Lógica modal computacional

Decidibilidad y complejidad de lógicas modales (ii)

Carlos Areces & Raul Fervari

1er cuatrimestre de 2017
Córdoba, Argentina

Repaso

La última vez que nos vimos, vimos ...

- KAlt_1 es NP-completa (usando funciones de selección).
- K *no* tiene la propiedad de modelos polinimiales:
  - Dimos una familia de fórmulas satisfacibles φ_k
  - Para cada k, $|\varphi_k| \in O(k^3)$
  - φ_k fuerza que sus modelos sean árboles binarios completos
  - Luego, todo modelo de φ_k tiene al menos 2^k nodos
- El problema de K-satisfacibilidad está en PSPACE:
  - Podemos adivinar de a una rama del modelo por vez.
  - Esto lo mostramos usando Hintikka sets.
  - La profundidad de una rama puede ser lineal en la fórmula.
  - Obtuvimos un algoritmo no-det. de espacio polinomial.
  - Y sabíamos que PSPACE $=$ NPSPACE.

Lógicas robustas

Muchas variantes de K también están en PSPACE

- K $+$ nominales y @
- K $+$ counting modalities $\langle r\rangle_{\geq n}\,\varphi$
- K $+$ funciones parciales
- K $+$ operadores de pasado $\langle r\rangle^{-1}\varphi$
- S4 (r es una relación transitiva), ...
- ¡pero cuidado con las combinaciones!

Los operadores "globales" nos suelen mover a EXPTIME

- **K** $+$ la modalidad universal A
- **K** $+$ el operador de clausura transitiva $\langle r\rangle^{*}\varphi$
- ...

¿Cómo probar si K es PSPACE-completa?

- Necesitamos probar que K es PSPACE-hard.
- Alcanza con poder reducir polinomialmente un problema PSPACE-completo.
- Usaremos el problema canónico: validez para QBF.

Quantified Boolean Formulas (QBF)

Sintáxis

- $\varphi ::= p \mid \neg p \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \exists p\varphi \mid \forall p\varphi$
- *Sentencia*: fórmula sin variables libres
- *Forma prenexa*: $Q_1 p_1 \ldots Q_n p_n \theta(p_1, \ldots, p_n)$, θ proposicional.

Semántica

$$\begin{array}{rcl}
v \models p & \Leftrightarrow & v(p) = 1 \\
v \models \neg p & \Leftrightarrow & v(p) = 0 \\
v \models \varphi \vee \psi & \Leftrightarrow & v \models \varphi \text{ ó } v \models \psi \\
v \models \varphi \wedge \psi & \Leftrightarrow & v \models \varphi \text{ y } v \models \psi \\
v \models \exists p\varphi & \Leftrightarrow & v[p \mapsto 1] \models \varphi \text{ ó } v[p \mapsto 0] \models \varphi \\
v \models \forall p\varphi & \Leftrightarrow & v[p \mapsto 1] \models \varphi \text{ y } v[p \mapsto 0] \models \varphi
\end{array}$$

Validez de fórmulas de QBF

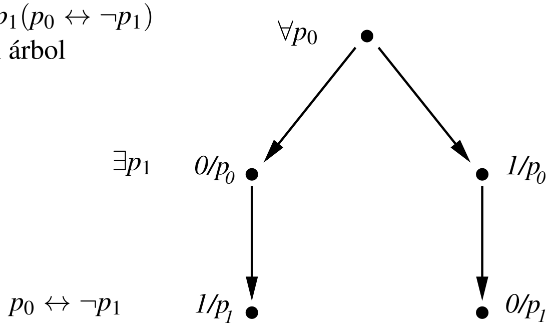
Teorema
Decidir la validez de una fórmula de QBF es un problema PSPACE-completo.

Ejercicio
Mostrar que model-checking de lógica de primer orden es PSPACE-hard.

