

Lógicas Modales

De qué se trata esta materia?

Carlos Areces & Raul Fervari

1er Cuatrimestre 2017,
Córdoba, Argentina

Generalidades

- ▶ En esta materia vamos a hablar de *lógicas modales*.
- ▶ La materia va a ser principalmente teórica, pero vamos a ver también algunas aplicaciones.
- ▶ Contenidos necesarios para la cursada:
 - ▶ Buenos conocimientos de lógica proposicional.
 - ▶ Nociones básicas de lógica de primer orden.
- ▶ Como materia optativa tiene como correlativa *Introducción a la Lógica y la Computación*.

Organización de la materia

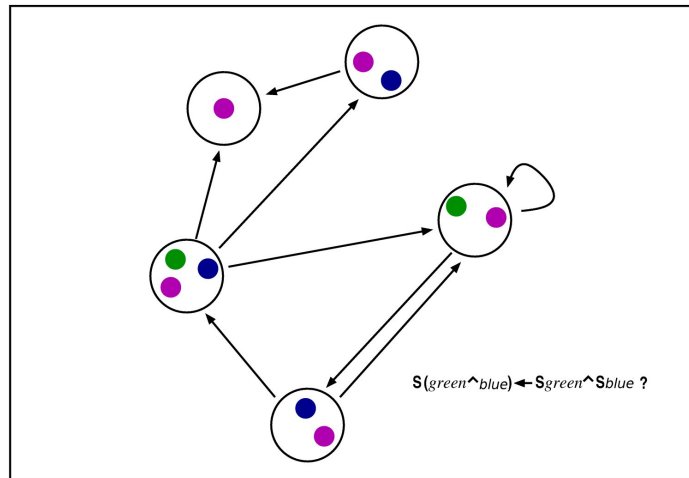
- ▶ Horario:
 - ▶ Lunes: 2 horas en [15hs – 19hs]. Aula 13.
 - ▶ Miércoles: 2 horas en [15hs – 19hs]. Aula 27.
- ▶ Evaluación: Dos parciales, más ejercicios a entregar durante la cursada. Los que la cursan como materia de posgrado van a tener que trabajar más.
- ▶ Vamos a tener guías de ejercicios. Algunos los vamos a ir resolviendo en el pizarrón.
- ▶ La página de la materia es
<http://cs.famaf.unc.edu.ar/~careces/lm17>
Ahí vamos a subir las prácticas y las slides de las clases, así que chequeen cada tanto las novedades.

¿Qué es lo que vamos a ver?

- ▶ Usualmente hablamos de **La Lógica**: lógica de primer orden.
$$\forall x.(\text{madruga}(x) \rightarrow \exists y.(\text{dios}(y) \wedge \text{ayuda}(y, x)))$$
- ▶ Aunque también sabemos que existe la **lógica proposicional**:
$$\text{comerChicle} \rightarrow \neg \text{cruzarLaCalle}$$
- ▶ ¿Cuántas lógicas hay? ¿Dos?

Estructuras simples para lenguajes simples

Pensemos en un **grafo coloreado**:



Estructuras simples para lenguajes simples

- ▶ Esto que vimos es un ejemplo de una *lógica modal*.
- ▶ Aparentemente es un lenguaje muy cómodo para hablar de grafos coloreados. ¿Servirá para algo más? Ya veremos...
- ▶ Una primera ventaja:
 - ▶ Decidir si una fórmula es cierta en lógica de primer orden es indecidible.
 - ▶ En esta lógica modal, el problema es computable! (para los que sepan de qué se trata, es PSPACE-complete).

