Lógicas Modales Dinámicas

Clase #3

Carlos Areces & Raul Fervari

Febrero 2024, Río Cuarto, Argentina

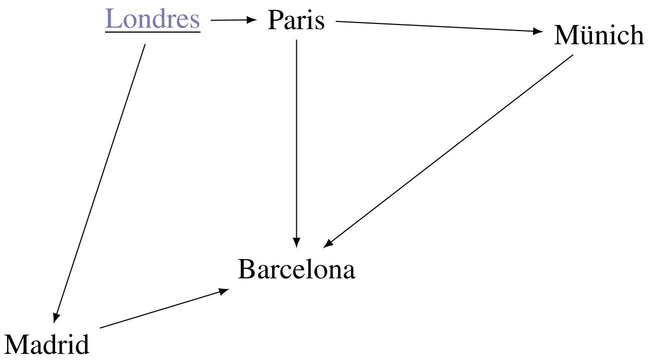
Hasta Ahora

- Lógica Modal Básica (LMB).
- Expresividad y Axiomatizaciones.
- Lógica de Anuncios Públicos (LAP).
- Expresividad: igual a LMB.
- Axiomatización: mediante axiomas de reducción.

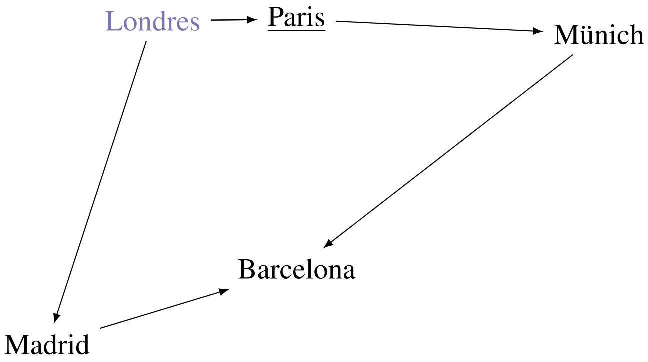
Plan para hoy

- Vamos a considerar otra alternativa de lógica dinámica.
- Introduciremos una lógica que elimina ejes en la relación de accesibilidad: *sabotage logic*.
  - Nos ayudará a comprender los efectos de tener operadores (realmente) dinámicos en el lenguaje.
  - Como venimos haciendo, discutimos: expresividad?, complejidad?
- Vamos a mencionar otras alternativas de operadores dinámicos.

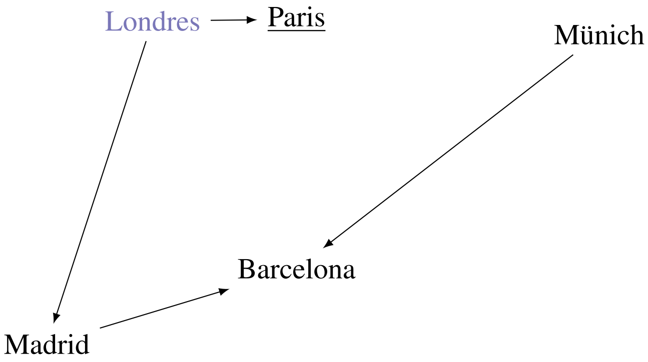
Cambiando el acceso



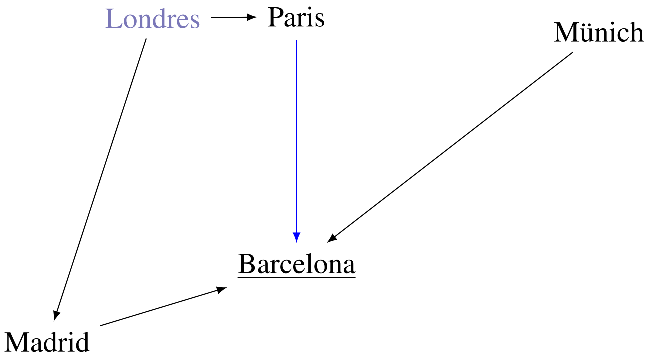
Cambiando el acceso



Cambiando el acceso



Cambiando el acceso



Cocinemos una lógica modal

Podemos extender la lógica modal básica, con un operador que modela sabotaje:

$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \varphi \text{ sii existe } (v, v') \in R \text{ tq. } \mathcal{M}^{-}_{vv'}, w \models \varphi,$$

