Lógicas Modales Dinámicas

Clase #3

Carlos Areces & Raul Fervari

Febrero 2024, Río Cuarto, Argentina

Hasta ahora

- Lógica Modal Básica (LMB).
- Expresividad y Axiomatizaciones.
- Lógica de Anuncios Públicos (LAP).
- Expresividad: Igual a LMB.
- Axiomatización: Mediante axiomas de reducción.

Plan para hoy

- Cerramos axiomatización de LMB y LAP.
- Vamos a considerar otra alternativa de lógica dinámica.
- Introduciremos una lógica que elimina ejes en la relación de accesibilidad: *sabotage logic*.
  - Nos ayudará a comprender los efectos de tener operadores (realmente) dinámicos en el lenguaje.
  - Como venimos haciendo, discutimos: expresividad?, complejidad?, axiomatización?
- Vamos a mencionar otras alternativas de operadores dinámicos.

Axiomatización y Completitud de **K**

- El sistema axiomático **K** es el menor conjunto de fórmulas modales Δ que contiene:
  1. Todas las tautologías proposicionales.
  2. El axioma (K): $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.

  y está cerrado por:
  1. *modus ponens*: Si $\varphi \in \Delta$ y $\varphi \to \psi \in \Delta$ entonces $\psi \in \Delta$.
  2. *sustitución uniforme*: Si $\varphi \in \Delta$ entonces $\varphi[p/\psi] \in \Delta$ para cualquier $p \in \mathsf{PROP}$, y cualquier ψ.
  3. *necesitación* (Nec): $\varphi \in \Delta$ entonces $\Box\varphi \in \Delta$.

Axiomatización y Completitud de **K**

- El sistema axiomático **K** es el menor conjunto de fórmulas modales Δ que contiene:
  I. Todas las tautologías proposicionales.
  II. El axioma (K): $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.

  y está cerrado por:
  I. *modus ponens*: Si $\varphi \in \Delta$ y $\varphi \to \psi \in \Delta$ entonces $\psi \in \Delta$.
  II. *sustitución uniforme*: Si $\varphi \in \Delta$ entonces $\varphi[p/\psi] \in \Delta$ para cualquier $p \in \mathsf{PROP}$, y cualquier ψ.
  III. *necesitación* (Nec): $\varphi \in \Delta$ entonces $\Box\varphi \in \Delta$.
- Si $\varphi \in \Delta$ decimos que φ es un *teorema* de **K** ($\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$).

Axiomatización y Completitud de **K**

- El sistema axiomático **K** es el menor conjunto de fórmulas modales Δ que contiene:
  I. Todas las tautologías proposicionales.
  II. El axioma (K): $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.

  y está cerrado por:
  I. *modus ponens*: Si $\varphi \in \Delta$ y $\varphi \to \psi \in \Delta$ entonces $\psi \in \Delta$.
  II. *sustitución uniforme*: Si $\varphi \in \Delta$ entonces $\varphi[p/\psi] \in \Delta$ para cualquier $p \in \mathsf{PROP}$, y cualquier ψ.
  III. *necesitación* (Nec): $\varphi \in \Delta$ entonces $\Box\varphi \in \Delta$.
- Si $\varphi \in \Delta$ decimos que φ es un *teorema* de **K** ($\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$).
- Charlamos la demo de completitud por construcción del Modelo Canónico $M^{\mathbf{K}}$ que satisface todas las fórmuals **K**-consistentes.

Axiomatización y Completitud de **K**

- El sistema axiomático **K** es el menor conjunto de fórmulas modales Δ que contiene:
  1. Todas las tautologías proposicionales.
  2. El axioma (K): $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.

  y está cerrado por:
  1. *modus ponens*: Si $\varphi \in \Delta$ y $\varphi \to \psi \in \Delta$ entonces $\psi \in \Delta$.
  2. *sustitución uniforme*: Si $\varphi \in \Delta$ entonces $\varphi[p/\psi] \in \Delta$ para cualquier $p \in \mathsf{PROP}$, y cualquier ψ.
  3. *necesitación* (Nec): $\varphi \in \Delta$ entonces $\Box\varphi \in \Delta$.
- Si $\varphi \in \Delta$ decimos que φ es un *teorema* de **K** ($\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$).
- Charlamos la demo de completitud por construcción del Modelo Canónico $M^{\mathbf{K}}$ que satisface todas las fórmuals **K**-consistentes.

