Lógicas Modales Dinámicas

Clase #2

Carlos Areces & Raul Fervari

Febrero 2024, Río Cuarto, Argentina

Hasta Ahora

- Historia de las Lógicas Modales.
- Sintaxis y semántica de mundos posibles para la LMB.
- Enfoque "plural" (muchas lógicas).
- Herramientas básicas para estudiar una lógica modal.
  - Bisimulaciones.
  - Axiomatizaciones.
  - Traducción a LPO.

Plan para hoy

- Pero... Dónde están mis Lógicas Dinámicas.

Plan para hoy

- Pero... Dónde están mis Lógicas Dinámicas.
- Introduciremos un primer operador dinámico que elimina estados.
- Usualmente se la conoce como Lógica de Anuncios Públicos (LAP) (o de *observaciones* públicas).
- Estudiaremos las consecuencias de tener este tipo de operadores.
  - Bisimulaciones.
  - Axiomatizaciones.
  - Traducción a LPO.
- Completaremos la demostración de completitud pendiente de la Clase #1.

Lógicas modales con diferentes sabores

- $\Box$ y $\Diamond$ nacieron para describir necesidad y posibilidad (interpretación alética).

Lógicas modales con diferentes sabores

- $\Box$ y $\Diamond$ nacieron para describir necesidad y posibilidad (interpretación alética).
- Lógica temporal: $\Box$ se lee siempre en el futuro, $\Diamond$ es eventualmente en el futuro..
- Lógica deóntica: $\Box$ es obligación, $\Diamond$ es permiso.

Lógicas modales con diferentes sabores

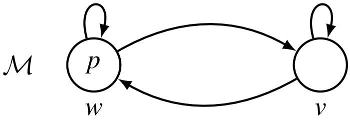
- $\Box$ y $\Diamond$ nacieron para describir necesidad y posibilidad (interpretación alética).
- Lógica temporal: $\Box$ se lee siempre en el futuro, $\Diamond$ es eventualmente en el futuro..
- Lógica deóntica: $\Box$ es obligación, $\Diamond$ es permiso.
- Lógicas epistémicas.
  - $\Box\varphi$, se lee como el agente sabe φ;
  - $\Diamond\varphi$, se lee el agente considera posible a φ.

Situaciones posibles

- Supongamos que no tenemos información sobre si está soleado o no.

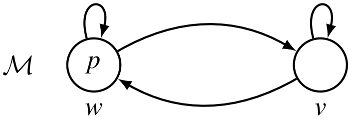
Situaciones posibles

- Supongamos que no tenemos información sobre si está soleado o no.
- Sea p = "está soleado", tenemos dos situaciones posibles:



Situaciones posibles

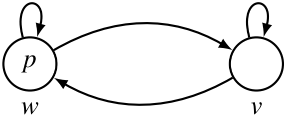
- Supongamos que no tenemos información sobre si está soleado o no.
- Sea p = "está soleado", tenemos dos situaciones posibles:



- Tenemos que $\mathcal{M}, w \models \Diamond p \wedge \Diamond \neg p$.

Situaciones posibles

- Supongamos que no tenemos información sobre si está soleado o no.
- Sea p = "está soleado", tenemos dos situaciones posibles:

$\mathcal{M}$ 

- Tenemos que $\mathcal{M}, w \models \Diamond p \wedge \Diamond \neg p$.
- Sin embargo, como veremos, esta información no es estática.

Anuncios Públicos

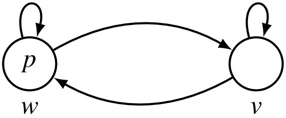
- Supongamos ahora que obtenemos nueva información (por medio de una app del tiempo o mirando por la ventana).

Anuncios Públicos

- Supongamos ahora que obtenemos nueva información (por medio de una app del tiempo o mirando por la ventana).
- La nueva información establece "hoy está soleado" (*p* es verdadera)

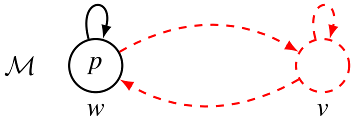
Anuncios Públicos

- Supongamos ahora que obtenemos nueva información (por medio de una app del tiempo o mirando por la ventana).
- La nueva información establece "hoy está soleado" (p es verdadera)
- Por lo tanto, la situación $\neg p$ deja de ser *posible*:



Anuncios Públicos

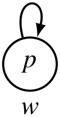
- Supongamos ahora que obtenemos nueva información (por medio de una app del tiempo o mirando por la ventana).
- La nueva información establece "hoy está soleado" (p es verdadera)
- Por lo tanto, la situación $\neg p$ deja de ser *posible*:



Anuncios Públicos

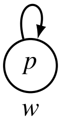
- Supongamos ahora que obtenemos nueva información (por medio de una app del tiempo o mirando por la ventana).
- La nueva información establece "hoy está soleado" (p es verdadera)
- Por lo tanto, la situación $\neg p$ deja de ser *posible*:

$\mathcal{M}_{|p}$



Anuncios Públicos

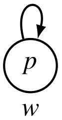
- Supongamos ahora que obtenemos nueva información (por medio de una app del tiempo o mirando por la ventana).
- La nueva información establece "hoy está soleado" (p es verdadera)
- Por lo tanto, la situación $\neg p$ deja de ser *posible*:



- Tenemos que $\mathcal{M}, w \models \Diamond p \wedge \neg\Diamond\neg p$ (notar que $\neg\Diamond\neg p$ es $\Box p$).

Anuncios Públicos

- Supongamos ahora que obtenemos nueva información (por medio de una app del tiempo o mirando por la ventana).
- La nueva información establece "hoy está soleado" (p es verdadera)
- Por lo tanto, la situación $\neg p$ deja de ser *posible*:



- Tenemos que $\mathcal{M}, w \models \Diamond p \wedge \neg\Diamond\neg p$ (notar que $\neg\Diamond\neg p$ es $\Box p$).
- Después de observar o anunciar p, necesariamente vale p

Una lógica de anuncios públicos (LAP)

Es una extensión de LMB con un operador de anuncios públicos:

$$[!\psi]\varphi$$

Se lee como "luego de que se anuncia ψ, φ es verdadera".

Una lógica de anuncios públicos (LAP)

Es una extensión de LMB con un operador de anuncios públicos:

$$[!\psi]\varphi$$

Se lee como "luego de que se anuncia ψ, φ es verdadera".
Semánticamente se restringe el modelo original:

$$\mathcal{M}, w \models [!\psi]\varphi \text{ sii } (\mathcal{M}, w \models \psi \text{ implica } \mathcal{M}_{|\psi}, w \models \varphi).$$

Una lógica de anuncios públicos (LAP)

Es una extensión de LMB con un operador de anuncios públicos:

$$[!\psi]\varphi$$

Se lee como "luego de que se anuncia ψ, φ es verdadera".
Semánticamente se restringe el modelo original:

$$\mathcal{M}, w \models [!\psi]\varphi \text{ sii } (\mathcal{M}, w \models \psi \text{ implica } \mathcal{M}_{|\psi}, w \models \varphi).$$

$\mathcal{M}_{|\psi} = \langle W_{|\psi}, R_{|\psi}, V_{|\psi} \rangle$ donde

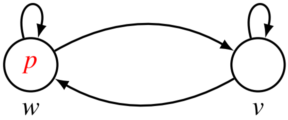
$W_{|\psi} = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \psi\}$ $V_{|\psi}(p) = V(p) \cap W_{|\psi}$, para $p \in$ PROP;
$(R_{|\psi}) = R \cap (W_{|\psi} \times W_{|\psi})$.

Anuncios Públicos

- Tenemos que $\mathcal{M}, w \models [!p]\Box p$:

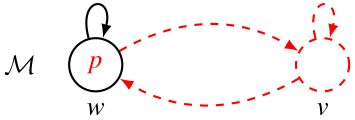
Anuncios Públicos

- Tenemos que $\mathcal{M}, w \models [!p]\Box p$:



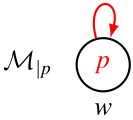
Anuncios Públicos

- Tenemos que $\mathcal{M}, w \models [!p]\Box p$:



Anuncios Públicos

- Tenemos que $\mathcal{M}, w \models [!p]\Box p$:



LAP es una lógica modal

El operador de anuncios públicos es bastante diferente a los otros operadores modales que vimos: en cierto momento, evaluamos parte de una fórmula después de un cambio en el modelo.

LAP es una lógica modal

El operador de anuncios públicos es bastante diferente a los otros operadores modales que vimos: en cierto momento, evaluamos parte de una fórmula después de un cambio en el modelo.

$$\mathcal{M}, w \models [!\psi]\varphi \text{ sii } (\mathcal{M}, w \models \psi \text{ implica } \mathcal{M}_{|\psi}, w \models \varphi).$$

LAP es una lógica modal

El operador de anuncios públicos es bastante diferente a los otros operadores modales que vimos: en cierto momento, evaluamos parte de una fórmula después de un cambio en el modelo.

$$\mathcal{M}, w \models [!\psi]\varphi \ \text{ sii } \ (\mathcal{M}, w \models \psi \text{ implica } \mathcal{M}_{|\psi}, w \models \varphi).$$

Sin embargo, podemos usar todas las herramientas conocidas de la lógica modal al trabajar con LAP.

LAP es una lógica modal

El operador de anuncios públicos es bastante diferente a los otros operadores modales que vimos: en cierto momento, evaluamos parte de una fórmula después de un cambio en el modelo.

$$\mathcal{M}, w \models [!\psi]\varphi \text{ sii } (\mathcal{M}, w \models \psi \text{ implica } \mathcal{M}_{|\psi}, w \models \varphi).$$

Sin embargo, podemos usar todas las herramientas conocidas de la lógica modal al trabajar con LAP.

Por ejemplo, para investigar completitud y poder expresivo.

