Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
Campus Central - Natal - Rio Grande do Norte
Diretoria de Educação e Tecnologia da Informação

Curso Tecnólogo em Análise e Desenvolvimento de Sistemas
Curso Tecnólogo em Redes de Computadores

Curso de Cálculo Diferencial e Integral

Prof.: Fco. **Assis** de Oliveira

L I M I T E S

Neste curso, procuraremos mostrar uma visão intuitiva de **Limites** e a sua definição clássica e formal. Abordaremos as suas propriedades, cálculos de Limites de Funções e implementações no *software* de computação simbólica **Maple**.

O sistema principal do **Maple** está preparado para trabalhar com as operações básicas do cálculo, porém devemos carregar para a memória do computador o pacote específico para este fim, ou seja, a biblioteca **student**, o que deve ser executado com os comandos **with(student)** e/ou **with(Student)** [Ver o *help* do **Maple**].

Intrudução

Noção Intuitiva

Considerando os conjuntos numéricos inteiros, racionais e reais e obedecendo-se a regras pré-estabelecidas, podemos desenvolver sucessões numéricas, sequências e séries.
A seguir, apresentamos algumas sequências numéricas, definidas no conjunto dos números reais.

I - 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

II - $-1, -2, -3, -4, -5, -6, \ldots$

III - $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$, ...

IV - $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}$, ...

Observamos, que na sequência (I), à medida que acrescentamos um termo, estes tornam-se cada vez maiores, não alcançando um valor final *limite*. Assim sendo, dado um certo valor sempre encontraremos um termo maior na sucessão. Desta forma, dizemos que a sequência tende para o infinito.

Observamos, que na sequência (II), o comportamento é idêntico ao da sequência (I), porém esta tende para menos infinito.

Observamos, que na sequência (III), à medida que acrescentamos um termo, estes tornam-se maiores, porém tendendo a aproximar-se da unidade. Desta forma, dizemos que a sequência tende para um valor limite igual a unidade.

Observamos, que na sequência (IV), o comportamento da sequência fica oscilando, ora aumenando seu valor, ora diminuindo este. Quando ocorre acréscimo de um termo, que seja inteiro, esse tende a crescer para o infinito, e quando ocorre acréscimo de termo que seja uma fração, esse tende a aproximar-se do valor zero. Neste situação, a sequência não apresenta um único valor limite para a sequência, oscilando entre o infinito e o zero.

Valores de Funções e Limites

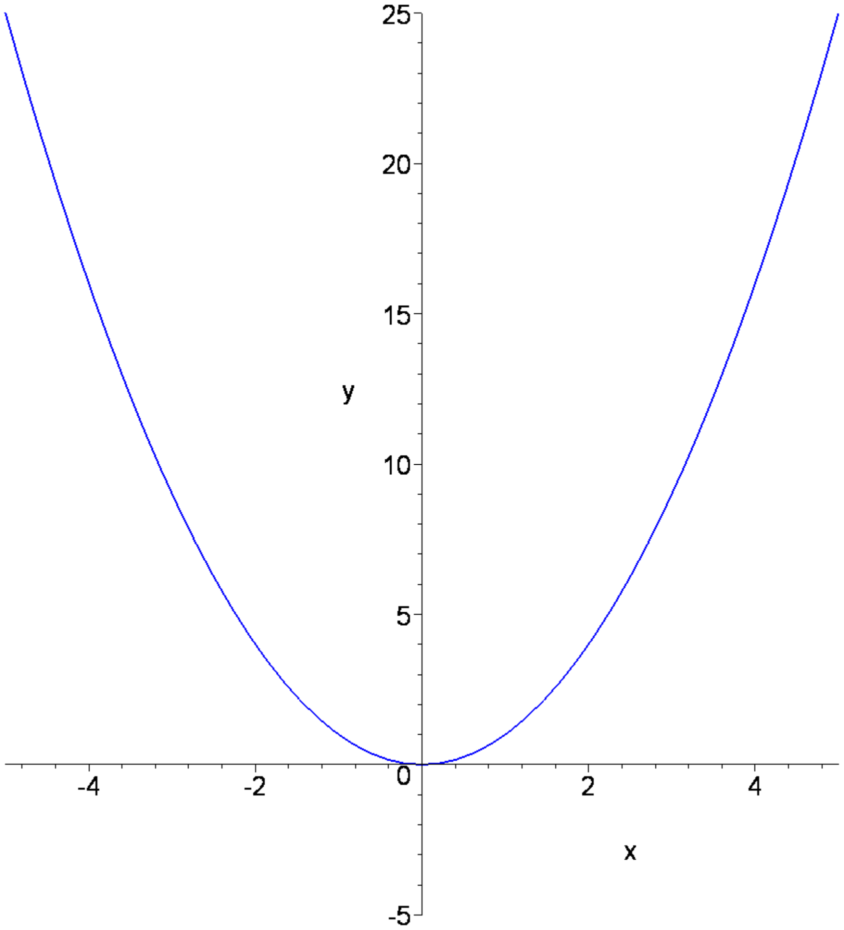
Vamos considerar a função $\mathrm{f}(x) = x^2$, definida e aplicada no conjunto dos reais.

A seguir, plotamos o gráfico desta função com o auxílio do **Maple**, mostrando o seu comportamento em uma janela, no intervalo fechado [-5 ; 5] para a abscissa e [-5 ; 25] para as ordenadas, e analisaremos o seu comportamento em algumas situações.

```
> restart: with(plots):
> f:=x->x^2;
```

$$f := x \to x^2$$

```
> plot(f(x),x=-5..5,y=-5..25,color=blue, thickness=2);
```



O gráfico acima nos mostra que quando x cresce muito positivamente, ou seja, tende a infinito ($x \to \infty$), o valor da função cresce muito com valores positivos e quando x cresce muito negativamente, ou seja, tende a menos infinito ($x \to -\infty$), o valor da função, também, cresce muito com valores positivos. Desta forma, podemos concluir que quando x tende para mais ou menos infinito o valor da função tende para o infinito ($f \to \infty$).
Quando x aproxima-se de zero com valores positivos, a função, ou seja, a sua imagem, tende para zero. O mesmo ocorre quando x aproxima-se de zero com valores negativos. Assim sendo, a função apresenta um valor limite, tendendo para zero, quando x aproxima-se de zero.

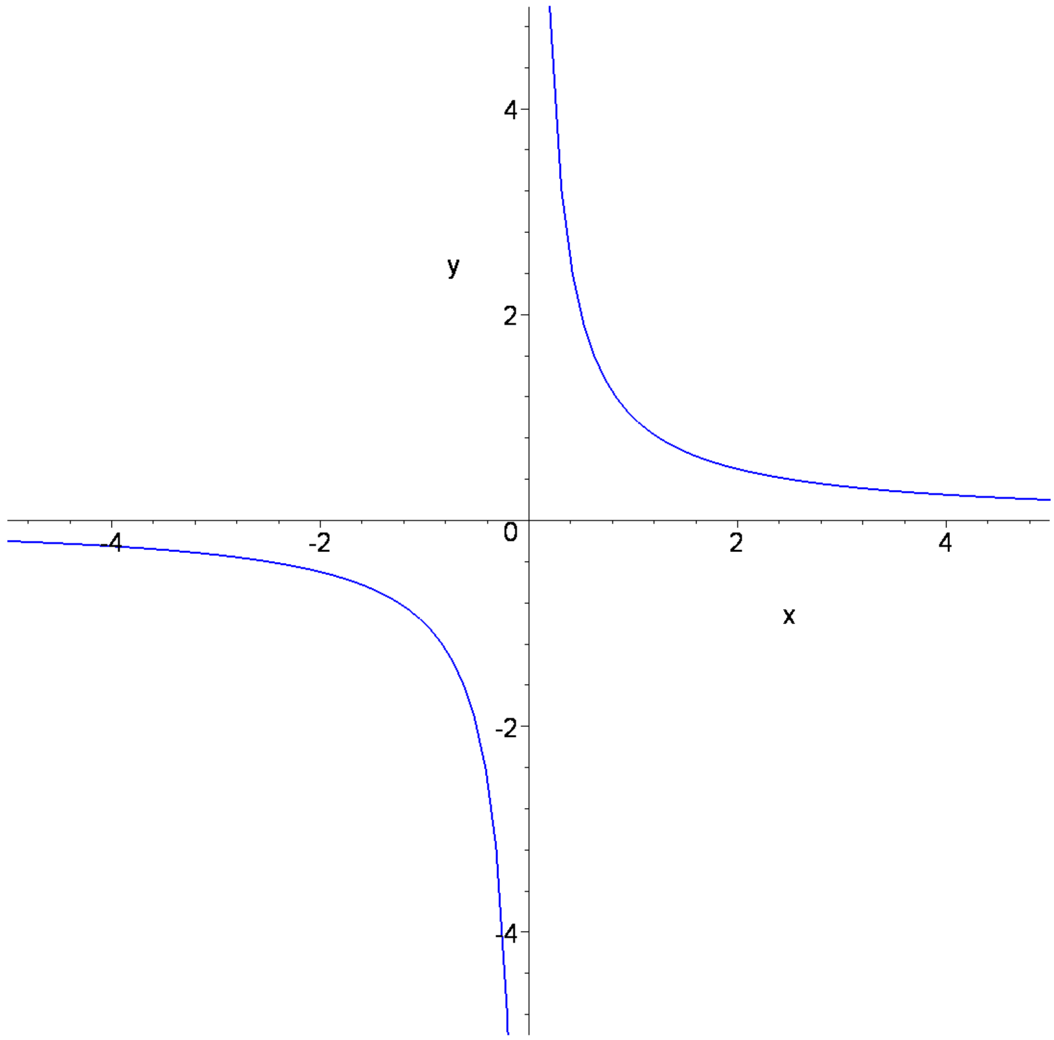
Vamos considerar a função $\mathrm{g}(x) = \frac{1}{x}$, definida e aplicada no conjunto dos reais.

A seguir, plotamos o gráfico desta função com o auxílio do **Maple**.

```
> g:=x->1/x;
```

$$g := x \to \frac{1}{x}$$

```
> plot(g(x),x=-5..5,y=-5..5,color=blue,thickness=2,discont=true);
```



O gráfico acima nos mostra que quando x tende a infinito ($x \to \infty$), o valor da função aproxima-se de zero com valores positivos e quando x tende a menos infinito ($x \to -\infty$), o valor da função aproxima-se de zero com valores negativos. Desta forma, podemos concluir que quando x tende a mais ou menos infinito o valor da função tende para zero.
Quando x aproxima-se de zero com valores positivos, a função, ou seja, a sua imagem, tende a infinito. Por outro lado, quando x aproxima-se de zero com valores negativos a função, ou seja, a sua imagem, tende a menos infinito.
Assim sendo, a função <u>não</u> apresenta um valor limite quando x aproxima-se de zero e mais ou menos infinito, o qual denominamos que esses limites são <u>indefinidos</u>.

Comportamento de uma função perto de um ponto

Seja a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ definida no conjunto dos reais, exceto para $x = 1$ (não podemos dividir por zero).

Para quaisquer valores de $x \neq 1$, podemos simplificar a expressão da função, fatorando o numerador e cancelando os fatores comuns dos numerador e do denominador, a saber:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \;=\; x+1 \text{ , para } x \neq 1.$$

N.B.: Esta operação pode ser realizada com o auxílio do comando **simplify** do **Maple**.

A seguir, temos a definição, construção do gráfico e a sua simplificação, utilizando-se de comandos **Maple**.

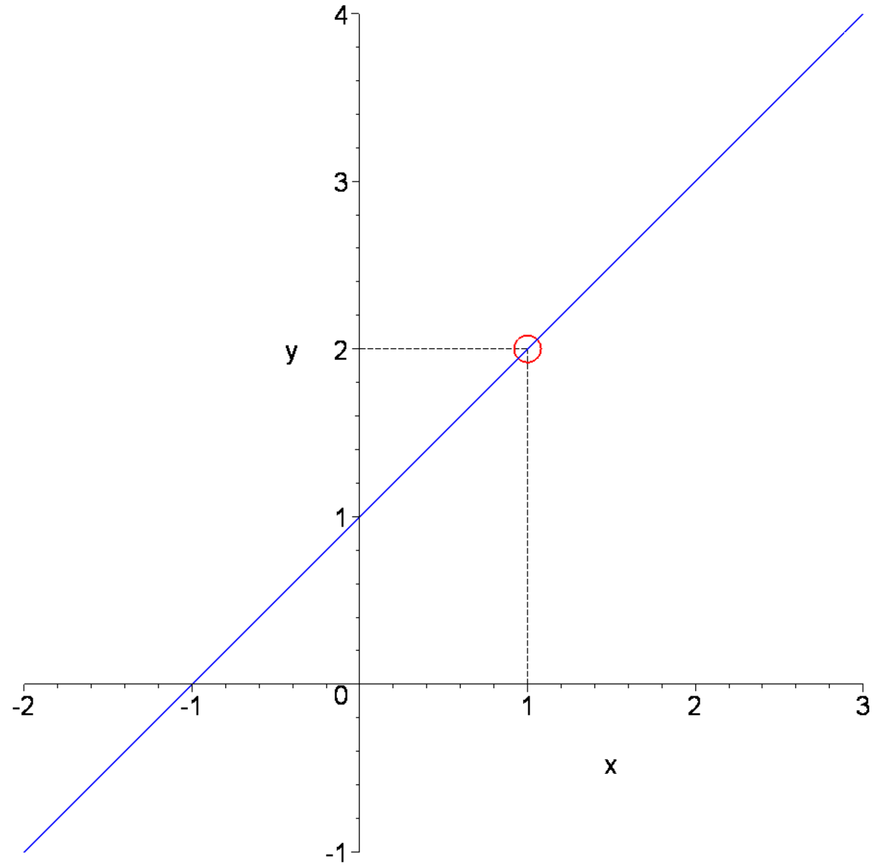
```
> restart: with(plots): with(plottools):
> f:=x->(x^2-1)/(x-1);
```

$$f := x \to \frac{x^2-1}{x-1}$$

```
> y=simplify(f(x));
```

$$y = x + 1$$

```
> graf1:=plot(f(x),x=-2..3,y=-1..4,color=blue,thickness=2):
> graf2:=circle([1,2],0.08,color=red,thickness=2):
> graf3:=line([1,0],[1,2],color=black,linestyle=3):
> graf4:=line([0,2],[1,2],color=black,linestyle=3):
> display(graf1,graf2,graf3,graf4);
```



Portanto, o gráfico da função $f(x)$ é o gráfico da reta $y = x + 1$, sem o ponto (1 ; 2). Este ponto é apresentado como um "buraco" no gráfico da função. Embora o valor da função $f(x)$ não pode ser definido no ponto $x = 1$, podemos avaliá-lo com precisão nas proximidades deste valor, conforme visto no gráfico anterior e na tabela abaixo:

	A	B
1	x	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
2	0.8000	1.8000
3	0.9000	1.9000
4	0.9500	1.9500
5	0.9900	1.9900
6	1	"indefinido"
7	1.1100	2.1100
8	1.0500	2.0500
9	1.1000	2.1000
10	1.2000	2.2000

Aproximando-se de um Limite

Apresentamos abaixo dois gráficos, sendo uma função polinomial $f(x)$ e a função "salto" $g(x)$, mostrando a aproximação do limite da função no ponto *a* (no exemplo $a = 2$). A função salto, é implementada no **Maple** com o uso da função **Heaviside(*x*)** - ver no *Help* do **Maple** o conceito e a sua sintaxe.

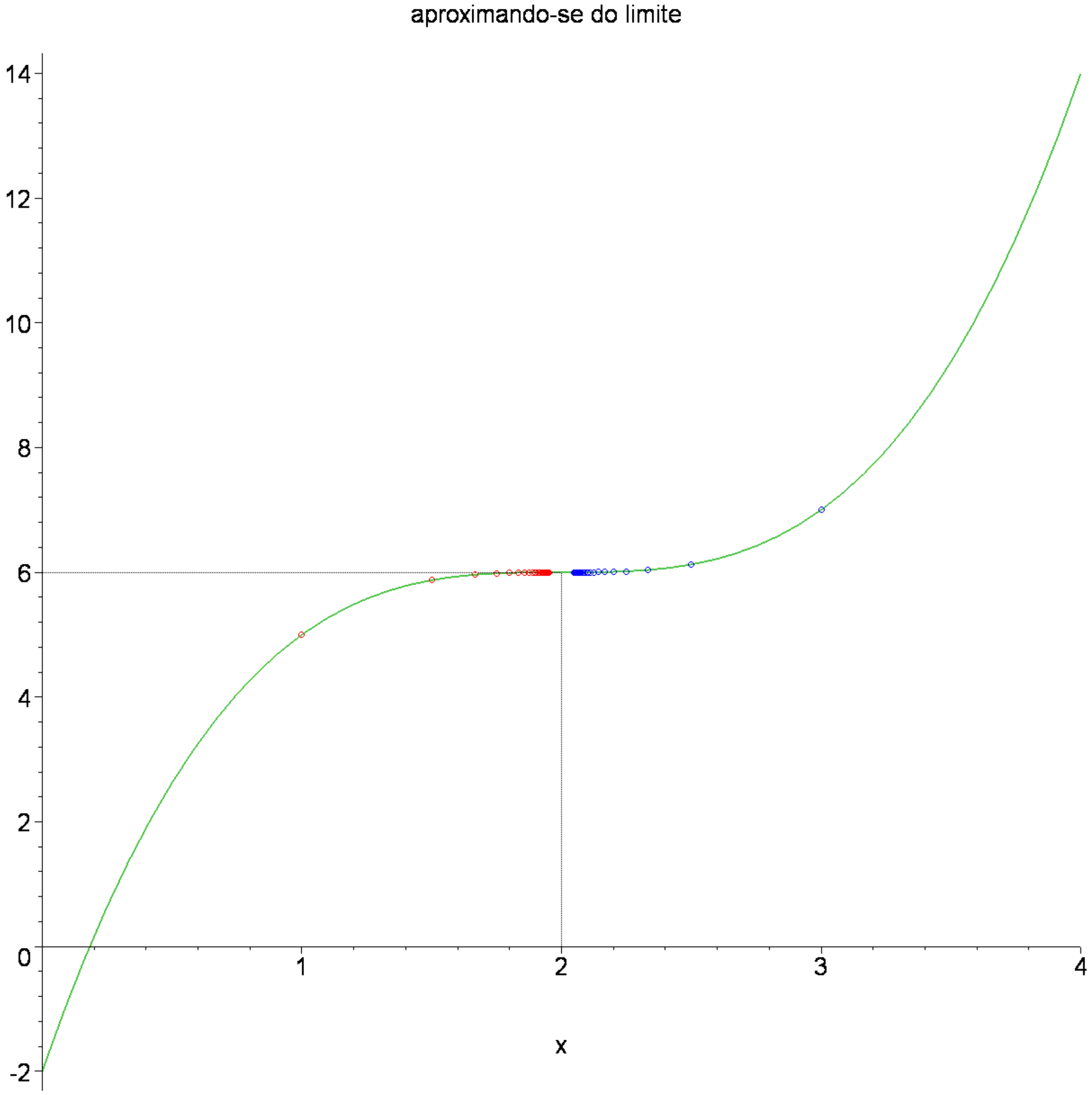
```
> restart: with(plots): with(plottools):
> f:=x->x^3-6*x^2+12*x-2;
```

$$f := x \rightarrow x^3 - 6\,x^2 + 12\,x - 2$$

```
> a:=2: esq:=0: dir:=4:
> graf1:=plot(f(x),x=esq..dir,color=COLOR(RGB,0.2,0.7,0.2),thickness=2):
> graf2:=plot({[[a,0],[a,f(a)]],[[0,f(a)],[a,f(a)]]},x=esq..dir,linestyle=2,color=black,thickness=1):
> graf3:=plot([[a-1/n,f(a-1/n)] $ n=1..20],

  x=esq..dir,style=point,symbol=circle,symbolsize=12,color=red):
> graf4:=plot([[a+1/n,f(a+1/n)] $ n=1..20],x=esq..dir,

  style=point,symbol=circle,symbolsize=12,color=blue):
> display(graf4,graf3,graf2,graf1,title=`aproximando-se do limite`);
```




```
> a:=2: esq:=-2: dir:=6:
> g:=x ->Heaviside(x-a) - Heaviside(a-x);
```

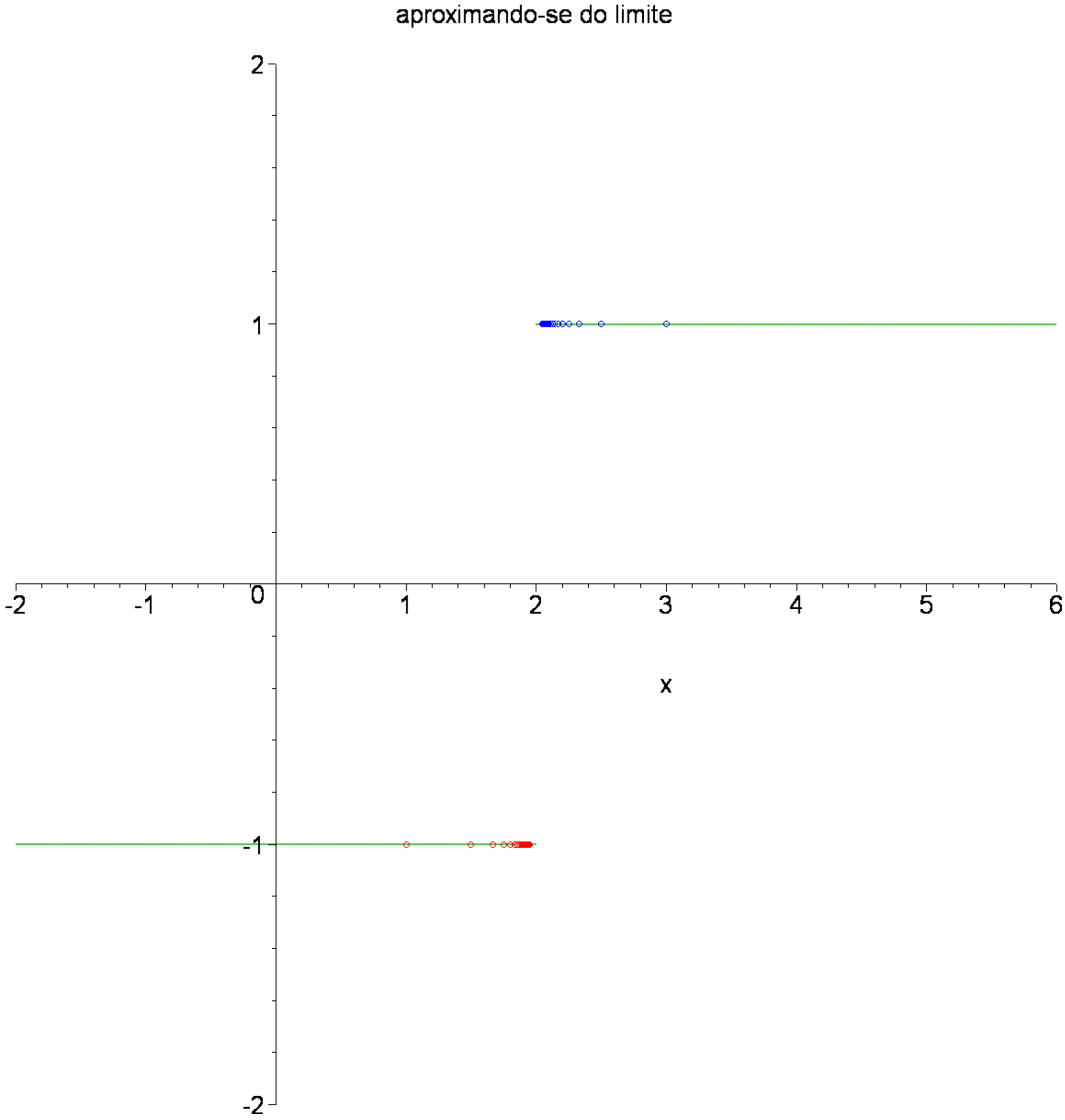
$$g := x \rightarrow \mathrm{Heaviside}(x-a) - \mathrm{Heaviside}(a-x)$$

```
> 'g(x)'=convert(g(x),piecewise);
```

$$\mathrm{g}(x) = \begin{cases} -1 & x < 2 \\ \mathit{undefined} & x = 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

```
> graf1:=plot(g(x),x=esq..dir,y=-2..2,color=COLOR(RGB,0.2,0.7,0.2),thickness=2,discont=true):
> graf2:=plot({[[a,0],[a,g(a)]],[[0,g(a)],[a,g(a)]]},x=esq..dir,linestyle=2,color=black,thickness=1):
> graf3:=plot([[a-1/n,g(a-1/n)] $ n=1..20],x=esq..dir,style=point,symbol=circle,symbolsize=12,color=red):
> graf4:=plot([[a+1/n,g(a+1/n)] $ n=1..20],x=esq..dir,style=point,symbol=circle,symbolsize=1
```

```
2,color=blue):
> display(graf4,graf3,graf2,graf1,title=`aproximando-se do limite`);
```



No 1º caso, a função f(x) aproxima-se de um único valor, à medida que o valor da variável independente x aproxima-se, tanto à esquerda e à direita do valor da constate $a = 2$. Nesta situação, dizemos que o limite da função no ponto $x = a = 2$ é o valor da sua imagem, ou seja, o Limite = 6.

No 2º caso, a função alterna o valor de sua imagem entre os valores 1 e -1 , à medida que os valores da variável independente x aproxima-se do valor da constante $a = 2$, pela direita e pela esquerda, respectivamente. Nesta situação, dizemos que a função não apresenta limite definido no ponto $x = a = 2$.

Animação do Limite

Apresentamos abaixo, os dois gráficos anteriores, da função polinomial f(x) e da função ´salto´ g(x), mostrando a animação da aproximação do limite das funções no ponto a.

```
> restart: with(plots): with(plottools):
> f:=x->x^3-6*x^2+12*x-2;
```

$$f := x \to x^3 - 6\,x^2 + 12\,x - 2$$

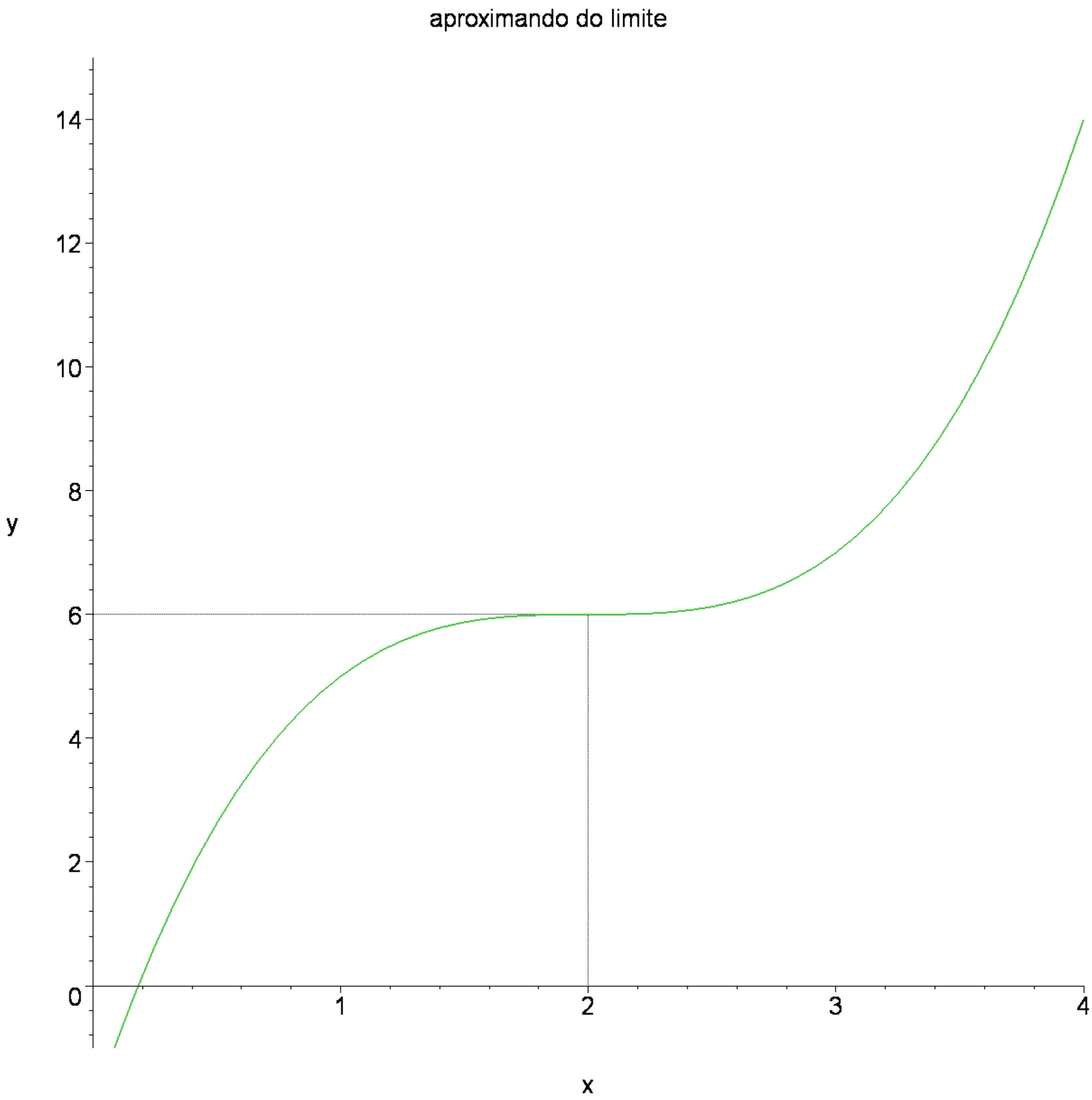
```
> a:=2: esq:=0: dir:=4:
> pp:=point([a,f(a)],symbol=circle,color=black,symbolsize=10
  ):
> for i from 0*a to 10*a do
     fp[i]:=
  plot(f(x),x=0..4,y=-1..15,color=COLOR(RGB,0.2,0.7,0.2),thi
  ckness=2):

  pe[i]:=point([i/10,f(i/10)],symbol=circle,color=red,symbol
  size=15):
      cp[i]:=plot({[[a,0],[a,f(a)]],[[0,f(a)],[a,f(a)]]},
           x=esq..dir,linestyle=2,color=black,thickness=1):
      pic[i]:=display([fp[i],pe[i],cp[i]],pp):
  od:

> for i from 20*a by -1 to 10*a do
     fp[i]:=
  plot(f(x),x=0..4,y=-1..15,color=COLOR(RGB,0.2,0.7,0.2),thi
  ckness=2):

  pd[i]:=point([i/10,f(i/10)],symbol=circle,color=blue,symbo
  lsize=15):
  cp[i]:=plot({[[a,0],[a,f(a)]],[[0,f(a)],[a,f(a)]]},
     x=esq..dir,linestyle=2,color=black,thickness=1):
     pic[i]:=display([fp[i],pd[i],cp[i]],pp):
  od:

> display(seq([pic[j],pic[20*a-j]],j=0..10*a),insequence=tru
  e,title=`aproximando do limite`);
```




```
> restart: with(plots): with(plottools):
> a:=2: esq:=-2: dir:=6:
> g:=x->Heaviside(x-a) - Heaviside(a-x);
```

$$g := x \rightarrow \text{Heaviside}(x - a) - \text{Heaviside}(a - x)$$

```
> 'g(x)'=convert(g(x),piecewise);
```

$$g(x) = \begin{cases} -1 & x < 2 \\ \textit{undefined} & x = 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

```
> ppe:=point([a-0.01,g(a-0.01)],symbol=circle,color=black,sy
  mbolsize=15):
> ppd:=point([a+0.01,g(a+0.01)],symbol=circle,color=black,sy
  mbolsize=15):
> for i from 0*a to 10*a do

  fp[i]:=plot(g(x),x=esq..dir,y=-2..2,color=COLOR(RGB,0.2,0.
  7,0.2),
            thickness=2,discont=true):
```

```
pe[i]:=point([i/10,g(i/10)],symbol=circle,color=red,symbol
size=15):

cp[i]:=plot({[[a-0.01,0],[a-0.01,g(a-0.01)]]},x=esq..dir,
          linestyle=2,color=black,thickness=1):
   pic[i]:=display([fp[i],pe[i],cp[i]],ppe):
od:
```

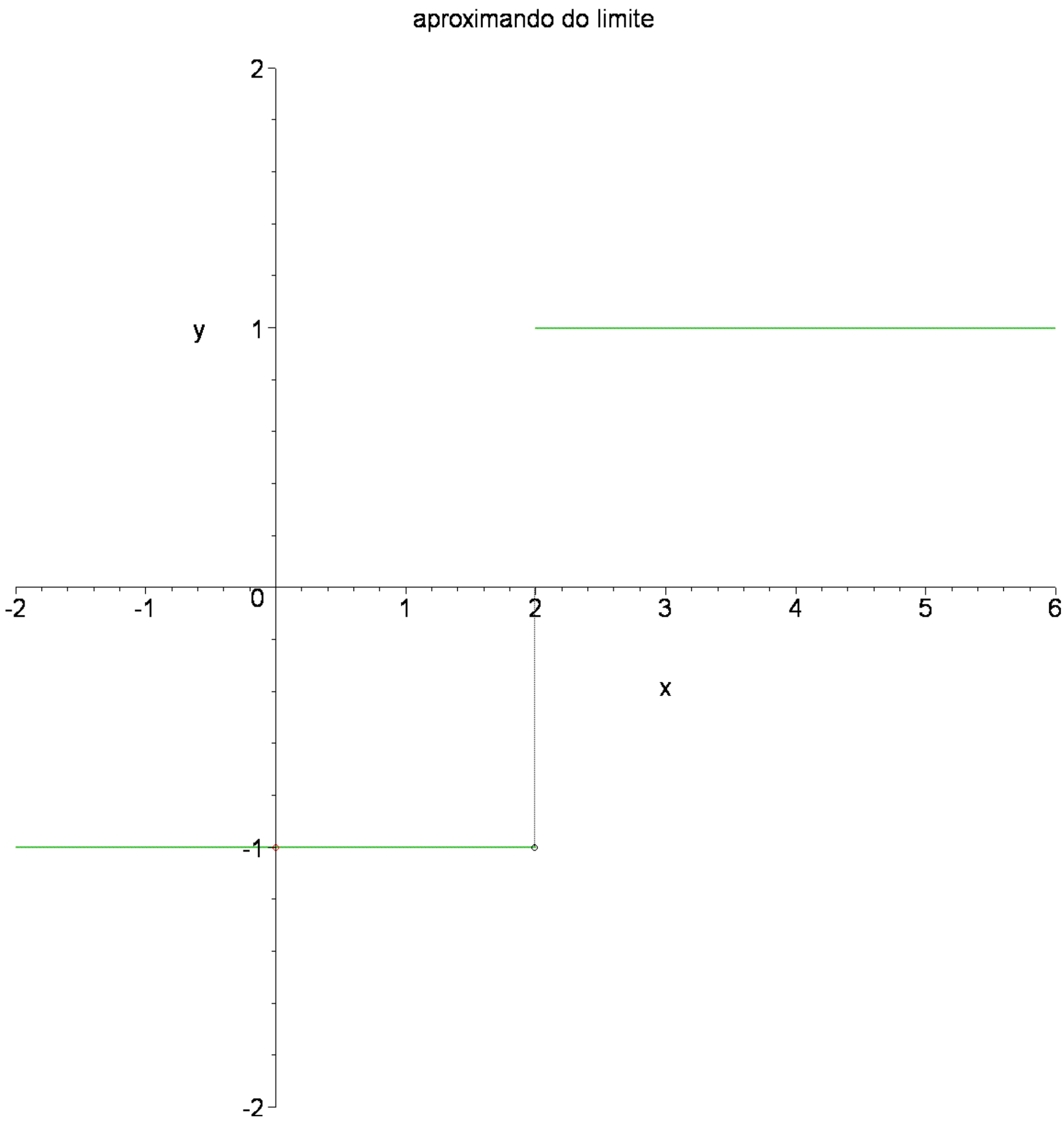
```
> for i from 20*a by -1 to 10*a do

fp[i]:=plot(g(x),x=esq..dir,y=-2..2,color=COLOR(RGB,0.2,0.
7,0.2),
          thickness=2,discont=true):

pd[i]:=point([i/10,g(i/10)],symbol=circle,color=blue,symbo
lsize=15):

cp[i]:=plot({[[a+0.01,0],[a+0.01,g(a+0.01)]]},x=esq..dir,
          linestyle=2,color=black,thickness=1):
   pic[i]:=display([fp[i],pd[i],cp[i]],ppd):
od:
```

```
> #pt1:=point([2,1],symbol=circle,color=blue,symbolsize=15):
> #pt2:=point([2,-1],symbol=circle,color=red,symbolsize=15):
> display(seq([pic[j],pic[20*a-j]],j=0..10*a),insequence=tru
e,title=`aproximando do limite`);
```



Após a execução dos comandos acima, dar um *click* no botão *play* do "*menu*" de animação, ou acionar *Animation / Play*. Explorar as outras opções do menu *Animation* para controles do processo de animação.

Definição informal de Limites

Seja $f(x)$ uma função definida e aplicada no conjunto dos reais, em um intervalo aberto em torno de um ponto $x = x_0$, exceto talvez em x_0. Se $f(x)$ situar-se em um ponto arbitrariamente próximo de um valor L (tanto próximo quando desejarmos), para todos os valores de x suficientemente próximos do ponto x_0, dizemos que a função $f(x)$ apresenta um **limite** L quando x tende a x_0 e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

que se lê: o limite de $f(x)$, quando x tende a x_0, é L, ou:

f(x) tende a L quando x tende a x_0.

