

**VETORES**

# 1 - VETORES E ESCALARES

## Vetores

- Grandezas que possuem módulo e orientação
- Exemplos: posição, velocidade, aceleração

## Escalares

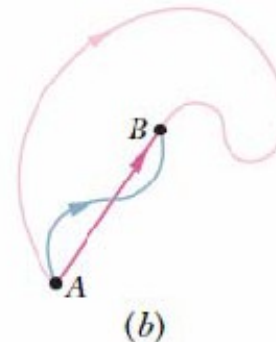
- Grandezas que possuem apenas módulo
- Exemplos: tempo, temperatura

# 1 - VETORES E ESCALARES

Os vetores são representados por setas.  
O comprimento da seta indica o módulo.  
A ponta da seta indica o sentido.



(a) As três setas têm o mesmo módulo e a mesma orientação e, portanto, representam o mesmo deslocamento. (b) As três trajetórias que ligam os dois pontos correspondem ao mesmo vetor deslocamento.



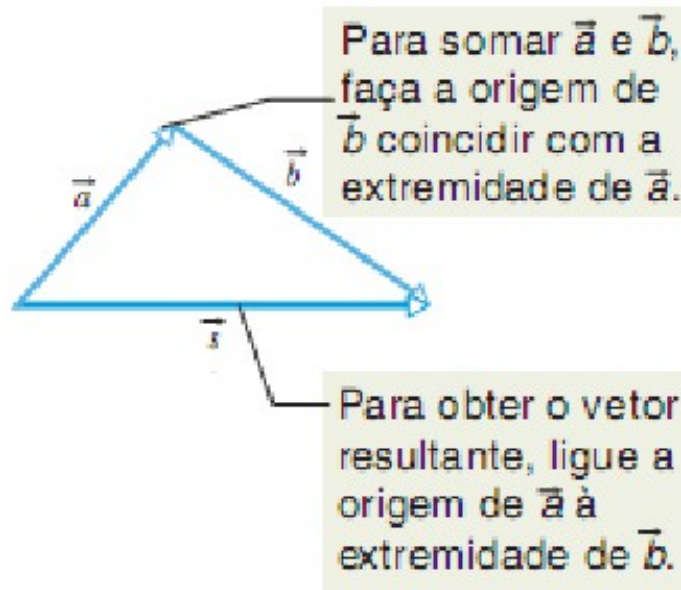
Alguns autores representam um vetor usando uma letra em negrito, como ***a***. Outros representam um vetor usando um seta acima de uma letra em itálico, como  $\vec{a}$ .

## 2 - SOMA GEOMÉTRICA DE VETORES

Podemos somar geometricamente o vetor **a** ao vetor **b** para obter o vetor resultante, **s**.

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b},$$

Para isso, posicionamos o segundo vetor, **b**, com a origem coincidindo com a ponta do primeiro vetor, **a**. O vetor resultante, **s**, é o vetor que liga a origem de **a** à ponta de **b**.



## 2 - SOMA GEOMÉTRICA DE VETORES

### Algumas Regras:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{lei comutativa}).$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (\text{lei associativa})$$

$$\vec{b} + (-\vec{b}) = 0$$

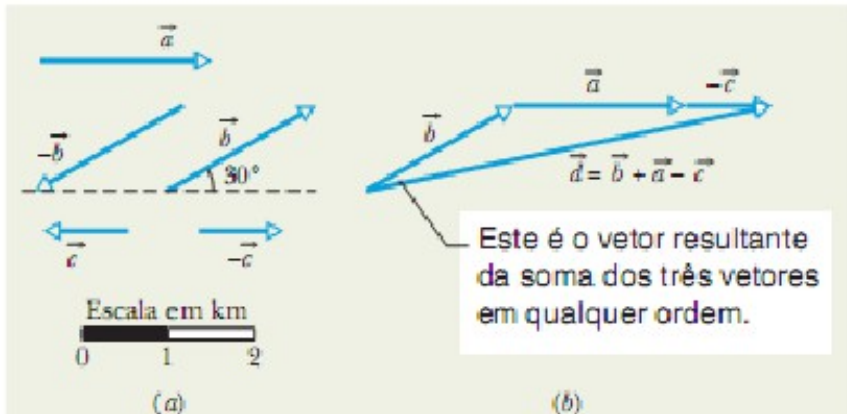
$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad (\text{subtração de vetores})$$

# EXEMPLO 1: SOMA GEOMÉTRICA! DE VETORES

Em um teste de campo, você recebe a tarefa de se afastar o máximo possível de um acampamento através de três deslocamentos retilíneos. Você pode usar os seguintes deslocamentos, em qualquer ordem: (a)  $\vec{a}$ , 2,0 km para leste; (b)  $\vec{b}$ , 2,0 km  $30^\circ$  ao norte do leste; (c)  $\vec{c}$ , 1,0 km para oeste. Você pode também substituir  $\vec{b}$  por  $-\vec{b}$  e  $\vec{c}$  por  $-\vec{c}$ . Qual é a maior distância que você pode atingir após o terceiro deslocamento?

**Raciocínio** Usando uma escala conveniente, desenhamos os vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $-\vec{b}$  e  $-\vec{c}$ , como na Figura (a). Em seguida, deslocamos mentalmente os vetores sobre a página, sem mudar a orientação, ligando três vetores de cada vez, em um arranjo no qual a origem do segundo vetor está ligada à extremidade do primeiro e a origem do terceiro está ligada à extremidade do segundo, para encontrar o vetor soma,  $\vec{d}$ . A origem do primeiro vetor representa o acampamento. A extremidade do terceiro vetor representa o ponto de destino. O vetor soma  $\vec{d}$  vai da origem do primeiro vetor à extremidade do terceiro. O módulo  $d$  do vetor soma é a distância entre o ponto de destino e o acampamento.