Bisimulaciones y Poder Expresivo

Teorema.
$\mathcal{M}, w \leftrightarroweq \mathcal{M}', w'$ implica que para toda formula φ de LAP,

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \text{ sii } \mathcal{M}', w' \models \varphi.$$

Bisimulaciones y Poder Expresivo

Teorema.
$\mathcal{M}, w \leftrightarroweq \mathcal{M}', w'$ implica que para toda formula φ de LAP,

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \text{ sii } \mathcal{M}', w' \models \varphi.$$

Podemos hacer inducción estructural sobre φ: como LAP extiende a LMB, solo nos quedar demostrar el caso $\varphi = [!\chi]\psi$....

Juguemos con algunas fórmulas

1. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$
   Esta fórmula es válida?

Juguemos con algunas fórmulas

1. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$
   Esta fórmula es válida?
2. $[!\psi]p \leftrightarrow p$
   Qué pasa con esta fórmula?

Juguemos con algunas fórmulas

1. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$
   Esta fórmula es válida?
2. $[!\psi]p \leftrightarrow p$
   Qué pasa con esta fórmula? Pensemos:
   - $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$ iff $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$.

Juguemos con algunas fórmulas

1. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$

   Esta fórmula es válida?

2. $[!\psi]p \leftrightarrow p$

   Qué pasa con esta fórmula? Pensemos:

   - $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$ iff $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$.
   - Si $\mathcal{M}, w \not\models \psi$ y $\mathcal{M}_{|\psi}, w \not\models p$, eso se cumple.

Juguemos con algunas fórmulas

1. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$
   Esta fórmula es válida?

2. $[!\psi]p \leftrightarrow p$

   Qué pasa con esta fórmula? Pensemos:

   - $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$ iff $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$.
   - Si $\mathcal{M}, w \not\models \psi$ y $\mathcal{M}_{|\psi}, w \not\models p$, eso se cumple.
   - O sea, tenemos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$ y $\mathcal{M}, w \not\models p$.

Juguemos con algunas fórmulas

1. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$

   Esta fórmula es válida?

2. $[!\psi]p \leftrightarrow p$

   Qué pasa con esta fórmula? Pensemos:

   - $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$ iff $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$.
   - Si $\mathcal{M}, w \not\models \psi$ y $\mathcal{M}_{|\psi}, w \not\models p$, eso se cumple.
   - O sea, tenemos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$ y $\mathcal{M}, w \not\models p$.

   Podemos reforzar la fórmula:

3. $[!\psi]p \leftrightarrow (\psi \rightarrow p)$

Juguemos con algunas fórmulas

1. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$

   Esta fórmula es válida?

2. $[!\psi]p \leftrightarrow p$

   Qué pasa con esta fórmula? Pensemos:

   - $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$ iff $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$.
   - Si $\mathcal{M}, w \not\models \psi$ y $\mathcal{M}_{|\psi}, w \not\models p$, eso se cumple.
   - O sea, tenemos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$ y $\mathcal{M}, w \not\models p$.

   Podemos reforzar la fórmula:

3. $[!\psi]p \leftrightarrow (\psi \rightarrow p)$

4. $[!\psi]\neg\varphi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \neg[!\psi]\varphi)$

Juguemos con algunas fórmulas

1. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$

   Esta fórmula es válida?

2. $[!\psi]p \leftrightarrow p$

   Qué pasa con esta fórmula? Pensemos:

   - $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$ iff $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$.
   - Si $\mathcal{M}, w \not\models \psi$ y $\mathcal{M}_{|\psi}, w \not\models p$, eso se cumple.
   - O sea, tenemos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$ y $\mathcal{M}, w \not\models p$.

   Podemos reforzar la fórmula:

3. $[!\psi]p \leftrightarrow (\psi \rightarrow p)$

4. $[!\psi]\neg\varphi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \neg[!\psi]\varphi)$

5. ... Podemos seguir?

Y esto, qué significa?

- ‘Demostramos’ que LAP preserva bisimulaciones tal como las conocemos (spoiler alert: esto no va a pasar con todas las lógicas).
- Parece ser que nos podemos sacar de encima al operador $[!\psi]$.
- La pregunta es cuáles son las implicancias de esto.

Y esto, qué significa?

- 'Demostramos' que LAP preserva bisimulaciones tal como las conocemos (spoiler alert: esto no va a pasar con todas las lógicas).
- Parece ser que nos podemos sacar de encima al operador $[!\psi]$.
- La pregunta es cuáles son las implicancias de esto.
- Vamos a ver ahora una técnica basada en lo que vimos hasta ahora, que nos va a servir tanto como para ver la expresividad de LAP, pero también para axiomatizar.

Axiomas de reducción para LAP

Mediante axiomas de reducción podemos traducir fórmulas con anuncios públicos en el lenguaje epistémico básico:

1. $[!\psi]p \leftrightarrow (\psi \rightarrow p)$
2. $[!\psi]\neg\varphi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \neg[!\psi]\varphi)$
3. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$
4. $[!\psi]\Diamond\varphi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \Diamond[!\psi]\varphi)$
5. $[!\psi][!\chi]\varphi \leftrightarrow [!\psi \wedge [!\psi]\chi]\varphi$

Axiomas de reducción para LAP

Mediante axiomas de reducción podemos traducir fórmulas con anuncios públicos en el lenguaje epistémico básico:

1. $[!\psi]p \leftrightarrow (\psi \to p)$
2. $[!\psi]\neg\varphi \leftrightarrow (\psi \to \neg[!\psi]\varphi)$
3. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$
4. $[!\psi]\Diamond\varphi \leftrightarrow (\psi \to \Diamond[!\psi]\varphi)$
5. $[!\psi][!\chi]\varphi \leftrightarrow [!\psi \wedge [!\psi]\chi]\varphi$

Los axiomas de reducción son válidos (demo) I

1. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$. entonces, por def. de $[!\psi]$ tenemos que $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$. Pero $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$ sii $\mathcal{M}, w \models p$; luego, $\mathcal{M}, w \models \psi \to p$.

4. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]\Diamond\varphi$.

Los axiomas de reducción son válidos (demo) I

1. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$. entonces, por def. de $[!\psi]$ tenemos que $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$. Pero $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$ sii $\mathcal{M}, w \models p$; luego, $\mathcal{M}, w \models \psi \rightarrow p$.

4. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]\Diamond\varphi$.
Por def. de $[!\psi]$, tenemos que $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models \Diamond\varphi$.

Los axiomas de reducción son válidos (demo) I

1. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$. entonces, por def. de $[!\psi]$ tenemos que $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$. Pero $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$ sii $\mathcal{M}, w \models p$; luego, $\mathcal{M}, w \models \psi \to p$.

4. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]\Diamond\varphi$.
Por def. de $[!\psi]$, tenemos que $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models \Diamond\varphi$.
Por def. de $\Diamond$, $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica que existe $v \in W_{|\psi}$ t.q. $(w, v) \in (R_{|\psi})$ y $\mathcal{M}_{|\psi}, v \models \varphi$.

Los axiomas de reducción son válidos (demo) I

1. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$. entonces, por def. de $[!\psi]$ tenemos que $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$. Pero $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$ sii $\mathcal{M}, w \models p$; luego, $\mathcal{M}, w \models \psi \to p$.

4. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]\Diamond\varphi$.
Por def. de $[!\psi]$, tenemos que $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models \Diamond\varphi$.
Por def. de $\Diamond$, $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica que existe $v \in W_{|\psi}$ t.q. $(w, v) \in (R_{|\psi})$ y $\mathcal{M}_{|\psi}, v \models \varphi$.
Por def. de $[!\psi]$, $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica que existe $v \in W_{|\psi}$ t.q. $(w, v) \in (R_{|\psi})$ y $\mathcal{M}, v \models [!\psi]\varphi$, y por $\Diamond$, tenemos $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}, w \models \Diamond[!\psi]\varphi$.

Los axiomas de reducción son válidos (demo) I

1. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$. entonces, por def. de $[!\psi]$ tenemos que $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$. Pero $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$ sii $\mathcal{M}, w \models p$; luego, $\mathcal{M}, w \models \psi \to p$.

4. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]\Diamond\varphi$.
Por def. de $[!\psi]$, tenemos que $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models \Diamond\varphi$.
Por def. de $\Diamond$, $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica que existe $v \in W_{|\psi}$ t.q. $(w, v) \in (R_{|\psi})$ y $\mathcal{M}_{|\psi}, v \models \varphi$.
Por def. de $[!\psi]$, $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica que existe $v \in W_{|\psi}$ t.q. $(w, v) \in (R_{|\psi})$ y $\mathcal{M}, v \models [!\psi]\varphi$, y por $\Diamond$, tenemos $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}, w \models \Diamond[!\psi]\varphi$.
Por lo tanto, $\mathcal{M}, w \models \psi \to \Diamond[!\psi]\varphi$.

Los axiomas de reducción son válidos (demo) II

5. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi][!\chi]\varphi$ $\{\Leftrightarrow$ por $\models\}$
$\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models [!\chi]\varphi$ $\{\Leftrightarrow$ por $\models\}$
$\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $(\mathcal{M}_{|\psi}, w \models \chi$ implica $(\mathcal{M}_{|\psi})_{|\chi}, w \models \varphi)$
$\{\Leftrightarrow$ por currificación proposicional$\}$
$\mathcal{M}, w \models \psi$ y $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models \chi$ implica $(\mathcal{M}_{|\psi})_{|\chi}, w \models \varphi$ $\{\Leftrightarrow$ por $\models\}$
$\mathcal{M}, w \models \psi$ y $\mathcal{M}, w \models [!\psi]\chi$ implica $(\mathcal{M}_{|\psi})_{|\chi}, w \models \varphi$ $\{\Leftrightarrow$ by $\models\}$
$\mathcal{M}, w \models \psi \wedge [!\psi]\chi$ implica $(\mathcal{M}_{|\psi})_{|\chi}, w \models \varphi$.
Miremos el modelo $(\mathcal{M}_{|\psi})_{|\chi}$.

$$\begin{aligned}
(W_{|\psi})_{|\chi} &= \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \psi \text{ y } \mathcal{M}_{|\psi}, w \models \chi\} \\
&= \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \psi \text{ y } \mathcal{M}, w \models [!\psi]\chi\} \\
&= \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \psi \wedge [!\psi]\chi\}
\end{aligned}$$

Entonces $(\mathcal{M}_{|\psi})_{|\chi}$ es el mismo modelo que $\mathcal{M}_{|\psi \wedge [!\psi]\chi}$. Luego, $\mathcal{M}, w \models \psi \wedge [!\psi]\chi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi \wedge [!\psi]\chi}, w \models \varphi$, es decir, $\mathcal{M}, w \models [!\psi \wedge [!\psi]\chi]\varphi$.