A expressão anterior de definição de Limites, também poderia ser expressa e interpretada como segue:

$$f \to L \quad \text{quando } x \to x_0$$

N.B.: Na definição acima, foram usados os termos *arbitrariamente* e *suficientemente próximos*, porém tais termos são imprecisos em uma definição formal matemática. Posteriormente, definiremos Limites com o formalismo matemático mais apropriado e preciso.

Consideremos a função $f(x) = x^2 - x + 1$ definida no intervalo aberto] 0 ; 4 [. Vamos encontrar o limite da função quando a variável independente x aproximar-se de 2.
A seguir, construiremos o gráfico da função e uma tabela com valores no intervalo [1 ; 3],

```
> restart: with(plots): with(plottools):
> f:=x->x^2-x+1;
```

$$f := x \to x^2 - x + 1$$

```
> x[0]=2;y[0]=f(2);
```

$$x_0 = 2$$

$$y_0 = 3$$

Gráfico:

```
> graf1:=plot(f(x),x=0..3,y=0..6,color=blue,thickness=2):
> graf2:=line([2,0],[2,3],color=red,linestyle=1,thickness=2)
  :
> graf3:=line([0,3],[2,3],color=red,linestyle=1,thickness=2)
  :
> graf4:=line([2,0],[2,3],color=pink,linestyle=1,thickness=1
  0):
> graf5:=line([0,3],[2,3],color=pink,linestyle=1,thickness=1
  5):
> display(graf1,graf2,graf3,graf4,graf5);
```

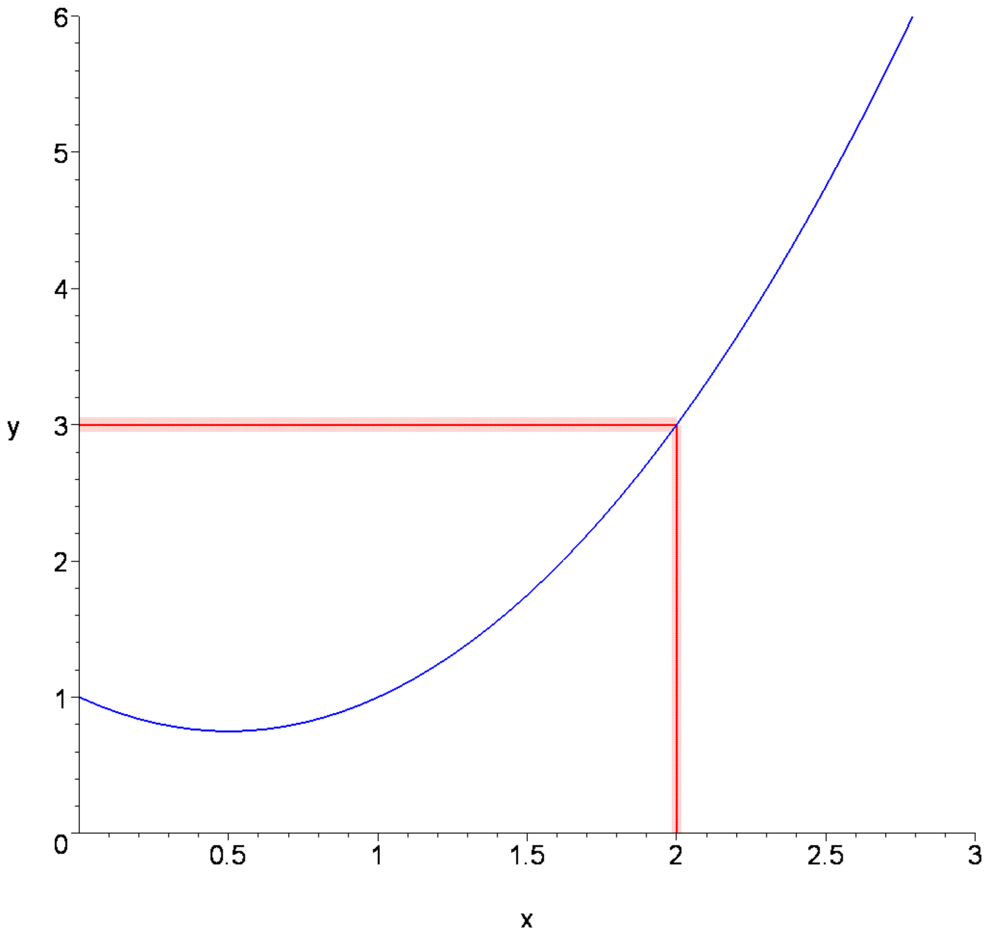


Tabela:

	A	B
1	x	$f(x) = x^2 - x + 1$
2	1.0000	1.0000
3	1.5000	1.7500
4	1.9000	2.7100
5	1.9200	2.7664
6	1.9400	2.8236
7	1.9600	2.8816
8	1.9800	2.9404
9	2	3
10	2.0200	3.0604
11	2.0400	3.1216
12	2.0600	3.1836
13	2.0800	3.2464
14	2.1000	3.3100
15	2.5000	4.7500
16	3.0000	7.0000

Observando-se o gráfico da função e a tabela de valores, a função aproxima-se do valor 3 quando o valor da variável independente x aproxima-se de 2, tanto pela direita quanto pela esquerda.

Assim sendo, dizemos que "o limite de $f(x) = x^2 - x + 1$" é 3 quando "x tende a 2", o qual escrevemos:

$$\lim_{x \to 2} x^2 - x + 1 = 3$$

O **Maple** possui o comando **limit** para efetuar o cálculo de limites. A sintaxe **Limit** apresenta a forma inerte, ou seja, não avalia o valor do limite da função, apresentando apenas a simbologia do cálculo, enquanto que a sintaxe **limit** procede a avaliação do limite da função.

N.B.: ver no *help* a sintaxe completa do comando.

A seguir, executamos o cálculo do limite usando o **Maple,** mostrando a diferança entre **Limit** e **limit**. Notamos que no lado esquerdo do sinal de igual não foi procedido nenhuma avaliação de cálculos numéricos ou algébricos, apenas a sua simbologia algébrica, enquanto que no lado direito do sinal de igual foi avaliado o valor do limite quando $x \to 2$.

```
> Limit(f(x),x = 2) = limit(f(x),x = 2);
```

$$\lim_{x \to 2} x^2 - x + 1 = 3$$

Situações-exemplos de estimativas de Limites

Nesta seção, apresentaremos algumas situações de funções para determinação de limites.

Exemplo 01

Vamos considerar as seguintes funções:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \;,$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$$

e $h(x) = x + 2$.

Abaixo, apresentamos as implementações das funções no **Maple**, com a construção dos seus gráficos.

```
> restart: with(plots): with(plottools): with(student):
> f:=x->(x^2-4)/(x-2);
```

$$f := x \to \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

```
> g:=unapply(piecewise(x=2,2,x<>2,(x^2-4)/(x-2)),x);
```

$$g := x \to \operatorname{piecewise}\left(x = 2, 2, x \neq 2, \frac{x^2-4}{x-2}\right)$$

```
> h:=x->x+2;
```

$$h := x \to x + 2$$

Gráfico da função $f(x)$:

```
> graf1:=plot(f(x),x=-2..4,color=red,thickness=2):
> graf2:=circle([2,4],0.1,color=black,thickness=2):
> display(graf1,graf2);
```

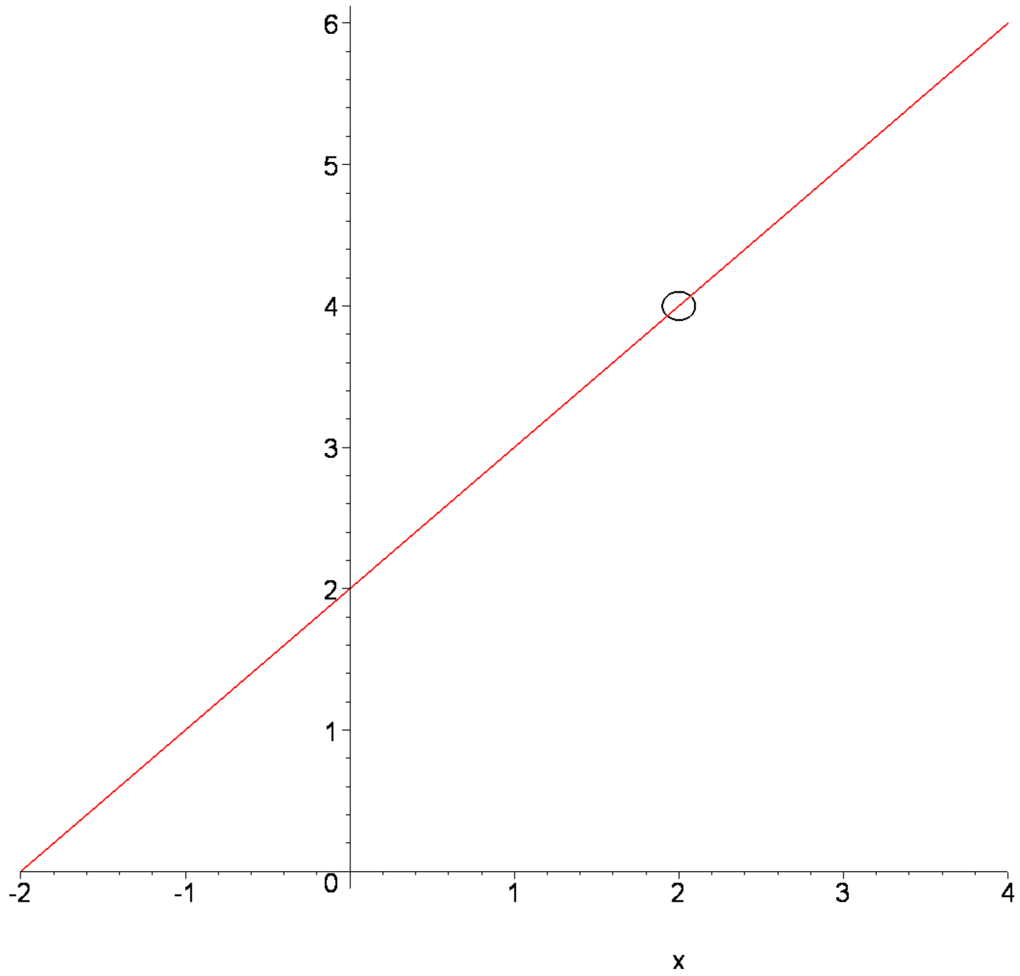


Gráfico da função g(x):

```
> graf3:=plot(g(x),x=-2..4,color=blue,thickness=2):
> graf4:=circle([2,4],0.1,color=black,thickness=2):
> graf5:=disk([2,2],0.1,color=blue,thickness=1):
> display(graf3,graf4,graf5);
```

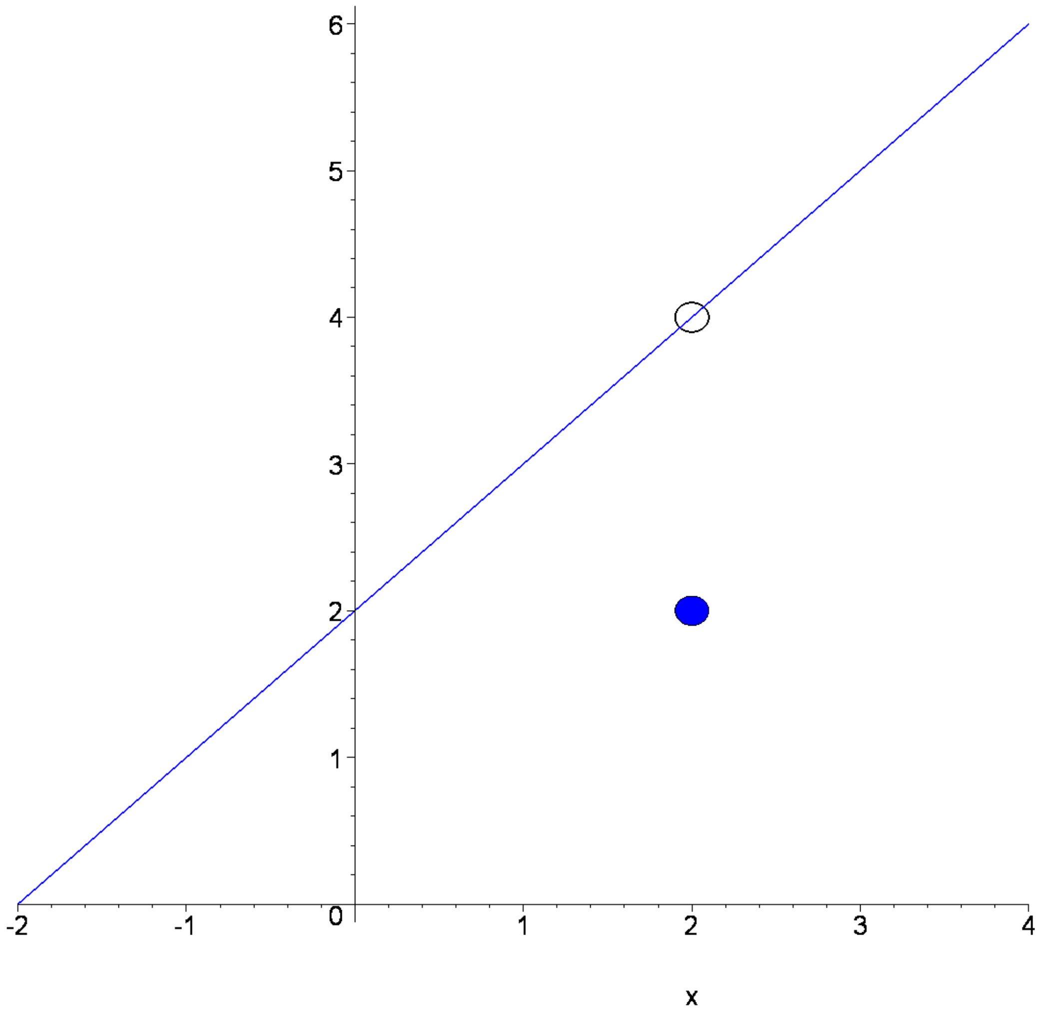
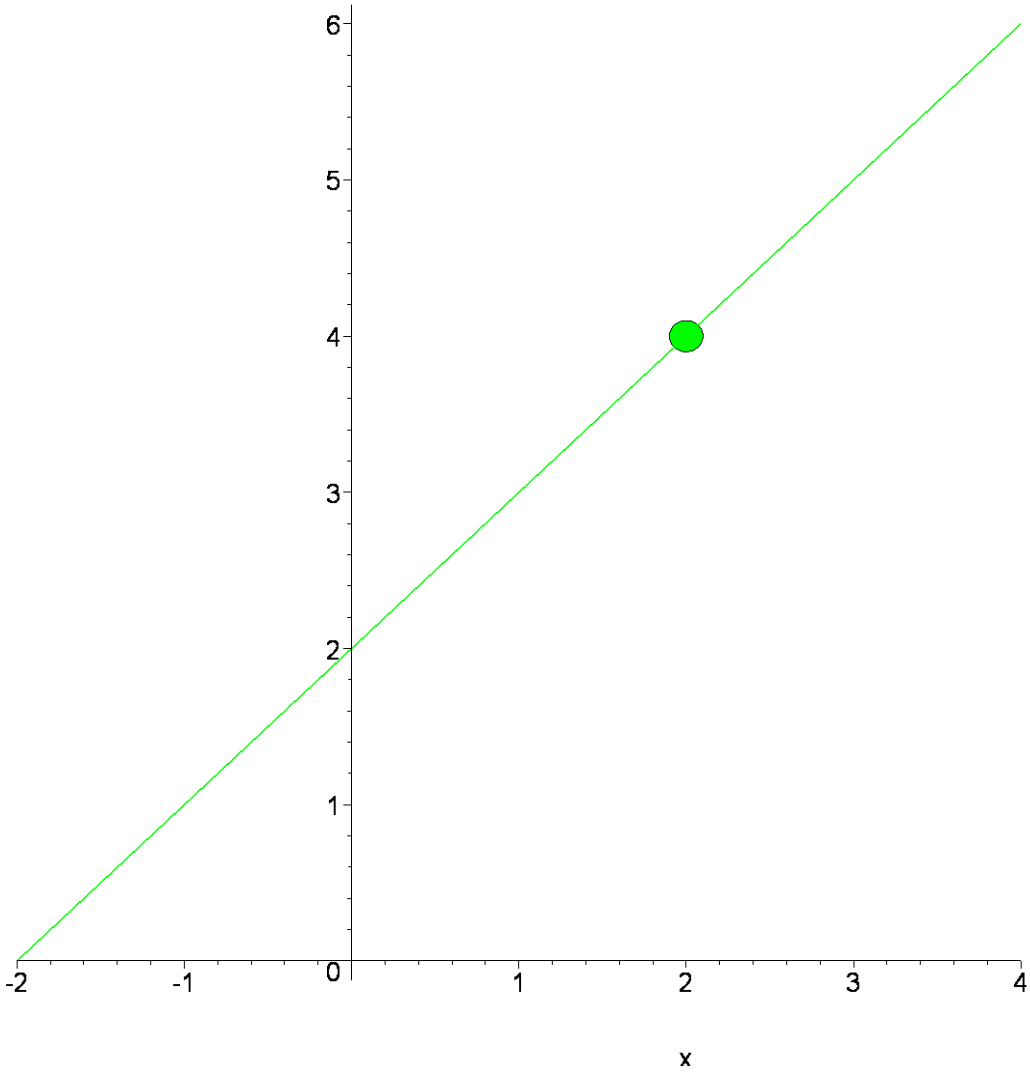


Gráfico da função h(*x*):

```
> graf6:=plot(h(x),x=-2..4,color=green,thickness=2):
> graf7:=disk([2,4],0.1,color=green,thickness=1):
> display(graf6,graf7);
```



Nas três funções definidas acima, observamos que o domínio para a função $f(x)$ é o conjunto dos números reais, excetuando-se o valor 2; as funções $g(x)$ e $h(x)$ são definidas em todo o conjunto dos números reais.

A função $f(x)$ apresenta limite 4 quando $x \to 2$, mesmo considerando que a função não esteja definida neste ponto. A função $g(x)$ apresenta limite 4 quando $x \to 2$, observando-se que a imagem desta função neste ponto é o valor 2, ou seja, $g(2) = 2 \neq 4$. A função $h(x)$ apresenta o limite 4 quando $x \to 2$, que é o mesmo valor da imagem no ponto em questão.

Das situações acima descritas, podemos concluir que o **valor limite** não depende de como a função é definida no ponto em análise, e sim do seu comportamento de aproximação quando a variável independente x aproxima-se do ponto x_0 em questão.

A seguir, os comandos **Maple** efetuam os cálculos dos limites para as três funções, a saber:

```
> Limit(f(x),x=2)=limit(f(x),x=2);
```

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

```
> Limit(g(x),x=2)=limit(g(x),x=2);
```

$$\lim_{x \to 2} \begin{cases} 2 & x = 2 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \end{cases} = 4$$

```
> Limit(h(x),x=2)=limit(h(x),x=2);
```

$$\lim_{x \to 2} x + 2 = 4$$

Exemplo 02

Vamos considerar as funções constante e identidade definidas, respectivamente, a seguir: $\mathrm{f}(x) = k$ e $\mathrm{g}(x) = x$.

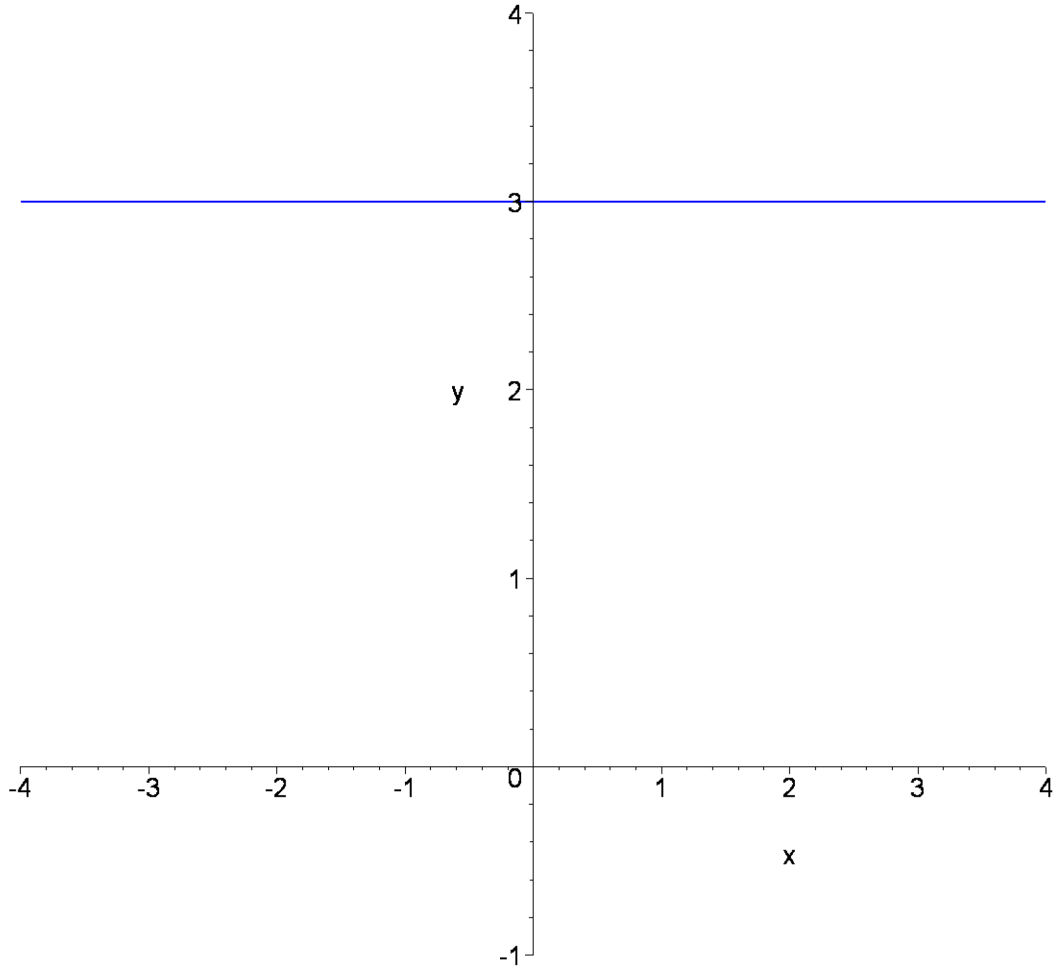
Procederemos a definição e implementação dos gráficos das funções, usando comandos **Maple**. Para efeito de implementação do gráfico da função constante, vamos considerar $k = 3$.

```
> restart: with(plots):
> f:=x->3; g:=x->x;
```

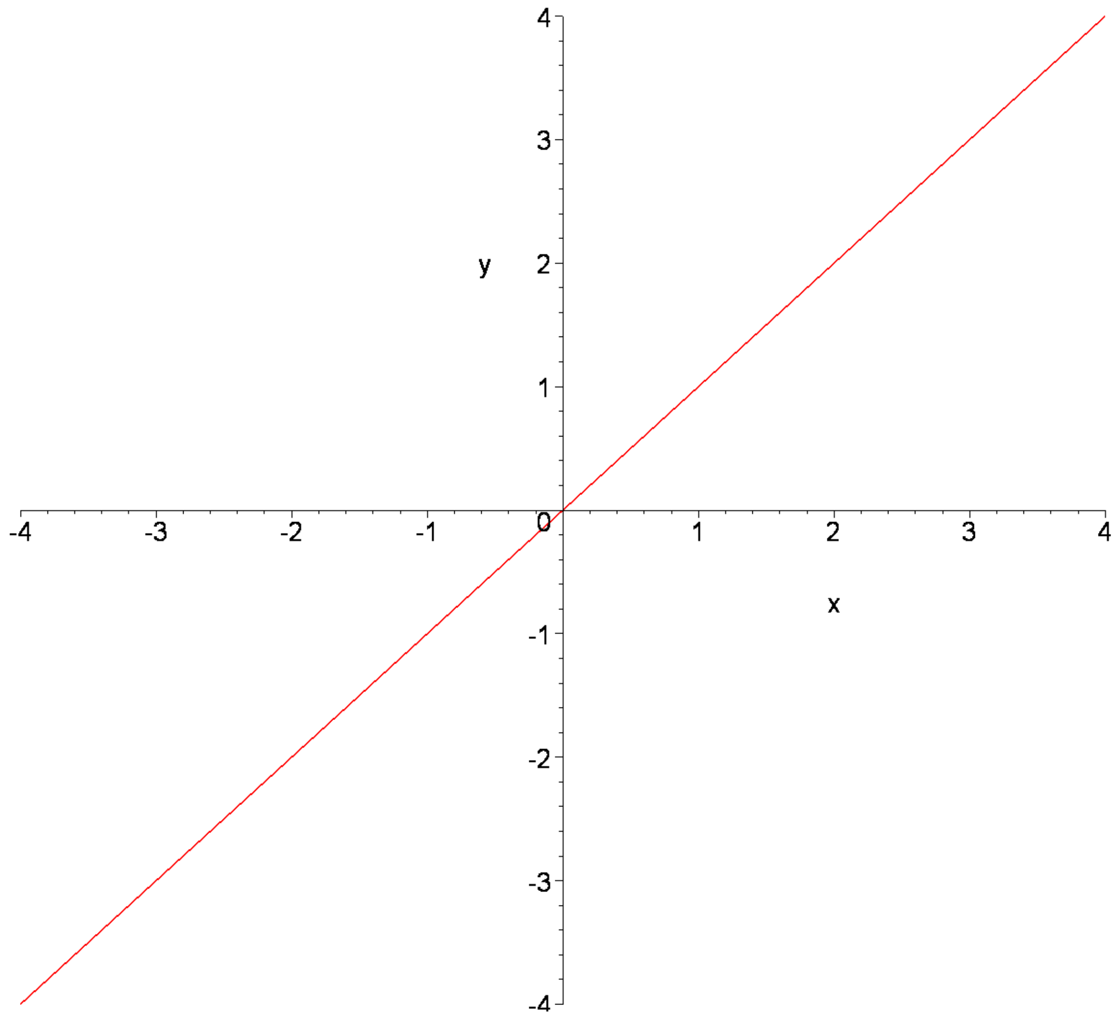
$$f := x \to 3$$

$$g := x \to x$$

```
> plot(f(x),x=-4..4,y=-1..4,color=blue,thickness=2);
```




```
> plot(g(x),x=-4..4,y=-4..4,color=red,thickness=2);
```



A seguir, os comandos **Maple** efetuam os cálculos dos limites para as duas funções, no ponto $x = x_0 = 2$, a saber:

```
> Limit(f(x),x=2)=limit(f(x),x=2);
```

$$\lim_{x \to 2} 3 = 3$$

```
> Limit(g(x),x=2)=limit(g(x),x=2);
```

$$\lim_{x \to 2} x = 2$$

Sabemos que estas funções são contínuas em todo o seu domínio. Portanto, sempre apresentam limites em todo o seu domínio. Mais adiante, na seção de propriedades, voltaremos a discutir os limites para estas funções.

Limites Laterais

Nesta seção, apresentamos algumas situações de funções, na determinação de seus limites laterais (à esquerda e/ou à direita) de um ponto.
No *software* **Maple**, isto é conseguido utilizando-se a opção **left** e **right**, respectivamente - (

ver sintaxe no *Help* do **Maple**).

Exemplo 03 - Limites laterais à esquerda e à direita

Vamos considerar as funções $\mathrm{f}(x)$, $\mathrm{g}(x)$, $\mathrm{h}(x)$ e $\mathrm{k}(x)$ definidas a seguir:

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} x-1 & x<2 \\ 2 & x=2 \\ -x+6 & 2<x \end{cases}$$

$$\mathrm{g}(x) = \begin{cases} x-1 & x<2 \\ -x+6 & 2 \le x \end{cases}$$

$$\mathrm{h}(x) = \begin{cases} x-1 & x \le 2 \\ -x+6 & 2<x \end{cases}$$

$$\mathrm{k}(x) = \begin{cases} x-1 & x<2 \\ -x+6 & 2<x \end{cases}$$

Abaixo, apresentamos as implementações das funções no **Maple**, com a construção dos seus gráficos.

```
> restart: with(plots): with(plottools): with(student):
> f:=x->piecewise(x<2,x-1,x=2,2,x>2,-x+6);
```

$$f := x \rightarrow \mathrm{piecewise}(x<2,\ x-1,\ x=2,\ 2,\ 2<x,\ -x+6)$$

```
> g:=x->piecewise(x<=2,x-1,x>=2,-x+6);
```

$$g := x \rightarrow \mathrm{piecewise}(x \le 2,\ x-1,\ 2 \le x,\ -x+6)$$

```
> h:=x->piecewise(x<2,x-1,x>=2,-x+6);
```

$$h := x \rightarrow \mathrm{piecewise}(x<2,\ x-1,\ 2 \le x,\ -x+6)$$

```
> k:=x->piecewise(x<2,x-1,x>=2,-x+6);
```

$$k := x \rightarrow \mathrm{piecewise}(x<2,\ x-1,\ 2 \le x,\ -x+6)$$

Gráfico da função $\mathrm{f}(x)$:

```
> graf1:=plot(f(x),x=-2..6,y=-3..5,color=blue,thickness=2
  ,discont=true):
> graf2:=disk([2,2],0.1,color=blue,thickness=2):
> graf3:=circle([2,1],0.1,color=blue,thickness=2):
> graf4:=circle([2,4],0.1,color=blue,thickness=2):
> display(graf1,graf2,graf3,graf4);
```

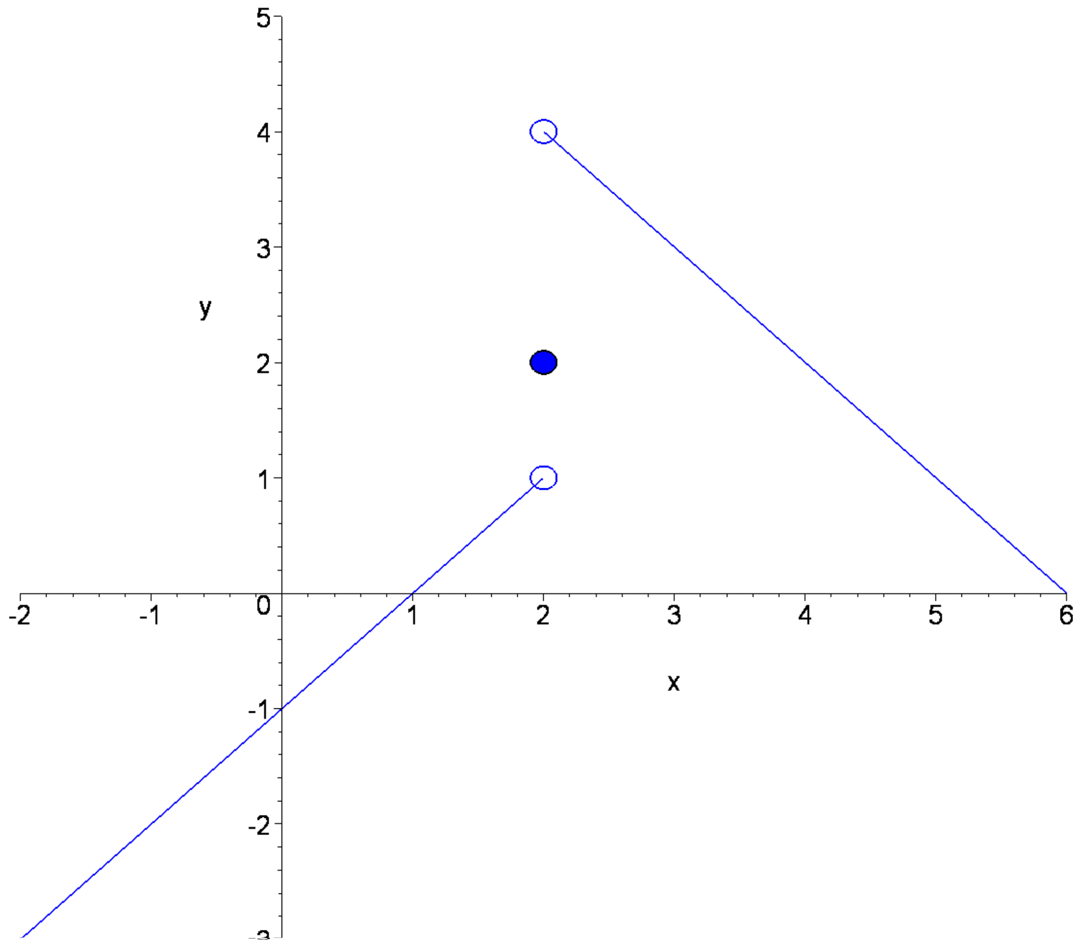


Gráfico da função g(*x*):

```
> graf5:=plot(g(x),x=-2..6,y=-3..5,color=blue,thickness=2
  ,discont=true):
> graf6:=disk([2,1],0.1,color=blue,thickness=2):
> graf7:=circle([2,4],0.1,color=blue,thickness=2):
> display(graf5,graf6,graf7);
```

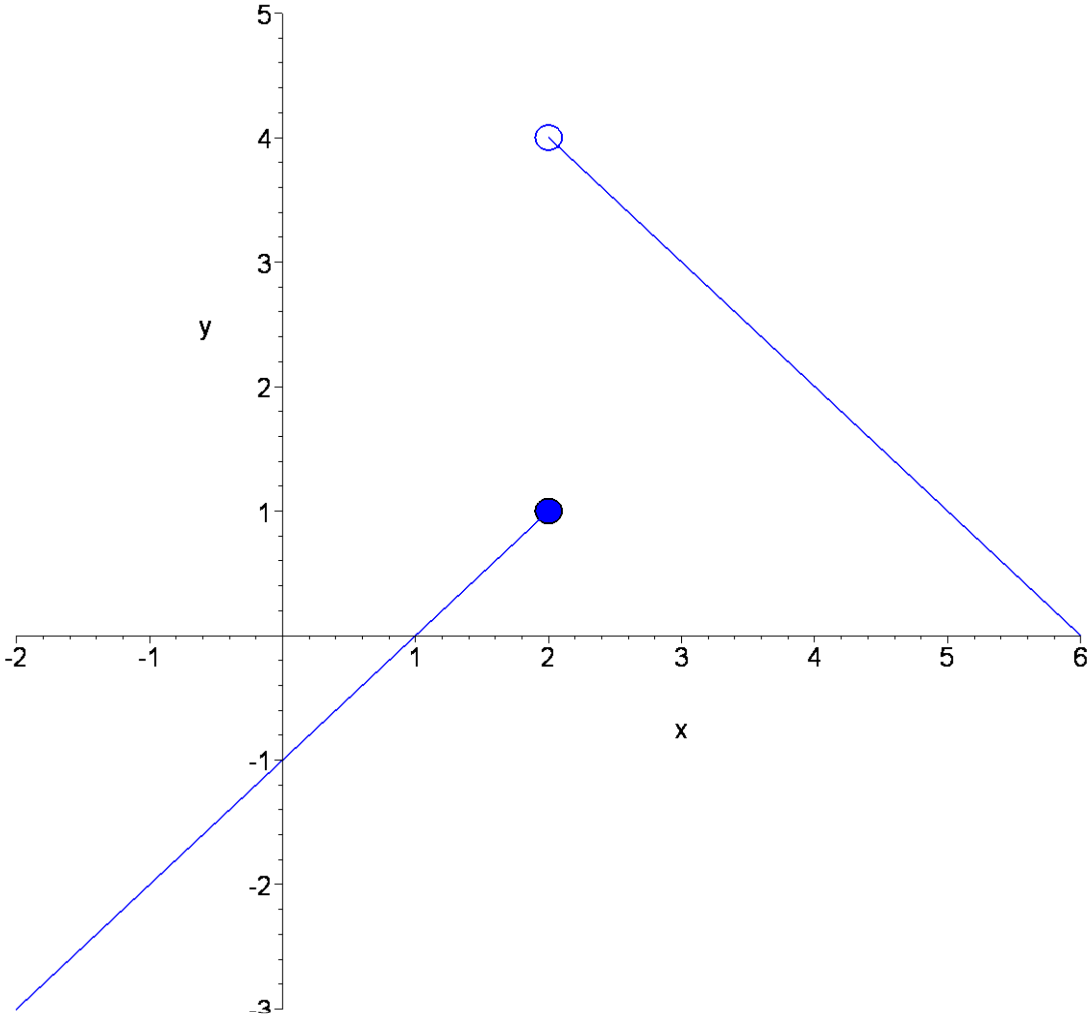


Gráfico da função h(x):

```
> graf8:=plot(h(x),x=-2..6,y=-3..5,color=blue,thickness=2
  ,discont=true):
> graf9:=circle([2,1],0.1,color=blue,thickness=2):
> graf10:=disk([2,4],0.1,color=blue,thickness=2):
> display(graf8,graf9,graf10);
```