Examinando todos os casos possíveis, descobrimos que a distância é máxima para o arranjo  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $-\vec{c}$ . A or-



(a) Vetores deslocamento; três devem ser usados. (b) A distância do acampamento será a maior possível se os deslocamentos escolhidos forem  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $-\vec{c}$ , em qualquer ordem.

dem em que os vetores são somados não importa, já que a soma vetorial é a mesma para qualquer ordem. A ordem mostrada na Figura (b) para a soma vetorial

$$\vec{d} = \vec{b} + \vec{a} + (-\vec{c}).$$

Usando a escala da Figura (a) medimos o comprimento  $d$  do vetor resultante, encontrando

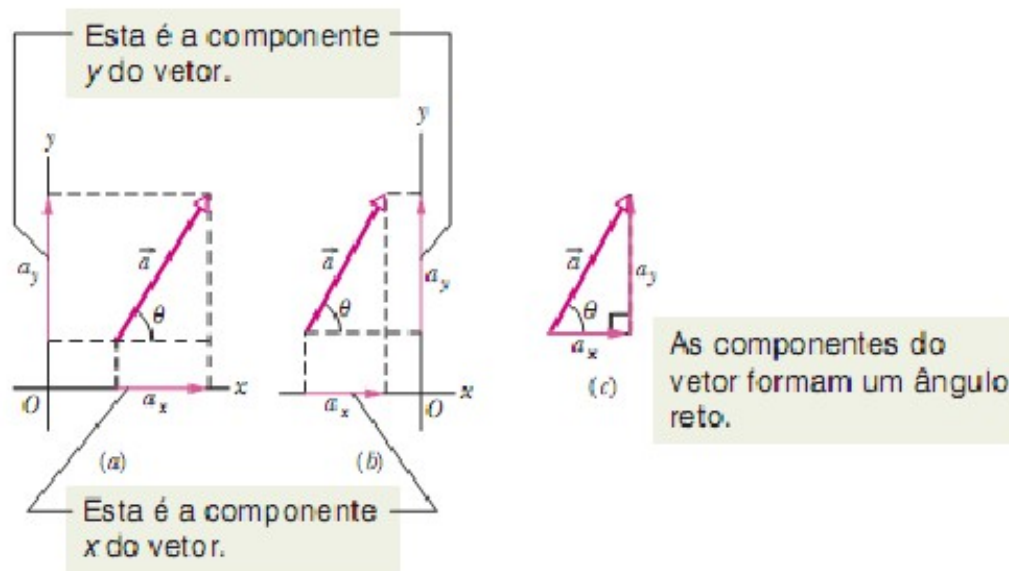
$$d = 4,8 \text{ Km} \quad (\text{Resposta})$$

### 3 - COMPONENTES DE VETORES

A componente de um vetor em relação a um eixo é a projeção do vetor nesse eixo.

O processo de determinar as componentes de um vetor é chamado de *resolução* do vetor.

Um vetor no espaço tridimensional possui três componentes.

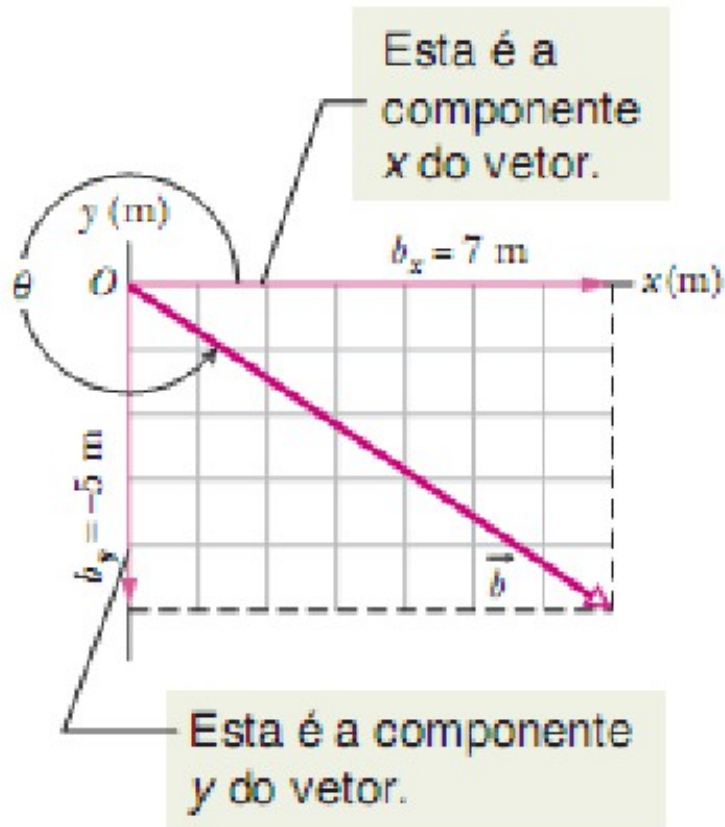


(a) As componentes  $a_x$  e  $a_y$  do vetor  $\vec{a}$ . (b) As componentes não mudam quando o vetor é deslocado, desde que o módulo e a orientação sejam mantidos. (c) As componentes correspondem aos catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o módulo do vetor.



### 3 - COMPONENTES DE VETORES

**Podemos determinar as componentes de um vetor usando as propriedades dos triângulos retângulos.**



$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{e} \quad \tan \theta = \frac{a_y}{a_x}$$

A componente x de  $\vec{b}$  é positiva e a componente y é negativa.



## EXEMPLO 2: DECOMPOSIÇÃO DE VETORES

Um pequeno avião decola de um aeroporto em um dia nublado e é avistado mais tarde a 215 km de distância, em um curso que faz um ângulo de  $22^\circ$  a leste do norte. A que distância a leste e ao norte do aeroporto está o avião no momento em que é avistado?

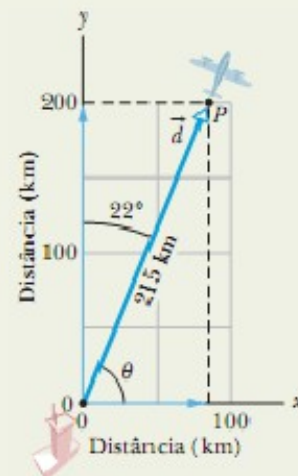
### IDEIA-CHAVE

Conhecemos o módulo (215 km) e o ângulo ( $22^\circ$  a leste do norte) de um vetor e precisamos determinar as componentes do vetor.

**Cálculos** Desenhamos um sistema de coordenadas  $xy$  com o sentido positivo de  $x$  para leste e o de  $y$  para o norte (Fig. Por conveniência, a origem é colocada no aeroporto. O deslocamento  $\vec{d}$  do avião aponta da origem para o ponto onde o avião foi avistado.

Para determinar as componentes de  $\vec{d}$ , usamos a Eq. com  $\theta = 68^\circ (= 90^\circ - 22^\circ)$ :

$$\begin{aligned}d_x &= d \cos \theta = (215 \text{ km})(\cos 68^\circ) \\ &= 81 \text{ km} \quad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$



Um avião decola de um aeroporto na origem e é avistado mais tarde no ponto  $P$ .

$$\begin{aligned}d_y &= d \sin \theta = (215 \text{ km})(\sin 68^\circ) \\ &= 199 \text{ km} \approx 2,0 \times 10^2 \text{ km.} \quad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

Assim, o avião foi avistado 81 km a leste e  $2,0 \times 10^2$  km ao norte do aeroporto.

