Lógica Computacional y Demostración Automática

Carlos Areces
areces@loria.fr
http://www.loria.fr/~areces

INRIA Nancy Grand Est, France

Diciembre 2008

Lógicas para la Descripción

- Las lógicas para la descripción (description logics, DL) son lenguajes formales especialmente diseñados para la representación del conocimiento.
- Descienden originalmente del trabajo en redes semánticas (semantic networks) de Quillian y el paradigma de Frames de Minsky.
- Las principales características de estos lenguajes son:
  - Un lenguaje simple de usar (una extensión del lenguaje proposicional, sin variables de estado);
  - Que incluye una noción restringida de cuantificación;
  - Con operadores especialmente elegidos para facilitar la creación de definiciones;
  - Con un buen balance entre expresividad y tratabilidad;
  - Que cuenta con sistemas de inferencia altamente optimizados.

Lógicas para la Descripción

En una DL tenemos operadores para construir definiciones usando conceptos y roles:

- Los conceptos corresponden a "Clases de Elementos" y seran interpretados como subconjuntos del universo.
- Los roles corresponden a "Vinculos entre Elementos" y seran interpretados como relaciones binarias en el universo.

Ejemplo: El "Padre Contento"

$\text{Conceptos} = \{ \text{Hombre}, \text{Mujer}, \text{Contento}, \text{Rico} \}$
$\text{Roles} = \{ \text{tiene-hijo} \}$
PadreContento $\equiv$ Hombre $\sqcap$
$\exists$ tiene-hijo.Hombre $\sqcap$
$\exists$ tiene-hijo.Mujer $\sqcap$
$\forall$ tiene-hijo.(Contento $\sqcup$ Rico)
carlos:$\neg$PadreContento

Areas de Aplicación

- Bases de conocimiento terminológicas y ontologías
  - DLs fueron desarrolladas para esta tarea
  - Especialmente útiles como lenguaje de definición y mantenimiento de ontologías
- Applicaciones en Bases de Datos
  - DLs pueden capturar la semantica de varias metodologías de modelado en BD e.g., diagramas de ER, UML, etc
  - los motores de inferencia DL pueden usarse para proveer soporte durante el diseño de diagramas, mantenimiento y consulta

Areas de Aplicación

- Web Semántica
  - Agregar 'markup semántico' a la información en la web
  - Este markup usaría repositorios de ontologías como repositorío común de definiciones con una semántica clara
  - los motores de inferencia DL se usarían para el desarrollo, mantenimiento y fusión de estas ontologías y para la evalucion dynámica de recursos (e.g., búsqueda).
- Linguística Computacional
  - Muchas tareas en linguística computacional requieren inferencia y 'background knowledge': desde tareas puntuales como resolución de referencias a problemas generales como question-answering.
  - En ciertos casos, el poder expresivo ofrecido por DLs es suficiene y no necesitamos recurrir a LPO.

Lógicas para la Descripción

- El lenguaje se define en tres niveles.
  - Conceptos: Por un lado construimos conceptos complejos usando conceptos (atómicos o creados via definición) y roles: E.g., $\exists$tiene-hijo.Hombre
  - Definiciones: Usamos conceptos para armar definiciones (o relaciones entre definiciones): E.g., PadreContento $\equiv \ldots$
  - Aserciones: Podemos asignar conceptos o roles a elementos particulares de nuestro modelo: E.g., carlos:$\neg$PadreContento
- Una base de conocimiento es un par $\langle D, A \rangle$ con D un conjunto de definiciones (la "T-Box") y A un conjunto de aserciones (la "A-Box").