Una Familia de Lenguajes

- ▶ La Lógica Modal investiga el **espectro** de posibles lenguajes que pueden usarse para describir estructuras relacionales.
- ▶ Algunas preguntas que uno se puede hacer son:
 - ▶ ¿Cuáles son los límites de expresividad de estos lenguajes? Es decir, ¿podemos decir más o menos cosas que con otras lógicas?
 - ▶ ¿Podemos definir algoritmos de inferencia para estos lenguajes?
 - ▶ ¿Cuán eficientes son?
- ▶ Otra perspectiva es mirarlos desde el punto de vista del **diseño** de una lógica. Dado un problema en particular:
 - ▶ ¿Qué lenguaje lógico me resulta más cómodo de usar?
 - ▶ ¿Cuál tiene un buen algoritmo de inferencia?
 - ▶ ¿Qué operadores realmente necesito?

Posibles Aplicaciones

- ▶ Los lenguajes de la familia de las lógicas modales pueden usarse en **áreas muy diversas**:
 - ▶ Verificación de Software y Hardware.
 - ▶ Representación de Conocimientos.
 - ▶ Lingüística Computacional.
 - ▶ Inteligencia Artificial.
 - ▶ Filosofía.
 - ▶ Epistemología.
 - ▶ ...
- ▶ **¿Por qué?** Muchas cosas pueden ser representadas como grafos (i.e., estructuras relacionales). Y como vimos, los lenguajes modales fueron **desarrollados especialmente** para razonar sobre grafos y describir sus propiedades.

No Estamos Solos

- ▶ Aunque no parezca, **estamos haciendo Lógica Clásica**.
- ▶ Los lenguajes que estuvimos discutiendo son **fragmentos** del lenguaje de primer (o segundo) orden. Lo único que hicimos fue elegir sólo una parte del lenguaje que necesitábamos para una aplicación dada.
- ▶ Esta es exactamente la forma en que vemos hoy por hoy a los lenguajes modales, como una forma de investigar fragmentos particularmente interesantes de los lenguajes clásicos.
- ▶ Donde “**interesantes**” significa
 - ▶ Decidibles, expresivos, de “baja” complejidad, modulares, etc.

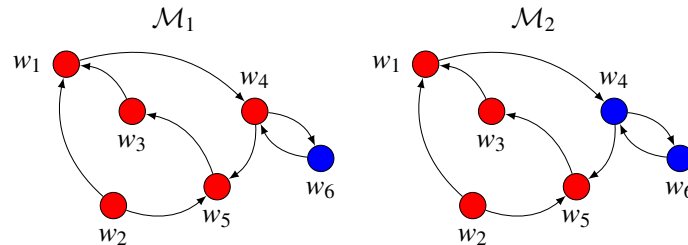
Clase #1

Temario:

- ▶ Lógica de primer orden: sentencias y fórmulas.
- ▶ El lenguaje modal visto como un lenguaje de grafos decorados.
- ▶ Sintaxis y semántica del lenguaje modal
- ▶ Extensiones: Operador inverso, modalidad universal, PDL, lógicas híbridas.

Lógica de Primer Orden

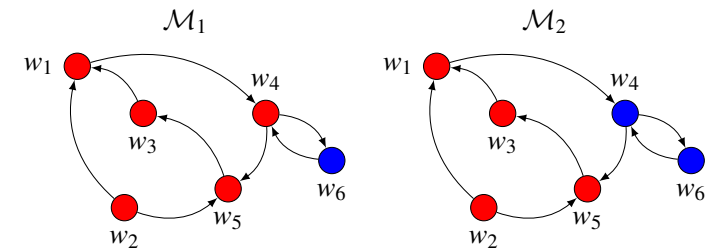
- ▶ La noción de verdad en Lógica de Primer Orden tiene que ver con **sentencias**, es decir, fórmulas sin variables libres.
- ▶ Si pensamos en una sentencia φ cualquiera, y un modelo \mathcal{M} , la sentencia va a ser verdadera o falsa en **todo** el modelo. No vamos a poder hablar de una parte del modelo en particular.