Cocinemos una lógica modal

Podemos extender la lógica modal básica, con un operador que modela sabotaje:

$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \varphi \text{ sii existe } (v, v') \in R \text{ tq. } \mathcal{M}^-_{vv'}, w \models \varphi,$$

donde

$$\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle \qquad \mathcal{M}^-_{wv} = \langle W, R^-_{vv'}, V \rangle$$
$$R^-_{vv'} = R \setminus \{(v, v')\}$$

Cocinemos una lógica modal

Podemos extender la lógica modal básica, con un operador que modela sabotaje:

$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \varphi \;\text{ sii existe } (v, v') \in R \text{ tq. } \mathcal{M}^-_{vv'}, w \models \varphi,$$

donde

$$\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle \qquad \mathcal{M}^-_{wv} = \langle W, R^-_{vv'}, V \rangle$$
$$R^-_{vv'} = R \setminus \{(v, v')\}$$

Definimos LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a la lógica LMB extendida con $\langle \mathsf{sb} \rangle$.

Cocinemos una lógica modal

Podemos extender la lógica modal básica, con un operador que modela sabotaje:

$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \varphi \text{ sii existe } (v, v') \in R \text{ tq. } \mathcal{M}^-_{vv'}, w \models \varphi,$$

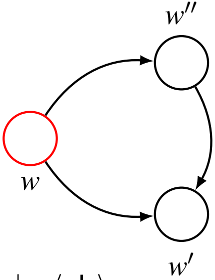
donde

$$\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle \qquad \mathcal{M}^-_{wv} = \langle W, R^-_{vv'}, V \rangle$$
$$R^-_{vv'} = R \setminus \{(v, v')\}$$

Definimos LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a la lógica LMB extendida con $\langle \mathsf{sb} \rangle$.

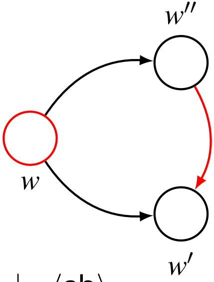
Definimos $[\mathsf{sb}]\varphi := \neg\langle \mathsf{sb} \rangle \neg\varphi$.

Ejemplo



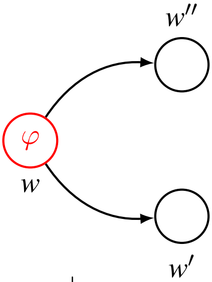
$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$$

Ejemplo



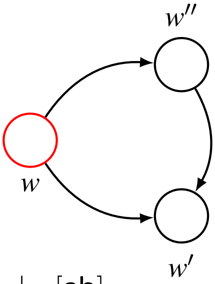
$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$$

Ejemplo



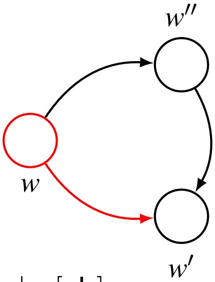
$\mathcal{M}^{-}_{w'w''}, w \models \varphi$

Ejemplo



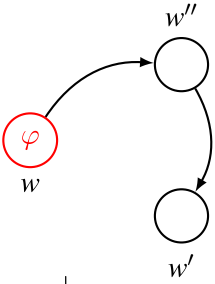
$\mathcal{M}, w \models [\mathsf{sb}]\varphi$

Ejemplo



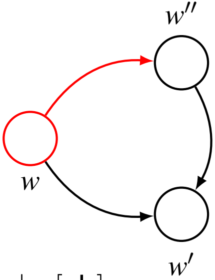
$$\mathcal{M}, w \models [\mathsf{sb}]\varphi$$

Ejemplo



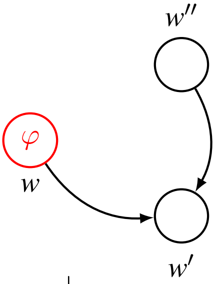
$\mathcal{M}^{-}_{ww'}, w \models \varphi$

Ejemplo



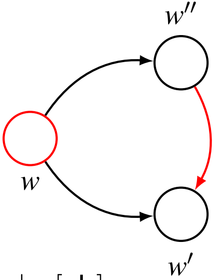
$$\mathcal{M}, w \models [\mathsf{sb}]\varphi$$