### 3 - TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Os ângulos medidos no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio são positivos e os ângulos medidos no sentido oposto são negativos.

Use as definições das funções trigonométricas para determinar as componentes de um vetor.

Antes de usar uma função trigonométrica, converta o ângulo dado em um ângulo medido em relação ao semieixo  $+x$ .

## 4 - VETORES UNITÁRIOS

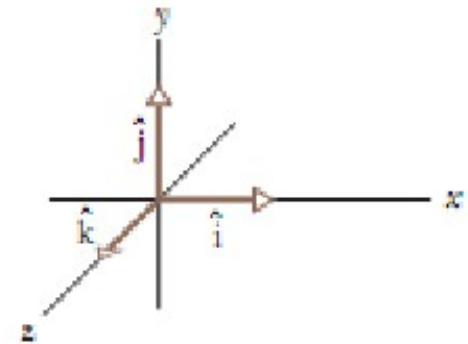
**Vetor unitário** é um vetor cujo módulo é 1 e que aponta em uma certa direção.

Os vetores unitários que indicam os sentidos positivos dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  são representados como  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  respectivamente.

Assim, o vetor  $\mathbf{a}$ , de componentes  $\mathbf{a}_x$  e  $\mathbf{a}_y$  nas direções  $x$  e  $y$ , pode ser escrito na forma da seguinte soma vetorial:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y = a_x \cdot \hat{i} + a_y \cdot \hat{j}$$

Os vetores unitários coincidem com os eixos.



Os vetores unitários  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  definem os sentidos positivos de um sistema de coordenadas dextrogiro.

## 5 - SOMA DE VETORES A PARTIR DAS COMPONENTES

Se  $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b},$

então

$$\begin{aligned} r_x &= a_x + b_x \\ r_y &= a_y + b_y \\ r_z &= a_z + b_z. \end{aligned}$$


Considere:

$$\mathbf{a} = a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j} + a_z \cdot \mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = b_x \cdot \mathbf{i} + b_y \cdot \mathbf{j} + b_z \cdot \mathbf{k}$$

Isso significa que dois vetores são iguais se e somente se as componentes correspondentes dos dois vetores forem iguais.

O processo usado para somar vetores também pode ser aplicado à subtração de vetores.

Exemplo:  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$    $d_x = a_x - b_x, \quad d_y = a_y - b_y, \quad \text{e} \quad d_z = a_z - b_z$

onde  $\vec{d} = d_x \hat{\mathbf{i}} + d_y \hat{\mathbf{j}} + d_z \hat{\mathbf{k}}.$



## EXEMPLO 3: SOMA DE VETORES

A formiga do deserto *Cataglyphis fortis* vive nas planícies do deserto do Saara. Quando uma dessas formigas sai à procura de alimento, percorre um caminho aleatório em um terreno plano, arenoso, desprovido de acidentes geográficos que possam ser usados como referência. Mesmo assim, quando a formiga decide voltar ao formigueiro, rumo diretamente para casa. De acordo com as pesquisas, a formiga do deserto mantém um registro dos seus movimentos em um sistema de coordenadas mental. Quando decide voltar ao formigueiro, soma os deslocamentos em relação aos eixos do sistema para calcular um vetor que aponta diretamente para o ponto de partida. Como exemplo desse cálculo, considere uma formiga que execute cinco movimentos de 6,0 cm em um sistema de coordenadas  $xy$ , nas orientações mostradas na Fig. (a), partindo do formigueiro. No final do quinto movimento, quais são o módulo e o ângulo do vetor deslocamento total  $\vec{d}_{\text{tot}}$  e quais são os valores correspondentes do vetor de retorno  $\vec{d}_{\text{ret}}$  que liga a posição final da formiga à posição do formigueiro? Em uma situação real, esse cálculo vetorial pode envolver milhares desses movimentos.

### IDEIAS-CHAVE

(1) Para encontrar o deslocamento resultante  $\vec{d}_{\text{tot}}$ , precisamos somar os cinco vetores deslocamento:

$$\vec{d}_{\text{tot}} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 + \vec{d}_4 + \vec{d}_5.$$

(2) Calculamos esta soma apenas para a componente  $x$ ,

$$d_{\text{tot},x} = d_{1x} + d_{2x} + d_{3x} + d_{4x} + d_{5x}, \quad (3-14)$$

e apenas para a componente  $y$ ,

$$d_{\text{tot},y} = d_{1y} + d_{2y} + d_{3y} + d_{4y} + d_{5y}. \quad (3-15)$$

(3) Obtemos o vetor  $\vec{d}_{\text{tot}}$  a partir das componentes  $x$  e  $y$ .

## Cálculos

$$d_{1x} = (6,0 \text{ cm}) \cos 0^\circ = +6,0 \text{ cm}$$

$$d_{2x} = (6,0 \text{ cm}) \cos 150^\circ = -5,2 \text{ cm}$$

$$d_{3x} = (6,0 \text{ cm}) \cos 180^\circ = -6,0 \text{ cm}$$

$$d_{4x} = (6,0 \text{ cm}) \cos(-120^\circ) = -3,0 \text{ cm}$$

$$d_{5x} = (6,0 \text{ cm}) \cos 90^\circ = 0.$$

$$\begin{aligned} d_{\text{tot},x} &= +6,0 \text{ cm} + (-5,2 \text{ cm}) + (-6,0 \text{ cm}) \\ &\quad + (-3,0 \text{ cm}) + 0 \\ &= -8,2 \text{ cm}. \end{aligned}$$

$$d_{\text{tot},y} = +3,8 \text{ cm}.$$

Tabela

Mov.	$d_x$ (cm)	$d_y$ (cm)
1	+6,0	0
2	-5,2	+3,0
3	-6,0	0
4	-3,0	-5,2
5	0	+6,0
total	-8,2	+3,8

O vetor  $\vec{d}_{\text{tot}}$  e suas componentes  $x$  e  $y$  aparecem na Fig.