Ejemplo de demostración

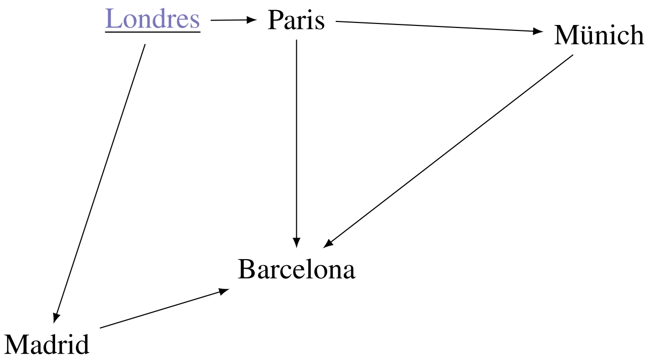
- Probemos que $\vdash_{\mathbf{K}} \Box A \to \Box(B \to A)$

1.	$A \to (B \to A)$	Taut
2.	$\Box(A \to (B \to A))$	Nec, 1
3.	$\Box(A \to (B \to A)) \to (\Box A \to \Box(B \to A))$	K
4.	$\Box A \to \Box(B \to A)$	MP, 2, 3

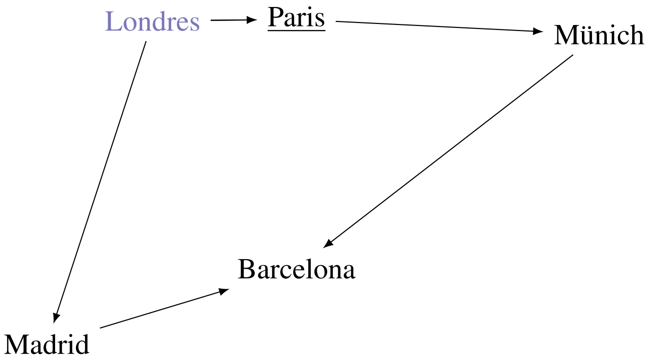
Completitud para **K**

1. **K** es completa sii toda fórmula φ **K**-consistente (i.e., no pasa $\varphi \vdash_{\mathbf{K}} \bot$) es satisfacible.
2. Lema de Lindenbaum: Todo conjunto consistente puede extenderse a uno maximal consistente (MCS).
3. $M^{\mathbf{k}}$ tiene por estados a todos MCS.
4. Lema de la Verdad y la Pertenencia (Truth Lemma): Si Δ es un estado de $M^{\mathbf{K}}$ y $\varphi \in \Delta$ entonces $M^{\mathbf{K}}, \Delta \models \varphi$.

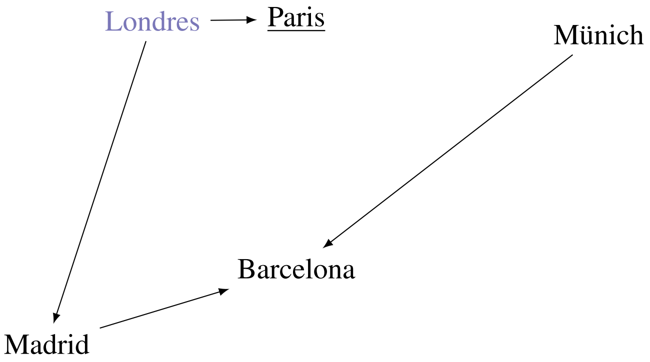
Cambiando el acceso



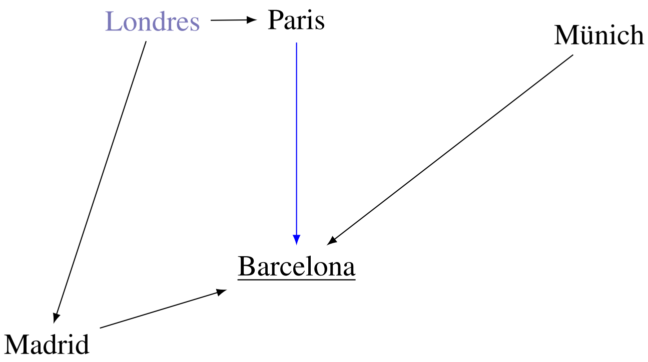
Cambiando el acceso



Cambiando el acceso



Cambiando el acceso



Una nueva lógica modal dinámica

Podemos extender la lógica modal básica, con un operador que modela sabotaje:

$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \varphi \text{ sii existe } (v, v') \in R \text{ tq. } \mathcal{M}^{-}_{vv'}, w \models \varphi,$$

Una nueva lógica modal dinámica

Podemos extender la lógica modal básica, con un operador que modela sabotaje:

$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \varphi \ \text{ sii existe } (v, v') \in R \text{ tq. } \mathcal{M}^-_{vv'}, w \models \varphi,$$

donde

$$\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle \qquad \mathcal{M}^-_{wv} = \langle W, R^-_{vv'}, V \rangle$$
$$R^-_{vv'} = R \setminus \{(v, v')\}$$

Una nueva lógica modal dinámica

Podemos extender la lógica modal básica, con un operador que modela sabotaje:

$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \varphi \text{ sii existe } (v, v') \in R \text{ tq. } \mathcal{M}^{-}_{vv'}, w \models \varphi,$$

donde

$$\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle \qquad \mathcal{M}^{-}_{wv} = \langle W, R^{-}_{vv'}, V \rangle$$
$$R^{-}_{vv'} = R \setminus \{(v, v')\}$$

Definimos LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a la lógica LMB extendida con $\langle \mathsf{sb} \rangle$.

