Complexidade de Algoritmos

Análise e notação assintótica

Prof. Marcelo de Souza

45EST – Algoritmos e Estruturas de Dados
Universidade do Estado de Santa Catarina

UDESC

Material de apoio

Leitura principal:

- Capítulo 4 de Goodrich e Tamassia (2013)[1] – Ferramentas de análise.

Leitura complementar:

- Capítulos 1 a 3 de Toscani e Veloso (2012)[2].
- Capítulos 2 e 3 de Preiss (2001)[3].

[1] Michael T Goodrich e Roberto Tamassia (2013). *Estruturas de Dados & Algoritmos em Java*. 5ª ed. Bookman Editora.
[2] Laira Vieira Toscani e Paulo A. S. Veloso (2012). *Complexidade de Algoritmos*. 3ª ed. Vol. 13. Bookman: Porto Alegre.
[3] Bruno R Preiss (2001). *Estruturas de dados e algoritmos: padrões de projetos orientados a objetos com Java*. Campus.

Conceitos básicos

Um **problema** é caracterizado pela descrição da sua **entrada** e **saída**.

Conceitos básicos

Um **problema** é caracterizado pela descrição da sua **entrada** e **saída**.

Exemplo:

Problema da ordenação (não decrescente)

Entrada: uma sequência $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ de n números.

Saída: uma permutação dos números $\langle a'_1, a'_2, \ldots, a'_n \rangle$ tal que $a'_1 \leq a'_2 \leq \ldots, a'_n$.

Conceitos básicos

Um **problema** é caracterizado pela descrição da sua **entrada** e **saída**.

Exemplo:

Problema da ordenação (não decrescente)

Entrada: uma sequência $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ de n números.

Saída: uma permutação dos números $\langle a'_1, a'_2, \ldots, a'_n \rangle$ tal que $a'_1 \leq a'_2 \leq \ldots, a'_n$.

Exemplo concreto do problema da ordenação

Entrada: 7 8 1 4 6 3 9 → **instância**

Saída: 1 3 4 6 7 8 9 → **solução**/**resultado**

Conceitos básicos

Dado um problema:

- Como saber se um algoritmo é bom para resolvê-lo?
- Como saber qual é o melhor algoritmo entre duas opções?

Conceitos básicos

Dado um problema:

- Como saber se um algoritmo é bom para resolvê-lo?
- Como saber qual é o melhor algoritmo entre duas opções?

Qual medida usar para definir **bom** ou **melhor**?

- Correção;
- Simplicidade;
- Facilidade em codificar;
- Facilidade em manter;
- Tempo de processamento;
- Consumo de memória.

Conceitos básicos

Dado um problema:

- Como saber se um algoritmo é bom para resolvê-lo?
- Como saber qual é o melhor algoritmo entre duas opções?

Qual medida usar para definir **bom** ou **melhor**?

- Correção;
- Simplicidade;
- Facilidade em codificar;
- Facilidade em manter;
- **Tempo de processamento**;
- **Consumo de memória**.

Análise de algoritmos (complexidade)

Como medir a complexidade de um algoritmo?

Análise de algoritmos

Como medir a complexidade?

Podemos executar o(s) algoritmo(s) e medir/plotar os resultados. Problemas:

- Sensível às entradas escolhidas, ao *software* e ao *hardware* usados;
- Comparação prejudicada;
- Necessário implementar e executar todos os algoritmos.

Análise de algoritmos

Como medir a complexidade?

Podemos executar o(s) algoritmo(s) e medir/plotar os resultados. Problemas:

- Sensível às entradas escolhidas, ao *software* e ao *hardware* usados;
- Comparação prejudicada;
- Necessário implementar e executar todos os algoritmos.

Solução: métodos analíticos.

- Definem a complexidade como uma função $\mathtt{f(n)}$ do tamanho $\mathtt{n}$ da entrada.

Análise de algoritmos

Como medir a complexidade?

Podemos executar o(s) algoritmo(s) e medir/plotar os resultados. Problemas:

- Sensível às entradas escolhidas, ao *software* e ao *hardware* usados;
- Comparação prejudicada;
- Necessário implementar e executar todos os algoritmos.

Solução: métodos analíticos.

- Definem a complexidade como uma função $\mathtt{f}(\mathtt{n})$ do tamanho $\mathtt{n}$ da entrada.

Ideia geral (complexidade de tempo):

- Contar o número de operações primitivas executadas pelo algoritmo;
- Cada operação primitiva executa em um tempo constante;
- Quanto menor o número de operações, mais eficiente é o algoritmo.