(b). Para encontrar o módulo e o ângulo de  $\vec{d}_{\text{tot}}$ , a partir das componentes, usamos a Eq. O módulo é dado por

$$\begin{aligned} d_{\text{tot}} &= \sqrt{d_{\text{tot},x}^2 + d_{\text{tot},y}^2} \\ &= \sqrt{(-8,2 \text{ cm})^2 + (3,8 \text{ cm})^2} = 9,0 \text{ cm}. \end{aligned}$$

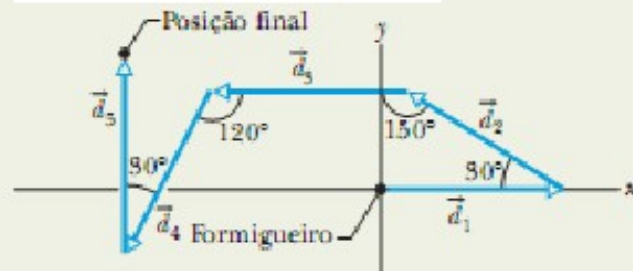
Para encontrar o ângulo (medido a partir do semieixo  $x$  positivo), calculamos o arco tangente:

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \left( \frac{d_{\text{tot},y}}{d_{\text{tot},x}} \right) \\ &= \tan^{-1} \left( \frac{3,8 \text{ cm}}{-8,2 \text{ cm}} \right) = -24,86^\circ. \end{aligned}$$

## EXEMPLO 3: SOMA DE VETORES

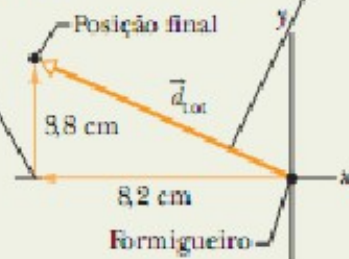
Nota:

Para somar esses vetores, calcule a componente  $x$  total e a componente  $y$  total.



(a)

Em seguida, determine a resultante das componentes totais.



(b)

Este é o resultado da soma.



(c)

**Atenção:** Como foi dito na Tática para a Solução de Problemas, uma calculadora nem sempre fornece o resultado correto para o arco tangente. A resposta  $-24,86^\circ$  parece indicar que o vetor  $\vec{d}_{\text{tot}}$  está no quarto quadrante do nosso sistema de coordenadas  $xy$ . Entretanto, quando desenhamos o vetor a partir das componentes (Fig. (b)), vemos que  $\vec{d}_{\text{tot}}$  está no segundo quadrante. Assim, precisamos “corrigir” a resposta da calculadora somando  $180^\circ$ :

$$\theta = -24,86^\circ + 180^\circ = 155,14^\circ \approx 155^\circ.$$

Assim, o deslocamento  $\vec{d}_{\text{tot}}$  da formiga, na notação módulo-ângulo, é dado por

$$d_{\text{tot}} = 9,0 \text{ cm e } 155^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

O vetor  $\vec{d}_{\text{volta}}$ , que aponta da formiga para o formigueiro, tem o mesmo módulo que  $\vec{d}_{\text{tot}}$  e o sentido oposto (Fig. 3-16c). Já temos o ângulo  $(-24,86^\circ \approx -25^\circ)$  para o sentido oposto a  $\vec{d}_{\text{tot}}$ . Assim,  $\vec{d}_{\text{volta}}$  é dado por

$$d_{\text{volta}} = 9,0 \text{ cm e } -25^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

Uma formiga do deserto que se afasta mais de 500 m do formigueiro realiza, na verdade, milhares de movimentos. Ainda assim, de alguma forma é capaz de calcular  $\vec{d}_{\text{volta}}$  (sem estudar este capítulo).

## 6 - VETORES E AS LEIS DA FÍSICA

### Liberdade de escolha do sistema de coordenadas

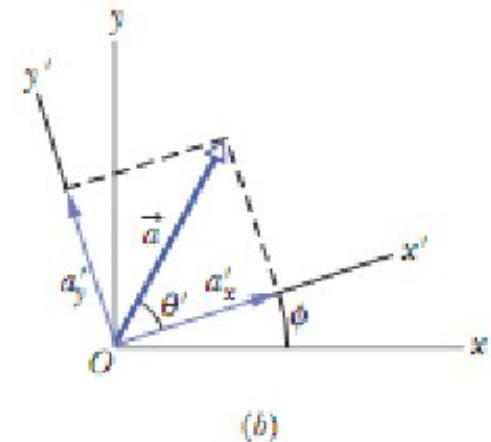
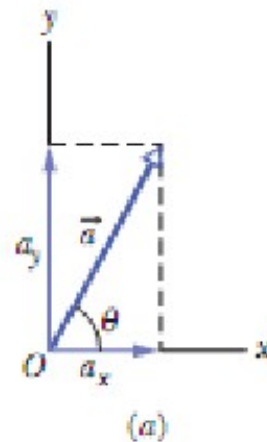
As relações entre vetores  
não dependem da origem  
ou da orientação dos eixos.

Se os eixos giram, as  
componentes mudam, mas  
o vetor permanece o mesmo.

As leis da física também  
não dependem da escolha  
do sistema de coordenadas.

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2}$$

$$\theta = \theta' + \phi.$$





## **7 - MULTIPLICAÇÃO DE VETORES**

### ***7-1. Multiplicação de um Vetor por um Escalar:***

A multiplicação de um vetor por um escalar muda o módulo do vetor sem afetar a orientação:

$$e \cdot \hat{a} = \hat{a}'$$

## 7 - MULTIPLICAÇÃO DE VETORES

### 7-2. Multiplicação de um Vetor por um Vetor: Produto Escalar

O produto escalar de dois vetores é representado como:

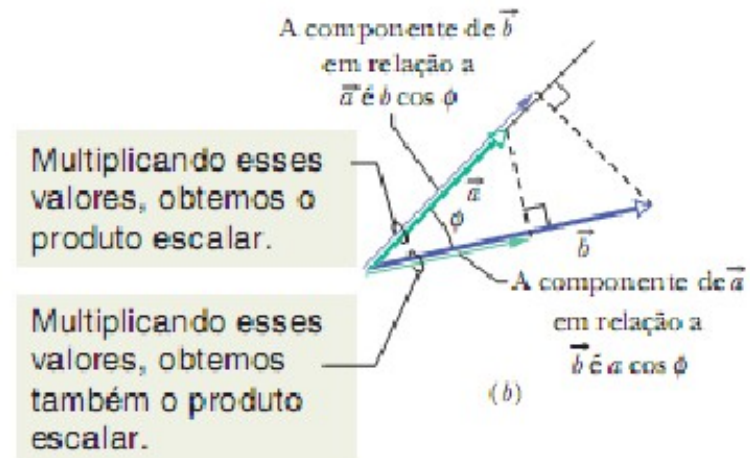
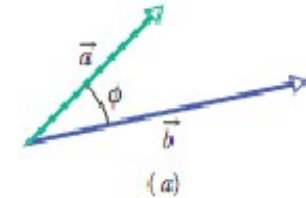
$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

e definido como:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi.$$

onde  $a$  e  $b$  são os módulos dos vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , respectivamente, e  $\phi$  é o ângulo entre os dois vetores.