Comparando poder expresivo

Decimos que un lenguaje $\mathcal{L}'$ is tiene igual o mayor poder expresivo que $\mathcal{L}$ (notación $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$) si para cada fórmula φ de $\mathcal{L}$ existe φ' en $\mathcal{L}'$ tal que

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \ \text{ sii } \ \mathcal{M}, w \models \varphi'.$$

Comparando poder expresivo

Decimos que un lenguaje $\mathcal{L}'$ is tiene igual o mayor poder expresivo que $\mathcal{L}$ (notación $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$) si para cada fórmula φ de $\mathcal{L}$ existe φ' en $\mathcal{L}'$ tal que

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \text{ sii } \mathcal{M}, w \models \varphi'.$$

Usualmente, lo demostramos encontrando una traducción $\mathsf{Tr} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ tal que $\mathsf{Tr}(\varphi) = \varphi'$.

Comparando poder expresivo

Decimos que un lenguaje $\mathcal{L}'$ is tiene igual o mayor poder expresivo que $\mathcal{L}$ (notación $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$) si para cada fórmula φ de $\mathcal{L}$ existe φ' en $\mathcal{L}'$ tal que

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \text{ sii } \mathcal{M}, w \models \varphi'.$$

Usualmente, lo demostramos encontrando una traducción $\mathsf{Tr} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ tal que $\mathsf{Tr}(\varphi) = \varphi'$.

$\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ (tienen el mismo poder expresivo) sii $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$ y $\mathcal{L}' \leq \mathcal{L}$.

Traducción de LAP a LMB

Teorema.
LAP y LMB tienen el mismo poder expresivo.

Traducción de LAP a LMB

Teorema.
LAP y LMB tienen el mismo poder expresivo.

Demostración.
Mediante la aplicación sucesiva de los axiomas de reducción, para cada fórmula en LAP obtenemos una fórmua en LMB sin anuncios. Como ya demostramos que estas equivalencias son correctas, obtuvimos una fórmula en LMB que es equivalente a la original en LAP.

Y... ¿qué ganamos?

Y... ¿qué ganamos?

La respuesta en términos de expresividad es un poco sorprendente: LAP no agrega poder expresivo.

Mediante axiomas de reducción podemos traducir fórmulas con anuncios públicos en el lenguaje epistémico básico:

1. $[!\psi]p \leftrightarrow (\psi \rightarrow p)$
2. $[!\psi]\neg\varphi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \neg[!\psi]\varphi)$
3. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$
4. $[!\psi]\Diamond\varphi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \Diamond[!\psi]\varphi)$
5. $[!\psi][!\chi]\varphi \leftrightarrow [!\psi \wedge [!\psi]\chi]\varphi$

Y... ¿qué ganamos?

La respuesta en términos de expresividad es un poco sorprendente:
LAP no agrega poder expresivo.

Mediante axiomas de reducción podemos traducir fórmulas con anuncios públicos en el lenguaje epistémico básico:

1. $[!\psi]p \leftrightarrow (\psi \rightarrow p)$
2. $[!\psi]\neg\varphi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \neg[!\psi]\varphi)$
3. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$
4. $[!\psi]\Diamond\varphi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \Diamond[!\psi]\varphi)$
5. $[!\psi][!\chi]\varphi \leftrightarrow [!\psi \wedge [!\psi]\chi]\varphi$

Pero la fórmula puede ser exponencialmente más larga!

Succinctness

La traducción no es gratis, la fórmula obtenida puede ser exponencialmente más larga.

Analicemos el siguiente axioma:

$$[!\psi][!\chi]\varphi \leftrightarrow [!\psi \wedge [!\psi]\chi]\varphi$$

Succinctness

La traducción no es gratis, la fórmula obtenida puede ser exponencialmente más larga.

Analicemos el siguiente axioma:

$$[!\psi][!\chi]\varphi \leftrightarrow [!\psi \wedge [!\psi]\chi]\varphi$$

La aplicación recursiva de la traducción sobre ψ produce la explosión.

Succinctness

La traducción no es gratis, la fórmula obtenida puede ser exponencialmente más larga.

Analicemos el siguiente axioma:

$$[!\psi][!\chi]\varphi \leftrightarrow [!\psi \wedge [!\psi]\chi]\varphi$$

La aplicación recursiva de la traducción sobre ψ produce la explosión.

Observación:
Esto no quiere decir que no exista una traducción mejor (de hecho, para el caso de LAP y LMB, la hay!(Lutz 2006)).

Fenómeno de Moore

- $\mathcal{M}_{|\psi}$ contiene solamente estados en $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.

Fenómeno de Moore

- $\mathcal{M}_{|\psi}$ contiene solamente estados en $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.
- Entonces, $\models [!\psi]\Box\psi$, para toda ψ?

Fenómeno de Moore

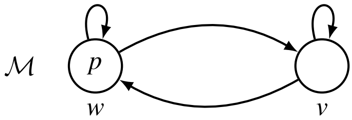
- $\mathcal{M}_{|\psi}$ contiene solamente estados en $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.
- Entonces, $\models [!\psi]\Box\psi$, para toda ψ?
- Cómo lo demostramos? Por inducción (estructural) en ψ.

Fenómeno de Moore

- $\mathcal{M}_{|\psi}$ contiene solamente estados en $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.
- Entonces, $\models [!\psi]\Box\psi$, para toda ψ?
- Cómo lo demostramos? Por inducción (estructural) en ψ.
- Una pregunta más general: $\models [!\varphi]\varphi$?

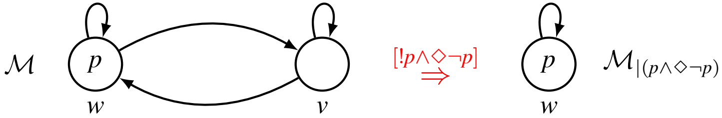
Fenómeno de Moore

- $\mathcal{M}_{|\psi}$ contiene solamente estados en $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.
- Entonces, $\models [!\psi]\Box\psi$, para toda ψ?
- Cómo lo demostramos? Por inducción (estructural) en ψ.
- Una pregunta más general: $\models [!\varphi]\varphi$?
- Anunciemos $p \land \Diamond\neg p$ en $\mathcal{M}$:



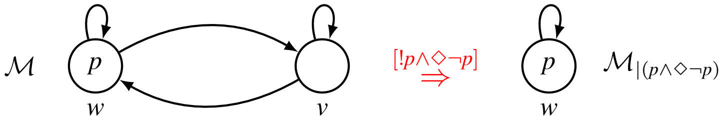
Fenómeno de Moore

- $\mathcal{M}_{|\psi}$ contiene solamente estados en $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.
- Entonces, $\models [!\psi]\Box\psi$, para toda ψ?
- Cómo lo demostramos? Por inducción (estructural) en ψ.
- Una pregunta más general: $\models [!\varphi]\varphi$?
- Anunciemos $p \wedge \Diamond\neg p$ en $\mathcal{M}$:



Fenómeno de Moore

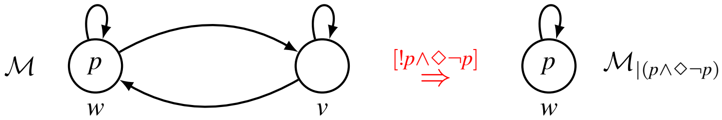
- $\mathcal{M}_{|\psi}$ contiene solamente estados en $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.
- Entonces, $\models [!\psi]\Box\psi$, para toda ψ?
- Cómo lo demostramos? Por inducción (estructural) en ψ.
- Una pregunta más general: $\models [!\varphi]\varphi$?
- Anunciemos $p \wedge \Diamond\neg p$ en $\mathcal{M}$:



- Tenemos que $\mathcal{M}, w \models p \wedge \Diamond\neg p$ pero $\mathcal{M}, w \not\models [!p \wedge \Diamond\neg p]p \wedge \Diamond\neg p$.

Fenómeno de Moore

- $\mathcal{M}_{|\psi}$ contiene solamente estados en $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.
- Entonces, $\models [!\psi]\Box\psi$, para toda ψ?
- Cómo lo demostramos? Por inducción (estructural) en ψ.
- Una pregunta más general: $\models [!\varphi]\varphi$?
- Anunciemos $p \wedge \Diamond\neg p$ en $\mathcal{M}$:



- Tenemos que $\mathcal{M}, w \models p \wedge \Diamond\neg p$ pero $\mathcal{M}, w \not\models [!p \wedge \Diamond\neg p]p \wedge \Diamond\neg p$.
- Fenómeno de Moore: luego de anunciar un hecho, se vuelve falso.

Sustitución uniforme

- Si ψ es proposicional, $[!\psi]\psi$ es válida (por qué?).

Sustitución uniforme

- Si ψ es proposicional, $[!\psi]\psi$ es válida (por qué?).
- Por lo tanto, $[!p]p$ es válida, pero $[!\varphi]\varphi$, para φ arbitraria.

