Reporte

Carlos Brito

Maestro: Arturo Espinosa

9 de marzo de 2017

1. Introducción

El propósito de este documento es reportar los métodos y resultados de la "Primer Evaluación" del módulo de transformaciones geométricas.

2. Momentos de Hu

Los momentos de Hu son invariantes a la traslación, escala y rotación.

Sea $\mathbf{f}_H \in \mathbb{R}^7$ tal que $\mathbf{f}_i = I_i$ donde I_i es el i-ésimo momento de Hu. Nosotros llamamos $\mathbf{f}_H$ la firma de Hu.

Nosotros denotamos la firma de Hu de un contorno C como

$$\mathbf{f}_H(C)$$

Es fácil ver que como cada momento de Hu es invariante a las transformaciones mencionadas, entonces $\mathbf{f}_H$ es invariante. Es decir:

$$\mathbf{f}_H(C) = \mathbf{f}_H(C_t) \tag{1}$$

Donde C_t es un contorno transformado.

3. Descriptores de Fourier

Dado un contorno $C(x, y)$, nosotros podemos representarlo en el plano complejo con un parámetro t. Entonces sea un contorno $C(x(t), y(t))$ parametrizado por t, su representación en el plano complejo es:

$$z[t] = x(t) + y(t)i \tag{2}$$

Además, dado el centroide $c = (\bar{x}, \bar{y})$ del contorno, entonces podemos eliminar el sesgo corriendo de la siguiente forma:

$$z[t] = [x(t) - \bar{x}] + [y(t) - \bar{y}]i \tag{3}$$

Sea $\mathbf{f}_F$ la firma de Fourier. Donde cada entrada $\mathbf{f}_F^i$ esta dada por:

$$\mathbf{f}_F^i = (\ |Z[i]|,\ \phi(Z[i])\ ) \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

Donde $|\bullet|$ es el módulo complejo, $\phi(z)$ indica el ángulo fase de un complejo z y finalmente $Z[m] = \mathcal{F}\{\ z[t]\ \}$.

Es decir, la firma de Fourier contiene las primeras n entradas (sin incluir el origen) de la transformada de Fourier del contorno.

Aquí, queremos explorar la relación entre las firmas de la imagen original y transformada.

4. Métricas

Para medir la *similitud* ρ entre 2 contornos con respectivas firmas $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ de Hu, nosotros definimos ρ como:

$$\rho = ||\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2||_2 \tag{4}$$

Donde $||\bullet||_2$ es la norma $L2$. Para explorar la relación entre las firmas de Fourier, nosotros graficaremos la magnitud y fase, en dos gráficas diferentes para cada par de imagen original y transformada.

5. Resultados

5.1. Hu

La siguiente tabla presenta la métrica ρ definida en la sección anterior. Aquí $\mathbf{f}_1$ es la firma de Hu del contorno original mientras que $\mathbf{f}_2$ es la firma de Hu del contorno transformado con los parámetros que se indican en las columnas. Aunque no se muestra en la tabla, el contorno se trasladó con $t = (t_x, t_y)$ donde $t_x, t_y \in [-10, 100]$ son números aleatorios.

Escala (s)	Rotación (θ)	ρ
0.5	0	0
0.5	$\pi/3$	0
0.5	$\pi/2$	0
0.5	π	0
0.5	$(225/180)\pi$	0
1	0	0
1	$\pi/3$	0
1	$\pi/2$	0
1	π	0
1	$(225/180)\pi$	0
1.5	0	0
1.5	$\pi/3$	0
1.5	$\pi/2$	0
1.5	π	0
1.5	$(225/180)\pi$	0
3	0	0
3	$\pi/3$	0
3	$\pi/2$	0
3	π	0
3	$(225/180)\pi$	0

Los resultados fueron probados sobre `Bailarina.png`. Es innecesario presentar la tabla para `Delfin.png` ya que es exactamente la misma.

5.2. Fourier

En esta sección se presentan los resultados de aplicar las transformaciones geométricas de escala, traslación y rotación. Se proponen ciertas relaciones entre cada transformación y los efectos en los descriptores de Fourier. Solo se trabajará con la imagen `Delfin.png` para minimizar el espacio usado.

En otras palabras, queremos ver que pasa al alterar los parámetros para las transformaciones s, $t = (t_x, t_y)$ y θ sobre la magnitud y fase.

Primero veamos como se ven las gráficas de la imagen original en las Figuras 1 y 2. Hay que notar que los parámetros originales son $s = 1$, $t = (0, 0)$ y $\theta = 0$.