O lado direito é uma grandeza escalar!!!!



**Cálculo simples do produto escalar:**

**Faça o produto das respectivas componentes vetoriais  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ .**

**E some os resultados!**

# 7 - MULTIPLICAÇÃO DE VETORES

## 7-3. Multiplicação de um Vetor por um Vetor: Produto Vetorial

O produto vetorial de dois vetores é representado como:

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

O resultado é um novo vetor,  $\vec{c}$ , cujo módulo é dado por

$$c = ab \sin \phi,$$

onde  $a$  e  $b$  são os módulos dos vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , respectivamente, e  $\phi$  é o menor entre os dois ângulos entre os vetores.

A regra da mão direita é usada para determinar a direção do vetor  $\vec{c}$ .

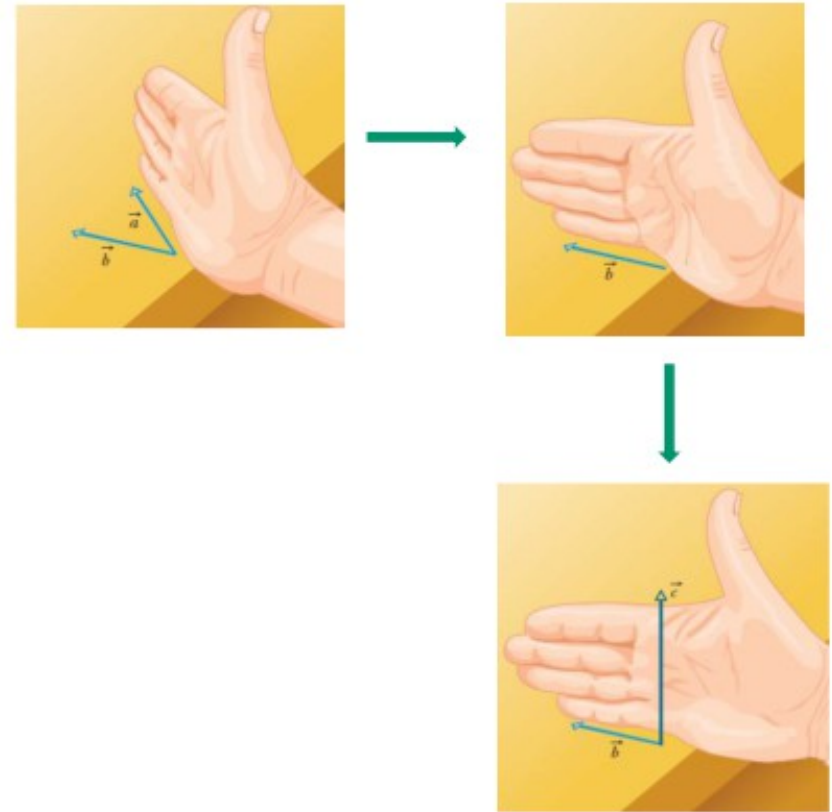


Ilustração da regra da mão direita para produtos vetoriais. (a) Empurre o vetor  $\vec{a}$  na direção do vetor  $\vec{b}$  com os dedos da mão direita. O polegar estendido mostra a orientação do vetor  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ . (b) O vetor  $\vec{b} \times \vec{a}$  tem o sentido oposto ao de  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

## **8 - MULTIPLICAÇÃO DE VETORES:**

### **PRODUTO VETORIAL NA NOTAÇÃO DE VETORES UNITÁRIOS**

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) \\ &= (a_y b_z - b_y a_z) \hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \hat{k}.\end{aligned}$$

Note que  $a_x \hat{i} \times b_x \hat{i} = a_x b_x (\hat{i} \times \hat{i}) = 0,$

e  $a_x \hat{i} \times b_y \hat{j} = a_x b_y (\hat{i} \times \hat{j}) = a_x b_y \hat{k}$

**Outro método de cálculo!**

Regra de Sarrus [exemplo]:


Componentes de **a** => 2ª linha da matriz

Componentes de **b** => 3ª linha da matriz


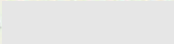
$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i & j \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

**ONDE**, Produto Vetorial = Determinante =  $15\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ .

## EXEMPLO 4: PRODUTO VETORIAL


Na Fig.  o vetor  $\vec{a}$  está no plano  $xy$ , tem um módulo de 18 unidades e uma orientação que faz um ângulo de  $250^\circ$  com o semieixo  $x$  positivo. O vetor  $\vec{b}$  tem um módulo de 12 unidades e está orientado ao longo do semieixo  $z$  positivo. Qual é o produto vetorial  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ?

### IDEIA-CHAVE

Quando conhecemos dois vetores na notação módulo-ângulo, podemos calcular o módulo do produto vetorial usando a Eq.  e determinar a orientação do produto vetorial usando a regra da mão direita .

**Cálculos** O módulo do produto vetorial é dado por

$$c = ab \sin \phi = (18)(12)(\sin 90^\circ) = 216. \quad (\text{Resposta})$$

Para determinar a orientação do produto vetorial na Fig.  coloque os dedos da mão direita em torno de uma reta perpendicular ao plano de  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  (a reta na qual se encontra o vetor  $\vec{c}$ ) de modo que os dedos empurrem o vetor  $\vec{a}$  na direção de  $\vec{b}$ ; o polegar estendido fornece a



O vetor  $\vec{c}$  (no plano  $xy$ ) é o produto vetorial dos vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .

orientação de  $\vec{c}$ . Assim, como mostra a figura,  $\vec{c}$  está no plano  $xy$ . Como a direção de  $\vec{c}$  é perpendicular à direção de  $\vec{a}$  (o produto vetorial sempre resulta em um vetor perpendicular aos dois vetores originais), o vetor faz um ângulo de

$$250^\circ - 90^\circ = 160^\circ \quad (\text{Resposta})$$

com o semieixo  $x$  positivo.

## **EXEMPLO 4: PRODUTO VETORIAL, NOTAÇÃO DE VETORES UNITÁRIOS**

Se  $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$  e  $\vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$ , determine  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ .

### **IDEIA-CHAVE**

Quando dois vetores estão expressos em termos dos vetores unitários, podemos determinar o produto vetorial usando a lei distributiva.

**Cálculos** Temos:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= (3\hat{i} - 4\hat{j}) \times (-2\hat{i} + 3\hat{k}) \\ &= 3\hat{i} \times (-2\hat{i}) + 3\hat{i} \times 3\hat{k} + (-4\hat{j}) \times (-2\hat{i}) \\ &\quad + (-4\hat{j}) \times 3\hat{k}.\end{aligned}$$



Podemos calcular os valores dos diferentes termos usando a Eq.  $\square$  determinando a orientação dos vetores com o auxílio da regra da mão direita. No primeiro termo, o ângulo  $\phi$  entre os dois vetores envolvidos no produto vetorial é  $0$ ; nos outros três termos,  $\phi = 90^\circ$ . O resultado é o seguinte:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= -6(0) + 9(-\hat{j}) + 8(-\hat{k}) - 12\hat{i} \\ &= -12\hat{i} - 9\hat{j} - 8\hat{k}.\end{aligned}\quad (\text{Resposta})$$

O vetor  $\vec{c}$  é perpendicular a  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , o que pode ser demonstrado observando que  $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$  e  $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$ , ou seja, que não existem componentes de  $\vec{c}$  em relação a  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .





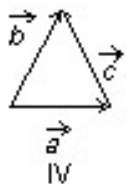
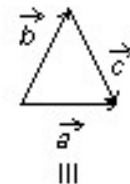
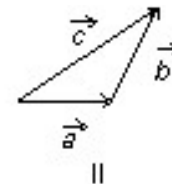
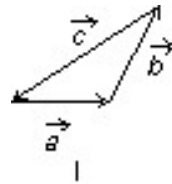
# **TESTES DE MÚLTIPLA ESCOLHA**

1. Defini-se o deslocamento de uma partícula como uma grandeza vetorial porque:

- A) o deslocamento pode ser especificado por um módulo e uma orientação;
- B) operando com deslocamentos de acordo com as regras para manipular vetores, obtemos resultados que estão de acordo com os experimentos;
- C) um deslocamento obviamente não é um escalar;
- D) um deslocamento pode ser especificado por três números;
- E) o deslocamento está associado a movimentos.

2. Os vetores **a**, **b** e **c** estão relacionados pela equação  $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ . Qual dos diagramas ilustra melhor essa relação?

- A) I;
- B) II;
- C) III;
- D) IV;
- E) Nenhuma das respostas acima.



3. Um vetor de módulo 3 NÃO PODE ser somado a um vetor de módulo 4 de tal forma que o módulo da resultante seja:

- A) zero;
- B) 1;
- C) 3;
- D) 5;
- E) 7.

4. Um vetor de módulo 20 é somado a um vetor de módulo 25. O módulo da soma pode ser:

- A) zero;
- B) 3;
- C) 12;
- D) 47;
- E) 50.

5. O módulo da soma de um vetor **S** de módulo 6 com um vetor **T** é 12. O vetor **T**:

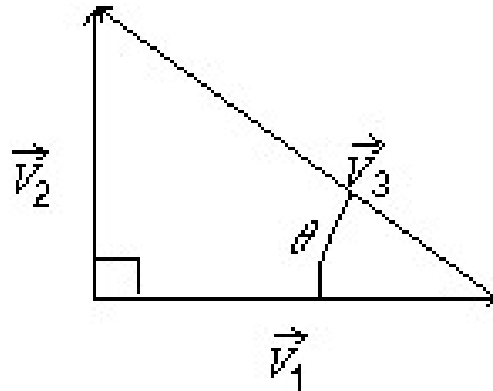
- A) deve ter um módulo compreendido entre 6 e 18;
- B) pode ter módulo 20;
- C) não pode ser maior que 12;
- D) deve ser perpendicular a S;
- E) deve ser perpendicular ao vetor soma.

6. O vetor  $-\mathbf{A}$ :

- A) tem um módulo maior que o do vetor A;
- B) tem um módulo menor que o do vetor A;
- C) tem o mesmo sentido que o vetor A;
- D) tem o sentido contrário ao do vetor A;
- E) é perpendicular ao vetor A .

7. O vetor  $\mathbf{V}_3$  da figura é igual a:

- A)  $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$ ;
- B)  $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ ;
- C)  $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$ ;
- D)  $\mathbf{V}_1 \cos \theta$ ;
- E)  $\mathbf{V}_1 / \cos \theta$ .



8. Se  $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|^2 = A^2 + B^2$ ,

- A)  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  devem ser paralelos;
- B)  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  devem ser antiparalelos;
- C)  $\mathbf{A}$  ou  $\mathbf{B}$  deve ser nulo;
- D) o ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  deve ser  $60^\circ$ ;
- E) nenhuma das respostas acima é verdadeira.

9. Se  $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = A + B$ , e  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são diferentes de zero,

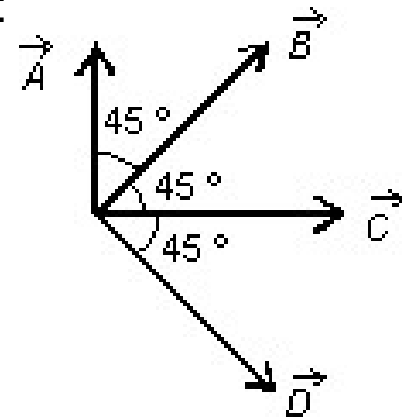
- A)  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são paralelos;
- B)  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são antiparalelos;
- C) o ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  é  $45^\circ$ ;
- D) o ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  é  $60^\circ$ .
- E)  $\mathbf{A}$  é perpendicular a  $\mathbf{B}$ .

10. Se  $|\mathbf{A} - \mathbf{B}| = A + B$ , e  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são diferentes de zero,

- A)  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são paralelos;
- B)  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são antiparalelos;
- C) o ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  é  $45^\circ$ ;
- D) o ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  é  $60^\circ$ ;
- E)  $\mathbf{A}$  é perpendicular a  $\mathbf{B}$ .

