Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Campus Natal Central
Diretoria Acadêmica de Gestão e Tecnologia da Informação
Curso de Tecnologia em Redes de Computadores

Cálculo Diferencial e Integral

Prof.: Fco. **Assis** de Oliveira

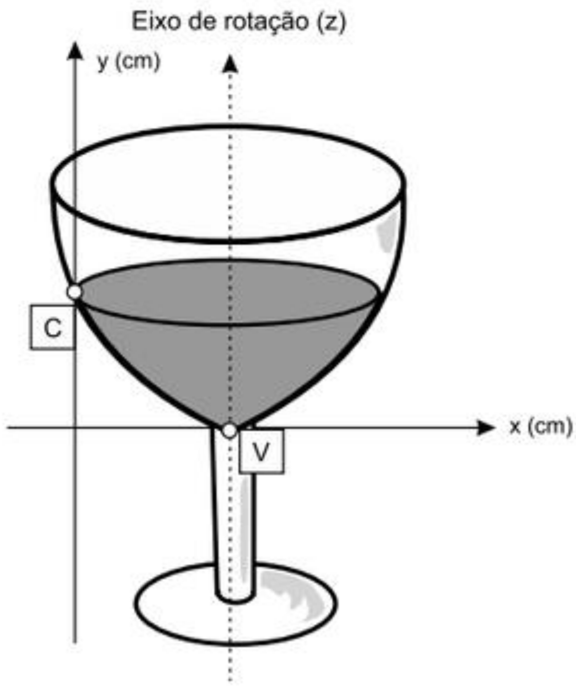
Nome: ____ Matrícula:____________________

Atividade: Áreas de Superfície e Volumes de Revolução: Integrais

A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura abaixo.

A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela equação f(*x*) abaixo, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo-*x*.

$$\mathrm{f}(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$$



Créditos: ENEM 2013

Nessas condições, determine:

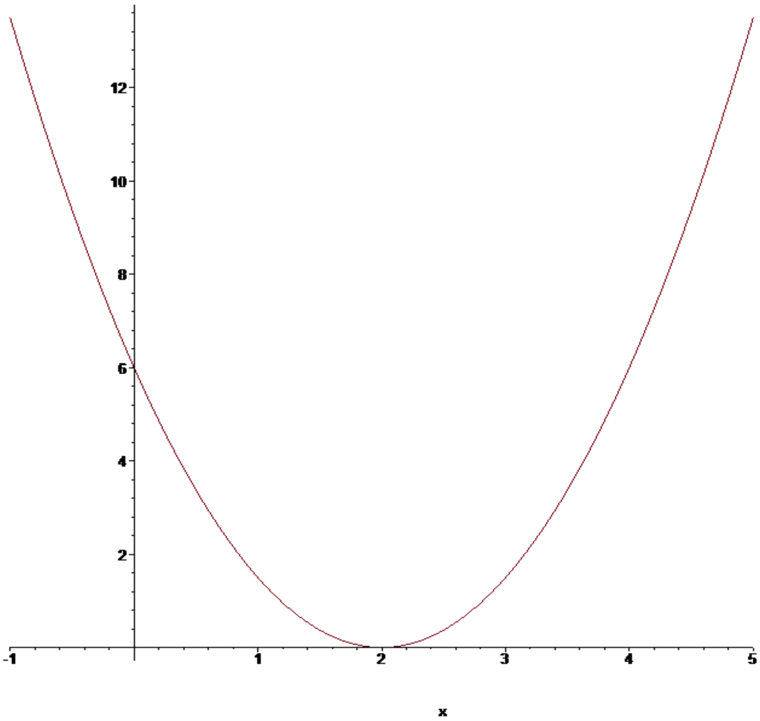
a) A altura do líquido na taça
b) O volume do líquido na taça
c) O volume máximo para a taça, considerando a altura total da mesma de 15 cm, e que da base de apoio ao vértice da parábola mede 6 cm
d) A área de superfície da taça (considerar apenas a região da parábola, sem a sua base)
e) O comprimento da linha da parábola, entre o seu vértice e a extremidade superior da taça

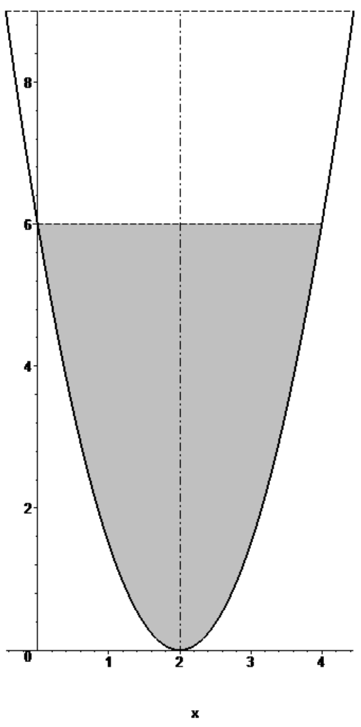
Resolução:

a) Para encontrarmos a altura do líquido, indicada pela coordenada C, conforme figura, devemos analisar a equação do 2º. grau, considerando que o vértice da parábola está sob o eixo-*x*, e que sob esta condição o determinante da equação do segundo grau é igual a zero. Assim sendo, temos: $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$ = 0. Logo: $(-6)^2 - 4\,\frac{3}{2}\,C = 0$