$\mathcal{ALC}$: Construcción de Conceptos

- Un concepto puede ser
  - $\top$, el concepto trivial, del que todo elemento es miembro.
  - Un concepto atómico: Hombre, Mujer
  - Operadores booleanos: Si C y D son conceptos entonces los siguientes son conceptos

$C \sqcap D$	la conjunción de C y D	Rico $\sqcap$ Apuesto
$C \sqcup D$	la disjunción de C y D	Rico $\sqcup$ Apuesto
$\neg C$	la negación de C	$\neg$Politico

  - Operadores relacionales: Si C es un concepto y R es un role, los siguientes son conceptos

$\forall R.C$	todo elem. acc. via R está en C	$\forall$hijo-de.Mujer
$\exists R.C$	un elem. acc. via R está en C	$\exists$hijo-de.Mujer

Construcción de Definiciones

La T-Box es una lista de definiciones.
Dados dos conceptos C y D, hay dos tipos de definiciones:

- Definiciones Parciales: $C \sqsubseteq D$. Las condiciones indicadas en C son suficientes para calificar a los elementos de C como miembros de D, pero no son condiciones necesarias; o vice-versa.

$\exists$hijo-de.Hombre $\sqcap$ $\exists$hijo-de.Mujer	$\sqsubseteq$	PadreOcupado	(condición suficiente)
PadreOcupado	$\sqsubseteq$	$\exists$hijo-de.$\top$	(condición necesaria)

- Definiciones Totales: $C \equiv D$. Las condiciones indicadas en D son necesarias y suficientes para calificar a los elementos de D como miembros de C. Los conceptos C y D son equivalentes.

Abuela $\equiv$ Mujer $\sqcap$ $\exists$hijo-de.$\exists$hijo-de.$\top$

Construcción de Aserciones

Podemos "asignar propiedades" a elementos particulares de la situación que estamos describiendo en la A-Box.
Dados elementos a y b, un concepto C y una relacion R

- Asignación de Elementos a Conceptos: $a{:}C$. Indica que el concepto C es applicable al elemento a. Es decir, todas las condiciones indicadas por C se aplican a a.

carlos:Argentino
carlos:(Argentino $\sqcap$ $\exists$vive-en.Europa)

- Asignación de Relaciones entre Elementos: $(a, b){:}R$. Indica que los elementos a y b estan relacionados via el rol R.

(carlos,nancy):vive-en

Semántica: Modelos

Sea CON un conjunto de conceptos atómicos, ROL un conjunto de roles y IND un conjunto de individuos.
Una interpretación o un modelo para $\mathcal{ALC}$ es un par $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ tal que

- $\Delta^{\mathcal{I}}$ es un conjunto no vacío arbitrario
- $\cdot^{\mathcal{I}}$ es una función de interpretación de conceptos atómicos, roles e individuos tal que

$$C^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \text{ para } C \in \text{CON}$$
$$R^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}} \text{ para } R \in \text{ROL}$$
$$a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ para } a \in \text{IND}$$

(i.e., un modelo de DL no es otra cosa que un modelo de LPO para la signatura $\langle \text{CON} \cup \text{ROL}, \{\}, \text{IND} \rangle$)

Semántica: Conceptos

Dado una interpretación $\mathcal{I}$ podemos definir la interpretación de un concepto arbitrario de $\mathcal{ALC}$ recursivamente como

$$\begin{aligned} (\neg C)^{\mathcal{I}} &:= \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}} \\ (C \sqcap D)^{\mathcal{I}} &:= C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} \\ (\exists R.C)^{\mathcal{I}} &:= \{i \mid \exists j.(i,j) \in R^{\mathcal{I}} \text{ y } j \in C^{\mathcal{I}}\} \end{aligned}$$

$C \sqcup D$ es equivalente a $\neg(\neg C \sqcap \neg D)$ y
$(\forall R.C)$ es equivalente a $\neg(\exists R.\neg C)$.