11. Quatro vetores,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$ , têm o mesmo módulo. O ângulo  $\theta$  entre vetores vizinhos, como mostra a figura, é  $45^\circ$ . A equação vetorial correta é:

- A)  $\mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{C} + \mathbf{D} = 0$
- B)  $\mathbf{B} + \mathbf{D} - 2^{1/2}\mathbf{C} = 0$
- C)  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{D}$
- D)  $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} = 0$
- E)  $(\mathbf{A} + \mathbf{C})/2^{1/2} = -\mathbf{B}$



12. Os vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  estão no plano  $xy$ . Podemos concluir que  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ , se

- A)  $A_x^2 + A_y^2 = B_x^2 + B_y^2$ ;
- B)  $A_x + A_y = B_x + B_y$ ;
- C)  $A_x = B_x$  e  $A_y = B_y$ ;
- D)  $A_y/A_x = B_y/B_x$ ;
- E)  $A_x = A_y$  e  $B_x = B_y$ .

13. Um vetor tem módulo 12. Quando a origem está na origem, o vetor está entre o semieixo  $x$ -positivo e o semieixo  $y$ -negativo e faz um ângulo de  $30^\circ$  com o eixo  $x$ . A componente  $y$  do vetor é:

- A)  $6 \cdot 3^{1/2}$ ;
- B)  $-6 \cdot 3^{1/2}$ ;
- C) 6;
- D) -6;
- E) 12.

14. Se o valor da componente  $x$  de um vetor **A** situado no plano  $xy$  é metade do módulo do vetor, a tangente do ângulo entre o vetor e o eixo  $x$  é:

- A)  $3^{1/2}$ ;
- B)  $\frac{1}{2}$ ;
- C)  $3^{1/2}/2$ ;
- D)  $3/2$ ;
- E) 3.

15. Se **A** =  $(6\text{m})\mathbf{i} + (8\text{m})\mathbf{j}$ , o módulo de **4A** é:

- A) 10m;
- B) 20m;
- C) 30m;
- D) 40m;
- E) 50m.

16. Um vetor tem uma componente de 10m na direção +x, uma componente de 10m na direção +y e uma componente de 5m na direção +z. O módulo do vetor é:

- A) zero;
- B) 15m;
- C) 20m;
- D) 25m;
- E) 225m.

17. Se  $\mathbf{V} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ , o módulo de  $\mathbf{V}$  é:

- A) 5,00;
- B) 5,57;
- C) 7,00;
- D) 7,42;
- E) 8,54.

18. Um vetor situado no plano xy tem módulo 25 e o valor da componente x é 12. O ângulo que o vetor faz com o semieixo x-positivo é aproximadamente:

- A)  $26^\circ$ ;
- B)  $29^\circ$ ;
- C)  $61^\circ$ ;
- D)  $64^\circ$ ;
- E)  $241^\circ$ .



19. O ângulo entre o vetor  $\mathbf{A} = (25\text{m})\mathbf{i} + (45\text{m})\mathbf{j}$  e o semieixo x-positivo é aproximadamente:

- A)  $29^\circ$ ;
- B)  $61^\circ$ ;
- C)  $119^\circ$ ;
- D)  $209^\circ$ ;
- E)  $241^\circ$ .

20. O ângulo entre o vetor  $\mathbf{A} = -(25\text{m})\mathbf{i} + (45\text{m})\mathbf{j}$  e o semieixo x-positivo é aproximadamente:

- A)  $29^\circ$ ;
- B)  $61^\circ$ ;
- C)  $119^\circ$ ;
- D)  $209^\circ$ ;
- E)  $241^\circ$ .

21. Sejam  $\mathbf{A} = (2\text{m})\mathbf{i} + (6\text{m})\mathbf{j} - (3\text{m})\mathbf{k}$  e  $\mathbf{B} = (4\text{m})\mathbf{i} + (2\text{m})\mathbf{j} + (1\text{m})\mathbf{k}$ . A soma vetorial  $\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$  é igual a:

- A)  $(6\text{m})\mathbf{i} + (8\text{m})\mathbf{j} - (2\text{m})\mathbf{k}$ ;
- B)  $(-2\text{m})\mathbf{i} + (4\text{m})\mathbf{j} - (4\text{m})\mathbf{k}$ ;
- C)  $(2\text{m})\mathbf{i} - (4\text{m})\mathbf{j} + (4\text{m})\mathbf{k}$ ;
- D)  $(8\text{m})\mathbf{i} + (12\text{m})\mathbf{j} - (3\text{m})\mathbf{k}$ ;
- E) nenhuma das respostas acima.

22. Sejam  $\mathbf{A} = (2m)\mathbf{i} + (6m)\mathbf{j} + (1m)\mathbf{k}$  e  $\mathbf{B} = (4m)\mathbf{i} + (2m)\mathbf{j} - (3m)\mathbf{k}$ . A diferença vetorial  $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$  é igual a:

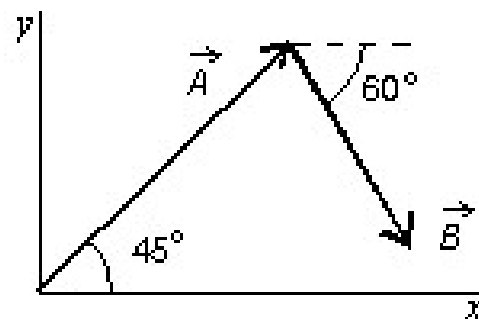
- A)  $(6m)\mathbf{i} + (8m)\mathbf{j} - (2m)\mathbf{k}$ ;
- B)  $(-2m)\mathbf{i} + (4m)\mathbf{j} - (4m)\mathbf{k}$ ;
- C)  $(2m)\mathbf{i} - (4m)\mathbf{j} + (4m)\mathbf{k}$ ;
- D)  $(8m)\mathbf{i} + (12m)\mathbf{j} - (3m)\mathbf{k}$ ;
- E) nenhuma das respostas acima.

23. Se  $\mathbf{A} = (2m)\mathbf{i} - (3m)\mathbf{j}$  e  $\mathbf{B} = (1m)\mathbf{i} - (2m)\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{A} - 2\mathbf{B} =$

- A)  $(1m)\mathbf{j}$ ;
- B)  $(-1m)\mathbf{j}$ ;
- C)  $(4m)\mathbf{i} - (7m)\mathbf{j}$ ;
- D)  $(4m)\mathbf{i} + (1m)\mathbf{j}$ ;
- E)  $(-4m)\mathbf{i} + (7m)\mathbf{j}$ .

24. No diagrama, o módulo de  $\mathbf{A}$  é  $12m$  e o módulo de  $\mathbf{B}$  é  $8m$ . A componente  $x$  de  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  é, aproximadamente,

- A)  $5,5m$ ;
- B)  $7,6m$ ;
- C)  $12m$ ;
- D)  $14m$ ;
- E)  $15m$ .