Sustitución uniforme

- Si ψ es proposicional, $[!\psi]\psi$ es válida (por qué?).
- Por lo tanto, $[!p]p$ es válida, pero $[!\varphi]\varphi$, para φ arbitraria.
- Es decir, no podemos reemplazar un símbolo proposicional por fórmulas arbitrarias y preservar validez.

Sustitución uniforme

- Si ψ es proposicional, $[!\psi]\psi$ es válida (por qué?).
- Por lo tanto, $[!p]p$ es válida, pero $[!\varphi]\varphi$, para φ arbitraria.
- Es decir, no podemos reemplazar un símbolo proposicional por fórmulas arbitrarias y preservar validez.
- Luego, la sustitución uniforme falla.

Completitud via axiomas de reducción

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, y sea Δ una lógica modal construida sobre el lenguaje $\mathcal{L}$.

Completitud via axiomas de reducción

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, y sea Δ una lógica modal construida sobre el lenguaje $\mathcal{L}$.
2. Sea $\mathcal{L}'$ una extensión de $\mathcal{L}$ con un nuevo operador (Ejemplo: LAP extiende LMB con el operador $[!\psi]$).

Completitud via axiomas de reducción

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, y sea Δ una lógica modal construida sobre el lenguaje $\mathcal{L}$.
2. Sea $\mathcal{L}'$ una extensión de $\mathcal{L}$ con un nuevo operador (Ejemplo: LAP extiende LMB con el operador $[!\psi]$).
3. Supongamos que tenemos un conjunto de equivalencias en $\mathcal{L}'$ (es decir, fórmulas de la forma $\psi \leftrightarrow \psi'$) tal que dichas equivalencias permiten transformar cualquier fórmula de $\mathcal{L}'$ en una fórmula de $\mathcal{L}$, que sea equivalente. Llamamos a estas fórmulas axiomas de reducción.

Completitud via axiomas de reducción

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, y sea Δ una lógica modal construida sobre el lenguaje $\mathcal{L}$.
2. Sea $\mathcal{L}'$ una extensión de $\mathcal{L}$ con un nuevo operador (Ejemplo: LAP extiende LMB con el operador $[!\psi]$).
3. Supongamos que tenemos un conjunto de equivalencias en $\mathcal{L}'$ (es decir, fórmulas de la forma $\psi \leftrightarrow \psi'$) tal que dichas equivalencias permiten transformar cualquier fórmula de $\mathcal{L}'$ en una fórmula de $\mathcal{L}$, que sea equivalente. Llamamos a estas fórmulas axiomas de reducción.
4. En particular, me permite transformar aquellas que son tautologías.

Completitud via axiomas de reducción

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, y sea Δ una lógica modal construida sobre el lenguaje $\mathcal{L}$.
2. Sea $\mathcal{L}'$ una extensión de $\mathcal{L}$ con un nuevo operador (Ejemplo: LAP extiende LMB con el operador $[!\psi]$).
3. Supongamos que tenemos un conjunto de equivalencias en $\mathcal{L}'$ (es decir, fórmulas de la forma $\psi \leftrightarrow \psi'$) tal que dichas equivalencias permiten transformar cualquier fórmula de $\mathcal{L}'$ en una fórmula de $\mathcal{L}$, que sea equivalente. Llamamos a estas fórmulas axiomas de reducción.
4. En particular, me permite transformar aquellas que son tautologías.
5. Entonces, una tautología de $\mathcal{L}'$ es tautología de $\mathcal{L}$; por completitud de Δ, también es un teorema de Δ.

Completitud via axiomas de reducción

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, y sea Δ una lógica modal construida sobre el lenguaje $\mathcal{L}$.
2. Sea $\mathcal{L}'$ una extensión de $\mathcal{L}$ con un nuevo operador (Ejemplo: LAP extiende LMB con el operador $[!\psi]$).
3. Supongamos que tenemos un conjunto de equivalencias en $\mathcal{L}'$ (es decir, fórmulas de la forma $\psi \leftrightarrow \psi'$) tal que dichas equivalencias permiten transformar cualquier fórmula de $\mathcal{L}'$ en una fórmula de $\mathcal{L}$, que sea equivalente. Llamamos a estas fórmulas axiomas de reducción.
4. En particular, me permite transformar aquellas que son tautologías.
5. Entonces, una tautología de $\mathcal{L}'$ es tautología de $\mathcal{L}$; por completitud de Δ, también es un teorema de Δ.
6. Por lo tanto, Δ + los axiomas de reducción forman un sistema completo para $\mathcal{L}'$.

Completitud para LAP

Teorema.

K + los axiomas de reducción forman un sistema correcto y fuertemente completo para LAP con respecto a la clase de todos los modelos.

Demostración.

Sea φ un teorema de LAP, obtengo φ' en LMB usando los axiomas de reducción. Como **K** es completa para LMB sobre la clase de todos los modelos, φ' es demostrable en esta clase.

Completitud para LAP

Teorema.
K + los axiomas de reducción forman un sistema correcto y fuertemente completo para LAP con respecto a la clase de todos los modelos.

Demostración.
Sea φ un teorema de LAP, obtengo φ' en LMB usando los axiomas de reducción. Como **K** es completa para LMB sobre la clase de todos los modelos, φ' es demostrable en esta clase.

Resta demostrar completitud para K (nos quedó pendiente de la Clase #1).

Lógicas Estáticas vs. Lógicas Dinámicas

- Nos movimos a trabajar con operadores dinámicos, pero usando herramientas clásicas de la lógica modal.

Lógicas Estáticas vs. Lógicas Dinámicas

- Nos movimos a trabajar con operadores dinámicos, pero usando herramientas clásicas de la lógica modal.
- Pero dijimos que una lógica dinámica (LAP), es igualmente expresiva que la lógica estática **LE**.

Lógicas Estáticas vs. Lógicas Dinámicas

- Nos movimos a trabajar con operadores dinámicos, pero usando herramientas clásicas de la lógica modal.
- Pero dijimos que una lógica dinámica (LAP), es igualmente expresiva que la lógica estática **LE**. (Bisimulaciones? **(Ejercicio).**)

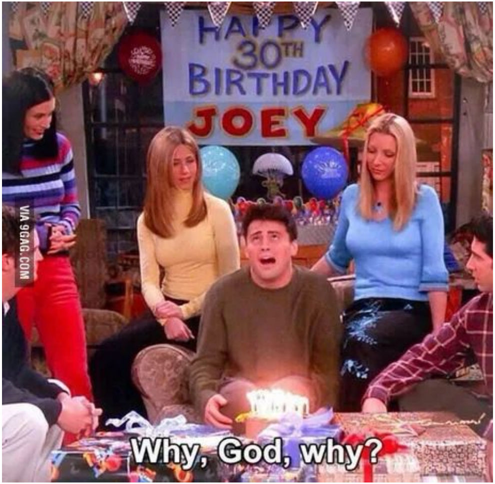
Lógicas Estáticas vs. Lógicas Dinámicas

- Nos movimos a trabajar con operadores dinámicos, pero usando herramientas clásicas de la lógica modal.
- Pero dijimos que una lógica dinámica (LAP), es igualmente expresiva que la lógica estática **LE**. (Bisimulaciones? **(Ejercicio).**)
- ¿Decepcionados? No, porque a veces podemos representar estáticamente el operador dinámico, pero con algunas consecuencias.

Lógicas Estáticas vs. Lógicas Dinámicas

- Nos movimos a trabajar con operadores dinámicos, pero usando herramientas clásicas de la lógica modal.
- Pero dijimos que una lógica dinámica (LAP), es igualmente expresiva que la lógica estática **LE**. (Bisimulaciones? **(Ejercicio).**)
- ¿Decepcionados? No, porque a veces podemos representar estáticamente el operador dinámico, pero con algunas consecuencias.
- Mencionamos por ejemplo, que potencialmente tenemos una explosión exponencial en el tamaño de las fórmulas. A veces puede ser peor.

Es hora de arremangarnos y demostrar completitud...



Correctitud y Completitud

La noción de completitud se puede reformular en término de *consistencia*.

Correctitud y Completitud

La noción de completitud se puede reformular en término de *consistencia*.

- Si $\Gamma \models_S \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$

Correctitud y Completitud

La noción de completitud se puede reformular en término de *consistencia*.

- Si $\Gamma \models_S \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_\Delta \varphi$ entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$

Correctitud y Completitud

La noción de completitud se puede reformular en término de *consistencia*.

- Si $\Gamma \models_S \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_\Delta \varphi$ entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_\Delta \neg\varphi \to \bot$ entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$

Correctitud y Completitud

La noción de completitud se puede reformular en término de *consistencia*.

- Si $\Gamma \models_S \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_\Delta \varphi$ entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_\Delta \neg\varphi \to \perp$ entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash_\Delta \perp$ entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$

Correctitud y Completitud

La noción de completitud se puede reformular en término de *consistencia*.

- Si $\Gamma \models_S \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_\Delta \varphi$ entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_\Delta \neg\varphi \to \perp$ entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash_\Delta \perp$ entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es Δ-consistente entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$

Correctitud y Completitud

La noción de completitud se puede reformular en término de *consistencia*.

- Si $\Gamma \models_S \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_\Delta \varphi$ entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_\Delta \neg\varphi \to \bot$ entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash_\Delta \bot$ entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es Δ-consistente entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es Δ-consistente entonces $\exists \mathcal{M} \in S$ t.q. $\mathcal{M}, w \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$

Correctitud y Completitud

La noción de completitud se puede reformular en término de *consistencia*.

- Si $\Gamma \models_S \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_\Delta \varphi$ entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_\Delta \neg\varphi \rightarrow \bot$ entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash_\Delta \bot$ entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es Δ-consistente entonces $\Gamma \not\models_S \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es Δ-consistente entonces $\exists \mathcal{M} \in S$ t.q. $\mathcal{M}, w \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$

Es decir:

- Una lógica modal normal Δ es *fuertemente completa* con respecto a una clase S sii cada conjunto Δ-consistente de fórmulas es satisfacible en algún modelo $\mathcal{M} \in S$.

