Lógica modal computacional

Completitud

Carlos Areces & Raul Fervari

1er Cuatrimestre 2017
Córdoba, Argentina

Bibliografía

- Capítulo 4 del Modal Logic Book, de Blackburn, Venema y de Rijke.

Introducción

- Una lógica se puede especificar semántica o sintácticamente.
- El enfoque semántico se corresponde con la noción de satisfacibilidad de una fórmula (o validez $\models \varphi$).
- El enfoque sintáctico se corresponde con la noción de teorema $\vdash \varphi$ (usualmente definidos en términos de un sistema axiomático).
- Surge la pregunta de cuándo estas dos alternativas definen la misma lógica.
- Más precisamente, nos interesa ver si el conjunto de fórmulas válidas es exactamente el mismo que el conjunto de teoremas.
- La respuesta se obtienen mediante resultados de *correctitud* y *completitud* que muestran que $\models$ y $\vdash$ coinciden.

Definiciones básicas

- Una *lógica modal* Δ es un conjunto de fórmulas modales que contienen a todas las tautologías proposicionales y está cerrado por:
  1. *modus ponens*: Si $\varphi \in \Delta$ y $\varphi \to \psi \in \Delta$ entonces $\psi \in \Delta$.
  2. *sustitución uniforme*: Si $\varphi \in \Delta$ entonces también pertenece cualquier substitución, que consiste en reemplazar uniformemente cualquier proposición por una fórmula arbitraria.
- Si $\varphi \in \Delta$ decimos que φ es un *teorema* de Δ, y lo notamos como $\vdash_\Delta \varphi$.
- Si Δ_1 y Δ_2 son lógicas modales tales que $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$ decimos que Δ_2 es una *extensión* de Δ_1

Algunos ejemplos

I) La colección de *todas las fórmulas* es una lógica. La lógica *inconsistente*.

II) Si $\{\Delta_i \mid i \in I\}$ es una colección de lógicas, entonces $\bigcap_{i\in I} \Delta_i$ es una lógica.

III) Si $\mathcal{M}$ es una clase de modelos, entonces el conjunto Δ_M de fórmulas válidas en $\mathcal{M}$ no necesariamente es una lógica. Pensar un contraejemplo!

Existe una lógica *mínima* que contiene a cualquier conjunto de fórmulas Γ. La llamamos la lógica *generada* por Γ.

- Por ejemplo, la lógica generada por el conjunto vacío contiene a todas las instancias de tautologías proposicionales y nada más. La llamaremos PC.

Más definiciones

- Sean $\psi_1, \dots, \psi_n, \varphi$ fórmulas modales. Decimos que φ es *deducible en el cálculo proposicional* asumiendo $\psi_1, \dots, \psi_n$ si $(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi$ es una tautología.

Como todas las lógicas están cerradas bajo deducción en el cálculo proposicional, si φ es deducible en el cálculo proposicional asumiendo $\psi_1, \dots, \psi_n$, entonces $\vdash_\Delta \psi_1 \cdots \vdash_\Delta \psi_n$ implica $\vdash_\Delta \varphi$.

- Si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es un conjunto de fórmulas, entonces φ *es deducible* en Δ a partir de Γ (notación $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$) si:
  1. $\vdash_\Delta \varphi$, ó
  2. hay fórmulas $\psi_1, \dots, \psi_n \in \Gamma$ tal que $\vdash_\Delta (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi$.

Un conjunto de fórmulas Γ es Δ-consistente si $\Gamma \nvdash_\Delta \bot$.
Una fórmula φ es Δ-consistente si $\{\varphi\}$ lo es.

Lógica modal normal

- La las definiciones anteriores son generalizaciones de conceptos del cálculo proposicional a los lenguajes modales.
- Ahora vamos a ver un concepto que es exclusivamente modal: lógicas modales normales.
- Una lógica modal Δ es *normal* si contiene a la fórmula:

$$\textbf{(K)} \quad \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q).$$

y está cerrada por la regla de *necesitación* o *generalización*:

(Nec) Si $\vdash_\Delta \varphi$ entonces $\vdash_\Delta \Box\varphi$.

Ejemplos

I) La lógica inconsistente es una lógica normal.

II) Si $\{\Delta_i \mid i \in I\}$ es una colección de lógicas normales, entonces $\bigcap_{i\in I} \Delta_i$ es una lógica normal.

III) PC no es una lógica normal.

Existe una lógica modal normal *mínima* que contiene a cualquier conjunto de fórmulas Γ. La llamamos la lógica modal normal *generada* por Γ.

