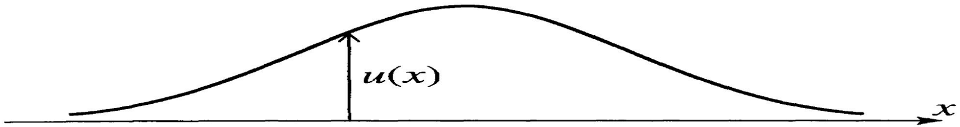
Modelación del Movimiento de Una Cuerda

Proyecto de Laboratorio de Fenómenos Colectivos

Equipo 3: C. Cerritos Lira, J. Gamucero Arana, M. Pérez Anaya, D. Torres Sepulveda
Grupo 8148, Facultad de Ciencias, UNAM



Introducción al Modelo

Tómese una cuerda tensa y uniforme, cuya configuración sea dada por ***u (x,t),*** cuyos valores son pequeños para cada ***t*** y ***x. x*** siendo el desplazamiento vertical de un punto en la cuerda y ***t*** el tiempo.

Tomando en cuenta la ecuación de onda unidimensional, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, con $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, tomamos la solución dada por $u(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$, donde

$\omega = kc$, A, k, constantes, $\lambda = 2\pi/k$ la longitud de onda, $\tau = 2\pi/\omega$, el periodo y $x = n\pi/k$, los nodos en la cuerda.

Condiciones en la Frontera

Conociendo las condiciones iniciales $u(x,0)$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$, para cada ***x*** y tomando las condiciones en los extremos tales que estos sean nodos, ie, $u(0,t)=0, u(L,t)=0$, se obtiene que la función ***u*** es de la forma $u(x,t)=\sin(kx)A\cos(\omega t-\delta)$.

Por lo que ***k*** adquiere los valores dados por $k=k_n=n\frac{\pi}{L}$, para n=1,2,3,... y cuya frecuencias correspondientes son $\omega=\omega_n=n\frac{\pi c}{L}$, para n=1,2,3,...

Estos valores determinan los modos normales de la cuerda.

Objetivos Principales

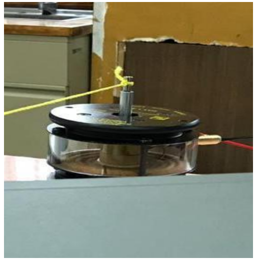
- Modelar el movimiento de una cuerda a partir de múltiples condiciones establecidas
- Determinar experimentalmente los parámetros y relaciones que caracterizan uno de estos modelos

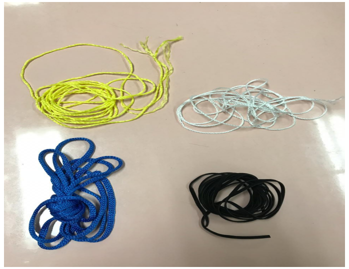
Objetivos Particulares

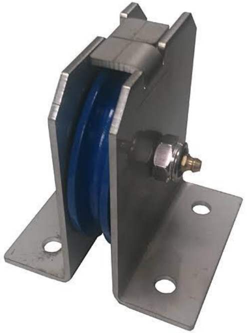
- Obtener una relación entre las siguientes cantidades: la frecuencia del modo normal, el número de modo, la longitud de la cuerda, la tensión a la cual está sujeta la misma y su densidad lineal, para un modelo

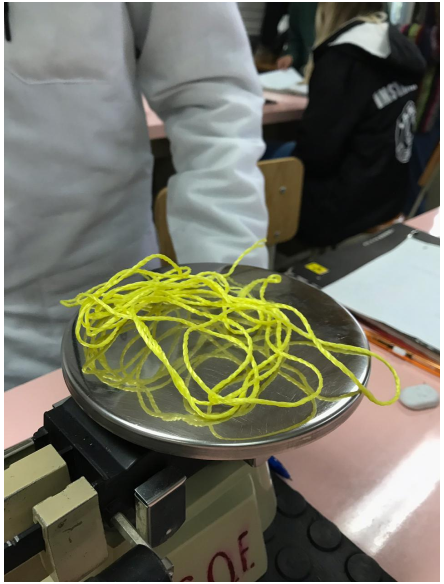
Método Experimental

Materiales.