Satisfacibilidad de K es PSPACE-completa
Idea

Validez de QBF equivale a encontrar un árbol…

Para $\forall p_0 \exists p_1 (p_0 \leftrightarrow \neg p_1)$
tenemos el árbol



¡Y vimos cómo forzar árboles binarios con una fórmula modal!

Satisfacibilidad de K es PSPACE-completa
Repasemos nuestros ladrillos

- B_i fuerza dos sucesores, uno para cada valor de p_i:

$$B_i := \Diamond p_{i+1} \wedge \Diamond \neg p_{i+1}$$

- S_i propaga los valores de p_i y $\neg p_i$ al siguiente nivel:

$$S_i := (p_i \to \Box p_i) \wedge (\neg p_i \to \Box \neg p_i)$$

- L_{ki} asegura que un nodo esté en el nivel i y sólo en ese:

$$L_{ki} \;:=\; \bigwedge_{j \in \{0 \ldots k\} \setminus \{i\}} \neg l_j \;\wedge\; l_i$$

Satisfacibilidad de K es PSPACE-completa

La reducción de QBF-validez a K-satisfacibilidad

Dada $\varphi = Q_1 p_1 \dots Q_k p_k \theta(p_1 \dots p_k), f(\varphi)$ es la conjunción de:

$$
\begin{array}{lclclclclcl}
L_{k0} & \wedge & \Box L_{k1} & \wedge & \Box^2 L_{k2} & \wedge & \Box^3 L_{k3} & \wedge & \dots & \wedge & \Box^{k-1} L_{kk-1} \wedge \Box^k L_{kk} \\
\Diamond\top & \wedge & \Box\Diamond\top & \wedge & \Box^2\Diamond\top & \wedge & \Box^3\Diamond\top & \wedge & \dots & \wedge & \Box^{k-1}\Diamond\top \\
 & & \Box S_1 & \wedge & \Box^2 S_1 & \wedge & \Box^3 S_1 & \wedge & \dots & \wedge & \Box^{k-1} S_1 \\
 & & & & \Box^2 S_2 & \wedge & \Box^3 S_2 & \wedge & \dots & \wedge & \Box^{k-1} S_2 \\
 & & & & & \wedge & \Box^3 S_3 & \wedge & \dots & \wedge & \Box^{k-1} S_3 \\
 & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & \wedge & \Box^{k-1} S_{k-1}
\end{array}
$$

$\bigwedge_{Q_{i+1}=\forall} \Box^i B_i \wedge \Box^k \theta$

- Notar que $f(\varphi)$ es computable en tiempo polinomial

Satisfacibilidad de K es PSPACE-completa

Teorema

φ es válida en QBF sii $f(\varphi)$ es K-satisfacible.

Corolario

Satisfacibilidad de K es PSPACE-completa.

Se puede mostrar un resultado más general

"Toda lógica entre K y S4 es PSPACE-completa".

K + A, agregamos la modalidad universal.

Semántica

- $\mathcal{M}, w \models \mathsf{A}\varphi$ sii $\mathcal{M}, v \models \varphi$ para **todo** v
- $\mathcal{M}, w \models \mathsf{E}\varphi$ sii $\mathcal{M}, v \models \varphi$ para **algún** v

- E es un "diamante" y A es un "box".
- Se pueden pensar como modalidades sobre una relación total.

Aspectos computacionales de K + A

Model checking

I. Es decidible

II. Está en PTIME (e.g., usando programación dinámica)

III. Es fácil de implementar de manera eficiente

¿Por qué es menos complejo en K + A que en primer orden?

Aspectos computacionales de $\mathsf{K} + \mathsf{A}$

Satisfacibilidad

I. Es decidible (reducción a FO2)

II. ¿Podemos ver que está en PSPACE como hicimos con K?

III.