Empezando a explorar, es sensato solo alterar un parámetro del contorno. Primeramente, alteremos la traslación corriendo 10 unidades hacia la izquierda y 100 hacia abajo. I.e. $t = (-10, 100)$. Las gráficas se ven en las Figuras 3 y 4. Es claro que las gráficas no varían al ser alterado el parámetro de traslación. Por esto, nosotros sugerimos que ambas la magnitud y la fase son invariantes a traslación.

Segundo, queremos observar que pasa cuando alteramos la escala del contorno. Si hacemos $s = 3$, las gráficas se ven de la siguiente forma en las Figuras 5 y 6.

De las figuras, vemos que la magnitud se correlaciona con la escala. Es decir, la magnitud depende linealmente de la escala. Como sea, la fase no cambia entonces esta es invariante a escala.

Terceramente, nosotros alteramos el parámetro $\theta = \pi$. En las Figuras 8 y 7.

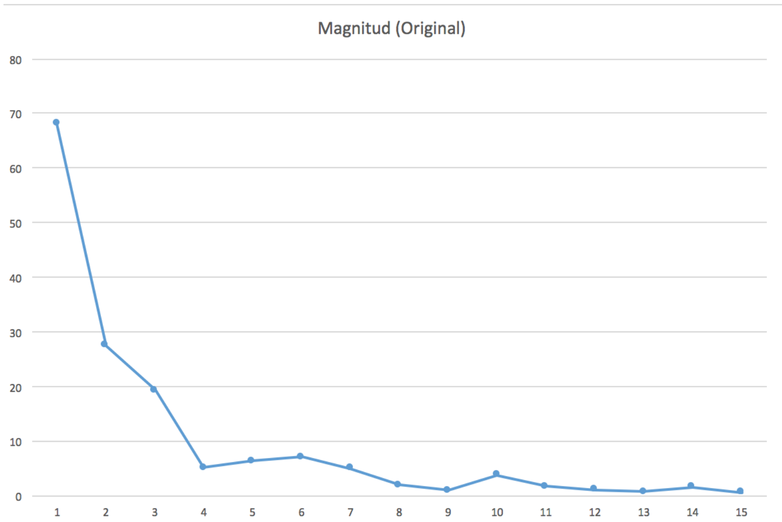

Figura 1: Gráfica de la magnitud original

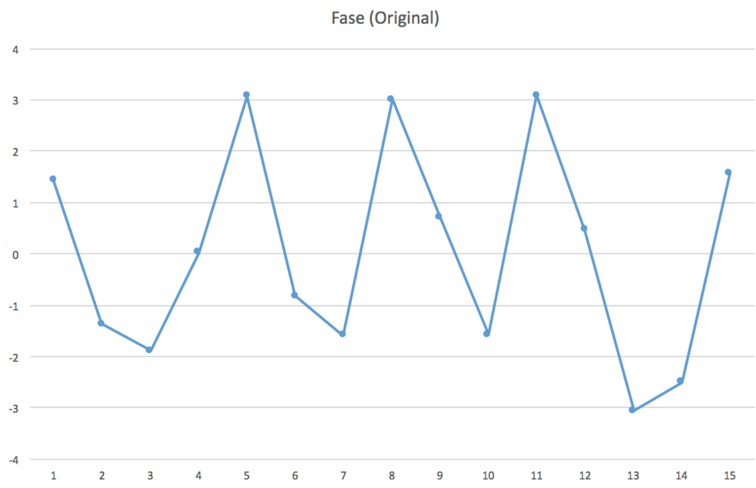

Figura 2: Gráfica de la fase original

Aquí vemos que la fase parace estar "reflejada" con respecto a la fase original. Igualmente, nosotros hipotetisamos que la fase depende linealmente de θ. En este caso parece que los valores de la fase estan multiplicados por -1.

Finalmente, nosotros damos los parámetros $s = 5$, $t = (10, 40)$ y $\theta = 1$. Nosotros esperamos que las gráfica de la magnitud transformada este escalada y que sus valores sean mayores. Además esperamos que la fase este también escalada.