Ejemplo



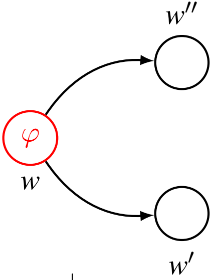
$$\mathcal{M}^{-}_{ww''}, w \models \varphi$$

Ejemplo



$$\mathcal{M}, w \models [\mathsf{sb}]\varphi$$

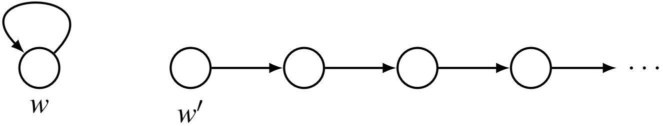
Ejemplo



$$\mathcal{M}^{-}_{w'w''}, w \models \varphi$$

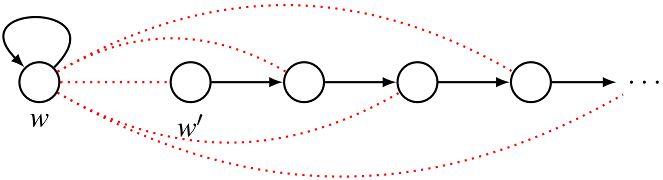
Poder Expresivo: Modelos de Árbol

Consideremos los siguientes modelos:



Poder Expresivo: Modelos de Árbol

Consideremos los siguientes modelos:



Los modelos son bisimilares para la LMB.

Observación: el modelo de la derecha es un árbol.

Tree Model Property para LMB

Teorema:

La LMB tiene la tree model property: para toda fórmula φ de LMB, si φ es satisfacible entonces φ es también satisfacible en la raíz de un árbol.

Tree Model Property para LMB

Teorema:

La LMB tiene la tree model property: para toda fórmula φ de LMB, si φ es satisfacible entonces φ es también satisfacible en la raíz de un árbol.

Idea de la prueba:

Sea $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ y $w \in W$, tal que $\mathcal{M}, w \models \varphi$. Construimos un árbol $\mathcal{T} = \langle W', R', V' \rangle$:

1. Tomar todas las secuencias de puntos que empiezan en w y que son alcanzables via R.
2. A cada secuencia $w \dots v$, le damos la misma valuación que v.
3. Si $(v, u) \in R$, ponemos $(w, \dots v, w \dots vu)$ en R'.
4. $\mathcal{T}$ es un árbol y $\mathcal{T}, w \models \varphi$.

Tree Model Property para LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

Teorema:
LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) no tiene la tree model property.

Tree Model Property para $\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)$

Teorema:
$\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)$ no tiene la tree model property.

Demo.
La fórmula $\Diamond\Diamond\top \wedge [\mathsf{sb}]\Box\bot$ no se satisface en la raíz de un árbol.

Tree Model Property para LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

Teorema:

LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) no tiene la tree model property.

Demo.

La fórmula $\Diamond\Diamond\top \wedge [\mathsf{sb}]\Box\bot$ no se satisface en la raíz de un árbol.

Corolario.

LMB $<$ LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$); es decir, LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) es estrictamente más expresiva que LMB.

Tree Model Property para LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

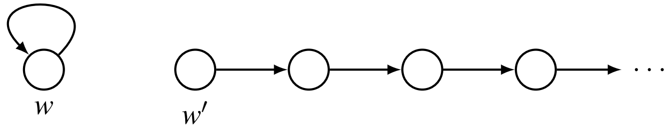
Teorema:
LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) no tiene la tree model property.

Demo.
La fórmula $\Diamond\Diamond\top \wedge [\mathsf{sb}]\Box\bot$ no se satisface en la raíz de un árbol.

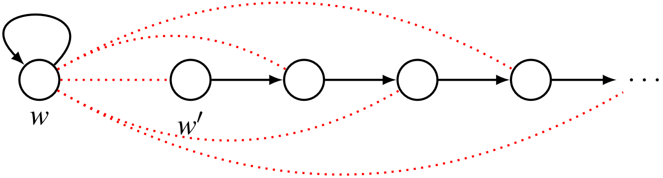
Corolario.
LMB $<$ LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$); es decir, LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) es estrictamente más expresiva que LMB.

Ejercicio: dar el argumento en detalle del corolario.

