Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Campus Natal Central
Diretoria Acadêmica de Gestão e Tecnologia da Informação
Curso de Tecnologia em Redes de Computadores

Cálculo Diferencial e Integral

Prof.: Fco. **Assis** de Oliveira

Atividade de Revisão sobre Retas no Plano

Sejam os pontos P (2 ; 7) e Q (0 ; 3) localizados no plano cartesiano-xy.

1) Encontrar a equação da Reta R que passa por estes pontos;
2) Encontrar a equação da Reta S normal (perpendicular) à Reta R, no ponto P;
3) Encontrar a(s) equação(ões) da(s) reta(s) que seja(m) paralela(s) à Reta R, e que esteja(m) a uma distância de $\sqrt{5}$ unidades desta reta.

N.B.: Representação Gráfica da Questão

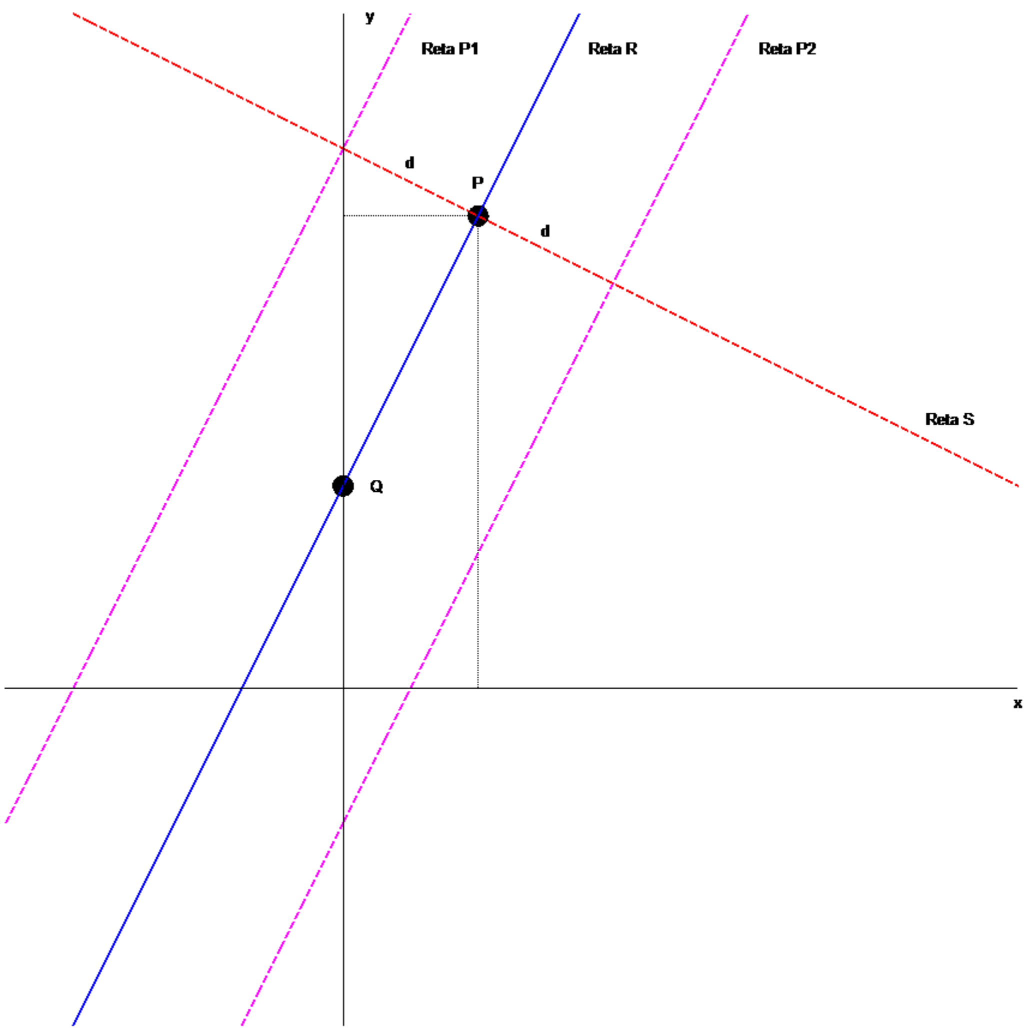

Figura 1

Solução:

Equação Geral de uma Função Afim (e/ou Equação da Reta)

$f(x) = a\,x + b$ ou $y = a\,x + b$, (Eq. 1).

onde:
a = coeficiente angular (no caso da reta), no caso da equação representar uma função pode ser denominado de Taxa de Variação (de uma Grandeza);
b = coeficiente linear

O termo *a* indica a inclinação que a reta tem em relação ao eixo-*x*. Portanto, se considerarmos que o ângulo formado por esta reta e o eixo-*x* seja β , temos que $a = \tan(\beta)$.

