Práctica 1

Lógicas Modales

1er cuatrimestre, 2017

Los ejercicios marcados con (E) son para entregar por todos. Los ejercicios marcados con (EP) son para entregar por los que estén tomando el curso como alumnos de posgrado.

1. Repaso

Ejercicio 1.1. Dada una fórmula φ en el lenguaje modal básico, vamos a definir al conjunto de sus proposiciones positivas, negativas y proposiciones en general ($Pos(\varphi)$, $Neg(\varphi)$ y $Prop(\varphi)$ respectivamente) de la siguiente manera:

φ	$Prop(\varphi)$	$Pos(\varphi)$	$Neg(\varphi)$
p	$\{p\}$	$\{p\}$	$\emptyset$
$\neg\varphi$	$Prop(\varphi)$	$Neg(\varphi)$	$Pos(\varphi)$
$\varphi \wedge \psi$	$Prop(\varphi) \cup Prop(\psi)$	$Pos(\varphi) \cup Pos(\psi)$	$Neg(\varphi) \cup Neg(\psi)$
$\langle R \rangle \varphi$	$Prop(\varphi)$	$Pos(\varphi)$	$Neg(\varphi)$

(a) Demostrar que para toda fórmula φ vale

$$Prop(\varphi) = Pos(\varphi) \cup Neg(\varphi)$$

y dar un ejemplo donde $Pos(\varphi) \cap Neg(\varphi) \neq 0$.

(b) Dar una definición recursiva de los siguientes conjuntos

$$Pos^{+}(\varphi) = \textsc{prop} - Neg(\varphi) \quad \text{y} \quad Neg^{+}(\varphi) = \textsc{prop} - Pos(\varphi)$$

donde $\textsc{prop}$ es el conjunto de todas las proposiciones.

Ejercicio 1.2. Dada una fórmula φ, decimos que $Sub(\varphi)$ es el conjunto de todas las subfórmulas de φ.

(a) Escribir el conjunto $Sub([R]([R]p \to p) \to [R]p)$.

(b) Demostrar que si $\psi \in Sub(\varphi)$ entonces $Sub(\psi) \subseteq Sub(\varphi)$ para fórmulas arbitrarias ψ y φ.

2. Lenguaje Modal

Ejercicio 2.1. Si $K\varphi$ significa "el agente sabe que φ" y $M\varphi$ significa "es consistente con lo que el agente sabe que φ", escribir fórmulas que representen las siguientes afirmaciones:

(a) Si φ es verdadera, entonces es consistente con lo que el agente sabe que sabe que φ.

(b) Si es consistente con lo que el agente sabe que φ, y es consistente con lo que el agente sabe que ψ, entonces es consistente con lo que el agente sabe que $\varphi \wedge \psi$.

(c) Si el agente sabe que φ, entonces es consistente con lo que el agente sabe que φ.

(d) Si es consistente con lo que el agente sabe que es consistente con lo que el agente sabe que φ, entonces es consistente con lo que el agente sabe que φ.

¿Cuáles de todos estos principios parecen plausibles en relación al conocimiento y a la consistencia?

Ejercicio 2.2. Supongamos que $\Diamond\varphi$ es interpretada como "φ está permitido". ¿Cómo debería interpretarse $\Box\varphi$? Listar algunas fórmulas que parezcan plausibles bajo esta interpretación. ¿Debería estar la fórmula de Löb $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ en la lista? ¿Por qué?

Ejercicio 2.3. (E) A la versión de PDL vista en clase le vamos a agregar la modalidad $\langle\varphi?\rangle$, en donde φ es cualquier fórmula. Si vemos a $\varphi?$ como un programa, este programa verifica si vale φ, y si ese es el caso, continua. En otro caso falla. Esto significa que la relación de accesibilidad asociada a $\langle\varphi?\rangle$ en un modelo $\mathcal{M}$ es el conjunto $\{(w,w) \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}$.

Por ejemplo, la fórmula $(p?;a) \cup (\neg p?;b)$ significa "`if` p `then` a `else` b". Escribir en PDL las fórmulas que representen:

(a) `while` φ `do` ψ
(b) `repeat` φ `until` ψ

Ejercicio 2.4. En el lenguaje temporal básico tenemos dos modalidades, $\langle F\rangle$ y $\langle P\rangle$. La interpretación de la fórmula $\langle F\rangle\varphi$ es "φ va a ser verdadera en algún instante en el futuro", y $\langle P\rangle\varphi$ significa "φ fue verdadera en algún instante en el pasado". Decidir si las siguientes fórmulas deberían ser verdaderas, para toda φ arbitraria [1]:

(a) $\langle F\rangle\varphi \to \langle F\rangle\langle F\rangle\varphi$
(b) $\langle F\rangle\varphi \to \langle P\rangle\langle F\rangle\varphi$
(c) $\neg\langle F\rangle\neg\varphi \to \langle P\rangle\langle F\rangle\varphi$
(d) $\langle P\rangle\varphi \to \langle F\rangle\neg\langle P\rangle\neg\varphi$

3. Satisfacibilidad - Modelos de Kripke

Ejercicio 3.1. Mostrar que al evaluar una fórmula φ en un modelo, la única información relevante en la valuación son las asignaciones a las proposiciones que ocurren en φ. Es decir, para dos modelos $\mathcal{U} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$ y $\mathcal{U}' = \{W, \{R_i\}, V'\}$ tal que $V(p) = V'(p)$ para las proposiciones p de φ, entonces para cualquier w, $\mathcal{U}, w \models \varphi$ sii $\mathcal{U}', w \models \varphi$.