- La lógica modal normal generada por el conjunto vacío es llamada **K**, y es la mínima lógica modal normal. Si Γ es un conjunto de fórmulas, la lógica modal normal generada por Γ se llama KΓ.

También es usual llamar a Γ *axiomas*, y decir que la lógica es generada a partir de Γ usando las *reglas de inferencia* modus ponens, sustitución uniforme y generalización.

Consequencia semántica

Dada una clase de modelos S y un conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\varphi\}$ existen diferentes formas de definir la noción de *consequencia semántica* en S:

- *Consequencia Local:* $\Gamma \models^l_S \varphi$ sii

$$\forall M \in S\, \forall w\, (M, w \models \Gamma \implies M, w \models \varphi)$$

- *Consequencia Global:* $\Gamma \models^g_S \varphi$ sii

$$\forall M \in S\; (M \models \Gamma \implies M \models \varphi)$$

La noción de consequencia local es la más fuerte (i.e., $\Gamma \models^l \varphi$ implica $\Gamma \models^g \varphi$). Ejercicio.
En el lo que sigue, $\Gamma \models_S \varphi$ es $\Gamma \models^l_\varphi$.

Soundness & Completeness

Repasemos las definiciones:

- Una lógica Δ es *correcta* con respecto a una clase de modelos S si para toda fórmula φ y todo modelo $M \in S$, si $\vdash_\Delta \varphi$ entonces $M \models \varphi$.
- Una lógica Δ es *fuertemente completa* con respecto a una clase de modelos S si para cualquier conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\varphi\}$, si $\Gamma \models_s \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$.

Soundness & Completeness

La noción de completitud se puede reformular en término de *consistencia*.

- Si $\Gamma \models_S \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_\Delta \varphi$ entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_\Delta \neg\varphi \to \bot$ entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash_\Delta \bot$ entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es Δ-consistente entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es Δ-consistente entonces $\exists \mathcal{M} \in S$ t.q. $\mathcal{M}, w \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$

Es decir:

- Una lógica modal normal Δ es *fuertemente completa* con respecto a una clase S sii cada conjunto Δ-consistente de fórmulas es satisfacible en algún modelo $\mathcal{M} \in S$.

Modelo canónico

- Generalmente, demostrar correctitud con respecto a una clase S es fácil.
  - Hay que ver que los axiomas son universalmente válidos en S
  - Hay que ver que las reglas de inferencia preservan verdad en S
- Nos vamos a concentrar en demostrar completitud, y para eso tenemos que ver cómo hacer para encontrar un modelo que satisfaga a cada conjunto consistente de fórmulas.
- Y las “piezas” que vamos a usar van a ser *conjuntos maximales consistentes*.

Un conjunto de fórmulas Γ es maximal Δ-consistente si Γ es Δ-consistente y cualquier conjunto de fórmulas que contiene propiamente a Γ es Δ-inconsistente.

- Si Γ es un conjunto maximal Δ-consistente decimos que es un Δ-MCS.

Modelo canónico

¿Cuál es la intuición de usar MCSs en la prueba de completitud para lógicas modales?

- Observar que cada punto w en cada modelo M para una lógica Δ está asociado con un conjunto de fórmulas $\{\varphi \mid M, w \models \varphi\}$.
- No es difícil ver que este conjunto de fórmulas es efectivamente un Δ-MCS. Y esto significa que si φ es verdadera en un modelo para una lógica Δ, entonces φ pertenece a un Δ-MCS.
- Además, si w está relacionado con w' en algún modelo M, entonces la información de cada uno de los MCSs asociados a w y w' tienen que estar "coherentemente relacionada".

Modelo canónico

La idea es trabajar con colecciones de MCSs coherentemente relacionados para construir el modelo buscado. El objetivo es probar el *truth lemma*, que nos dice que 'φ pertenece a un MCS' es equivalente a 'φ es verdadera en un modelo'.

- Los mundos del modelo canónico van a ser todos los MCSs de la lógica en la que estemos trabajando.
- Vamos a ver qué significa que la información de los MCSs esté 'coherentemente relacionada', y vamos a usar esa noción para definir la relación de accesibilidad.

Propiedades de MCSs

Para llevar a cabo eso, veamos algunas propiedades que tienen los MCSs. Si Δ es una lógica y Γ es un Δ-MCS entonces:

- $\Delta \subseteq \Gamma$.
- Γ está cerrado bajo modus ponens.
- Para toda fórmula φ, $\varphi \in \Gamma$ ó $\neg\varphi \in \Gamma$.
- Para toda fórmula φ, ψ, $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ sii $\varphi \in \Gamma$ ó $\psi \in \Gamma$.