Análise de algoritmos

Operações primitivas

Operações primitivas são passos básicos do algoritmo

- Atribuição de valores;
- Operações aritméticas ou lógicas;
- Comparação de valores;
- Acesso a um elemento de um vetor;
- Recuperar a referência de um objeto;
- Chamada de um método;
- Retorno de um método.

Exemplos

```
int a = 10;
int b = a - 7
if (b < 5)
int c = v[3];
Object x = this;
this.compute();
return result;
```

Análise de algoritmos

Exemplo I

Algoritmo `arrayMax(A, n)`:

```
1  // Entrada: um vetor A com n ≥ 1 elementos inteiros.
2  // Saída: o maior elemento de A.
3
4  currentMax ← A[0]
5  for i ← 1 to n - 1 do
6    if currentMax < A[i] then
7      currentMax ← A[i]
8
9  return currentMax
```

Análise de algoritmos

Exemplo I

Algoritmo `arrayMax(A, n)`:

```
1  // Entrada: um vetor A com n ≥ 1 elementos inteiros.
2  // Saída: o maior elemento de A.
3
4  currentMax ← A[0]
5  for i ← 1 to n - 1 do
6    if currentMax < A[i] then
7      currentMax ← A[i]
8
9  return currentMax
```

Linha	Operações	
4	1 acesso ao vetor + 1 atribuição	2
5	1 inicialização + n comparações + $2(n-1)$ incrementos	$3n-1$
6	1 acesso ao vetor + 1 comparação, repetidos $n-1$ vezes $\rightarrow 2(n-1)$	$2n-2$
7	0 [cond. nunca satisfeito] a $2(n-1)$ [cond. sempre satisfeito]	$[0, 2n-2]$
9	1 retorno	1

Análise de algoritmos

Exemplo I

Complexidade de tempo no **melhor caso** (`A[0]` é o maior elemento):

- $T(n) = 2 + 3n - 1 + 2n - 2 + 1 = 5n$.

Complexidade de tempo no **pior caso** (`A[n - 1]` é o maior elemento):

- $T(n) = 2 + 3n - 1 + 2n - 2 + 2n - 2 + 1 = 7n - 2$.

Complexidade de tempo no **caso médio**:

- Depende da distribuição das entradas e do uso de teoria de probabilidades.

Análise de algoritmos

Exemplo I

Complexidade de tempo no **melhor caso** (`A[0]` é o maior elemento):

- $T(n) = 2 + 3n - 1 + 2n - 2 + 1 = 5n$.

Complexidade de tempo no **pior caso** (`A[n - 1]` é o maior elemento):

- $T(n) = 2 + 3n - 1 + 2n - 2 + 2n - 2 + 1 = 7n - 2$.

Complexidade de tempo no **caso médio**:

- Depende da distribuição das entradas e do uso de teoria de probabilidades.

Normalmente se considera a complexidade no **pior caso**, pois fornece um limite superior do tempo de execução. Logo:

- O algoritmo `arrayMax` executará no máximo $7n - 2$ operações para cumprir sua tarefa;
- Seja a o tempo gasto na operação primitiva mais complexa sob determinados *hardware* e *software*, o tempo de execução do algoritmo `arrayMax` será de, no máximo, $a(7n - 2)$.

Análise de algoritmos

Exemplo II

Qual a complexidade de tempo (operações) no pior caso do algoritmo abaixo?

```
1 for(int i = 0; i < n; i++) {
2   for(int j = 0; j < n; j++) {
3     if(matriz[i][j] != 0)
4       // Operação com complexidade 1
5   }
6 }
```

Análise de algoritmos

Exemplo II

Qual a complexidade de tempo (operações) no pior caso do algoritmo abaixo?

```
1 for(int i = 0; i < n; i++) {
2   for(int j = 0; j < n; j++) {
3     if(matriz[i][j] != 0)
4       // Operação com complexidade 1
5   }
6 }
```

- O laço externo executa $3n + 2$ operações.
  - Inicialização (1), comparações $(n + 1)$ e incremento $(2n)$.
- Mesma complexidade do laço interno, que repete n vezes. Logo, $n(3n + 2) = 3n^2 + 2n$.
- O condicional é executado n^2 vezes. Logo, $2n^2$.
- A operação interna é executada n^2 vezes, no pior caso.
- $T(n) = 3n + 2 + 3n^2 + 2n + 2n^2 + n^2 \quad \therefore \quad T(n) = 6n^2 + 5n + 2.$

Análise de algoritmos

Taxa de crescimento

Note que $T(n) = 7n - 2$ é uma função linear.