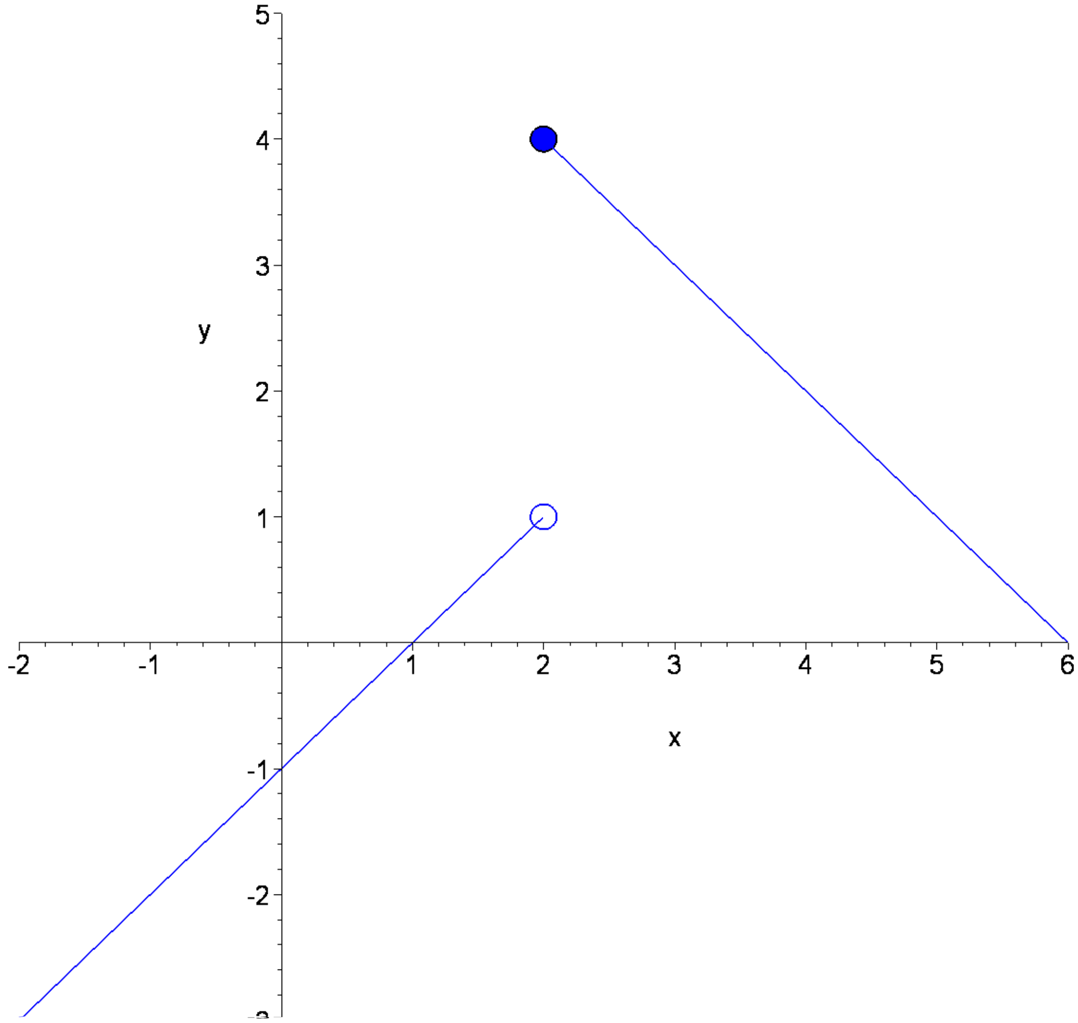
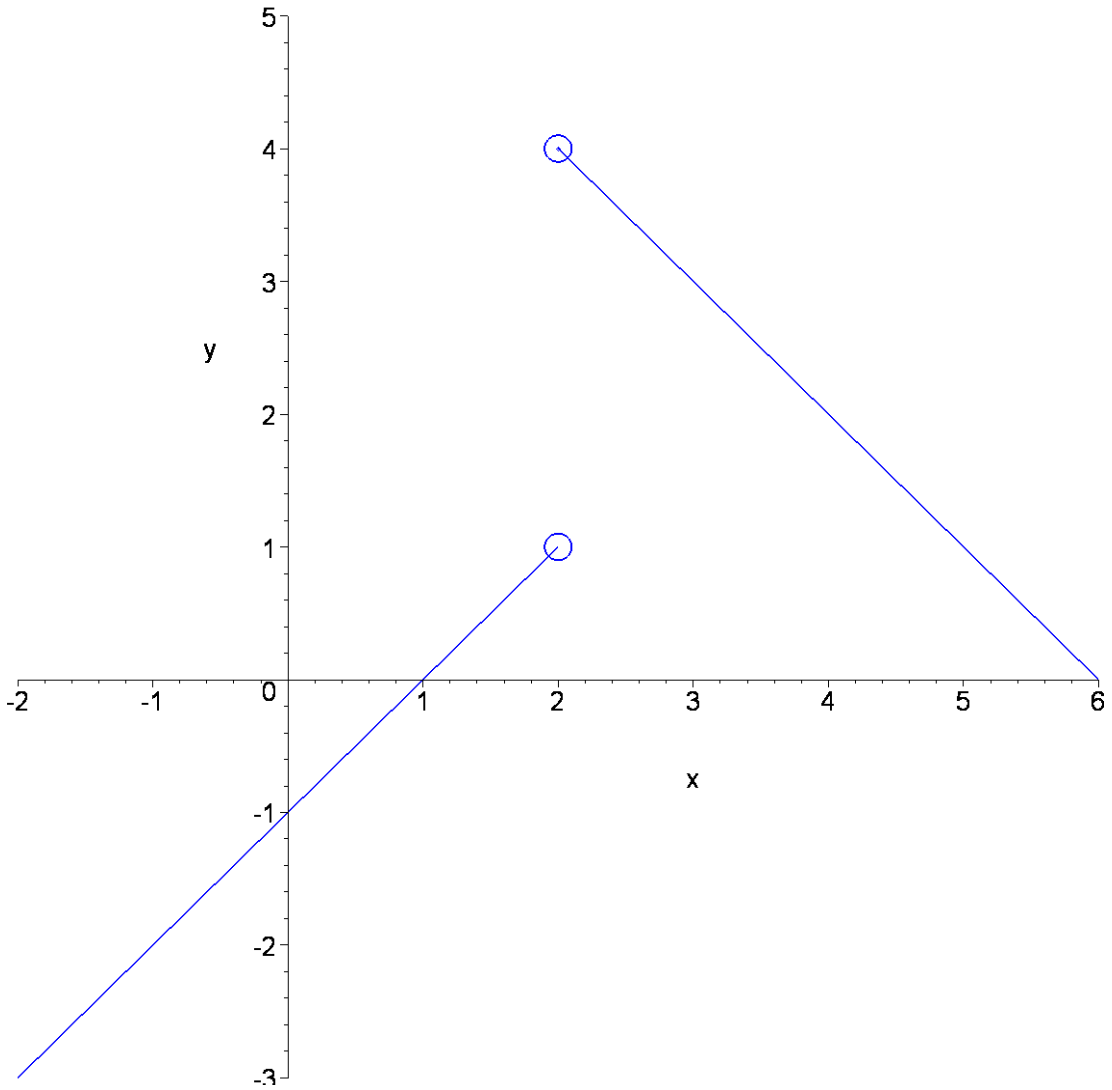


Gráfico da função k(x):

```
> graf11:=plot(k(x),x=-2..6,y=-3..5,color=blue,thickness=
  2,discont=true):
> graf12:=circle([2,1],0.1,color=blue,thickness=2):
> graf13:=circle([2,4],0.1,color=blue,thickness=2):
> display(graf11,graf12,graf13);
```



A seguir, os comandos **Maple** efetuam os cálculos dos limites para as quatro funções, a saber:

```
> Limit('f(x)',x=2,left)=limit(f(x),x=2,left);
  Limit('f(x)',x=2,right)=limit(f(x),x=2,right);
  Limit('f(x)',x=2)=limit(f(x),x=2);
```

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \mathit{undefined}$$

```
> Limit('g(x)',x=2,left)=limit(g(x),x=2,left);
  Limit('g(x)',x=2,right)=limit(g(x),x=2,right);
  Limit('g(x)',x=2)=limit(g(x),x=2);
```

$$\lim_{x \to 2-} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 2+} g(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \mathit{undefined}$$

```
> Limit('h(x)',x=2,left)=limit(h(x),x=2,left);
  Limit('h(x)',x=2,right)=limit(h(x),x=2,right);
  Limit('h(x)',x=2)=limit(h(x),x=2);
```

$$\lim_{x \to 2-} h(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 2+} h(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 2} h(x) = \mathit{undefined}$$

```
> Limit('k(x)',x=2,left)=limit(k(x),x=2,left);
  Limit('k(x)',x=2,right)=limit(k(x),x=2,right);
  Limit('k(x)',x=2)=limit(k(x),x=2);
```

$$\lim_{x \to 2-} k(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 2+} k(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 2} k(x) = \mathit{undefined}$$

Nas funções definidas acima, observamos que o domínio é o conjunto dos números reais, excetuando-se o valor 2 na definição da função $k(x)$.

Todas as funções apresentam limites à esquerda igual a1 e à direita igual a 4, quando $x \to 2$, visto que estas são semelhantes, excetuando-se no ponto $x = 2$. Como os limites à esquerda e à direita não são idênticos (para uma mesma função), então as funções não apresentam limites; desta forma, dizemos que o **limite** é **indefinido** quando $x \to 2$.

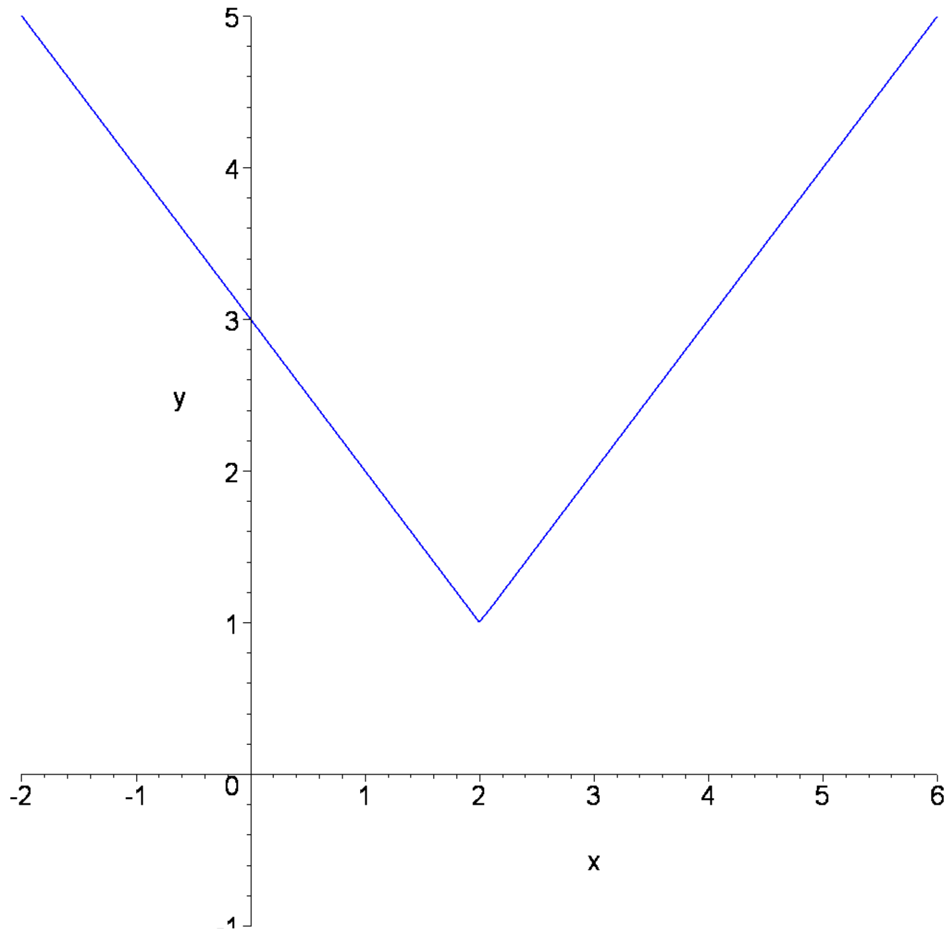
Exemplo 04 - Limite Bilateral

Vamos considerar a função $f(x) = |x - 2| + 1$ definida no conjunto dos reais. Abaixo, segue o seu gráfico.

```
> restart: with(plots): with(student): with(student):
> f:=x->abs(x-2)+1;
```

$$f := x \to |x - 2| + 1$$

```
> plot(f(x),x=-2..6,y=-1..5,color=blue,thickness=2);
```



Calculemos os seus limites no ponto $x_0 = 2$ e nas laterais (à esquerda e à direita) deste ponto, fazendo uso de comandos **Maple**.

```
> Limit(f(x),x=2,left)=limit(f(x),x=2,left);
```

$$\lim_{x \to 2-} |x-2| + 1 = 1$$

```
> Limit(f(x),x=2,right)=limit(f(x),x=2,right);
```

$$\lim_{x \to 2+} |x-2| + 1 = 1$$

```
> Limit(f(x),x=2)=limit(f(x),x=2);
```

$$\lim_{x \to 2} |x-2| + 1 = 1$$

A função apresenta os limites iguais a unidade, à sua esquerda e à sua direita, no ponto $x_0 = 2$. Como os limites à esquerda e à direita são idênticos, então dizemos que a função apresenta limite **bilateral** quando $x \to 2$. Portanto, a função apresenta limite quando $x \to 2$, e este limite é a unidade.

Adiante, na seção de propriedades, apresentaremos teorema da existência do limite quando existirem ambos os limites à esquerda e à direita e estes forem iguais.

Limites Infinitos e Limites no infinito

Nesta seção, apresentamos situações em que os limites laterais não existem devido ao comportamento de crescimento ou decrescimento muito grande da função nas proximidades de um ponto. Em outras situações, desejamos saber sobre o comportamento da função quando do crescimento ou decrescimento, em valores muito grande da variável independente x.

Exemplo 05

Vamos considerar a função $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$.

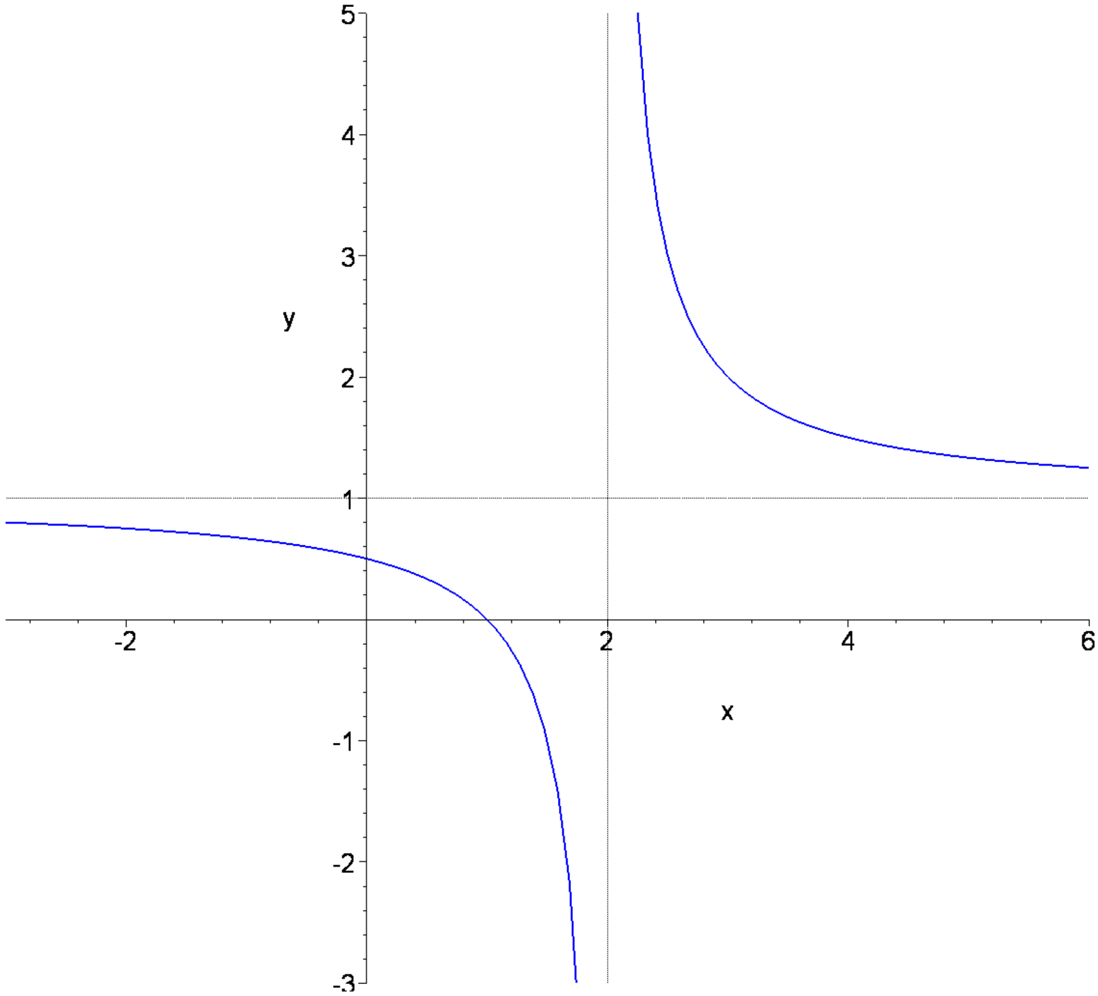
Abaixo, apresentamos a implementação da função no **Maple**, com a construção do seu gráfico e as retas assíntotas.

```
> restart: with(plots): with(plottools): with(student):
> f:=x->1+1/(x-2);
```

$$f := x \rightarrow 1 + \frac{1}{x-2}$$

Gráfico da função $f(x)$:

```
> graf1:=plot(f(x),x=-3..6,y=-3..5,color=blue,thickness=2,discont=true):
> graf2:=plot(1,x=-3..6,color=black,thickness=1,linestyle=2):
> graf3:=line([2,-3],[2,5],color=black,thickness=1,linestyle=2):
> display(graf1,graf2,graf3);
```



A seguir, os comandos **Maple** efetuam os cálculos dos limites para a função, a saber:

```
> Limit('f(x)',x=2,left)=limit(f(x),x=2,left);
```

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = -\infty$$

```
> Limit('f(x)',x=2,right)=limit(f(x),x=2,right);
```

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \infty$$

```
> Limit('f(x)',x=2)=limit(f(x),x=2);
```

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \mathit{undefined}$$

Na função definida acima, observamos que o domínio da função $f(x)$ é o conjunto dos números reais, excetuando-se o valor 2.

A função apresenta um comportamento de crescimento muito grande negativamente à esquerda do ponto $x_0 = 2$ e um crescimento muito grande positivamente à direita deste ponto. Portanto, a função apresenta limite à esquerda igual a menos infinito e à direita igual a mais infinito, quando $x \to 2$. Como os limites à esquerda e à direita <u>não</u> são idênticos, então a função apresenta **limite indefinido** quando $x \to 2$.

Observando-se o gráfico da função, vemos que os valores da variável independente x cresce indefinidamente, tanto positiva quanto negativamente. Vamos proceder a avaliação dos limites nestas situações, utilizando-se dos recursos do **Maple**, a saber:

```
> Limit(f(x),x=-infinity)=limit(f(x),x=-infinity);
```

$$\lim_{x \to (-\infty)} 1 + \frac{1}{x-2} = 1$$

```
> Limit(f(x),x=infinity)=limit(f(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} 1 + \frac{1}{x-2} = 1$$

Dos resultados acima obtidos e o comportamento da função observado no gráfico, podemos concluir que a função apresenta um limite igual a unidade quando $x \to -\infty$ ou para $x \to \infty$.

Exemplo 06

Vamos considerar a função $\mathrm{f}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & 0 < x \end{cases}$

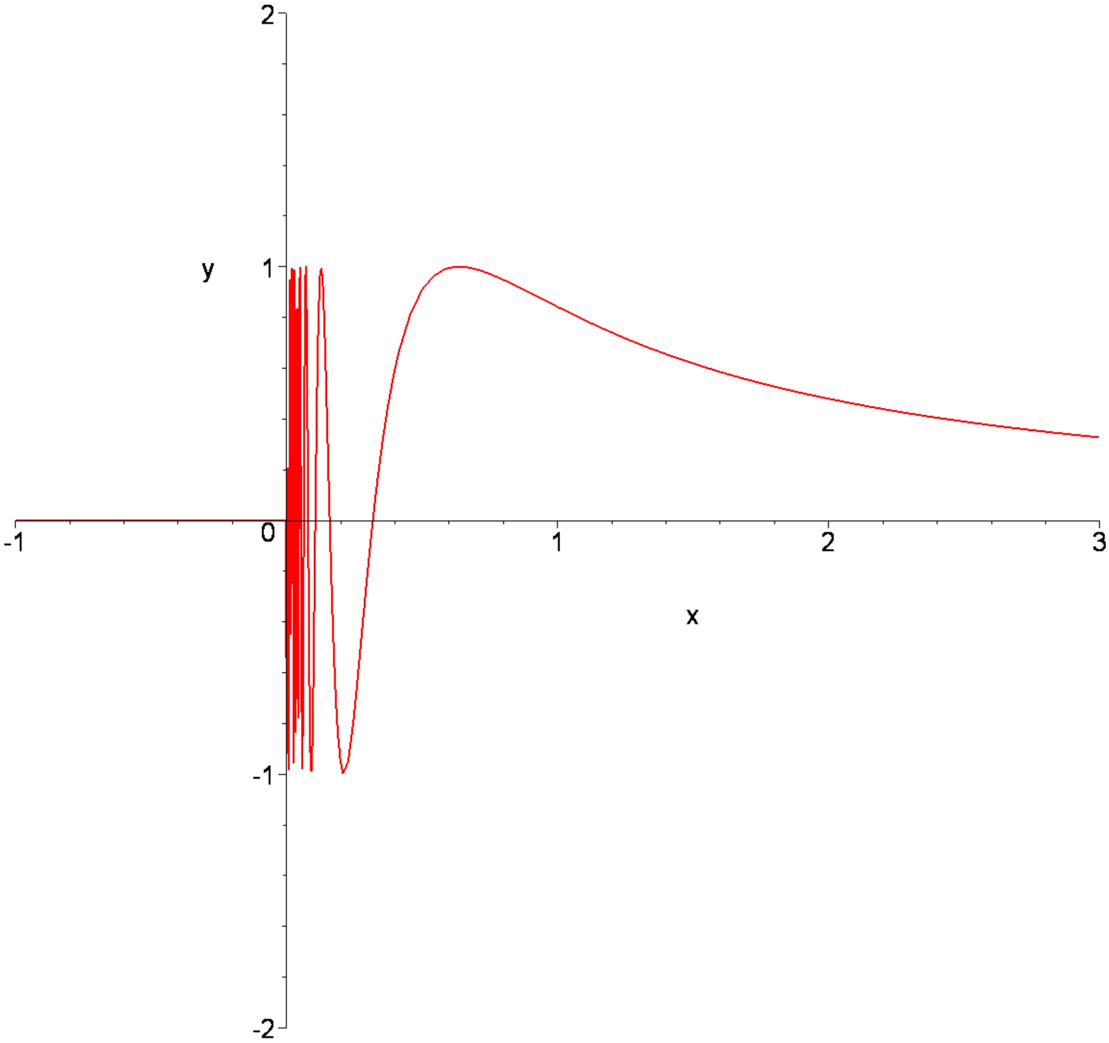
Abaixo, apresentamos a implementação da função no **Maple**, com a construção do seu gráfico.

```
> restart: with(plots): with(plottools): with(student):
> f:=x->piecewise(x<=0,0,x>0,sin(1/x));
```

$$f := x \to \mathrm{piecewise}\left(x \leq 0, 0, 0 < x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

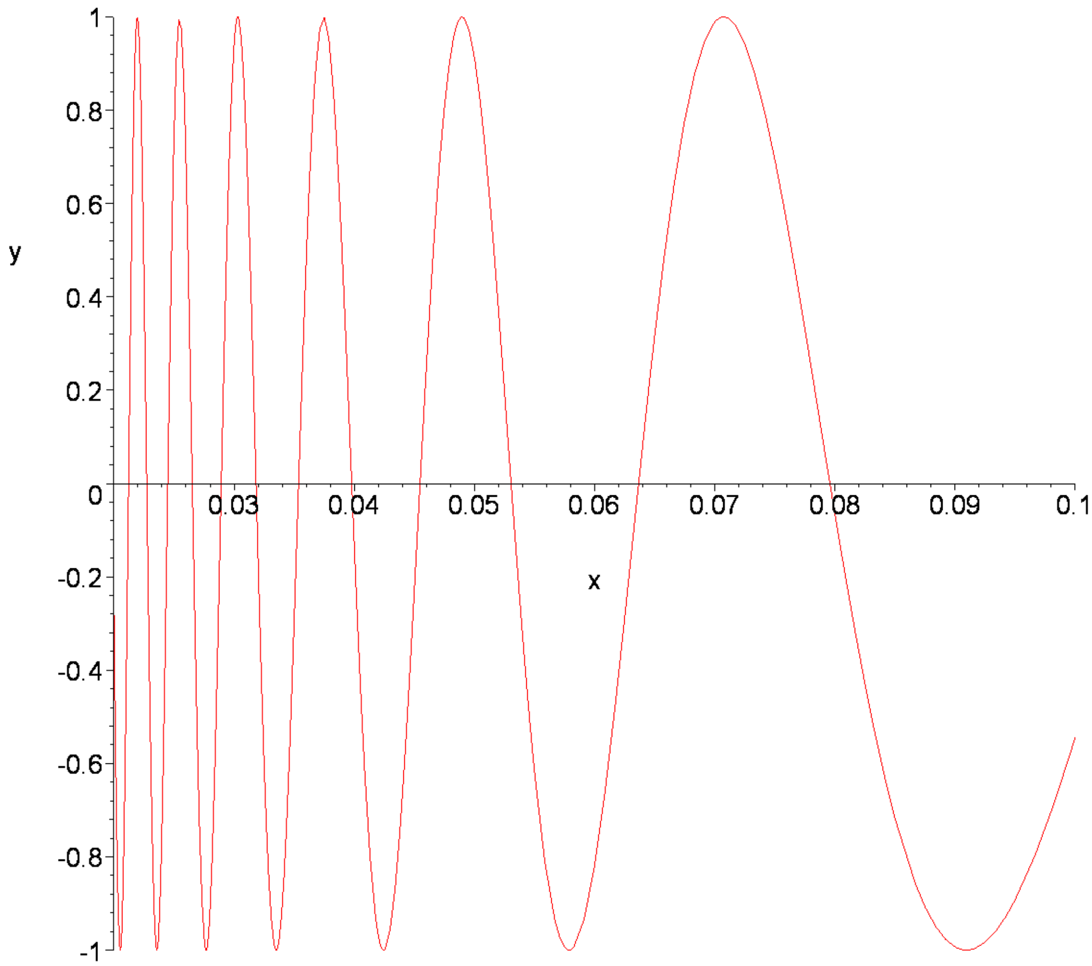
Gráficos da função $\mathrm{f}(x)$:

```
> graf1:=plot(f(x),x=-1..3,y=-2..2,thickness=2):
> display(graf1);
```



Detalhe do gráfico nas proximidades da abscissa $x = 0$:

```
> graf2:=plot(f(x),x=0.02..0.1,y=-1..1):
> display(graf2);
```



A seguir, os comandos **Maple** efetuam a avaliação do limite para a função, a saber:

```
> Limit('f(x)',x=0,left)=limit(f(x),x=0,left);
```

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0$$

```
> Limit('f(x)',x=0,right)=limit(f(x),x=0,right);
```

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = -1 .. 1$$

Na função definida acima, observamos que o domínio da função $f(x)$ é o conjunto dos números reais.

A função apresenta um limite igual a zero quando se aproxima de zero pela esquerda, e apresenta um valor oscilando entre -1 e 1 quando se aproxima de zero pela direita (ver detalhe no segundo gráfico anterior). Portanto, a função apresenta um **limite indefinido** quando $x \to 0$.

Analogamente ao exercício anterior, podemos avaliar o comportamento da função quando x cresce muito, ou seja, quando $x \to \infty$. O comando **Maple**, abaixo, mostra que o comportamento da função tende a zero.

```
> Limit('f(x)',x=infinity)=limit('f(x)',x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

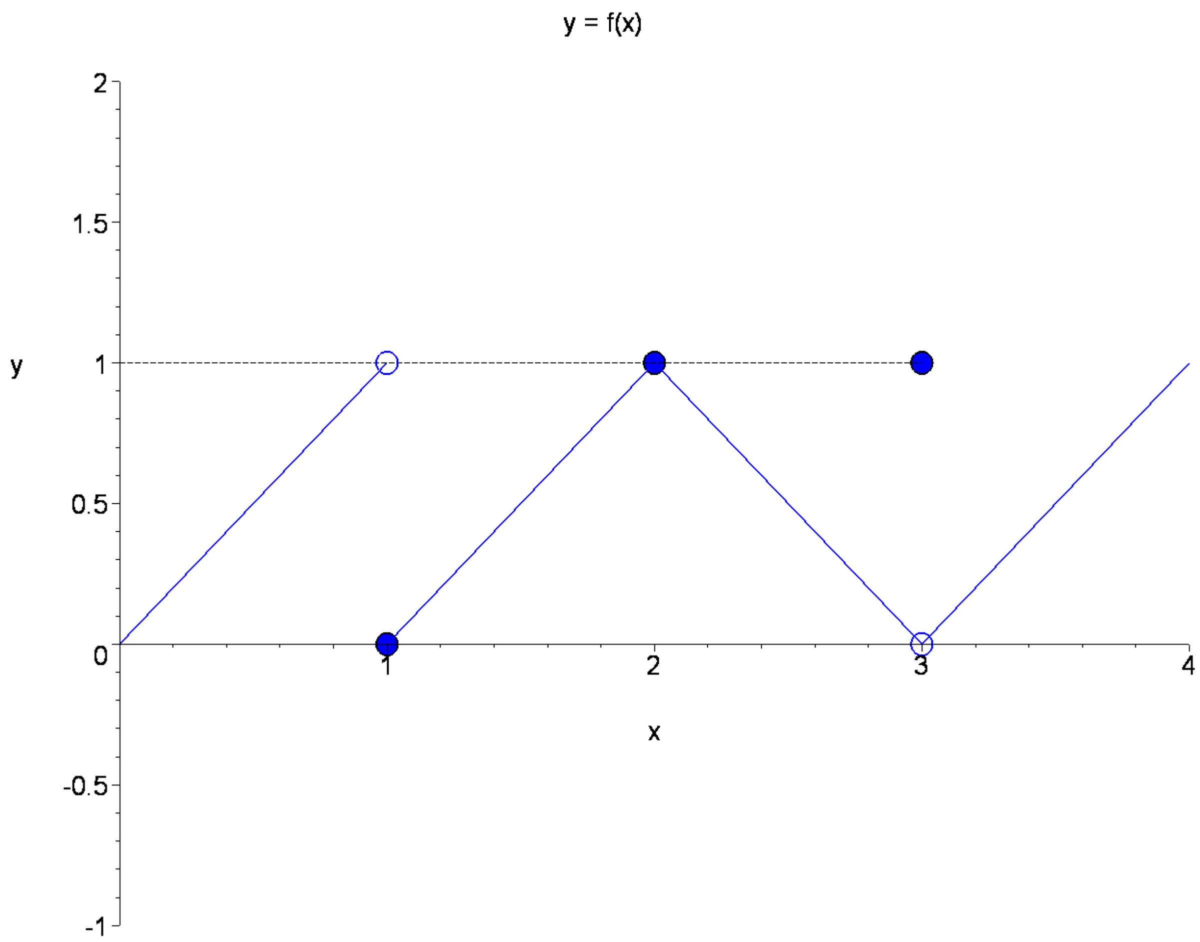
Exercícios propostos

01 - Considere a função $f(x)$ definida no gráfico a seguir. Encontre os limites indicados ou explique por que eles não existem.

a) $\lim_{x \to 1} f(x)$;

b) $\lim_{x \to 2} f(x)$;

c) $\lim_{x \to 3} f(x)$.



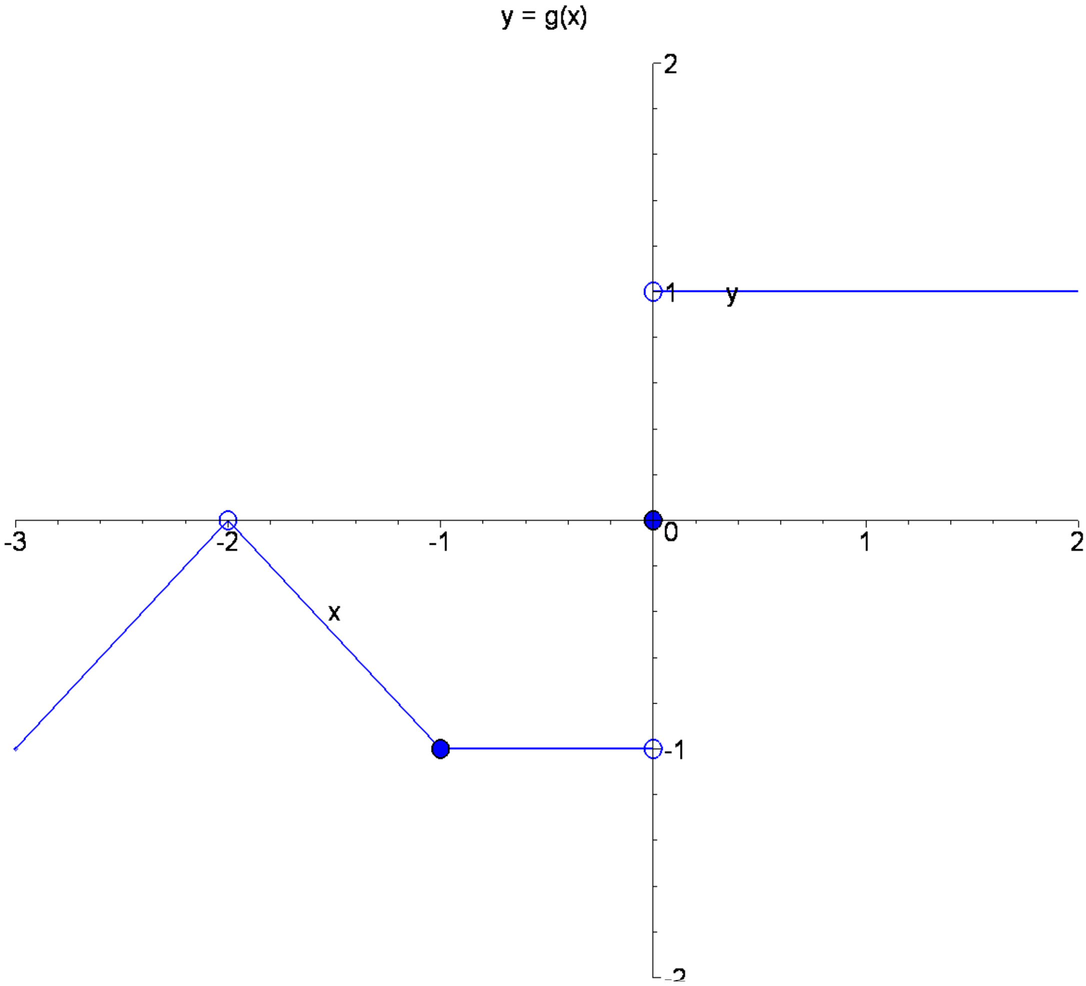
02 - Considere a função $g(x)$ definida a seguir. Encontre os limites indicados ou explique por que eles não existem.

a) $\lim_{x \to (-2)} g(x)$;

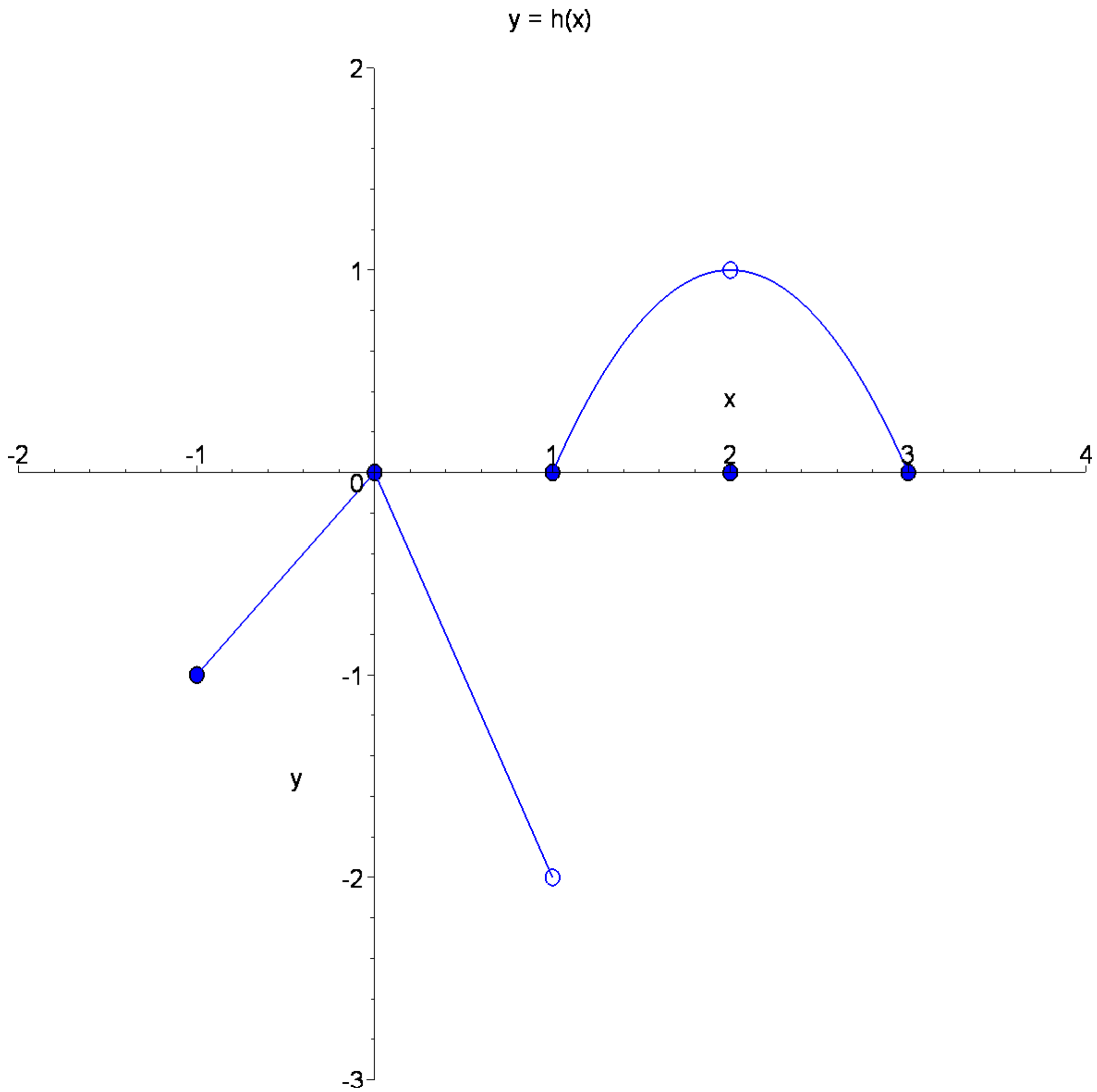
b) $\lim_{x \to (-1)} g(x)$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$;

d) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.