Modelo canónico

- Generalmente, demostrar correctitud con respecto a una clase S es fácil.
  - Hay que ver que los axiomas son universalmente válidos en S
  - Hay que ver que las reglas de inferencia preservan verdad en S

Modelo canónico

- Generalmente, demostrar correctitud con respecto a una clase S es fácil.
  - Hay que ver que los axiomas son universalmente válidos en S
  - Hay que ver que las reglas de inferencia preservan verdad en S
- Nos vamos a concentrar en demostrar completitud, y para eso tenemos que ver cómo hacer para encontrar un modelo que satisfaga a cada conjunto consistente de fórmulas.

Modelo canónico

- Generalmente, demostrar correctitud con respecto a una clase S es fácil.
  - Hay que ver que los axiomas son universalmente válidos en S
  - Hay que ver que las reglas de inferencia preservan verdad en S
- Nos vamos a concentrar en demostrar completitud, y para eso tenemos que ver cómo hacer para encontrar un modelo que satisfaga a cada conjunto consistente de fórmulas.
- Y las "piezas" que vamos a usar van a ser *conjuntos maximales consistentes*.

Modelo canónico

- Generalmente, demostrar correctitud con respecto a una clase S es fácil.
  - Hay que ver que los axiomas son universalmente válidos en S
  - Hay que ver que las reglas de inferencia preservan verdad en S
- Nos vamos a concentrar en demostrar completitud, y para eso tenemos que ver cómo hacer para encontrar un modelo que satisfaga a cada conjunto consistente de fórmulas.
- Y las “piezas” que vamos a usar van a ser *conjuntos maximales consistentes*.

Un conjunto de fórmulas Γ es maximal Δ-consistente si Γ es Δ-consistente y cualquier conjunto de fórmulas que contiene propiamente a Γ es Δ-inconsistente.

- Si Γ es un conjunto maximal Δ-consistente decimos que es un Δ-MCS.

Modelo canónico

La idea es trabajar con colecciones de MCSs coherentemente relacionados para construir el modelo buscado. El objetivo es probar el *truth lemma*, que nos dice que 'φ pertenece a un MCS' es equivalente a 'φ es verdadera en un modelo'.

- Los mundos del modelo canónico van a ser todos los MCSs de la lógica en la que estemos trabajando.

Modelo canónico

La idea es trabajar con colecciones de MCSs coherentemente relacionados para construir el modelo buscado. El objetivo es probar el *truth lemma*, que nos dice que 'φ pertenece a un MCS' es equivalente a 'φ es verdadera en un modelo'.

- Los mundos del modelo canónico van a ser todos los MCSs de la lógica en la que estemos trabajando.
- Vamos a ver qué significa que la información de los MCSs esté 'coherentemente relacionada', y vamos a usar esa noción para definir la relación de accesibilidad.

Propiedades de MCSs

Para llevar a cabo eso, veamos algunas propiedades que tienen los MCSs. Si Δ es una lógica y Γ es un Δ-MCS entonces:

- $\Delta \subseteq \Gamma$.

Propiedades de MCSs

Para llevar a cabo eso, veamos algunas propiedades que tienen los MCSs. Si Δ es una lógica y Γ es un Δ-MCS entonces:

- $\Delta \subseteq \Gamma$.
- Γ está cerrado bajo modus ponens.

Propiedades de MCSs

Para llevar a cabo eso, veamos algunas propiedades que tienen los MCSs. Si Δ es una lógica y Γ es un Δ-MCS entonces:

- $\Delta \subseteq \Gamma$.
- Γ está cerrado bajo modus ponens.
- Para toda fórmula φ, $\varphi \in \Gamma$ ó $\neg\varphi \in \Gamma$.

Propiedades de MCSs

Para llevar a cabo eso, veamos algunas propiedades que tienen los MCSs. Si Δ es una lógica y Γ es un Δ-MCS entonces:

- $\Delta \subseteq \Gamma$.
- Γ está cerrado bajo modus ponens.
- Para toda fórmula φ, $\varphi \in \Gamma$ ó $\neg\varphi \in \Gamma$.
- Para toda fórmula φ, ψ, $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ sii $\varphi \in \Gamma$ ó $\psi \in \Gamma$.

Lema de Lindenbaum

Como los MCSs van a ser las piezas que necesitamos para construir el modelo canónico, tenemos que asegurarnos de tener suficientes. Cualquier conjunto consistente de fórmulas puede ser extendido a uno maximal consistente.

Lema de Lindenbaum

Como los MCSs van a ser las piezas que necesitamos para construir el modelo canónico, tenemos que asegurarnos de tener suficientes. Cualquier conjunto consistente de fórmulas puede ser extendido a uno maximal consistente.

- Si Σ es un conjunto Δ-consistente de fórmulas, entonces existe un Δ-MCS Σ^+ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$.

Lema de Lindenbaum

Como los MCSs van a ser las piezas que necesitamos para construir el modelo canónico, tenemos que asegurarnos de tener suficientes. Cualquier conjunto consistente de fórmulas puede ser extendido a uno maximal consistente.

- Si Σ es un conjunto Δ-consistente de fórmulas, entonces existe un Δ-MCS Σ^+ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$.

Demostración:

I) Enumeramos las fórmulas de nuestro lenguaje $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$.

Lema de Lindenbaum

Como los MCSs van a ser las piezas que necesitamos para construir el modelo canónico, tenemos que asegurarnos de tener suficientes. Cualquier conjunto consistente de fórmulas puede ser extendido a uno maximal consistente.

- Si Σ es un conjunto Δ-consistente de fórmulas, entonces existe un Δ-MCS Σ^+ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$.

Demostración:

i) Enumeramos las fórmulas de nuestro lenguaje $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$.

ii) Definimos la secuencia de conjuntos:

$$\begin{array}{lcl} \Sigma_0 & = & \Sigma \\ \Sigma_{n+1} & = & \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{si el conjunto es } \Delta\text{-consistente} \\ \Sigma_n & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \Sigma^+ & = & \bigcup_{n \geq 0} \Sigma_n \end{array}$$

Construcción del modelo canónico

El modelo canónico M^Δ para una lógica modal normal Δ (en el lenguaje básico) es $\langle W^\Delta, R^\Delta, v^\Delta \rangle$ donde:

- W^Δ es el conjunto de todos los Δ-MCSs

Construcción del modelo canónico

El modelo canónico M^{Δ} para una lógica modal normal Δ (en el lenguaje básico) es $\langle W^{\Delta}, R^{\Delta}, v^{\Delta} \rangle$ donde:

- W^{Δ} es el conjunto de todos los Δ-MCSs
- R^{Δ} es la relación binaria sobre W^{Δ} definida por $R^{\Delta}wu$ si para toda fórmula ψ, $\psi \in u$ implica $\Diamond\psi \in w$.

Construcción del modelo canónico

El modelo canónico M^{Δ} para una lógica modal normal Δ (en el lenguaje básico) es $\langle W^{\Delta}, R^{\Delta}, v^{\Delta} \rangle$ donde:

- W^{Δ} es el conjunto de todos los Δ-MCSs
- R^{Δ} es la relación binaria sobre W^{Δ} definida por $R^{\Delta}wu$ si para toda fórmula ψ, $\psi \in u$ implica $\Diamond\psi \in w$.
- V^{Δ} es la valuación definida como $V^{\Delta}(p) = \{w \in W^{\Delta} \mid p \in w\}$

Algunos comentarios sobre el modelo canónico

- La valuación canónica iguala la verdad de un símbolo proposicional en w con su pertenencia a w. Nuestro objetivo es probar el *truth lemma* que lleva “verdad = pertenencia” al nivel de fórmulas.

Algunos comentarios sobre el modelo canónico

- La valuación canónica iguala la verdad de un símbolo proposicional en w con su pertenencia a w. Nuestro objetivo es probar el *truth lemma* que lleva "verdad = pertenencia" al nivel de fórmulas.
- Los estados de M^{Δ} son *todos* los MCSs Δ-consistentes. La consecuencia de esto es que, dado el lema de Lindenbaum, *cualquier* conjunto Δ-consistente es un subconjunto de algún punto en M^{Δ}. Y por el truth lemma que vamos a probar después, cualquier conjunto Δ-consistente es verdadero en algún punto del modelo.

Algunos comentarios sobre el modelo canónico

- Esto significa que este *único* modelo M^{Δ} es un 'modelo universal' para la lógica Δ.

Algunos comentarios sobre el modelo canónico

- Esto significa que este *único* modelo M^{Δ} es un 'modelo universal' para la lógica Δ.
- Por último, la relación canónica de accesibilidad captura la idea que dos MCSs están 'coherentemente relacionados' en función de las fórmulas que valen en cada uno.

Completitud

Estamos en condiciones de probar el siguiente lema, que nos dice que hay 'suficientes' MCSs en nuestro modelo para lo que necesitamos:

Completitud

Estamos en condiciones de probar el siguiente lema, que nos dice que hay ‘suficientes’ MCSs en nuestro modelo para lo que necesitamos:

- **Existence lemma**: Para cualquier lógica modal normal Δ, y cualquier estado $w \in W^{\Delta}$, si $\Diamond\varphi \in w$ entonces existe un estado $v \in W^{\Delta}$ tal que $R^{\Delta}wv$ y $\varphi \in v$.

Demostración: Supongamos que $\Diamond\varphi \in w$. Vamos a construir v tal que $R^{\Delta}wv$ y $\varphi \in v$. Sea $v^{-} = \{\varphi\} \cup \{\psi \mid \Box\psi \in w\}$.