- O tempo de processamento cresce na mesma proporção do tamanho da entrada (n);
- A complexidade tempo desse algoritmo é **linear**.

Análise de algoritmos

Taxa de crescimento

Note que $T(n) = 7n - 2$ é uma função linear.

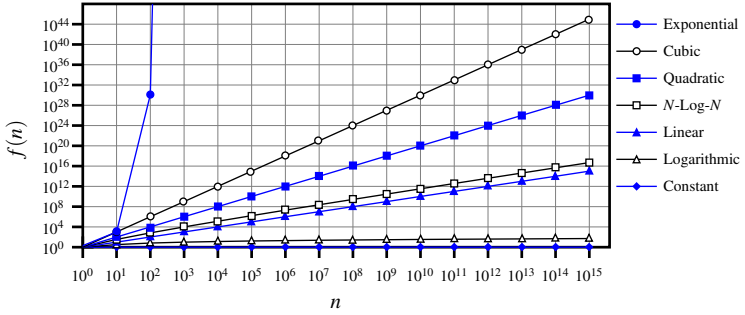
- O tempo de processamento cresce na mesma proporção do tamanho da entrada (n);
- A complexidade tempo desse algoritmo é **linear**.

A complexidade $T(n)$ pode ser definida por funções com diferentes taxas de crescimento:

- constante ≈ 1
- logarítmica $\approx \log n$
- linear $\approx n$
- n-log-n $\approx n \log n$
- quadrática $\approx n^2$
- cúbica $\approx n^3$
- polinomial $\approx n^k$
- exponencial $\approx a^n \quad (a > 1)$

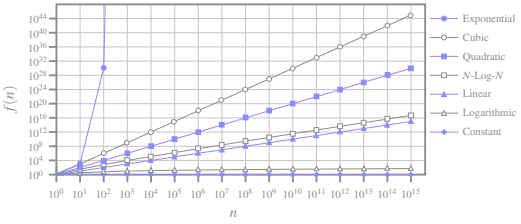
Análise de algoritmos

Taxa de crescimento das funções de complexidade



Análise de algoritmos

Taxa de crescimento das funções de complexidade

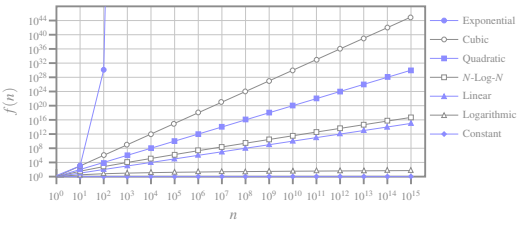


Número de operações

n	$\log n$	n	$n \log n$	n^2	n^3	2^n
8	3	8	24	64	512	256
16	4	16	64	256	4 096	65 536
32	5	32	160	1 024	32 768	$4{,}3 \times 10^9$
64	6	64	384	4 096	262 144	$1{,}8 \times 10^{19}$
128	7	128	896	16384	$2{,}1 \times 10^6$	$3{,}4 \times 10^{38}$
256	8	256	2 048	65 536	$1{,}7 \times 10^7$	$1{,}2 \times 10^{77}$
512	9	512	4 608	262 144	$1{,}3 \times 10^8$	$1{,}3 \times 10^{154}$

Análise de algoritmos

Taxa de crescimento das funções de complexidade



Número de operações

n	$\log n$	n	$n \log n$	n^2	n^3	2^n
8	3	8	24	64	512	256
16	4	16	64	256	4 096	65 536
32	5	32	160	1 024	32 768	$4{,}3 \times 10^9$
64	6	64	384	4 096	262 144	$1{,}8 \times 10^{19}$
128	7	128	896	16384	$2{,}1 \times 10^6$	$3{,}4 \times 10^{38}$
256	8	256	2 048	65 536	$1{,}7 \times 10^7$	$1{,}2 \times 10^{77}$
512	9	512	4 608	262 144	$1{,}3 \times 10^8$	$1{,}3 \times 10^{154}$

Tempo de processamento

n	$\log n$	n	$n \log n$	n^2	n^3	2^n
100	< 1s	< 1s	< 1s	< 1s	< 1s	10^{13} anos
1000	< 1s	< 1s	< 1s	< 1s	1s	10^{284} anos
10000	< 1s	< 1s	< 1s	< 1s	16 min	10^{2993} anos
100000	< 1s	< 1s	< 1s	10 s	12 dias	–
1000000	< 1s	< 1s	< 1s	16 min	32 anos	–

Exemplo: em um jogo existem 70 itens para compra (e.g., materiais, poderes e armas). Cada item tem um custo e fornece algum benefício. Itens combinados fornecem benefícios diferenciados. A fim de tomar a melhor decisão possível, queremos avaliar toda combinação possível de compra de itens, verificando o custo total e os benefícios esperados.