Una nueva lógica modal dinámica

Podemos extender la lógica modal básica, con un operador que modela sabotaje:

$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \varphi \text{ sii existe } (v, v') \in R \text{ tq. } \mathcal{M}^{-}_{vv'}, w \models \varphi,$$

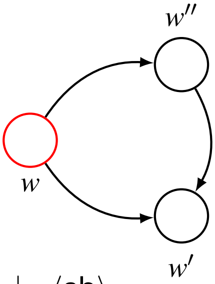
donde

$$\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle \qquad \mathcal{M}^{-}_{wv} = \langle W, R^{-}_{vv'}, V \rangle$$
$$R^{-}_{vv'} = R \setminus \{(v, v')\}$$

Definimos LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a la lógica LMB extendida con $\langle \mathsf{sb} \rangle$.

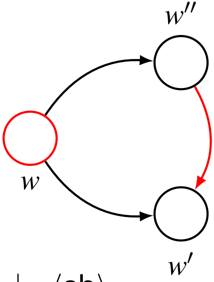
Definimos $[\mathsf{sb}]\varphi := \neg \langle \mathsf{sb} \rangle \neg \varphi$.

Ejemplo



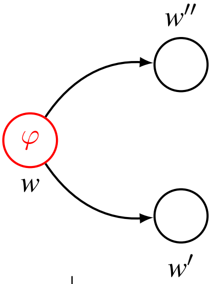
$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$

Ejemplo



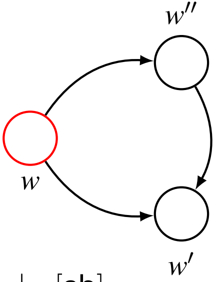
$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$$

Ejemplo



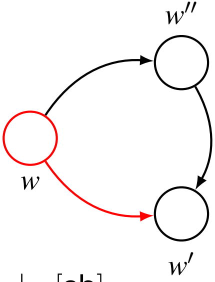
$\mathcal{M}^{-}_{w'w''}, w \models \varphi$

Ejemplo



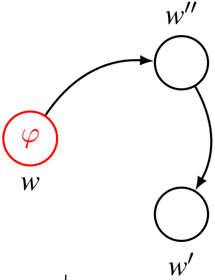
$\mathcal{M}, w \models [\mathsf{sb}]\varphi$

Ejemplo



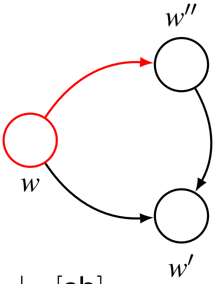
$$\mathcal{M}, w \models [\mathsf{sb}]\varphi$$

Ejemplo



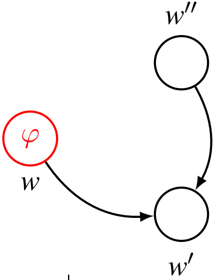
$$\mathcal{M}^{-}_{ww'}, w \models \varphi$$

Ejemplo



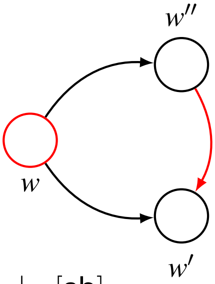
$\mathcal{M}, w \models [\mathsf{sb}]\varphi$

Ejemplo



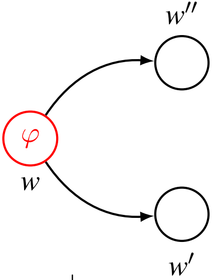
$$\mathcal{M}^{-}_{ww''}, w \models \varphi$$

Ejemplo



$$\mathcal{M}, w \models [\mathsf{sb}]\varphi$$

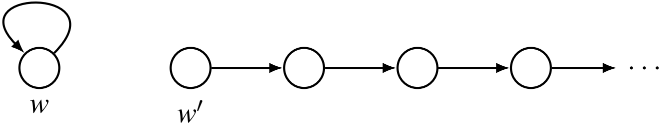
Ejemplo



$$\mathcal{M}^{-}_{w'w''}, w \models \varphi$$

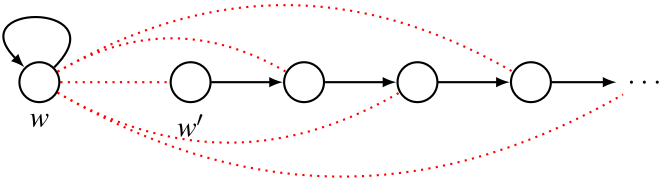
Poder Expresivo: Modelos de Árbol

Consideremos los siguientes modelos:



Poder Expresivo: Modelos de Árbol

Consideremos los siguientes modelos:



Los modelos son bisimilares para la LMB.