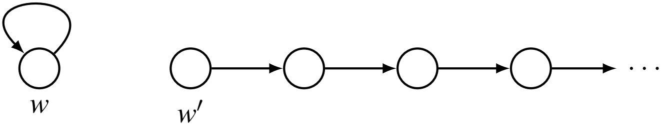
Bisimulaciones



Bisimulaciones

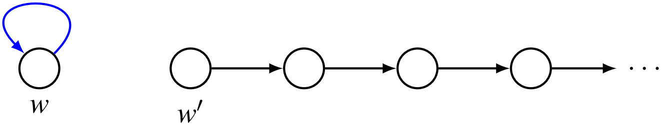


Bisimulaciones



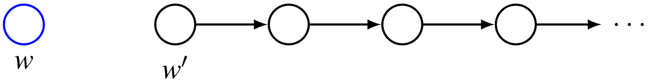
$[\mathsf{sb}]\Box\bot$

Bisimulaciones



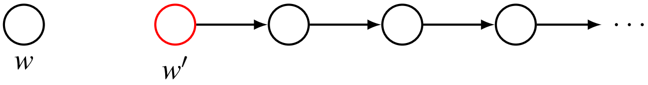
$[\mathsf{sb}]\Box\bot$

Bisimulaciones



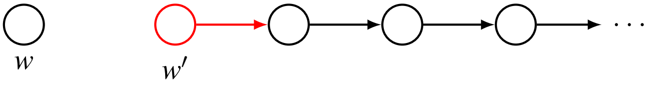
$\Box\bot$

Bisimulaciones



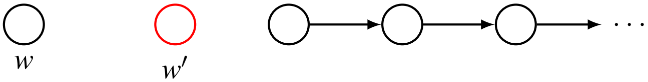
$[\mathsf{sb}]\Box\bot$

Bisimulaciones



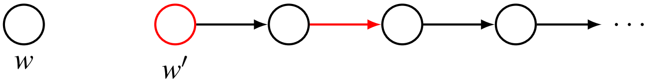
$[\mathsf{sb}]\Box\bot$

Bisimulaciones



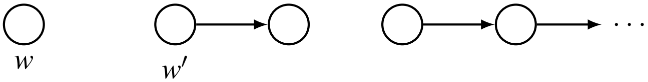
$\Box\bot$

Bisimulaciones



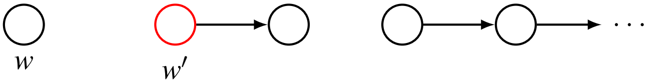
$[\mathsf{sb}]\Box\bot$

Bisimulaciones



$\Box\bot$

Bisimulaciones



$\cancel{\Box\bot}$

Bisimulaciones y Poder Expresivo

- LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) más expresiva que LMB significa LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) captura ciertas propiedades que LMB no puede capturar.
- Las bisimulaciones relacionan estados o mundos con propiedades parecidas.
- Para LMB, estas son: información proposicional (atom), e información sobre los sucesores (zig y zag).

Bisimulaciones y Poder Expresivo

- LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) más expresiva que LMB significa LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) captura ciertas propiedades que LMB no puede capturar.
- Las bisimulaciones relacionan estados o mundos con propiedades parecidas.
- Para LMB, estas son: información proposicional (atom), e información sobre los sucesores (zig y zag).
- Para sabotage, estas condiciones no son suficientes.

Bisimulaciones y Poder Expresivo

- LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) más expresiva que LMB significa LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) captura ciertas propiedades que LMB no puede capturar.
- Las bisimulaciones relacionan estados o mundos con propiedades parecidas.
- Para LMB, estas son: información proposicional (atom), e información sobre los sucesores (zig y zag).
- Para sabotage, estas condiciones no son suficientes.
- ¿Qué propiedades necesitamos para sabotage?

Bisimulaciones y Poder Expresivo

- LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) más expresiva que LMB significa LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) captura ciertas propiedades que LMB no puede capturar.
- Las bisimulaciones relacionan estados o mundos con propiedades parecidas.
- Para LMB, estas son: información proposicional (atom), e información sobre los sucesores (zig y zag).
- Para sabotage, estas condiciones no son suficientes.
- ¿Qué propiedades necesitamos para sabotage?
- Claramente, información sobre la eliminación de ejes.

LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-bisimulaciones

En este caso, las bisimulaciones relaciona pares (estado,ejes).

LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-bisimulaciones

En este caso, las bisimulaciones relaciona pares (estado,ejes).