- Podemos representar uma compra usando um vetor binário $V \in \{0,1\}^{70}$, onde o valor de uma posição $i \in [0,70]$ indica se o item i será comprado ou não.
- Devemos avaliar toda combinação possível de valores a V.

Exemplo: em um jogo existem 70 itens para compra (e.g., materiais, poderes e armas). Cada item tem um custo e fornece algum benefício. Itens combinados fornecem benefícios diferenciados. A fim de tomar a melhor decisão possível, queremos avaliar toda combinação possível de compra de itens, verificando o custo total e os benefícios esperados.

- Podemos representar uma compra usando um vetor binário $V \in \{0,1\}^{70}$, onde o valor de uma posição $i \in [0, 70]$ indica se o item i será comprado ou não.
- Devemos avaliar toda combinação possível de valores a V.

Resultado: o algoritmo de avaliação terá complexidade de tempo **exponencial** $\rightarrow 2^n$.

Análise de algoritmos

Taxa de crescimento das funções de complexidade

Um algoritmo com complexidade 2^n, para $n = 70$, executando em um computador capaz de processar 10^9 operações por segundo, demoraria 37 436 anos para terminar sua execução!

Análise de algoritmos

Taxa de crescimento das funções de complexidade

Um algoritmo com complexidade 2^n, para $n = 70$, executando em um computador capaz de processar 10^9 operações por segundo, demoraria 37 436 anos para terminar sua execução!

E se usarmos um computador mais rápido?

- 100× mais rápido → 374 anos;
- 1 000× mais rápido → 37 anos;
- 1 000 000× mais rápido → 136 dias;
- 100 000 000× mais rápido → 1 dia.
  - Para $n = 80$, demoraria 140 dias;
  - Para $n = 100$, demoraria 401 969 anos.

Análise de algoritmos

Taxa de crescimento das funções de complexidade

Um algoritmo com complexidade 2^n, para $n = 70$, executando em um computador capaz de processar 10^9 operações por segundo, demoraria 37 436 anos para terminar sua execução!

E se usarmos um computador mais rápido?

- 100× mais rápido → 374 anos;
- 1 000× mais rápido → 37 anos;
- 1 000 000× mais rápido → 136 dias;
- 100 000 000× mais rápido → 1 dia.
  - Para $n = 80$, demoraria 140 dias;
  - Para $n = 100$, demoraria 401 969 anos.

Moral da história

Um algoritmo melhor executando em um computador mais lento **ganhará sempre** de um algoritmo pior em um computador mais rápido, para instâncias suficientemente grandes.

Análise assintótica

A análise completa (contagem de operações) é muito detalhada e onerosa.

Análise assintótica

A análise completa (contagem de operações) é muito detalhada e onerosa.

Além disso, o que importa na prática é a **taxa de crescimento** da função de complexidade!

Análise assintótica

A análise completa (contagem de operações) é muito detalhada e onerosa.

Além disso, o que importa na prática é a **taxa de crescimento** da função de complexidade!

A **análise assintótica** foca em descrever a taxa de crescimento da complexidade de um algoritmo em função do tamanho n da entrada.

Análise assintótica

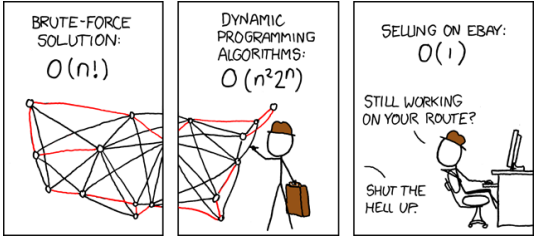
A análise completa (contagem de operações) é muito detalhada e onerosa.

Além disso, o que importa na prática é a **taxa de crescimento** da função de complexidade!

A **análise assintótica** foca em descrever a taxa de crescimento da complexidade de um algoritmo em função do tamanho n da entrada.

Para isso, usaremos a notação $\mathcal{O}$ (*big-oh*).