Semántica: Definiciones y Aserciones

Dada una interpretación $\mathcal{I}$ decimos que

- $\mathcal{I}$ satisface una definición parcial $C \sqsubseteq D$ (definición total $C \equiv D$) sii
$$C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}} \quad (C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}})$$
- $\mathcal{I}$ satisface una T-Box T sii satisface todas las definiciones (parciales o totales) en T
- $\mathcal{I}$ satisface una assercion $a{:}C$ ($(a, b){:}R$) sii
$$a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}} \quad ((a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{I}})$$
- $\mathcal{I}$ satisface una A-Box A sii satisface todas las aserciones en A
- $\mathcal{I}$ satisface una KB $K = \langle T, A \rangle$ sii $\mathcal{I}$ satisface T y A.

Una KB K es consistente (o satisfacible) sii existe una interpretación $\mathcal{I}$ que la satisface.

Un Ejemplo Completo

La T-Box:

$$\begin{aligned} \text{Mujer} &\sqsubseteq \text{Persona} \sqcap \exists\text{sexo.Femenino} \\ \text{Hombre} &\sqsubseteq \text{Persona} \sqcap \exists\text{sexo.Masculino} \\ \text{PadreOMadre} &\equiv \text{Persona} \sqcap \exists\text{hijo-de.Persona} \\ \text{Madre} &\equiv \text{Mujer} \sqcap \text{PadreOMadre} \\ \text{Padre} &\equiv \text{Hombre} \sqcap \text{PadreOMadre} \end{aligned}$$

La A-Box:

alicia:Madre
(alicia,betty):hijo-de
(alicia,carlos):hijo-de

Sintaxis y Semántica de $\mathcal{ALC}$

Constructor	Sintaxis	Semántica
concepto atómico	C	$C^{\mathcal{I}}$
top	$\top$	$\Delta^{\mathcal{I}}$
negación ($\mathcal{C}$)	$\neg C$	$\Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$
conjunción	$C_1 \sqcap C_2$	$C_1^{\mathcal{I}} \cap C_2^{\mathcal{I}}$
disyunción	$C_1 \sqcup C_2$	$C_1^{\mathcal{I}} \cup C_2^{\mathcal{I}}$
quant. universal ($\mathcal{U}$)	$\forall R.C$	$\{d_1 \mid \forall d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}}.(R^{\mathcal{I}}(d_1, d_2) \rightarrow d_2 \in C^{\mathcal{I}})\}$
quant. existencial ($\mathcal{E}$)	$\exists R.C$	$\{d_1 \mid \exists d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}}.(R^{\mathcal{I}}(d_1, d_2) \wedge d_2 \in C^{\mathcal{I}})\}$

Bases de Conocimiento

Una base de conocimientos K es un par $K = \langle T, A \rangle$ tal que

- T es la T(erminological)-Box, un conjunto finito de expresiones de la forma $C \sqsubseteq D$. Las fórmulas en T se llaman terminological axioms.
- A es la A(ssertional)-Box, un conjunto finito de expresiones de la forma $a{:}C$ o $(a, b){:}R$. Las fórmulas en A se llaman assertions.

Sea $\mathcal{I}$ una interpretación y φ un axioma terminológico o una asercion. Decimos que $\mathcal{I} \models \varphi$ si

- $\varphi = C \sqsubseteq D$ y $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$, o
- $\varphi = a{:}C$ y $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$, o
- $\varphi = (a, b){:}R$ y $(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{I}}$.

Decimos que $\langle T, A \rangle$ es satisfacible si existe una interpretación $\mathcal{I}$ que satisface T y A.

Tareas de Inferencia

La tarea básica de inferencia es satisfiabilidad de conceptos:
INPUT: Un concepto C
OUTPUT: Si, si existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $C^{\mathcal{I}} \neq \{\}$
No, en otro caso.
Equivalentemente, subsumpción de conceptos:
INPUT: un par de conceptos (C, D)
OUTPUT: Si, si para toda interpretación $\mathcal{I}$, $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$
No, en otro caso.