- ▶ $\mathcal{M}_1 \models \forall x. (red(x) \rightarrow (\exists y. xRy \wedge red(y)))$
- ▶ $\mathcal{M}_2 \not\models \forall x. (red(x) \rightarrow (\exists y. xRy \wedge red(y)))$

Lógica de Primer Orden

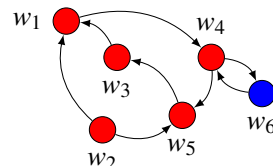
- ▶ Esto significa que la **extensión** de una sentencia φ de LPO es o bien **vacío** o bien **todo el dominio**.
- ▶ ¿Cómo podemos hacer para hablar de partes del modelo?
- ▶ Podemos usar fórmulas con **variables libres**:



- ▶ $sRed(x) = red(x) \rightarrow (\exists y. xRy \wedge red(y))$
- ▶ $[sRed(x)]^{\mathcal{M}_1} = [red(x) \rightarrow (\exists y. xRy \wedge red(y))]^{\mathcal{M}_1} = \{w_1, \dots, w_6\}$
- ▶ $[sRed(x)]^{\mathcal{M}_2} = [red(x) \rightarrow (\exists y. xRy \wedge red(y))]^{\mathcal{M}_2} = \{w_2, \dots, w_6\}$

Perspectiva interna

- ▶ De alguna manera, lo que estamos buscando es intentar expresar una noción de **perspectiva interna**, en donde queremos ver las propiedades de un elemento del modelo con respecto al resto.
- ▶ Con eso en mente, vamos a dejar por un momento LPO, y vamos a trabajar con un lenguaje especialmente diseñado para eso.
- ▶ Vamos a usar un **lenguaje modal**
- ▶ Ahora, si queremos expresar la idea anterior, podemos decir:

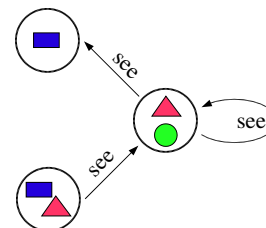


$$\mathcal{M}, w_1 \models \text{red} \rightarrow \Diamond \text{red}$$

- ▶ Pareciera mucho más fácil de escribir así, ¿no?

Lenguaje Modal: un lenguaje para grafos decorados

Veamos otros ejemplos. Pensemos en un grafo orientado, con figuras dentro de cada nodo:



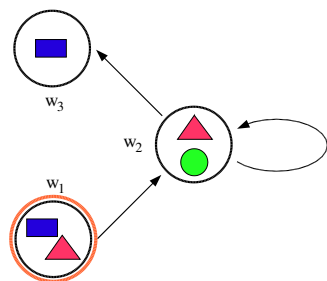
Queremos describir qué figuras un nodo puede “ver”.

Desde la perspectiva de un nodo n , el significado de los operadores modales va a ser:

- ▶ $\langle \text{see} \rangle x = “n \text{ puede ver la figura } x \text{ en algún vecino}”$.
- ▶ $[\text{see}]x = “n \text{ puede ver la figura } x \text{ en todos sus vecinos}”$.

Lenguaje Modal: un lenguaje para grafos decorados

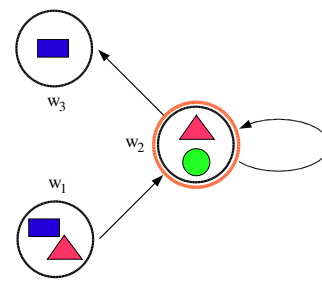
Ahora podemos hacerle “preguntas” al modelo:



- ▶ Ve w_1 un rectángulo?
 $\mathcal{M}, w_1 \models \langle \text{see} \rangle \text{rectangle? NO}$
- ▶ ... y en dos “pasos”?
 $\mathcal{M}, w_1 \models \langle \text{see} \rangle \langle \text{see} \rangle \text{rectangle? SI}$
- ▶ Ve w_1 un círculo y un triángulo?
 $\mathcal{M}, w_1 \models \langle \text{see} \rangle \text{circle} \wedge \langle \text{see} \rangle \text{triangle? SI}$