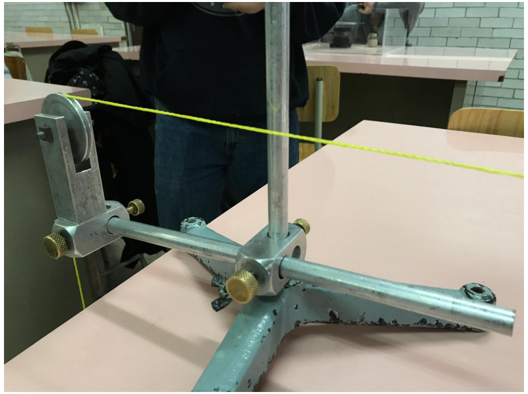








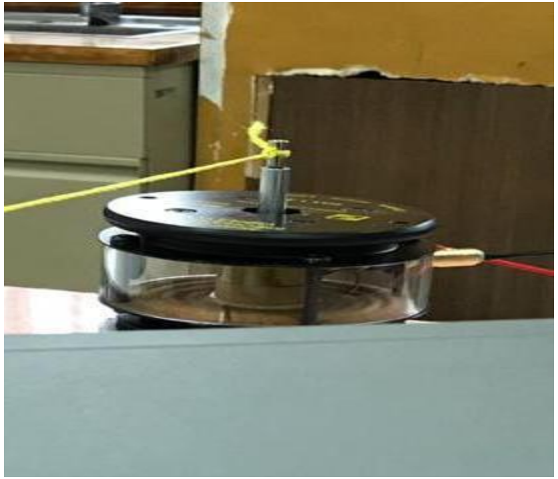
Medición de la masa de las cuerdas.



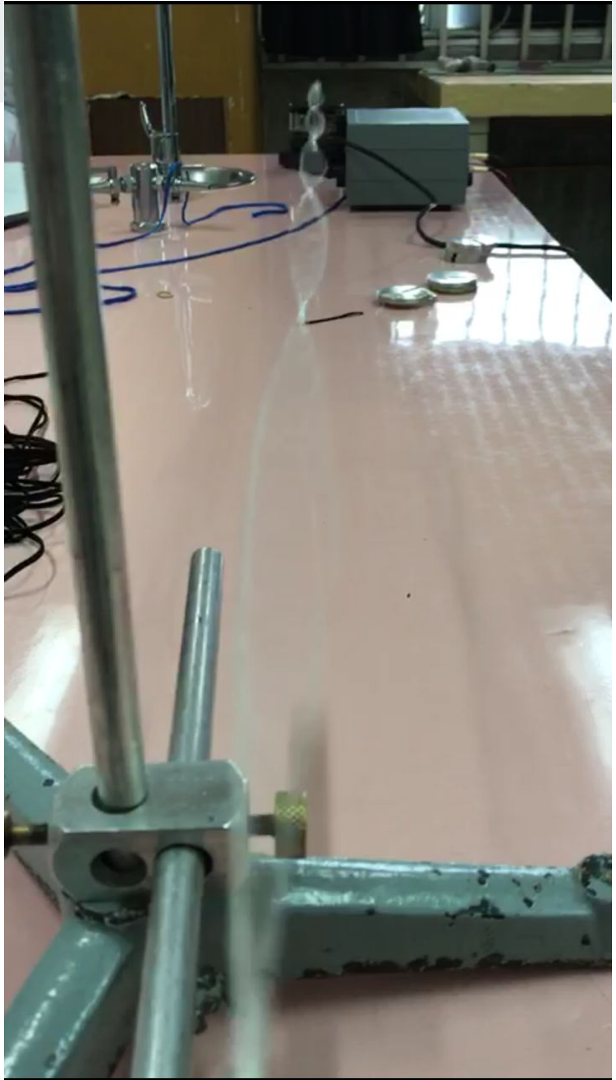
Polea unida al soporte universal através de la cual la cuerda sujetaba las masas.

