

Actividad Guiada 1 de Algoritmos de Optimización

Nombre: Carlos Javier Bravo Intriago

<https://colab.research.google.com/drive/1O-szoWNwlfQvto4LrLKE7O1djeIBm0kq?usp=sharing>

<https://github.com/carlosbravo1408/03MIAR-Algoritmos-de-Optimizacion-2025/tree/main/AG1>

```
In [1]: import timeit
import tracemalloc
import time
from functools import wraps
from typing import List, Union, Tuple, Callable, Optional

from IPython.display import HTML
from matplotlib.axes import Axes
from matplotlib.colors import ListedColormap
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# ----- Código Auxiliar ----- #

HanoiTowerSolutionType = List[Tuple[int, int]]
HanoiTowerCallableType = Callable[[int, int, int, HanoiTowerSolutionType], None]
NQueenSolution = Union[List[int], Tuple[int, ...]]


# Decorador medidor de tiempo
def measure_time(func):
    @wraps(func)
    def wrapper(*args, **kwargs):
        start_time = time.perf_counter()
        result = func(*args, **kwargs)
        end_time = time.perf_counter()
        elapsed_time = end_time - start_time
        display(HTML(f"Tiempo de ejecucion: {elapsed_time} seg"))
        return result
    return wrapper

# Decorador medidor de Memoria
def measure_memory(func):
    @wraps(func)
    def wrapper(*args, **kwargs):
        tracemalloc.start()
        result = func(*args, **kwargs)
        _, peak = tracemalloc.get_traced_memory()
        tracemalloc.stop()
        # 1 << 10 = 1024, 1 << (10*2) = 1024**2 Conversion a MB
        display(HTML(f"Memoria usada aproximada: {peak/(1<<(10*2))} MB"))
        return result
    return wrapper

# método auxiliar para probar las variantes de Torre de Hanoi Propuestas
@measure_time
def get_hanoi_tower_solutions(
    n: int,
    _from: int,
    to: int,
    hanoi_tower_algorithm: HanoiTowerCallableType
) -> HanoiTowerSolutionType:
    solution = []
    hanoi_tower_algorithm(n, _from, to, solution)
    return solution

def draw_board(
    solution: List[int],
    color_board: Tuple[str, str] = ('#FFCE9E', '#D18B47'),
    ax: Optional[Axes] = None,
) -> Axes:
    """
    - Autor: Carlos Javier Bravo Intriago
    - Fecha: Enero 2026
    -----
    Método que permite dibujar el tablero de ajedrez a la solución definida
    en `solution` para el problema de las N-Reinas.
    Este código fue parte de otro proyecto personal y ha sido reescrito para
    representar las posiciones de las reinas.
    Permite resultados `zero-index` o `one-index`.
    Utiliza recursos sencillos de matplotlib
    -----
    
```

```

:param solution: Lista con la solución base al modelo [R1, R2, R3, ...,
    RN] donde cada posición corresponde a su columna, y cada elemento
    interno corresponde a la fila
:param color_board: para poder definir el color del tablero, por defecto
    esta el formato de Lichess.com
:param ax: Este parametro es opcional, permite agregar este subplot a
    alguna grafica mas compleja.
:return: Axes: Retorna el objeto Axes de la figura (Basándose en el
    Estándar propuesto por Seaborn o Matplotlib)
"""

n = len(solution)
starts_with_one = not 0 in solution
X, Y = np.meshgrid(np.arange(n), np.arange(n))
board = (X + Y) % 2

# Seaborn and Matplotlib ecosystem-friendly allows to easily compose complex figures (such as subplots).
if ax is None:
    fig, ax = plt.subplots(figsize=(5, 5))

cmap = ListedColormap(list(color_board))
ax.imshow(board, cmap=cmap, origin='lower', extent=(0, n, 0, n))

for col, row in enumerate(solution):
    ax.text(
        col + 0.5 ,
        row + 0.5 - (1 if starts_with_one else 0),
        '♛',
        fontsize=250/n,
        ha='center', va='center',
        color="black"
    )
# hacky trick for enable horizontal and vertical ticks when ax is defined
# No reference for this hardcoded part, I only found it through trial and error
# Carlos Javier Bravo Intríago
ax.set_xticks(np.arange(0, n, 1))
ax.set_yticks(np.arange(0, n, 1))
ax.set_xticks(np.arange(0.5, n, 1), minor=True)
ax.set_yticks(np.arange(0.5, n, 1), minor=True)

ax.set_xticklabels([chr(i + 65) for i in range(n)], minor=True)
ax.set_yticklabels(np.arange(1, n+1), minor=True)
ax.tick_params(axis='both', which='major', length=0, labelbottom=False, labelleft=False)
ax.set_title(f"N={n}: Solución {solution}", fontsize=10)
ax.grid(False)
return ax

```

Torres de Hanoi - Divide y vencerás

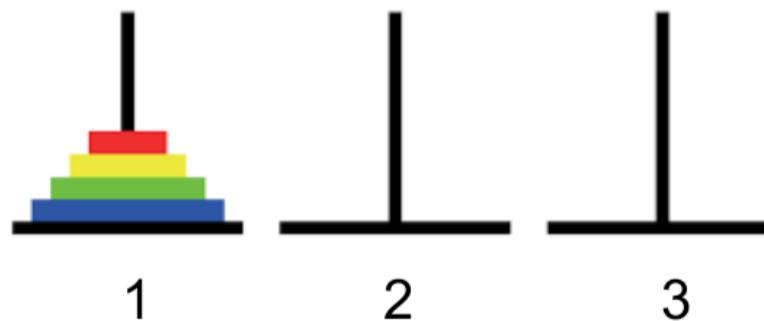


Fig 1. Torres de Hanoi. Adaptado de [1]

`Resolver>Total_fichas=4, Desde=1 , Hasta=3` es valido con:

- `Resolver>Total_fichas=3, Desde=1, Hasta=2`
- `Mover(Desde=1, Hasta=3)`
- `Resolver>Total_fichas=3, Desde=2, Hasta=3`