03 - Considere a função $h(x)$definida a seguir. Encontre os limites laterais para o intervalo inteiro de [-1 ; 3] e os limites nos pontos 0, 1 e 2 ou explique por que eles não existem.



04 - Considere as funções k(x) definidas de conformidade com os gráficos 1 e 2, a seguir. Descreva os limites no ponto "a" e em suas laterais. Qual o comportamento da função quando os valores da abscissa tendem para o infinito, positiva e negativamente?

Gráfico 1:

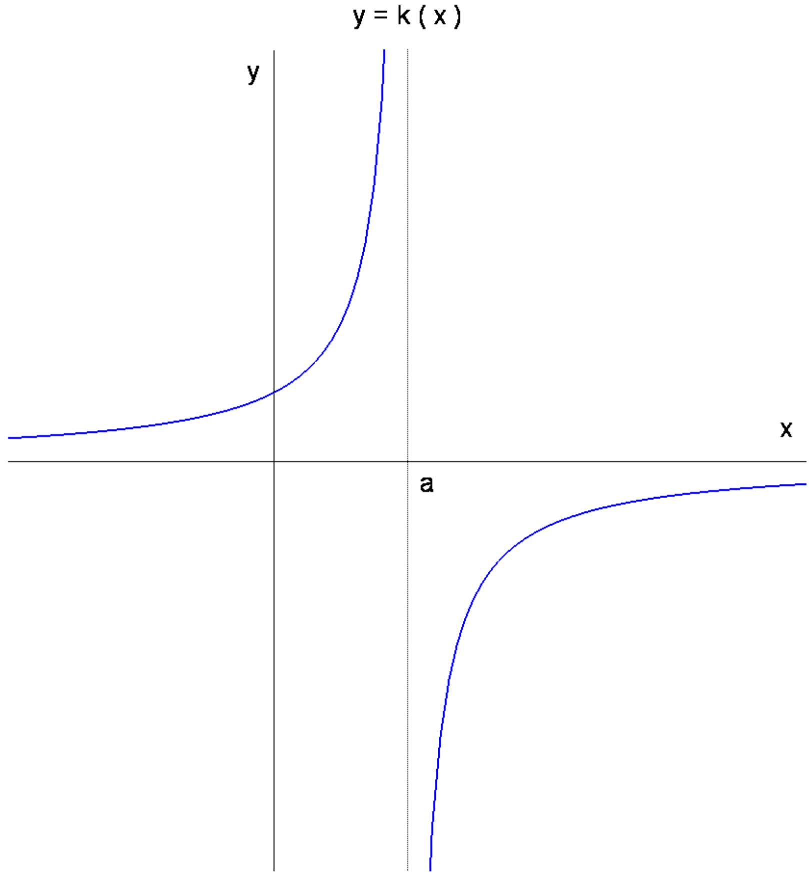
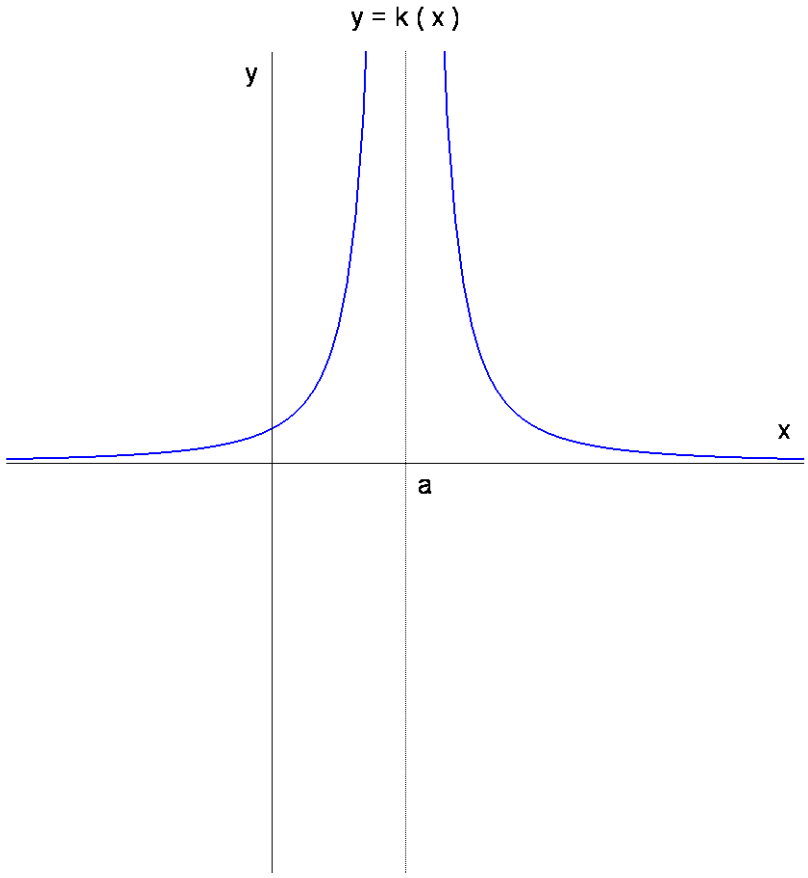


Gráfico 2:



05 - Para as funções dos itens abaixo, estime os limites nos pontos indicados e em suas laterais. Construa o gráfico da função e uma tabela de valores para análise da solução. Encontre o limite algebricamente e utilize o comando **limit** do **Maple** para verificar os resultados.

a) $\mathrm{a}(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$, no ponto $x = -3$;

b) $\mathrm{b}(x) = \dfrac{x + 6}{x^2 + 4\,x - 12}$, nos pontos $x = -6$ e $x = 2$;

c) $\mathrm{c}(x) = \dfrac{x^2 - 2\,x - 3}{x^2 - 4\,x + 3}$, nos pontos $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$;

d) $\mathrm{d}(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x| - 1}$, nos pontos $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$;

e) $\mathrm{e}(x) = \dfrac{2^x - 1}{x}$, nos pontos $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$;

f) $\mathrm{f}(x) = \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$, nos pontos $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$;

g) $\mathrm{g}(x) = \dfrac{x}{(x - 2)^2}$, nos pontos $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$;

h) $\mathrm{h}(x) = \dfrac{x}{2 - |x|}$, nos pontos $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$;

j) $\mathrm{j}(x) = \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$, nos pontos $x = 0$, $x = 4$, $x \to \infty$;

Propriedades de Limites

Nas seções anteriores, usamos procedimentos gráficos, apoio computacional e alguns processos analíticos para estimativas de valores de limites de funções. Os resultados obtidos foram baseados no desenvolvimento informal do conceito de limites. Nesta seção, abordaremos alguns teoremas para calcular esses limites. Neste momento, não apresentaremos demonstrações destes teoremas, visto que estas demonstrações são bastante discutidas e facilmente encontradas nas bibliografias referenciadas.

Teoremas

Teorema 1 - Limites de Funções Básicas

Sejam *c* e *k* constantes reais. Sejam as funções constante, identidade e recíprocas, definidas no conjunto dos reais, em um intervalo aberto contendo um ponto *c*, exceto talvez neste ponto, definidas, respectivamente, por $\mathrm{f}(x) = k$, $\mathrm{g}(x) = x$ e $\mathrm{h}(x) = \dfrac{1}{x}$.

Abaixo, apresentamos os gráficos destas funções. Para efeito de implementação, consideremos $k = 2$ e uma janela de visualização no intervalo fechado de [-3 ; 3].

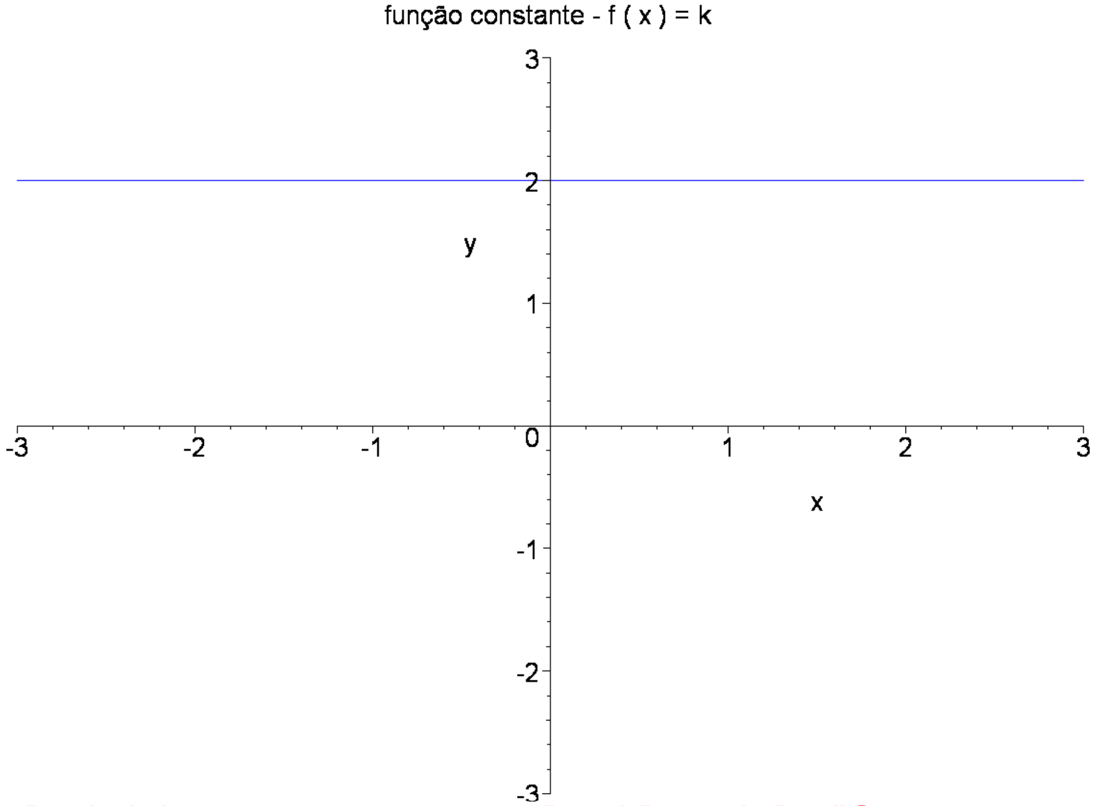
```
> restart: with(plots): with(student):
> k:=2:
> f:=x->k; g:=x->x; h:=x->1/x;
```

$$f := x \to k$$

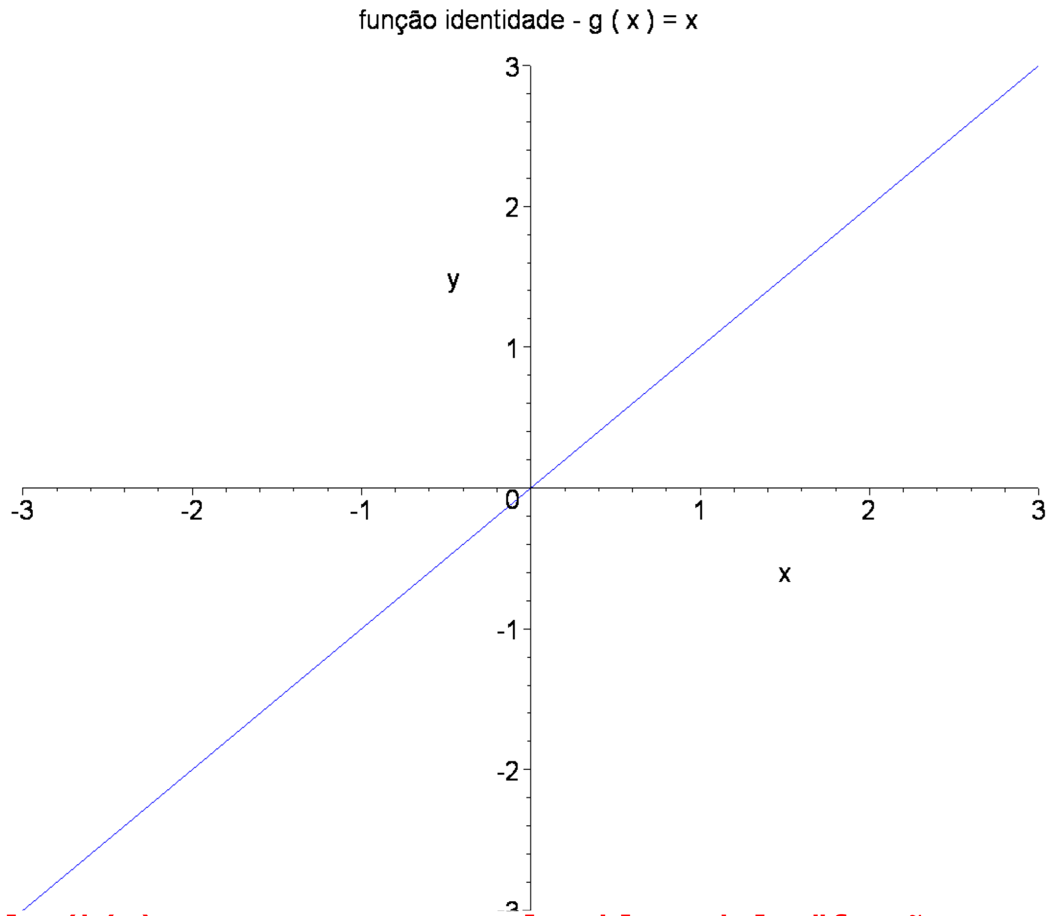
$$g := x \to x$$

$$h := x \to \frac{1}{x}$$

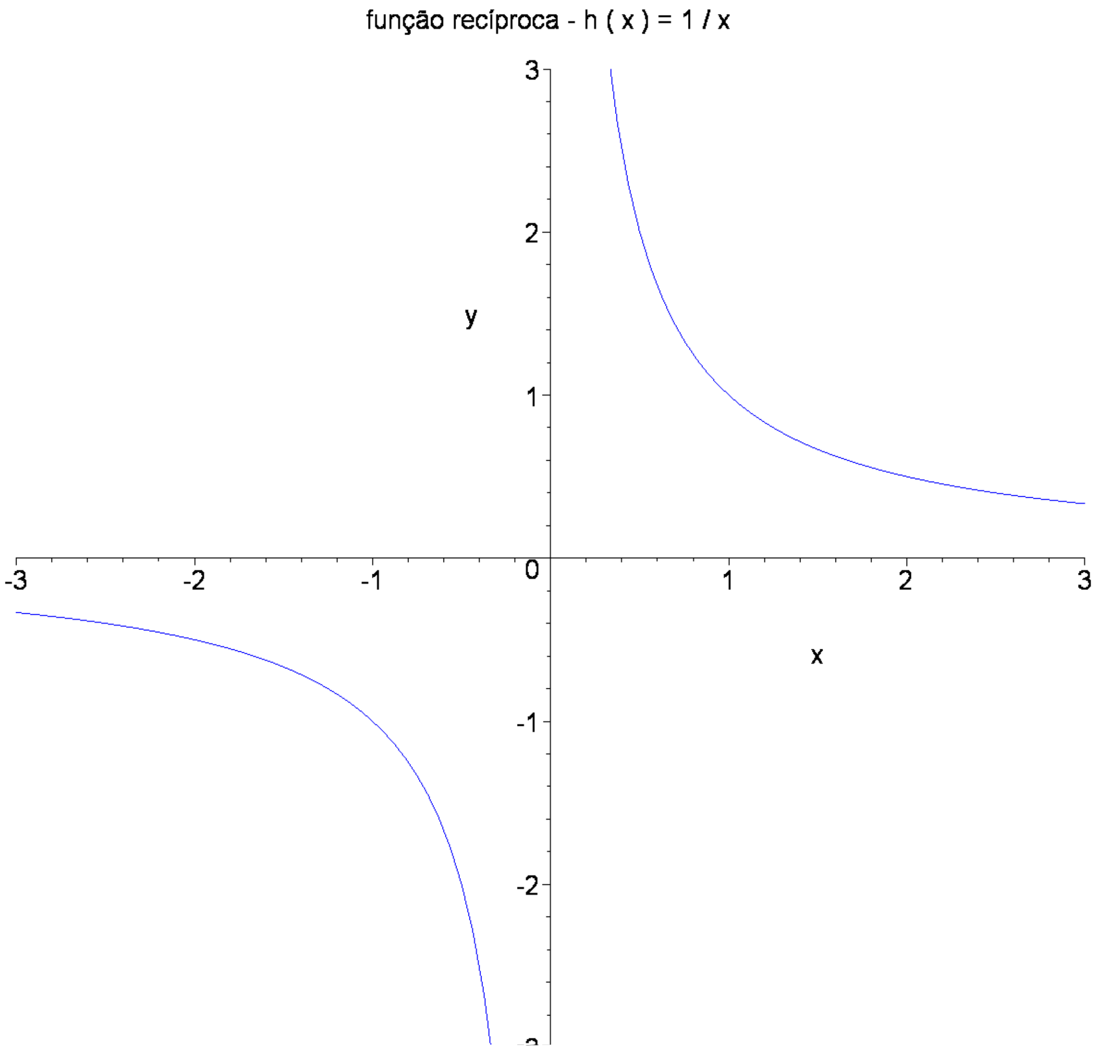
```
> plot(f(x),x=-3..3,y=-3..3,color=blue,title="função
  constante - f ( x ) = k");
```




```
> plot(g(x),x=-3..3,y=-3..3,color=blue,title="função
  identidade - g ( x ) = x");
```




```
> plot(h(x),x=-3..3,y=-3..3,color=blue,title="função
  recíproca - h ( x ) = 1 / x",discont=true);
```



Teorema 1.1 - $\lim_{x \to c} k = k$. O limite de uma função constante *k*, quando $x \to c$ é a própria constante *k*.

Teorema 1.2 - $\lim_{x \to c} x = c$. O limite da função identidade, quando $x \to c$ é a própria constante *c*.

Teorema 1.3a - $\lim_{x \to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$. O limite da função recíproca, quando *x* tende a zero pela esquerda é $-\infty$.

Teorema 1.3b - $\lim_{x \to 0+} \dfrac{1}{x} = \infty$. O limite da função recíproca, quando *x* tende a zero pela direita é ∞ .

Teorema 1.3c - $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$. O limite da função recíproca, quando $x \to \infty$ é zero .

Teorema 1.3d - $\lim\limits_{x \to (-\infty)} \frac{1}{x} = 0$. O limite da função recíproca, quando $x \to -\infty$ é zero .

Teorema 2 - Leis dos Limites

Sejam *c*, *k*, *L e M* constantes reais. Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$, definidas no conjunto dos reais, em um intervalo aberto contendo um ponto *c*, exceto talvez neste ponto, tais que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$, então:

Teorema 2.1 - Regra da Soma

$\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)] = [\lim\limits_{x \to c} f(x)] + [\lim\limits_{x \to c} g(x)] = L + M$. O limite da soma de duas funções é a soma dos seus limites.

Teorema 2.2 - Regra da Diferença

$\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] = [\lim\limits_{x \to c} f(x)] - [\lim\limits_{x \to c} g(x)] = L - M$. O limite da diferença de duas funções é a diferença dos seus limites.

Teorema 2.3 - Regra do Produto

$\lim\limits_{x \to c} [f(x)\, g(x)] = [\lim\limits_{x \to c} f(x)]\, [\lim\limits_{x \to c} g(x)] = L \,.\, M$. O limite do produto de duas funções é o produto dos seus limites.

Teorema 2.4 - Regra do Quociente

$\lim\limits_{x \to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$ = L / M, com $M \neq 0$. O limite do quociente de duas funções é o quociente dos seus limites, desde que o limite do denominador seja diferente de zero.

Teorema 2.5 - Regra do Produto de uma Constante por uma Função

$\lim\limits_{x \to c} [k\, f(x)] = k\, [\lim\limits_{x \to c} f(x)] = k \,.\, L$. O limite do produto de uma constante por uma função é o produto da constante pelo limite da função.

Teorema 2.6 - Regras da Potenciação / Radiciação

Sejam *n*, *p* e *q* inteiros positivos, não tendo fatores comuns entre *p* e $q \neq 0$, então:

Teorema 2.6.1 - Potenciação inteira

$\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^n = L^n$. O limite da potência de uma função é a potência do limite da função.

Teorema 2.6.2 - Radiciação inteira

$\lim\limits_{x \to c} \left[f(x)^{\left(\frac{1}{n}\right)} \right] = L^{\left(\frac{1}{n}\right)}$. O limite da radiciação de uma função é a radiciação do limite da função

Teorema 2.6.3 - Potência Racional

$\lim_{x \to c} \left[f(x)^{\left(\frac{p}{q}\right)} \right] = L^{\left(\frac{p}{q}\right)}$. O limite de uma potência racional de uma função é a potência racional do limite da função.

Teorema 3 - Limites de Polinômios

Seja um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, então:

$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{(n-1)} + \ldots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0$. O limite de um polinômio é o valor obtido por substituição da variável *x* por *c* e efetuado as operações.

Para limites de polinômios quando $x \to -\infty$ ou $x \to \infty$, o comportamento final coincide com o comportamento de seu termo de maior grau. Assim sendo, temos:

$$\lim_{x \to (-\infty)} P(x) = \lim_{x \to (-\infty)} a_n x^n + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0 = \lim_{x \to (-\infty)} a_n x^n$$

$$\lim_{x \to \infty} P(x) = \lim_{x \to \infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0 = \lim_{x \to \infty} a_n x^n$$

Teorema 4 - Limites de Funções Racionais

Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios e $Q(c) \neq 0$, então:

$\lim_{x \to c} \left[\frac{P(x)}{Q(x)} \right] = \frac{P(c)}{Q(c)}$. O limite de uma função racional é obtido por substituição da variável *x* por *c* e efetuado as operações, quando $Q(c) \neq 0$. Em caso de divisão por zero e indeterminações, procura-se simplificar a expressão, cancelando-se fatores comuns aos numerador e denominador, reduzindo-a a outra fração, de tal forma que tenha sido eliminado a divisão por zero ou indeterminação e aplica-se às regras anteriores.

Para limites de funções com funções polinomiais racionais quando $x \to -\infty$ ou $x \to \infty$, o comportamento final coincide com o comportamento de seu termo de maior grau do numerador dividido pelo termo de maior grau do denominador.

Teorema 5 - Limites de Funções Fundamentais

Teorema 5.5.1 - Função Exponencial

$\lim_{x \to c} [\mathbf{e}^{f(x)}] = \mathbf{e}^{L}$. O limite da exponencial de uma função é a exponencial do limite da função.

Teorema 5.5.2 - Função Logarítmica

$\lim_{x \to c} [\ln(f(x))] = \ln(L)$. O limite do logaritmo natural de uma função é o logaritmo natural do limite da função.

Teorema 5.5.3 - Função Seno

$\lim_{x \to c} [\text{sen}(f(x))] = \text{sen}(L)$. O limite do seno de uma função é o seno do limite da função.

Teorema 5.5.4 - Função Cosseno

$\lim_{x \to c} [\cos(f(x))] = \cos(L)$. O limite do cosseno de uma função é o cosseno do limite da função.

Teorema 6 - Teorema da Unicidade do Limite

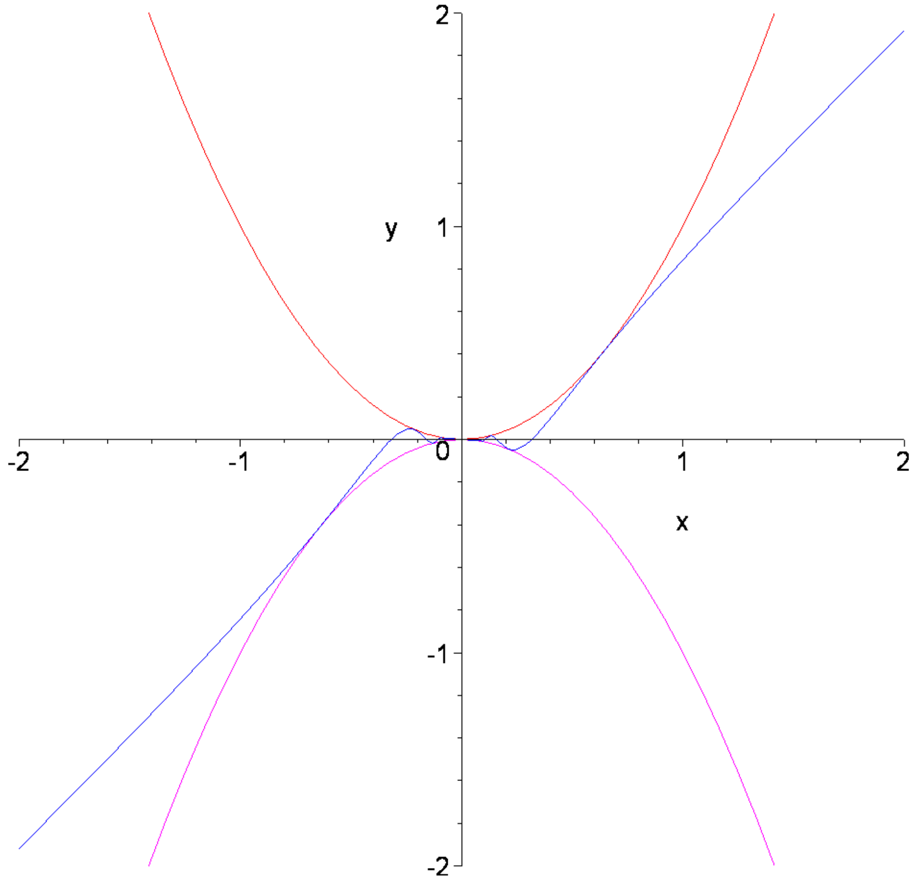
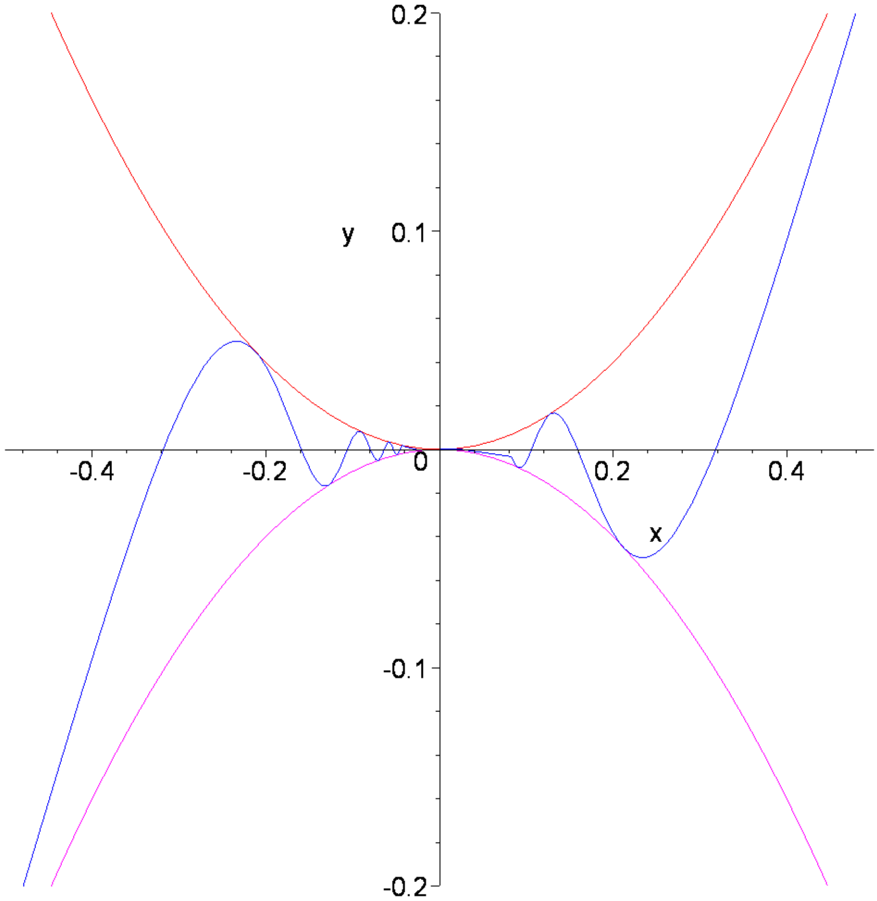
Sejam $f(x)$ uma função e L_1 e L_2 dois valores reais quaisquer.

Se $\lim_{x \to c} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to c} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

Teorema 7 - Teorema do Confronto ou do Sanduiche

Sejam c e L constantes reais. Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ funções definidas no conjunto dos reais, em um intervalo aberto contendo um ponto c, exceto talvez neste ponto, tal que $f(x) \le g(x)$ e $g(x) \le h(x)$ e que satisfaça à condição $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$. Então, $\lim_{x \to c} g(x) = L$.

Os gráficos a seguir ilustram geometricamente o teorema. Exemplificando, sejam as funções $f(x) = x^2$ e $h(x) = -x^2$, ilustradas nos gráficos nas cores vermelha (acima do eixo-x) e magenta (abaixo do eixo-x), respectivamente. Seja a função $g(x) = x^2\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, ilustrada no gráfico na cor azul (gráfico comprimido entre as curvas parabólicas). Observamos que os limites das funções coincidem quando $x \to 0$.


2
y
1
-2
-1
0
1
2
x
-1
-2

0.2
y
0.1
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
x
-0.1
-0.2

Teorema 8 - Limites Laterais e Limite de uma Função

Sejam c e L constantes reais. Seja uma função definida em um intervalo aberto contendo um ponto c, exceto talvez neste ponto, então $\lim\limits_{x \to c} \mathrm{f}(x) = L$ se e somente se $\lim\limits_{x \to c-} \mathrm{f}(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to c+} \mathrm{f}(x) = L$. O limite de uma função em um ponto existe se os limites laterais à esquerda e à direita existirem e forem iguais.

Teorema 9 - Limites Infinitos

Sejam c e L constantes reais. Sejam $\mathrm{f}(x)$ e $\mathrm{g}(x)$ definidas no conjunto dos reais, em um intervalo aberto contendo um ponto c, exceto talvez neste ponto.

Teorema 9.1 - Se $\lim\limits_{x \to c} \mathrm{f}(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to c} \mathrm{g}(x) = L$, e

Teorema 9.1a - Se $0 < L$ e se $f \to 0$ por valores positivos de $\mathrm{f}(x)$, então: $\lim\limits_{x \to c} \left[\dfrac{\mathrm{g}(x)}{\mathrm{f}(x)} \right] = \infty$.

Teorema 9.1b - Se $0 < L$ e se $f \to 0$ por valores negativos de $\mathrm{f}(x)$, então:
$\lim\limits_{x \to c} \left[\dfrac{\mathrm{g}(x)}{\mathrm{f}(x)} \right] = -\infty$.

Teorema 9.1c - Se $L < 0$ e se $f \to 0$ por valores positivos de $\mathrm{f}(x)$, então: $\lim\limits_{x \to c} \left[\dfrac{\mathrm{g}(x)}{\mathrm{f}(x)} \right] = -\infty$
.

Teorema 9.1d - Se $L < 0$ e se $f \to 0$ por valores negativos de $\mathrm{f}(x)$, então: $\lim\limits_{x \to c} \left[\dfrac{\mathrm{g}(x)}{\mathrm{f}(x)} \right] = \infty$
.

Teorema 9.2a - Se $\lim\limits_{x \to c} \mathrm{f}(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to c} \mathrm{g}(x) = L$, então: $\lim\limits_{x \to c} [\,\mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x)\,] = \infty$

Teorema 9.2b - Se $\lim\limits_{x \to c} \mathrm{f}(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to c} \mathrm{g}(x) = L$, então: $\lim\limits_{x \to c} [\,\mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x)\,] = -\infty$

Teorema 9.3a - Se $\lim\limits_{x \to c} \mathrm{f}(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to c} \mathrm{g}(x) = L$, e $0 < L$ então: $\lim\limits_{x \to c} [\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(x)\,] = \infty$

Teorema 9.3b - Se $\lim\limits_{x \to c} \mathrm{f}(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to c} \mathrm{g}(x) = L$, e $L < 0$ então: $\lim\limits_{x \to c} [\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(x)\,] = -\infty$

Teorema 9.4a - Se $\lim\limits_{x \to c} \mathrm{f}(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to c} \mathrm{g}(x) = L$, e $0 < L$ então: $\lim\limits_{x \to c} [\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(x)\,] = -\infty$

Teorema 9.4b - Se $\lim\limits_{x \to c} \mathrm{f}(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to c} \mathrm{g}(x) = L$, e $L < 0$ então: $\lim\limits_{x \to c} [\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(x)\,] = \infty$

Teorema 10 -

Seja c uma constante real. Sejam $\mathrm{f}(x)$ e $\mathrm{g}(x)$ funções definidas no conjunto dos reais, em um intervalo aberto contendo um ponto c, exceto talvez neste ponto, tal que $\mathrm{f}(x) \le \mathrm{g}(x)$ e que os limites de $\mathrm{f}(x)$ e $\mathrm{g}(x)$ existam quando $x \to c$, então

$$\lim_{x \to c} \mathrm{f}(x) \le \lim_{x \to c} \mathrm{g}(x) .$$

Exercícios-exemplos

Nos exercícios-exemplos a seguir, vamos calcular os limites das funções, explicitando os teoremas envolvidos, conforme expostos acima.

Exemplo 07 - $\lim_{x \to 2} [x^3 + 4x - 8]$.

$\lim_{x \to 2} [x^3 + 4x - 8] = [\lim_{x \to 2} x^3] + [\lim_{x \to 2} 4x] + [\lim_{x \to 2} 8]$ ==> teorema da adição e subtração (teorema 2.1 e teorema 2.2)

$= [\lim_{x \to 2} x^3] + [4(\lim_{x \to 2} x)] + [\lim_{x \to 2} 8]$ ==> teorema do produto de constante por função (teorema 2.5)

$= 8 + 4.2 - 8$ ==> teorema 5 e teorema 1.1 e 1.2

$= 8 + 8 - 8 = 8$ ==> operação numérica .

Exemplo 08 - $\lim_{x \to 3} \frac{x - 5}{x^2 - 3}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 5}{x^2 - 3} = \frac{\lim_{x \to 3} x - 5}{\lim_{x \to 3} x^2 - 3}$$ ==> teorema do quociente (teorema 2.4)

$$= \frac{[\lim_{x \to 3} x] - [\lim_{x \to 3} 5]}{[\lim_{x \to 3} x^2] - [\lim_{x \to 3} 2]}$$ ==> teorema da subtração (teorema 2.2)

$$= \frac{3 - 5}{9 - 2} = -\frac{2}{7}$$ ==> teoremas de funções básicas e de polinômios (teorema 1.1 e 1.2 e teorema 3)

Exemplo 09 - $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$ ==> fatoração do numerador

$= \lim_{x \to 1} x + 1$, para $x \neq 1$ ==> simplificação

$= [\lim_{x \to 1} x] + [\lim_{x \to 1} 1]$ ==> teorema da soma (teorema 2.1)

$= 1 + 1$ ==> teorema de funções básicas (teorema 1.1 e 1.2)

$= 2$ ==> operação numérica

Exemplo 10 - $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x+5}{6x-8}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x+5}{6x-8} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3+\frac{5}{x}}{6-\frac{8}{x}}$ ==> divide o numerador e o denominador por *x* (maior grau de *x* no denominador)

$= \dfrac{\lim\limits_{x \to \infty} 3+\frac{5}{x}}{\lim\limits_{x \to \infty} 6-\frac{8}{x}}$ ==> teorema do quociente (teorema 2.4)

$= \dfrac{[\lim\limits_{x \to \infty} 3] + \left[\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5}{x}\right]}{[\lim\limits_{x \to \infty} 6] - \left[\lim\limits_{x \to \infty} \frac{8}{x}\right]}$ ==> teoremas da adição e subtração (teoremas 2.1 e 2.2)

$= \dfrac{3+5\left[\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}\right]}{6-8\left[\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}\right]}$ ==> teorema produto de constante por função (teorema 2.5)

$= \dfrac{3+5.\,0}{6-8.\,0}$ ==> teorema de funções básicas (teorema 1.3c)

$= \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ ==> operação numérica

Exemplo 11 - $\lim\limits_{x \to (-2)} \sqrt{4x^2-3}$

$\lim\limits_{x \to (-2)} \sqrt{4x^2-3} = \sqrt{\lim\limits_{x \to (-2)} 4x^2-3}$ ==> teorema da radiciação (teorema 2.6.2)

$= \sqrt{[\lim_{x \to (-2)} 4x^2] - [\lim_{x \to (-2)} -3]}$ ==> teorema da diferença (teorema 2.2)

$= [\sqrt{[4(\lim_{x \to (-2)} x^2)] - (\lim_{x \to (-2)} -3)}\,]$ ==> teorema do produto de constante por função (teorema 2.5)

$= \sqrt{(4 \,.\, 4) - 3}$ ==> teorema de polinômio e funções básicas (teorema 3 e teorema 1.1)

$= \sqrt{16 - 3} = \sqrt{13}$ ==> operação numérica .