- Bem como as notações Θ e Ω.



Análise assintótica

Exemplo concreto

Qual a complexidade assintótica do algoritmo `arrayMax`?

```
1  // Entrada: um vetor A com n ≥ 1 elementos inteiros.
2  // Saída: o maior elemento de A.
3
4  currentMax ← A[0]
5  for i ← 1 to n - 1 do
6  if currentMax < A[i] then
7  currentMax ← A[i]
8
9  return currentMax
```

Análise assintótica

Exemplo concreto

Qual a complexidade assintótica do algoritmo `arrayMax`?

```
1  // Entrada: um vetor A com n ≥ 1 elementos inteiros.
2  // Saída: o maior elemento de A.
3
4  currentMax ← A[0]
5  for i ← 1 to n - 1 do
6  if currentMax < A[i] then
7  currentMax ← A[i]
8
9  return currentMax
```

Sabemos que, no pior caso, são executadas $7n - 2$ operações. Logo, esse algoritmo tem complexidade $\mathcal{O}(n)$. Isto é, complexidade linear.

- Não precisamos contar todas as operações. Basta identificarmos o termo de maior complexidade (neste caso, n), pois é quem define a taxa de crescimento da função!

Análise assintótica

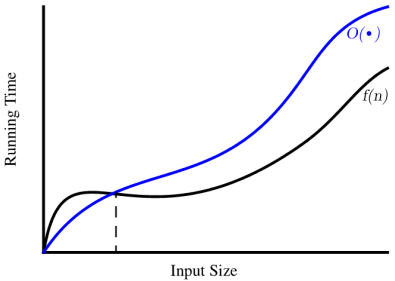
Notação $\mathcal{O}$

Usamos a **notação $\mathcal{O}$** para descrever a **taxa de crescimento** da função de complexidade.

Análise assintótica

Notação $\mathcal{O}$

Usamos a **notação** $\mathcal{O}$ para descrever a **taxa de crescimento** da função de complexidade.



Em particular, a complexidade $\mathcal{O}$ é um **majorante** para a função de complexidade do algoritmo, i.e.

- Fornece um **limite superior** para a complexidade.
- A complexidade do algoritmo é menor ou igual à complexidade $\mathcal{O}$.
- O desempenho do algoritmo **nunca será pior** que sua complexidade $\mathcal{O}$.

Análise assintótica

Regras básicas I

Função polinomial: sempre considerar o maior grau.

- $5n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 4n + 1$ é $\mathcal{O}(n^4)$.
- $n^3 + 600n$ é $\mathcal{O}(n^3)$.

Análise assintótica

Regras básicas I

Função polinomial: sempre considerar o maior grau.

- $5n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 4n + 1$ é $\mathcal{O}(n^4)$.
- $n^3 + 600n$ é $\mathcal{O}(n^3)$.

Constantes e multiplicadores são eliminados.

- $2^{n+2} + 4$ é $\mathcal{O}(2^n)$.
- $4n^3$ é $\mathcal{O}(n^3)$.

Análise assintótica

Regras básicas I

Função polinomial: sempre considerar o maior grau.

- $5n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 4n + 1$ é $\mathcal{O}(n^4)$.
- $n^3 + 600n$ é $\mathcal{O}(n^3)$.

Constantes e multiplicadores são eliminados.

- $2^{n+2} + 4$ é $\mathcal{O}(2^n)$.
- $4n^3$ é $\mathcal{O}(n^3)$.

Função mista: sempre considerar o termo de maior complexidade.

- $5n^2 + 3n \log n + 2n + 5$ é $\mathcal{O}(n^2)$.
- $2n + 100 \log n$ é $\mathcal{O}(n)$.

Análise assintótica

Regras básicas II

Sempre considerar a menor complexidade possível.

- É verdade que $4n^2 + 10$ é $\mathcal{O}(n^4)$, mas é melhor dizer que é $\mathcal{O}(n^2)$ [limite mais ajustado].

Análise assintótica

Regras básicas II

Sempre considerar a menor complexidade possível.

- É verdade que $4n^2 + 10$ é $\mathcal{O}(n^4)$, mas é melhor dizer que é $\mathcal{O}(n^2)$ [limite mais ajustado].

Sempre considerar a representação mais simples.

- $4n^2 + 2\log n$ é $\mathcal{O}(n^2)$, o que é melhor que $\mathcal{O}(n^2 + \log n)$.