T: Satisfiabilidad y subsumpción son interdefinibles (en un lenguaje con conjunción y negación).
D: [$\Rightarrow$] C no es satisfacible sii $C \sqsubseteq \neg\top$
[$\Leftarrow$] $C \sqsubseteq D$ sii $C \sqcap \neg D$ no es satisfacible

Tareas de Inferencia Respecto de una Base de Conocimiento

Sea T una base de conocimientos, $C_1, C_2 \in \text{CON}$, $R \in \text{ROL}$ y $a, b \in \text{IND}$, podemos definir las siguientes *tareas de inferencia*

- Subsumption, $T \models C_1 \sqsubseteq C_2$. Chequear si para toda interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models T$ tenemos que $C_1^{\mathcal{I}} \subseteq C_2^{\mathcal{I}}$.
- Instance Checking, $T \models a{:}C$. Chequear si para toda interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models T$ tenemos que $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$.
- Concept Consistency ($T \not\models C \doteq \bot$). Chequear si para alguna interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models T$ tenemos qeu $C^{\mathcal{I}} \neq \{\}$.

Otras: Relation Checking ($T \models (a, b){:}R$), Knowledge Base Consistency ($T \not\models \bot$), etc.

Tareas de Inferencia Complejas

Otras tareas de inferencia mas complejas, pueden definirse a partir de las anteriores, por ejemplo:

- Retrieval: dado un concepto C, retornar todos los individuos mencionados en la base de datos que son instancia de C.
  $$\{a \in \text{IND}(T) \mid T \models a{:}C\}$$
- Conceptos mas específicos: dado un indivíduo a, retornar los conceptos más específicos en la ontología de los cuales a es un miembro.
- Conceptos parientes (descendientes) inmediatos: dado un concepto C, retornar los conceptos inmediatamente sobre (bajo) C en la jerarquía.

Relación con LPO

La mayoría de los DLs son fragmentos decidibles de LPO.
Tomar un lenguaje de PO que tenga
un predicado unario C por cada concepto atómico C
un predicado binario R por cada rol R
una constante a por cada indivíduo a.
Definimos las siguientes traducciones$t_x : \mathcal{ALC} \to \mathit{LPO}$ y $t_y : \mathcal{ALC} \to \mathit{LPO}$ por recursión mutua

$$\begin{array}{rclrcl} t_x(C) & = & C(x) & t_y(C) & = & C(y) \\ t_x(\neg C) & = & \neg t_x(C) & t_y(\neg C) & = & \neg t_y(C) \\ t_x(C \sqcap D) & = & t_x(C) \wedge t_x(D) & t_y(C \sqcap D) & = & t_y(C) \wedge t_y(D) \\ t_x(\exists R.C) & = & \exists y.(R(x,y) \wedge t_y(C)) & t_y(\exists R.C) & = & \exists x.(R(y,x) \wedge t_x(C)) \end{array}$$

Traduciendo Bases de Conocimiento

Una T-Box $T = \{C_i \sqsubseteq D_i \mid i \leq n\}$ se traduce como

$$t(T) = \forall x.(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} t_x(C_i) \to t_x(D_i))$$

Una A-Box $A = \{a{:}C_i \mid i \leq n\} \cup \{(a, b){:}R_i \mid i \leq m\}$ se traduce como

$$t(A) = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} t_x(C_i)[x/a] \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq m} R_i(a, b)$$

T: C es satisfacible sii $t_x(C)$ es satisfacible.
T: C es satisfacible respecto de $\langle T, A\rangle$ sii $t_x(C) \wedge t(T) \wedge t(A)$ es satisfacible.
T: C es subsumido por D sii $\forall x.(t_x(C) \to t_x(D))$ es válido.
T: C es subsumido por D respecto de $\langle T, A\rangle$ sii ...
$(t(T) \wedge t(A)) \to \forall x.(t_x(C) \to t_x(D))$ es válido.