Exemplo 12 - Considere que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to 0} g(x) = -5$. Usando as regras dos teoremas dos limites, determine o valor para expressão: $\lim_{x \to 0} \dfrac{2\,f(x) - g(x)}{(f(x)+7)^{\left(\frac{2}{3}\right)}}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\,f(x) - g(x)}{(f(x)+7)^{\left(\frac{2}{3}\right)}} = \frac{\lim_{x \to 0} [2\,f(x) - g(x)]}{\lim_{x \to 0} \left[(f(x)+7)^{\left(\frac{2}{3}\right)}\right]}$$ ==> teorema do quociente (teorema 2.4)

$$= \frac{[\lim_{x \to 0} 2\,f(x)] - [\lim_{x \to 0} g(x)]}{[\lim_{x \to 0} [f(x)+7]]^{\left(\frac{2}{3}\right)}}$$ ==> teorema da subtração e potênciação racional (teorema 2.2 e teorema 2.6.3)

$$= \frac{[2(\lim_{x \to 0} f(x)) - (\lim_{x \to 0} g(x))]}{[[\lim_{x \to 0} f(x)] + [\lim_{x \to 0} 7]]^{\left(\frac{2}{3}\right)}}$$ ==> teorema do produto de constante por função e teorema da adição (teorema 2.5 e teorema 2.1)

$$= \frac{2(1) - (-5)}{(1+7)^{\left(\frac{2}{3}\right)}}$$ ==> substituição de valores dos limites dados

$$= \frac{2+5}{8^{\left(\frac{2}{3}\right)}} = \frac{7}{4}$$ ==> operações numéricas.

Exemplo 13 - Considere uma função f(x), tal que $1-\frac{x^2}{4} \leq f(x)$ e $f(x) \leq 1+\frac{x^2}{2}$, para qualquer $x \neq 0$. Determine o valor para $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Vamos calcular o $\lim_{x\to 0}\left[1-\frac{x^2}{4}\right]$ e $\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{x^2}{2}\right]$.

I - $\lim_{x\to 0}\left[1-\frac{x^2}{4}\right] = [\lim_{x\to 0} 1] - \left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{4}\right] = 1 - 0 = 1$

II - $\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{x^2}{2}\right] = [\lim_{x\to 0} 1] + \left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2}\right] = 1 + 0 = 1$

Como os limites das expressões (I) e (II) são iguais a unidade, então pelo teorema do confronto ou sanduíche, e considerando o enunciado do problema, então $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Exemplo 14 - Encontre o $\lim_{x\to 0}\left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

Não podemos substituir $x = 0$ diretamente na expressão do limite, pois nos levaria a uma determinação ($0 \cdot \infty$) .
Desta forma, vamos utilizar outros métodos para a solução. A função seno está limitada entre os valores –1 e 1. Assim sendo, podemos utilizar o teorema 7, o teorema do confronto ou sanduíche. Portanto, podemos escrever:

$0 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, para qualquer $x \neq 0$.

Multiplicando-se ambos os membros das desigualdades acima por x^2, temos:

$0 \leq x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ e $x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$.

Aplicando-se limites a ambos os membros das desigualdades, obtemos:

$\lim_{x\to 0} 0 \leq \lim_{x\to 0}\left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ e $\lim_{x\to 0}\left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] \leq \lim_{x\to 0} x^2$.

Como $\lim_{x\to 0} 0 = 0$ e $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, e considerando as desigualdades acima, portanto, podemos concluir que:

$$\lim_{x \to 0} \left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0 \,.$$

Abaixo, vamos utilizar comandos **Maple** para visualizarmos o comportamento da função.

```
> restart: with(plots): with(student):
> f:=x->x^2*sin(1/x);
```

$$f := x \to x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Plotamos o gráfico da função, em várias janelas apropriadas, para visualizarmos melhor o comportamento da função nas proximidades do ponto $x_0 = 0$.

Gráfico 1: Janela-*x*: [-1 ; 1]

```
> plot(f(x),x=-1..1,y=-1..1,color=blue,thickness=2);
```

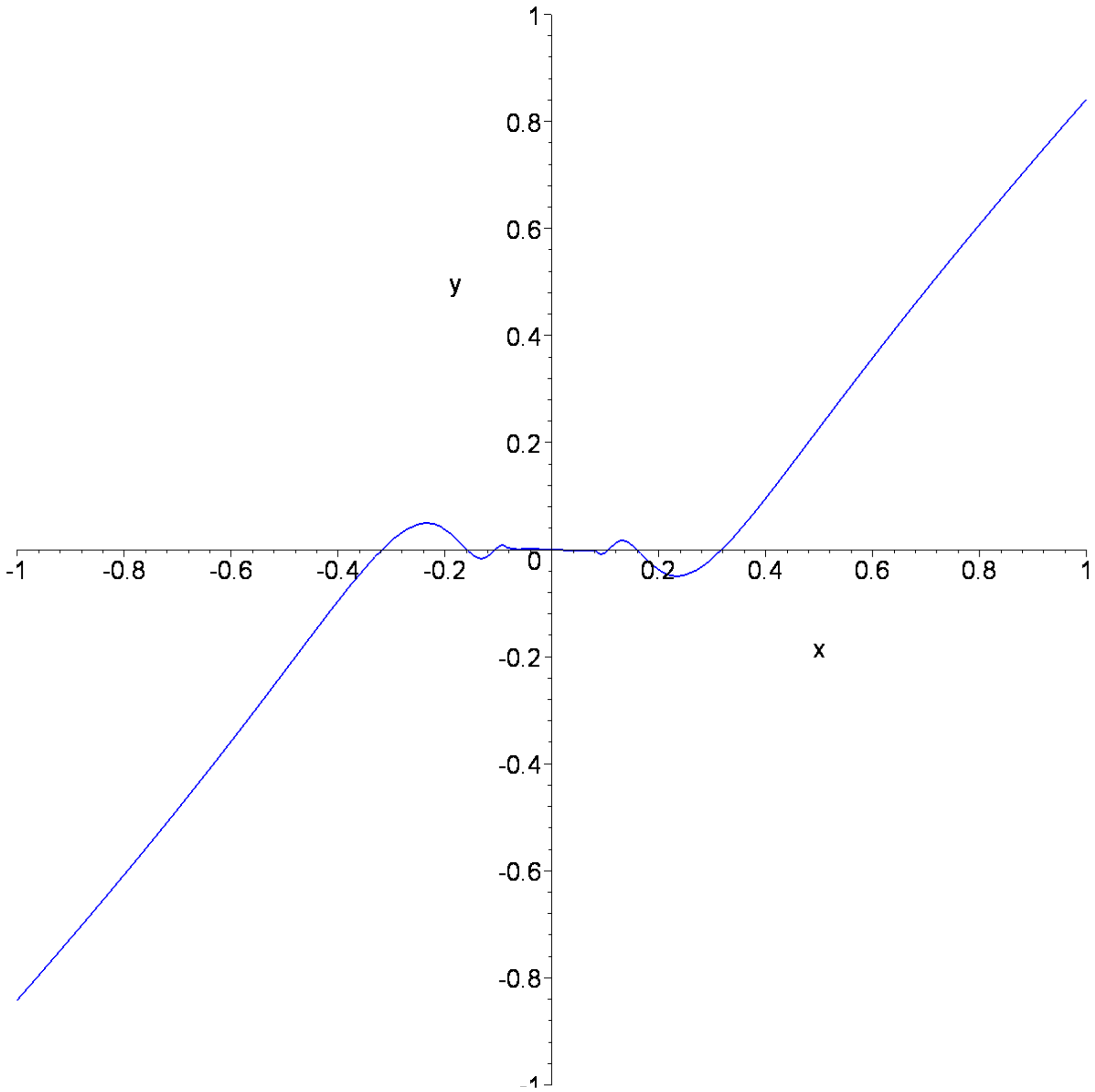


Gráfico 2: Janela-x: = [-0.4 .. 0.4]

```
> plot(f(x),x=-0.4..0.4,y=-0.2...0.2,color=blue,thickness=1)
  ;
```

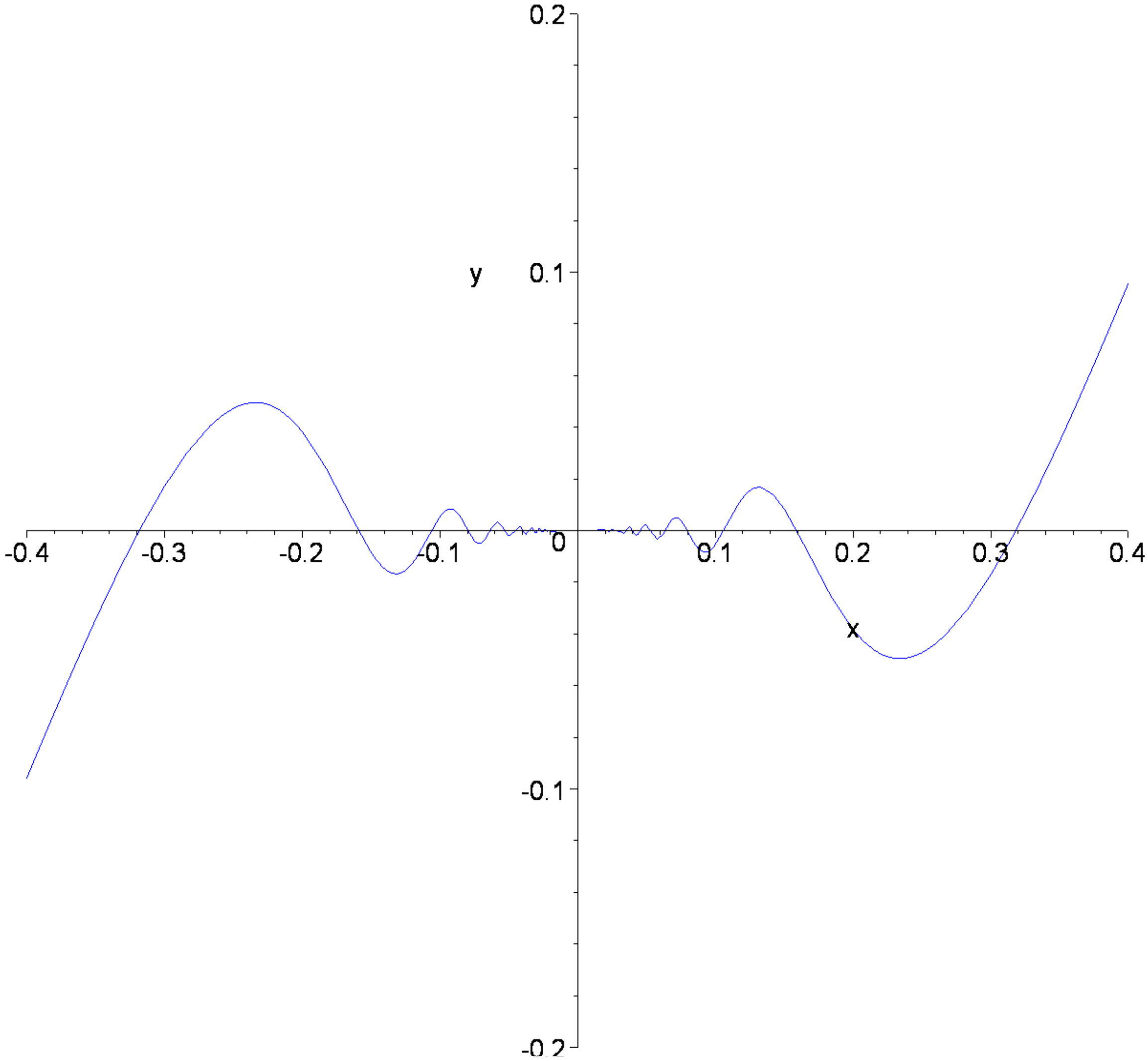
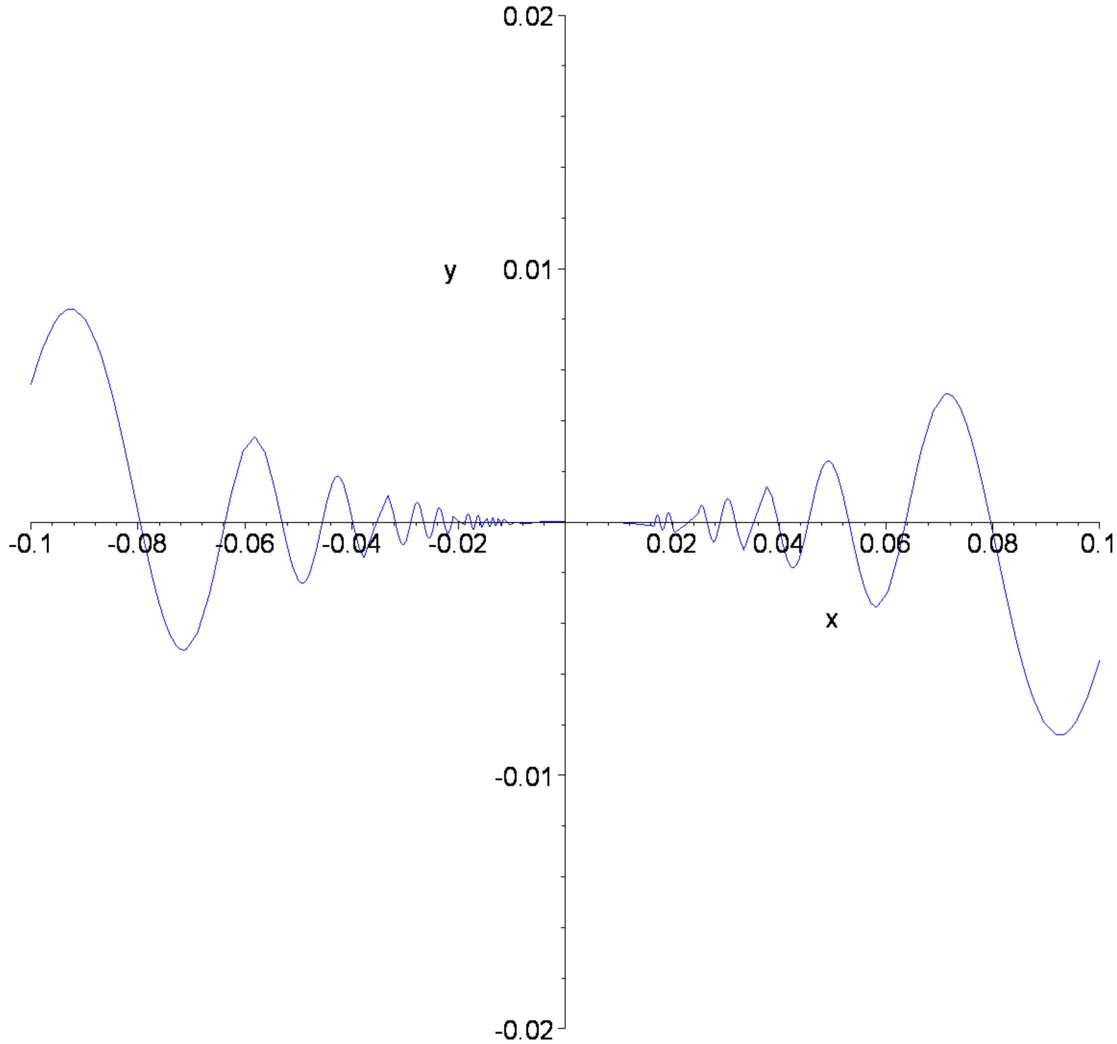


Gráfico 2: Janela-x: = [-0.1 .. 0.1]

```
> plot(f(x),x=-0.1..0.1,y=-0.02...0.02,color=blue,thickness=
  1);
```



O comando **Maple limit** avalia o limite da função $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nas proximidades do ponto $x_0 = 0$, comprovando a tese inicial .

```
> Limit(f(x),x=0)=limit(f(x),x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Exercícios propostos

I - Fazendo uso das propriedades e teoremas dos limites, encontre os limites para as funções abaixo:

01 - $\lim_{x \to 2} [3x + 1]$;

02 - $\lim_{x \to (-1)} [-2x^2 - 3x + 1]$;

03 - $\lim_{x \to 1} [2(x-2)(x-3)]$;

04 - $\lim_{x \to 3} [(x-3)(x+4)]$;

05 - $\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x+5}$;

06 - $\lim_{x \to (-3)} \frac{x^2}{3-x}$;

II - Fazendo uso das propriedades e teoremas dos limites, encontre os limites para as funções abaixo:

01 - $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2-16}$;

02 - $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$;

03 - $\lim_{x \to (-2)} \frac{-2x-4}{x^3+2x^2}$;

04 - $\lim_{x \to 1} \frac{x^4-1}{x^3-1}$;

05 - $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2+7}{3x^2-x}$;

06 - $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$;

III - Usando as propriedades dos limites e considerando que $\lim_{x \to c} f(x) = 2$ e $\lim_{x \to c} g(x) = -3$, determine:

01 - $\lim_{x \to c} [f(x)\, g(x)]$;

02 - $\lim_{x \to c} [2 f(x) + g(x)]$;

03 - $\lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)^2}{f(x) - g(x)}\right]$;

IV - Se $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = 2$ e $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = 1$, determine $\lim_{x \to c} [f(x)\, g(x)]$.

Definição Precisa e Formal de Limites

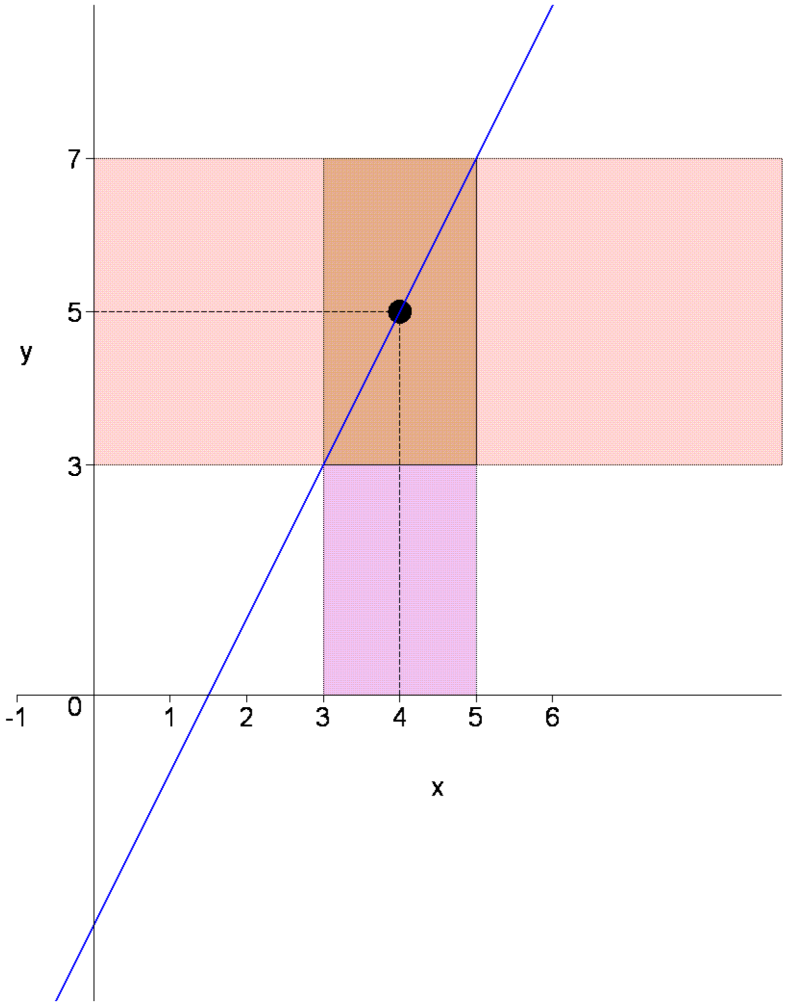
Nas seções anteriores, discutimos limites com uma conceituação informal e de forma intuitiva. Neste momento, pretendemos apresentar uma definição mais precisa e formal para limites. Para isto, vamos partir de uma função linear definida no conjunto dos reais, porém vamos restringir seu intervalo de análise e tomarmos um ponto para estabelecermos o limite da função.

Seja a função linear $f(x) = 2\,x - 3$, definida em um intervalo aberto e desejamos calcular o limite para esta função quando $x \to 4$. Observamos que a função se aproxima de 5 quando x se aproxima de 4, de forma que $\lim_{x \to 4} 2\,x - 3 = 5$. Os comandos **Maple** abaixo ilustram esta situação.

```
> restart: with(plots): with(plottools): with(student):
> f:=x->2*x-3;
```

$$f := x \to 2\,x - 3$$

```
> graf1:=plot(f(x),x=-1..9,y=-4..9,color=blue,thickness=2,scaling=constrained,xtickmarks=[-1,1,2,3,4,5,6],ytickmarks=[0,3,5,7]):
> graf2:=line([4,0],[4,5],linestyle=3,color=black):
> graf3:=line([0,5],[4,5],linestyle=3,color=black):
> graf4:=disk([4,5],0.15,color=black):
> graf5:=polygon([[3,0],[5,0],[5,7],[3,7]],color=plum,linestyle=2):
> graf6:=polygon([[0,3],[9,3],[9,7],[0,7]],color=pink,linestyle=2):
> graf7:=polygon([[3,3],[5,3],[5,7],[3,7]],color=tan,linestyle=2):
> display(graf1,graf2,graf3,graf4,graf7,graf6,graf5);
```



Analisando-se o gráfico acima, temos que quando o valor de y está a uma distância de 2 unidades do valor limite 5, isto é, nos pontos 3 e 7, o valor correspondente para x que tende a aproximar-se do ponto $x_0 = 4$ é de 1 unidade, isto é, os valores 3 e 5, respectivamente.

A questão central é sabermos quais valores x deve assumir para que $|y - L| < \varepsilon$, onde L é o valor limite e ε representa o decremento ou incremento de variação de y, que nos fornece os limites inferior e superior.

No nosso exemplo acima, temos: $|y - 5| < 2$. Mas, $y = 2x - 3$, logo podemos escrever a inequação modular a seguir:

$$|y - 5| = |2x - 3 - 5| = |2x - 8| < 2$$

Desta forma, temos que resolver a inequação modular $|2x - 8| < 2$.

Condição I - $-2 < 2x - 8$ ==> $3 < x$.
Condição II - $2x - 8 < 2$ ==> $x < 5$.

Utilizando-se de comandos **Maple**, temos:

```
> solve(abs(2*x-8)<2);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(3), \mathrm{Open}(5))$$

Da solução da inequação modular acima, concluimos que ao mantermos x variando de 1 unidade em torno do ponto $x_0 = 4$, manteremos y variando de 2 unidades em torno de $y_0 = 5$. A este valor de variação para x denominamos de δ . Observamos, ainda, que podemos estabelecer uma relação entre ε e δ , e neste caso é $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Neste momento, estamos preparados para enunciarmos a definição formal de *limite de uma função*.

Definição: *Limite de uma Função*
Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto contendo um ponto c, exceto talvez em $x_0 = c$. O limite de $f(x)$ quando x tende a c será o valor L, denotado por

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

se e somente se para cada $\varepsilon > 0$ existir um valor correspondente $\delta > 0$, tal que para todos os valores de x,

$$0 < |x - c| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon .$$

Exemplo 15: Usando a definição de limites, mostrar que $\lim_{x \to 2} 3x - 5 = 1$.

Solução: Devemos mostrar que, para qualquer número positivo ε, podemos encontrar um número positivo δ, tal que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - c| < \delta \ .$$

Substituindo-se os valores correspondentes, temos:

$$|[3x - 5] - 1| < \varepsilon \text{ se } 0 < |x - 2| < \delta \quad ==> \ |3x - 6| < \varepsilon \text{ se } 0 < |x - 2| < \delta \ \ (\text{ ineq. I })$$

O procedimento geral para encontrarmos a solução acima é tentarmos expressar δ em função de ε, e verificarmos se δ satisfaz às condições iniciais estabelecidas.

Da (ineq I) podemos simplificar para $|3x - 6| < \varepsilon$ que é idêntico à

$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$ se $0 < |x - 2| < \delta$ (ineq. II).

Da (ineq. II) podemos concluir que $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Assim sendo, encontramos um valor para δ. Temos que assegurar que este valor satisfaça à condição da (ineq. I). Porém, como a (ineq II) é equivalente a (ineq I), então mostramos que $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ prova que $\lim\limits_{x \to 2} 3x - 5 = 1$.

Exemplo 16: Usando a definição de limites, mostrar que $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$.

Solução: A função $\sqrt{x}$ só é definida para $0 \le x$, portanto, só devemos discutir o limite à direita de zero. Assim sendo, devemos mostrar que, dado $0 < \varepsilon$, existe um $0 < \delta$ tal que:

$\left|\sqrt{x} - 0\right| < \varepsilon$ se $0 < \left|x - 0\right| < \delta$, ou simplificando $\left|\sqrt{x}\right| < \varepsilon$ se $0 < x < \delta$. (ineq. III)

Se elevarmos, na (ineq. III), ambos os lados ao quadrado , podemos escrever (ineq. III) como:

$x < \varepsilon^2$ se $0 < x < \delta$ (ineq. IV).

Comparando-se as proposições de (ineq. IV), podemos estabelecer que $\varepsilon^2 = \delta$; e uma vez que a (ineq. IV) é idêntica à (ineq. III), então $\varepsilon^2 = \delta$ também é verdade para (ineq. III). Assim sendo, isto mostra que $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$.

Exemplo 17: Usando a definição de limites mostrar que $\lim\limits_{x \to 4} x^2 = 16$.

Solução: Devemos mostrar que para um $0 < \varepsilon$, existe $0 < \delta$, tal que:

$\left|x^2 - 16\right| < \varepsilon$ sempre que $0 < \left|x - 4\right| < \delta$ (ineq. V) .

Da desigualdade relacionada com ε temos

$\left|x^2 - 16\right| < \varepsilon \Longrightarrow \left|x - 4\right|\left|x + 4\right| < \varepsilon$ (ineq. VI)

Observamos que na (ineq. VI) temos o termo $\left|x - 4\right|$ que está presente na (ineq. V). Por outro lado, surgiu o termo $\left|x + 4\right|$, o qual necessitamos substituí-lo por um valor constante.
Neste caso, vamos fazer uma suposição, relacionada com a condição de $0 < \delta$. Vamos supor que $\delta < 1$.

Da condição de (ineq. V), temos que: $0 < \left|x - 4\right| < \delta$. Desta inequação, podemos obter a seguinte desigualdade equivalente:

$0 < \left|x - 4\right| < 1$ (ineq. VII).

Analisando-se o lado direito de (ineq. VII), obtemos:

$|x-4|<1$ ==> $-1<|x-4|<1$ ==> $3<x<5$ ==> $7<x+4<9$. Portanto, $|x+4|<9$.

Assim sendo, podemos estabelecer que $|x-4|<\frac{\varepsilon}{9}$ [veja (ineq. VI)] e da condição que $|x-4|<\delta$ e suposição que $\delta<1$, devemos escolher um δ que seja o mínimo entre estes valores, ou seja:

$$\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{9}, 1\right),$$

assim, temos que $|x-4|<\delta$, então:

$$|x^2-16|=|x-4||x+4|<\delta\,.\,9$$

$$|x^2-16|=|x-4||x+4|<\frac{\varepsilon}{9}\,.\,9$$

$$|x^2-16|=|x-4||x+4|<\varepsilon\,.$$

Logo, $\lim_{x\to 4} x^2=16$.

Limites Fundamentais

Limite da Função $f(x)=\frac{\text{sen}(x)}{x}$ quando $x\to 0$

Vamos analisar o comportamento da função $f(x)=\frac{\text{sen}(x)}{x}$ quando $x\to 0$, $x\to-\infty$ e $x\to\infty$.

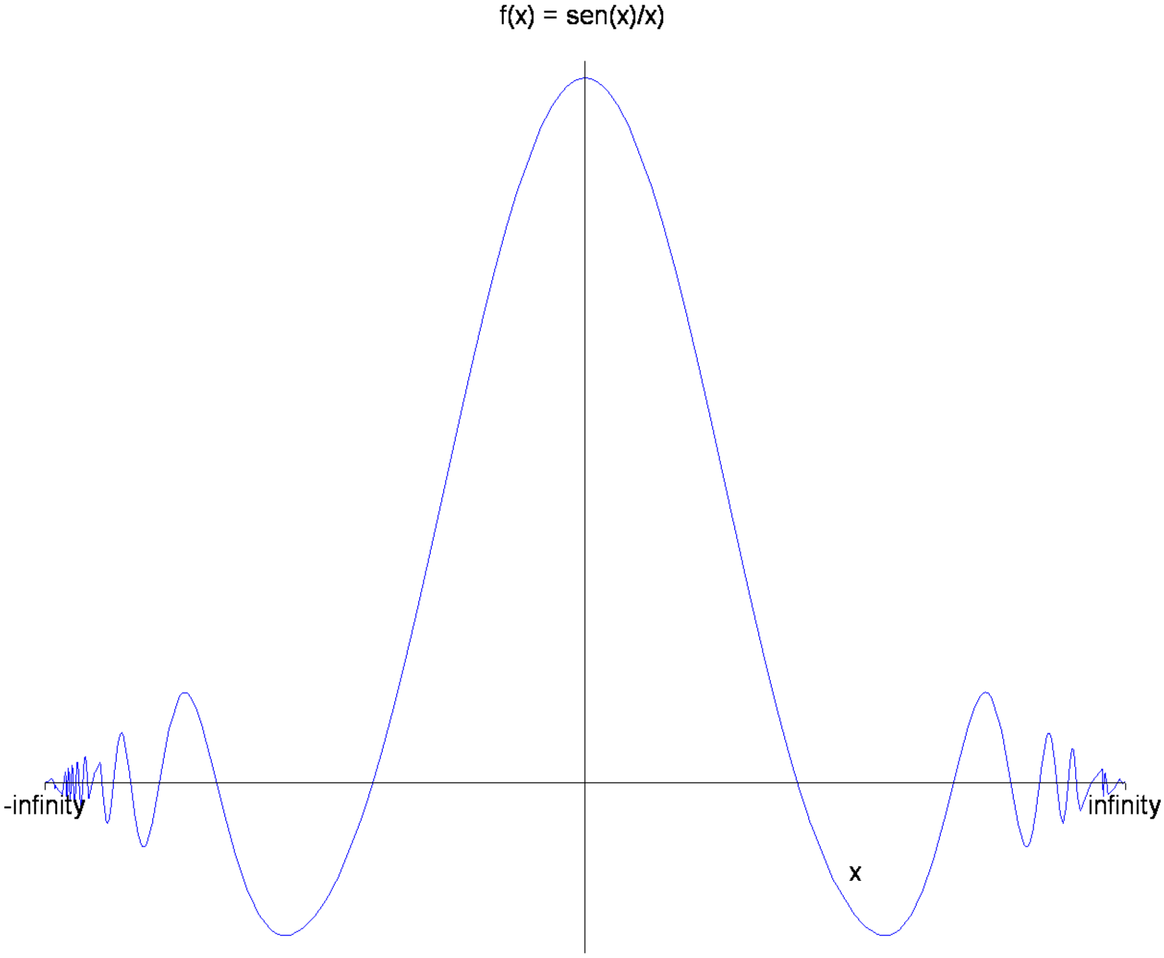
Procederemos, inicialmente, com apoio computacional do **Maple**, definindo a função e plotando alguns gráficos, para uma análise do comportamento da função nos pontos indicados.

```
> restart: with(plots): with(student):
> f:=x->sin(x)/x;
```

$$f:=x\to\frac{\sin(x)}{x}$$

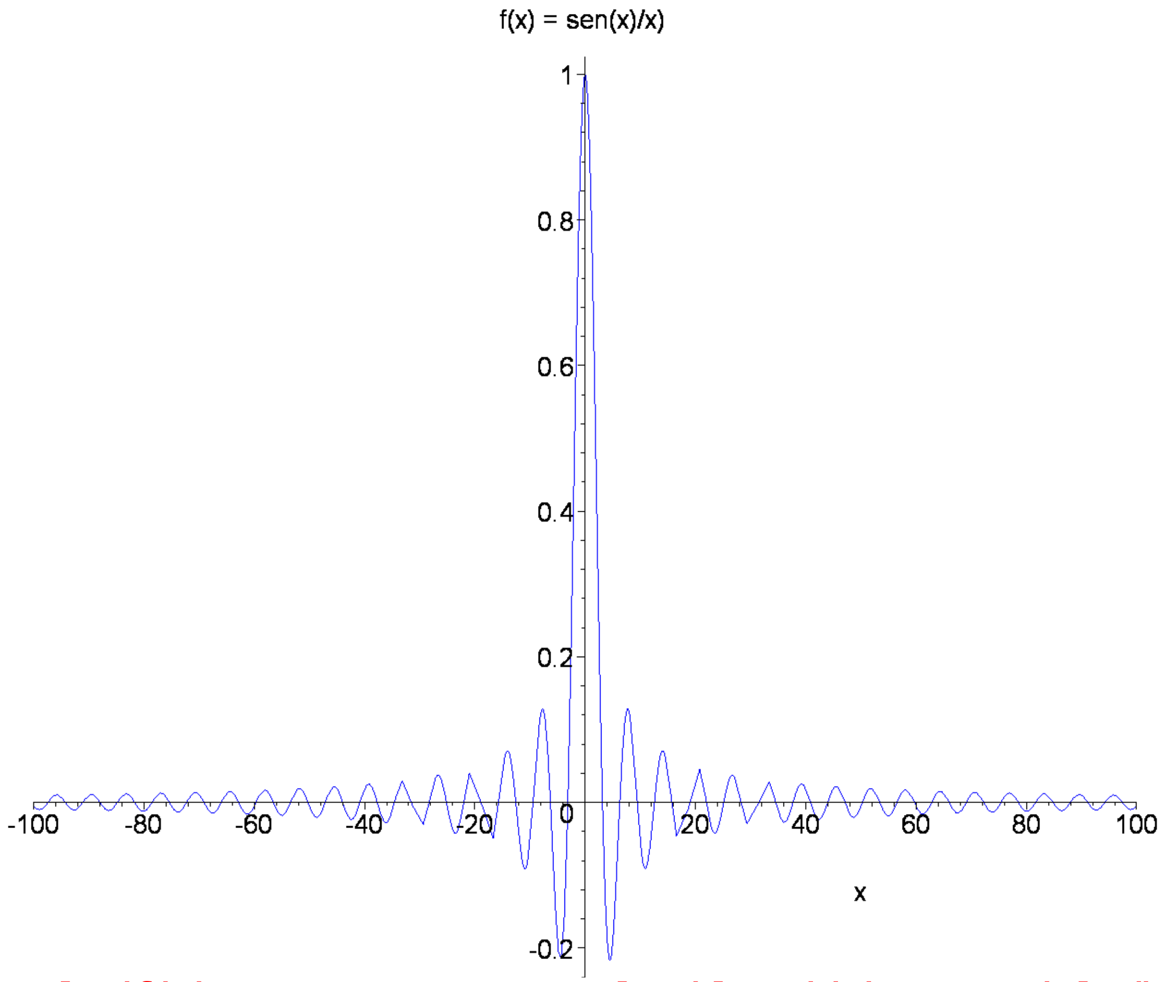
Plotando o gráfico da função, definindo a janela de visualização para a abscissa de $-\infty$ a ∞ .

```
> plot(f(x),x=-infinity .. infinity,color=blue, title="f(x)
  = sen(x)/x");
```

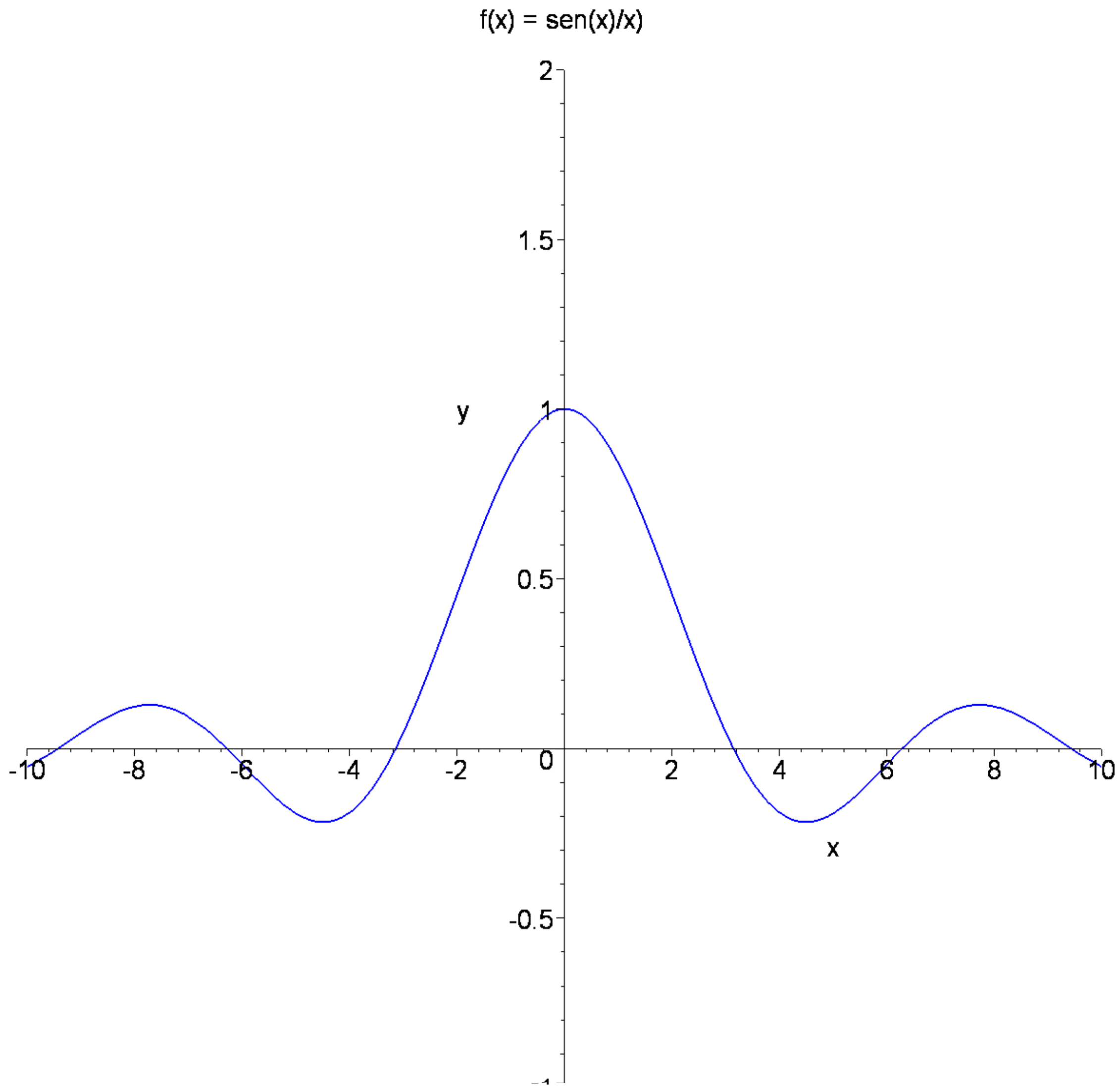


Analisando-se o gráfico acima, observamos que quando $x \to -\infty$ ou $x \to \infty$ a função tende a zero. Para $x = 0$ a função tende para um determinado valor limite.
A seguir, construiremos mais dois gráficos, redefinindo as janelas de visualização para a abscissa nos intervalos [-100 ; 100] e [-10 ; 10] e no segundo gráfico, estabelecendo uma janela para a ordenada y.

```
> plot(f(x),x=-100..100,color=blue, title="f(x) =
  sen(x)/x");
```




```
> plot(f(x),x=-10..10,y=-1..2,color=blue,thickness=2,title="
  f(x) = sen(x)/x");
```



Analisando-se o gráfico acima, observamos que $x \to 0$ o limite para a função tende para 1. Estes limites podem ser comprovados com o uso dos comandos **Maple** seguinte:

```
> Limit(f(x),x=0)=limit(f(x),x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

```
> Limit(f(x),x=-infinity)=limit(f(x),x=-infinity);
```

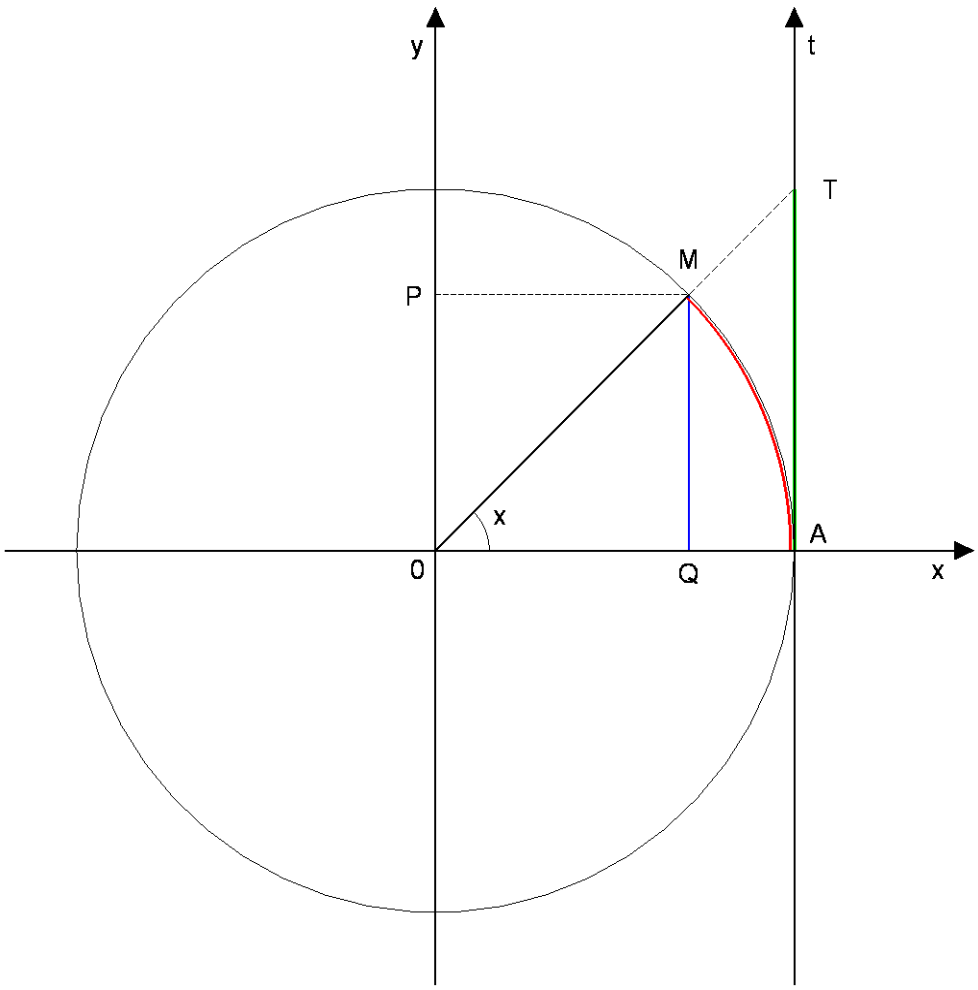
$$\lim_{x \to (-\infty)} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

```
> Limit(f(x),x=infinity)=limit(f(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

A comprovação de $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$ pode ser feito conforme abaixo.
Vamos considerar a figura a seguir, com raio unitário.