Análise assintótica

Exemplo I

Algoritmo `sumNumbers(n1, n2)`:

```
1 // Soma dois números inteiros.
2 public static int sumNumbers(int n1, int n2) {
3   int result = n1 + n2;
4   return result;
5 }
```

Análise assintótica

Exemplo I

Algoritmo `sumNumbers(n1, n2)`:

```
1 // Soma dois números inteiros.
2 public static int sumNumbers(int n1, int n2) {
3   int result = n1 + n2;
4   return result;
5 }
```

Análise:

- Linhas 3 e 4 executam operações de tempo constante;
- Complexidade **constante**: $\mathcal{O}(1)$;
- Algoritmo de tempo constante.

Análise assintótica

Exemplo II

Algoritmo `disjoint1(int[] vA, int[] vB, int[] vC)`:

```
1  // Retorna true se não existe nenhum elemento comum nos três grupos.
2  // Cada vetor possui elementos distintos dentro de si.
3  public static boolean disjoint1(int[ ] vA, int[ ] vB, int[ ] vC) {
4    for (int a : vA)
5      for (int b : vB)
6        for (int c : vC)
7          if ((a == b) && (b == c))
8            return false;
9    return true;
10 }
```

Análise assintótica

Exemplo II

Algoritmo `disjoint1(int[] vA, int[] vB, int[] vC)`:

```
1  // Retorna true se não existe nenhum elemento comum nos três grupos.
2  // Cada vetor possui elementos distintos dentro de si.
3  public static boolean disjoint1(int[ ] vA, int[ ] vB, int[ ] vC) {
4    for (int a : vA)
5      for (int b : vB)
6        for (int c : vC)
7          if ((a == b) && (b == c))
8            return false;
9    return true;
10 }
```

Análise:

- A operação constante da linha 7 é repetida $n \times n \times n = n^3$ vezes;
- Complexidade **cúbica**: $\mathcal{O}(n^3)$;
- Algoritmo de tempo cúbico.

Análise assintótica

Exemplo III

Algoritmo `disjoint2(int[] vA, int[] vB, int[] vC)`:

```
1  // Retorna true se não existe nenhum elemento comum nos três grupos.
2  // Cada vetor possui elementos distintos dentro de si.
3  public static boolean disjoint2(int[ ] vA, int[ ] vB, int[ ] vC) {
4    for (int a : vA)
5      for (int b : vB)
6        if (a == b)
7          for (int c : vC)
8            if (a == c) return false;
9    return true;
10 }
```

Análise assintótica

Exemplo III

Algoritmo `disjoint2(int[] vA, int[] vB, int[] vC)`:

```
1  // Retorna true se não existe nenhum elemento comum nos três grupos.
2  // Cada vetor possui elementos distintos dentro de si.
3  public static boolean disjoint2(int[ ] vA, int[ ] vB, int[ ] vC) {
4    for (int a : vA)
5      for (int b : vB)
6        if (a == b)
7          for (int c : vC)
8            if (a == c) return false;
9    return true;
10 }
```

Análise:

- Os laços das linhas 4 e 5 sempre são executados – $\mathcal{O}(n^2)$;
- No máximo n pares são iguais (lin. 6), então o laço da linha 7 executa no máximo n vezes;
- Complexidade **quadrática**: $n^2 + n^2 \iff \mathcal{O}(n^2)$.

Análise assintótica

Exemplo IV

Algoritmo `repeat1(char c, int n)`:

```
1  // Compõe uma String com o caractere c repetido n vezes.
2  public static String repeat1(char c, int n) {
3    String answer = "";
4    for (int j = 0; j < n; j++)
5      answer += c;
6    return answer;
7  }
```

Análise assintótica

Exemplo IV

Algoritmo `repeat1(char c, int n)`:

```
1  // Compõe uma String com o caractere c repetido n vezes.
2  public static String repeat1(char c, int n) {
3    String answer = "";
4    for (int j = 0; j < n; j++)
5      answer += c;
6    return answer;
7  }
```

Análise:

- Strings são imutáveis em Java: o comando `answer += c` implica em criar uma nova String, copiar cada caractere da String antiga para ela, e acrescentar o caractere $\mathbf{c}$;
- A linha 5 executa operações conforme o tamanho de `answer`: $1 + 2 + \cdots + n - 1$;
- Logo, sua complexidade é $\sum_{j=0}^{n-1} j = n(n+1)/2$;
- Complexidade **quadrática**: $\mathcal{O}(n^2)$.