Otros Operadores / Constraints

Number restriction ($\mathcal{N}$)

$(\leq n\ R)$	$\{d_1 \mid \lvert\lvert\{d_2 \mid R^{\mathcal{I}}(d_1, d_2)\}\rvert\rvert \leq n\}$
$(\geq n\ R)$	$\{d_1 \mid \lvert\lvert\{d_2 \mid R^{\mathcal{I}}(d_1, d_2)\}\rvert\rvert \geq n\}$

Qualified number restrictions ($\mathcal{Q}$)

$(\leq n\ R\ C)$	$\{d_1 \mid \lvert\lvert\{d_2 \mid R^{\mathcal{I}}(d_1, d_2) \wedge d_2 \in C^{\mathcal{I}}\}\rvert\rvert \leq n\}$
$(\geq n\ R\ C)$	$\{d_1 \mid \lvert\lvert\{d_2 \mid R^{\mathcal{I}}(d_1, d_2) \wedge C^{\mathcal{I}}\}\rvert\rvert \geq n\}$

One-Of ($\mathcal{O}$)

$\{a_1, \ldots a_n\}$	$\{a_1^{\mathcal{I}}, \ldots, a_n^{\mathcal{I}}\}$

Otros Operadores / Constraints

Inverse roles ($\mathcal{I}$)

R^-	$\{(i, j) \mid (j, i) \in R^{\mathcal{I}}\}$

Role Intersection ($\mathcal{R}$)

$R \sqcap S$	$\{(i, j) \mid (i, j) \in R^{\mathcal{I}} \wedge (i, j) \in S^{\mathcal{I}}\}$

Roles transitivos ($\mathcal{R}^+$)

$R = R^+$	$R^{\mathcal{I}}$ es una relación transitiva

Roles funcionales ($\mathcal{F}$)

R feature	$R^{\mathcal{I}}$ es una función (función parcial)

Jerarquía de Roles ($\mathcal{H}$)

$R \sqsubseteq S$	$R^{\mathcal{I}} \subseteq S^{\mathcal{I}}$

DLs y Lógicas Modales

- DLs y las lógicas modales (ML) son formalismos muy próximos.
- Podríamos decir que DLs son 'el lado computacional de ML' y que ML son 'el lado teórico' de DLs.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{ALC} & \iff & \mathbf{K}_m \text{ (}\mathbf{K}\text{ multimodal)} \\ \neg C & \iff & \neg C \\ C \sqcap D & \iff & C \wedge D \\ \exists R.C & \iff & \langle R\rangle C \end{array}$$

roles transitivos	$\iff$	frame transitivos (**K4**)
expr. regulares sobre roles	$\iff$	propositional dynamic logic (PDL)
roles inversos	$\iff$	lógicas temporales ($\mathbf{K}_t$)
number restrictions	$\iff$	graded modalities ($\Diamond_n \varphi$)

Complejidad Vía Traducción

Sabiendo que muchas DLs son fragmentos de LPO (vía la traducción t), podemos transferir resultados conocidos sobre complejidad de estos fragmentos a ciertos lenguajes de descripción.

- $\mathcal{ALC}$ es un fragmento de LPO con sólo dos variables (LPO^2) que se sabe decidible.
- Más aun, $\mathcal{ALC}$ con roles inversos y operadores Booleanos sobre roles está todavía en LPO^2!
- Que pasa si agregamos $\mathcal{Q}$? Aunque nos salimos de LPO^2, caemos en C^2: LPO^2 extendida con 'counting quantifiers' ($\exists^n x.\varphi(x)$ es 'existen n indivíduos diferentes en el dominio que satisfacen φ'), también decidible

Lower Bounds vs. Upper Bounds

- Usamos la traducción t para obtener Upper Bounds (i.e., el problema P no es más complejo que el problema Q.)
- Pero no sirve para obtener Lower Bounds (i.e., el problema P es al menos tan complejo como el problema Q.). Para esto necesitaríamos traduccións 'para el otro lado'.
- Y en realidad, muchas veces las DLs tienen mejor comportamiento computacional que los fragmentos de LPO clásicos en los que pueden traducirse naturalmente.E.g.,
  - Contrastando con muchas DLs, agregar 'roles transitivos' (requerir que ciertas relaciones binarias sean interpretadas como relaciones transitivas) a LPO^2 vuelve el fragmento indecidible.
  - LPO^2 es NExpTime-complete, mientras que la muchas DLs estan en ExpTime (o aún por debajo).