Considerando dois pontos sobre uma reta, por exemplo A (x_1 ; y_1) e B (x_2 ; y_2), então o coeficiente angular m_r pode ser determinado pela expressão abaixo:

$$m_r = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{(Eq. 2).}$$

Combinando as equações Eq. 1 e Eq. 2, podemos escrever a equação geral do 1º grau da seguinte forma:

$y - y_0 = m\,(x - x_0)$, ou seja: $y = y_0 + m\,(x - x_0)$ (Eq. 3),

onde x_0 e y_0 representam as coordenadas de um ponto qualquer.

O termo *b* indica o deslocamento que a reta apresenta em relação ao eixo-*x*. Basta assumirmos $x = 0$ na equação geral que teremos a relação $y = b$.

Se $0 < b$ (*b* positivo), indica que a reta desloca-se *b* unidades acima do eixo-*x*, ou seja, intercepta o eixo-*y* em *b* unidades;

Se $b < 0$ (*b* negativo), indica que a reta desloca-se *b* unidades abaixo do eixo-*x*.

Determinação da Equação da Reta R:

Pontos: P (2 ; 7) e Q (0 ; 3)

\- cálculo do coeficiente angular: $m_R = \dfrac{y_p - y_q}{x_p - x_q} = \dfrac{7 - 3}{2 - 0} = 2.$

\- determinação do coeficiente linear: considerando que o ponto Q (0 ; 3) indica que $x_q = 0$ está sob o eixo-*y*, então temos diretamente que o termo $b = 3$ (Eq.1).

Portanto, a equação geral da Reta R será dada por:

$$y_R = 2\,x + 3 \quad \text{(Eq. 4).}$$

Determinação da Equação da Reta S, normal (perpendicular) à Reta R.

Da Geometria Analítica, dizemos que duas retas são ortogonais entre si quando o produto dos seus coeficientes angulares for igual a -1.

Portanto, temos a relação: $m_R\, m_S = -1$ (Eq. 5),
onde m_P = coeficiente angular da Reta R e m_S = coeficiente angular da Reta S.

Considerando que $m_R = 2$, então $m_S = -\dfrac{1}{m_R} = -\dfrac{1}{2}$.

Considerando que a Reta S é perpendicular à Reta R, no ponto P (2 ; 7), então da Eq. 3 vem:

$x_0 = 2$ e $y_0 = 7$.

Logo, a equação da Reta S será dada por: $y_S = 7 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)(x-2)$
$y_S = \left(-\dfrac{1}{2}\right)x + 8$ (Eq. 6).

Determinação das Equações das Retas P1 e P2, paralelas à Reta R.

Da Geometria Analítica, dizemos que duas retas são paralelas entre si quando apresentam o mesmo coeficiente angular.

Portanto, como temos que $m_R = 2$, então $m_{P1} = 2$ e $m_{P2} = 2$.

Considerando que desejamos que as Retas P1 e P2 sejam paralelas à Reta R equidistante de $\sqrt{5}$, e que temos a Reta S perpendicular à Reta R no ponto P (2 ; 7), e considerando a representação gráfica da questão na Figura 1, podemos estabelecer a relação da (Eq. 7), conforme detalhamento na Figura 2 abaixo, utilizando-se das relações do Teorema de Pitágoras.

$|d|^2 = |x_A - 2|^2 + |7 - y_A|^2$ (Eq. 7).

Considerando que estamos tratando de segmentos de retas e estes valores são positivos, e que estão também elevados ao quadrado, então podemos escrever a (Eq. 7) da forma:

$d^2 = (x_A - 2)^2 + (7 - y_A)^2$ (Eq. 8).

Considerando que o ponto A (x_A ; y_A) (ponto de coordenadas desconhecidas) está sob a Reta S e pertence, também, à Reta P2, e considerando que na equação (Eq. 8) acima temos duas variáveis a serem determinadas, porém o valor de y_A pode ser expresso em função de x_A , pelo fato de pertencer à Reta S, então podemos ter pela equação (Eq. 6):

$$y_A = \left(-\frac{1}{2}\right) x_A + 8 \quad \text{(Eq. 9).}$$

Substituindo-se a equação (Eq. 9) na equação (Eq. 8), e considerando o dado do problema $d = \sqrt{5}$, obtemos:

$$[\sqrt{5}\,]^2 = [x_A - 2]^2 + \left[7 - \left(-\frac{1}{2}\right) x_A + 8\right]^2 \quad \text{(Eq. 10).}$$

Desenvolvendo-se a equação (Eq. 10) e resolvendo-a para a variável x_A, obtemos que $x_A = 4$.

Aplicando-se o valor acima encontrado de $x_A = 4$ na equação (Eq. 9), determinamos o valor de y_A, a saber: $y_A = 6$.