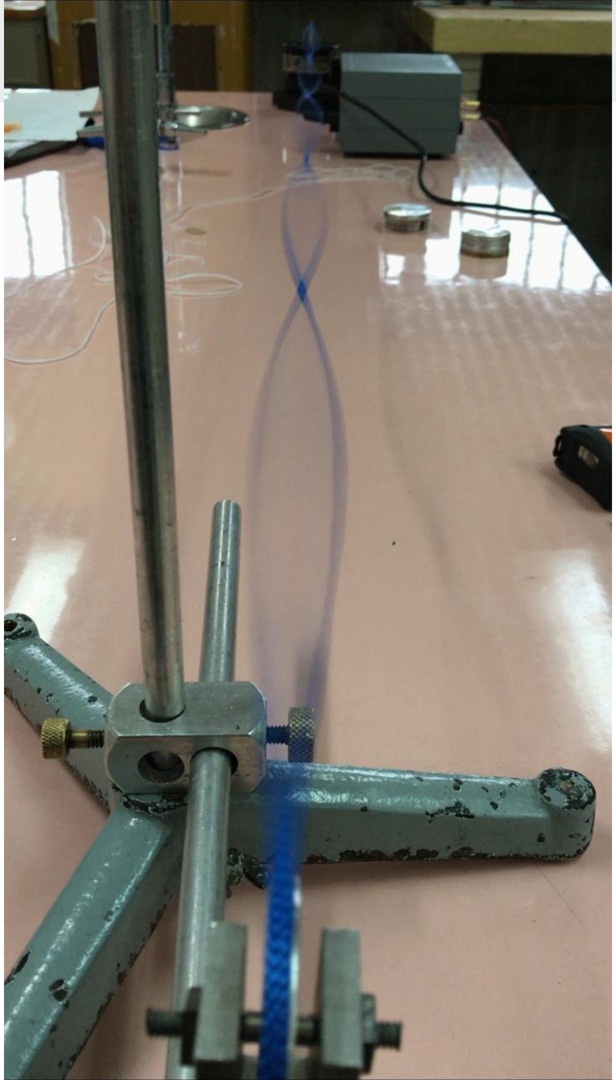
Masas sujetas por la cuerda que pasaba a través de la polea.

Generador de funciones.



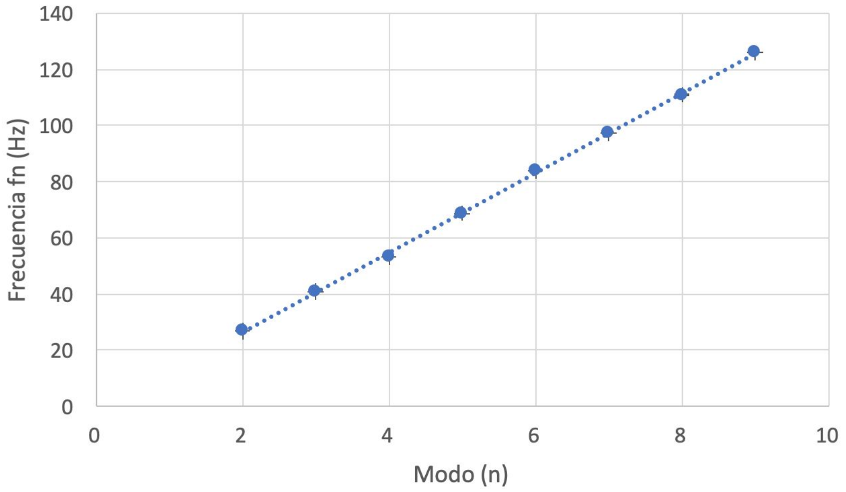
Cuerda unida al vibrador mecánico.