Para efeito de análise, vamos limitar a variação do arco x para o 1o. quadrante, isto é, no intervalo de $[\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\ ]$.



Observando-se o gráfico acima, podemos escrever a seguinte desigualdade: MQ < AM < AT . Porém, no ciclo trigonométrico, temos que: $MQ = \text{sen}(x)$, $AM = x$ e $AT = \tan(x)$. Portanto, temos a seguinte desigualdade:

$\text{sen}(x) < x < \tan(x)$. Dividindo-se todos os membros da desigualdade anterior por $\text{sen}(x)$, temos:

$1 < \frac{x}{\text{sen}(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$. Invertendo-se todos os lados da desigualdade, obtemos:

$\cos(x) < \frac{\text{sen}(x)}{x} < 1$.

Considerando que $\cos(x)$ e $\frac{\text{sen}(x)}{x}$ são ambas funções pares, isto é, $\cos(x) = \cos(-x)$ e $\frac{\text{sen}(x)}{x} = \frac{\text{sen}(-x)}{-x}$, então a desigualdade anterior vale para todos os valores de x.

Mas, $\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$ e $\lim_{x \to 0} 1 = 1$, então utilizando-se do teorema do confronto ou sanduiche, podemos concluir que $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$.

Exemplo 18: Determinar o $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(2\,x)}{x}$.

Solução: Vamos fazer uso do resultado anterior para determinarmos o $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(2\,x)}{x}$.

Neste caso, efetuaremos uma mudança de variável, chamando $u = 2\,x$; por conseguinte quando $x \to 0$ então $u \to 0$. Assim, temos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(2\,x)}{x} = \lim_{u \to 0} \frac{\text{sen}(u)}{\left[\frac{u}{2}\right]} = 2\,.\,\lim_{u \to 0} \frac{\text{sen}(u)}{u} = 2\,.1 = 2\,.$$

Limite da função $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$ quando $x \to 0$

Vamos analisar o comportamento da função $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$ quando $x \to 0$, $x \to -\infty$ e $x \to \infty$.

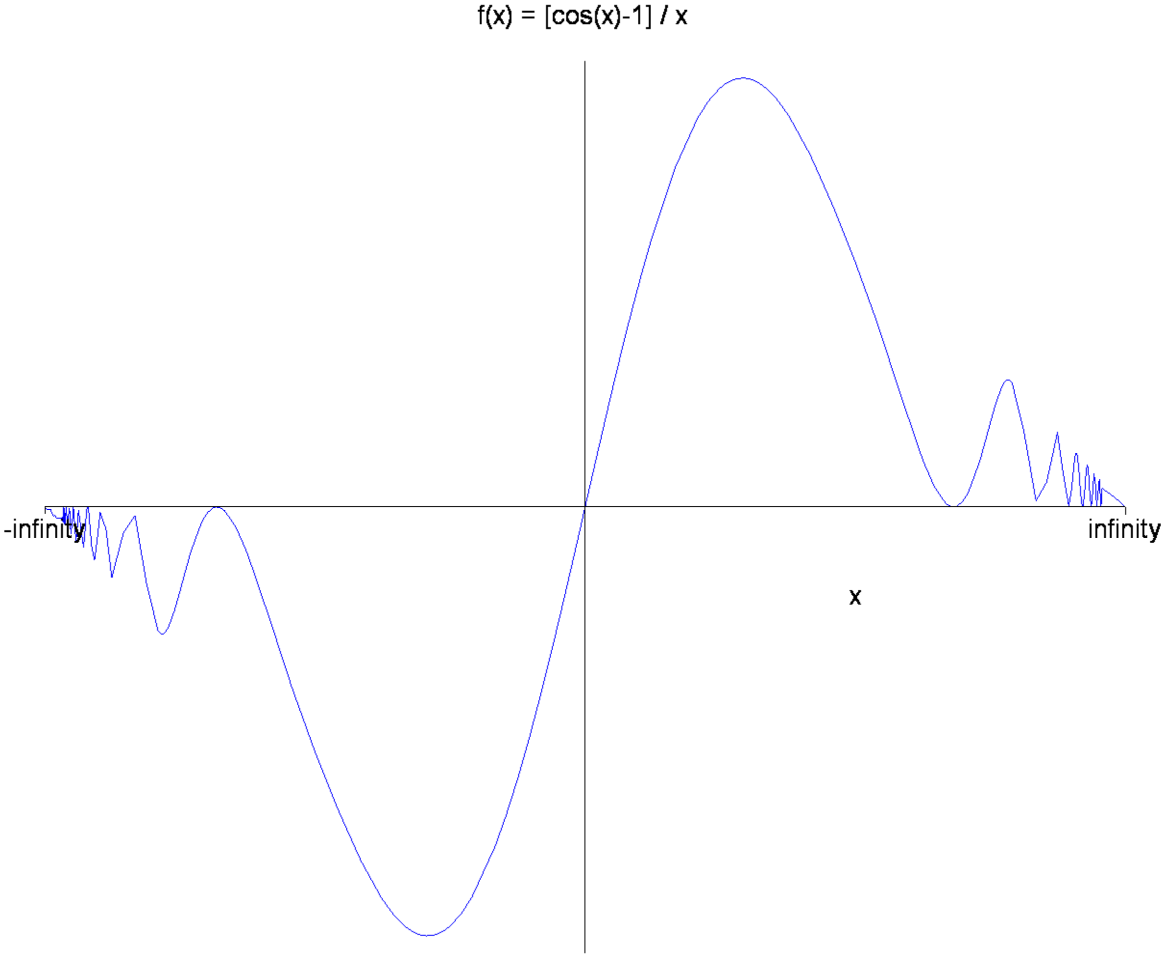
Procederemos, inicialmente, com apoio computacional do **Maple**, definindo a função e plotando alguns gráficos, para uma análise do comportamento da função nos pontos indicados.

```
> restart: with(plots): with(student):
> f:=x->(1-cos(x))/x;
```

$$f := x \to \frac{1 - \cos(x)}{x}$$

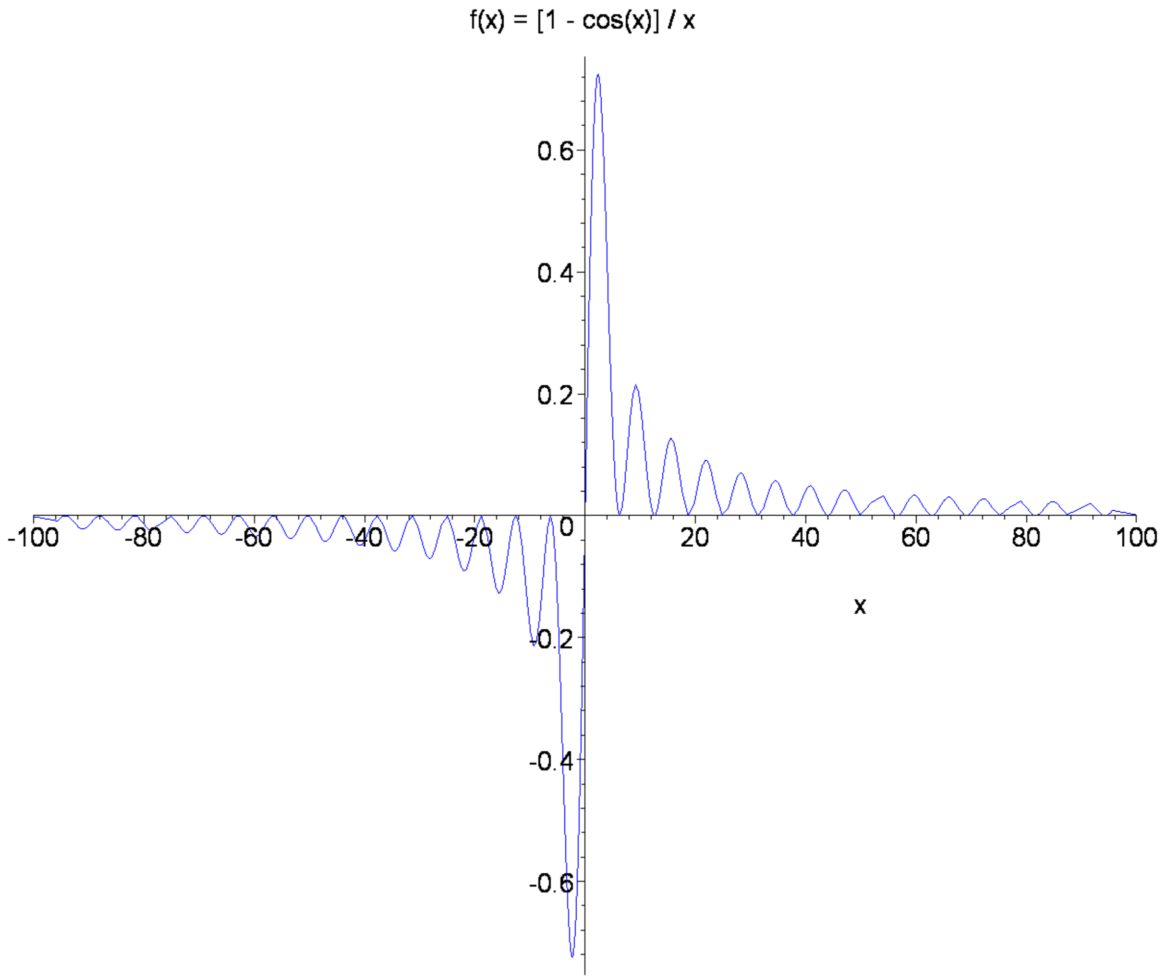
Plotando o gráfico da função, definindo a janela de visualização para a abscissa de $-\infty$ a ∞ .

```
> plot(f(x),x=-infinity .. infinity,color=blue, title="f(x)
  = [cos(x)-1] / x");
```

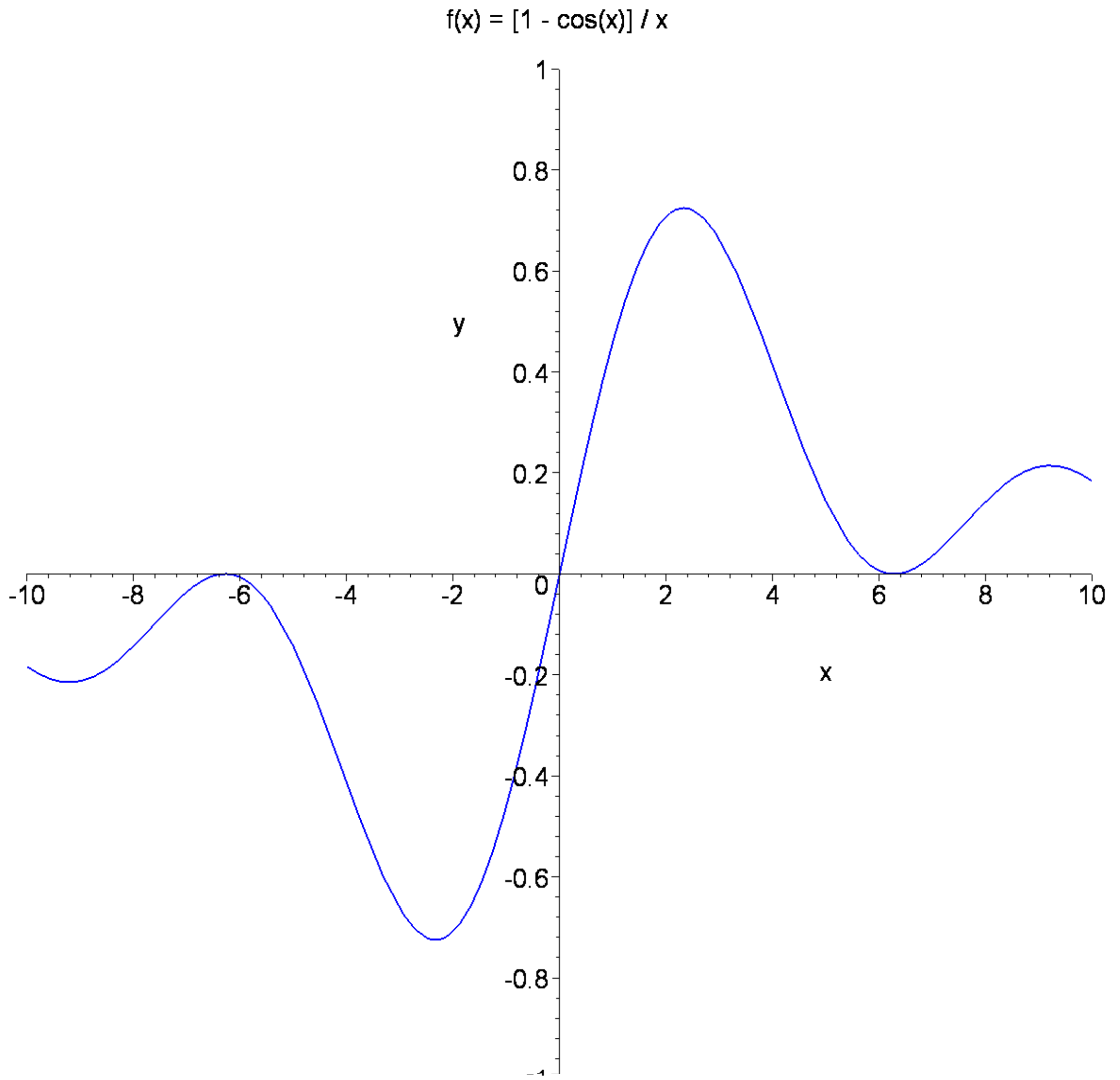


Analisando-se o gráfico acima, observamos que quando $x \to -\infty$ ou $x \to \infty$ a função tende a zero. Para $x = 0$ a função tende para zero.
A seguir, construiremos mais dois gráficos, redefinindo as janelas de visualização para a abscissa nos intervalos [-100 ; 100] e [-10 ; 10] e no segundo gráfico, estabelecendo uma janela [-1 ; 1] para o eixo ordenado.

```
> plot(f(x),x=-100..100,color=blue, title="f(x) = [1 -
  cos(x)] / x");
```




```
> plot(f(x),x=-10..10,y=-1..1,color=blue,thickness=2,title="
  f(x) = [1 - cos(x)] / x");
```



Analisando-se o gráfico acima, observamos que $x \to 0$ o limite para a função tende para 0. Esses limites podem ser comprovados com o uso dos comandos **Maple** seguinte:

```
> Limit(f(x),x=0)=limit(f(x),x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

```
> Limit(f(x),x=-infinity)=limit(f(x),x=-infinity);
```

$$\lim_{x \to (-\infty)} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

```
> Limit(f(x),x=infinity)=limit(f(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

A comprovação de $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$ pode ser feito conforme abaixo.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - [\cos(x) - 1]\,[1 + \cos(x)]}{x\,[1 + \cos(x)]}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)^2}{x\,[1 + \cos(x)]}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)^2}{x\,[1 + \cos(x)]}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \left[\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}\right]\left[\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{1 + \cos(x)}\right]$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x} = 1$ e as funções seno e cosseno são contínuas em torno do ponto zero, então podemos avaliar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{1 + \cos(x)} = \dfrac{0}{1\,.\,0} = 0$.

Portanto, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x} = 1\,.\,0 = 0$.

Exemplo 19: Determinar o $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{\text{sen}(x)}$.

Solução: Como $\lim\limits_{x \to 0} [1 - \cos(x)] = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} \text{sen}(x) = 0$, não podemos usar os teoremas de razão de funções (teorema 2.4) e os teoremas fundamentais de funções trigonométricas (teoremas 2.5.3 e 2.5.4), pois leva-nos a uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. Assim sendo, vamos dividir o numerador e o denominador por *x*, o que é permitido, pois $x \neq 0$, e aplicarmos os dois limites fundamentais vistos anteriormente. Nesta situação, teremos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{\text{sen}(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\left[\dfrac{1 - \cos(x)}{x}\right]}{\left[\dfrac{\text{sen}(x)}{x}\right]}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x}}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x}}$$

$= \frac{0}{1} = 0$.

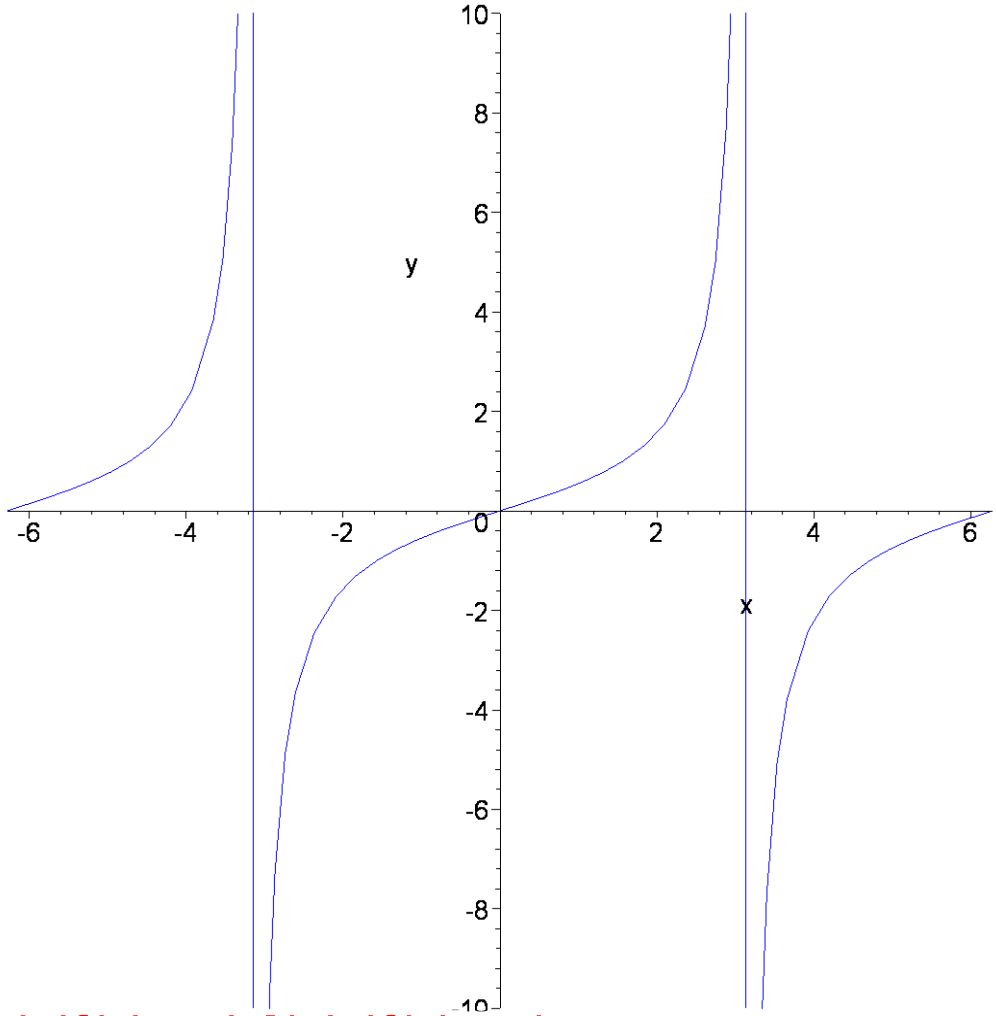
Vamos analizar o comportamento desta função fazendo uso do **Maple:**
Sabemos que as funções sen(x) e cos(x) são funções periódias de período $2\,\pi$.

Os dois gráficos seguintes mostram o comportamento da função.
No primeiro gráfico, plotamos em uma janela de [$-2\,\pi$; $2\,\pi$] para o eixo das abscissas e [-10 ; 10] para o eixo das ordenadas, e vamos avaliar os limites nos pontos $x = 0$ e $x = \pi$ (à esquerda e à direita) - no ponto $x = -\pi$ o comportamento é idêntico .

```
> restart: with(plots): with(student):
> f:=x->(1-cos(x))/sin(x);
```

$$f := x \to \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$$

```
> plot(f(x),x=-2*Pi..2*Pi,y=-10..10,color=blue);
```




```
> Limit(f(x),x=0)=limit(f(x),x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = 0$$

```
> Limit(f(x),x=Pi,left)=limit(f(x),x=Pi,left);
```

$$\lim_{x \to \pi-} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = \infty$$

```
> Limit(f(x),x=Pi,right)=limit(f(x),x=Pi,right);
```

$$\lim_{x \to \pi+} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = -\infty$$

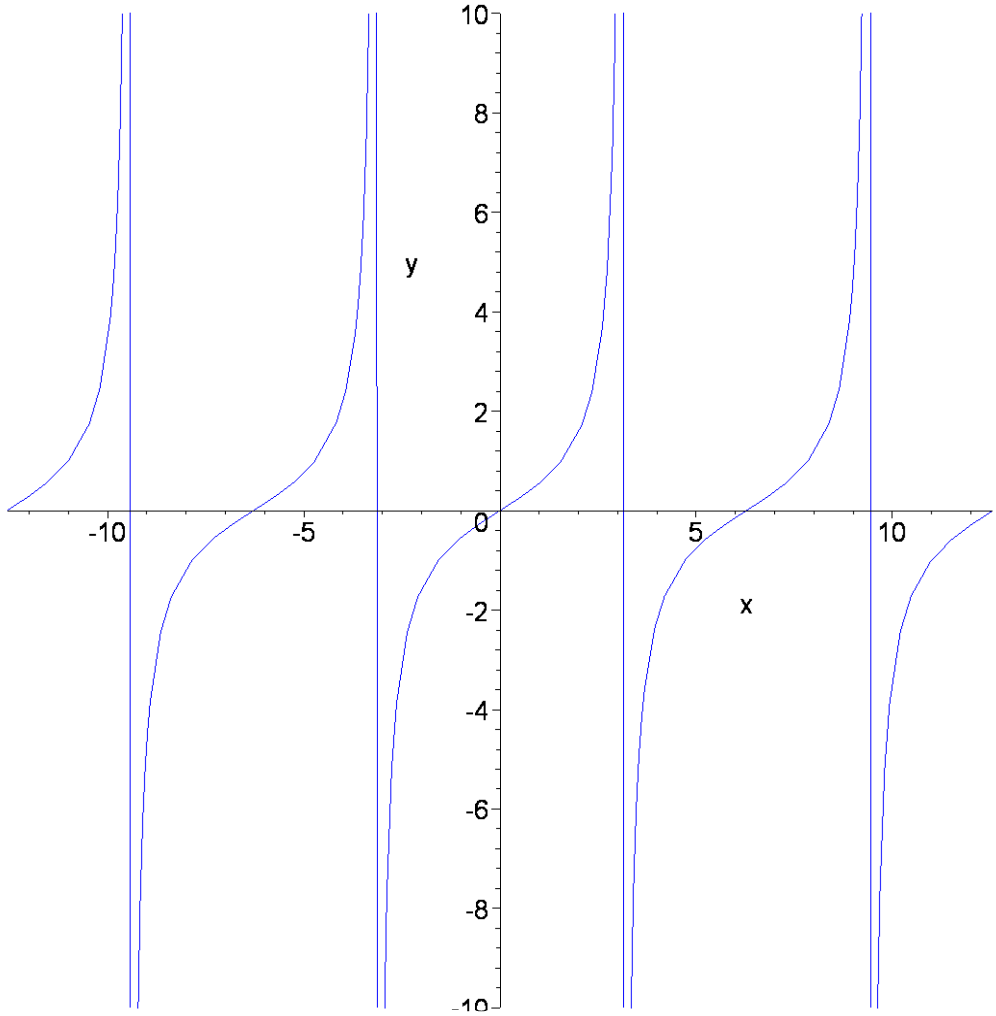
```
> Limit(f(x),x=Pi)=limit(f(x),x=Pi);
```

$$\lim_{x \to \pi} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = \mathit{undefined}$$

Podemos concluir, através da análise gráfica e da avaliação dos limites acima que a função apresenta limite igual a zero quando $x \to 0$ e limite indefinido quando $x \to \pi$ e, também, quando $x \to -\pi$.

No segundo gráfico, vamos estender a janela para o eixo das abscissas no intervalo de [-4π ; 4π], o qual poderemos concluir que a função apresenta um comportamento periódico, cujo período é 2π .

```
> plot(f(x),x=-4*Pi..4*Pi,y=-10..10,color=blue);
```



Limit da função $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ quando $x\to-\infty$ ou $x\to\infty$

Vamos analisar o comportamento da função $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ quando $x\to-\infty$ e $x\to\infty$.

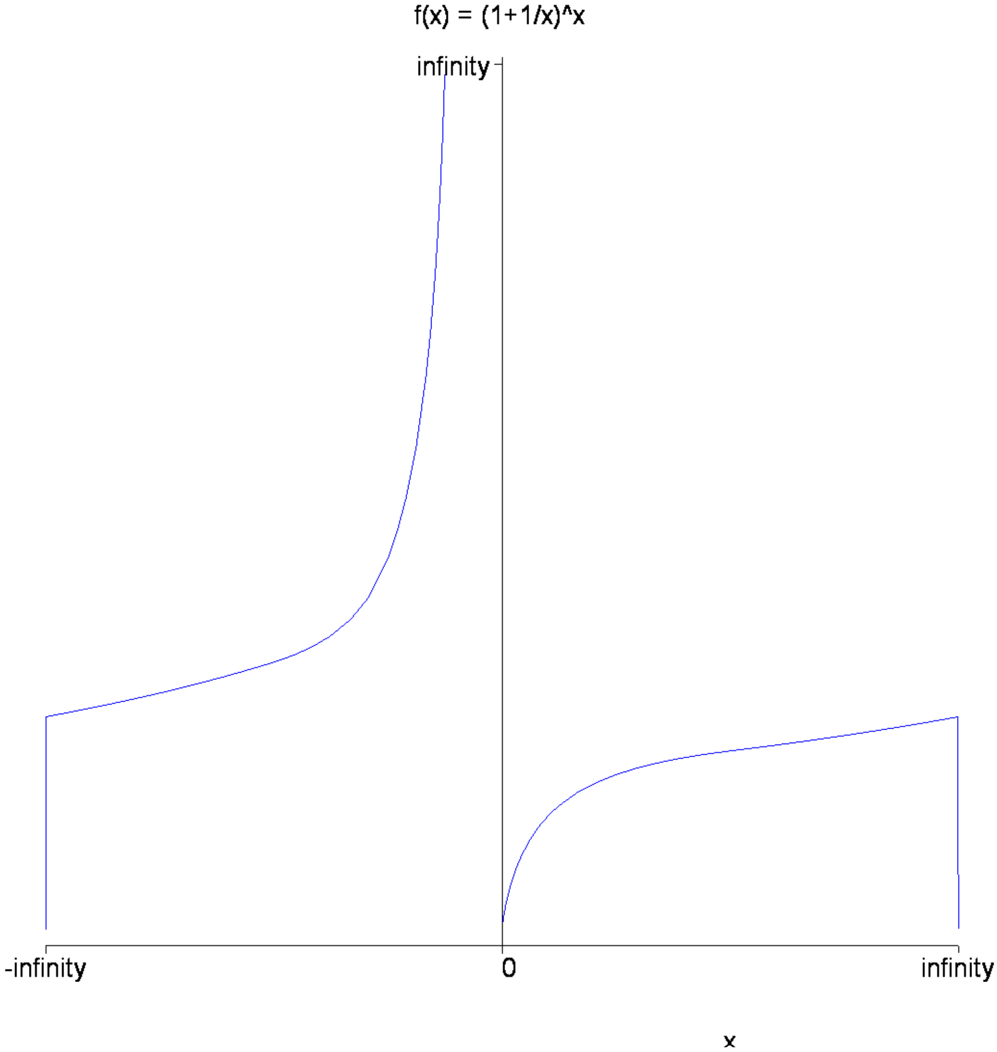
Definindo a função e plotando alguns gráficos, para análise do comportamento da função nos pontos indicados.

```
> restart: with(plots): with(student):
> f:=x->(1+1/x)^x;
```

$$f:=x\to\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

Plotando o gráfico da função, definindo a janela de visualização para a abscissa de $-\infty$ a ∞
.

```
> plot(f(x),x=-infinity..infinity,color=blue,title="f(x) =
  (1+1/x)^x");
```

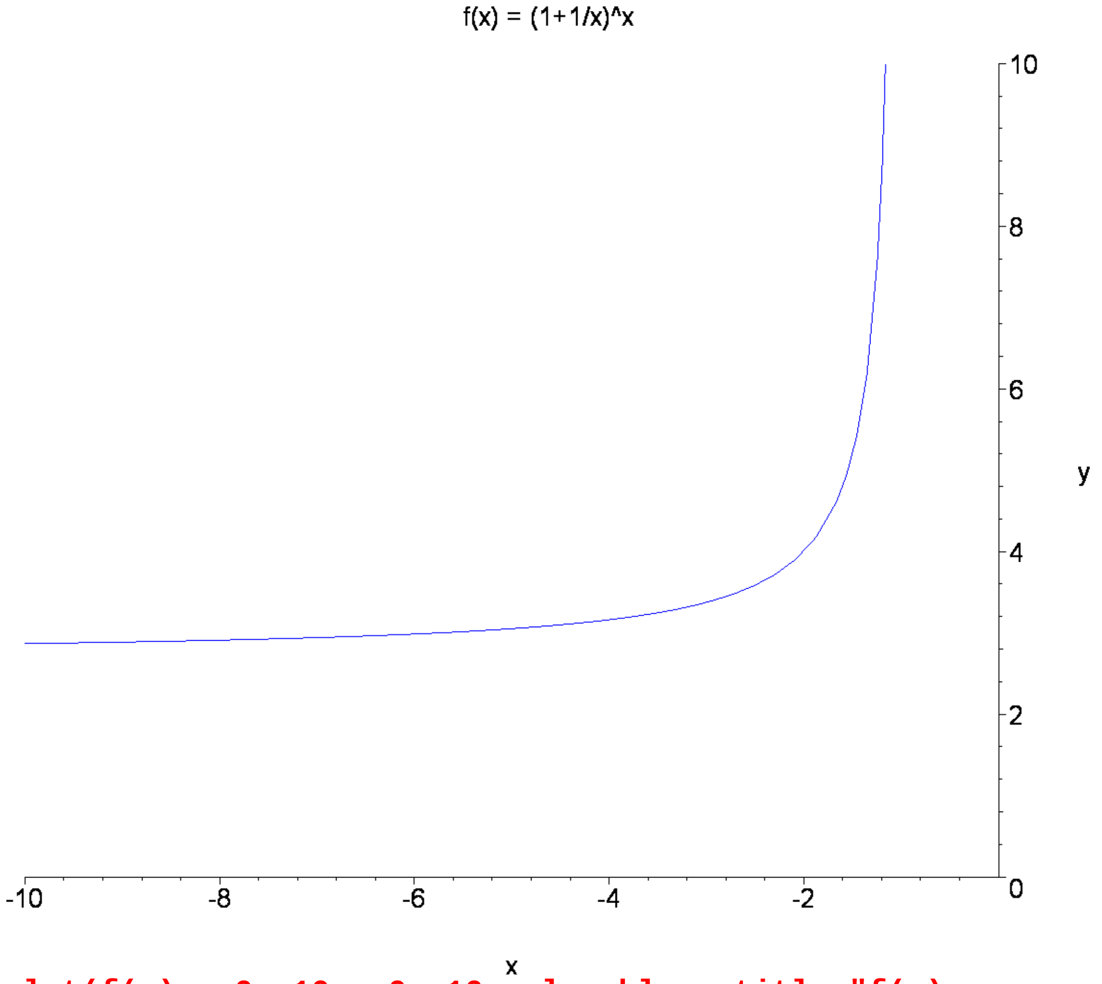


Analisando-se o gráfico acima, observamos que quando $x\to-\infty$ ou $x\to\infty$ a função tende para um valor limite determinado.

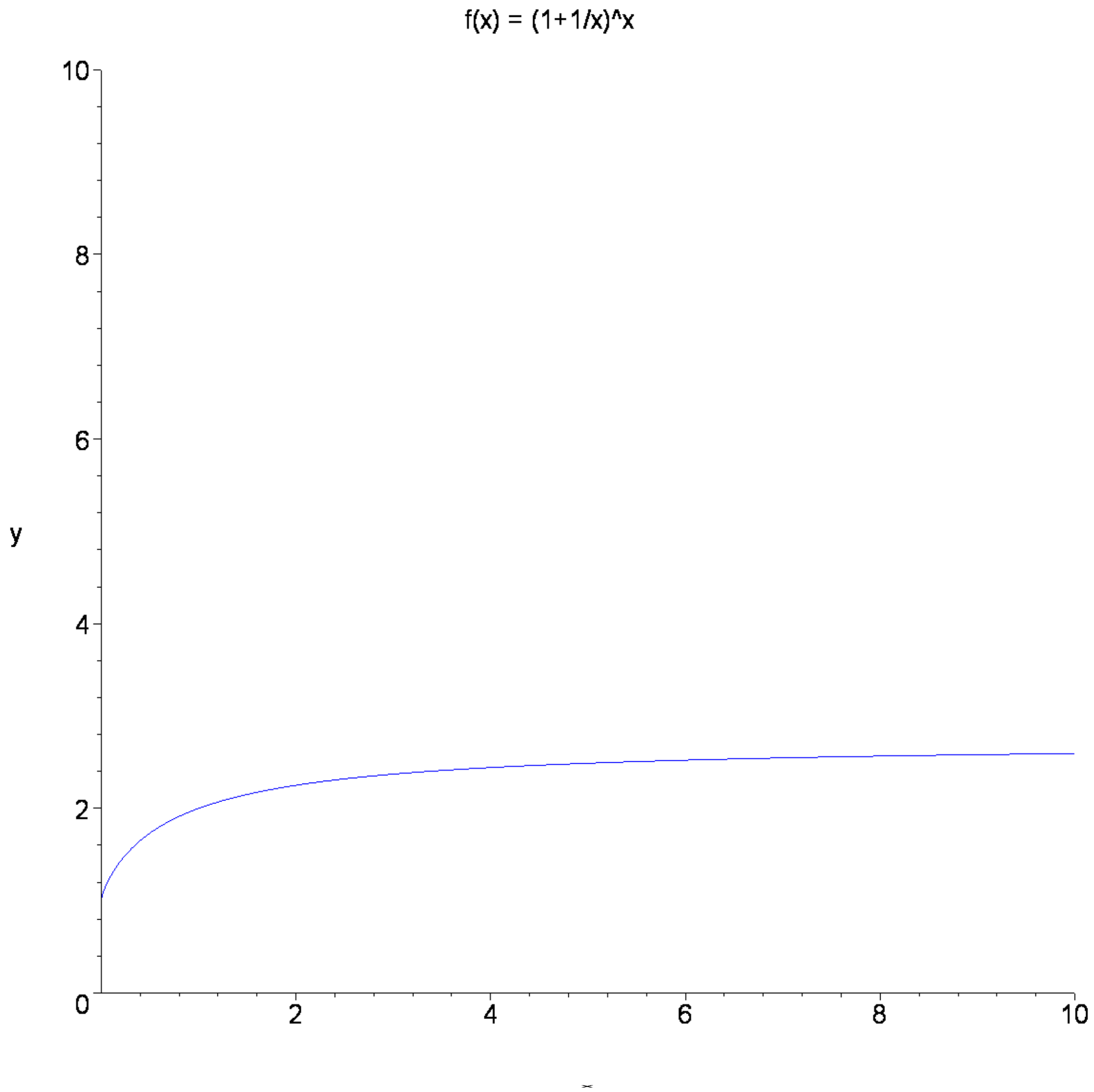
N.B.: Observamos no gráfico, nos extremos, "retas assíntotas", porém estas retas não deveriam ser plotadas.

A seguir, construiremos mais dois gráficos, redefinindo as janelas de visualização para a abscissa nos intervalos [-10 ; 10] e [0 ; 10] .