Sean $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ y $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ dos modelos.
$Z \subseteq (W \times 2^{W^2}) \times (W' \times 2^{W'^2})$ es una bisimulación si $(w, S)Z(w', S')$ implica:

(Atomic Harmony) $w \in V(p)$ sii $w' \in V'(p)$, para todo $p \in \mathsf{PROP}$;
(Zig) si $(w, v) \in S$ entonces existe v' tq. $(w', v') \in S'$ y $(v, S)Z(v', S')$;
(Zag) si $(w', v') \in S'$ entonces existe v tq. $(w, v) \in S$ y $(v, S)Z(v', S')$;

LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-bisimulaciones

En este caso, las bisimulaciones relaciona pares (estado,ejes).

Sean $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ y $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ dos modelos.
$Z \subseteq (W \times 2^{W^2}) \times (W' \times 2^{W'^2})$ es una bisimulación si $(w, S)Z(w', S')$ implica:

(Atomic Harmony) $w \in V(p)$ sii $w' \in V'(p)$, para todo $p \in \mathsf{PROP}$;
(Zig) si $(w, v) \in S$ entonces existe v' tq. $(w', v') \in S'$ y $(v, S)Z(v', S')$;
(Zag) si $(w', v') \in S'$ entonces existe v tq. $(w, v) \in S$ y $(v, S)Z(v', S')$;
($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zig) si $(x, y) \in S$ entonces existe $(x', y') \in S'$ tq. $(w, S^{-}_{xy})Z(w', S'^{-}_{x'y'})$;

LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-bisimulaciones

En este caso, las bisimulaciones relaciona pares (estado,ejes).

Sean $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ y $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ dos modelos.
$Z \subseteq (W \times 2^{W^2}) \times (W' \times 2^{W'^2})$ es una bisimulación si $(w, S)Z(w', S')$ implica:

(Atomic Harmony) $w \in V(p)$ sii $w' \in V'(p)$, para todo $p \in \mathsf{PROP}$;
(Zig) si $(w, v) \in S$ entonces existe v' tq. $(w', v') \in S'$ y $(v, S)Z(v', S')$;
(Zag) si $(w', v') \in S'$ entonces existe v tq. $(w, v) \in S$ y $(v, S)Z(v', S')$;
($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zig) si $(x, y) \in S$ entonces existe $(x', y') \in S'$ tq. $(w, S^-_{xy})Z(w', S'^-_{x'y'})$;
($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zag) si $(x', y') \in S'$ entonces existe $(x, y) \in S$ tq. $(w, S^-_{xy})Z(w', S'^-_{x'y'})$.

LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-bisimulaciones

En este caso, las bisimulaciones relaciona pares (estado,ejes).

Sean $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ y $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ dos modelos.
$Z \subseteq (W \times 2^{W^2}) \times (W' \times 2^{W'^2})$ es una bisimulación si $(w, S)Z(w', S')$ implica:

(Atomic Harmony) $w \in V(p)$ sii $w' \in V'(p)$, para todo $p \in \mathsf{PROP}$;
(Zig) si $(w, v) \in S$ entonces existe v' tq. $(w', v') \in S'$ y $(v, S)Z(v', S')$;
(Zag) si $(w', v') \in S'$ entonces existe v tq. $(w, v) \in S$ y $(v, S)Z(v', S')$;
($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zig) si $(x, y) \in S$ entonces existe $(x', y') \in S'$ tq. $(w, S^{-}_{xy})Z(w', S'^{-}_{x'y'})$;
($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zag) si $(x', y') \in S'$ entonces existe $(x, y) \in S$ tq. $(w, S^{-}_{xy})Z(w', S'^{-}_{x'y'})$.

$\mathcal{M}, w \leftrightarroweq_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ si $\exists$ una bisimulación Z tq. $(w, R)Z(w', R')$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarroweq_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarrows_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Vamos a generalizar este enunciado:

Hipótesis inductiva

Para todo $S \subseteq W^2, S' \subseteq W'^2$, $(w, S) Z (w', S')$ implica $\langle W, S, V \rangle, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \langle W', S', V' \rangle, w'$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarrows_{\text{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\text{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Vamos a generalizar este enunciado:

Hipótesis inductiva

Para todo $S \subseteq W^2, S' \subseteq W'^2$, $(w, S)Z(w', S')$ implica $\langle W, S, V \rangle, w \equiv_{\text{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \langle W', S', V' \rangle, w'$.