Ejercicio 3.2. Sean $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \{S_1, S_2\}, V_{\mathcal{N}}\rangle$ y $\mathcal{B} = \langle \mathbb{B}, \{R_1, R_2\}, V_{\mathcal{B}}\rangle$ dos modelos para un lenguaje modal con dos diamantes $\Diamond_1$ y $\Diamond_2$. $\mathbb{N}$ es el conjunto de números naturales, y $\mathbb{B}$ es el conjunto de strings de 0s y 1s. Las relaciones están definidas como:

$$\begin{array}{rcl} mS_1n & sii & n = m+1 \\ mS_2n & sii & m > n \\ sR_1t & sii & t = s0 \text{ o } t = s1 \\ sR_2t & sii & t \text{ es un segmento inicial propio de } s \end{array}$$

¿Cuáles de las siguientes fórmulas son verdaderas en $\mathcal{N}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente, para toda valuación arbitraria?

(a) $(\Diamond_1 p \wedge \Diamond_1 q) \to \Diamond_1(p \wedge q)$
(b) $(\Diamond_2 p \wedge \Diamond_2 q) \to \Diamond_2(p \wedge q)$
(c) $(\Diamond_1 p \wedge \Diamond_1 q \wedge \Diamond_1 r) \to (\Diamond_1(p \wedge q) \vee \Diamond_1(p \wedge r) \vee \Diamond_1(q \wedge r))$
(d) $p \to \Diamond_1\Box_2 p$

[1] Históricamente, a estos operadores se los escribe directamente $F\varphi$ 'in the future φ' y $P\varphi$ 'in the past φ' y sus duales son, respectivamente, $G\varphi$ 'is going to be the case that φ' and $H\varphi$ 'it has been the case that φ'.

(e) $p \to \Diamond_2\Box_1 p$
(f) $p \to \Box_1\Diamond_2 p$
(g) $p \to \Box_2\Diamond_1 p$

Ejercicio 3.3. Considerar el lenguaje temporal básico (ver Ejercicio 2.4, incluyendo nota al pie de página) y los modelos $(\mathbb{Z}, <, V_1)$, $(\mathbb{Q}, <, V_2)$ y $(\mathbb{R}, <, V_3)$. Vamos a usar $E\varphi$ para abreviar la fórmula $P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi$ y $A\varphi$ para abreviar $H\varphi \wedge \varphi \wedge G\varphi$ ¿Cuáles de las siguientes fórmulas son verdaderas para cualquier valuación arbitraria en cada uno de los modelos?

(a) $GGp \to p$
(b) $(p \wedge Hp) \to FHp$
(c) $(Ep \wedge E\neg p \wedge A(p \to Hp) \wedge A(\neg p \to G\neg p)) \to E(Hp \wedge G\neg p)$

Ejercicio 3.4. (E) Demostrar que las siguientes fórmulas no son válidas, mostrando un modelo que las refute:

(a) $\Box\bot$
(b) $\Diamond p \to \Box p$
(c) $p \to \Box\Diamond p$
(d) $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$

Ejercicio 3.5. Demostrar que en todo modelo donde la relación de accesibilidad es transitiva, las siguientes fórmulas son verdaderas para cualquier valuación arbitraria:

(a) $\Box\Diamond\Diamond p \to \Box\Diamond p$
(b) $\Box\Diamond\Box\Diamond p \to \Box\Diamond p$

Ejercicio 3.6. (E) Demostrar en la lógica híbrida $\mathcal{HL}$ que la fórmula

$$\Diamond(i \wedge q) \wedge \Diamond(i \wedge p) \to \Diamond(p \wedge q)$$

es una tautología. Mostrar un contraejemplo cuando i es reemplazado por un símbolo de proposición arbitrario.

Ejercicio 3.7. (EP) Demostrar en la lógica híbrida $\mathcal{HL}(@)$ que el operador @ define una relación de congruencia. Esto significa que @ es una relación de equivalencia:

- $\models @_i i$
- Si $\models @_i j$ entonces $\models @_j i$
- Si $\models @_i j$ y $\models @_j k$ entonces $\models @_i k$

Y que además:

- si $\models @_i j$ entonces $\models @_i \varphi \leftrightarrow @_j \varphi$.

Ejercicio 3.8. Tenemos a nuestra disposición la lógica $\mathcal{HL}(A)$, que consiste en la lógica modal básica extendida con nominales $\textsc{nom} = \{i, j, k, \dots\}$ y la modalidad universal A. Dar una definición del operador @ escribiendo $@_i\varphi$ en función de los operadores de $\mathcal{HL}(A)$.