Lema de Lindenbaum

Como los MCSs van a ser las piezas que necesitamos para construir el modelo canónico, tenemos que asegurarnos de tener suficientes. Cualquier conjunto consistente de fórmulas puede ser extendido a uno maximal consistente.

- Si Σ es un conjunto Δ-consistente de fórmulas, entonces existe un Δ-MCS Σ^+ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$.

Demostración:

I) Enumeramos las fórmulas de nuestro lenguaje $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$.
II) Definimos la secuencia de conjuntos:

$$
\begin{aligned}
\Sigma_0 &= \Sigma \\
\Sigma_{n+1} &= \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{si el conjunto es } \Delta\text{-consistente} \\ \Sigma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{en otro caso} \end{cases} \\
\Sigma^+ &= \bigcup_{n \geq 0} \Sigma_n
\end{aligned}
$$

Construcción del modelo canónico

El modelo canónico M^Δ para una lógica modal normal Δ (en el lenguaje básico) es $\langle W^\Delta, R^\Delta, v^\Delta \rangle$ donde:

- W^Δ es el conjunto de todos los Δ-MCSs
- R^Δ es la relación binaria sobre W^Δ definida por $R^\Delta wu$ si para toda fórmula ψ, $\psi \in u$ implica $\Diamond\psi \in w$.
- V^Δ es la valuación definida como $V^\Delta(p) = \{w \in W^\Delta \mid p \in w\}$

Algunos comentarios sobre el modelo canónico

- La valuación canónica iguala la verdad de un símbolo proposicional en w con su pertenencia a w. Nuestro objetivo es probar el *truth lemma* que lleva "verdad = pertenencia" al nivel de fórmulas.
- Los estados de M^Δ son *todos* los MCSs Δ-consistentes. La consecuencia de esto es que, dado el lema de Lindenbaum, *cualquier* conjunto Δ-consistente es un subconjunto de algún punto en M^Δ. Y por el truth lemma que vamos a probar después, cualquier conjunto Δ-consistente es verdadero en algún punto del modelo.

Algunos comentarios sobre el modelo canónico

- Esto significa que este *único* modelo M^Δ es un 'modelo universal' para la lógica Δ.
- Por último, la relación canónica de accesibilidad captura la idea que dos MCSs están 'coherentemente relacionados' en función de las fórmulas que valen en cada uno.

Completitud

Estamos en condiciones de probar el siguiente lema, que nos dice que hay 'suficientes' MCSs en nuestro modelo para lo que necesitamos hacer:

- **Existence lemma**: Para cualquier lógica modal normal Δ, y cualquier estado $w \in W^\Delta$, si $\Diamond\varphi \in w$ entonces existe un estado $v \in W^\Delta$ tal que $R^\Delta wv$ y $\varphi \in v$.

Demostración: Supongamos que $\Diamond\varphi \in w$. Vamos a construir v tal que $R^\Delta wv$ y $\varphi \in v$. Sea $v^- = \{\varphi\} \cup \{\psi \mid \Box\psi \in w\}$.

- v^- es consistente. Ejercicio! (y acá hay que hacer demostraciones sintácticas! :P)

Luego por Lindenbaum existe un Δ-MCS v que extiende a v^-. Por construcción, $\varphi \in v$, y para toda fórmula ψ, $\Box\psi \in w$ implica $\psi \in v$.

- Esto último implica que $R^\Delta wv$. Ejercicio!

Completitud

Ahora sí podemos llevar "verdad = pertenencia" al nivel de fórmulas arbitrarias.

- **Truth lemma**: Para cualquier lógica modal normal Δ y cualquier fórmula φ, $M^{\Delta}, w \models \varphi$ sii $\varphi \in w$.

La demostración sale fácil por inducción en φ. El único caso interesante es el modal, y eso está cubierto por el *existence lemma* (la dirección difícil).
Y finalmente:

- **Teorema del Modelo Canónico**: Cualquier lógica modal normal es fuertemente completa con respecto a su modelo canónico.

Demostración: Supongamos que Σ es un conjunto Δ-consistente. Por el lema de Lindenbaum existe un Δ-MCS Σ^+ que extiende a Σ. Por el *truth lemma*, $M^{\Delta}, \Sigma^+ \models \Sigma$.

Completitud

Como corolario tenemos:

- La lógica modal normal **K** es fuertemente completa con respecto a la clase de todos los modelos.

Por el teorema anterior, dado que **K** es una lógica modal normal, es fuertemente completa con respecto a su modelo M^K. Sólo queda chequear que M^K pertenece a la clase de todos los modelos, pero esto es trivial.