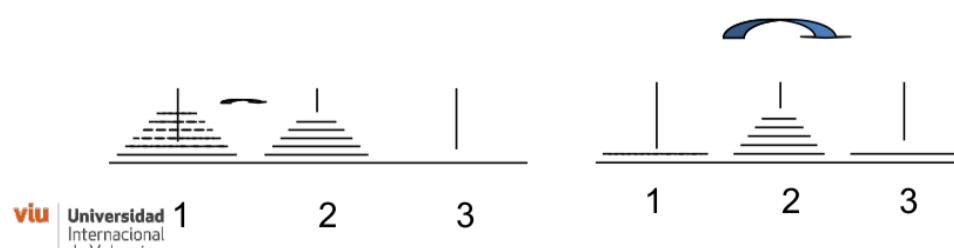


Fig 2. Esquema de resolucion bajo la estrategia de Divide y vencerás

```
In [2]: def hanoi_towers_recursive(n: int, desde: int, hasta: int, sol: HanoiTowerSolutionType) -> None:
    """
    - Autor: Raúl Reyero
    - Modificado por: Carlos Javier Bravo Intriago
    - Fecha: Enero 2026
    -----
    Este algoritmo contempla la misma lógica propuesta por el docente Raúl
    Reyero, con la variante de que no imprime por pantalla el resultado, sino
    que lo retorna como una lista de tuplas, cada tupla es un par ordenado
    que representa de que torre a que torre se ha movido la ficha superior.

    Complejidad temporal O(2n)
    Cambios:
    -----
    * Se omite el uso del método `print`
    * Se almacena el resultado en una lista
    * Se usa el operador XOR para buscar la torre o pin auxiliar
    https://florian.github.io/xor-trick/#application-2-finding-the-missing-number
    :param n: Número de fichas
    :param desde: Torre o pin de inicio
    :param hasta: Torre o pin final
    :param sol: Referencia de la lista solución, donde se almacenarán las tuplas.
    :return: None
    """
    if n==1 :
        sol.append((desde, hasta))
    else:
        pin_auxiliar = desde ^ hasta # Propiedad del operador XOR
        hanoi_towers_recursive(n - 1, desde, pin_auxiliar, sol)
        sol.append((desde, hasta))
        hanoi_towers_recursive(n - 1, pin_auxiliar, hasta, sol)

recursive_solution = get_hanoi_tower_solutions(10, 1, 3, hanoi_towers_recursive)
```

Tiempo de ejecucion: 0.000238389999140054 seg

Se puede resolver el problema de la Torre de Hanoi de manera no recursiva. Teóricamente hablando, el número mínimo de movimientos es $2^n - 1$, por lo que podría sugerirse que este problema se puede resolver con $2^n - 1$ iteraciones.

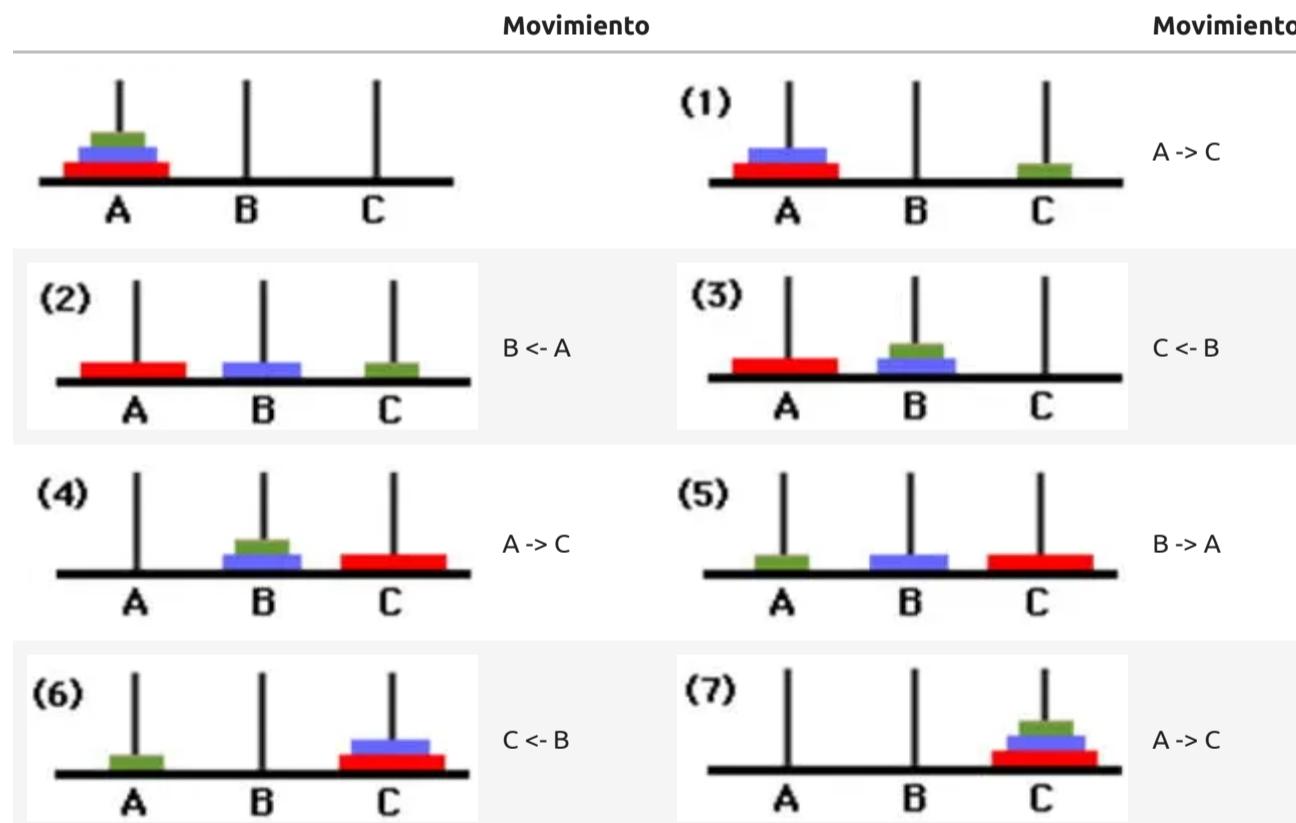


Tabla 1. Resolucion paso a paso del problema de las torres de Hanoi con 3 discos. Adaptado de [2]

Existe un patrón entre cada paso o movimiento, ya sea como torre de inicio o torre final, Es decir, existe un par de torres involucradas por movimientos que obedece la secuencia $(A, C), (B, A), (C, B)$. Para cada par seleccionado (T_1, T_2) , la dirección del movimiento no es arbitraria.

Como se describe en la tabla, la flecha indica cuál es la dirección del movimiento, que se determina por las siguientes restricciones:

1. Un disco solo puede moverse a una torre vacía
2. Un disco no puede colocarse sobre otro más pequeño.

```
if not T1.empty() and (T2.empty() or T1.top() < T2.top()):
    move_disk(from=T1, to=T2)
else:
    move_disk(from=T2, to=T1)
```

Una restricción que también debe cumplirse, es que si el número de discos es par, se debe intercambiar las columnas auxiliar y destino:

```
auxiliar = target ^ source
if disk_number % 2 == 0:
```

```
    auxiliar, target = target, auxiliar
```

Como la secuencia es cíclica, la propuesta sugerida en el siguiente bloque hace los movimientos de los 3 pares $(A, C), (B, A), (C, B)$ por cada iteración. El número de iteraciones probables bajo este esquema es $\lfloor (2^n - 1)/3 \rfloor + 1$. Aunque cabe aclarar que por cada iteración se realiza de 1 a 3 movimientos de disco, lo que al final si se contase por movimientos realizados (y no por iteraciones), acabaría ejecutando $2^n - 1$ movimientos.