Tableaux para $\mathcal{ALC}$

- Miremos a los modelos de DL: Grafos etiquetados. Podemos pensar que un modelo de DL es
  - un conjunto de valuaciones proposicionales
  - más estructura relacional entre estas valuaciones
- Un tableau para DL entonces es
  - una colección de tableau proposicionales
  - con estructura adicional: la relacion de accesibilidad.
- Notar que esta es exactamente la información que hay en una ABox.
- Para determinar si un concepto C de $\mathcal{ALC}$ es consistente, escribir C en NNF ($(\neg\exists R.C) \rightsquigarrow (\forall R.\neg C)$ y $(\neg\forall R.C) \rightsquigarrow (\exists R.\neg C)$).
- Aplicar las siguientes reglas a $\mathcal{A} = \{a{:}\text{NNF}(C)\}$.

Reglas de Tableau para DLs

$\rightarrow_\sqcap$ Si 1. $x{:}C_1 \sqcap C_2 \in \mathcal{A}$ y
2. $\{x{:}C_1, x{:}C_2\} \not\subseteq \mathcal{A}$
entonces $\mathcal{A} \rightarrow_\sqcap \mathcal{A} \cup \{x{:}C_1, x{:}C_2\}$

$\rightarrow_\sqcup$ Si 1. $x{:}C_1 \sqcup C_2 \in \mathcal{A}$ y
2. $\{x{:}C_1, x{:}C_2\} \cap \mathcal{A} = \emptyset$
entonces $\mathcal{A} \rightarrow_\sqcup \mathcal{A} \cup \{x{:}D\}$ para algun $D \in \{C_1, C_2\}$

$\rightarrow_\exists$ Si 1. $x{:}\exists R.D \in \mathcal{A}$ y
2. no hay y tq. $\{(x,y){:}R, y{:}D\} \subseteq \mathcal{A}$
entonces $\mathcal{A} \rightarrow_\exists \mathcal{A} \cup \{(x,y){:}R, y{:}D\}$ para y nuevo

$\rightarrow_\forall$ si 1. $x{:}\forall R.D \in \mathcal{A}$ y
2. hay un y tq. $(x,y){:}R \in \mathcal{A}$ and $y{:}D \notin \mathcal{A}$
entonces $\mathcal{A} \rightarrow_\forall \mathcal{A} \cup \{y{:}D\}$

Clash: $\mathcal{A}$ tiene clash si para algun C, $\{a{:}C, a{:}\neg C\} \subseteq \mathcal{A}$.

Terminación

Por que termina este algoritmo?

- Sea $\mathcal{L}(w) = \{C \mid w{:}C \in \mathcal{A}\}$.
- Las reglas $\sqcup$, $\sqcap$, $\exists$ pueden ser aplicadas sólo una vez a una fórmula en $\mathcal{L}(w)$
- La regla $\forall$ puede ser aplicada muchas veces a una formula en $\mathcal{L}(w)$ pero sólo una vez a cada eje (w, v).
- Aplicar una regla a una fórmula φ extiende el labeling con una fórmula que es siempre estrictamente más pequeña que φ.

Correctitud y Completitud del Algoritmo

La correctitud y completitud del algoritmo se sigue de las siguientes propiedades:

1. No puede haber una sequencia infinita de aplicaciones de reglas (terminación)
2. Sea $\mathcal{A}'$ obtenido a partir de $\mathcal{A}$ por la aplicación de alguna de las reglas. Entonces $\mathcal{A}'$ es satisfacible sii $\mathcal{A}$ es satisfacible.
3. Toda Abox $\mathcal{A}$ conteniendo un clash es insatisfacible.
4. Toda Abox $\mathcal{A}$ saturada (no nueva regla puede aplicarse a $\mathcal{A}$) y sin clash es satisfacible.