Resultados y Análisis

Relación #1



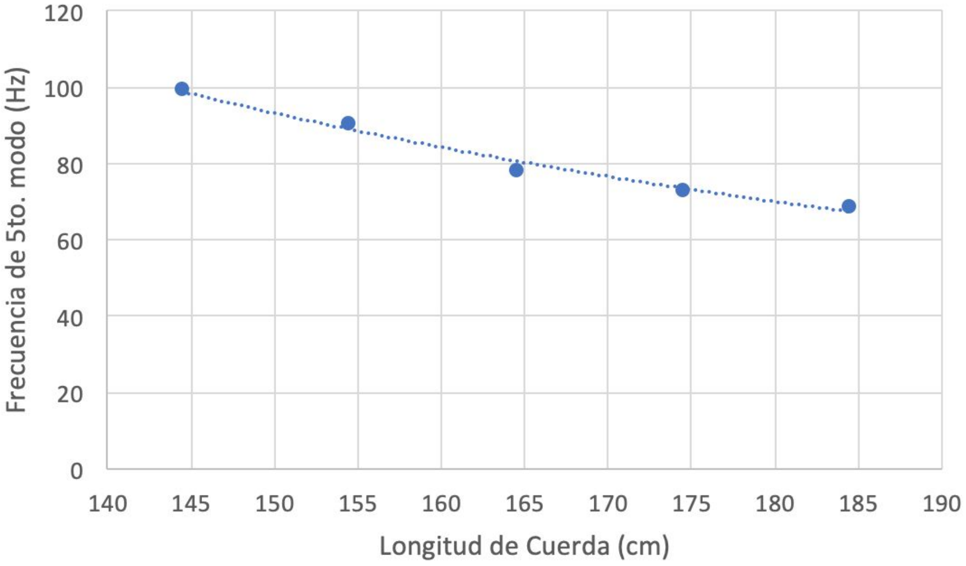
Condiciones:

- Masa Colgada $(348{,}7 \pm 0{,}05)g$
- Densidad Lineal $(0{,}014 \pm 0{,}0002)g/cm$
- Longitud $(242{,}4 \pm 0{,}05)cm$

Interpretación Física

$$f_n = (-2{,}06 \pm 0{,}72) + n(14{,}17 \pm 0{,}12)$$

Relación #2



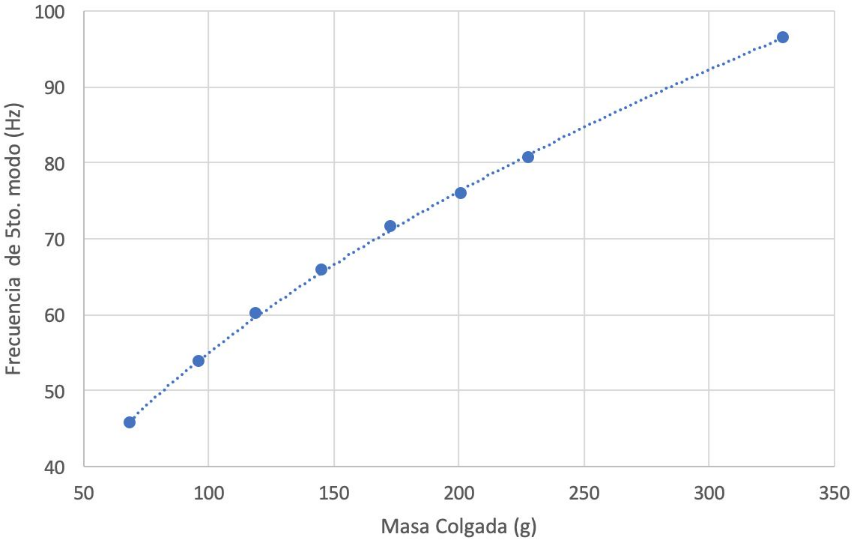
Condiciones:

- Masa Colgada $(348{,}7 \pm 0{,}05)g$
- Densidad Lineal $(0{,}014 \pm 0{,}0002)\, g/cm$
- Modo $n = 5$

Interpretación Física

$$f_5 = (240245 \pm 1{,}24)(L)^{-1{,}568}$$

Relación #3



Condiciones:

Longitud $(242{,}4 \pm 0{,}05)cm$

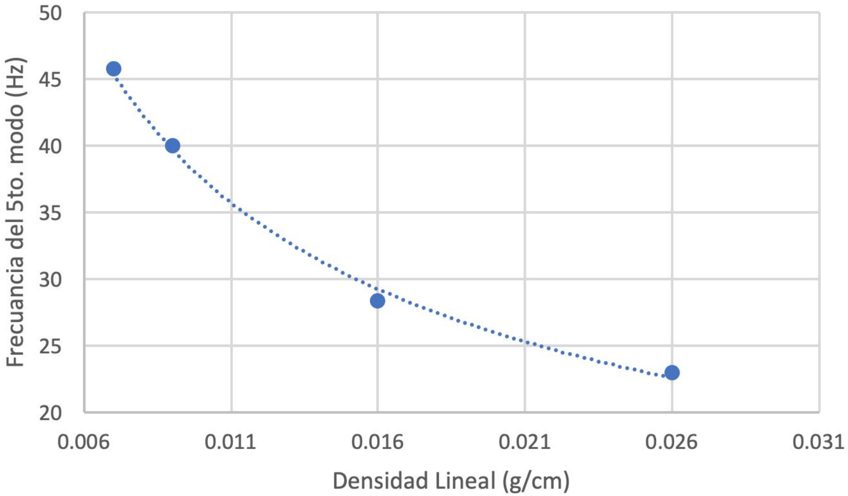
Densidad Lineal $(0{,}014 \pm 0{,}0002)\ g/cm$

Modo $n = 5$

Interpretación Física

$$f_5 = (3{,}2263 \pm 0{,}79)(\mu^{0{,}533})$$

Relación #4



Condiciones:

- Longitud $(242{,}4 \pm 0{,}05)cm$
- Masa Colgada $(348{,}7 \pm 0{,}05)g$
- Modo $n = 5$

Interpretación Física

$$f_5 = (6{,}2855 \pm 0{,}54)(M^{0{,}471})$$

Simulación movimiento de cuerda.

Proponemos que la función que modela el comportamiento de la cuerda satisfaga la ecuación:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = T(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - 2k\frac{\partial^2 u}{\partial t}(x,t) + F(x,t)$$

Obtuvimos la solución a esta ecuación para el caso donde:

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(L,t) = 0$$

$$p(x) = \mu$$

$$T(t) = T$$

$$F(x,t) = g$$

Solución a la ecuación de onda

Suponemos que la solución se puede escribir de la forma:

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t)$$

Con la condición $u(x,0) = v(x)$

Tenemos entonces que se satisface:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) = T(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) - 2k\frac{\partial^2 w}{\partial t}(x,t)$$

Deducimos la solución cuando tenemos una onda estacionaria, esta es:

$$w_n(t) = X_n(t)T_n(t) = sin(\frac{n\pi x}{l})e^{-kt}(\alpha_n cos(\sqrt{c^2\lambda_n - k^2 t}+\beta_n)sin(\sqrt{c^2\lambda_n - k^2 t})$$