Por lo tanto, la complejidad de este algoritmo permanece en $O(2^N)$.

```
In [3]: def hanoi_towers_non_recursive(n: int, _from: int, to: int, sol: HanoiTowerSolutionType) -> None:
```

```
    """

```

```
        - Autor: Vedanti Kshirsagar
        - Corregido y Modificado por: Carlos Javier Bravo Intríago
        - Fuente Original: https://favtutor.com/blogs/tower-of-hanoi
        - Fecha: Enero 2026
    -----
```

```
Variante del algoritmo de las torres de Hanoi no recursiva, basada en la propuesta de Vedanti Kshirsagar, y aplicadas las correcciones pertinentes.
```

```
Complejidad temporal  $O(2^n)$ 
```

```
-----
```

```
Cambios / Correcciones:
```

```
-----
```

```
* [1] En el orden de los argumentos de cada if-statement
* [2] En el resultado final, cuando n es par, se deben intercambiar las
      torres auxiliar por la del destino
* [3] Cada iteración puede mover hasta 3 discos.
```

```
:param n: Número de fichas
:param _from: Torre o pin de Inicio
:param to: Torre o pin final
:param sol: Referencia de la lista solución, donde se almacenarán las tuplas.
:return: None
"""

_aux = _from ^ to
if n % 2 == 0: # Corrección [2]
    _aux, to = to, _aux
source = [i + 1 for i in reversed(range(n))]
target = []
auxiliary = []
```

```
while True:
```

```
    if len(target) == n or len(auxiliary) == n:
        break
```

```
    if len(source) != 0 and (len(target) == 0 or source[-1] < target[-1]): # Corrección [1]
```

```
        target.append(source.pop())
        sol.append((_from, to))
    else:
        source.append(target.pop())
        sol.append((to, _from))
    if len(target) == n or len(auxiliary) == n:
        break
    if len(auxiliary) != 0 and (len(source) == 0 or auxiliary[-1] < source[-1]): # Corrección [1]
```

```
        source.append(auxiliary.pop())
        sol.append((_aux, _from))
    else:
        auxiliary.append(source.pop())
        sol.append((_from, _aux))
    if len(target) == n or len(auxiliary) == n:
        break
    if len(target) != 0 and (len(auxiliary) == 0 or target[-1] < auxiliary[-1]): # Corrección [1]
```

```
        auxiliary.append(target.pop())
        sol.append((to, _aux))
    else:
        target.append(auxiliary.pop())
        sol.append((_aux, to))
```

```
non_recursive_solution = get_hanoi_tower_solutions(10, 1, 3, hanoi_towers_non_recursive)
```

Tiempo de ejecución: 0.0005470869946293533 seg

```
In [4]: # validación de respuestas
# esto debería arrojar una Excepción AssertionError si no coinciden las respuestas
assert recursive_solution == non_recursive_solution
```

Cambio de monedas - Técnica voraz

```
In [21]: SISTEMA = [50,20,10,5,1]

def cambio_monedas(cantidad: int, sistema_monetario: List[int]) -> Optional[List[int]]:
    """
        - Autor: Raúl Reyero
        - Modificado por: Carlos Javier Bravo Intriago
        - Fecha: Enero 2026
    -----
    (Este algoritmo contempla la misma lógica propuesta por el docente Raúl Reyero)

    Algoritmo de cambio de monedas con técnica voraz. Es pertinente tener los valores del `sistema_monetario` monetario ordenados descendenteamente, sino este algoritmo deja de funcionar de forma voraz

    Complejidad temporal O(N)

    -----
    :param cantidad: Valor en entero de la cantidad que se desea generar el `cambio`
    :param sistema_monetario: Lista de valores correspondientes al sistema monetario, esta lista debe estar ordenada descendenteamente
    :return: Lista de cantidades por monedas en el orden establecido en `sistema_monetario`
    """
    solucion = [0]*len(sistema_monetario)
    valor_acumulado = 0

    for i,valor in enumerate(sistema_monetario):
        monedas = (cantidad - valor_acumulado) // valor
        solucion[i] = monedas
        valor_acumulado = valor_acumulado + monedas*valor

    if cantidad == valor_acumulado:
        return solucion

    print("No es posible encontrar solución")
    return None

cambio_monedas(cantidad=57, sistema_monetario=SISTEMA)
```

Out[21]: [1, 0, 0, 1, 2]

N Reinas - Vuelta Atrás(Backtracking)

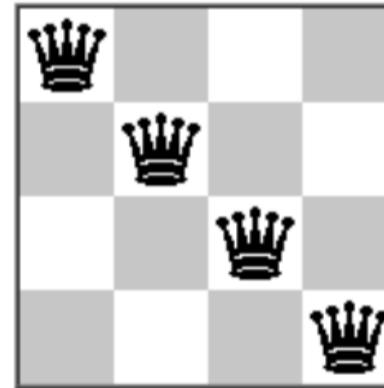


Fig 4. Problema de las N Reinas.

```
In [6]: def es_prometedora(solucion_parcial: List[int], etapa: int) -> bool:
    """
        Método para verificar si en la `solucion_parcial` no existe amenazas entre reinas.

        :param solucion_parcial: Solución parcial a verificar
        :param etapa: Etapa en la que se encuentra actualmente el algoritmo
        :return: True o False
    """
    for i in range(etapa+1): # O(N) x O(N) = O(N²)
        if solucion_parcial.count(solucion_parcial[i]) > 1: # O(N)
            return False
        for j in range(i+1, etapa +1 ): # O(N)
            if abs(i-j) == abs(solucion_parcial[i] - solucion_parcial[j]): return False
    return True

def reinas(n: int, soluciones: List[NQueenSolution], backtracking: Optional[NQueenSolution] = None, etapa: int = 0):
    """
        - Autor: Raúl Reyero
        - Modificado por: Carlos Javier Bravo Intriago
        - Fecha: Enero 2026
    -----
```

Este método contempla la misma lógica propuesta por el docente Raúl Reyero aplicando la estrategia de BackTracking, con la variante de que no imprime por pantalla el resultado, sino que se agrega una lista auxiliar para encolar las soluciones que se encuentren durante el proceso de backtracking.

Complejidad temporal $O(N^2 \times N!)$

Cambios:

- * Se omite el uso del método `print`
- * Se almacena el resultado en una lista

```
:param n: Número de reinas
:param soluciones: Lista (o referencia de la misma) donde se almacenará
    las soluciones que el algoritmo vaya encontrando
:param backtracking: Lista (o referencia de la misma) donde se almacena
    las iteraciones del backtracking, por defecto es None
:param etapa: Etapa en la que se encuentra actualmente el algoritmo
:return: None
"""

if backtracking is None:
    backtracking = [0 for _ in range(n)]

for i in range(1, n + 1): # O(N!)
    backtracking[etapa] = i
    if es_prometedora(backtracking, etapa):
        if etapa == n-1:
            soluciones.append(backtracking.copy())
        else:
            reinas(n, soluciones, backtracking, etapa + 1)
    backtracking[etapa] = 0

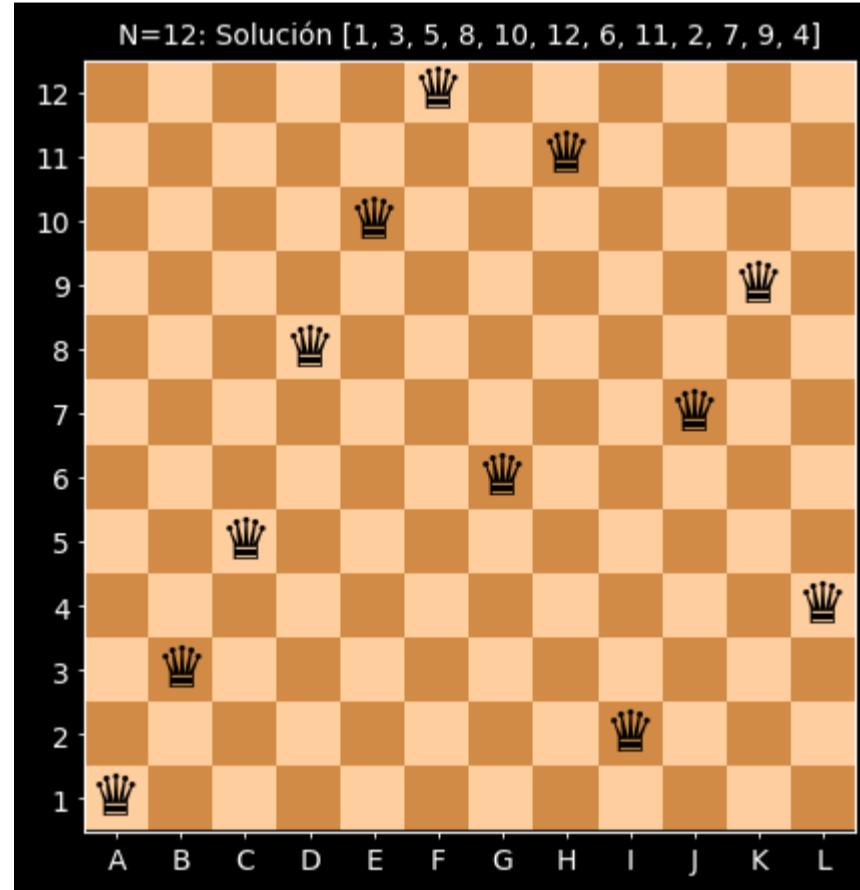
@measure_time
def resolver_reinas(n):
    soluciones = []
    reinas(n, soluciones, etapa=0)
    return soluciones

reinas = resolver_reinas(12)
print(f"Se han encontrado {len(reinas)} soluciones, se imprime la primera de ellas: {reinas[0]}")
```

Tiempo de ejecución: 46.19599366700277 seg

Se han encontrado 14200 soluciones, se imprime la primera de ellas: [1, 3, 5, 8, 10, 12, 6, 11, 2, 7, 9, 4]

In [7]: `draw_board(reinas[0])
plt.show()`



Propuesta del estudiante:

La implementación de este código se tomó como inspiración de la descripción informal de la técnica de backtracking presentada por Knuth D, en [3], la descripción original hacia dicha poda después de ampliar la frontera. En esta variante propuesta, se poda a la vez que se amplía la frontera. (En Wikipedia se puede encontrar la transcripción a la descripción informal de Knuth D).

El método `validate_solution` en la versión de Knuth D [3], implica una complejidad temporal $O(N^2)$, ya que recorre la solución a validar en dos ciclos `for` anidados. Esta nueva propuesta requiere únicamente un ciclo `for`, esto debido a que se pasa como argumento la

`current_queen_row` que se pretende encolar, con ello solo basta ir de la `solution` anterior iterar `row` por `row` para validar si la nueva propuesta de `current_queen_row` ataca a alguna otra reina dentro de `solution`.

Análisis temporal:

El coste temporal del método `validate_solution` es $O(N)$.

El coste de hacer backtracking a este problema es teóricamente de $O(N!)$

Por cada iteración dentro del backtracking se llama al método `validate_solution`, lo cual implica que la complejidad temporal es $O(N \times N!)$.

```
In [8]: @measure_time
def solve_n_queens(n: int) -> List[NQueenSolution]:
    """
        - Idea Original: Donald Knuth, inspirado y modificado del código
            disponible en Wikipedia
        - Modificación: Carlos Javier Bravo Intríago
        - Fecha: Enero 2026
    -----
    Propuesta optimizada para el problema de las N-Reinas basado en la
    estrategia de BackTracking.

    Esta implementación se basa en la idea original de Donald Knuth, pero se
    introduce mejoras significativas que influyen en la complejidad temporal.
    A diferencia de la versión original que valida soluciones en tiempo
    cuadrático ( $O(N^2)$ ), esta variante logra una validación en tiempo lineal
    ( $O(N)$ ).

    Complejidad temporal  $O(N \times N!)$ 
    -----
    Cambios / Correcciones:
    -----
    * [1] `extend_with_valid_solutions` filtra las soluciones inválidas
        durante la construcción de nuevas permutaciones, evitando expandir ramas
        innecesarias del árbol.
    * [2] `validate_solution` reduce el costo computacional, ahora es de
        complejidad lineal.

    :param n: Número de Reinas
    :return: Lista con las posibles configuraciones donde las reinas no se
            atacan mutuamente.
    """
    if n < 1: return [] # no existe solución
    if n == 1: return [[0]] # una única reina
    if n in [2, 3]: return [] # no existe solución con 2 o 3 reinas
    solution = []
    for i in range(n):
        solution = _extend_with_valid_solutions(solution, n)
    return solution

# Aquí el método validate_solution es de complejidad lineal, se ha quitado la búsqueda redundante por casos ya conocidos
def _validate_solution(solution: NQueenSolution, current_queen_row: int) -> bool:
    """
        Método que valida si la nueva posición `current_queen_row` no entra en
        conflicto con la `solution` existente
        :param solution: Lista de enteros con posiciones válidas.
        :param current_queen_row: Valor que se desea validar si no genera
            amenazas entre las otras reinas existentes en `solution`.
        :return: True o False.
    """
    current_col = len(solution)
    for col, row in enumerate(solution):
        if row == current_queen_row:
            return False
        if abs(current_col - col) == abs(current_queen_row - row):
            return False
    return True

def _extend_with_valid_solutions(previous_permutation: list, n: int) -> List[NQueenSolution]:
    """
        Método que expande el árbol o las permutaciones posibles solo si son
        válidas. Esto evita la generación de nuevas ramas o permutaciones que no
        conllevarán a alguna solución.
        :param previous_permutation: Permutaciones previas o soluciones previas
            validadas.
        :param n: Número de reinas
        :return:
    """
    new_perm = []
    for p in previous_permutation:
```

```

        for i in range(n):
            if _validate_solution(p, i):
                extended_array = p + [i]
                new_perm.append(extended_array)
    return new_perm

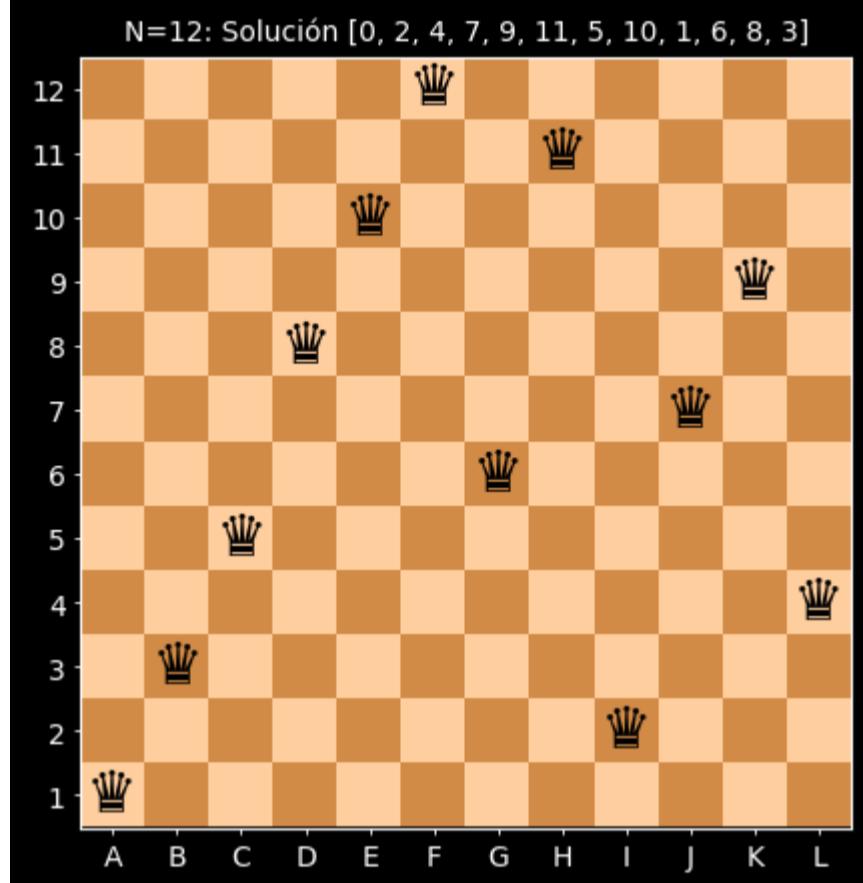
queens = solve_n_queens(12)
print(f"Se han encontrado {len(queens)} soluciones, se imprime la primera de ellas: {queens[0]}")