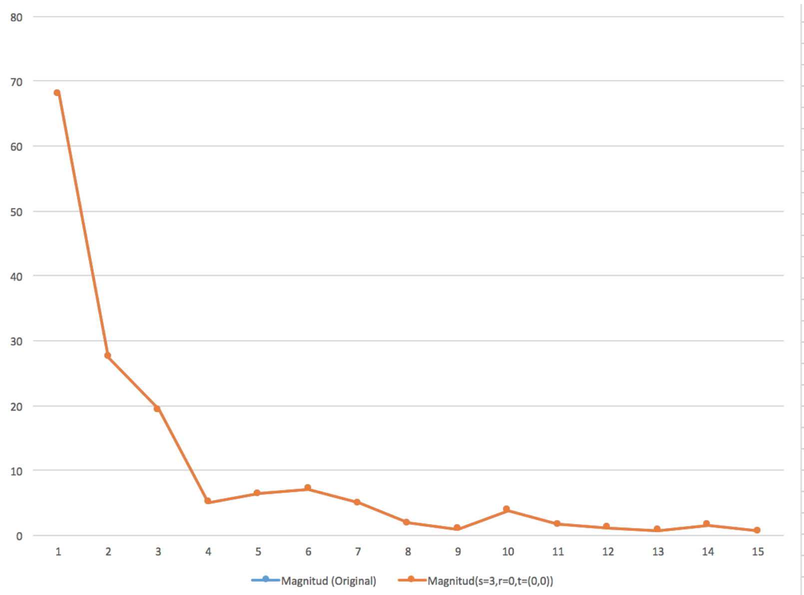

Figura 3: Gráfica de la magnitud para $s = 1$, $t = (-10, 100)$, $\theta = 0$

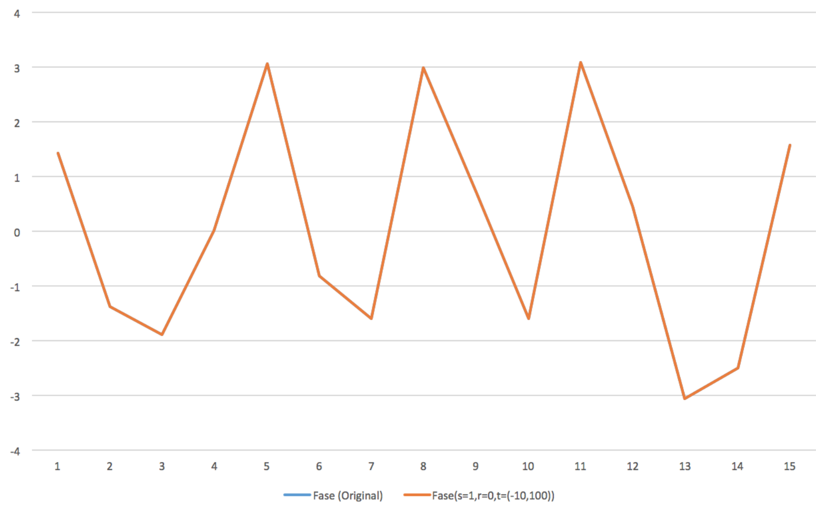

Figura 4: Gráfica de la fase para $s = 1$, $t = (-10, 100)$, $\theta = 0$

6. Conclusión

Para el caso de Hu, nosotros podemos concluir que la firma de Hu es invariante a cualquier tipo de transformación mencionada en este reporte. Al tener una distancia de 0 entre cualquier vector transformado y original, nosotros solo podemos concluir que sus entradas son invariantes.

En el caso de los descriptores de Fourier, nosotros vimos que la magnitud dependía de la escala y la fase de la rotación. Esto concuerda con la teoría. Si