Lenguaje Modal: un lenguaje para grafos decorados

Ahora podemos hacerle “preguntas” al modelo:



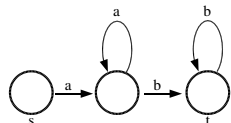
- ▶ Ve w_2 un círculo y un rectángulo?
 $\mathcal{M}, w_2 \models \langle \text{see} \rangle \text{circle} \wedge \langle \text{see} \rangle \text{rectangle? SI}$
- ▶ ... y en el mismo vecino?
 $\mathcal{M}, w_2 \models \langle \text{see} \rangle (\text{circle} \wedge \text{rectangle})? NO$
- ▶ w_2 ve círculos en todos lados?
 $\mathcal{M}, w_2 \models [\text{see}] \text{circle? NO}$

Lenguaje Modal: un lenguaje para grafos decorados

También podemos verlo como un lenguaje para describir **procesos**.

- ▶ Esto significa ver a los elementos del modelo como un conjunto de **estados computacionales**.
- ▶ Y ver a las relaciones binarias como **acciones** que transforman un estado en otro.

Veamos este modelo:



- ▶ Esto muestra un autómata finito para el lenguaje $a^n b^m$.
- ▶ En este caso podemos trabajar con dos diamantes $\langle a \rangle$ y $\langle b \rangle$.
- ▶ Está claro que todas las fórmulas con la forma

$$\langle a \rangle \dots \langle a \rangle \langle b \rangle \dots \langle b \rangle t$$

son satisfechas en el nodo s .

Lenguaje Modal: una perspectiva realmente interna

Miremos este ejemplo:

- ▶ Hay varias habitaciones, pintadas de rojo y negro, y en cada una hay un teletransportador (wow!).
- ▶ Este transportador nos mueve entre algunas de las habitaciones siguiendo alguno de los posibles caminos (uno entra en el transportador y aparece en alguna otra habitación al azar).
- ▶ ¿Podemos diferenciar entre estos dos ‘laberintos’?



- ▶ Aunque uno de los modelos tiene solo 2 elementos y el otro 4, no hay forma de notar esto ‘desde adentro’ de los modelos. Como vamos a ver, esta es una característica importante de las lógicas modales relacionada con la **expresividad**.

Lenguaje Modal Básico: sintaxis y semántica

Vamos a definir ahora la sintaxis formal del lenguaje modal básico.

- ▶ La signature del lenguaje va a consistir de dos conjuntos infinitos numerables, disjuntos entre sí:
 - ▶ $PROP = \{p_1, p_2, \dots\}$, el conjunto de *variables proposicionales*.
 - ▶ $REL = \{R_1, R_2, \dots\}$, el conjunto de *símbolos de relación*.
- ▶ El conjunto de fórmulas FORM en la signature $\langle PROP, REL \rangle$ está definido como:

$$FORM := p \mid \neg \varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \langle R \rangle \varphi$$

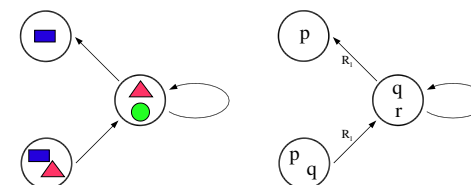
en donde $p \in PROP$, $R \in REL$ y $\varphi, \psi \in FORM$.

- ▶ El operador $[R]$ se define como $[R]\varphi = \neg \langle R \rangle \neg \varphi$ (de igual forma que $\forall x. \varphi$ es $\neg \exists x. \neg \varphi$)

Lenguaje Modal Básico: sintaxis y semántica

Para poder definir formalmente la semántica, vamos primero a ver qué es un **modelo de Kripke**.