Demo.

Consideremos el caso para $\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$. Supongamos $\langle W, S, V \rangle, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarrows_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Vamos a generalizar este enunciado:

Hipótesis inductiva

Para todo $S \subseteq W^2, S' \subseteq W'^2$, $(w, S)Z(w', S')$ implica $\langle W, S, V \rangle, w \equiv_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \langle W', S', V' \rangle, w'$.

Demo.

Consideremos el caso para $\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$. Supongamos $\langle W, S, V \rangle, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.
Entonces existe $(x, y) \in S$ tq. $\langle W, S^-_{x,y}, V \rangle, w \models \psi$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarroows_{\text{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\text{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Vamos a generalizar este enunciado:

Hipótesis inductiva

Para todo $S \subseteq W^2, S' \subseteq W'^2$, $(w, S)Z(w', S')$ implica $\langle W, S, V \rangle, w \equiv_{\text{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \langle W', S', V' \rangle, w'$.

Demo.

Consideremos el caso para $\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$. Supongamos $\langle W, S, V \rangle, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.
Entonces existe $(x, y) \in S$ tq. $\langle W, S^-_{x,y}, V \rangle, w \models \psi$.
Por ($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zig), existe $(x', y') \in S'$ tq. $(w, S^-_{xy})Z(w', S'^-_{x'y'})$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarrows_{\text{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\text{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Vamos a generalizar este enunciado:

Hipótesis inductiva

Para todo $S \subseteq W^2, S' \subseteq W'^2$, $(w, S)Z(w', S')$ implica $\langle W, S, V \rangle, w \equiv_{\text{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \langle W', S', V' \rangle, w'$.

Demo.

Consideremos el caso para $\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$. Supongamos $\langle W, S, V \rangle, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.
Entonces existe $(x, y) \in S$ tq. $\langle W, S^-_{x,y}, V \rangle, w \models \psi$.
Por ($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zig), existe $(x', y') \in S'$ tq. $(w, S^-_{xy})Z(w', S'^-_{x'y'})$.
Por HI, $\langle W', S'^-_{x'y'}, V' \rangle, w' \models \psi$ y por ($\models$) $\langle W', S', V' \rangle, w' \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarrows_{\text{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\text{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Vamos a generalizar este enunciado:

Hipótesis inductiva

Para todo $S \subseteq W^2, S' \subseteq W'^2$, $(w, S)Z(w', S')$ implica $\langle W, S, V \rangle, w \equiv_{\text{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \langle W', S', V' \rangle, w'$.

Demo.

Consideremos el caso para $\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$. Supongamos $\langle W, S, V \rangle, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.
Entonces existe $(x, y) \in S$ tq. $\langle W, S^-_{x,y}, V \rangle, w \models \psi$.
Por ($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zig), existe $(x', y') \in S'$ tq. $(w, S^-_{xy})Z(w', S'^-_{x'y'})$.
Por HI, $\langle W', S'^-_{x'y'}, V' \rangle, w' \models \psi$ y por ($\models$) $\langle W', S', V' \rangle, w' \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.
Para la otra dirección usamos $\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zag.

Traducción a FOL

Escribimos xy en vez de (x, y), y definimos:

$$
\begin{array}{lll}
nm = xy & \text{se define como} & n = x \wedge m = y \\
nm \neq xy & \text{se define como} & n \neq x \ \vee \ m \neq y \\
nm \in S & \text{se define como} & \bigvee_{xy \in S} nm = xy, \ \text{and} \\
nm \notin S & \text{se define como} & \bigwedge_{xy \in S} nm \neq xy,
\end{array}
$$

donde S es un conjunto finito de pares de variables.
En particular, $nm \in \emptyset$ es equivalente a $\bot$ y $nm \notin \emptyset$ es equivalente a $\top$.
Tambíen defininimos: $S^{-1} = \{mn \mid nm \in S\}$.

Traducción Estándar de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a FOL

Los casos no triviales de la traducción ST son:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{ST}_{x,S}(\langle r \rangle \varphi) & = & \exists y.(R_r(x,y) \wedge xy \notin S \wedge \mathsf{ST}_{y,S}(\varphi)) \\
\mathsf{ST}_{x,S}(\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi) & = & \exists yy'.(R_r(y,y') \wedge yy' \notin S \wedge \mathsf{ST}_{x,S \cup yy'}(\varphi))
\end{array}
$$

donde y y y' son variables no utilizadas aún en la traducción.