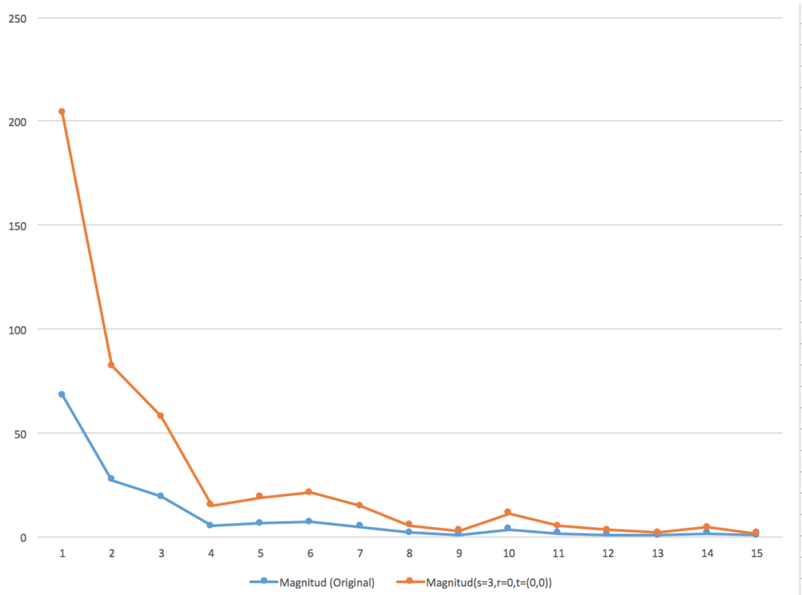

Figura 5: Gráfica de la magnitud para $s = 3$, $t = (0, 0)$, $\theta = 0$

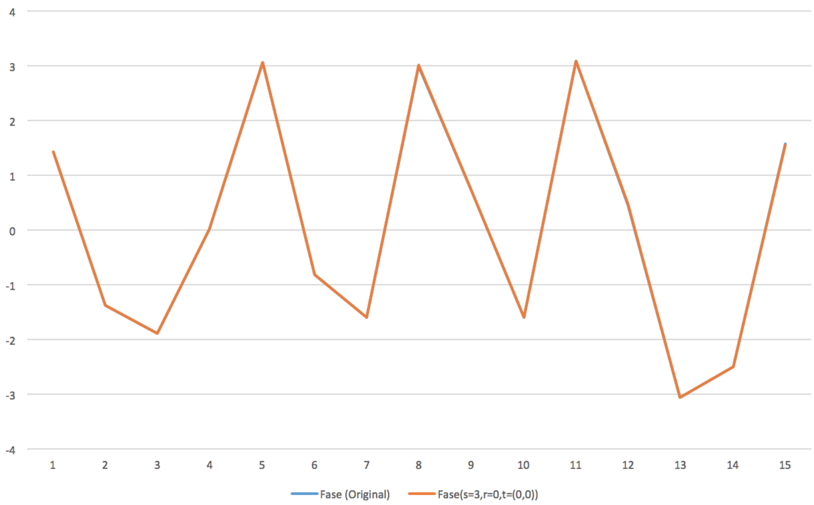

Figura 6: Gráfica de la fase para $s = 3$, $t = (0, 0)$, $\theta = 0$

multiplicamos un contorno $z[t]$ por un factor S entonces su descriptor de Fourier estará multiplicado por el mismo factor. I.e.

$$z'[t] = Sz[t] \quad \Rightarrow \quad Z'[k] = SZ[k] \tag{5}$$

De la misma forma, al rotar un contorno $z[t]$ por un ángulo ϕ, su descriptor de Fourier sera multiplicado por un factor $e^{i\phi}$. I.e.