Que Regla Aplicamos Primero?

- Importa que regla aplicamos primero para decidibilidad?
- Importa que regla aplicamos primero para tiempo de corrida?
- Algunas heurísticas para decidir que regla de expansión aplicar primero:
  1. Usar non-branching rules (como $\sqcap$-rule) antes que branching rules (como $\sqcup$-rule)
  2. usar reglas proposicionales (como $\sqcap$-rule y $\sqcup$-rule) antes que reglas modales (como $\exists$-rule y $\forall$-rule).

Complejidad del Algoritmo

- El algoritmo que presentamos hasta el momento puede requerir espacio (y tiempo) exponencial!
- Consideremos el concepto definido recursivamente como

$$\begin{aligned} C_1 &:= \exists R.A \sqcap \exists R.B \\ C_{n+1} &:= \exists R.A \sqcap \exists R.B \sqcap \forall R.C_n \end{aligned}$$

- El tamaño de C_n es sólo lineal en n, pero el algoritmo de tableaux construiría, al ser corrido sobre $\mathcal{A} = \{a{:}C_n\}$ una ABox conteniendo $2^{n+1} - 1$ indivíduos.

Satisfacibilidad de $\mathcal{ALC}$ esta en PSPACE

- Toda fórmula satisfacible φ puede ser satisfecha en la raíz de un árbol finito de profundidad a lo sumo $\deg(\varphi) + 1$
- El tamaño total del modelo puede ser exponencial en $|\varphi|$, pero
  - no es necesario mantener toda esta informacion en memoria.
  - en cada momento, sólo necesitamos mantener la información correspondiente a una rama del modelo.

El Algoritmo

$\mathcal{ALC}$-SAT(C) := sat(x_0, {x_0:C})

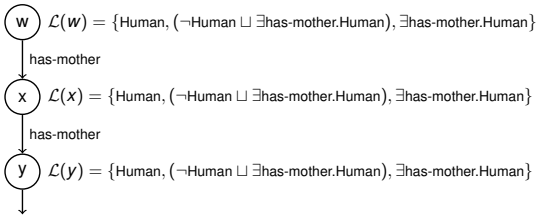
sat(x, $\mathcal{A}$):
1. while ($\rightarrow_\sqcap$ o $\rightarrow_\sqcup$ pueden aplicarse) y ($\mathcal{A}$ no tiene clash) do
2. aplicar $\rightarrow_\sqcap$ o $\rightarrow_\sqcup$ a $\mathcal{A}$
3. if $\mathcal{A}$ tiene clash then return UNSAT.
4. **E**:={x:$\exists R.D$ | x:$\exists R.D \in \mathcal{A}$}
5. while **E** $\neq \emptyset$ do
6. elegir x:$\exists R.D \in$ **E** arbitrario
7. $\mathcal{A}_{new}$:= {(x, y):R, y:D} donde y es un nuevo individuo.
8. while ($\rightarrow_\forall$ puede aplicarse a $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}_{new}$) do
9. aplicar $\rightarrow_\forall$ a $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}_{new}$
10. if $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}_{new}$ tiene clash then return UNSAT.
11. if sat(y, $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}_{new}$) = UNSAT then return UNSAT
12. **E** := **E**\{x:$\exists R.D$}
13. eliminar $\mathcal{A}_{new}$ de la memoria
14. return SAT

Terminologías

- El algoritmo que vimos hasta el momento sólo trata consistencia de conceptos
- Cómo agregamos ABoxes?
- Cómo agregamos TBoxes?
  - Consideremos una definición $C \sqsubseteq D$
  - Basta asegurarnos que cada nodo del tableaux contenga $\neg C \sqcup D$
  - Pero eso implica que el tamaño de los conceptos en un nodo (y en particuar la profundidad máxima de cuantificación) no disminuye.
  - El argumento anterior de terminación (y por lo tanto el de complejidad) se 'caen'.