Observación: el modelo de la derecha es un árbol.

Tree Model Property para LMB

Teorema:
La LMB tiene la tree model property: para toda fórmula φ de LMB, si φ es satisfacible entonces φ es también satisfacible en la raíz de un árbol.

Tree Model Property para LMB

Teorema:

La LMB tiene la tree model property: para toda fórmula φ de LMB, si φ es satisfacible entonces φ es también satisfacible en la raíz de un árbol.

Idea de la prueba:

Sea $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ y $w \in W$, tal que $\mathcal{M}, w \models \varphi$. Construimos un árbol $\mathcal{T} = \langle W', R', V' \rangle$:

1. Tomar todas las secuencias de puntos que empiezan en w y que son alcanzables via R.
2. A cada secuencia $w \dots v$, le damos la misma valuación que v.
3. Si $(v, u) \in R$, ponemos $(w, \dots v, w \dots vu)$ en R'.
4. $\mathcal{T}$ es un árbol y $\mathcal{T}, w \models \varphi$.

Tree Model Property para LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

Teorema:
LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) no tiene la tree model property.

Tree Model Property para LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

Teorema:

LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) no tiene la tree model property.

Demo.

La fórmula $\Diamond\Diamond\top \wedge [\mathsf{sb}]\Box\bot$ no se satisface en la raíz de un árbol.

Tree Model Property para LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

Teorema:
LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) no tiene la tree model property.

Demo.
La fórmula $\Diamond\Diamond\top \wedge [\mathsf{sb}]\Box\bot$ no se satisface en la raíz de un árbol.

Corolario.
LMB $<$ LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$); es decir, LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) es estrictamente más expresiva que LMB.

Tree Model Property para LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

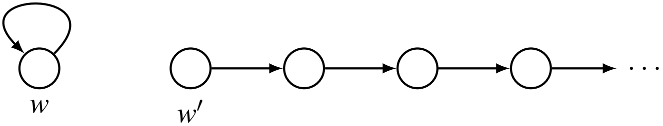
Teorema:
LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) no tiene la tree model property.

Demo.
La fórmula $\Diamond\Diamond\top \wedge [\mathsf{sb}]\Box\bot$ no se satisface en la raíz de un árbol.

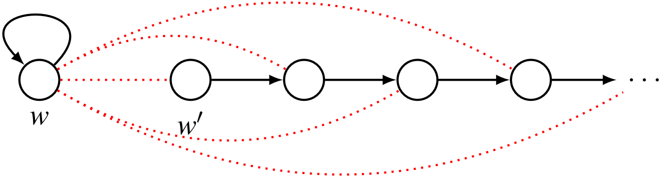
Corolario.
LMB $<$ LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$); es decir, LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) es estrictamente más expresiva que LMB.

Ejercicio: dar el argumento en detalle del corolario.