Completitud en Lógicas Híbridas

- Ya mencionamos varias veces en el curso los operadores híbridos i (nominales) y @ (at).
- Vamos a mostrar que al agregar estos operadores al lenguaje de la lógica modal clásica podemos demostrar un resultado general de completitud.
- Repasemos primero algunas cosas:

$$\begin{array}{rcl} M, w \models i & \text{iff} & w \in V(i) \\ M, w \models @_i\varphi & \text{iff} & M, d \models \varphi \text{ for } \{d\} = V(i) \end{array}$$

Fórmulas Puras

- Decimos que una fórmula modal es pura si sus únicos símbolos de proposición son nominales.
- Las fórmulas puras permiten definir muchas propiedades de la relación de accesibilidad.

Definibles en LMB		**No definibles en LMB**	
reflexivity	$i \to \Diamond i$	irreflexivity	$i \to \neg\Diamond i$
symmetry	$i \to \Box\Diamond i$	asymmetry	$i \to \neg\Diamond\Diamond i$
transitivity	$\Diamond\Diamond i \to \Diamond i$	intransitivity	$\Diamond\Diamond i \to \neg\Diamond i$
density	$\Diamond i \to \Diamond\Diamond i$	universality	$\Diamond i$
determinism	$\Diamond i \to \Box i$	trichotomy	$@_j\Diamond i \vee @_j i \vee @_i\Diamond j$
		at most 2 states	$@_i(\neg j \wedge \neg k) \to @_j k$

- **Claim:** Cuando una fórmula pura es válida en un frame, define una propiedad de *primer orden* sobre su relación de accesibilidad (Demostrar).

Axiomatización via Fórmulas Puras

- Cuando una fórmula pura se usa como axioma, la axiomatización es automáticamente completa sobre la clase de frames definida por esa fórmula
  Teorema: Si P es la lógica normal híbrida obtenida agregando un conjunto Π de fórmulas puras sobre la axiomatización de la lógica híbrida mínima $K_h + R$ (que vamos a introducir en un momento), entonces P es completa respecto de la clase de frames definida por Π.
- Vamos a demostrar este teorema de completitud general usando una construcción propuesta por Henkin para la lógica de primer orden.

De Validez en un modelo a Validez en un Frame

- Antes de comenzar con la demostración de completitud, veamos por que podemos obtener en este caso un resultado tan general.
- Decimos que un modelo M está nombrado si cada estado de M está en la extensión de al menos un nominal.
- Si φ es una fórmula pura, decimos que ψ es una instancia pura de φ si se obtiene a partir de φ substituyendo nominales por nominales.
- **Proposición:** Se $M = \langle W, R, V\rangle$ un modelo nombrado y φ una fórmula pura. Supongamos que para toda instancia pura ψ de φ tenemos $M \models \psi$. Entonces $\langle W, V\rangle \models \varphi$.

Lógicas Híbridas

Definition: Un conjunto Δ de fórmulas es una lógica híbrida si es una lógica modal normal y además contiene los siguientes axiomas y está cerrada por las siguientes reglas:

Reglas:
@-Gen: Si $\vdash_\Delta \varphi$ implica $\vdash_\Delta @_i\varphi$

Axiomas:

$K_@$	$@_i(p \to q) \to (@_ip \to @_iq)$
self-dual	$@_ip \leftrightarrow \neg @_i\neg p$
introduction	$i \wedge p \to @_ip$
ref	$@_ii$
sym	$@_ij \leftrightarrow @_ji$
nom	$@_ij \wedge @_jp \to @_ip$
agree	$@_j@_ip \leftrightarrow @_ip$
back	$\Diamond @_ip \to @_ip$

Soundness and Completeness

- Como en el caso de las lógicas modales normales, el conjunto de todas las fórmulas híbridas es una lógica y la definición está cerrada por intersección, por lo que hay una lógica híbrida mínima que llamamos K_h.
- Como es usual, probar soundness es fácil: basta chequear que todos los axioimas son válidos y que las reglas preservan validez (Ejercicio).
- La demostración de completitud usa también MCS. Pero en ese caso vamos a usar MCS nombrados. Decimos que un MCS está nombrado Γ por un nominal i si $i \in \Gamma$.

Propiedades de MCS híbridos

Proposición: Sea Γ un K_h-MCS. Para cada nominal i definimos $\Delta_i = \{\varphi \mid @_i\varphi \in \Gamma\}$.

1. Δ_i es un K_h-MCS que contiene a i.
2. Para todo par de nominales i, j, si $i \in \Delta_j$ entonces $\Delta_i = \Delta_j$.
3. Para todo par de nominales i, j, $@_i\varphi \in \Delta_j$ sii $@_i\varphi \in \Gamma$.
4. Si $k \in \Gamma$, entonces $\Delta_k = \Gamma$.