```

Tiempo de ejecución: 7.455744838996907 seg

Se han encontrado 14200 soluciones, se imprime la primera de ellas: [0, 2, 4, 7, 9, 11, 5, 10, 1, 6, 8, 3]

In [9]: draw_board(queens[0])
plt.show()



Encontrar los dos puntos más cercanos

Dado un conjunto de puntos se trata de encontrar los dos puntos más cercanos entre sí.

```

In [10]: import random

# ----- Código Auxiliar -----
PointType = Union[int, Tuple[int, ...]]
PointsListType = List[PointType]
ResultType = Optional[Tuple[PointType, PointType]]

def random_list_generator(start: int = 1, stop: int = 10_000, n: int = 1_000, dim: int = 1):
    """
    Generador de puntos aleatorios, los puntos pueden ser de `dim` dimensiones
    :param start: Limite inferior del rango aleatorio [inclusivo]
    :param stop: Limite superior del rango aleatorio [no inclusivo]
    :param n: Cantidad de elementos a generarse
    :param dim: Número de dimensiones.
    :return:
    """
    if dim == 1:
        return [random.randrange(start, stop) for _ in range(n)]
    return [tuple([random.randrange(start, stop) for _ in range(dim)]) for _ in range(n)]

def get_square_distance(p: PointType, q: PointType) -> int:
    """
    Calcula y retorna el cuadrado de la distancia entre dos puntos.
    Es costoso computacionalmente hablando el calcular la raiz cuadrada de la
    hipotenusa.
    :param p: Punto p
    :param q: Punto Q
    :return: Cuadrado de la distancia entre dos puntos
    """
    # r = 0
    # _ = [r := r + (i - j)**2 for i, j in zip(p, q)] # Operador Walrus, y List Comprehension
    return sum((i - j)*(i - j) for i, j in zip(p, q))

def get_scalar_distance(p: PointType, q: PointType) -> int:
    return abs(p - q)

# método para validar si la solución a uno de los algoritmos está dentro de todas las posibles soluciones de punto
def search_all_closest_pair_brute_force(points: PointsListType) -> List[ResultType]:

```

```

"""
Este método retorna todos los pares posibles de puntos más cercanos.
Estos pares coinciden en distancia que separa punto a punto.
:param points: Lista de puntos, pueden ser unidimensional, bidimensional
    o tridimensional
:return:
"""

_points = sorted(points)
if 0 <= len(_points) <= 1:
    return []
if len(_points) == 2:
    return [(_points[0], _points[1])]
callback = get_scalar_distance if isinstance(_points[0], int) else get_square_distance
lowest_dist = float('inf')
result_points = []
for left in range(len(_points) - 1):
    for right in range(left + 1, len(_points)):
        distance = callback(_points[left], _points[right])
        if distance == lowest_dist:
            result_points.append((_points[left], _points[right]))
        if distance < lowest_dist:
            result_points = [(_points[left], _points[right])]
            lowest_dist = distance
return result_points

```

Caso 1: Puntos en una dimensión (1D)

```
In [11]: random_points_1d = random_list_generator(stop = 1_000_000, n=1_000, dim=1)
all_nearest_points = search_all_closest_pair_brute_force(random_points_1d)
print(f"Posibles soluciones: {all_nearest_points}")
```

Posibles soluciones: [(337644, 337644)]

Fuerza Bruta:

Para este caso, que se compara todos contra todos, por cada elemento del arreglo, se compara con los $(N - k)$ elementos restantes, donde k es el k -ésimo término o número del arreglo.

Por ende, la complejidad temporal es Cuadrática $O(N^2)$

```
In [12]: # este método es reutilizable para N dimensiones
def _search_closest_pair_brute_force(
    points: PointsListType,
    distance_func: Callable[[PointType, PointType], int] = get_scalar_distance
) -> Tuple[ResultType, int]:
"""
Este método retorna un único par de puntos cercanos entre sí.

Complejidad temporal O(N2)
:param points: Lista de puntos, pueden ser de N-Dimensiones
:param distance_func: Función de cálculo de distancia, por defecto es
    `get_scalar_distance`
:return: Tupla, par de puntos más cercanos entre sí
"""

if 0 <= len(points) <= 1:
    return None, 0
if len(points) == 2:
    return (points[0], points[1]), distance_func(points[0], points[1])
lowest_dist = float('inf')
result_points = None
for left in range(len(points) - 1):
    for right in range(left + 1, len(points)):
        distance = distance_func(points[left], points[right])
        if distance < lowest_dist:
            result_points = (points[left], points[right])
            lowest_dist = distance
return result_points, distance_func(*result_points)

@measure_time
def search_closest_pair_brute_force(
    points: PointsListType,
    distance_func: Callable[[PointType, PointType], int] = get_scalar_distance
) -> ResultType:
    return _search_closest_pair_brute_force(points, distance_func)[0]

solution = tuple(sorted(search_closest_pair_brute_force(random_points_1d)))
print(solution)
assert solution in all_nearest_points # Validar si el resultado es correcto
```

Tiempo de ejecución: 0.07874253199406667 seg
(337644, 337644)

Divide y Vencerás:

Para aplicar esta estrategia, es necesario tener la lista de puntos ordenados de manera ascendente. (Complejidad $O(N \log n)$)