Resolvendo-se a equação acima para a constante C, encontramos que C = 6.
Logo, a equação para a parábola fica: $f(x) = \frac{3}{2}\,x^2 - 6\,x + 6$

Abaixo, traçamos o gráfico da função f(*x*), para análise do problema:

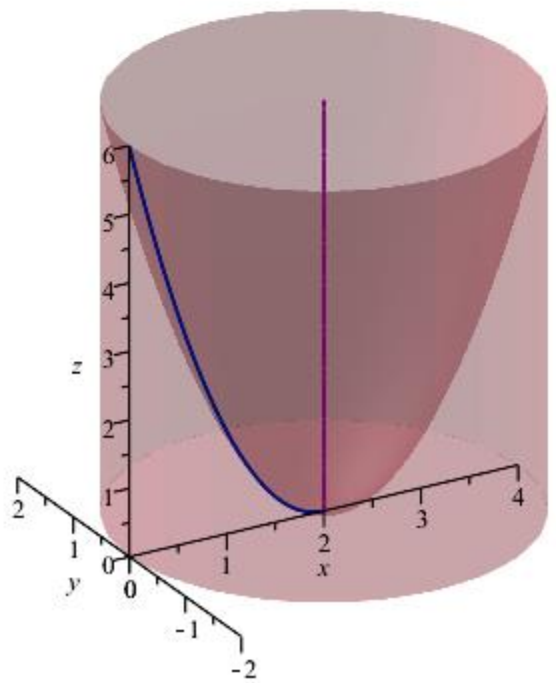




b) A equação que determina o volume de revolução é dada por: $Vol = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$, se considerarmos o eixo de rotação como sendo o eixo-*x* (Método dos Discos de Rotação). Porém, a taça é rotacionada sobre o eixo-*y*, logo a expressão para o volume de revolução é dada por: Vol = $\int_a^b 2\,\pi\,(x-L)\,f(x)\,dx$ (Método das Cascas)

Considerando a revolução no eixo-*z* (eixo-vertical), coordenada de *x* = 2, o volume de revolução será a solução da integral acima, com os extremos de integração *a* = 0 e *b* = 2.

Portanto, a equação do volume fica: Vol = $\int_0^2 2\,\pi \left| (x-2)\left(\frac{3}{2}x^2 - 6\,x + 6\right) \right| dx = 12\,\pi$ = 37,7 cm^3



.

c) Para um volume máximo, considerando que a altura total da taça é de 15 cm e que a distância da base ao vértice mede 6 cm, então a altura do vértice da parábola (*x* = 2) mede 9 cm. Desta forma, há necessidade de encontrarmos as coordenadas para *x* que levem a altura de *y* = 9 cm . Ou seja, devemos resolver a equação: f(*x*) = 9 .

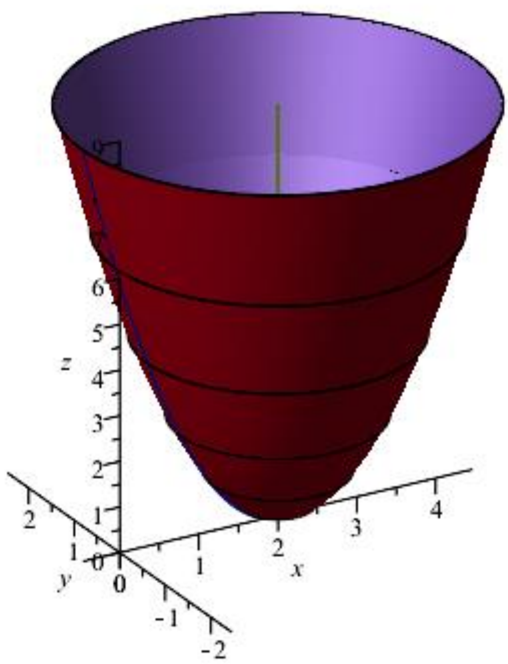
Resolvendo-se $\frac{3}{2}x^2 - 6\,x + 6 = 9$, obtemos: $x = (2 + \sqrt{6}, 2 - \sqrt{6})$ ou $x = (4.45, -0.45)$

De forma análoga ao item anterior, temos: Vol = $\int_{-0.45}^{2} 2\,\pi \left| (x-2)\left(\frac{3}{2}x^2 - 6\,x + 6\right) \right| dx = 84.9$

d) A área da superfície da taça será dada por: Area = $\int_a^b 2\pi\, f(x)\sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2}\,dx$, se considerarmos o eixo-*x* como o eixo de rotação.

Considerando que vamos calcular toda a área da taça, com rotação pelo eixo-*y*, a uma distância de 2 unidades (eixo-*z*), então temos que: Area = $\int_a^b 2\pi\,|x|\sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2}\,dx$

Portanto, Area = $\int_{-0.45}^{2} 2\pi\,|x-2|\sqrt{1+(3x-6)^2}\,dx = 94.7$



e) O comprimento da linha da parábola é dada por: L = $\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2}\,dx$

Considerando que devemos calcular a linha do vértice até a borda da taça, então temos:

Comp_Linha = $\int_{-0.45}^{2} \sqrt{1+(3x-6)^2}\,dx = 9.5$