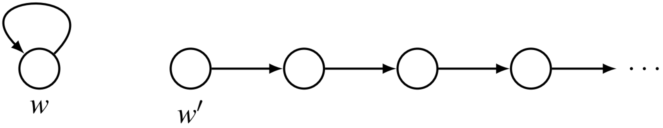
Bisimulaciones



Bisimulaciones

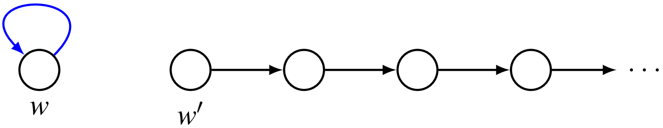


Bisimulaciones



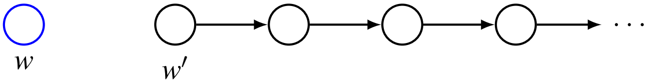
$[\mathsf{sb}]\Box\bot$

Bisimulaciones



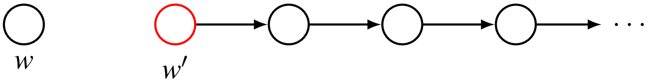
$[\mathsf{sb}]\Box\bot$

Bisimulaciones



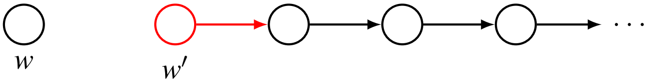
$\Box\bot$

Bisimulaciones



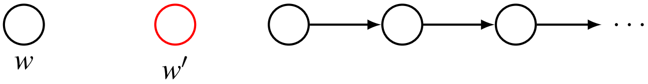
$[\mathsf{sb}]\Box\bot$

Bisimulaciones



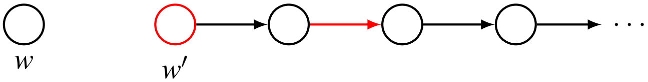
$[\mathsf{sb}]\Box\bot$

Bisimulaciones



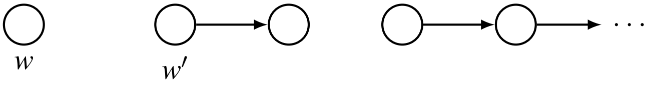
$\Box\bot$

Bisimulaciones



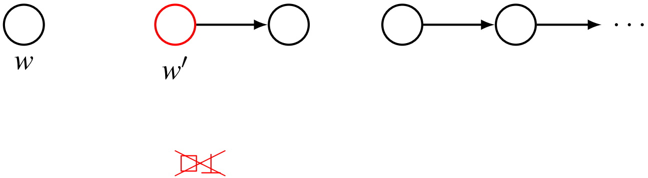
$[\mathsf{sb}]\Box\bot$

Bisimulaciones



$\Box\bot$

Bisimulaciones



Bisimulaciones y Poder Expresivo

- LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) más expresiva que LMB significa LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) captura ciertas propiedades que LMB no puede capturar.
- Las bisimulaciones relacionan estados o mundos con propiedades parecidas.
- Para LMB, estas son: información proposicional (atom), e información sobre los sucesores (zig y zag).

Bisimulaciones y Poder Expresivo

- LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) más expresiva que LMB significa LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) captura ciertas propiedades que LMB no puede capturar.
- Las bisimulaciones relacionan estados o mundos con propiedades parecidas.
- Para LMB, estas son: información proposicional (atom), e información sobre los sucesores (zig y zag).
- Para sabotage, estas condiciones no son suficientes.

Bisimulaciones y Poder Expresivo

- LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) más expresiva que LMB significa LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) captura ciertas propiedades que LMB no puede capturar.
- Las bisimulaciones relacionan estados o mundos con propiedades parecidas.
- Para LMB, estas son: información proposicional (atom), e información sobre los sucesores (zig y zag).
- Para sabotage, estas condiciones no son suficientes.
- ¿Qué propiedades necesitamos para sabotage?

Bisimulaciones y Poder Expresivo

- LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) más expresiva que LMB significa LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) captura ciertas propiedades que LMB no puede capturar.
- Las bisimulaciones relacionan estados o mundos con propiedades parecidas.
- Para LMB, estas son: información proposicional (atom), e información sobre los sucesores (zig y zag).
- Para sabotage, estas condiciones no son suficientes.
- ¿Qué propiedades necesitamos para sabotage?
- Claramente, información sobre la eliminación de ejes.

LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-bisimulaciones

En este caso, las bisimulaciones relaciona pares (estado,ejes).

LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-bisimulaciones

En este caso, las bisimulaciones relaciona pares (estado,ejes).

Sean $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ y $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ dos modelos.
$Z \subseteq (W \times 2^{W^2}) \times (W' \times 2^{W'^2})$ es una bisimulación si $(w, S)Z(w', S')$ implica:

(Atomic Harmony) $w \in V(p)$ sii $w' \in V'(p)$, para todo $p \in \mathsf{PROP}$;
(Zig) si $(w, v) \in S$ entonces existe v' tq. $(w', v') \in S'$ y $(v, S)Z(v', S')$;
(Zag) si $(w', v') \in S'$ entonces existe v tq. $(w, v) \in S$ y $(v, S)Z(v', S')$;

LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-bisimulaciones

En este caso, las bisimulaciones relaciona pares (estado,ejes).

Sean $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ y $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ dos modelos.
$Z \subseteq (W \times 2^{W^2}) \times (W' \times 2^{W'^2})$ es una bisimulación si $(w, S)Z(w', S')$ implica:

(Atomic Harmony) $w \in V(p)$ sii $w' \in V'(p)$, para todo $p \in \mathsf{PROP}$;

(Zig) si $(w, v) \in S$ entonces existe v' tq. $(w', v') \in S'$ y $(v, S)Z(v', S')$;

(Zag) si $(w', v') \in S'$ entonces existe v tq. $(w, v) \in S$ y $(v, S)Z(v', S')$;

($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zig) si $(x, y) \in S$ entonces existe $(x', y') \in S'$ tq. $(w, S^-_{xy})Z(w', S'^-_{x'y'})$;

LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-bisimulaciones

En este caso, las bisimulaciones relaciona pares (estado,ejes).

Sean $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ y $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ dos modelos.
$Z \subseteq (W \times 2^{W^2}) \times (W' \times 2^{W'^2})$ es una bisimulación si $(w, S)Z(w', S')$ implica:

(Atomic Harmony) $w \in V(p)$ sii $w' \in V'(p)$, para todo $p \in \mathsf{PROP}$;

(Zig) si $(w, v) \in S$ entonces existe v' tq. $(w', v') \in S'$ y $(v, S)Z(v', S')$;

(Zag) si $(w', v') \in S'$ entonces existe v tq. $(w, v) \in S$ y $(v, S)Z(v', S')$;

($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zig) si $(x, y) \in S$ entonces existe $(x', y') \in S'$ tq. $(w, S^-_{xy})Z(w', S'^-_{x'y'})$;

($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zag) si $(x', y') \in S'$ entonces existe $(x, y) \in S$ tq. $(w, S^-_{xy})Z(w', S'^-_{x'y'})$.

LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-bisimulaciones

En este caso, las bisimulaciones relaciona pares (estado,ejes).

Sean $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ y $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ dos modelos.
$Z \subseteq (W \times 2^{W^2}) \times (W' \times 2^{W'^2})$ es una bisimulación si $(w, S)Z(w', S')$ implica:

(Atomic Harmony) $w \in V(p)$ sii $w' \in V'(p)$, para todo $p \in \mathsf{PROP}$;
(Zig) si $(w, v) \in S$ entonces existe v' tq. $(w', v') \in S'$ y $(v, S)Z(v', S')$;
(Zag) si $(w', v') \in S'$ entonces existe v tq. $(w, v) \in S$ y $(v, S)Z(v', S')$;
($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zig) si $(x, y) \in S$ entonces existe $(x', y') \in S'$ tq. $(w, S^-_{xy})Z(w', S'^-_{x'y'})$;
($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zag) si $(x', y') \in S'$ entonces existe $(x, y) \in S$ tq. $(w, S^-_{xy})Z(w', S'^-_{x'y'})$.

$\mathcal{M}, w \leftrightarroweq_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ si $\exists$ una bisimulación Z tq. $(w, R)Z(w', R')$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarroweq_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarroows_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Vamos a generalizar este enunciado:

Hipótesis inductiva

Para todo $S \subseteq W^2, S' \subseteq W'^2$, $(w, S)Z(w', S')$ implica $\langle W, S, V \rangle, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \langle W', S', V' \rangle, w'$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarroows_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Vamos a generalizar este enunciado:

Hipótesis inductiva

Para todo $S \subseteq W^2, S' \subseteq W'^2$, $(w, S)Z(w', S')$ implica $\langle W, S, V \rangle, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \langle W', S', V' \rangle, w'$.

Demo.

Consideremos el caso para $\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$. Supongamos $\langle W, S, V \rangle, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarrows_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Vamos a generalizar este enunciado:

Hipótesis inductiva

Para todo $S \subseteq W^2, S' \subseteq W'^2$, $(w, S)Z(w', S')$ implica $\langle W, S, V \rangle, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \langle W', S', V' \rangle, w'$.

Demo.

Consideremos el caso para $\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$. Supongamos $\langle W, S, V \rangle, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.
Entonces existe $(x, y) \in S$ tq. $\langle W, S^-_{x,y}, V \rangle, w \models \psi$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarrows_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Vamos a generalizar este enunciado:

Hipótesis inductiva

Para todo $S \subseteq W^2, S' \subseteq W'^2$, $(w, S)Z(w', S')$ implica $\langle W, S, V \rangle, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \langle W', S', V' \rangle, w'$.

Demo.

Consideremos el caso para $\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$. Supongamos $\langle W, S, V \rangle, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.
Entonces existe $(x, y) \in S$ tq. $\langle W, S^-_{x,y}, V \rangle, w \models \psi$.
Por ($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zig), existe $(x', y') \in S'$ tq. $(w, S^-_{xy})Z(w', S'^-_{x'y'})$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarrows_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Vamos a generalizar este enunciado:

Hipótesis inductiva

Para todo $S \subseteq W^2, S' \subseteq W'^2$, $(w, S)Z(w', S')$ implica $\langle W, S, V \rangle, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \langle W', S', V' \rangle, w'$.

Demo.

Consideremos el caso para $\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$. Supongamos $\langle W, S, V \rangle, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.
Entonces existe $(x, y) \in S$ tq. $\langle W, S^-_{x,y}, V \rangle, w \models \psi$.
Por ($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zig), existe $(x', y') \in S'$ tq. $(w, S^-_{xy})Z(w', S'^-_{x'y'})$.
Por HI, $\langle W', S'^-_{x'y'}, V' \rangle, w' \models \psi$ y por ($\models$) $\langle W', S', V' \rangle, w' \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarroows_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Vamos a generalizar este enunciado:

Hipótesis inductiva

Para todo $S \subseteq W^2, S' \subseteq W'^2$, $(w, S)Z(w', S')$ implica $\langle W, S, V \rangle, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \langle W', S', V' \rangle, w'$.

Demo.

Consideremos el caso para $\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$. Supongamos $\langle W, S, V \rangle, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.
Entonces existe $(x, y) \in S$ tq. $\langle W, S^-_{x,y}, V \rangle, w \models \psi$.
Por ($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zig), existe $(x', y') \in S'$ tq. $(w, S^-_{xy})Z(w', S'^-_{x'y'})$.
Por HI, $\langle W', S'^-_{x'y'}, V' \rangle, w' \models \psi$ y por ($\models$) $\langle W', S', V' \rangle, w' \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.
Para la otra dirección usamos $\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zag.