- v^{-} es consistente. Ejercicio! (y acá hay que hacer demostraciones sintácticas! :P)

Luego por Lindenbaum existe un Δ-MCS v que extiende a v^{-}. Por construcción, $\varphi \in v$, y para toda fórmula ψ, $\Box\psi \in w$ implica $\psi \in v$.

- Esto último implica que $R^{\Delta}wv$. Ejercicio!

Completitud

Ahora sí podemos llevar "verdad = pertenencia" al nivel de fórmulas arbitrarias.

- **Truth lemma**: Para cualquier lógica modal normal Δ y cualquier fórmula φ, $M^{\Delta}, w \models \varphi$ sii $\varphi \in w$.

Completitud

Ahora sí podemos llevar "verdad = pertenencia" al nivel de fórmulas arbitrarias.

- **Truth lemma**: Para cualquier lógica modal normal Δ y cualquier fórmula φ, $M^{\Delta}, w \models \varphi$ sii $\varphi \in w$.

La demostración sale fácil por inducción en φ. El único caso interesante es el modal, y eso está cubierto por el *existence lemma* (la dirección difícil).

Completitud

Ahora sí podemos llevar "verdad = pertenencia" al nivel de fórmulas arbitrarias.

- **Truth lemma**: Para cualquier lógica modal normal Δ y cualquier fórmula φ, $M^{\Delta}, w \models \varphi$ sii $\varphi \in w$.

La demostración sale fácil por inducción en φ. El único caso interesante es el modal, y eso está cubierto por el *existence lemma* (la dirección difícil).

Y finalmente:

- **Teorema del Modelo Canónico**: Cualquier lógica modal normal es fuertemente completa con respecto a su modelo canónico.

Completitud

Ahora sí podemos llevar "verdad = pertenencia" al nivel de fórmulas arbitrarias.

- **Truth lemma**: Para cualquier lógica modal normal Δ y cualquier fórmula φ, $M^{\Delta}, w \models \varphi$ sii $\varphi \in w$.

La demostración sale fácil por inducción en φ. El único caso interesante es el modal, y eso está cubierto por el *existence lemma* (la dirección difícil).
Y finalmente:

- **Teorema del Modelo Canónico**: Cualquier lógica modal normal es fuertemente completa con respecto a su modelo canónico.

Demostración: Supongamos que Σ es un conjunto Δ-consistente. Por el lema de Lindenbaum existe un Δ-MCS Σ^{+} que extiende a Σ. Por el *truth lemma*, $M^{\Delta}, \Sigma^{+} \models \Sigma$.

Completitud

Como corolario tenemos:

- La lógica modal normal **K** es fuertemente completa con respecto a la clase de todos los modelos.

Completitud

Como corolario tenemos:

- La lógica modal normal **K** es fuertemente completa con respecto a la clase de todos los modelos.

Por el teorema anterior, dado que **K** es una lógica modal normal, es fuertemente completa con respecto a su modelo M^K. Sólo queda chequear que M^K pertenece a la clase de todos los modelos, pero esto es trivial.

Completitud

- Se descubrió que algunos axiomas corresponden a propiedades de la relación de accesibilidad
  - $\Box p \rightarrow p \leftrightsquigarrow R$ es reflexiva
  - $\Box p \rightarrow \Box\Box p \leftrightsquigarrow R$ es transitiva
- ... y se probaron los primeros resultados de completitud.

Kripke, Saul.
A completeness theorem in modal logics.
The Journal of Symbolic Logic, 24, 1959.

Kripke, Saul.
Semantical analysis of modal logic I. Normal modal propositional calculi.
Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 9:67–96, 1963.

Más completitud

- La prueba de completitud de Kripke empleó una generalización del método de tableaux de Beth.
- La completitud se estableció mostrando cómo derivar una prueba de un intento fallido de encontrar un contraejemplo.

Más completitud

- La prueba de completitud de Kripke empleó una generalización del método de tableaux de Beth.
- La completitud se estableció mostrando cómo derivar una prueba de un intento fallido de encontrar un contraejemplo.
- Kaplan (1966) criticó la prueba de Kripke por carecer de rigor y por hacer un uso excesivo de argumentos "intuitivos" sobre la geometría de los tableaux.
- Sugirió un enfoque diferente, argumentando que era más elegante, basado en una adaptación de la prueba de completitud basada en modelos de Henkin para la lógica de primer orden. (Kaplan no fue el primero ni el único: Bayart 1959, Makinson 1966, Cresswell 1967)

Completitud de Henkin

- La prueba de completitud de Henkin para la lógica de primer orden utiliza (al menos) dos ideas importantes
  1. Un conjunto consistente de fórmulas se puede extender a un conjunto de fórmulas maximalmente consistente.
  2. Los cuantificadores existenciales pueden ser atestiguados (witnessed) utilizando constantes, que luego se pueden utilizar para formar el dominio del modelo.

Completitud de Henkin

- La prueba de completitud de Henkin para la lógica de primer orden utiliza (al menos) dos ideas importantes
  1. Un conjunto consistente de fórmulas se puede extender a un conjunto de fórmulas maximalmente consistente.
  2. Los cuantificadores existenciales pueden ser atestiguados (witnessed) utilizando constantes, que luego se pueden utilizar para formar el dominio del modelo.
- (1) es clave en las pruebas modernas de completitud para lógicas modales proposicionales, que construyen un modelo canónico (que satisface todas las fórmulas consistentes) que tiene como dominio el conjunto (no numerable) de todos los conjuntos de fórmulas maximalmente consistentes.

Completitud de Henkin

- La prueba de completitud de Henkin para la lógica de primer orden utiliza (al menos) dos ideas importantes
  1. Un conjunto consistente de fórmulas se puede extender a un conjunto de fórmulas maximalmente consistente.
  2. Los cuantificadores existenciales pueden ser atestiguados (witnessed) utilizando constantes, que luego se pueden utilizar para formar el dominio del modelo.
- (1) es clave en las pruebas modernas de completitud para lógicas modales proposicionales, que construyen un modelo canónico (que satisface todas las fórmulas consistentes) que tiene como dominio el conjunto (no numerable) de todos los conjuntos de fórmulas maximalmente consistentes.
- (2) parecía menos útil en un contexto proposicional.

Definiciones

- Un conjunto de fórmulas Δ es una lógica modal normal si
  - contiene todos los teoremas de la Lógica Proposicional
  - es cerrado bajo las reglas de Sustitución Uniforme, Modus Ponens y Necesitación ($\varphi \in \Delta \implies \Box\varphi \in \Delta$)
  - contiene el axioma K $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

Definiciones

- Un conjunto de fórmulas Δ es una lógica modal normal si
  - contiene todos los teoremas de la Lógica Proposicional
  - es cerrado bajo las reglas de Sustitución Uniforme, Modus Ponens y Necesitación ($\varphi \in \Delta \implies \Box\varphi \in \Delta$)
  - contiene el axioma K $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$
- **K** es la lógica modal más pequeña.
- Si $\varphi \in \Delta$, escribimos $\vdash_\Delta \varphi$, y llamamos φ un teorema de Δ.
- Consecuencia Sintáctica: Para $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de fórmulas,

  $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$ sii $\vdash_\Delta \bigwedge \Gamma^f \to \varphi$, para algún $\Gamma^f \subseteq \Gamma$.

Definiciones

- Un conjunto de fórmulas Δ es una lógica modal normal si
  - contiene todos los teoremas de la Lógica Proposicional
  - es cerrado bajo las reglas de Sustitución Uniforme, Modus Ponens y Necesitación ($\varphi \in \Delta \implies \Box\varphi \in \Delta$)
  - contiene el axioma K $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$
- **K** es la lógica modal más pequeña.
- Si $\varphi \in \Delta$, escribimos $\vdash_\Delta \varphi$, y llamamos φ un teorema de Δ.
- Consecuencia Sintáctica: Para $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de fórmulas,
  $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$ sii $\vdash_\Delta \bigwedge \Gamma^f \to \varphi$, para algún $\Gamma^f \subseteq \Gamma$.
  Γ es Δ-consistente sii $\Gamma \nvdash_\Delta \bot$.

Definiciones

- Un conjunto de fórmulas Δ es una lógica modal normal si
  - contiene todos los teoremas de la Lógica Proposicional
  - es cerrado bajo las reglas de Sustitución Uniforme, Modus Ponens y Necesitación ($\varphi \in \Delta \implies \Box\varphi \in \Delta$)
  - contiene el axioma K $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$
- **K** es la lógica modal más pequeña.
- Si $\varphi \in \Delta$, escribimos $\vdash_\Delta \varphi$, y llamamos φ un teorema de Δ.
- Consecuencia Sintáctica: Para $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de fórmulas,

  $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$ sii $\vdash_\Delta \bigwedge \Gamma^f \to \varphi$, para algún $\Gamma^f \subseteq \Gamma$.

  Γ es Δ-consistente sii $\Gamma \nvdash_\Delta \bot$.
- Consecuencia Semántica: Sea $\mathbb{C}$ una clase de modelos punteados y $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de fórmulas,

  $\Gamma \models_\mathbb{C} \varphi$ sii $\forall \mathcal{M}, w \in \mathbb{C}.(\mathcal{M}, w \models \Gamma \Rightarrow \mathcal{M}, w \models \varphi)$.

Teorema de completitud

Dada una lógica Δ y una clase de modelos $\mathbb{C}$ estamos interesados en demostrar que $\vdash_\Delta$ y $\models_\mathbb{C}$ coinciden. Es decir:

$$\Gamma \vdash_\Delta \varphi \text{ si y sólo si } \Gamma \models_\mathbb{C} \varphi.$$

- Coherencia (Soundness) ($\Gamma \vdash_\Delta \varphi$ implica $\Gamma \models_\mathbb{C} \varphi$) es fácil.

