Práctica 4

Lógicas Modales

1er cuatrimestre, 2017

Los ejercicios marcados con (E) son para entregar por todos. Los ejercicios marcados con (EP) son para entregar por los que estén tomando el curso como alumnos de posgrado.

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{M}$ un modelo rooted con raíz w, y sea $(\mathcal{M} \upharpoonright k)$ su restricción de altura k, donde k es cualquier número natural. Mostrar que ambos modelos satisfacen en w las mismas fórmulas modales de grado a lo sumo k.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{M}_1$ un modelo con forma de árbol con raíz w y altura k, y sea $\mathcal{M}_2$ el modelo finito que resulta de aplicar el procedimiento de selección visto en clase sobre $\mathcal{M}_1$. Mostrar que $\mathcal{M}_1, w \underline{\leftrightarrow}_k \mathcal{M}_2, w$.

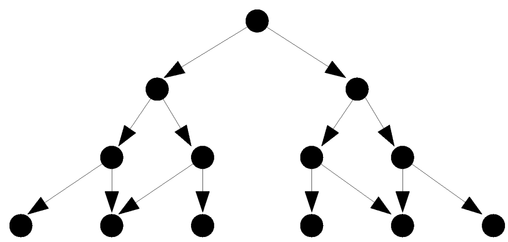
Ejercicio 3. **(E)** Mostrar que no toda filtración de un modelo transitivo es transitiva.

Ejercicio 4. Demostrar que las filtraciones

- $R^s|w||v|$ sii $\exists w' \in |w|$ y $\exists v' \in |v|$ tal que $Rw'v'$
- $R^l|w||v|$ sii para toda fórmula $\Diamond\varphi$ en Σ: $\mathcal{M}, v \models \varphi$ implica que $\mathcal{M}, w \models \Diamond\varphi$

son efectivamente filtraciones, que R^s es la mínima filtración y que R^l es la máxima.

Ejercicio 5. Sea Γ el conjunto de todas las sentencias (esto es, las fórmulas modales sin símbolos proposicionales). Considerar el siguiente modelo $\mathcal{A}$, con una sola relación de accesibilidad:



en donde todas las transiciones están dibujadas explícitamente (en particular, no hay nodos reflexivos).

a) Determinar la relación de equivalencia $\leftrightsquigarrow_\Gamma$ sobre $\mathcal{A}$.

b) Mostrar que la filtración mínima y máxima de $\mathcal{A}$ sobre Γ son idénticas, y que ambas tienen cuatro elementos.

Ejercicio 6. **(E)** Sean $\mathcal{N}^+$ y $\mathcal{N}^-$ dos modelos, con una única relación de accesibilidad sobre $\mathbb{N}$, con las siguientes transiciones:

$$a \xrightarrow{+} b \Leftrightarrow b = a + 1 \qquad a \xrightarrow{-} b \Leftrightarrow a = b + 1$$

Sea Γ el conjunto de todas las sentencias.

a) Mostrar que la filtración mínima de $\mathcal{N}^+$ sobre Γ colapsa totalmente el modelo a un punto reflexivo.

b) Mostrar que la filtración máxima de $\mathcal{N}^-$ sobre Γ es un isomorfismo con respecto al modelo original.

Ejercicio 7. (E) Sea $\mathcal{M}$ un modelo, Σ un conjunto cerrado por subfórmulas y W_Σ el conjunto de clases de equivalencia inducido en $\mathcal{M}$ por $\leftrightsquigarrow_\Sigma$. Sea R^t la relación binaria en W_Σ definida como:

$$R^t|w||v| \text{ sii para cada fórmula } \varphi, \text{ si } \Diamond\varphi \in \Sigma \text{ y } \mathcal{M}, v \models \varphi \vee \Diamond\varphi \text{ entonces } \mathcal{M}, w \models \Diamond\varphi$$

Mostrar que si R es transitiva, entonces (W_Σ, R^t, V^f) es una filtración, y R^t es transitiva.

Ejercicio 8. Mostrar que la filtración R^s preserva simetría.

Ejercicio 9. (EP) Considerar el lenguaje K_T que resulta de agregar el operador $\Diamond^{-1}$ al lenguaje modal básico. Dar una definición apropiada de filtración para K_T. Mostrar a continuación la existencia de filtraciones para K_T, dando las definiciones adecuadas de R^s y R^l (la filtración mínima y máxima respectivamente) y probando que cumplen con las condiciones impuestas por la definición de filtración para K_T.