Dem. Mostremos 1:
Por (ref) $@_i i \in Gamma$, por lo que $i \in \Delta_i$.
Δ_i es maximal consistente. Supongamos que no es consistente: Luego, existen $\delta_k \in \Delta_i$ tal que $\vdash \neg(\delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n)$. Por @-Gen, $\vdash @_i\neg(\delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n)$ y por self-dual $\vdash \neg @_i(\delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n)$ y por lo tanto está en Γ. Como $\delta_k \in \Delta_i$, $@_i\delta_k \in \Gamma$. Como $@_i$ es una modalidad normal, $\vdash \bigwedge @_i\delta_k \to @_i(\bigwedge \delta_k)$. Por lo que $@_i(\delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n) \in \Gamma$ contradeciendo que Γ es consistente.
Maximalidad y los otros puntos quedan como ejercicio.

Modelo Canónico

En este punto podríamos seguir como lo hicimos en el caso de K.

- Usar el Lema de Lindenbaum para mostrar que todo conjunto consistente Σ puede extenderse a un conjunto maximal consistente Σ^+.
- Considerar el modelo que tiene como dominio el conjunto de todos los MCS. (En realidad tenemos que considerar el submodelo del modelo canónico generado por $\Sigma^+ \cup \{\Delta_i \mid \Delta_i = \{\varphi \mid @_i\varphi \in \Sigma^+\}\}$, para asegurarnos de obtener un modelo híbrido).
- Probar el Truth y el Existence Lemmas.

Pero el modelo obtenido de esta forma no es un modelo nombrado, y por lo tanto que una fórmula pura sea válida en este modelo no implica que sea válida en su frame.

Reglas Admisibles

- Como mencionamos, podemos demostrar que la lógica K_h es completa de forma similar a cómo hicimos con K.
- Pero a partir de ese resultado no podemos demostrar que $K_h + \Pi$ es completa para la clase definida por Π, con Π un conjunto arbitraro de fórmulas puras.
- Para poder construir un modelo nombrado, necesitamos dos reglas adicionales.

Name	$\vdash j \to \theta$ entonces $\vdash \theta$
Paste	$\vdash @_i\Diamond j \wedge @_j\varphi \to \theta$ entonces $\vdash @_i\Diamond\varphi \to \theta$

  j un nominal diferente de i que no aparece en θ.
- Sea $K_h + R$ la lógica obtenida al agregar estas dos reglas a K_h.

Lema de Lindenbaum Extendido

Teorema: Decimos que un conjunto Γ está pasted si $@_i\Diamond\varphi \in \Gamma$ implica que para algún nominal j, $@_i\Diamond j \wedge @_j\varphi \in \Gamma$.
Sea NOM' un conjunto infinito de nominales disjunto de NOM y sea L' el lenguaje híbrido definido sobre $NOM \cup NOM'$. Todo conjunto $K_h + R$-consistente en L puede ser extendido a un $K_h + R$-MCS nombrado y pasted en L'.

Dem. Procedemos como antes. Enumeramos todas las fórmulas de L'. Sea K un conjunto consistente. Sea $\Sigma_K = \Sigma \cup \{k\}$ para k no en Σ.
Definimos

$\Sigma^0 = \Sigma_k$
$\Sigma^{m+1} = \Sigma^m$ si $\Sigma^m \cup \{\varphi_{m+1}\}$ es inconsistente
$\Sigma^{m+1} = \Sigma^m \cup \{\varphi_{m+1}\}$ si es consistente y si φ_{m+1} no es de la forma $@_i\Diamond\psi$.
$\Sigma^{m+1} = \Sigma^m \cup \{\varphi_{m+1}\} \cup \{@_i\Diamond j \wedge @_j\varphi\}$ si es consistente y φ_{m+1} es $@_i\Diamond\psi$.
$\Sigma^+ = \bigcup \Sigma^n$

Σ^+ es un MCS nombrado y pasted.

Modelos nombrados a partir de un MCS

Definición: Sea Γ un $K_h + R$-MCS. El modelo nombrado obtenido a partir de Γ se define como $M^\Gamma = \langle W^\Gamma, R^\Gamma, V^\Gamma \rangle$ donde

$W^\Gamma = \{\Delta_i \mid \Delta_i = \{\varphi \mid @_i\varphi \in \Gamma\}\}$.
R^Γ es la relación canónica.
V^Γ es la valuación canónica.

Los Existence y Truth lemmas pueden mostrarse en M^Γ.