Teorema de completitud

Dada una lógica Δ y una clase de modelos $\mathbb{C}$ estamos interesados en demostrar que $\vdash_\Delta$ y $\models_\mathbb{C}$ coinciden. Es decir:

$$\Gamma \vdash_\Delta \varphi \text{ si y sólo si } \Gamma \models_\mathbb{C} \varphi.$$

- Coherencia (Soundness) ($\Gamma \vdash_\Delta \varphi$ implica $\Gamma \models_\mathbb{C} \varphi$) es fácil.
- Para la otra dirección (Completitud):

Teorema de completitud

Dada una lógica Δ y una clase de modelos $\mathbb{C}$ estamos interesados en demostrar que $\vdash_\Delta$ y $\models_\mathbb{C}$ coinciden. Es decir:

$$\Gamma \vdash_\Delta \varphi \text{ si y sólo si } \Gamma \models_\mathbb{C} \varphi.$$

- Coherencia (Soundness) ($\Gamma \vdash_\Delta \varphi$ implica $\Gamma \models_\mathbb{C} \varphi$) es fácil.
- Para la otra dirección (Completitud):
  $\Gamma \models_\mathbb{C} \varphi$ implica $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$ sii

Teorema de completitud

Dada una lógica Δ y una clase de modelos $\mathbb{C}$ estamos interesados en demostrar que $\vdash_\Delta$ y $\models_\mathbb{C}$ coinciden. Es decir:

$$\Gamma \vdash_\Delta \varphi \;\text{ si y sólo si }\; \Gamma \models_\mathbb{C} \varphi.$$

- Coherencia (Soundness) ($\Gamma \vdash_\Delta \varphi$ implica $\Gamma \models_\mathbb{C} \varphi$) es fácil.
- Para la otra dirección (Completitud):
  $\Gamma \models_\mathbb{C} \varphi$ implica $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$ sii
  $\Gamma \nvdash_\Delta \varphi$ implica $\Gamma \not\models_\mathbb{C} \varphi$ sii

Teorema de completitud

Dada una lógica Δ y una clase de modelos $\mathbb{C}$ estamos interesados en demostrar que $\vdash_\Delta$ y $\models_\mathbb{C}$ coinciden. Es decir:

$$\Gamma \vdash_\Delta \varphi \text{ si y sólo si } \Gamma \models_\mathbb{C} \varphi.$$

- Coherencia (Soundness) ($\Gamma \vdash_\Delta \varphi$ implica $\Gamma \models_\mathbb{C} \varphi$) es fácil.
- Para la otra dirección (Completitud):
  $\Gamma \models_\mathbb{C} \varphi$ implica $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$ sii
  $\Gamma \nvdash_\Delta \varphi$ implica $\Gamma \not\models_\mathbb{C} \varphi$ sii
  $\Gamma \nvdash_\Delta \neg\varphi \to \perp$ implica $\Gamma \not\models_\mathbb{C} \varphi$ sii

Teorema de completitud

Dada una lógica Δ y una clase de modelos $\mathbb{C}$ estamos interesados en demostrar que $\vdash_\Delta$ y $\models_\mathbb{C}$ coinciden. Es decir:

$$\Gamma \vdash_\Delta \varphi \text{ si y sólo si } \Gamma \models_\mathbb{C} \varphi.$$

- Coherencia (Soundness) ($\Gamma \vdash_\Delta \varphi$ implica $\Gamma \models_\mathbb{C} \varphi$) es fácil.
- Para la otra dirección (Completitud):
  $\Gamma \models_\mathbb{C} \varphi$ implica $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$ sii
  $\Gamma \nvdash_\Delta \varphi$ implica $\Gamma \not\models_\mathbb{C} \varphi$ sii
  $\Gamma \nvdash_\Delta \neg\varphi \to \bot$ implica $\Gamma \not\models_\mathbb{C} \varphi$ sii
  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash_\Delta \bot$ implica $\Gamma \not\models_\mathbb{C} \varphi$ sii

Teorema de completitud

Dada una lógica Δ y una clase de modelos $\mathbb{C}$ estamos interesados en demostrar que $\vdash_\Delta$ y $\models_\mathbb{C}$ coinciden. Es decir:

$$\Gamma \vdash_\Delta \varphi \ \text{ si y sólo si } \ \Gamma \models_\mathbb{C} \varphi.$$

- Coherencia (Soundness) ($\Gamma \vdash_\Delta \varphi$ implica $\Gamma \models_\mathbb{C} \varphi$) es fácil.
- Para la otra dirección (Completitud):
  $\Gamma \models_\mathbb{C} \varphi$ implica $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$ sii
  $\Gamma \nvdash_\Delta \varphi$ implica $\Gamma \not\models_\mathbb{C} \varphi$ sii
  $\Gamma \nvdash_\Delta \neg\varphi \to \bot$ implica $\Gamma \not\models_\mathbb{C} \varphi$ sii
  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash_\Delta \bot$ implica $\Gamma \not\models_\mathbb{C} \varphi$ sii
  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ Δ-consistente implica $\Gamma \not\models_\mathbb{C} \varphi$ sii

Teorema de completitud

Dada una lógica Δ y una clase de modelos $\mathbb{C}$ estamos interesados en demostrar que $\vdash_\Delta$ y $\models_\mathbb{C}$ coinciden. Es decir:

$$\Gamma \vdash_\Delta \varphi \text{ si y sólo si } \Gamma \models_\mathbb{C} \varphi.$$

- Coherencia (Soundness) ($\Gamma \vdash_\Delta \varphi$ implica $\Gamma \models_\mathbb{C} \varphi$) es fácil.
- Para la otra dirección (Completitud):
  $\Gamma \models_\mathbb{C} \varphi$ implica $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$ sii
  $\Gamma \nvdash_\Delta \varphi$ implica $\Gamma \not\models_\mathbb{C} \varphi$ sii
  $\Gamma \nvdash_\Delta \neg\varphi \to \bot$ implica $\Gamma \not\models_\mathbb{C} \varphi$ sii
  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash_\Delta \bot$ implica $\Gamma \not\models_\mathbb{C} \varphi$ sii
  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ Δ-consistente implica $\Gamma \not\models_\mathbb{C} \varphi$ sii
  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ Δ-consistente implica $\exists$ modelo de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ en $\mathbb{C}$.

Teorema de completitud

Dada una lógica Δ y una clase de modelos $\mathbb{C}$ estamos interesados en demostrar que $\vdash_\Delta$ y $\models_\mathbb{C}$ coinciden. Es decir:

$$\Gamma \vdash_\Delta \varphi \;\text{ si y sólo si }\; \Gamma \models_\mathbb{C} \varphi.$$

- Coherencia (Soundness) ($\Gamma \vdash_\Delta \varphi$ implica $\Gamma \models_\mathbb{C} \varphi$) es fácil.
- Para la otra dirección (Completitud):
  $\Gamma \models_\mathbb{C} \varphi$ implica $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$ sii
  $\Gamma \not\vdash_\Delta \varphi$ implica $\Gamma \not\models_\mathbb{C} \varphi$ sii
  $\Gamma \not\vdash_\Delta \neg\varphi \to \bot$ implica $\Gamma \not\models_\mathbb{C} \varphi$ sii
  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \not\vdash_\Delta \bot$ implica $\Gamma \not\models_\mathbb{C} \varphi$ sii
  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ Δ-consistente implica $\Gamma \not\models_\mathbb{C} \varphi$ sii
  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ Δ-consistente implica $\exists$ modelo de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ en $\mathbb{C}$.
- Para cada Δ, podemos construir un modelo (el modelo canónico) $\mathcal{M}^c$ que satisface todas las fórmulas Δ-consistentes.

Conjuntos máximalmente consistentes

Un conjunto Σ es un conjunto máximalmente consistente (maximally consistent set) en Δ (un Δ-MCS) si es Δ-consistente y maximal.

Conjuntos máximalmente consistentes

Un conjunto Σ es un conjunto máximalmente consistente (maximally consistent set) en Δ (un Δ-MCS) si es Δ-consistente y maximal.

El primer paso en la prueba de completitud es asegurarse de que hay suficientes Δ-MCS para construir el modelo canónico.

Conjuntos máximalmente consistentes

Un conjunto Σ es un conjunto máximalmente consistente (maximally consistent set) en Δ (un Δ-MCS) si es Δ-consistente y maximal.

El primer paso en la prueba de completitud es asegurarse de que hay suficientes Δ-MCS para construir el modelo canónico.

Lema (Lema de Lindenbaum)

Si Σ es Δ-consistente entonces hay un Δ-MCS Σ^+ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$.

Conjuntos máximalmente consistentes

Un conjunto Σ es un conjunto máximalmente consistente (maximally consistent set) en Δ (un Δ-MCS) si es Δ-consistente y maximal.

El primer paso en la prueba de completitud es asegurarse de que hay suficientes Δ-MCS para construir el modelo canónico.

Lema (Lema de Lindenbaum)

Si Σ es Δ-consistente entonces hay un Δ-MCS Σ^+ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$.

1. Enumeramos todas las fórmulas en el lenguaje (un conjunto numerable).

Conjuntos máximalmente consistentes

Un conjunto Σ es un conjunto máximalmente consistente (maximally consistent set) en Δ (un Δ-MCS) si es Δ-consistente y maximal.

El primer paso en la prueba de completitud es asegurarse de que hay suficientes Δ-MCS para construir el modelo canónico.

Lema (Lema de Lindenbaum)

Si Σ es Δ-consistente entonces hay un Δ-MCS Σ^+ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$.

1. Enumeramos todas las fórmulas en el lenguaje (un conjunto numerable).
2. Definimos $$\begin{array}{lcl} \Sigma^0 & = & \Sigma \\ \Sigma^{n+1} & = & \begin{cases} \Sigma^n \cup \{\varphi_n\} & \text{si es } \Delta\text{-consistente} \\ \Sigma^n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{si no es } \Delta\text{-consistente} \end{cases} \\ \Sigma^+ & = & \bigcup_{n\geq 0} \Sigma^n \end{array}$$

Conjuntos máximalmente consistentes

Un conjunto Σ es un conjunto máximalmente consistente (maximally consistent set) en Δ (un Δ-MCS) si es Δ-consistente y maximal.

