

Lista de Exercícios referente ao Cap. 2 do livro do Bishop

Exercícios do livro texto:

- 01) 2.1
- 02) 2.2
- 03) 2.8 (fazer apenas a eq. (2.270), que é um resultado bem útil conhecido como Regra da Torre)
- 04) 2.12
- 05) 2.13
- 06) 2.15
- 07) 2.20

Dica para o exercício 2.13: Após montar a expressão geral da divergência KL para $p(x)$ e $q(x)$, verifique o que acontece nos seguintes casos particulares:

- (a) ambas as pdfs têm mesma média e matriz de covariância (isto é, $p(x) = q(x)$; caso em que já sabemos quanto a divergência KL deve resultar);
- (b) ambas as pdfs têm a mesma média, isto é, $\mathbf{m} = \mathbf{\mu}$.

Exercícios Extra:

E1) (*Inferência Bayesiana sequencial*) Motivado pela Figura 2.3 do livro, reproduza o experimento da jogada de moeda considerando que foram realizadas 5 jogadas e que a probabilidade de se obter cara é dada por ' $\mu = 0,7$ '. Plote a distribuição a priori e todas as 5 distribuições a posteriori geradas ao longo do processo iterativo. Considere que a distribuição a priori é uma Beta com parâmetros ' a ' e ' b ' escolhidos da seguinte forma:

1º caso: $a = b = 1$

2º caso: $a = b = 2$

Compare os resultados obtidos nos 2 casos.

OBS: Para uma comparação justa entre os 2 casos, primeiro gere os 5 dados (saídas do experimento da moeda, amostrados da Bernoulli definida no enunciado) e depois aplique o aprendizado sequencial para os 2 casos (i.e., para ambas as priors) usando exatamente os mesmos dados gerados.

E2) (*Verificação experimental do Teorema Central do Limite*) Considere a **média** de N variáveis aleatórias iid. Plote o histograma dessa média considerando que as N variáveis aleatórias têm a seguinte pdf:

1º caso: Uniforme(0,1) – uniforme no intervalo 0 a 1;

2º caso: Bernoulli – escolha o valor do parâmetro como quiser;

Note que, para N suficientemente grande, a distribuição da média converge para uma Gaussiana.

OBS: Usei **média** ao invés de **soma** para facilitar a geração do histograma (o eixo horizontal vai ficar fixo, facilitando a comparação para diferentes valores de N, igual na Figura 2.6 do livro).

E3) (*Verificação experimental da Law of Large Numbers – LLN*) Considere N variáveis aleatórias independentes geradas a partir de uma distribuição normal padrão (isto é, Gaussiana de média 0 e variância 1). Compute o estimador média amostral. Repita o experimento diversas vezes e plote o histograma desse estimador para um dado valor de N. Mostre que, conforme N aumenta, o histograma desse estimador fica cada vez mais estreito em torno do valor correto (i.e., variância vai diminuindo), que é zero.

E4) (*Estimação de pdf*) Tente replicar os resultados exibidos nas figuras 2.24 e 2.25 do livro. Para isso, gere uma amostra de N=50 dados cuja distribuição é dada pela curva em verde (corresponde a uma mistura de 2 gaussianas – veja equação (2.188) e escolha os parâmetros dessa distribuição da forma que quiser). Estime a pdf do modelo gerador dos dados utilizando 2 métodos: histograma e kernel Gaussiano. Para o parâmetro h, utilize os mesmos valores das figuras.

E5) (*Classificador K-NN*) Considere 2 classes, C1 e C2, que correspondem aos seguintes modelos geradores:

C1: pdf Gaussiana de média -1 e variância 1

C2: pdf Gaussiana de média 1 e variância 1

Gere 10 observações de cada uma dessas classes e assuma que você sabe exatamente a classe de cada um dos 20 pontos gerados (10 pontos para cada classe).

Em seguida, gere mais 2 observações de cada classe e assuma que você NAO sabe de qual classe esses novos dados pertencem.

Utilize a técnica de K-NN, considerando diferentes valores de K, para classificar os 4 novos dados.

OBS: Plote os resultados utilizando cores e símbolos para facilitar a interpretação. Por exemplo:

Para os 20 pontos conhecidos, represente-os usando 'bolinhas' vermelhas para C1 e azuis para C2. Para os 4 pontos a serem classificados, mantenha o código de cores (para sabermos identificar qual era a classe correta) e use novos símbolos para identificar se a classificação foi correta (use um 'quadrado') ou se a classificação foi errada (neste caso, use um 'x').

Se for usar outros símbolos e cores, não tem problema. Só não esqueça de fazer uma legenda ou caption que me permita compreender a figura.