Traducción Estándar de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a FOL

Los casos no triviales de la traducción ST son:

$$\begin{array}{lcl}
\mathsf{ST}_{x,S}(\langle r \rangle \varphi) & = & \exists y.(R_r(x,y) \land xy \notin S \land \mathsf{ST}_{y,S}(\varphi)) \\
\mathsf{ST}_{x,S}(\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi) & = & \exists yy'.(R_r(y,y') \land yy' \notin S \land \mathsf{ST}_{x,S\cup yy'}(\varphi))
\end{array}$$

donde y y y' son variables no utilizadas aún en la traducción.

- S guarda los pares que fueron borrados.

Traducción Estándar de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a FOL

Los casos no triviales de la traducción ST son:

$$\begin{array}{lcl}
\mathsf{ST}_{x,S}(\langle r \rangle \varphi) & = & \exists y.(R_r(x,y) \wedge xy \notin S \wedge \mathsf{ST}_{y,S}(\varphi)) \\
\mathsf{ST}_{x,S}(\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi) & = & \exists yy'.(R_r(y,y') \wedge yy' \notin S \wedge \mathsf{ST}_{x,S \cup yy'}(\varphi))
\end{array}$$

donde y y y' son variables no utilizadas aún en la traducción.

- S guarda los pares que fueron borrados.
- Para $\langle r \rangle$ necesitamos agregar la condición $xy \notin S$.

Traducción Estándar de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a FOL

Los casos no triviales de la traducción ST son:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathsf{ST}_{x,S}(\langle r \rangle \varphi) & = & \exists y.(R_r(x,y) \wedge xy \notin S \wedge \mathsf{ST}_{y,S}(\varphi)) \\
\mathsf{ST}_{x,S}(\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi) & = & \exists yy'.(R_r(y,y') \wedge yy' \notin S \wedge \mathsf{ST}_{x,S\cup yy'}(\varphi))
\end{array}
$$

donde y y y' son variables no utilizadas aún en la traducción.

- S guarda los pares que fueron borrados.
- Para $\langle r \rangle$ necesitamos agregar la condición $xy \notin S$.
- Recordar: $nm \notin S = \bigwedge_{xy \in S} nm \neq xy$

Traducción Estándar de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a FOL

Los casos no triviales de la traducción ST son:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{ST}_{x,S}(\langle r \rangle \varphi) & = & \exists y.(R_r(x,y) \wedge xy \notin S \wedge \mathsf{ST}_{y,S}(\varphi)) \\ \mathsf{ST}_{x,S}(\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi) & = & \exists yy'.(R_r(y,y') \wedge yy' \notin S \wedge \mathsf{ST}_{x,S \cup yy'}(\varphi)) \end{array}$$

donde y y y' son variables no utilizadas aún en la traducción.

- S guarda los pares que fueron borrados.
- Para $\langle r \rangle$ necesitamos agregar la condición $xy \notin S$.
- Recordar: $nm \notin S = \bigwedge_{xy \in S} nm \neq xy$
- Similar para $\langle \mathsf{sb} \rangle$, pero agregando el nuevo par eliminado a S.

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$.

Sustitución uniforme

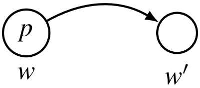
- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \rightarrow p$ es válida, luego $\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \rightarrow \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \rightarrow \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$.

Sustitución uniforme

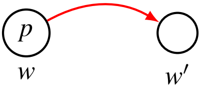
- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$.



$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$$

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$.



$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$$

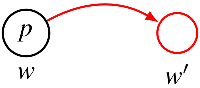
Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$.

$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$$

Sustitución uniforme

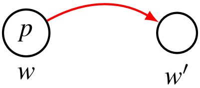
- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$.



$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$$

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$.



$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$$

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$.

$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$$

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$.

$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \cancel{\langle \mathsf{sb} \rangle p}$$

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle\langle \mathsf{sb} \rangle p$.

$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \cancel{\langle \mathsf{sb} \rangle p}$$

- Corolario: Sustitución uniforme falla en LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$).