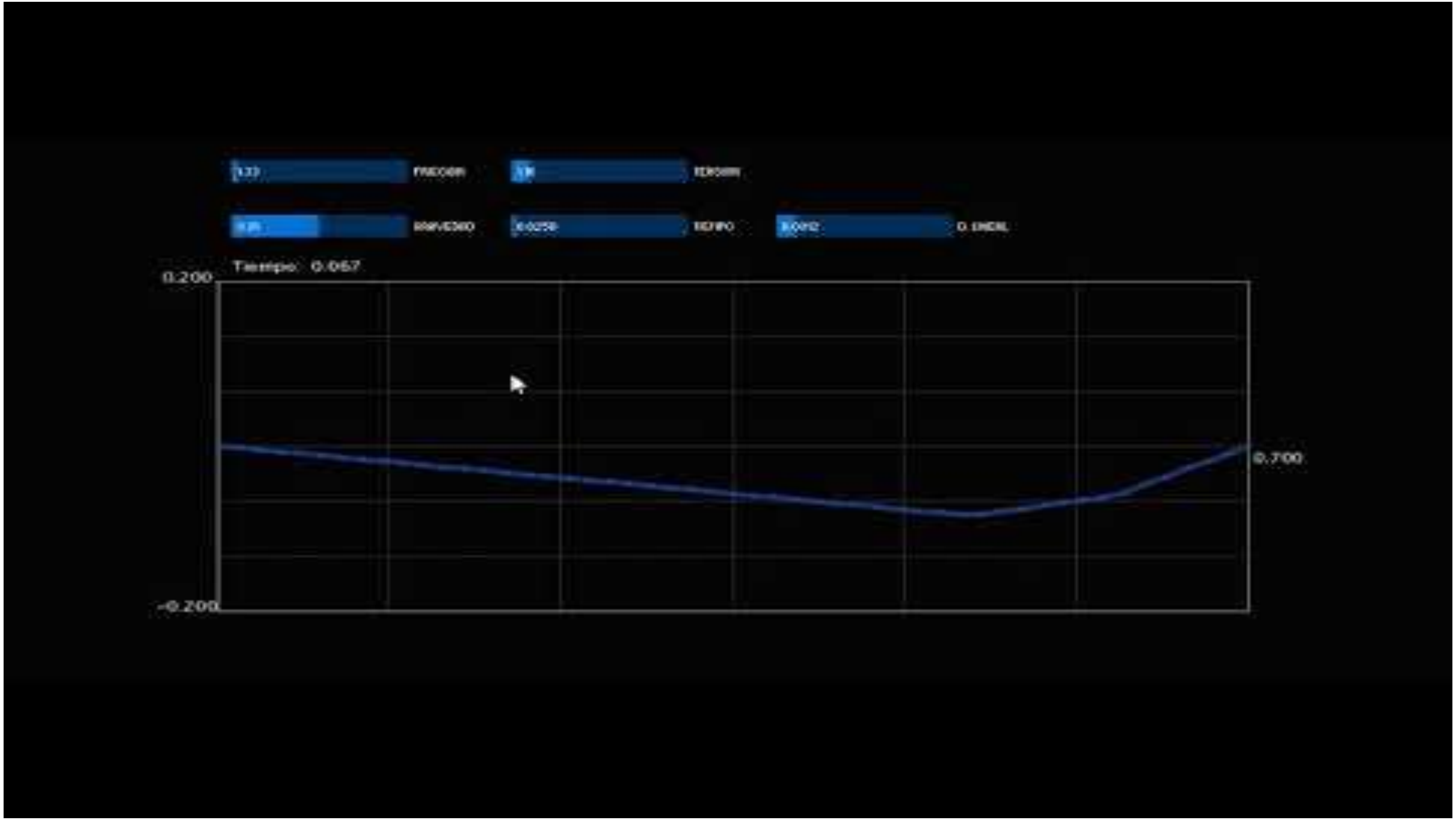
Caso analizado

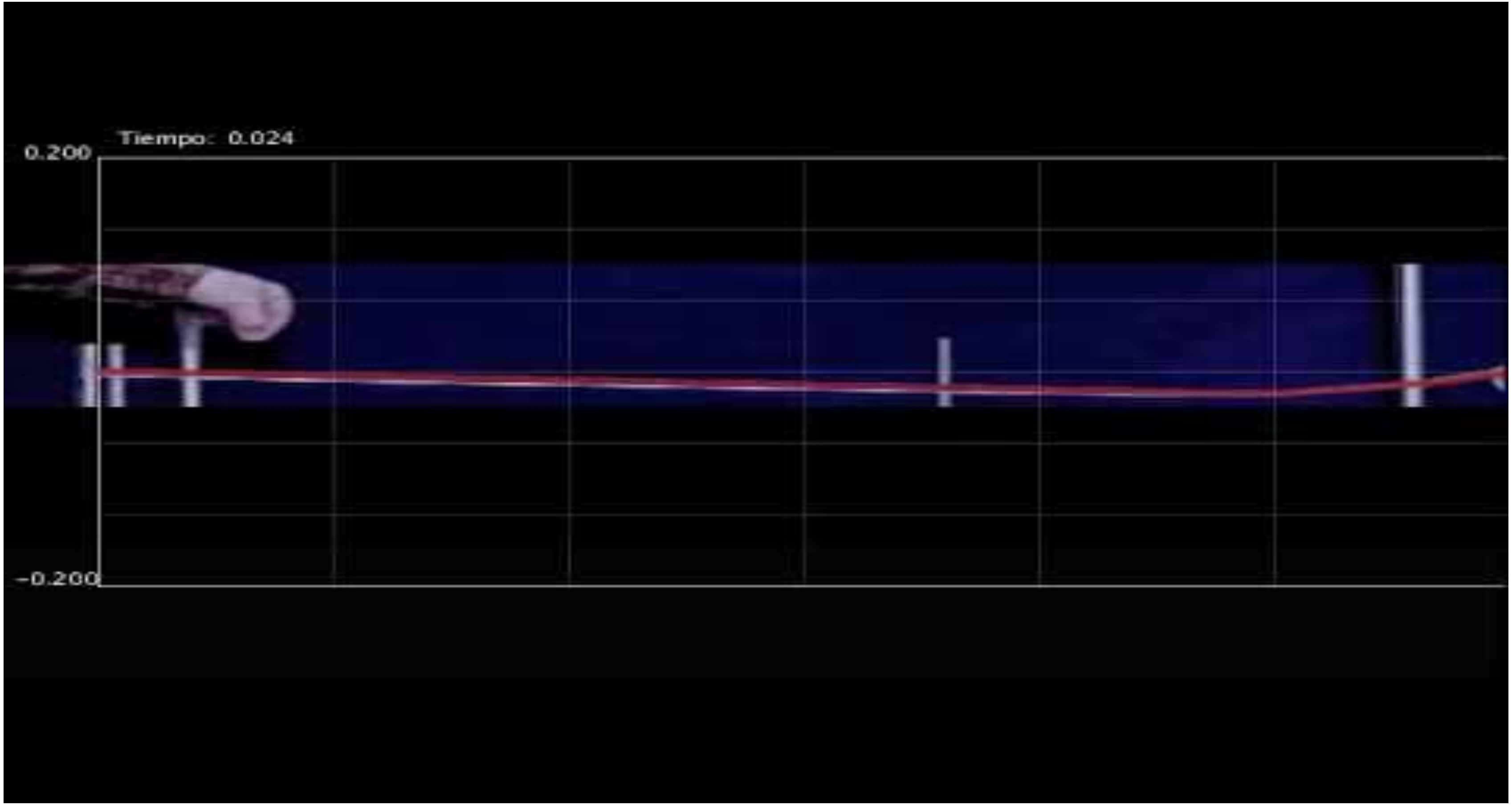
Programaremos el caso en donde:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

$$f(x) = f_i(x) \text{ si } x_i \leq x < x_{i+1} \qquad f_i(x) = m_i(x - x_i) + y_i \qquad m_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Siendo $\{x_1, .., x_n\}$ $\{y_1, .., y_n\}$ la partición proporcionada por el usuario.


Tiempo: 0.067
0.200
-0.200
0.700


Tiempo: 0.024
0.200
-0.200

Conclusión

- La relación entre la frecuencia fundamental y
  - el número de nodos es lineal
  - la masa que se cuelga de la cuerda, es potencial
  - la densidad lineal de la cuerda, es potencial
  - la longitud de la cuerda, es potencial
- Dado un método preciso para determinar los modos normales de una cuerda vibrante, los ajustes por mínimos cuadrados se aproximarían más a las relaciones esperadas.
- El modelo matemático propuesto se aproxima al fenómeno capturado en video.

Bibliografía

[1] John Taylor; *Classical Mechanics*, Editorial Unversity Science Books, España, 2003; secciones 16.1, 16.2,

[2] A. Tipler, Paul, *Física para la ciencia y la tecnología*, sexta edición, volumen 1, Mecánica/Oscilaciones y ondas/Termodinámica, Ed. Reverté, 2012.

[3] D. C. Baird, *Experimentación, una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*, 2^{da} edición, Prentice-Hall, 1991.