$$z'[t] = z[t]e^{i\phi} \quad \Rightarrow \quad Z'[k] = Z[k]e^{i\phi} \tag{6}$$

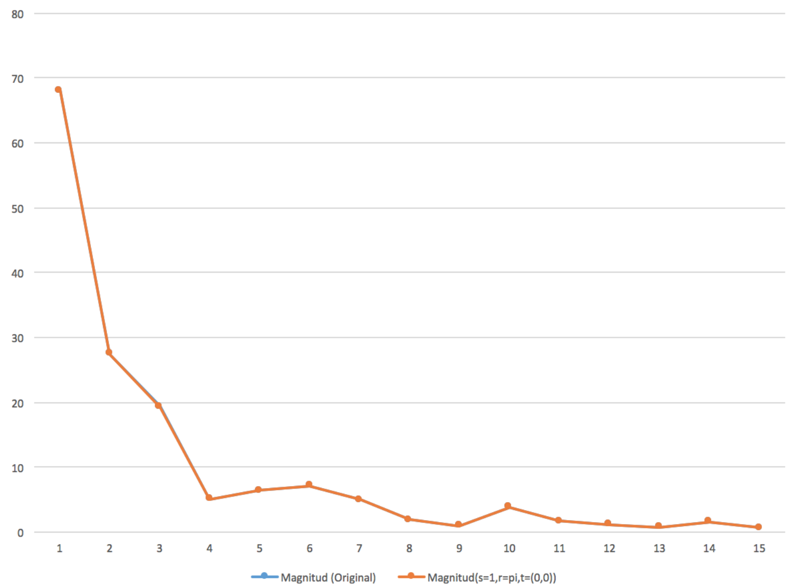

Figura 7: Gráfica de la magnitud para $s = 1$, $t = (0, 0)$, $\theta = \pi$

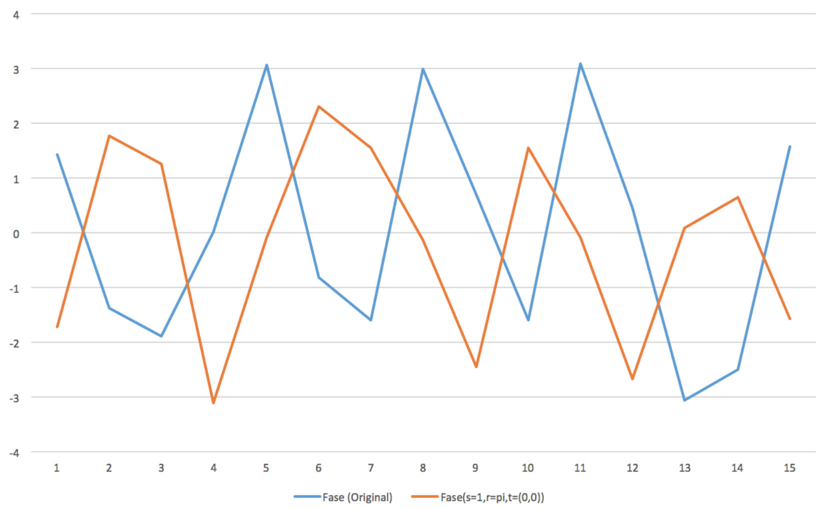

Figura 8: Gráfica de la fase para $s = 1$, $t = (0, 0)$, $\theta = \pi$

Esto explica porque la Figura 8 estaba completamente reflejada, ya que $e^{i\pi} = -1$ y también porque la Figura 10 tenía valores mas chicos; $Re(e^i) < 1$ e $Im(e^i) < 1$.

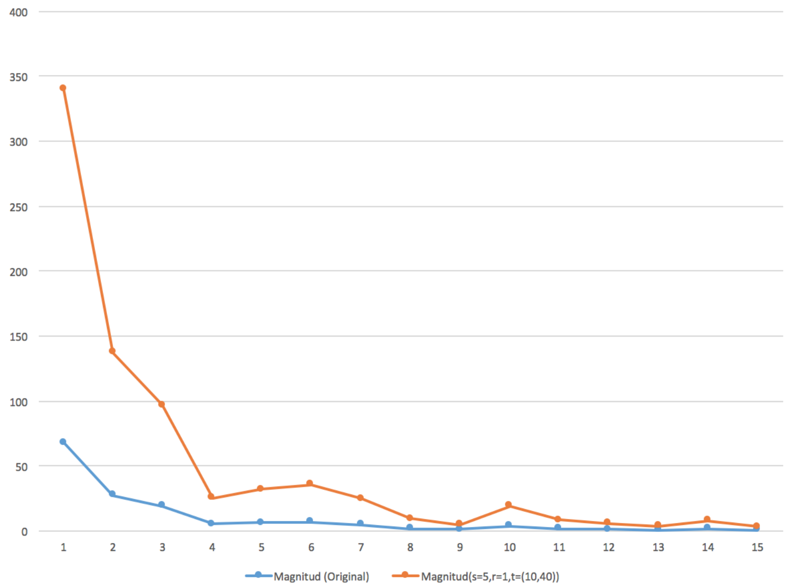

Figura 9: Gráfica de la fase para $s = 5$, $t = (10, 40)$, $\theta = 1$

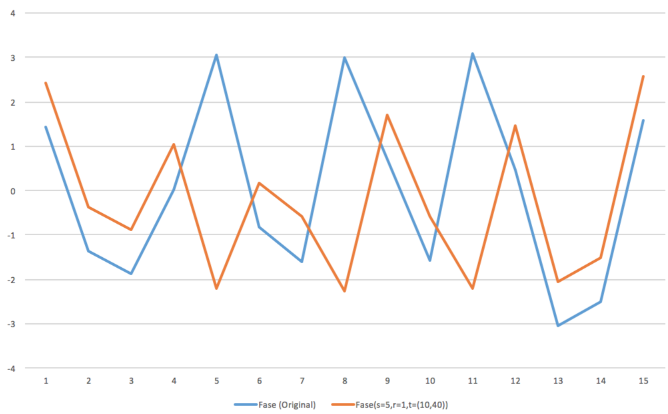

Figura 10: Gráfica de la fase para $s = 5$, $t = (10, 40)$, $\theta = 1$