```
> plot(f(x),x=-10..0,y=0..10,color=blue, title="f(x) =
  (1+1/x)^x");
```




```
> plot(f(x),x=0..10,y=0..10,color=blue, title="f(x) =
  (1+1/x)^x");
```



Analisando-se os gráficos acima, observamos que a função não é definida no intervalo [-1 ; 0]. Quando $x \to -1$, à esquerda, o limite da função tende para mais infinito. Quando $x \to 0$, à direita, o limite da função tende para a unidade. Estes limites podem ser comprovados com o uso dos comandos **Maple** seguinte:

```
> Limit(f(x),x=-1,left)=limit(f(x),x=-1,left);
```

$$\lim_{x \to (-1)-} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \infty$$

```
> Limit(f(x),x=0,right)=limit(f(x),x=0,right);
```

$$\lim_{x \to 0+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1$$

Quando $x = -\infty$ e $x \to \infty$ o limite da função tende para **e**, onde **e** é o número irracional neperiano, cujo valor aproximado é: e = 2.718281828... , os quais podem ser comprovado com os comandos **Maple** abaixo:

```
> Limit(f(x),x=-infinity)=limit(f(x),x=-infinity);
```

$$\lim_{x \to (-\infty)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathbf{e}$$

```
> Limit(f(x),x=infinity)=limit(f(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathbf{e}$$

```
> 'e'=evalf(exp(1));
```

$$e = 2.718281828$$

N.B.: Deixamos de apresentar comprovação sobre esse limite, pois faz-se necessário noções sobre *séries*.

Limit da função $\mathbf{f}(x) = (1 + x)^{\left(\frac{1}{x}\right)}$ quando $x \to 0$

Vamos analisar o comportamento da função $\mathrm{f}(x) = (1 + x)^{\left(\frac{1}{x}\right)}$ quando $x \to 0$.
Definindo a função e plotando alguns gráficos, para análise do comportamento da função nos pontos indicados.

```
> restart: with(plots): with(student):
> f:=x->(1+x)^(1/x);
```

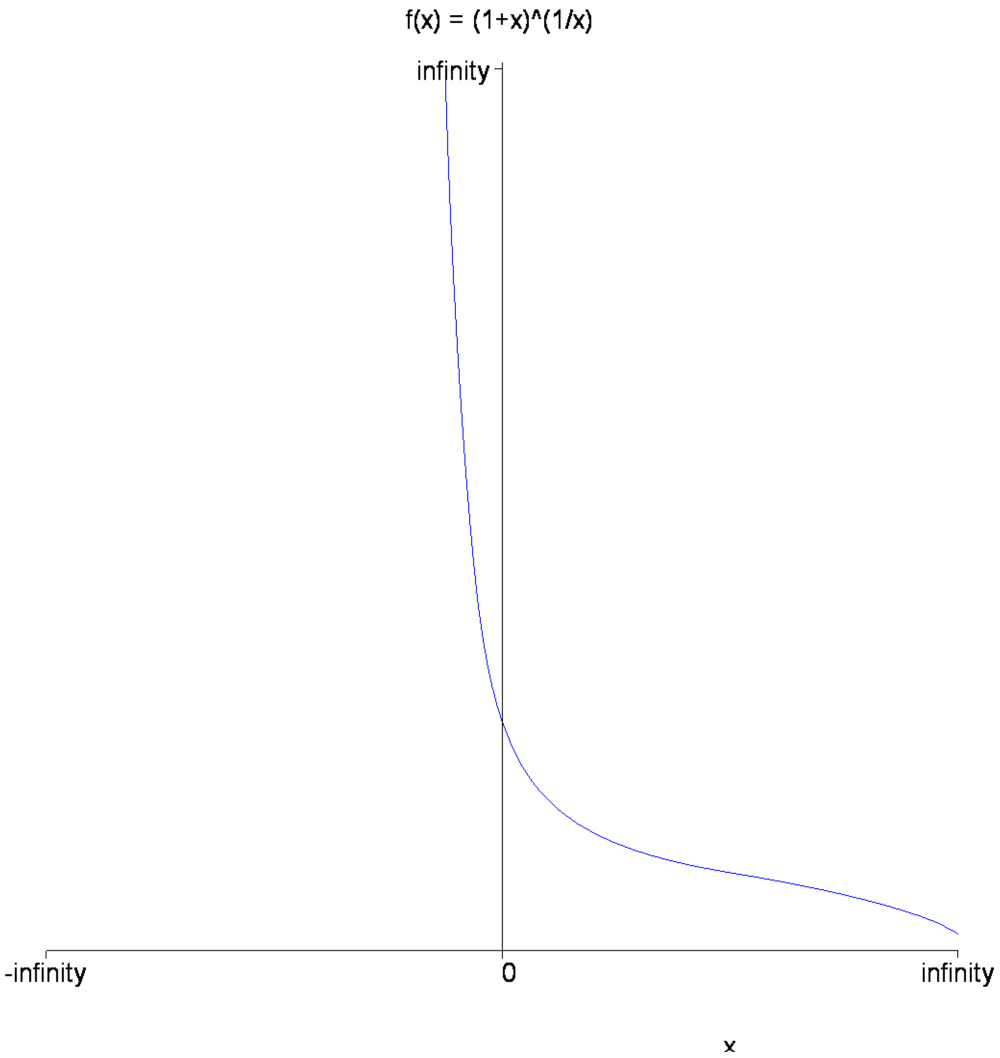
$$f := x \to (1 + x)^{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

```
> f(-2);
```

$$-I$$

Plotando o gráfico da função, definindo a janela de visualização para a abscissa de $-\infty$ a ∞
.

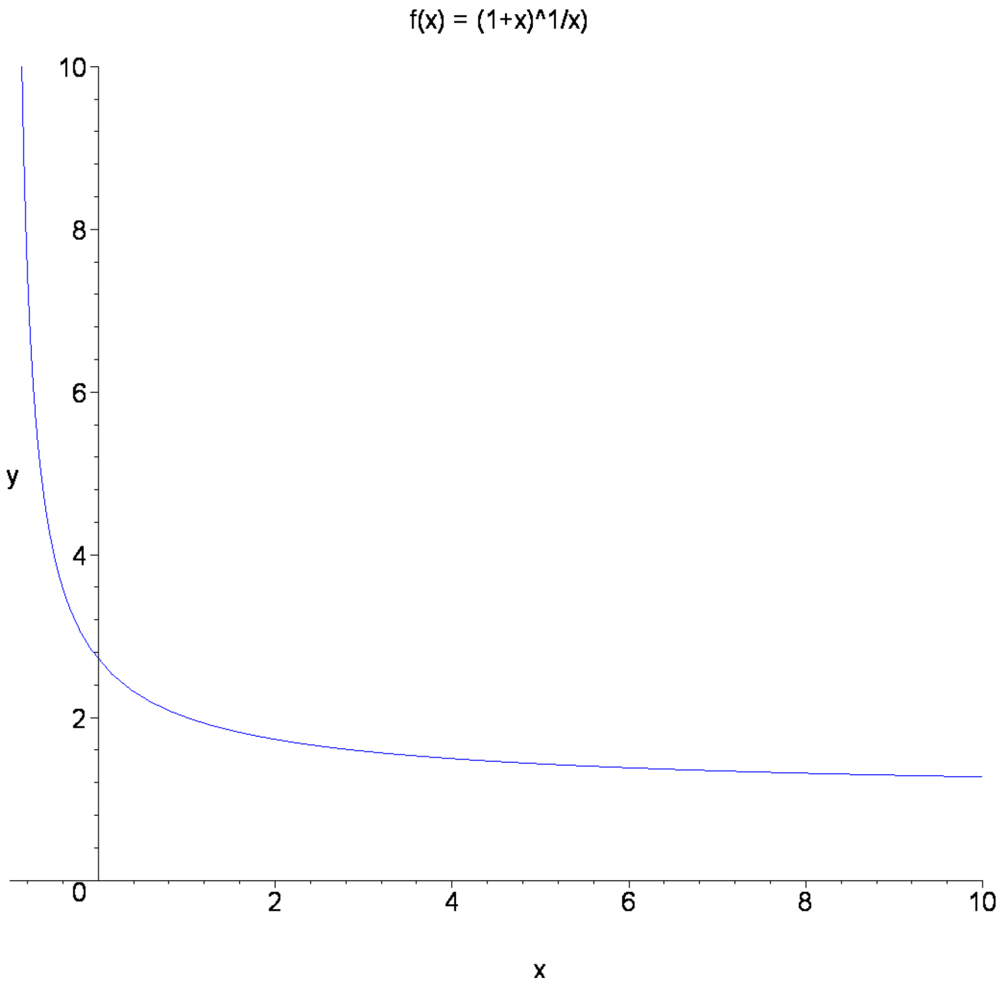
```
> plot(f(x),x=-infinity..infinity,color=blue,title="f(x) = 
  (1+x)^(1/x)");
```



Analisando-se o gráfico acima, observamos que quando $x \to \infty$ a função tende para um determinado valor limite.
A função não é definida, no conjunto dos reais, no intervalo ($-\infty$; -1].

A seguir, construiremos um gráfico, redefinindo a janela de visualização para a abscissa no intervalo [-1 ; 10] e ordenada [0 ; 10] .

```
> plot(f(x),x=-1..10,y=0..10,color=blue, title="f(x) =
  (1+x)^1/x)");
```



Analisando-se o gráficos anterior, quando $x \to -1$, à direita, o limite da função tende para mais infinito. Quando $x \to 0$, o limite da função tende para o número irracional **e**. Quando $x \to \infty$ a função tende para a unidade. Estes limites podem ser comprovados com o uso dos comandos **Maple** seguinte:

```
> Limit(f(x),x=-1,right)=limit(f(x),x=-1,right);
```

$$\lim_{x \to (-1)+} (1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \infty$$

```
> Limit(f(x),x=0)=limit(f(x),x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \mathbf{e}$$

```
> Limit(f(x),x=infinity)=limit(f(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} (1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)} = 1$$

A comprovação desta proposição é de fácil verificação.

Inicialmente, mostraremos que $\lim_{x \to 0+} (1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \mathbf{e}$.

Vamos fazer $u = \frac{1}{x}$, assim temos que $u \to \infty$ quando $x \to 0+$. Logo,

$$\lim_{x \to 0+} (1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{u \to \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \mathbf{e} .$$

De forma análoga, mostramos que:

$$\lim_{x \to 0-} (1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \mathbf{e} .$$

Portanto, $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \mathbf{e}$.

N.B.: Este limite é uma das formas de definição do número de Euler (número neperiano).

Limit da função $\mathrm{f}(x) = \frac{a^x - 1}{x}$ quando $x \to 0$

Vamos analisar o comportamento da função $\mathrm{f}(x) = \frac{a^x - 1}{x}$ quando $x \to 0$.

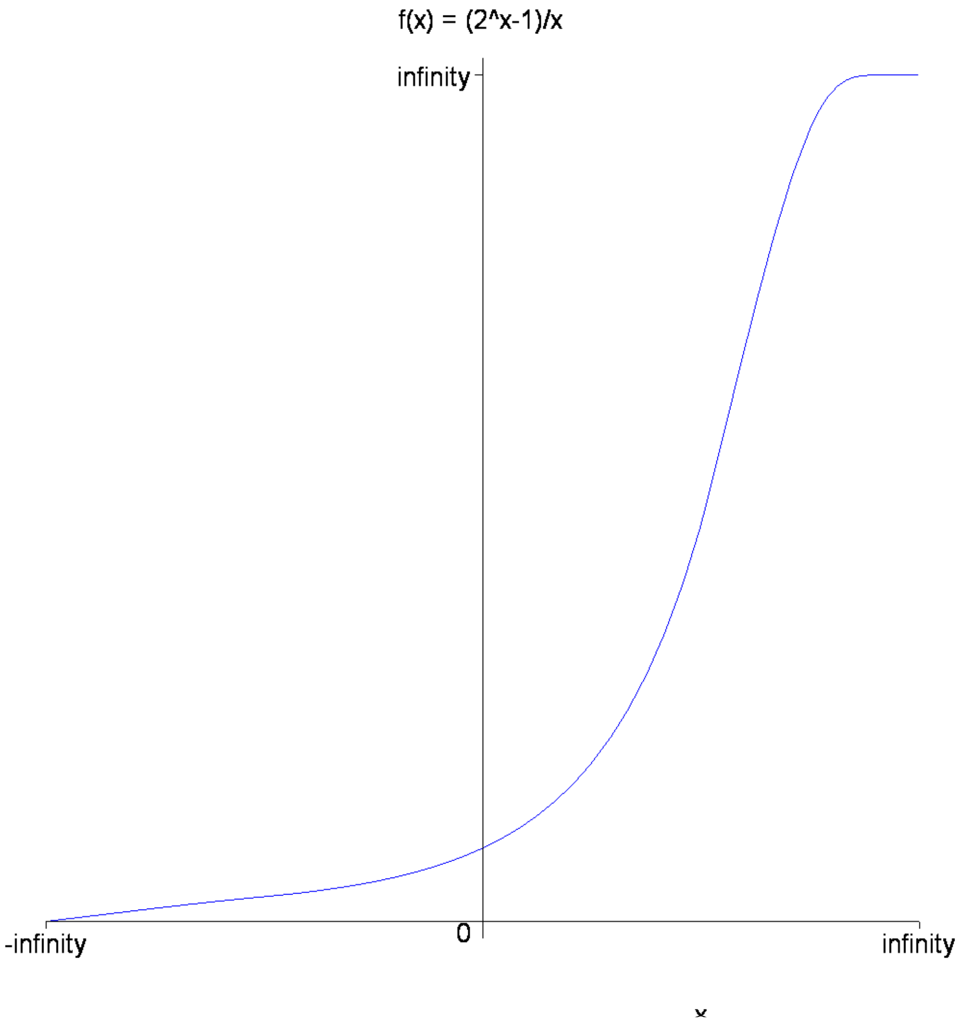
Definindo a função e plotando seu gráfico, para análise do comportamento da função no ponto indicado.

Vamos considerar a constante $a = 2$, para efeito de plotação do gráfico .

```
> restart: with(plots): with(student):
> f:=x->(2^x-1)/x;
```

$$f := x \to \frac{2^x - 1}{x}$$

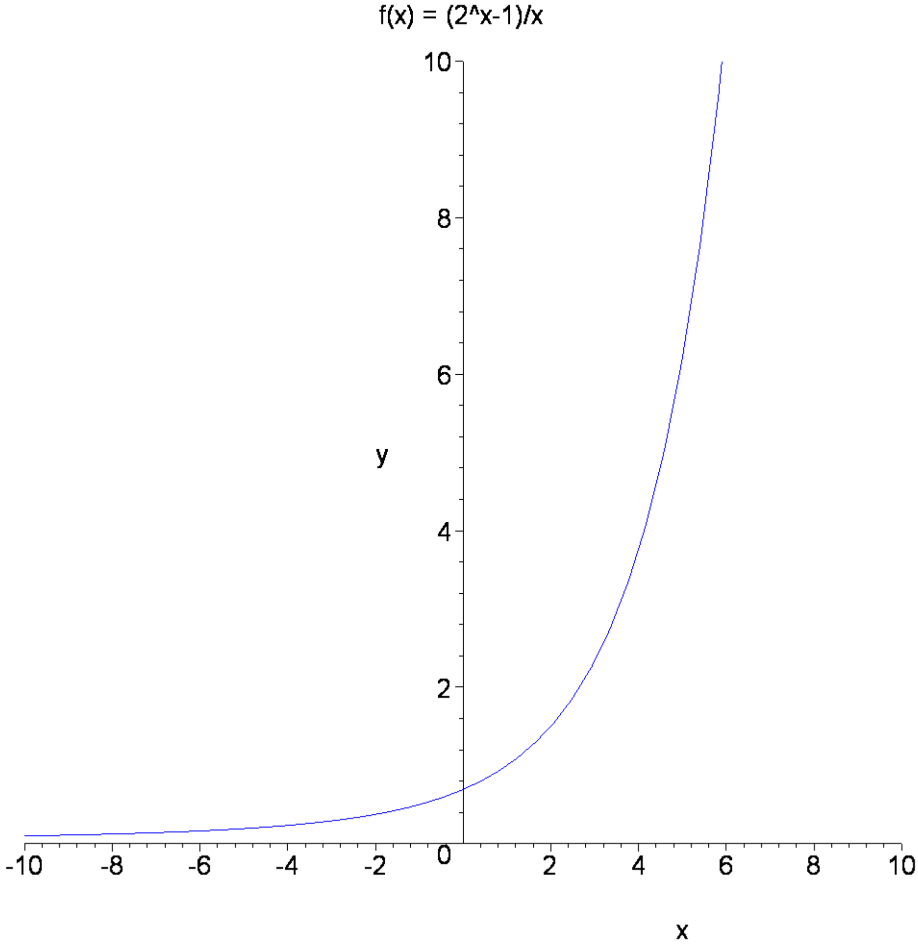
```
> plot(f(x),x=-infinity..infinity,color=blue,title="f(x) =
  (2^x-1)/x");
```



Analisando-se o gráfico acima, observamos que quando $x \to -\infty$ a função tende para zero; e quando $x \to \infty$ a função tende para mais infinito.
Quando $x \to 0$ a função tende para um determinado valor.

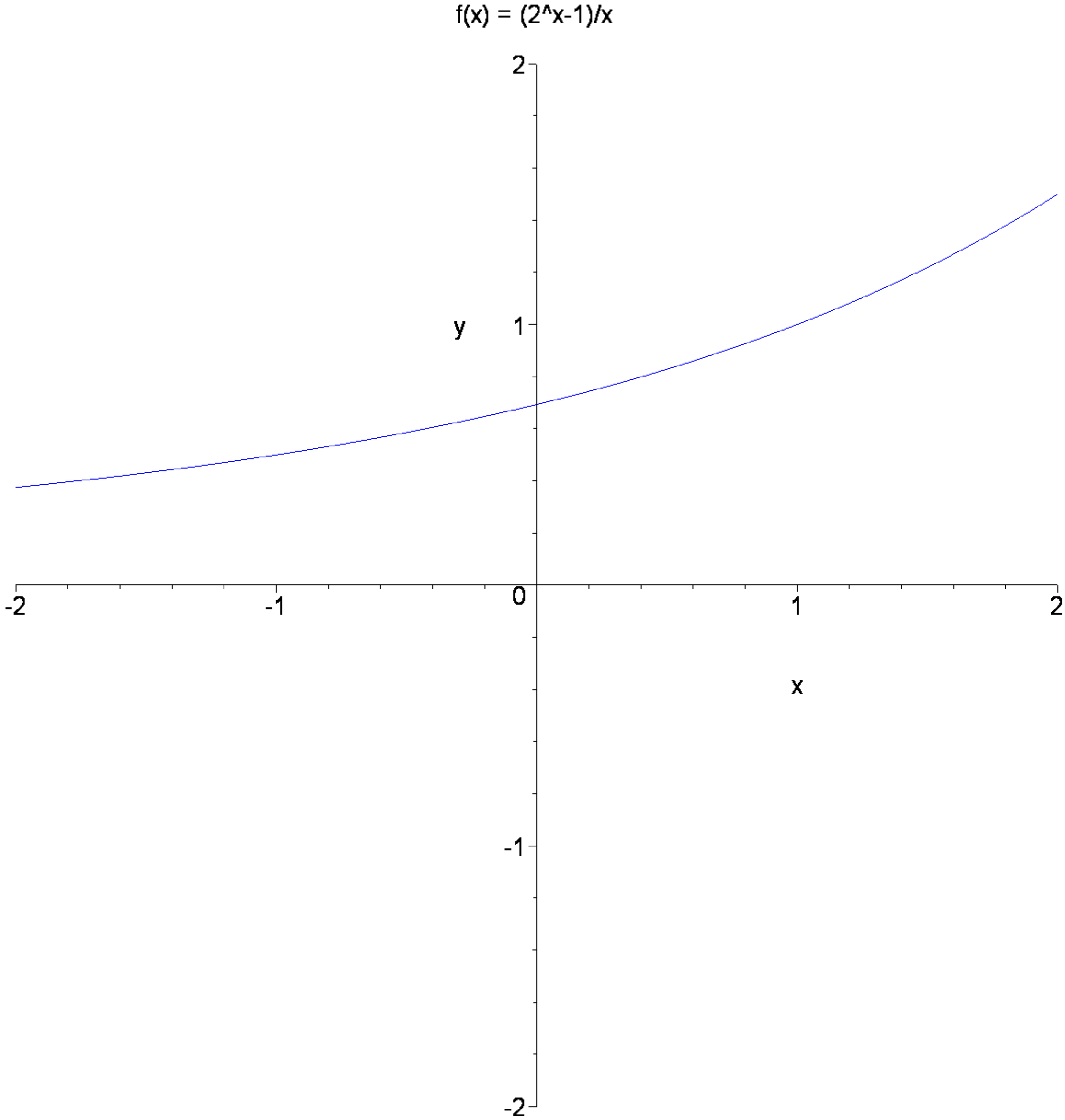
A seguir, construiremos um gráfico, redefinindo as janelas de visualização para a abscissa no intervalo [-10 ; 10] e ordenada no intervalo de [0 ; 10].

```
> plot(f(x),x=-10..10,y=0..10,color=blue, title="f(x) =
  (2^x-1)/x");
```



Vamos construir um outro gráfico, efetuando um "*zoom*" nas proximidades do ponto $x_0 = 0$, redefinindo as janelas de visualização para a abscissa no intervalo de [-2 ; 2] e ordenada no intervalo [0 ; 2] .

```
> plot(f(x),x=-2..2,y=-2..2,color=blue, title="f(x) =
  (2^x-1)/x");
```



Estes limites podem ser avaliado com o uso dos comandos **Maple** seguinte:

```
> Limit(f(x),x=-infinity)=limit(f(x),x=-infinity);
```

$$\lim_{x \to (-\infty)} \frac{2^x - 1}{x} = 0$$

```
> Limit(f(x),x=infinity)=limit(f(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2^x - 1}{x} = \infty$$

```
> Limit(f(x),x=0)=limit(f(x),x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} = \ln(2)$$

```
> evalf(ln(2));
```

$$0.6931471806$$

Como assumimos a constante $a = 2$, então podemos generalizar que $\lim_{x \to a} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$.

A comprovação analítica deste limite deixamos como atividade de exercício.

Continuidade

Quando chutamos uma bola de futebol para cima, e considerando que não haja interrupção em seu movimento, esta descreve um movimento contínuo desde o momento do chute, alcançando sua altura máxima e começa um movimento descendente até chocar-se com o chão. Desta forma, dizemos que a bola apresentou um movimento contínuo e este pode ser descrito através de uma função matemática, nesta situação uma parábola.

Intuitivamente, quando representamos o gráfico de uma função em um sistema de eixos cartesianos, a função pode ser descrita como uma curva contínua se não apresentar nenhuma quebra ou buraco nos pontos que interligam esta curva.

A seguir, apresentamos as definições, os limites e os gráficos das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, que apresentam características de não-continuidade, os quais nos indicam as condições que uma função deve apresentar para ser contínua.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \text{ para } x \neq 2;$$

$$g(x) = \begin{cases} 2 & x = 2 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 2 \\ -x + 6 & 2 \le x \end{cases}$$

Definição das funções no **Maple**:

```
> restart: with(plots): with(plottools): with(student):
> f:=x->(x^2-4)/(x-2);
```

$$f := x \to \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

```
> g:=unapply(piecewise(x=2,2,x<>2,(x^2-4)/(x-2)),x);
```

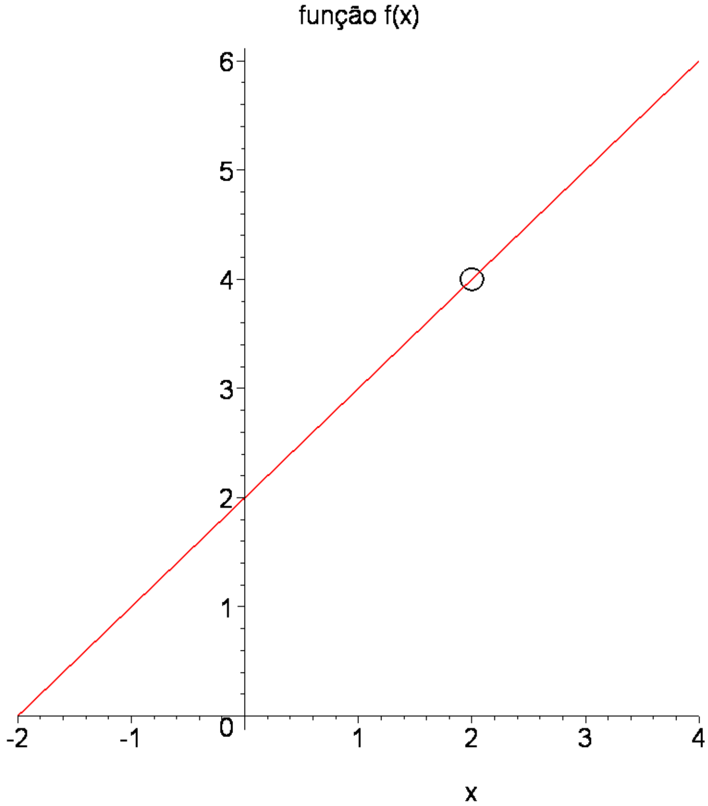
$$g := x \to \text{piecewise}\left(x = 2, 2, x \neq 2, \frac{x^2 - 4}{x - 2}\right)$$

```
> h:=x->piecewise(x<2,x-1,x>=2,-x+6);
```

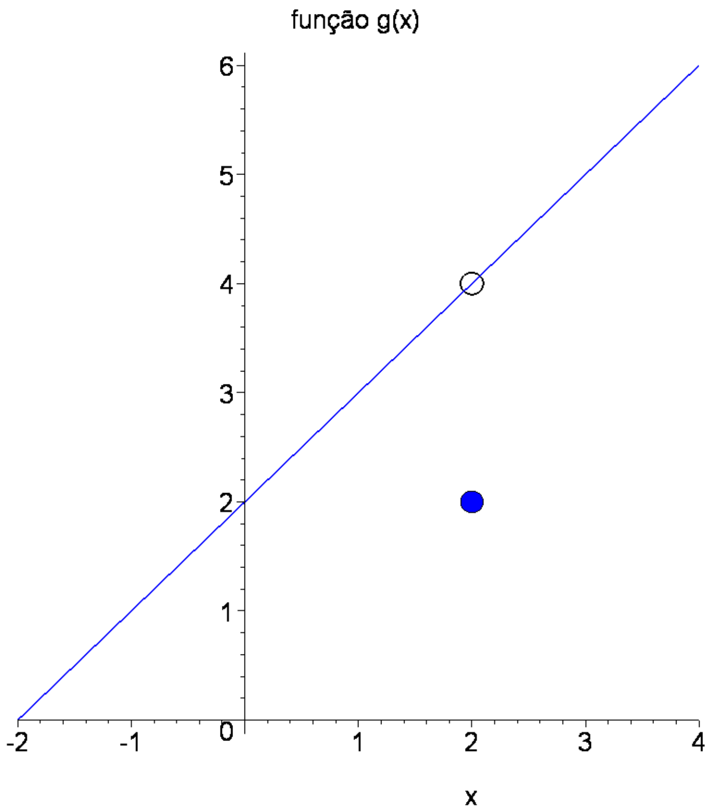
$$h := x \to \text{piecewise}(x < 2, x - 1, 2 \le x, -x + 6)$$

Plotando os gráficos das funções:

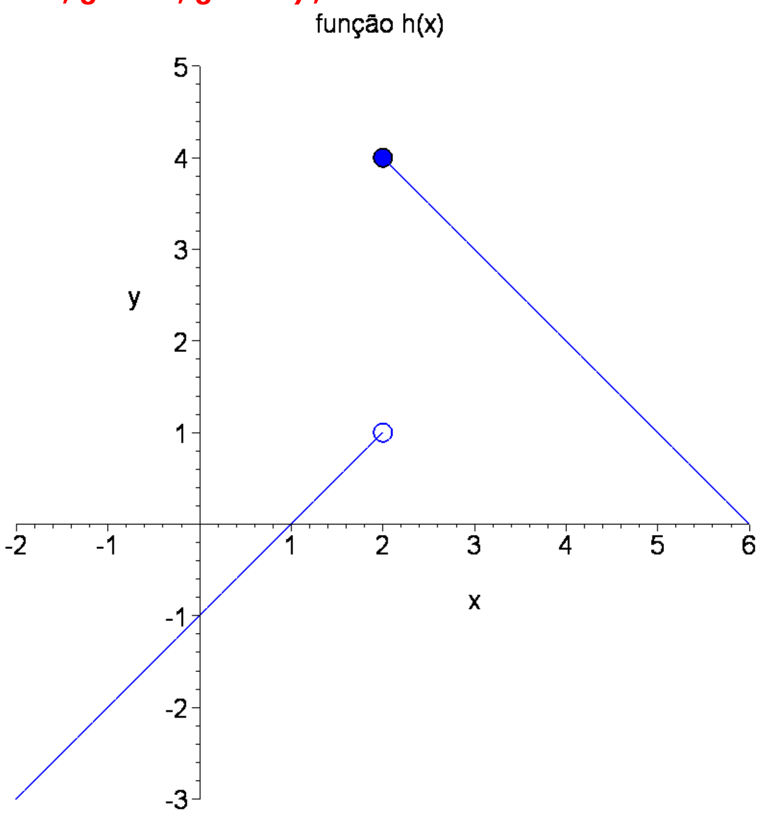
```
> graf1:=plot(f(x),x=-2..4,color=red,thickness=2,title=" função
  f(x)"):
> graf2:=circle([2,4],0.1,color=black,thickness=2):
> display(graf1,graf2);
```




```
> graf3:=plot(g(x),x=-2..4,color=blue,thickness=2,title="função
  g(x)"):
> graf4:=circle([2,4],0.1,color=black,thickness=2):
> graf5:=disk([2,2],0.1,color=blue,thickness=1):
> display(graf3,graf4,graf5);
```




```
> graf6:=plot(h(x),x=-2..6,y=-3..5,color=blue,thickness=2,disco
  nt=true,title="função h(x)"):
> graf7:=circle([2,1],0.1,color=blue,thickness=2):
> graf8:=disk([2,4],0.1,color=blue,thickness=2):
> display(graf6,graf7,graf8);
```



Calculando os limites das funções, no ponto $x = 2$, usando o **Maple**:

```
> Limit('f(x)',x=2)=limit(f(x),x=2);
```

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

```
> Limit('g(x)',x=2)=limit(g(x),x=2);
```

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 4$$

```
> Limit('h(x)',x=2)=limit(h(x),x=2);
```

$$\lim_{x \to 2} h(x) = \mathit{undefined}$$

Analisando-se as definições das funções, avaliando os seus limites no ponto $x = 2$ e observando-se os seus gráficos, temos as seguintes conclusões:

1 - a função $f(x)$ não está definida no ponto $x = 2$ e apresenta um "furo" ou "buraco" em seu gráfico;
2 - a função $g(x)$ está definida no ponto $x = 2$, porém apresenta o limite neste ponto diferente da sua imagem;
3 - a função $h(x)$ apresenta uma quebra no seu gráfico e o limite da função não existe.

Definição de Continuidade:

Dizemos que uma função $f(x)$ é contínua em um ponto $x = c$ se as seguintes condições forem satisfeitas:

1 - $f(x)$ está definida no ponto c;
2 - $\lim_{x \to c} f(x)$ existe;
3 - $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Caso uma das condições acima não forem satisfeitas, então dizemos que $f(x)$ apresenta uma descontinuidade em $x = c$.

Exemplo 20: Seja a função $f(x)$ definida abaixo:

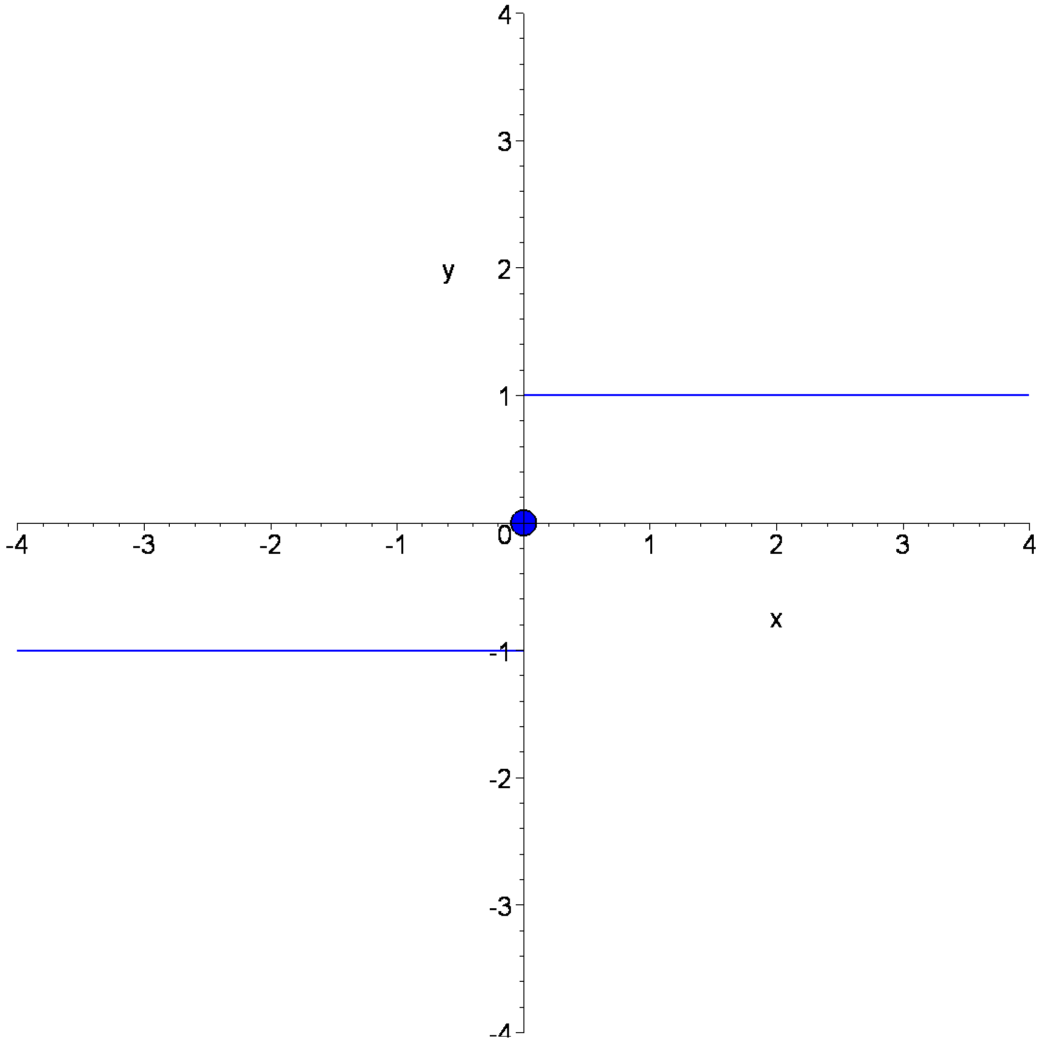
$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Definindo, avaliando os limites e plotando o gráfico da função no **Maple**:

```
> restart: with(plots): with(plottools):with(student):
> f:=x->piecewise(x<>0,abs(x)/x,x=0,0);
```

$$f := x \rightarrow \text{piecewise}\left(x \neq 0, \frac{|x|}{x}, x = 0, 0\right)$$

```
> graf1:=plot(f(x),x=-4..4,y=-4..4,color=blue,thickness=2,discont=true):
> graf2:=disk([0,0],0.1,color=blue,thickness=2):
> display(graf1,graf2);
```



Analisando-se o gráfico da função f(x) observamos que a mesma está definida em todo o conjunto dos reais, incluisve no ponto $x = 0$. Para valores de $0 < x$ a função vale 1, enquanto que para valores de $x < 0$ a função vale -1.