Parte Dividir: Se crean dos particiones de igual longitud a partir del arreglo de entrada, se divide dicho arreglo en dos partes de la forma:

```
middle = n >> 1 # lo mismo que hacer n // 2 pero sin recurrir a la division
left_partition = points[: middle + 1] # Se partitiona el arreglo hasta middle + 1
if n & 1 == 0: # otra forma de validar si n % 2 == 0 sin recurrir a dividir
    right_partition = points[middle - 1: ]
else:
    right_partition = points[middle: ]
```

La intención de esta forma de partición es evitar analizar la frontera, por lo que se toma un elemento extra a la *derecha* para la partición de la izquierda, y de forma similar se toma un elemento extra a la izquierda para la partición de la derecha

La complejidad temporal de la parte del dividir es $O(N)$

Parte Vencer: Se itera recursivamente por cada partición, que esto a su vez vuelve a dividir en 2 subparticiones, así hasta llegar el caso base que es 2 puntos.

```
left_points, left_distance = _search_closest_pair_scalar_divide_and_conquer(left_partition) # T(N/2)
right_points, right_distance = _search_closest_pair_scalar_divide_and_conquer(right_partition) # T(N/2)
La complejidad de la etapa Vencer es 2T(N/2)
```

Por ende, la *ecuación* recurrencia del algoritmo es:

$$T(N) = 2 \cdot T(N/2) + O(N)$$

Con $a = b = 2$ y $c = k = 1$, partiendo de la ecuación $a \cdot T(n/b) + c \cdot n^k$, y cumpliendo que $a = b^k$ se tiene como solución en complejidad temporal $O(N \log N)$.

```
In [13]: def _search_closest_pair_scalar_divide_and_conquer(points: PointsListType) -> Tuple[ResultType, int]:
    """
    Este método de manera recursiva busca el par de puntos más cercanos entre sí. La estrategia empleada es Divide y Vencerás.

    Complejidad temporal O(N logN)
    :param points: Lista de puntos a analizar (Puntos unidimensionales)
    :return: Tupla, par de puntos más cercanos entre sí
    """
    n = len(points)
    if n == 1:
        return None, 0
    if n == 2: # base case
        return (points[0], points[1]), get_scalar_distance(points[0], points[1])
    middle = n >> 1
    left_partition = points[: middle + 1]
    if n & 1 == 0:
        right_partition = points[middle - 1: ]
    else:
        right_partition = points[middle: ]
    left_points, left_distance = _search_closest_pair_scalar_divide_and_conquer(left_partition)
    right_points, right_distance = _search_closest_pair_scalar_divide_and_conquer(right_partition)
    if left_distance < right_distance:
        return left_points, left_distance
    return right_points, right_distance

@measure_time
def search_closest_pair_scalar_divide_and_conquer(points: PointsListType) -> ResultType:
    _points = sorted(points)
    return _search_closest_pair_scalar_divide_and_conquer(_points)[0]

solution = search_closest_pair_scalar_divide_and_conquer(random_points_1d)
print(solution)
assert solution in all_nearest_points # Validar si el resultado es correcto
```

Tiempo de ejecucion: 0.00094946900208015 seg
(337644, 337644)

¿Se puede mejorar?

Para el caso de una sola dimensión, sí es posible mejorar a penas un poco. Basta con que se ordene la lista, y se iteren dos elementos contiguos, es decir, basta un solo ciclo `for` y comparar el punto actual con el punto siguiente de la lista para determinar el par de puntos más cercanos.

Teóricamente, también es de complejidad $O(N \log N)$ (debido al ordenamiento inicial), sin embargo, esta variante no tiene costos ocultos como la variante aplicada la estrategia de Divide y Vencerás. Los `slicings` son una copia de una parte del array, esta copia es generalmente de complejidad lineal.

```
In [14]: @measure_time
def search_closest_pair_scalar_naive(points: PointsListType) -> ResultType:
    """
    Este método de manera recursiva busca el par de puntos más cercanos entre sí. Para el caso de 1-Dimensional, se puede realizar esta búsqueda en
```

```

complejidad  $O(N)$ , **sin embargo**, requiere que los puntos de entrada estén
ordenados previamente.
:param points: Lista de puntos a analizar (Puntos unidimensionales)
:return: Tupla, par de puntos más cercanos entre sí
"""
_points = sorted(points)
lowest_dist = float('inf')
result_points = None
for i in range(len(_points) - 1):
    distance = get_scalar_distance(_points[i], _points[i + 1])
    if distance < lowest_dist:
        result_points = (_points[i], _points[i+1])
        lowest_dist = distance
return result_points

solution = search_closest_pair_scalar_naive(random_points_1d)
print(solution)
assert solution in all_nearest_points # Validar si el resultado es correcto

```

Tiempo de ejecucion: 0.00031362300069304183 seg
(337644, 337644)

Caso 2: Puntos en dos dimensiones (2D)

```
In [15]: random_points_2d = random_list_generator(stop = 1_000_000, n=1_000, dim=2)
all_nearest_points = search_all_closest_pair_brute_force(random_points_2d)
print(f"Posibles soluciones: {all_nearest_points}")

Posibles soluciones: [(287419, 189420), (288488, 189046)]
```

Fuerza Bruta

Este caso es similar al de 1D, al final se busca comparar todos contra todos, por cada elemento del arreglo, se compara con los $(N - k)$ elementos restantes, donde k es el k -ésimo termino o número del arreglo.

Por ende, la complejidad temporal es Cuadrática $O(N^2)$ también.

```
In [16]: solution = tuple(sorted(search_closest_pair_brute_force(random_points_2d, distance_func=get_square_distance)))
print(solution)
assert solution in all_nearest_points # Validar si el resultado es correcto

Tiempo de ejecucion: 0.3689903679987765 seg
((287419, 189420), (288488, 189046))
```

Divide y vencerás

Para aplicar esta estrategia, es necesario tener la lista de puntos ordenados de manera ascendente tanto para X como para Y .
(Complejidad $O(N \log n)$)

Parte Dividir: Se crean cuatro particiones de igual longitud a partir de los arreglos de entrada ordenados por el eje X e Y , se dividen dichos arreglos en dos partes de la forma:

```
middle = n >> 1 # lo mismo que hacer n // 2 pero sin recurrir a la division
...
left_x_partition = x_sorted_points[: middle]
right_x_partition = x_sorted_points[middle:]
left_y_partition, right_y_partition = [], []
left_set = set(left_x_partition)
for point in y_sorted_points:
    (left_y_partition if point in left_set else right_y_partition).append(point)
La complejidad temporal de la parte del dividir es  $O(N)$ .
```

Parte Vencer: Se itera recursivamente por cada par de particiones, que esto a su vez vuelve a dividir en 2 subparticiones, así hasta llegar el caso base que es 3 puntos.

```
p1_left, p2_left, dist_left = _search_closest_pair_2d(left_x_partition, left_y_partition) # T(N/2)
p1_right, p2_right, dist_right = _search_closest_pair_2d(right_x_partition, right_y_partition) # T(N/2)
La complejidad de la etapa Vencer es  $2T(N/2)$ 
```

Parte Combinar: Para el caso de 2-Dimensiones, es estrictamente necesario manejar una franja o banda el cual tiene por origen el valor de X del punto `mid_point`. Esta franja tiene por ancho `2*best_dist` y es simétrica a `mid_point[0]`.

```
mid_point = x_sorted_points[middle]
...
in_band = [point for point in y_sorted_points if best_dist > (point[0] - mid_point[0])**2]
for i in range(len(in_band)):
    for j in range(i+1, min(i+7, len(in_band))): # O(1)
        d = get_square_distance(in_band[i], in_band[j])
        if d < best_dist:
            best_p1, best_p2, best_dist = in_band[i], in_band[j], d
```

Pese a que tiene 2 ciclos for anidados, el segundo está limitado a iterar como máximo 7 veces, esto debido a que se ha probado en [4] que geométricamente no pueden existir más de 7 puntos dentro del rectángulo de interés de dimensiones $2\delta \times \delta$ que cumplan con la restricción de separación mínima. Dado que los puntos en cada partición (izquierda y derecha) ya respetan una distancia mutua de al menos δ . En consecuencia, el bucle interno opera en tiempo constante $O(1)$, garantizando que la fase de combinación sea lineal ($O(N)$).