- ▶ Un modelo de Kripke es una estructura $\langle W, \{R_i\}, V \rangle$ donde
 - ▶ W es un conjunto no vacío de elementos.
 - ▶ $\{R_i\}$ es un conjunto de relaciones binarias en W .
 - ▶ $V : PROP \rightarrow \wp(W)$ es una función de valuación ($V(p)$ es el conjunto de elementos donde vale p).
- ▶ Intuitivamente, un modelo de Kripke es un grafo dirigido con “decoraciones”.



Lenguaje Modal Básico: sintaxis y semántica

Ahora sí, podemos definir la semántica de la lógica modal básica:

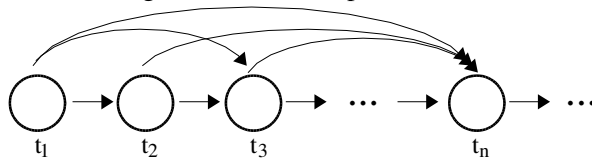
- ▶ Dado un modelo $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V \rangle$ y un estado $w \in W$, la relación de satisfacibilidad es
$$\begin{aligned}\mathcal{M}, w &\models p && \text{iff } w \in V(p), \text{ para } p \in \text{PROP} \\ \mathcal{M}, w &\models \neg\varphi && \text{iff } \mathcal{M}, w \not\models \varphi \\ \mathcal{M}, w &\models \varphi \wedge \psi && \text{iff } \mathcal{M}, w \models \varphi \text{ y } \mathcal{M}, w \models \psi \\ \mathcal{M}, w &\models \langle R \rangle \varphi && \text{iff } \exists w' \in W \text{ tq } R(w, w') \text{ y } \mathcal{M}, w' \models \varphi\end{aligned}$$
- ▶ Vamos a decir que φ es **válida** en un modelo \mathcal{M} sii en todos los estados $w \in W$ vale $\mathcal{M}, w \models \varphi$, y en ese caso escribimos $\mathcal{M} \models \varphi$.

Extensiones

- ▶ Hasta ahora hicimos un repaso de lógica proposicional, lógica de primer orden y vimos la lógica modal básica.
- ▶ Volviendo a la pregunta de cuántas lógicas había, ya sabemos que la respuesta no es **dos**.
- ▶ Como se podrán imaginar, tampoco es **tres**.
- ▶ Así como existe el operador $\langle R \rangle$, tenemos un amplio “menú” de operadores modales para usar.
- ▶ Al combinar estos operadores, conseguimos diferentes lógicas

Extensiones: Operador Inverso

- ▶ Pensemos en la siguiente “línea temporal”



- ▶ Claramente, esta estructura puede ser vista como un modelo de Kripke.
- ▶ El operador $\langle R \rangle$ significa “en algún momento en el futuro”.
- ▶ Y el operador $[R]$ dice “en todo momento futuro”.
- ▶ Con este lenguaje, ¿podremos decir “**en algún momento en el pasado**”?
- ▶ Más aún, esta idea la podemos querer usar en cualquier tipo de modelo de Kripke, no sólo en los temporales.

Extensiones: Operador Inverso

- ▶ La necesidad de expresar esto, nos lleva a agregar el **operador inverso**, que vamos a notar como $\langle R \rangle^{-1}$.
- ▶ Para extender la lógica modal básica con este operador, primero tenemos que agregarlo a nuestra sintaxis:

$$\text{FORM} := p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \langle R \rangle \varphi \mid \langle R \rangle^{-1} \varphi$$

- ▶ ¿Necesitamos hacer algún cambio en los modelos?
- ▶ Parecería que no...
- ▶ Ahora lo que nos falta es extender la semántica.