Sustitución uniforme

- La regla de sustitución uniforme suele ser indicativo de un buen comportamiento a la hora de axiomatizar una lógica.
- Si φ es válida, $\varphi[p/\psi]$ (es decir, el resultado de reemplazar toda ocurrencia de p por ψ en φ) es también válida.
- Por ejemplo: $p \to p$ es válida, luego $\Diamond p \to \Diamond p$ también lo es.
- Considerar la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle \mathsf{sb} \rangle p$ en φ, obtenemos $\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \langle \mathsf{sb} \rangle p$.

$$\langle \mathsf{sb} \rangle p \wedge \Diamond\top \to \langle \mathsf{sb} \rangle \cancel{\langle \mathsf{sb} \rangle p}$$

- Corolario: Sustitución uniforme falla en $\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)$.

CONTINUARÁ!

Otras transformaciones

Consideremos los siguientes operadores sobre relaciones:

$$\begin{array}{lrcl} \mathcal{M}^+_{wv} = \langle W, R^+_{wv}, V\rangle & R^+_{wv} & = & R \cup \{(w,v)\} \\ \mathcal{M}^*_{wv} = \langle W, R^*_{wv}, V\rangle & R^*_{wv} & = & (R \backslash \{(v,w)\}) \cup \{(w,v)\}. \end{array}$$

Otras transformaciones

Consideremos los siguientes operadores sobre relaciones:

$$\mathcal{M}^+_{wv} = \langle W, R^+_{wv}, V\rangle \quad R^+_{wv} = R \cup \{(w,v)\}$$
$$\mathcal{M}^*_{wv} = \langle W, R^*_{wv}, V\rangle \quad R^*_{wv} = (R\backslash\{(v,w)\}) \cup \{(w,v)\}.$$

Definimos dos nuevas modalidades (bridge y swap):

$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{br}\rangle\varphi \quad \text{sii} \quad \text{existe v,v' tq. } (v,v') \notin R \text{ y } \mathcal{M}^+_{vv'}, w \models \varphi$$

Otras transformaciones

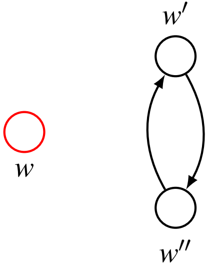
Consideremos los siguientes operadores sobre relaciones:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}^{+}_{wv} = \langle W, R^{+}_{wv}, V\rangle \quad R^{+}_{wv} & = & R \cup \{(w,v)\} \\ \mathcal{M}^{*}_{wv} = \langle W, R^{*}_{wv}, V\rangle \quad R^{*}_{wv} & = & (R \backslash \{(v,w)\}) \cup \{(w,v)\}. \end{array}$$

Definimos dos nuevas modalidades (bridge y swap):

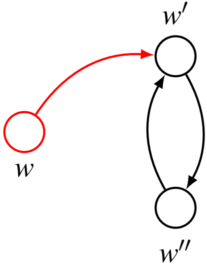
$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{br} \rangle \varphi & \text{sii} & \text{existe v,v' tq. } (v,v') \notin R \text{ y } \mathcal{M}^{+}_{vv'}, w \models \varphi \\ \mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sw} \rangle \varphi & \text{sii} & \text{existe v,v' tq. } (v,v') \in R \text{ y } \mathcal{M}^{*}_{vv'}, w \models \varphi \end{array}$$

Bridge Logic - Ejemplo



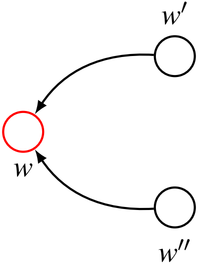
$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{br} \rangle \Diamond \top$

Bridge Logic - Ejemplo



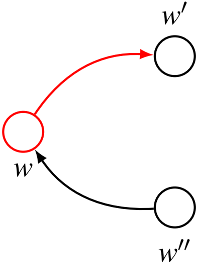
$$\mathcal{M}^{+}_{ww'}, w \models \Diamond\top$$

Swap Logic - Ejemplo



$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sw} \rangle \Diamond \top$$

Swap Logic - Ejemplo



$$\mathcal{M}^*_{w'w}, w \models \Diamond\top$$

Lo que vimos hoy

- Nuestra primera lógica dinámica mas expresiva LMB: lógica de sabotaje.
  - Falla de la Tree Model Property.
  - Bisimulación.
  - Traducción a FOL.
  - Falla de Sustitución Uniforme.
- Otros operadores dinámicos.

Lo que viene

- Cómo axiomatizamos LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)?