Traducción a FOL

Escribimos xy en vez de (x, y), y definimos:

$$\begin{array}{lll} nm = xy & \text{se define como} & n = x \wedge m = y \\ nm \neq xy & \text{se define como} & n \neq x \ \vee \ m \neq y \\ nm \in S & \text{se define como} & \bigvee_{xy \in S} nm = xy, \ \text{and} \\ nm \notin S & \text{se define como} & \bigwedge_{xy \in S} nm \neq xy, \end{array}$$

donde S es un conjunto finito de pares de variables.
En particular, $nm \in \emptyset$ es equivalente a $\perp$ y $nm \notin \emptyset$ es equivalente a $\top$.
Tambíen defininimos: $S^{-1} = \{mn \mid nm \in S\}$.

Traducción Estándar de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a FOL

Los casos no triviales de la traducción ST son:

$$\begin{aligned}
\mathsf{ST}_{x,S}(\langle r \rangle \varphi) &= \exists y.(R_r(x,y) \wedge xy \notin S \wedge \mathsf{ST}_{y,S}(\varphi)) \\
\mathsf{ST}_{x,S}(\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi) &= \exists y y'.(R_r(y,y') \wedge yy' \notin S \wedge \mathsf{ST}_{x,S \cup yy'}(\varphi))
\end{aligned}$$

donde y y y' son variables no utilizadas aún en la traducción.

Traducción Estándar de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a FOL

Los casos no triviales de la traducción ST son:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{ST}_{x,S}(\langle r \rangle \varphi) & = & \exists y.(R_r(x,y) \wedge xy \notin S \wedge \mathsf{ST}_{y,S}(\varphi)) \\ \mathsf{ST}_{x,S}(\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi) & = & \exists yy'.(R_r(y,y') \wedge yy' \notin S \wedge \mathsf{ST}_{x,S \cup yy'}(\varphi)) \end{array}$$

donde y y y' son variables no utilizadas aún en la traducción.

- S guarda los pares que fueron borrados.

Traducción Estándar de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a FOL

Los casos no triviales de la traducción ST son:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{ST}_{x,S}(\langle r \rangle \varphi) & = & \exists y.(R_r(x,y) \wedge xy \notin S \wedge \mathsf{ST}_{y,S}(\varphi)) \\ \mathsf{ST}_{x,S}(\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi) & = & \exists yy'.(R_r(y,y') \wedge yy' \notin S \wedge \mathsf{ST}_{x,S\cup yy'}(\varphi)) \end{array}$$

donde y y y' son variables no utilizadas aún en la traducción.

- S guarda los pares que fueron borrados.
- Para $\langle r \rangle$ necesitamos agregar la condición $xy \notin S$.

Traducción Estándar de LMB($\langle\mathsf{sb}\rangle$) a FOL

Los casos no triviales de la traducción ST son:

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{ST}_{x,S}(\langle r\rangle\varphi) & = & \exists y.(R_r(x,y) \wedge xy \notin S \wedge \mathsf{ST}_{y,S}(\varphi)) \\ \mathsf{ST}_{x,S}(\langle \mathsf{sb}\rangle\varphi) & = & \exists yy'.(R_r(y,y') \wedge yy' \notin S \wedge \mathsf{ST}_{x,S\cup yy'}(\varphi)) \end{array}$$

donde y y y' son variables no utilizadas aún en la traducción.

- S guarda los pares que fueron borrados.
- Para $\langle r\rangle$ necesitamos agregar la condición $xy \notin S$.
- Recordar: $nm \notin S = \bigwedge_{xy\in S} nm \neq xy$

Traducción Estándar de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a FOL

Los casos no triviales de la traducción ST son:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{ST}_{x,S}(\langle r \rangle \varphi) & = & \exists y.(R_r(x,y) \wedge xy \notin S \wedge \mathsf{ST}_{y,S}(\varphi)) \\ \mathsf{ST}_{x,S}(\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi) & = & \exists yy'.(R_r(y,y') \wedge yy' \notin S \wedge \mathsf{ST}_{x,S \cup yy'}(\varphi)) \end{array}$$

donde y y y' son variables no utilizadas aún en la traducción.

- S guarda los pares que fueron borrados.
- Para $\langle r \rangle$ necesitamos agregar la condición $xy \notin S$.
- Recordar: $nm \notin S = \bigwedge_{xy \in S} nm \neq xy$
- Similar para $\langle \mathsf{sb} \rangle$, pero agregando el nuevo par eliminado a S.

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$.

Sustitución uniforme

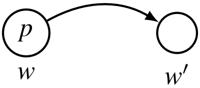
- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$.