Por ende, la ecuación recurrencia del algoritmo es:

$$T(N) = 2 \cdot T(N/2) + O(N)$$

Con $a = b = 2$ y $c = k = 1$, partiendo de la ecuación $a \cdot T(n/b) + c \cdot n^k$, y cumpliendo que $a = b^k$ se tiene como solución en complejidad temporal $O(N \log N)$.

```
In [17]: def _search_closest_pair_2d(x_sorted_points: PointsListType, y_sorted_points: PointsListType) -> Tuple[PointType, P
    """
    Este método de manera recursiva busca el par de puntos más cercanos entre
    sí. La estrategia empleada es Divide y Vencerás.

    Complejidad temporal O(N logN)
    :param x_sorted_points: Lista de puntos previamente ordenados por el eje X
    :param y_sorted_points: Lista de puntos previamente ordenados por el eje Y
    :return: Tupla, par de puntos más cercanos entre sí y la distancia que a
            estos separa
    """
    n = len(x_sorted_points)
    if n <= 3: # Base case
        points, best_dist = _search_closest_pair_brute_force(x_sorted_points, distance_func=get_square_distance)
        return points[0], points[1], best_dist

    middle = n >> 1
    mid_point = x_sorted_points[middle]
    left_x_partition = x_sorted_points[: middle]
    right_x_partition = x_sorted_points[middle:]
    left_y_partition, right_y_partition = [], []
    left_set = set(left_x_partition)
    for point in y_sorted_points:
        (left_y_partition if point in left_set else right_y_partition).append(point)

    p1_left, p2_left, dist_left = _search_closest_pair_2d(left_x_partition, left_y_partition)
    p1_right, p2_right, dist_right = _search_closest_pair_2d(right_x_partition, right_y_partition)

    if dist_left < dist_right:
        best_p1, best_p2, best_dist = p1_left, p2_left, dist_left
    else:
        best_p1, best_p2, best_dist = p1_right, p2_right, dist_right

    # Dado que se omite el cálculo de raíces cuadradas,
    # la comparación mid_point[0]-sqrt(dist) < point[0] < mid_point[0]+sqrt(dist) se puede
    # reescribir como dist > (point[0] - mid_point[0])**2
    in_band = [point for point in y_sorted_points if best_dist > (point[0] - mid_point[0])**2]

    for i in range(len(in_band)):
        for j in range(i+1, min(i+7, len(in_band))):
            d = get_square_distance(in_band[i], in_band[j])
            if d < best_dist:
                best_p1, best_p2, best_dist = in_band[i], in_band[j], d

    return best_p1, best_p2, best_dist

@measure_time
def search_closest_pair_2d_divide_and_conquer(points: PointsListType) -> ResultType:
    x_sorted_points = sorted(points, key=lambda point: point[0])
    y_sorted_points = sorted(points, key=lambda point: point[1])
    p1, p2, dist = _search_closest_pair_2d(x_sorted_points, y_sorted_points)
    return p1, p2

solution = tuple(sorted(search_closest_pair_2d_divide_and_conquer(random_points_2d)))
print(solution)
assert solution in all_nearest_points
```

Tiempo de ejecución: 0.014531754997733515 seg
 $((287419, 189420), (288488, 189046))$

Caso 3: Puntos en tres dimensiones (3D)

```
In [18]: random_points_3d = random_list_generator(stop = 1_000_000, n=1_000, dim=3)
all_nearest_points = search_all_closest_pair_brute_force(random_points_3d)
print(f"Posibles soluciones: {all_nearest_points}")
```

Posibles soluciones: $[((486579, 333488, 800805), (490811, 332552, 802721))]$

Fuerza Bruta

Este caso es similar al de 1D y 2D, al final se busca comparar todos contra todos, por cada elemento del arreglo, se compara con los $(N - k)$ elementos restantes, donde k es el k -ésimo termino o número del arreglo.

Por ende, la complejidad temporal es Cuadrática $O(N^2)$ también.

```
In [19]: solution = tuple(sorted(search_closest_pair_brute_force(random_points_3d, distance_func=get_square_distance)))
print(solution)
assert solution in all_nearest_points
```

Tiempo de ejecucion: 0.4022612990011112 seg
 $((486579, 333488, 800805), (490811, 332552, 802721))$

Divide y vencerás

Para aplicar esta estrategia, es necesario tener la lista de puntos ordenados de manera ascendente tanto para X , para Y y para Z . (Complejidad $O(N \log n)$)

Parte Dividir. En esta variante ahora se crean seis particiones de igual longitud a partir de los arreglos de entrada ordenados por el eje X e Y , se dividen dichos arreglos en dos partes de la forma:

```
middle = n >> 1
...
left_x_partition = x_sorted_points[:middle]
right_x_partition = x_sorted_points[middle:]
left_y_partition, right_y_partition = [], []
left_z_partition, right_z_partition = [], []
left_set = set(left_x_partition)
for p in y_sorted_points:
    (left_y_partition if p in left_set else right_y_partition).append(p)
for p in z_sorted_points:
    (left_z_partition if p in left_set else right_z_partition).append(p)
```

La complejidad temporal de la parte del dividir es $O(N)$.