25. Um certo vetor situado no plano  $xy$  tem uma componente  $x$  de  $4m$  e uma componente  $y$  de  $10m$ . O vetor sofre uma rotação no plano  $xy$  até que a componente  $x$  dobre de valor. O novo valor da componente  $y$  é, aproximadamente,

- A)  $20m$ ;
- B)  $7,2m$ ;
- C)  $5,0m$ ;
- D)  $4,5m$ ;
- E)  $2,2m$ .

26. Os vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  têm módulo  $L$ . Quando são desenhados com as origens do mesmo ponto, o ângulo entre os vetores é  $30^\circ$ . O valor de  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  é:

- A) zero;
- B)  $L^2$ ;
- C)  $(3L^2/2)^{1/2}$ ;
- D)  $2L^2$ ;
- E) nenhuma das respostas acima.

27. Sejam  $\mathbf{A} = (2m)\mathbf{i} + (6m)\mathbf{j} - (3m)\mathbf{k}$  e  $\mathbf{B} = (4m)\mathbf{i} + (2m)\mathbf{j} + (1m)\mathbf{k}$ . Nesse caso o valor de  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  é:

- A)  $(8m)\mathbf{i} + (12m)\mathbf{j} - (3m)\mathbf{k}$ ;
- B)  $(12m)\mathbf{i} - (14m)\mathbf{j} - (20m)\mathbf{k}$ ;
- C)  $23$ ;
- D)  $17$ ;
- E) nenhuma das respostas acima.

28. Dois vetores têm módulos 10 e 15. O ângulo entre os vetores quando são desenhados com as origens no mesmo ponto é  $65^\circ$ . A componente do vetor mais comprido na direção do vetor mais curto é aproximadamente:

- A) 0;
- B) 4,2;
- C) 6,3;
- D) 9,1;
- E) 14.

29. Sejam  $\mathbf{S} = (1\text{m})\mathbf{i} + (2\text{m})\mathbf{j} + (2\text{m})\mathbf{k}$  e  $\mathbf{T} = (3\text{m})\mathbf{i} + (4\text{m})\mathbf{k}$ . O ângulo entre os dois vetores:

- A) é  $\cos^{-1}(14/15)$ ;
- B) é  $\cos^{-1}(11/225)$ ;
- C) é  $\cos^{-1}(104/225)$ ;
- D) é  $\cos^{-1}(11/15)$ ;
- E) não pode ser calculado porque  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{T}$  não estão no mesmo plano.

30. Dois vetores são desenhados com as origens no mesmo ponto. Quando o ângulo entre os vetores aumenta de  $20^\circ$ , o produto escalar conserva o mesmo módulo, mas muda de positivo para negativo. O ângulo original entre os vetores era igual a:

- A)  $0^\circ$ ;
- B)  $60^\circ$ ;
- C)  $70^\circ$ ;
- D)  $80^\circ$ ;
- E)  $90^\circ$ .

31. Se o módulo da soma de dois vetores é menor que o módulo dos dois vetores, isso significa que:

- A) o produto escalar dos vetores é negativo;
- B) o produto escalar dos vetores é positivo;
- C) os vetores são antiparalelos;
- D) os vetores são paralelos;
- E) nenhuma das respostas acima está correta.

32. Se o módulo da soma de dois vetores é maior que o módulo dos vetores, isso significa que

- A) o produto escalar dos vetores é negativo;
- B) o produto escalar dos vetores é positivo;
- C) os vetores são antiparalelos;
- D) os vetores são paralelos;
- E) nenhuma das respostas acima está correta.

33. Os vetores **A** e **B** têm módulo  $L$ . Quando são desenhados com as origens no mesmo ponto, o ângulo entre os vetores é  $30^\circ$ . O módulo de **A**×**B** é:

- A)  $L^2/2$ ;
- B)  $L^2$ ;
- C)  $L^2(3^{1/2})/2$ ;
- D)  $2L^2$ ;
- E) nenhuma das respostas acima.

34. Dois vetores são desenhados com as origens no mesmo ponto. Quando o ângulo entre os vetores é aumentado de  $20^\circ$ , o módulo do produto vetorial dobra de valor. O ângulo original entre os vetores era aproximadamente:

- A)  $0^\circ$ ;
- B)  $18^\circ$ ;
- C)  $25^\circ$ ;
- D)  $45^\circ$ ;
- E)  $90^\circ$ .

35. Dois vetores têm módulos 10 e 15. O ângulo entre os vetores quando são desenhados com as origens no mesmo ponto é  $65^\circ$ . A componente do vetor mais longo em relação a um eixo perpendicular ao vetor mais curto, no plano dos dois vetores, é aproximadamente:

- A) 0;
- B) 4,2;
- C) 6,3;
- D) 9,1;
- E) 14.

36. Os vetores  $(3m)\mathbf{i} - (7m)\mathbf{j}$  e  $(2m)\mathbf{i} + (3m)\mathbf{j} - (2m)\mathbf{k}$  definem um plano (é o plano do triângulo cujos vértices são a origem do sistema de coordenadas e as pontas dos dois vetores). Qual dos vetores a seguir é perpendicular a esse plano?

- A)  $(14m)\mathbf{i} + (6m)\mathbf{j} + (23m)\mathbf{k}$ ;
- B)  $(-14m)\mathbf{i} + (6m)\mathbf{j} + (23m)\mathbf{k}$ ;
- C)  $(14m)\mathbf{i} - (6m)\mathbf{j} + (23m)\mathbf{k}$ ;
- D)  $(14m)\mathbf{i} + (6m)\mathbf{j} - (23m)\mathbf{k}$ ;
- E)  $(14m)\mathbf{i} + (6m)\mathbf{j}$ .

37. Sejam  $\mathbf{R} = \mathbf{S} \times \mathbf{T}$  e  $\theta \neq 90^\circ$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{T}$  quando os dois vetores são desenhados com as origens no mesmo ponto. Qual das seguintes relações NÃO É verdadeira?

- A)  $\mathbf{R} = s \cdot t \cdot \sin\theta$ ;
- B)  $-\mathbf{R} = \mathbf{T} \times \mathbf{S}$ ;
- C)  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{S} = 0$ ;
- D)  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{T} = 0$ ;
- E)  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = 0$ .



38. O valor de  $\mathbf{i} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$  é:

A) zero;

B) +1;

C) -1;

D) 3;

E)  $3^{1/2}$ .

39. O valor de  $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{i})$  é:

A) zero;

B) +1;

C) -1;

D) 3;

E)  $3^{1/2}$ .

**FIM!**