

Estrategia de Diseño: Vuelta Atrás con Poda (Branch-and-Bound) aplicada al problema del MST robusto con ruta p–q

Se analiza la estrategia de *vuelta atrás con poda* (Branch-and-Bound, B&B) para resolver un problema sobre un grafo no dirigido con pesos por intervalo en cada arista, presencia de estados (cerrada, con grietas, normal) y el requisito adicional de obtener un Árbol Generador Mínimo (MST) que asegure un camino válido entre dos puntos de interés p y q. El criterio de evaluación es robusto ante incertidumbre (p.ej., costo pesimista con Σw_{\max} o minimax-regret).

Ventajas

- Permite soluciones óptimas bajo el criterio robusto elegido, al explorar sistemáticamente el espacio de árboles generadores.
- Integra restricciones específicas del dominio: exclusión de aristas cerradas, cupo de grietas o penalización por grietas, y exigencia de conectividad p–q.
- Poda efectiva con cotas inferiores/ superiores: p.ej., costo parcial con w_{\max} + MST de componentes con w_{\min} , y verificación de posibilidad de conectar p–q en el residual.
- Escalable en la práctica para grafos medianos si se agrega un subgrafo candidato (unión de MST con w_{\min} , w_{mid} , w_{\max} y pesos penalizados).

Desventajas

- Complejidad exponencial en el peor caso; requiere buenas cotas y orden de ramificación.
- La calidad de la poda depende de heurísticas (ordenar aristas por w_{\min}/w_{\max} , priorizar cortes críticos, etc.).
- Si el grafo es muy denso/grande, puede requerir una fase previa de reducción (subgrafo candidato) para ser viable en tiempo.

Razones de aplicabilidad al problema

- El problema combina un objetivo combinatorio (MST) con restricciones adicionales (ruta p–q válida y tratamiento de aristas con estados), lo cual se ajusta bien al marco de B&B, que permite incorporar restricciones durante la construcción del árbol (evitar ciclos con Union-Find, controlar grietas, forzar conectividad p–q) y usar cotas para podar ramas infactibles o no competitivas.
- La incertidumbre por intervalos se maneja naturalmente: se evalúan soluciones con costo robusto (p.ej., Σw_{\max}), mientras que para podar se emplea una cota inferior basada en w_{\min} .
- Técnicas estándar de optimización combinatoria (MST de componentes como cota, contracción con DSU, detección de ciclos) se integran de forma directa y con soporte teórico sólido.

Bosquejo del algoritmo (resumen)

Estado: conjunto parcial de aristas elegidas (sin ciclos), componentes (DSU), contador de grietas, mejor costo robusto actual. **Cota inferior:** costo parcial con w_{\max} + MST con w_{\min} sobre el grafo residual contraído por componentes. **Ramas:** incluir/excluir la siguiente arista (ordenada por w_{\min} , w_{\max} y prioridad a no grietas). **Poda:** si la cota \geq mejor, si excede el cupo de grietas, o si ya no es posible conectar p–q en el residual.

Complejidad y buenas prácticas

El peor caso es exponencial; sin embargo, con orden de aristas, subgrafo candidato y cotas fuertes, el rendimiento es competitivo en tamaños medianos. En la práctica, se recomienda: (i) prefiltrar aristas cerradas; (ii) penalizar o acotar grietas; (iii) construir un subgrafo candidato con varias instancias de MST (w_{\min} , w_{mid} , w_{\max} , penalizado) antes de ejecutar B&B.

Referencias (formato IEEE)

- [1] E. L. Lawler, *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*. New York, NY, USA: Holt, Rinehart and Winston, 1976.
- [2] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest y C. Stein, *Introduction to Algorithms*, 3rd ed. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2009, ch. 24, 35 (MST, Branch-and-Bound).
- [3] J. Kleinberg y É. Tardos, *Algorithm Design*. Boston, MA, USA: Pearson, 2005, ch. 4, 7 (Union-Find, greedy MST; fundamentos para cotas).
- [4] R. E. Tarjan, "Efficiency of a good but not linear set union algorithm," *J. ACM*, vol. 22, no. 2, pp. 215–225, 1975.