Parte Vencer. Se itera recursivamente por cada par de particiones, que esto a su vez vuelve a dividir en 2 subparticiones, así hasta llegar el caso base que es 3 puntos.

```
p1_left, p2_left, dist_left = _search_closest_pair_3d(left_x_partition, left_y_partition,
left_z_partition) # T(N/2)
p1_right, p2_right, dist_right = _search_closest_pair_3d(right_x_partition, right_y_partition,
right_z_partition) # T(N/2)
La complejidad de la etapa Vencer es  $2T(N/2)$ 
```

Parte Combinar. Para el caso de 3-Dimensiones, (a diferencia del caso de 2-Dimensiones) es estrictamente necesario manejar una losa (o un prisma de ancho 2δ) la cual tiene por origen el valor de X del punto `mid_point`. Esta losa es simétrica a `mid_point[0]`.

```
mid_point = x_sorted_points[middle]
...
slab_y = [p for p in y_sorted_points if (p[0] - mid_point[0])**2 < best_dist]
size_slab = len(slab_y)
for i in range(size_slab):
    for j in range(i + 1, min(i + 16, size_slab)): # O(1)
        p_i = slab_y[i]
        p_j = slab_y[j]
        if (p_j[1] - p_i[1])**2 >= best_dist:
            break
        if (p_j[2] - p_i[2])**2 >= best_dist:
            continue
        d_sq = get_square_distance(p_i, p_j)
        if d_sq < best_dist:
            best_dist = d_sq
            best_p1, best_p2 = p_i, p_j
```

El segundo `for` anidado solo itera hasta máximo 16 veces, lo que se puede afirmar que es de complejidad $O(1)$, La etapa completa de combinación es de complejidad $O(N)$

Por ende, la ecuación recurrencia del algoritmo es:

$$T(N) = 2 \cdot T(N/2) + O(N)$$

Con $a = b = 2$ y $c = k = 1$, partiendo de la ecuación $a \cdot T(n/b) + c \cdot n^k$, y cumpliendo que $a = b^k$ se tiene como solución en complejidad temporal $O(N \log N)$.

```
In [20]: def _search_closest_pair_3d(x_sorted_points: PointsListType, y_sorted_points: PointsListType, z_sorted_points: PointsListType):
    """
    Este método de manera recursiva busca el par de puntos más cercanos entre sí. La estrategia empleada es Divide y Vencerás.

    Complejidad temporal O(N log N)
    :param x_sorted_points: Lista de puntos previamente ordenados por el eje X
    :param y_sorted_points: Lista de puntos previamente ordenados por el eje Y
```

```

:param z_sorted_points: Lista de puntos previamente ordenados por el eje Z
:return: Tupla, par de puntos más cercanos entre sí y la distancia que a
        estos separa
"""
n = len(x_sorted_points)
if n <= 3:
    points, dist = _search_closest_pair_brute_force(x_sorted_points, distance_func=get_square_distance)
    return points[0], points[1], dist
middle = n >> 1
mid_point = x_sorted_points[middle]
left_x_partition = x_sorted_points[:middle]
right_x_partition = x_sorted_points[middle:]
left_y_partition, right_y_partition = [], []
left_z_partition, right_z_partition = [], []

left_set = set(left_x_partition)
for p in y_sorted_points:
    (left_y_partition if p in left_set else right_y_partition).append(p)
for p in z_sorted_points:
    (left_z_partition if p in left_set else right_z_partition).append(p)

p1_left, p2_left, dist_left = _search_closest_pair_3d(left_x_partition, left_y_partition, left_z_partition)
p1_right, p2_right, dist_right = _search_closest_pair_3d(right_x_partition, right_y_partition, right_z_partition)

if dist_left < dist_right:
    best_p1, best_p2, best_dist = p1_left, p2_left, dist_left
else:
    best_p1, best_p2, best_dist = p1_right, p2_right, dist_right

# Dado que se omite el cálculo de raíces cuadradas,
# la comparación abs(p[0] - mid_point[0]) < best_dist se puede
# reescribir como (p[0] - mid_point[0])**2 < best_dist
# El criterio cambia, en vez de ser una franja, ahora es una losa, un
# bloque volumétrico o prisma
slab_y = [p for p in y_sorted_points if (p[0] - mid_point[0])**2 < best_dist]

# lógica de losa **Créditos a Gemini**
size_slab = len(slab_y)
for i in range(size_slab):
    for j in range(i + 1, min(i + 16, size_slab)):
        p_i = slab_y[i]
        p_j = slab_y[j]
        if (p_j[1] - p_i[1])**2 >= best_dist:
            break
        if (p_j[2] - p_i[2])**2 >= best_dist:
            continue
        d_sq = get_square_distance(p_i, p_j)
        if d_sq < best_dist:
            best_dist = d_sq
            best_p1, best_p2 = p_i, p_j
return best_p1, best_p2, best_dist

@measure_time
def search_closest_pair_3d_divide_and_conquer(points: PointsListType) -> ResultType:
    x_sorted_points = sorted(points, key=lambda point: point[0])
    y_sorted_points = sorted(points, key=lambda point: point[1])
    z_sorted_points = sorted(points, key=lambda point: point[2])
    p1, p2, dist = _search_closest_pair_3d(x_sorted_points, y_sorted_points, z_sorted_points)
    return p1, p2

solution = tuple(sorted(search_closest_pair_3d_divide_and_conquer(random_points_3d)))
print(solution)
assert solution in all_nearest_points

```

Tiempo de ejecucion: 0.012943371002620552 seg
 ((486579, 333488, 800805), (490811, 332552, 802721))

Nota sobre el uso de herramientas de IA generativa

En la elaboración de este notebook se emplearon herramientas de inteligencia artificial generativa de forma puntual y como apoyo complementario, con los siguientes fines específicos:

1. Formateo de secciones del documento mediante HTML, con el objetivo de mejorar la coherencia estructural y la presentación visual del contenido.
2. Síntesis y clarificación de conceptos complejos, incluyendo el análisis de complejidad computacional (Big O Notation), utilizadas como apoyo conceptual para que el autor pudiera posteriormente replicar e implementar las soluciones por cuenta propia.
3. Ampliación contextual de la información, a partir de sugerencias basadas en fuentes externas como artículos académicos, páginas web y material audiovisual, las cuales fueron revisadas y contrastadas.
4. Sugerencia de código para la etapa de combinación del algoritmo de búsqueda del par de puntos más cercanos en tres dimensiones.
5. Propuesta de pseudocódigo para el algoritmo de búsqueda del par de puntos más cercanos en dos dimensiones, utilizada como guía conceptual para su posterior implementación en Python.

El resto del contenido del documento: la redacción, el desarrollo principal del código, el diseño metodológico y la interpretación de los resultados es de autoría propia o se basa en material proporcionado en clase y en recursos disponibles públicamente, los cuales han sido reinterpretados, adaptados y reelaborados para los fines de este trabajo.

Referencias Bibliográficas

- [1] ["Anónimo", "Hanoi Towers" Imgur, Octubre 2017. \[Imagen en línea\]](#).
- [2] [STEM Little Explorers, "Make and Solve Tower of Hanoi" STEM Little Explorers. \[Imagen en línea\]](#).
- [3] D. E. Knuth, The Art of Computer Programming, Volume 4A: Combinatorial Algorithms, Part 1. Upper Saddle River, NJ, USA: Addison-Wesley Professional, 2011, sec. 7.2.2, p. 31.
- [4] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, "Computational Geometry," en Introduction to Algorithms, 2nd ed. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2001, ch. 33, pp. 957–966.
- [5] [Inside code, "How to find the closest pair of points in O\(nlogn\)?," YouTube, 24 de julio de 2021. \[Video\]](#).
- [6] ["Finding the nearest pair of points," CP-Algorithms, 7 de octubre de 2025. \[En línea\]](#)
- [7] [Steven, "Respuesta a 'Closest pair of points in 3D'," Computer Science Stack Exchange, 8 de noviembre de 2022. \[En línea\]](#).
- [8] [C. Kingsford, "Finding Closest Pair of Points," Carnegie Mellon University, Dept. of Computer Science. \[Diapositivas\]](#).