Extensiones: Operador Inverso

- ▶ La relación de satisfacibilidad que teníamos antes era:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}, w \models p & \quad \text{iff} \quad w \in V(p), \text{ para } p \in \text{PROP} \\ \mathcal{M}, w \models \neg\varphi & \quad \text{iff} \quad \mathcal{M}, w \not\models \varphi \\ \mathcal{M}, w \models \varphi \wedge \psi & \quad \text{iff} \quad \mathcal{M}, w \models \varphi \text{ y } \mathcal{M}, w \models \psi \\ \mathcal{M}, w \models \langle R \rangle \varphi & \quad \text{iff} \quad \exists w' \in W \text{ tq } R(w, w') \text{ y } \mathcal{M}, w' \models \varphi\end{aligned}$$

- ▶ ¿Cómo podemos hacer para definir el comportamiento de este nuevo operador?
- ▶ Tenemos que agregar el caso del operador a la definición:

$$\mathcal{M}, w \models \langle R \rangle^{-1} \varphi \quad \text{iff} \quad \exists w' \in W \text{ tq } R(w', w) \text{ y } \mathcal{M}, w' \models \varphi$$

Extensiones: Modalidad Universal

- ▶ Otro “feature” que podemos querer es la capacidad de describir alguna propiedad global, que debe cumplirse en todo el modelo.
- ▶ Supongamos que estamos modelando un zoológico, y que estamos interesados en la alimentación de los osos y su relación con los cuidadores de osos.
- ▶ Queremos, por un lado, que estas fórmulas se satisfagan en todo el modelo:

$$\begin{aligned}\text{oso} \vee \text{humano} & \quad \text{oso} \rightarrow \langle \text{MADRE} \rangle \text{oso} \\ \text{oso} \rightarrow \neg \text{humano} & \quad \text{oso} \rightarrow [\text{ALIMENTADO}](\text{cuidador} \vee \text{madre})\end{aligned}$$

- ▶ Y, por otro lado, poder preguntar si existirá algún estado donde:
 - ▶ $\text{oso} \wedge \langle \text{MADRE} \rangle (\text{oso} \wedge \text{humano})$
 - ▶ $\text{oso} \wedge \langle \text{ALIMENTADO} \rangle (\neg \text{madre} \wedge \neg \text{humano})$

Extensiones: Modalidad Universal

- ▶ Para poder decir esto, tenemos que agregar la **modalidad universal**, que notamos como A .
- ▶ La fórmula $A\varphi$ significa que φ es cierta en todos los puntos del modelo.
- ▶ ¿Cómo es la definición formal de la semántica de este operador?
- ▶ Y una pregunta (para pensar), ¿este operador es lo mismo que el \forall de LPO?

Extensiones: PDL (Propositional Dynamic Logic)

- ▶ Imaginemos que queremos modelar el comportamiento de **programas**.
- ▶ Para eso, para cada programa (no determinístico) π vamos a tener una modalidad $\langle \pi \rangle$ (tenemos infinitas modalidades!).
- ▶ La interpretación de $\langle \pi \rangle \varphi$ va a ser: ‘alguna ejecución que termina de π desde el estado actual nos lleva a un estado donde vale φ ’.
- ▶ Lo que queremos también es hacer explícita la **estructura inductiva** de los programas: los programas se pueden componer, iterar, etc, formando nuevos programas.

Extensiones: PDL (Propositional Dynamic Logic)

Si tenemos programas ‘simples’ a, b, c , etc. (y por lo tanto tenemos las modalidades $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle, \dots$) podemos construir programas más complejos de la siguiente manera:

- ▶ (*elección*) Si π_1 y π_2 son programas, entonces $\pi_1 \cup \pi_2$ es un programa. El programa $\pi_1 \cup \pi_2$ ejecuta no determinísticamente π_1 ó π_2 .
- ▶ (*composición*) Si π_1 y π_2 son programas, entonces $\pi_1; \pi_2$ es un programa. El programa $\pi_1; \pi_2$ ejecuta primero π_1 y luego π_2 .
- ▶ (*iteración*) Si π es un programa, entonces π^* es un programa. El programa π^* ejecuta π un número finito (o quizás cero) de veces.