Portanto, com os valores de $m_{P2} = 2$ e os valores encontrados de $x_A = 4$ e $y_A = 6$, e usando-se a expressão da equação (Eq. 3), obtemos:

$$y_{P2} = 6 + 2\,(x - 4)$$

$$y_{P2} = 2\,x - 2 \quad \text{(Eq. 11).}$$

N.B.: De forma análoga ao procedimento desenvolvido para a Reta P2 encontra-se a Reta P1, o qual fica como complemento do exercício.

$$y_{P1} = 2\,x + 8 \quad \text{(Eq. 12).}$$

A Figura 2 abaixo demonstra o traçado das retas no plano cartesiano-*xy*.

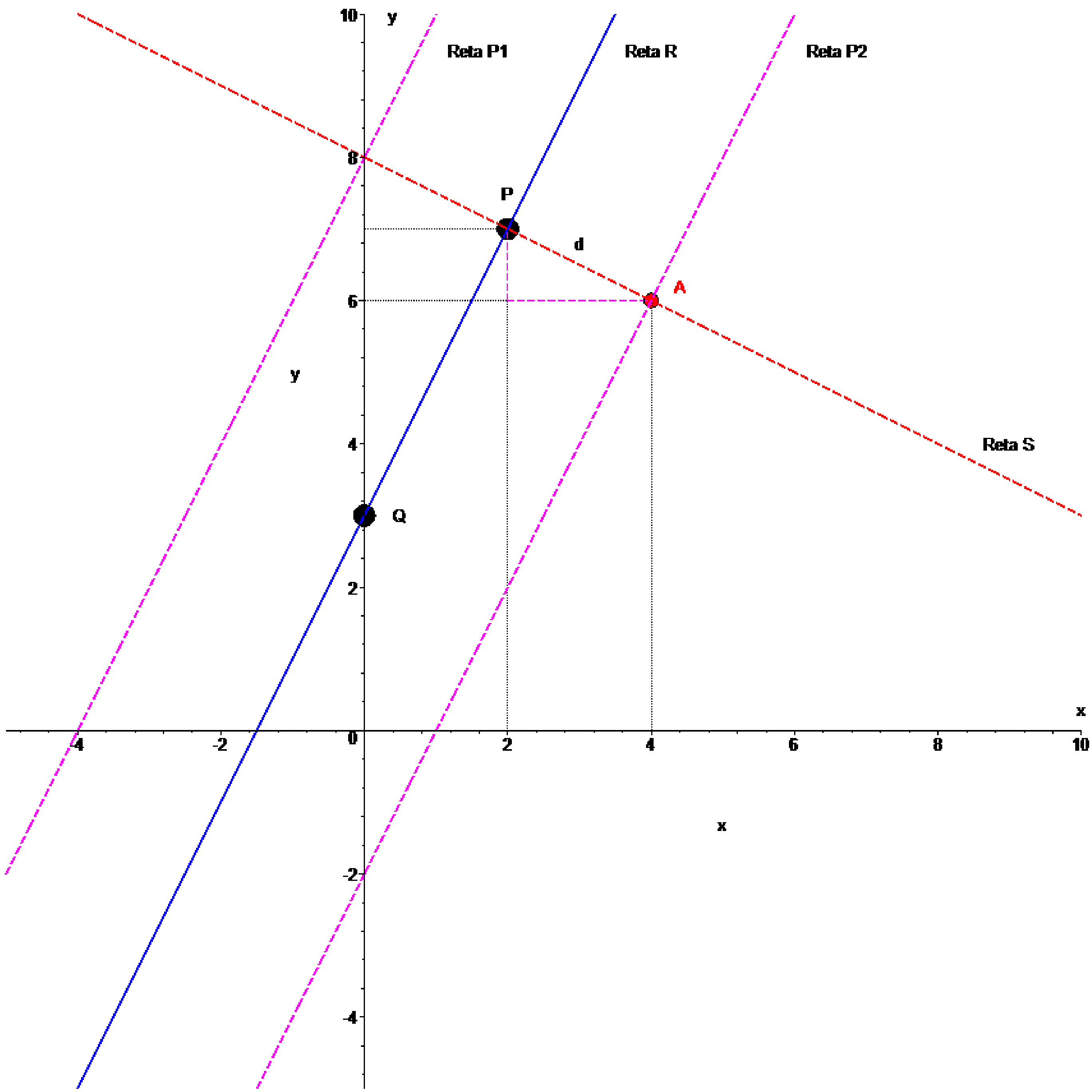

Figura 2

Atividade Proposta:

Considere a equação da parábola definida por $f(x) = x^2 + 1$.

a) Encontre a equação da reta que toca (passa por) esta equação, no ponto $x_0 = 1$, e cujo coeficiente angular seja igual a 2.

Como você classificaria esta reta?

b) Encontre a equação da reta que passa pelos pontos P1 (1 ; 2) e P2 (-2 ; 0).

Como você classificaria esta reta?

c) Encontre a equação de uma reta que seja normal (ou perpendicular) à reta do item a) e que passe pelo ponto P3 = (-1 ; 0)

d) Trace, em um mesmo sistema de eixos coordenados, as equações da parábola e das retas anteriormente encontradas.