Modelos “exponencialmente profundos” en $\mathsf{K} + \mathsf{A}$

Intuición

Vamos a ver que…

- Para cada $n > 0$ existe una fórmula κ_n tal que:
  - κ_n es satisfacible
  - Todo modelo para κ_n tiene una rama con al menos 2^n nodos

De donde se concluye que…

- No podemos repetir la prueba de PSPACE para K
- (donde adivinábamos de a una rama del modelo por vez)

Modelos “exponencialmente profundos” en $\mathsf{K} + \mathsf{A}$

Sumando en base 2

Idea para construir κ_n

- Usamos n proposiciones $q_0, \ldots, q_{n-1}$.
- Cada asignación codifica un número entre 0 y $2^n - 1$
- Queremos que un nodo a nivel i tenga una asignación que codifique i

¿Cómo se suma 1 en binario?

- El caso fácil (el dígito menos significativo es 0):

$$\begin{array}{r} 1001101\textcolor{red}{0} \\ + \quad 1 \\ \hline 1001101\textcolor{red}{1} \end{array}$$

- El caso general:

$$\begin{array}{r} 10011\textcolor{red}{011} \\ + \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

Modelos “exponencialmente profundos” en $\mathsf{K} + \mathsf{A}$

Ladrillos para armar κ_n

INC_i

- Fuerza el valor del siguiente nivel (sumando 1),
- pero sólo si el valor del actual tiene el primer 0 en el bit i

- Caso fácil

$$\mathrm{INC}_0 := \neg q_0 \rightarrow (\Box q_0 \wedge \bigwedge_{j>0} ((q_j \rightarrow \Box q_j) \wedge (\neg q_j \rightarrow \Box \neg q_j)))$$

- Caso general

$$\mathrm{INC}_{i+1} := (\neg q_{i+1} \wedge \bigwedge_{j=0}^{i} q_j) \rightarrow \left(\begin{array}{ll} \Box(q_{i+1} \wedge \bigwedge_{j=0}^{i} \neg q_j) & \wedge \\ \bigwedge_{l>i+1} (q_l \rightarrow \Box q_l) & \wedge \\ \bigwedge (\neg q_l \rightarrow \Box \neg q_l) & \end{array} \right)$$

Modelos “exponencialmente profundos” en $\mathsf{K}+\mathsf{A}$

Finalmente, κ_n

Definimos κ_n como

$$(\neg q_{n-1} \wedge \cdots \wedge \neg q_0) \wedge \mathsf{A}(\bigwedge_{i=0}^{n-1} \mathrm{INC}_i) \wedge \mathsf{A}\Diamond\top$$

- κ_n tiene tamaño $\mathcal{O}(n^2)$ pero todo modelo que la satisfaga tiene un camino sin repeticiones de longitud 2^n.
- La misma técnica se puede usar sobre otras modalidades “globales” (e.g., operador de clausura transitiva)

Satisfacibilidad de $\mathsf{K}+\mathsf{A}$ está en EXPTIME

Idea

- Sabemos que si φ es satisfacible, tiene modelo exponencial.
- Veremos que, además:
  - hay una cantidad exponencial de modelos a considerar, y
  - cada uno de estos modelos es exponencial
  - y se puede construir en una cantidad de pasos exponencial.
- Esto nos da un algoritmo determinístico que corre en tiempo exponencial.
- La técnica se llama “eliminación de Hintikka sets”.

Satisfacibilidad de $\mathsf{K}+\mathsf{A}$ está en EXPTIME

Hintikka sets – repaso

Clausura de un conjunto de fórmulas Σ ($\mathrm{Cl}(\Sigma)$)

$$\mathrm{Cl}(\Sigma) = \{\varphi \mid \varphi \text{ ocurre en } \Sigma\} \cup \{\overline{\varphi} \mid \varphi \text{ ocurre en } \Sigma\}$$

Intuición

$\mathrm{Cl}(\Sigma)$ es el conjunto de “fórmulas relevantes” de Σ.