Esto significa que si $\langle \pi_1 \rangle$ y $\langle \pi_2 \rangle$ son modalidades, entonces también lo son $\langle \pi_1 \cup \pi_2 \rangle$, $\langle \pi_1; \pi_2 \rangle$ y $\langle \pi^* \rangle$.

Extensiones: PDL (Propositional Dynamic Logic)

- ▶ Tenemos que **interpretar apropiadamente** las modalidades para que cada operador tenga el significado esperado.

- ▶ Definamos

$$\begin{aligned} R_{\pi_1 \cup \pi_2} &= R_{\pi_1} \cup R_{\pi_2} \\ R_{\pi_1; \pi_2} &= R_{\pi_1} \circ R_{\pi_2} \text{ (la composición de las relaciones)} \\ R_{\pi^*} &= (R_{\pi_1})^* \text{ (la clausura reflexo-transitiva de } R_{\pi_1}) \end{aligned}$$

- ▶ Entonces,

$$\mathcal{M}, w \models \langle \pi \rangle \varphi \text{ sii } \exists w'. R_{\pi}(w, w') \text{ y } \mathcal{M}, w' \models \varphi$$

Extensiones: PDL (Propositional Dynamic Logic)

- ▶ Con estas definiciones, ¿qué nos dice esta fórmula?

$$\langle \pi^* \rangle \varphi \leftrightarrow \varphi \vee \langle \pi; \pi^* \rangle \varphi$$

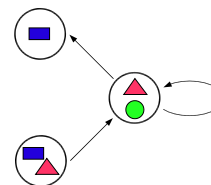
- ▶ ¿Debería ser válida? Demostrarlo!
- ▶ ¿Y esta?

$$[\pi^*](\varphi \rightarrow [\pi]\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow [\pi^*]\varphi)$$

- ▶ Pensar en el esquema de inducción...

Extensiones: Lógica Híbrida

Volvamos al ejemplo de las figuras geométricas. ¿Cómo hacemos para decir?



- ▶ ¿Puede w_1 verse a sí mismo?
- ▶ ¿Son realmente w_1 y w_2 estados distintos?

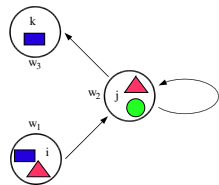
- ▶ Lo que necesitamos para expresar esto es poder **nombrar** mundos, y una noción de **igualdad**.

Extensiones: Lógica Híbrida

$\mathcal{HL}(@)$ es la extensión de la lógica modal básica con:

- **nombr**es (nominales): son un nuevo conjunto de símbolos atómicos, que representan a los estados. La clave es que cada nominal tiene que ser cierto en un **único** estado. En general se escriben como i, j, k, \dots
- **@**: el operador 'at'. $@_i\varphi$ es verdadera sii φ es verdadera en el mundo denotado por i .

Ahora podemos expresar...



- ¿Puede w_1 verse a sí mismo?
 $@_i\langle see \rangle i$
- ¿Son realmente w_1 y w_2 estados distintos?
 $@_i\neg j$

Extensiones: Lógica Híbrida

Entonces, la definición de la sintaxis es:

- A la signatura $\langle \text{PROP}, \text{REL} \rangle$ que teníamos antes, le tenemos que agregar un nuevo conjunto $\text{NOM} = \{i, j, k, \dots\}$ de nominales.
- Las fórmulas bien formadas ahora son:

$$\text{FORM} := p \mid i \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \langle R \rangle \varphi \mid @_i\varphi$$

en donde $p \in \text{PROP}$, $R \in \text{REL}$, $i \in \text{NOM}$ y $\varphi, \psi \in \text{FORM}$.

- ¿Hay que hacer algún cambio en lo modelos? ¿Cómo es la semántica de $\mathcal{HL}(@)$?
- **Ejercicio!**