Análise assintótica

Exemplo V

Algoritmo `repeat2(char c, int n)`:

```
1  // Compõe uma String com o caractere c repetido n vezes.
2  public static String repeat2(char c, int n) {
3    StringBuilder sb = new StringBuilder();
4    for (int j = 0; j < n; j++)
5      sb.append(c);
6    return sb.toString();
7  }
```

Análise assintótica

Exemplo V

Algoritmo `repeat2(char c, int n)`:

```
1  // Compõe uma String com o caractere c repetido n vezes.
2  public static String repeat2(char c, int n) {
3    StringBuilder sb = new StringBuilder();
4    for (int j = 0; j < n; j++)
5      sb.append(c);
6    return sb.toString();
7  }
```

Análise:

- A classe `StringBuilder` implementa uma lista dinâmica, que permite executar a operação `sb.append(c)` em tempo constante;
- Complexidade **linear**: $\mathcal{O}(n)$;
- O algoritmo é o mesmo, o que muda é a estrutura de dados.

Análise assintótica

Exemplo VI

Algoritmo `unique1(int[] data)`:

```
1  // Retorna true se não existe elemento duplicado no vetor.
2  public static boolean unique1(int[ ] data) {
3    int n = data.length;
4    for (int j = 0; j < n - 1; j++)
5      for (int k = j + 1; k < n; k++)
6        if (data[j] == data[k])
7          return false;
8    return true;
9  }
```

Análise assintótica

Exemplo VI

Algoritmo `unique1(int[] data)`:

```java
// Retorna true se não existe elemento duplicado no vetor.
public static boolean unique1(int[ ] data) {
  int n = data.length;
  for (int j = 0; j < n - 1; j++)
    for (int k = j + 1; k < n; k++)
      if (data[j] == data[k])
        return false;
  return true;
}
```

Análise:

- O laço interno é executado $(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$ vezes;
- Complexidade **quadrática**: $\mathcal{O}(n^2)$.

Análise assintótica

Exemplo VII

Algoritmo `unique2(int[] data)`:

```java
// Retorna true se não existe elemento duplicado no vetor.
// O vetor é ordenado para verificar apenas elementos subsequentes.
public static boolean unique2(int[ ] data) {
  int n = data.length;
  Arrays.sort(data); // Operação O(n log n)
  for (int j = 0; j < n - 1; j++)
    if (data[j] == data[j+1])
      return false;
  return true;
}
```

Análise assintótica

Exemplo VII

Algoritmo `unique2(int[] data)`:

```
1  // Retorna true se não existe elemento duplicado no vetor.
2  // O vetor é ordenado para verificar apenas elementos subsequentes.
3  public static boolean unique2(int[ ] data) {
4    int n = data.length;
5    Arrays.sort(data); // Operação O(n log n)
6    for (int j = 0; j < n - 1; j++)
7      if (data[j] == data[j+1])
8        return false;
9    return true;
10 }
```

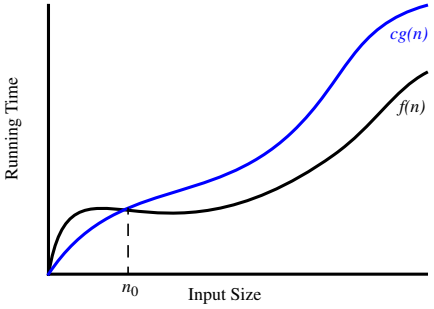
Análise:

- A ordenação custa $n \log n$ e percorrer o vetor custa n;
- Complexidade **n log n**: $n \log n + n \iff \mathcal{O}(n \log n)$.

Apêndice I

Definição formal da notação $\mathcal{O}$

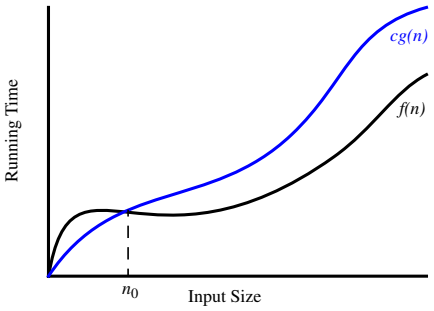
Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções que mapeiam o tamanho da entrada no tempo de processamento, dizemos que $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$ se existe uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tais que $f(n) \leq cg(n)$ para todo inteiro $n \geq n_0$.



Apêndice I

Definição formal da notação $\mathcal{O}$

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções que mapeiam o tamanho da entrada no tempo de processamento, dizemos que $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$ se existe uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tais que $f(n) \leq cg(n)$ para todo inteiro $n \geq n_0$.



