O(n)$;
  - if $\beta = \langle r \rangle\beta_1$, then the check of β takes $O(n + m)$;
  - if $\beta = \langle r \rangle^-\beta_1$, then the check of β takes $O(n + m)$
- Es decir, la complejidad de MCLite es: $O(k \times (n + m))$.

El problema con $\downarrow$

- Cuando agregamos $\downarrow$ no podemos usar una estrategia bottom-up.
- Por que? Consideremos las formulas $\langle r \rangle\alpha$ y $\downarrow x.\langle r \rangle\beta(x)$, donde $\beta(x)$ es una formula donde aparece la variable x.
  - En el primer caso, podemos chequear α, etiquetar el modelo, y luego chequear $\langle r \rangle\alpha$ como hicimos en MCLite.
  - En el segundo caso, no podemos chequear primero $\beta(x)$, porque no sabemos a qué elemento esta linqueado x.

MCFull(M, g, α)

for $\beta \in sub(\alpha)$, $w \in W$ **do:** $L(\beta, w) \leftarrow 0$
case of α**:**
  • $\alpha \in ATOM$: $\forall w \in W$, **if** $w \in V(\alpha)$ **then** $L(\alpha, w) \leftarrow 1$
  • $\alpha \in VAR$: $L(\alpha, g(\alpha)) \leftarrow 1$
  • $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$: **MCFull**(M, g, α_1); **MCFull**(M, g, α_2)
    for $w \in W$ **do:**
      if $L(\alpha_1, w) = 1 = L(\alpha_2, w) = 1$ **then** $L(\alpha, w) \leftarrow 1$
  • $\alpha = \neg\alpha_1$: **MCFull**(M, g, α_1)
    for $w \in W$ **do:**
      if $L(\alpha_1, w) = 0$ **then** $L(\alpha, w) \leftarrow 1$
  • $\alpha = \langle r \rangle\alpha_1$: **MCFull**(M, g, α_1); **MC**$_{\langle r \rangle}(M, \alpha_1)$
  • $\alpha = \langle r \rangle^-\alpha_1$: **MCFull**(M, g, α_1); **MC**$_{\langle r \rangle^-}(M, \alpha_1)$
  • $\alpha = @_t\alpha_1$: **MCFull**(M, g, α_1); **MC**$_@(M, t, g, \alpha_1)$ //**almost**
  • $\alpha = E\alpha_1$: **MCFull**(M, g, α_1); **MC**$_E(M, \alpha_1)$
  • $\alpha = \downarrow x.\alpha_1$: **Check**$_\downarrow(M, g, x, \alpha_1)$
return $L(\alpha)$

Check$_\downarrow$(M, g, x, α)

for $w \in W$ **do:**
  $g(x) \leftarrow w$
  MCFull(M, g, α)
  if $L(\alpha, w) = 1$ **then**
    Clear(L, x)
    $L(\downarrow x.\alpha, w) \leftarrow 1$
  else
    Clear(L, x)

La funcion Clear(L, x) pone a 0 el valor de L(α, w) para todo $w \in W$ y toda formula α con x libre.

Complejidad de MCFull

- Supongamos que α no contiene el operador $\downarrow$. Sea $\alpha = \tau\alpha_1$, donde τ es el operador principal de α.
- Sea $C(\alpha)$ el costo de MCFull en α y sea $C_\tau(\alpha)$ el costo de MC_τ en α. Entonces,

$$C(\tau\alpha_1) = C(\alpha_1) + C_\tau(\alpha)$$

- Por lo que, en el peor caso, el costo de MCFull en α es $O(k \times (n + m))$ como para MCLite.
- Por ejemplo, si $\alpha = \langle r \rangle\langle r \rangle\langle r \rangle p$, entonces

$$C(\alpha) = C(\langle r \rangle\langle r \rangle p) + (n + m) =$$
$$C(\langle r \rangle p) + 2(n + m) =$$
$$C(p) + 3(n + m) = n + 3(n + m)$$

Complejidad de MCFull

- Supongamos ahora que α contiene $\downarrow$.
- Sea d el grado de anidamiento de $\downarrow$ en α. Por ejemplo $\downarrow x.\langle r \rangle x$ tiene grado 1, y $\downarrow x.\langle r \rangle \downarrow y.@_x y$ tiene grado 2.
- La función Check$_\downarrow(M, g, x, \beta)$ corre en $n \times C(\beta)$.
- Por lo que, en el peor caso, el costo de MCFull en α es $O(k \times (n + m) \times n^d)$.
- Por ejemplo, si $\alpha = \downarrow x.\langle r \rangle \downarrow y.@_x y$, entonces

$$C(\alpha) = n \times C(\langle r \rangle \downarrow y.@_x y) =$$
$$n \times (n + m + C(\downarrow y.@_x y)) =$$
$$n \times (n + m + n \times C(@_x y)) =$$
$$n \times (n + m + n \times (n + C(y))) =$$
$$n \times (n + m + n \times (n + 1)) = O(n^3)$$

Complejidad de MCFull

- Es decir, la complejidad temporal de MCFull es exponential en el grado de anidammiento de $\downarrow$ que, en general, es proporcional al tamaño de α.
- Como el tamaño del stack de recursion de MCFull está limitado por el tamaño de α, la complejidad espacial de MCFull es polynomial.
- Es decir, model checking para $\mathcal{L}(\text{NOM}, \langle r \rangle, \langle r \rangle^-, @, E, \downarrow)$ esté en PSPACE.
- Nos podemos preguntar: es este el mejor algoritmo?

Lower bounds

- Sabemos que $\mathcal{L}(\text{NOM}, \langle r \rangle, \langle r \rangle^{-}, @, E, \downarrow)$ tiene la misma expresividad que LPO.
- Es conocido que el problema de model checking para LPO es PSPACE-complete, por lo tanto también para $\mathcal{L}(\text{NOM}, \langle r \rangle, \langle r \rangle^{-}, @, E, \downarrow)$.
  Pero podemos demostrar un resultado mas fuerte.
- Llamemos, fragmento no decorado de L al fragmento de L que no usa ni símbolos de proposición ni nominales
  Theorem: El problema de model checking para el fragmento no decorado de $\mathcal{L}(\downarrow)$ es PSPACE-complete.

El model checker `mcheck`

- Es un model checker de juguete.
- Warning: no intentar usarlo para nada serio.
- Si estan interesados en model checkers para lógicas hibridas hay otras alternativas pero el input format de `mcheck` es mas simple.