Hintikka sets

Decimos que $H \subseteq \mathrm{Cl}(\Sigma)$ es un *Hintikka set para* Σ si cumple:

i. $\varphi \in \mathrm{Cl}(\Sigma) \Rightarrow \varphi \in H$ sii $\overline{\varphi} \notin H$
ii. $\varphi \wedge \psi \in \mathrm{Cl}(\Sigma) \Rightarrow \varphi \wedge \psi \in H$ sii $\varphi \in H$ y $\psi \in H$
iii. $\mathsf{E}\varphi \in \mathrm{Cl}(\Sigma) \Rightarrow \varphi \in H$ implica $\mathsf{E}\varphi \in H$

Satisfacibilidad de $\mathsf{K}+\mathsf{A}$ está en EXPTIME

$Hin_C(\Sigma)$

Notación

- $\Box(C) = \{\varphi \mid \Box\varphi \in C\}$
- $\mathsf{A}(C) = \{\varphi \mid \mathsf{A}\varphi \in C\}$
- $Hin(\Sigma) = \{H \mid H \text{ es un Hinitkka set para } \Sigma\}$
- $Hin_C(\Sigma) = \{H \mid H \in Hin(\Sigma) \text{ y } \mathsf{A}(H) = C\}$

Idea

- Para cada $C \subseteq \mathsf{A}(\mathrm{Cl}(\Sigma))$, intentamos armar un modelo $\mathcal{M}_C$.
- Si $\mathcal{M}_C$ está definido, entonces $\mathcal{M} \models \mathsf{A}\varphi \; \forall\varphi \in C$.
- La idea es ver que:

$$\Sigma \text{ es satisfacible sii } \exists C \subseteq \mathsf{A}(\mathrm{Cl}(\Sigma)) \text{ tal que } \mathcal{M}_C, w \models \Sigma$$

Satisfacibilidad de K + A está en EXPTIME

Eliminación de Hintikka sets

Caso base: $\mathcal{M}^0_C$.

Dado Σ y $C \subseteq \mathsf{A}(\mathrm{Cl}(\Sigma))$, definimos $M^0_C = \langle W^0_C, R^0_C, V^0_C \rangle$ donde:

- $W^0_C = Hin_C(\Sigma)$
- $(H, H') \in R^0_C$ sii $\forall\, \varphi \in H'$, $\Diamond\varphi \in \mathrm{Cl}(\Sigma)$ implica $\Diamond\varphi \in H$.
- $V^0_C(p) = \{H \in W^0_C \mid p \in H\}$

Paso de eliminación: $\mathcal{M}^{n+1}_C$

- Supongamos que $\mathcal{M}^n_C$ está definido (i.e., $W^n_C \neq \emptyset$).
- Decimos que H **es satisfecho en** n si, para todo φ:
  I. $\Diamond\varphi \in H$ implica $\exists H' \in W^n_C$ tal que $\varphi \in H'$ y $(H, H') \in R^n_C$.
  II. $\mathsf{E}\varphi \in H$ implica $\exists H' \in W^n_C$ tal que $\varphi \in H'$.
- $\mathcal{M}^{n+1}_C$: restricción de $\mathcal{M}^n_C$ a los $H \in W^n_C$ satisfechos en n.

Satisfacibilidad de K + A está en EXPTIME

Eliminación de Hintikka sets – $\mathcal{M}_C$

- Como $Hin_C(\Sigma)$ es finito y $W^{n+1} \subseteq W^n$, el proceso converge.
- Pero notar que W^{n+1} podría estar vacío.
- $\mathcal{M}_C$ es la estructura tal que $\mathcal{M}^{n+1} = \mathcal{M}^n$ (cuando $W^n \neq \emptyset$).
- $|Hin_C(\Sigma)|$ es exponencial en $|\Sigma|$, luego podemos obtener $\mathcal{M}_C$ en $O(2^{|\Sigma|})$ pasos.