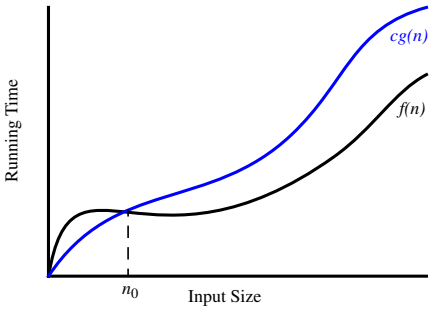
Na prática:

- Se $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$, então $f(n)$ é "menor ou igual" a $g(n)$ a medida que n cresce.
- Com isso, $g(n)$ é um limite superior para $f(n)$.
- Ou seja, $f(n)$ é tão boa quando $g(n)$.

Apêndice I

Definição formal da notação $\mathcal{O}$

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções que mapeiam o tamanho da entrada no tempo de processamento, dizemos que $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$ se existe uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tais que $f(n) \leq cg(n)$ para todo inteiro $n \geq n_0$.



Na prática:

- Se $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$, então $f(n)$ é "menor ou igual" a $g(n)$ a medida que n cresce.
- Com isso, $g(n)$ é um limite superior para $f(n)$.
- Ou seja, $f(n)$ é tão boa quando $g(n)$.

Exemplo: a função $T(n) = 7n - 2$ é $\mathcal{O}(n)$.

- Para $c = 7$ e $n_0 = 1$, temos que $7n - 2 \leq cn$, para todo $n \geq n_0$. Logo $T(n)$ é $\mathcal{O}(n)$.

Apêndice II

Notações $\mathcal{O}$, Θ e Ω

Notação $\mathcal{O}$ (majorante)

Se $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$, então $cg(n)$ é um **limite superior** para $f(n)$. Ou seja, $f(n)$ **não é pior** que $cg(n)$.

Apêndice II

Notações $\mathcal{O}$, Θ e Ω

Notação $\mathcal{O}$ (majorante)

Se $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$, então $cg(n)$ é um **limite superior** para $f(n)$. Ou seja, $f(n)$ **não é pior** que $cg(n)$.

Notação Ω (minorante)

Se $f(n)$ é $\Omega(g(n))$, então $cg(n)$ é um **limite inferior** para $f(n)$. Ou seja, $f(n)$ **não é melhor** que $cg(n)$.

Apêndice II

Notações $\mathcal{O}$, Θ e Ω

Notação $\mathcal{O}$ (majorante)

Se $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$, então $cg(n)$ é um **limite superior** para $f(n)$. Ou seja, $f(n)$ **não é pior** que $cg(n)$.

Notação Ω (minorante)

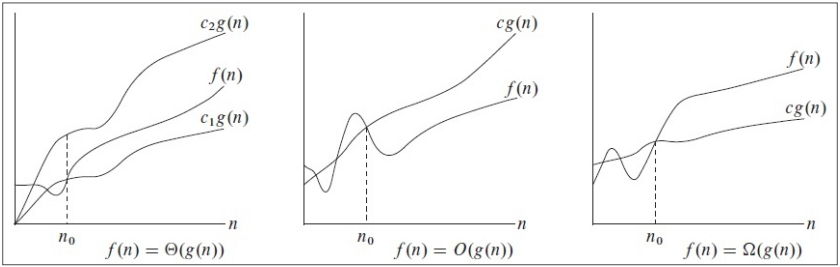
Se $f(n)$ é $\Omega(g(n))$, então $cg(n)$ é um **limite inferior** para $f(n)$. Ou seja, $f(n)$ **não é melhor** que $cg(n)$.

Notação Θ (limite "apertado" – majorante e minorante)

Se $f(n)$ é $\Theta(g(n))$, então $c_1 g(n)$ é um **limite inferior** para $f(n)$ e $c_2 g(n)$ é um **limite superior** para $f(n)$. Ou seja, $f(n)$ **é igual** a $cg(n)$.

Apêndice III

Notações e suas relações



Detalhes:

- $f(n)$ é $\Theta(g(n)) \iff f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$ e $f(n)$ é $\Omega(g(n))$.
- $f(n)$ é $\Theta(g(n)) \iff g(n)$ é $\Theta(f(n))$.
- $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n)) \iff g(n)$ é $\Omega(f(n))$.

45EST – Algoritmos e Estruturas de Dados
Prof. Marcelo de Souza