El primer paso en la prueba de completitud es asegurarse de que hay suficientes Δ-MCS para construir el modelo canónico.

Lema (Lema de Lindenbaum)

Si Σ es Δ-consistente entonces hay un Δ-MCS Σ^+ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$.

1. Enumeramos todas las fórmulas en el lenguaje (un conjunto numerable).
2. Definimos
$$\begin{array}{rcl} \Sigma^0 & = & \Sigma \\ \Sigma^{n+1} & = & \begin{cases} \Sigma^n \cup \{\varphi_n\} & \text{si es } \Delta\text{-consistente} \\ \Sigma^n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{si no es } \Delta\text{-consistente} \end{cases} \\ \Sigma^+ & = & \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n \end{array}$$

Σ^+ es un Δ-MCS.

El modelo canónico

Definamos $\mathcal{M}^c = \langle W^c, R^c, V^c \rangle$ donde:

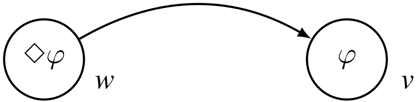
- W^c es el conjunto de todas las Δ-MCS.

El modelo canónico

Definamos $\mathcal{M}^c = \langle W^c, R^c, V^c \rangle$ donde:

- W^c es el conjunto de todas las Δ-MCS.
- R^c es la relación binaria definida como

$$R^c wv \text{ si y sólo si } \forall\varphi, (\varphi \in v \Rightarrow \Diamond\varphi \in w).$$

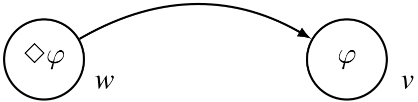


El modelo canónico

Definamos $\mathcal{M}^c = \langle W^c, R^c, V^c \rangle$ donde:

- W^c es el conjunto de todas las Δ-MCS.
- R^c es la relación binaria definida como

$$R^c wv \text{ si y sólo si } \forall\varphi, (\varphi \in v \Rightarrow \Diamond\varphi \in w).$$



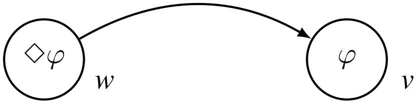
- $V^c(p) = \{w \in W^c \mid p \in w\}$.

El modelo canónico

Definamos $\mathcal{M}^c = \langle W^c, R^c, V^c \rangle$ donde:

- W^c es el conjunto de todas las Δ-MCS.
- R^c es la relación binaria definida como

$$R^c wv \text{ si y sólo si } \forall\varphi, (\varphi \in v \Rightarrow \Diamond\varphi \in w).$$



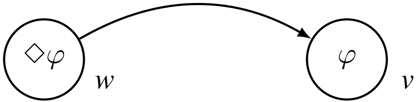
- $V^c(p) = \{w \in W^c \mid p \in w\}$.
- Notar que:

El modelo canónico

Definamos $\mathcal{M}^c = \langle W^c, R^c, V^c \rangle$ donde:

- W^c es el conjunto de todas las Δ-MCS.
- R^c es la relación binaria definida como

$$R^c wv \text{ si y sólo si } \forall \varphi, (\varphi \in v \Rightarrow \Diamond \varphi \in w).$$



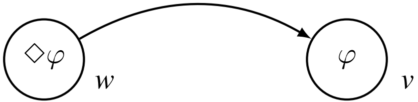
- $V^c(p) = \{w \in W^c \mid p \in w\}$.
- Notar que:
  - El dominio es el conjunto de todos los Δ-MCS (no contable).

El modelo canónico

Definamos $\mathcal{M}^c = \langle W^c, R^c, V^c \rangle$ donde:

- W^c es el conjunto de todas las Δ-MCS.
- R^c es la relación binaria definida como

$$R^c wv \text{ si y sólo si } \forall\varphi, (\varphi \in v \Rightarrow \Diamond\varphi \in w).$$



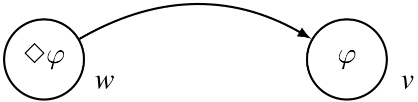
- $V^c(p) = \{w \in W^c \mid p \in w\}$.
- Notar que:
  - El dominio es el conjunto de todos los Δ-MCS (no contable).
    - Como corolario del Lema de Lindenbaum, todo conjunto consistente aparece como subconjunto de algún estado del modelo.

El modelo canónico

Definamos $\mathcal{M}^c = \langle W^c, R^c, V^c \rangle$ donde:

- W^c es el conjunto de todas las Δ-MCS.
- R^c es la relación binaria definida como

$$R^c wv \text{ si y sólo si } \forall\varphi, (\varphi \in v \Rightarrow \Diamond\varphi \in w).$$



- $V^c(p) = \{w \in W^c \mid p \in w\}$.
- Notar que:
  - El dominio es el conjunto de todos los Δ-MCS (no contable).
    - Como corolario del Lema de Lindenbaum, todo conjunto consistente aparece como subconjunto de algún estado del modelo.
  - La valuación canónica hace que verdad de símbolos proposicionales en w coincida con pertenencia en w.

¡Completo al fin!

Demostramos que "verdad = pertenencia" para fórmulas arbitrarias:

Lema de la Verdad: $\mathcal{M}^c, w \models \varphi$ si y sólo si $\varphi \in w$.

¡Completo al fin!

Demostramos que "verdad = pertenencia" para fórmulas arbitrarias:

Lema de la Verdad: $\mathcal{M}^c, w \models \varphi$ si y sólo si $\varphi \in w$.

Demostración. Por inducción estructural. Caso base por definición. Booleanos por inducción. El único caso interesante es $\Diamond$, para el cual demostramos:

Lema de la Existencia:
$\forall w \in W^c$ ($\Diamond\varphi \in w \Rightarrow v \in W^c$ tal que $R^c wv$ & $\varphi \in v$).

¡Completo al fin!

Demostramos que "verdad = pertenencia" para fórmulas arbitrarias:

Lema de la Verdad: $\mathcal{M}^c, w \models \varphi$ si y sólo si $\varphi \in w$.

Demostración. Por inducción estructural. Caso base por definición. Booleanos por inducción. El único caso interesante es $\Diamond$, para el cual demostramos:

Lema de la Existencia:
$\forall w \in W^c$ ($\Diamond\varphi \in w \Rightarrow v \in W^c$ tal que $R^c wv$ & $\varphi \in v$).

Teorema (Teorema del modelo canónico)

Toda lógica modal normal es completa resp. a su modelo canónico.

¡Completo al fin!

Demostramos que “verdad = pertenencia” para fórmulas arbitrarias:

Lema de la Verdad: $\mathcal{M}^c, w \models \varphi$ si y sólo si $\varphi \in w$.

Demostración. Por inducción estructural. Caso base por definición. Booleanos por inducción. El único caso interesante es $\Diamond$, para el cual demostramos:

Lema de la Existencia:
$\forall w \in W^c\ (\Diamond\varphi \in w \Rightarrow v \in W^c$ tal que $R^c wv\ \&\ \varphi \in v)$.

Teorema (Teorema del modelo canónico)

Toda lógica modal normal es completa resp. a su modelo canónico.

Para **K** queremos completitud respecto a la clase de todos los modelos, así que claramente $\mathcal{M}^c$ está en la clase.

Teorema

***K** es completa resp. a la clase de todos los modelos.*

Buenas y malas noticias

Toda lógica modal es completa con respecto a su modelo canónico.

No muy interesante. Queremos clases naturales de modelos. Por ejemplo, $\mathbb{C} = \{\langle W, R, V\rangle \mid R \text{ satisface } P\}$.

Buenas y malas noticias

Toda lógica modal es completa con respecto a su modelo canónico.

No muy interesante. Queremos clases naturales de modelos. Por ejemplo, $\mathbb{C} = \{\langle W, R, V\rangle \mid R \text{ satisface } P\}$.

- **K** fue fácil. Más generalmente, $\mathcal{M}^c$ no necesita pertenecer a la $\mathbb{C}$ prevista y se necesita más trabajo.
- De hecho, hay ejemplos simples de lógicas incompletas con respecto a clases de modelos "buenas". Por ejemplo, **K** extendida con $\Box(\Box p \leftrightarrow p) \rightarrow \Box p)$.

Buenas y malas noticias

Toda lógica modal es completa con respecto a su modelo canónico.

No muy interesante. Queremos clases naturales de modelos. Por ejemplo, $\mathbb{C} = \{\langle W, R, V\rangle \mid R \text{ satisface } P\}$.

- **K** fue fácil. Más generalmente, $\mathcal{M}^c$ no necesita pertenecer a la $\mathbb{C}$ prevista y se necesita más trabajo.
- De hecho, hay ejemplos simples de lógicas incompletas con respecto a clases de modelos "buenas". Por ejemplo, **K** extendida con $\Box(\Box p \leftrightarrow p) \rightarrow \Box p)$.
- Hay resultados generales de completitud (por ejemplo, el teorema de completitud de Sahlqvist), pero las demostraciones son complicadas.

Sahlqvist, Henrik.

Completeness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic,

Proc. Third Scand. Logic Symp. Uppsala (1973), pp. 110–143, 1975.

Lo que vimos hoy

- Nuestra primera lógica dinámica: Lógica de Anuncios Públicos (LAP).
- Algunas propiedades generales (fenómeno de Moore y falla de sustitución).
- Con: LAP no agrega poder expresivo a LMB.
- Pro: obtenemos completitud con axiomas de reducción + completitud del lenguaje base.
- Vimos la demostración estándar de completitud para lógicas modales.

Lo que viene

- Más lógicas dinámicas.
- Lógica modal de sabotaje.
- Expresividad (no hay axiomas de reducción).
- Otras propiedades.