Avaliando o limite da função no ponto $x = 0$, temos:

```
> Limit(f(x),x=0,left)=limit(f(x),x=0,left);
```

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = -1$$

```
> Limit(f(x),x=0,right)=limit(f(x),x=0,right);
```

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = 1$$

```
> Limit(f(x),x=0)=limit(f(x),x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = \mathit{undefined}$$

Como a função não apresenta limite definido no ponto $x = 0$, portanto esta função não é contínua em todo o seu domínio.

Exemplo 21: Seja a função g(x) definida abaixo:

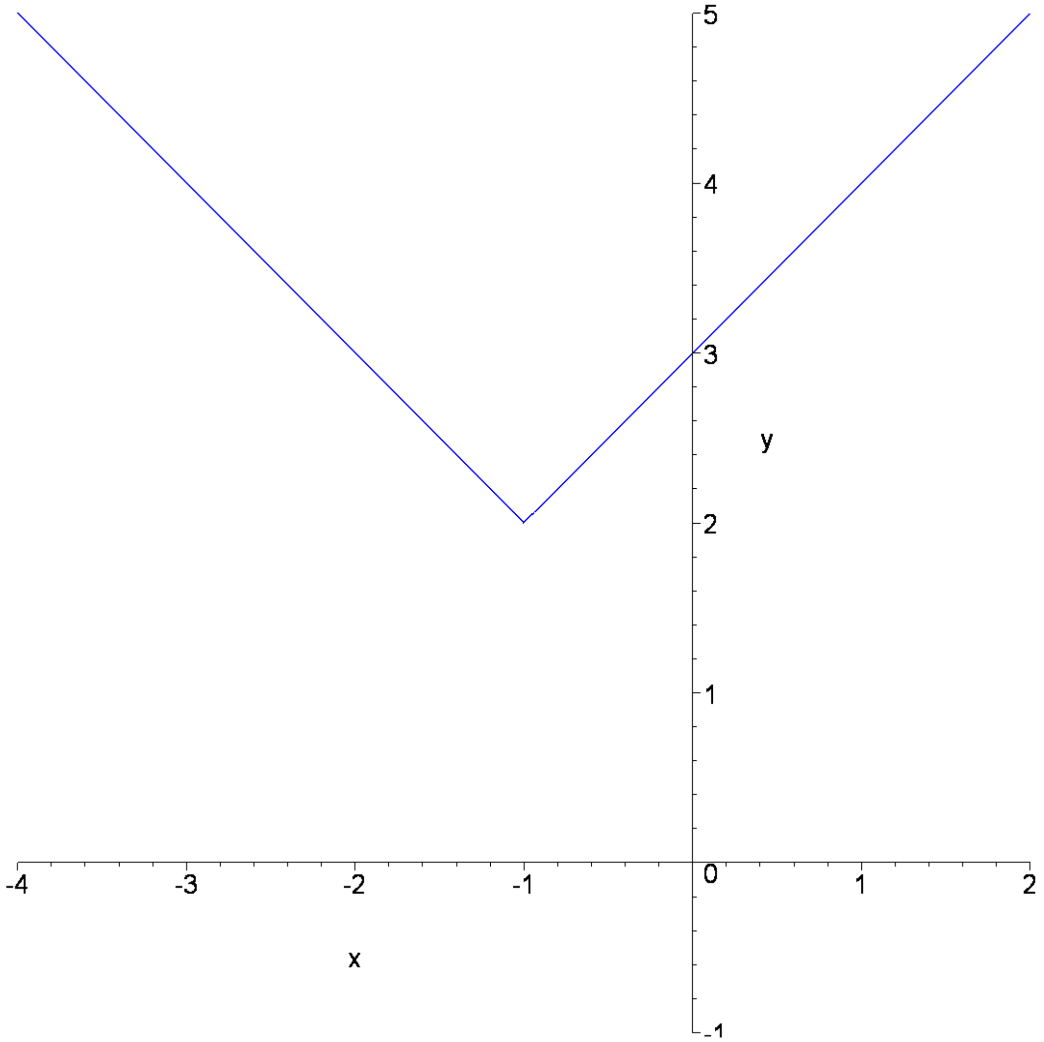
$$g(x) = \begin{cases} -x + 1 & x < -1 \\ x + 3 & -1 \leq x \end{cases}$$

Definindo, avaliando os limites e plotando o gráfico da função no **Maple**:

```
> restart: with(plots): with(plottools):with(student):
> g:=x->piecewise(x<-1,-x+1,x>=-1,x+3);
```

$$g := x \to \text{piecewise}(x < -1,\ 1 - x,\ -1 \leq x,\ x + 3)$$

```
> graf1:=plot(g(x),x=-4..2,y=-1..5,color=blue,thickness=2,disco
  nt=true):
> display(graf1);
```



Analisando-se o gráfico da função g(x) observamos que a mesma está definida em todo o conjunto dos reais, incluisve no ponto $x = -1$. Avaliando o limite da função no ponto $x = -1$, temos:

```
> Limit('g(x)',x=-1,left)=limit(g(x),x=-1,left);
```

$$\lim_{x \to (-1)-} g(x) = 2$$

```
> Limit('f(x)',x=-1,right)=limit(g(x),x=-1,right);
```

$$\lim_{x \to (-1)+} f(x) = 2$$

```
> Limit(g(x),x=0)=limit(g(x),x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} \begin{cases} 1 - x & x < -1 \\ x + 3 & -1 \leq x \end{cases} = 3$$

```
> 'g(-1)'=g(-1);
```

$$g(-1) = 2$$

Como a função está definida no ponto $x = -1$ e apresenta limite definido neste ponto e que este limite é igual à função no ponto em questão, portanto esta função é contínua em todo o seu domínio.

Exemplo 22: Seja a função h(x) definida abaixo:

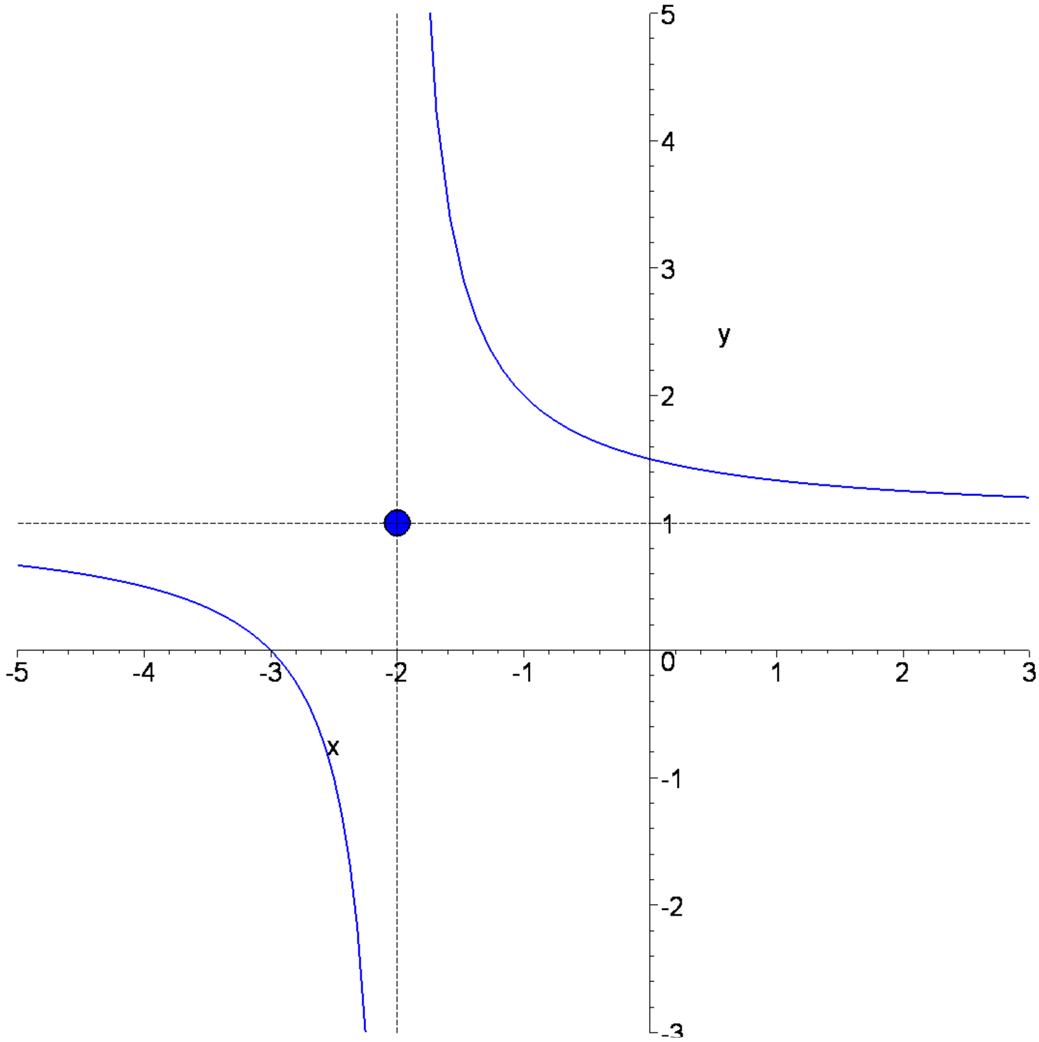
$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} + 1 & x \neq -2 \\ 1 & x = -2 \end{cases}$$

Definindo, avaliando os limites e plotando o gráfico da função no **Maple**:

```
> restart: with(plots): with(plottools):with(student):
> h:=x->piecewise(x<>-2,1/(x+2)+1,x=-2,1);
```

$$h := x \to \text{piecewise}\left(x \neq -2, \frac{1}{x+2} + 1, x = -2, 1\right)$$

```
> graf1:=plot(h(x),x=-5..3,y=-3..5,color=blue,thickness=2,disco
  nt=true):
> graf2:=disk([-2,1],0.1,color=blue,thickness=2):
> graf3:=line([-5,1],[3,1],linestyle=3,color=black):
> graf4:=line([-2,-3],[-2,5],linestyle=3,color=black):
> display(graf1,graf2,graf3,graf4);
```



Analisando-se o gráfico da função $h(x)$ observamos que a mesma está definida em todo o conjunto dos reais, incluisve no ponto $x=-1$.
Avaliando o limite da função no ponto $x=-1$, temos:

```
> Limit('h(x)',x=-2,left)=limit(h(x),x=-2,left);
```

$$\lim_{x \to (-2)-} h(x) = -\infty$$

```
> Limit('h(x)',x=-2,right)=limit(h(x),x=-2,right);
```

$$\lim_{x \to (-2)+} h(x) = \infty$$

```
> Limit('h(x)',x=-2)=limit(h(x),x=-2);
```

$$\lim_{x \to (-2)} h(x) = \mathit{undefined}$$

Como a função não apresenta limite definido no ponto $x=-2$, portanto esta função não é contínua em todo o seu domínio.

Continuidade em um Intervalo:

Se uma função $f(x)$ for contínua em cada ponto de um intervalo aberto $(a;b)$, então esta função é contínua em $(a;b)$.

Definição: Função Contínua em um Intervalo Fechado

Uma função $f(x)$ é dita contínua em um intervalo fechado $[a;b]$, se as condições seguintes forem satisfeitas:

1 - $f(x)$ é contínua em $(a;b)$;
2 - $f(x)$ é contínua à direita de a;
3 - $f(x)$ é contínua à esquerda de b.

Exemplo 23: Seja a função $k(x)$ definida abaixo:

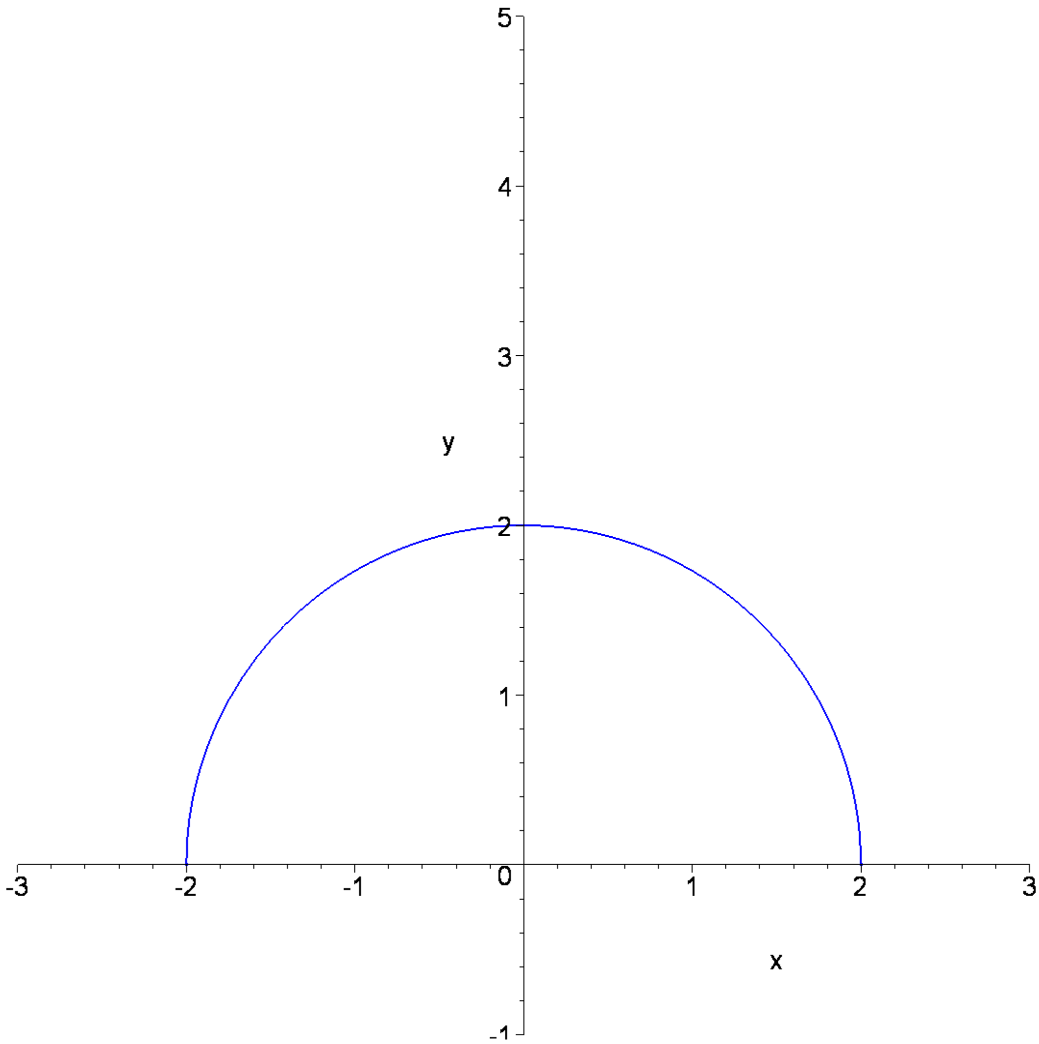
$k(x)=\sqrt{4-x^2}$, no intervalo [-2 ; 2].

Definindo, avaliando os limites e plotando o gráfico da função no **Maple**:

```
> restart: with(plots): with(plottools):with(student):
> k:=x->piecewise(x>=-2 and x<=2,sqrt(4-x^2),undefined);
```

$$k := x \to \operatorname{piecewise}(-2 \le x \textbf{ and } x \le 2, \sqrt{4-x^2}, \mathit{undefined})$$

```
> plot(k(x),x=-3..3,y=-1..5,color=blue,thickness=2,discont=true
  );
```



Analisando-se o gráfico da função g(x), observamos que a mesma está definida no conjunto dos reais, no intervalo [-2 ; 2] . Avaliando os limites nos pontos $x = -2$, à sua direita e $x = 2$, à sua esquerda, temos que os limites existem. Portanto, a função é contínua em todo o intervalo de definição.

```
> Limit('k(x)',x=-2,right)=limit(k(x),x=-2,right);
```

$$\lim_{x \to (-2)+} k(x) = 0$$

```
> Limit('k(x)',x=2,left)=limit(k(x),x=2,left);
```

$$\lim_{x \to 2-} k(x) = 0$$

Descontinuidade Removível:

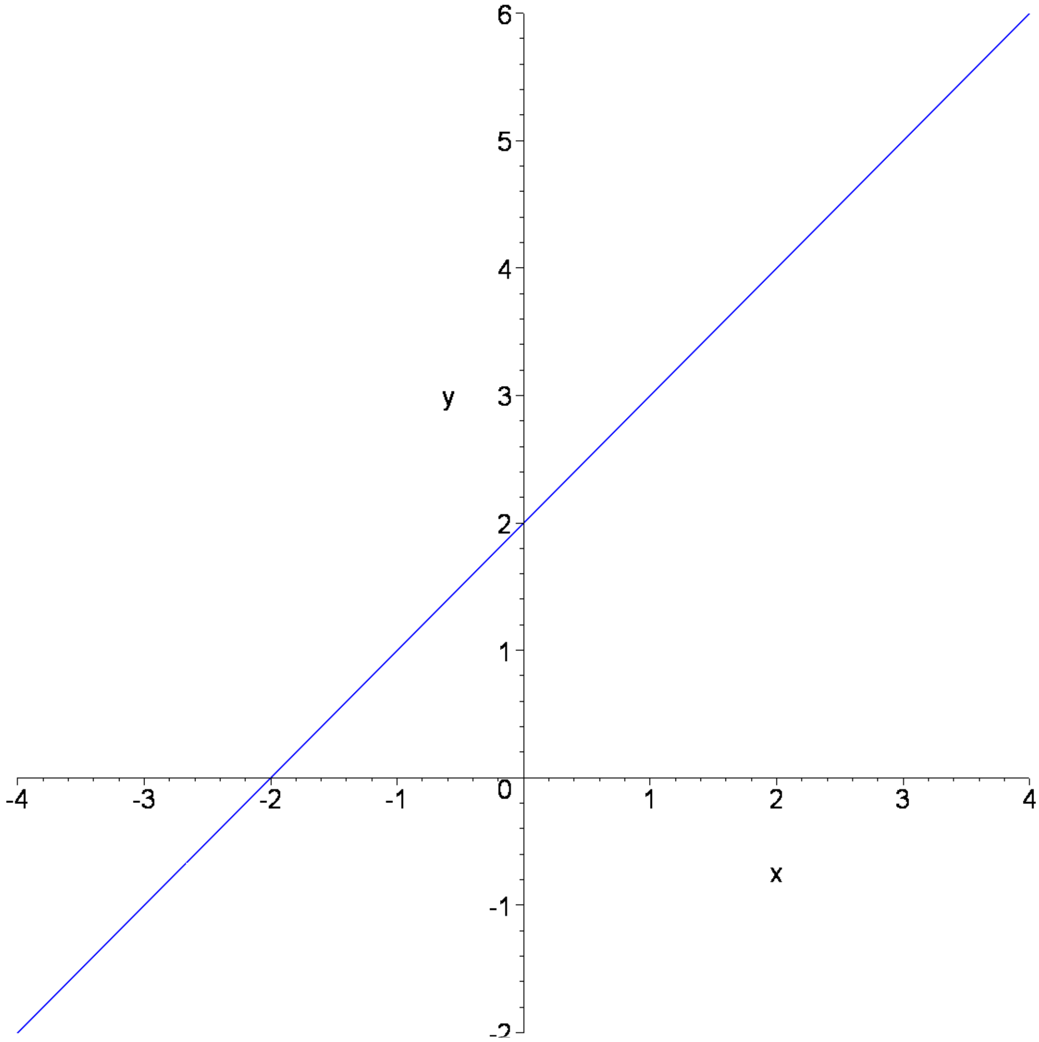
Vamos retornar a análise da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, para $x \neq 2$.

A seguir, com a ajuda do **Maple**, traçamos o gráfico desta função.

```
> restart: with(plots):
> f:=x->(x^2-4)/(x-2);
```

$$f := x \to \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

```
> plot(f(x),x=-4..4,y=-2..6,color=blue,thickness=2);
```



Observamos no gráfico acima, embora que a função não esteja definida no ponto $x = 2$, o **Maple** ignorou este fato e traçou o gráfico, considerando que a função é contínua na janela especificada.

Por outro lado, $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$. A expressão $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ apresenta o termo $x - 2$ como um fator comum ao numerador e ao denominador, pois $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$. Desta forma, antes de traçar o gráfico da função, o **Maple** simplifica a expressão que a define e obtém a expressão $x + 2$ e traça o seu gráfico. Porém, a simplificação só é válida para a condição de $x \neq 2$.

As funções $\mathrm{f}(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ e $\mathrm{g}(x) = x + 2$ são equivalentes em todos os pontos, com excessão no ponto $x = 2$, onde a função $\mathrm{f}(x)$ não está definida.

Vamos considerar uma função $\mathrm{h}(x)$ definida como segue:

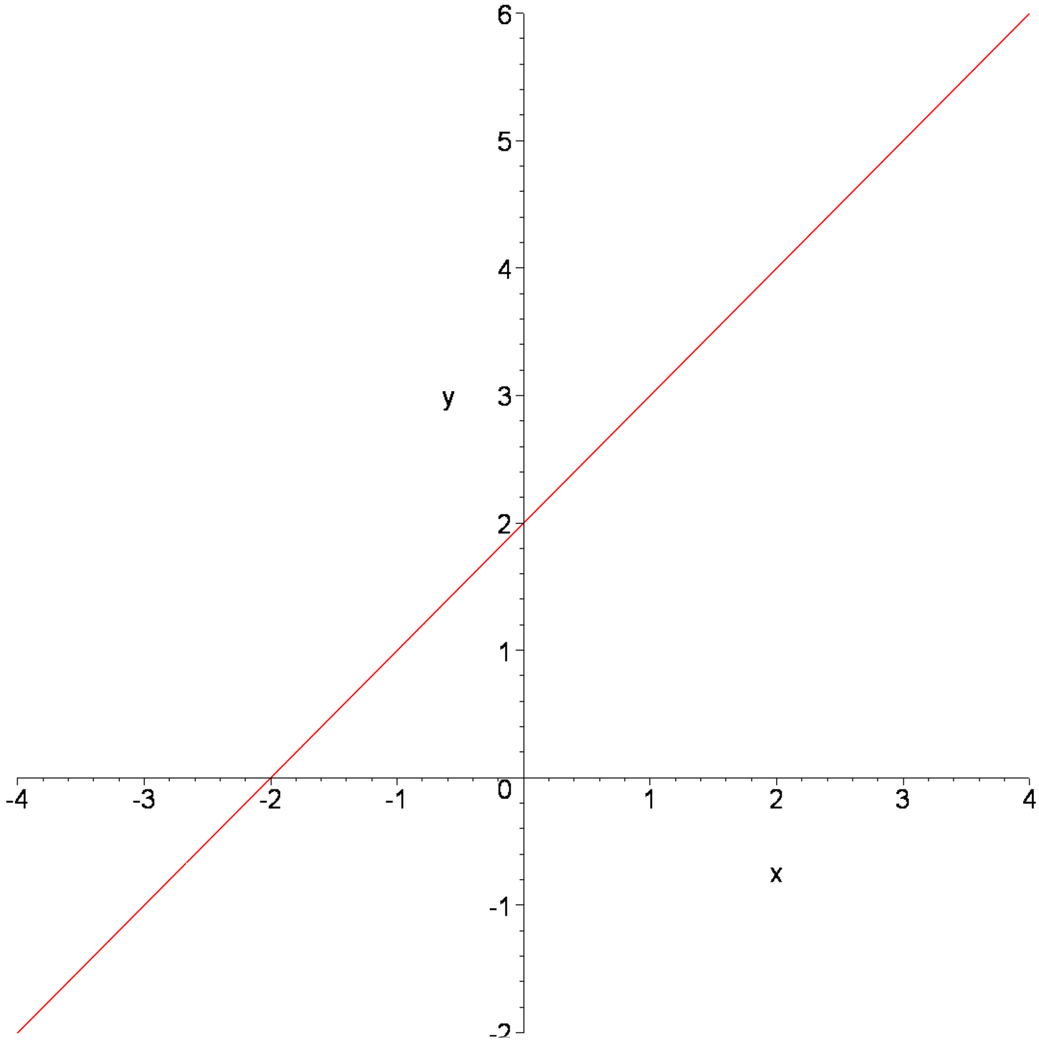
$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} = x+2 & x \neq 2 \\ \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4 & x = 2 \end{cases}$$

e traçar o seu gráfico, utilizando o **Maple**:

```
> g:=x->x+2:
> h:=x->piecewise(x<>2,g(x),x=2,limit(f(x),x=2));
```

$$h := x \to \text{piecewise}\left(x \neq 2, g(x), x = 2, \lim_{x \to 2} f(x)\right)$$

```
> plot(h(x),x=-4..4,y=-2..6,color=red,thickness=2);
```



Observamos que o gráfico anterior da função h(x) apresenta comportamento idêntico ao da função f(x).
Assim, podemos concluir que o **Maple** traçou o gráfico da função h(x) e não da função f(x) original.

Propriedades das Funções Contínuas:

Sejam duas funções $f(x)$ e $g(x)$ contínuas em um intervalo contendo um ponto c. Então as operações com funções serão contínuas em $x = c$:

1 - Somas: $f(x) + g(x)$;
2 - Diferenças: $f(x) - g(x)$
3 - Produtos: $f(x)\ g(x)$.
4 - Multiplicação por constante: $k\ f(x)$;
5 - Quocientes: $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$;
6 - Potenciação $[f(x)]^{\left(\frac{p}{q}\right)}$; $q \neq 0$.
7 - Compostas: $(f\ o\ g)(x)$.

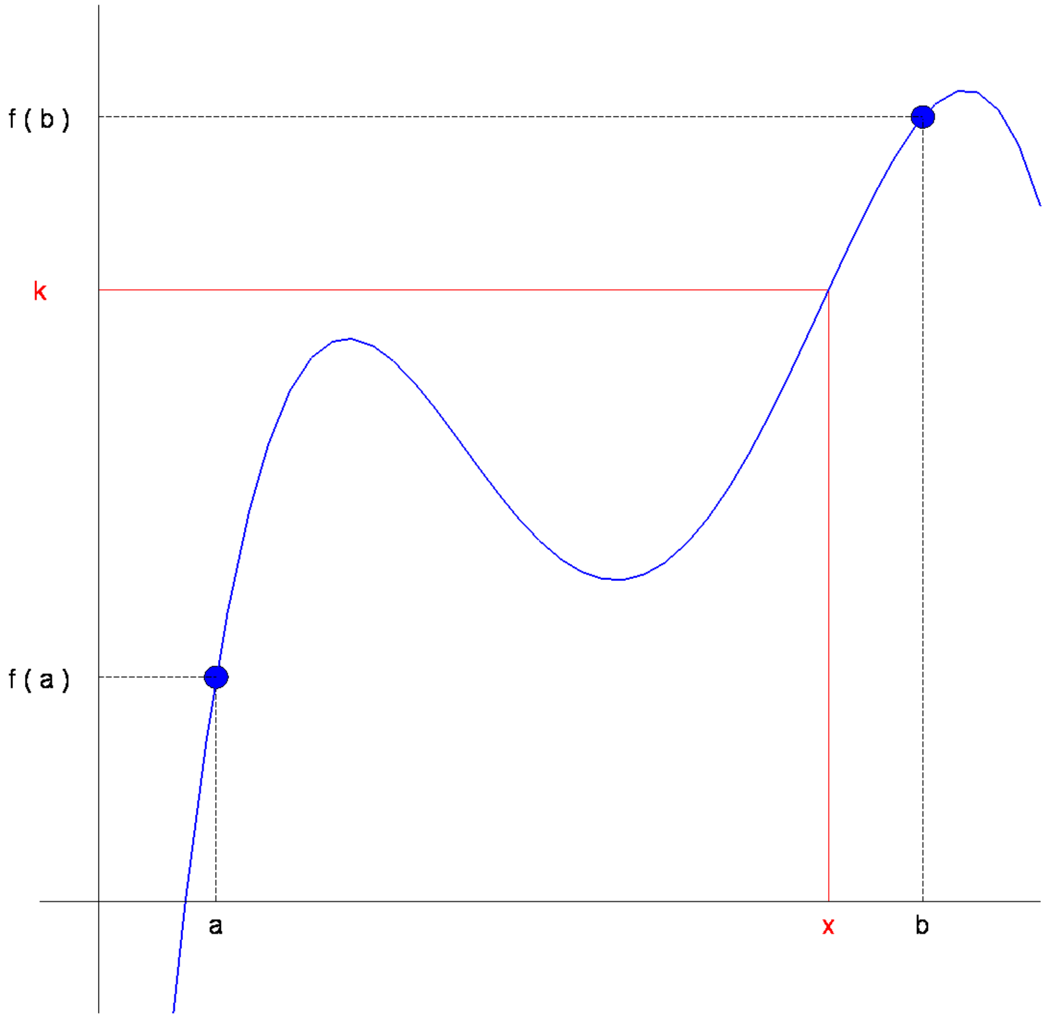
N.B.: A comprovação destas propriedades pode ser efetuada aplicando-se os teoremas de limites.

Teorema do Valor Intermediário:

Seja $f(x)$ uma função contínua em um intervalo fechado $[\ a\ ;\ b]$ e k um número qualquer entre a e b, inclusive, então existe no mínimo um número x no intervalo $[\ a\ ;\ b]$, tal que $f(x) = k$.

O gráfico abaixo mostra uma função contínua em um intervalo fechado $[\ a\ ;\ b]$. Observamos que k pertence ao intervalo fechado $[\ f(a)\ ;\ f(b)\ ]$. Se traçarmos uma reta horizontal paralela ao eixo-x, ou seja, $y = k$, então esta reta interceptará a curva pelo menos uma vez. Pelo teorema acima, então temos que existe pelo menos um x pertencente ao intervalo $[\ a\ ;\ b]$.

N.B.: A comprovação deste teorema necessita de procedimentos matemáticos avançados, além deste curso.

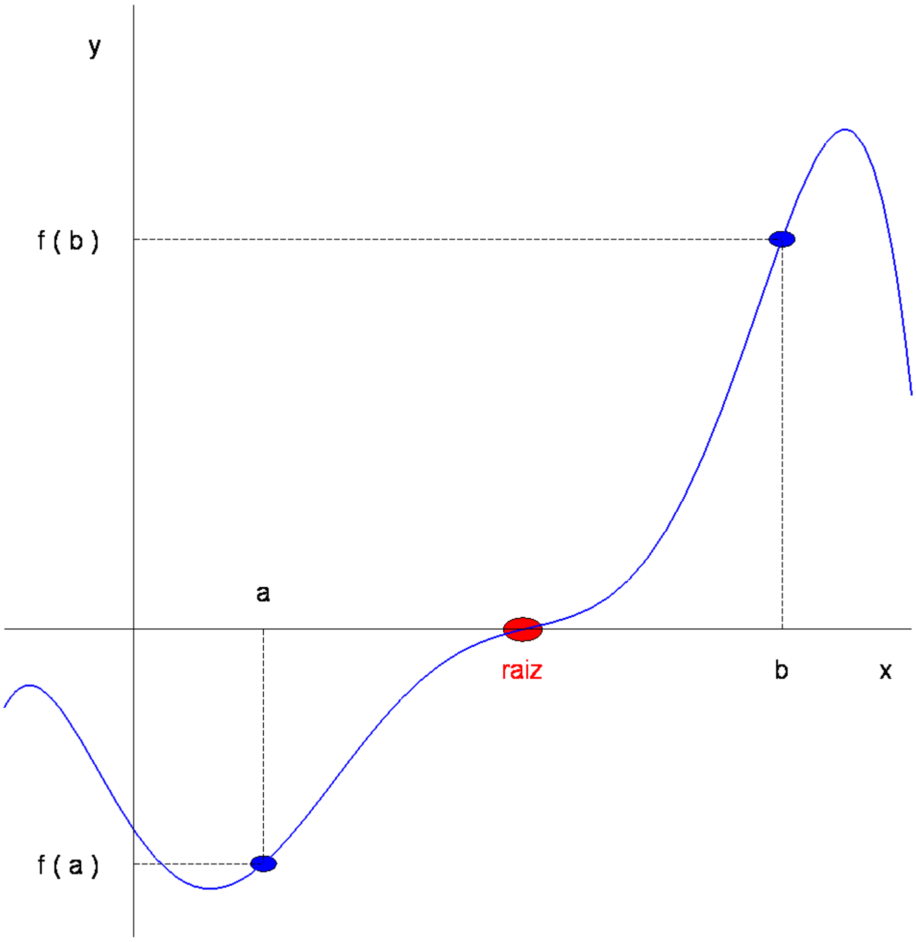


Esboços de Gráficos e Determinação de Raizes de uma Função:

Como uma consequência do teorema do valor intermediário, o gráfico de uma função contínua em um intervalo aberto não pode ter nenhuma quebra, saltos ou pontos em aberto, ou seja, o gráfico será sempre conexo, constituído de um só segmento de curva. Desta forma, se uma função é contínua em um intervalo aberto, podemos construir, inicialmente, o seu gráfico em um amplo domínio para uma visualização geral do comportamento da função e depois aproximarmos em pequenos intervalos fechado de pontos ("*zoom*" em uma janela), para análise de pontos específicos.

Denominamos de **raiz** ou **zero** de uma função a solução da equação $f(x) = 0$. O teorema do valor intermediário nos assegura que se uma função é contínua em um intervalo aberto e, se em qualquer intervalo fechado $[\, a \,;\, b]$ pertencente a esse intervalo, e que a função mude de sinal, então neste intervalo $[\, a \,;\, b]$ encontra-se uma raiz ou zero da função. Este princípio é utilizado no **Método da Bisseção**, método computacional para determinação de raizes de equações em um intervalo fechado contínuo.

O gráfico a seguir ilustra o comportamento de uma função contínua em um intervalo fechado [a ; b], em que $f(a)\, f(b) < 0$, o que nos assegura uma raiz neste intervalo.



Exercícios propostos:

01 - Em cada um dos itens abaixo, determine o maior domínio de continuidade da função $f(x)$, isto é, determine o maior conjunto possível onde a função seja contínua. Para cada ponto x_0 onde a função $f(x)$ não seja contínua, decida se é possível atribuir um valor a $f(x_0)$ que a torne uma função contínua em x_0.

a) $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 - x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{1 - x}{(2 - x)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$

d) $f(x) = \dfrac{|x^2 - 1|}{x^2 - 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

f) $f(x) = \{ \begin{matrix} -x & x < 0 \\ x & 0 < x \end{matrix}$

g) $f(x) = \{ \begin{matrix} 1 + x & x < 1 \\ 3 - x & 1 < x \end{matrix}$

02 - Determine, se existirem, os valores de x pertencentes ao domínio de $f(x)$, nos quais a função não é contínua.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 - 1} & x \neq 1 \\ 0 & x = -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + 5x + 6)^{\left(\frac{1}{2}\right)} & x < -3 \textbf{ and } -2 < x \\ -1 & -3 \leq x \textbf{ and } x \leq -2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 4}{-1 + x} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \dfrac{1 + \cos(x)}{3 + \mathrm{sen}(x)}$

e) $f(x) = \dfrac{x - |x|}{x}$

f) $f(x) = \dfrac{2}{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{(-x)}}$

03 - Determine a e b para que a função abaixo seja contínua em $x = 1$ e $x = 4$.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ a\,x + b & 1 < x \textbf{ and } x < 4 \\ -2\,x & 4 \leq x \end{cases}$$

Referências bibliográficas

01 - Cálculo (George B. Thomas), volume I. Maurice Wier, Joel Hass, Frank Giordano; tradução Thelma Guimarães e Leila M. V. Figueiredo. - 11a. ed. - São Paulo: Pearson Addsison Wesley, 2009.

02 - Cálculo, volume I. Howard Anton, Irl Bivens, Stephen Davis; tradução Clauss Ivo Doering. - 8a. ed. - Porto Alegre: Bookman, 2007.

03 -O Cálculo com Geometria Analítica - volume I. Louis Leithold; tradução Cyro de Carvalho Patarra. - 3a. ed. - São Paulo: editora HARBRA Ltda, 1994.

04 - Aprendendo Cálculo com Maple. Cálculo de uma variável. Ângela Rocha dos Santos & Waldecir Bianchini. - LTC Editora, 2002.

05 - Cálculo A. Diva M. Flemming, Mirian B. Gonçalves. - 6ª. ed. - São Paulo. - Makron Books, 2007.

06 - Matemática Universitária Básica com Maple V. Hipertexto com animações em HTML e MAPLE V com uma introdução ao software MAPLE V. - Editora UFSCar, 2000. (Disponível em CD-ROM).

07 - Introdução à Computação Algébrica com MAPLE. Lenimar Nunes de Andrade. - SBM, 2004.

08 - Maple 10, Harnessing Power of Mathematics : User Manual. Canadá. MAPLESOFT. - Waterloo Maple Inc., 2005.

Portal na Internet de Referências

09 - Referências Complementares:

09.1 - http://www.maplesoft.com
09.2 - http://www.dma.uem.br/kit/
09.3 - http://www.ime.usp.br/lem/
09.4 - http://www.cepa.if.usp.br/e-calculo/
09.5 - http://www.cefetrn.br/~assis