Sustitución uniforme

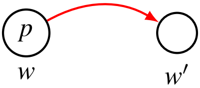
- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \land \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \land \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$.



$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \land \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$$

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \land \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \land \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$.



$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \land \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$$

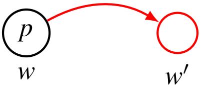
Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \land \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \land \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$.

$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \land \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$$

Sustitución uniforme

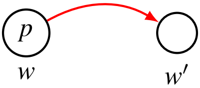
- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$.



$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$$

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$.



$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$$

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \land \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \land \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$.

$\langle \mathsf{sb} \rangle p \land \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$.

$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \cancel{\langle \mathsf{sb} \rangle p}$$

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \rightarrow p$ es válida, luego $\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \rightarrow \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \rightarrow \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$.

$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \rightarrow \langle \mathsf{sb} \rangle \cancel{\langle \mathsf{sb} \rangle p}$$

- Corolario: Sustitución uniforme falla en $\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)$.

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$.

$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \cancel{\langle \mathsf{sb} \rangle p}$

- Corolario: Sustitución uniforme falla en LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$).

CONTINUARÁ!

Otras transformaciones

Consideremos los siguientes operadores sobre relaciones:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{M}^{+}_{wv} = \langle W, R^{+}_{wv}, V \rangle \quad R^{+}_{wv} & = & R \cup \{(w,v)\} \\ \mathcal{M}^{*}_{wv} = \langle W, R^{*}_{wv}, V \rangle \quad R^{*}_{wv} & = & (R \backslash \{(v,w)\}) \cup \{(w,v)\}. \end{array}$$

Otras transformaciones

Consideremos los siguientes operadores sobre relaciones:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}_{wv}^{+} = \langle W, R_{wv}^{+}, V \rangle \quad R_{wv}^{+} & = & R \cup \{(w,v)\} \\ \mathcal{M}_{wv}^{*} = \langle W, R_{wv}^{*}, V \rangle \quad R_{wv}^{*} & = & (R \backslash \{(v,w)\}) \cup \{(w,v)\}. \end{array}$$

Definimos dos nuevas modalidades (bridge y swap):

$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{br} \rangle \varphi \quad \text{sii} \quad \text{existe v,v' tq. } (v, v') \notin R \text{ y } \mathcal{M}_{vv'}^{+}, w \models \varphi$$

Otras transformaciones

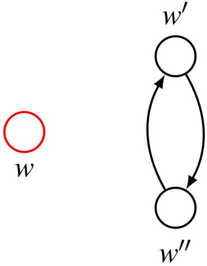
Consideremos los siguientes operadores sobre relaciones:

$$\begin{array}{lrcl} \mathcal{M}^{+}_{wv} = \langle W, R^{+}_{wv}, V\rangle & R^{+}_{wv} & = & R \cup \{(w,v)\} \\ \mathcal{M}^{*}_{wv} = \langle W, R^{*}_{wv}, V\rangle & R^{*}_{wv} & = & (R \setminus \{(v,w)\}) \cup \{(w,v)\}. \end{array}$$

Definimos dos nuevas modalidades (bridge y swap):

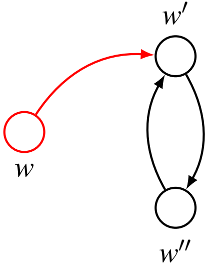
$$\begin{array}{rll} \mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{br} \rangle \varphi & \text{sii} & \text{existe v,v' tq. } (v,v') \notin R \text{ y } \mathcal{M}^{+}_{vv'}, w \models \varphi \\ \mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sw} \rangle \varphi & \text{sii} & \text{existe v,v' tq. } (v,v') \in R \text{ y } \mathcal{M}^{*}_{vv'}, w \models \varphi \end{array}$$

Bridge Logic - Ejemplo



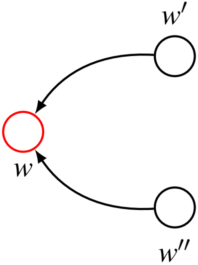
$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{br} \rangle \Diamond \top$$

Bridge Logic - Ejemplo



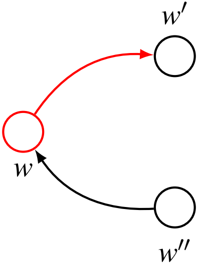
$$\mathcal{M}^{+}_{ww'}, w \models \Diamond\top$$

Swap Logic - Ejemplo



$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sw} \rangle \Diamond \top$$

Swap Logic - Ejemplo



$$\mathcal{M}^*_{w'w}, w \models \Diamond\top$$

Lo que vimos hoy

- Nuestra primera lógica dinámica mas expresiva LMB: lógica de sabotaje.
  - Falla de la Tree Model Property.
  - Bisimulación.
  - Traducción a FOL.
  - Falla de Sustitución Uniforme.
- Otros operadores dinámicos.

Lo que viene

- Cómo axiomatizamos LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)?