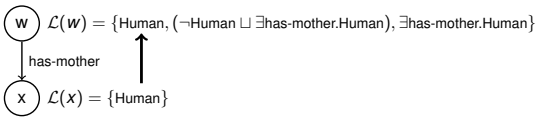
Falla de Terminación: Terminologías

- Como dijimos, el algoritmo básico de tableaux no termina para $\mathcal{ALC}$ con T-boxes generales.
- E.g., si Human $\sqsubseteq \exists$has-mother.Human $\in T$, entonces $\neg$Human $\sqcup \exists$has-mother.Human se agregaría a todo nodo del tableaux de w:Human.



Blocking

- Cuando un nuevo nodo es creado, chequear los ancestros por un etiqueta idéntica (o un superconjunto).
- Si un nodo de este tipo existe, entonces el nuevo nodo esta bloqueado y ninguna regla puede aplicarse a el



Implementaciones Naive

Problemas típicos

- Problemas de Espacio
  - Espacio requerido para las estructuras de datos que prepresentan el tableaux.
  - Raramente un problema serio en la práctica
- Problemas de Tiempo
  - Necesitamos búsqueda dada la naturaleza no determinística del algoritmo de tableaux.
  - Un problema serio en la práctica
  - puede ser mitigado mediante
    - La elección cuidadosa del algoritmo
    - Una implementacion altamente optimizada

Tableaux para $\mathcal{I}$ y $\mathcal{N}$

- Como modificamos el tableaux para $\mathcal{ALC}$ para que funcione también para $\mathcal{I}$?
- Reglas de Tableaux para $\mathcal{N}$

$\rightarrow_\geq$ Si
1. x:($\leq nR$) $\in \mathcal{A}$ y
2. no hay individuos $z_1, \ldots, z_n$ tal que (x, z_i):$R \in \mathcal{A}$ y $z_i \not\approx z_j \in \mathcal{A}$ ($1 \leq i < j \leq n$)

entonces $\mathcal{A} \rightarrow_\geq \mathcal{A} \cup \{(x, y_i):R \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i \not\approx y_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ para y_i nuevos

$\rightarrow_\leq$ Si
1. x:($\leq nR$) $\in \mathcal{A}$ y
2. $\{(x, y_i):R \mid 1 \leq n \leq n+1\} \subseteq \mathcal{A}$ and $y_i \not\approx y_j \notin \mathcal{A}$ para algun i,j $1 \leq i < j \leq n+1$

entonces $\mathcal{A} \rightarrow_\leq \mathcal{A}[y_i/y_j]$ para algun par $y_i \not\approx y_j$

Clash (para $\mathcal{N}$): $\mathcal{A}$ tiene un clash también si $\{x$:($\leq nR$)$\} \cup \{(x, y_i) : R \mid 1 \leq i \leq n+1\} \cup \{y_i \not\approx y_j \mid 1 \leq i < j \leq n+1\} \subseteq \mathcal{A}$.

System Demo: RACER

- RACER (http://www.sts.tu-harburg.de/ r.f.moeller/racer/), desarrollado en la University of Hamburg por Haarslev y Möller en Common Lisp. Puede trabajar en $\mathcal{ALCFHIQ}(\mathcal{D}^-)_{\mathcal{R}^+}$.
- RACER es un razonador automático para DL con soporte para TBoxes, ABoxes y Concrete domains (e.g., (in)ecuaciones lineares sobre los reales)
- Es también una herramienta de inferencia para la web semántica que permite el desarrollo de ontologías, consultas de documentos RDF y ontologias RDFS/DAML que permite el registro permanente de queries con notificación automática de nuevos resultados
- Está implementado en Lisp y existen versiones para Linux, Macintosh y Windows