Satisfacibilidad de K + A está en EXPTIME

Eliminación de Hintikka sets – algunos lemas

Lema

Si $\mathcal{M}_C$ está definido (con $C \subseteq \mathsf{A}(\mathrm{Cl}(\Sigma))$), entonces $\forall\, H \in W_C$:

I. $\forall\, \Diamond\chi \in \mathrm{Cl}(\Sigma)$, $\Diamond\chi \in H$ sii $\exists\, H' \in W$, $\chi \in H'$ y $(H, H') \in R_C$.
II. $\forall\, \mathsf{E}\chi \in \mathrm{Cl}(\Sigma)$, $\mathsf{E}\chi \in H$ sii $\exists\, H' \in W$, $\chi \in H'$.

Demostración

$\Rightarrow$) Si no valiera, H habría sido eliminado.

$\Leftarrow$) I. $\mathcal{M}_C$ es un refinamiento de $\mathcal{M}_0 \Rightarrow (H, H') \in R^0_C \Rightarrow \Diamond\chi \in H$.
II. $\chi \in H' \Rightarrow \mathsf{E}\chi \in H' \Rightarrow \mathsf{A}\neg\chi \notin H' \Rightarrow \mathsf{A}\neg\chi \notin H \Rightarrow \mathsf{E}\chi \in H$.

Satisfacibilidad de K + A está en EXPTIME

Eliminación de Hintikka sets – algunos lemas

Lema (Truth lemma)

Si $\mathcal{M}_C$ está definido (con $C \subseteq \mathsf{A}(\mathrm{Cl}(\Sigma))$), entonces vale:

$$\mathcal{M}_C, H \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in H$$

para todo $H \in W_C$ y todo $\varphi \in \mathrm{Cl}(\Sigma)$.

Demostración

- Sale fácil por inducción en φ, usando el lema anterior.

Satisfacibilidad de K + A está en EXPTIME

Eliminación de Hintikka sets – ¿para qué?

Teorema

Σ es satisfacible sii existen $C \subseteq \mathsf{A}(\mathrm{Cl}(\Sigma))$ y H en el dominio de $\mathcal{M}_C$ tal que $\Sigma \subseteq H$.

Demostración

$\Leftarrow$) Consecuencia directa del Truth Lemma.

$\Rightarrow$) Idea:

- Dado $\mathcal{M}, w \models \Sigma$, definir $H_v = \{\varphi \mid \mathcal{M}, v \models \varphi \text{ y } \varphi \in \mathrm{Cl}(\Sigma)\}$ y armar $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ tal que:

$$\begin{aligned} W' &= \{H_v \mid v \in W\} \\ R' &= \{(H_v, H_{v'}) \mid (v, v') \in R\} \\ V'(p) &= \{H_v \mid p \in H_v\} \end{aligned}$$

- Ver que i) $\mathcal{M}', H_w \models \Sigma$ y ii) $\exists C \subseteq \mathsf{A}(\mathrm{Cl}(\Sigma)) \forall v, H_v \in Hin_C(\Sigma)$.
- Observar que todo H_v está en $\mathcal{M}_C$ (suponer que hay un mínimo que fue eliminado y llegar a un absurdo)

Satisfacibilidad de K + A está en EXPTIME

Un algoritmo determinístico basado en eliminación de Hintikka sets

`EsSat(`Σ`)`

`para cada` $C \subseteq \mathsf{A}(\mathrm{Cl}(\Sigma))$
  `calcular` $\mathcal{M}_C$ `y si está definido`
    `para cada` H `en el dominio de` $\mathcal{M}_C$
      `si` $\Sigma \subseteq H$
        `devolver 1`
`devolver 0`

Observaciones

- `EsSat(`Σ`)` computa K + A-satisfacibilidad de Σ (finito).
- $|\mathsf{A}(\mathrm{Cl}(\Sigma))| \in O(2^{|\Sigma|})$.
- Computar $\mathcal{M}_C$ y recorrer su dominio lleva $O(2^{|\Sigma|})$ pasos.
- Luego, el algoritmo requiere $O(2^{|\Sigma|})$ pasos.