Tarea 2 Matemáticas Avanzadas de la Física

Cerritos Lira Carlos

2 de Marzo del 2020

Nota: código utilizado se encuentra en https://github.com/carloscerlira/MAF/blob/master/Tarea_2/code.ipynb

1.-

Usar la transformada de Laplace para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales y estudiar la gráfica de las soluciones.

1. $y'' + 3y' + 2y = -5sin(t) + 5cos(t), \quad y_0 = 5, \quad y_0' = 3$
2. $y'' + y = 5h(t-\pi), \quad y_0 = 2, \quad y_0' = 4$, donde $h(t)$ es la función de Heaviside.
3. $y'' + 2y' + 2y = e^{-t} + 5\delta(t-2), \quad y_0 = 0, \quad y_0' = 1$, donde $\delta(t)$ es la delta de Dirac.
4. $y'' + 8y' + 15y = \begin{cases} 35e^{2t}, & \text{si } 0 < t < 2 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}, \quad y_0 = 3, \quad y_0' = -8$

Caso General

En el caso general se tiene:

$$\begin{aligned}
Ay'' + By' + Cy &= f(t) \\
A(p^2Y - py_0 - y_0') + B(pY - y_0) + CY &= F \\
Y(Ap^2 + Bp + C) - (Ay_0p + Ay_0' + By_0) &= F \\
Y &= \frac{1}{A(p+a)(p+b)}(F + Ay_0p + Ay_0' + By_0) \\
Y &= \frac{1}{A}H(F+G) = \frac{1}{A}(Y_1 + Y_2)
\end{aligned}$$

Resolvamos $Y_1 = HF$
En este caso tenemos $y_1 = f * h$, donde

$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}, \quad a \neq b \\
h(t) &= te^{-at}, \quad a = b
\end{aligned}$$

Resolvamos $Y_2 = HG$.
En este caso tenemos $y_2 = g * h$, donde

$$g(t) = Ay_0\delta'(t) + (Ay_0' + By_0)\delta(t)$$

calculando la convolución obtenemos:

$$\begin{aligned}
g * h &= Ay_0\delta' * h + (Ay_0' + By_0)\delta * h \\
g * h &= Ay_0h' + (Ay_0' + By_0)h
\end{aligned}$$

entonces la solución es $y = \frac{1}{A}(y_1 + y_2)$

1)

Hacemos cuentas para encontrar los parametros del caso general:

$$\begin{aligned} Ap^2 + Bp + C &= p^2 + 3p + 2 \\ &= (p+1)(p+2) \end{aligned}$$

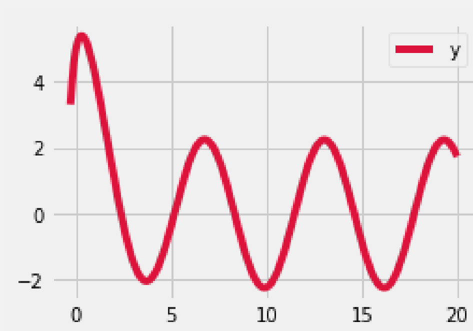
se tiene entonces:

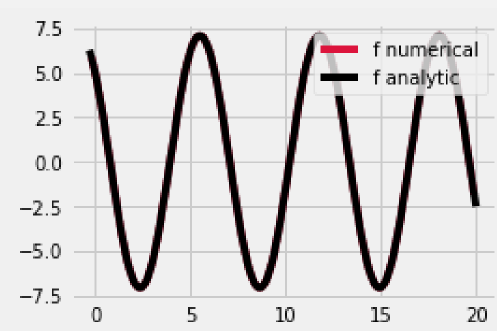
$$\begin{aligned} A, B, C &= 1, 2, 3 \\ a, b &= 1, 2 \\ y_0, y_0' &= 5, 3 \end{aligned}$$

entonces nuestra solución es:

$$y = f * h + g * h$$

resolviendo numéricamente $f * h$ encontramos la gráfica de y:





2)

Hacemos cuentas para encontrar los parametros del caso general:

$$\begin{aligned} Ay^2 + By + C &= y^2 + y \\ &= (y+1)(y+0) \end{aligned}$$

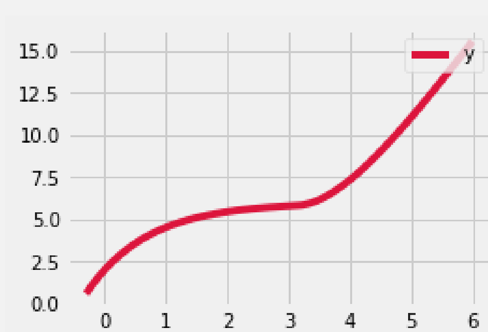
se tiene entonces:

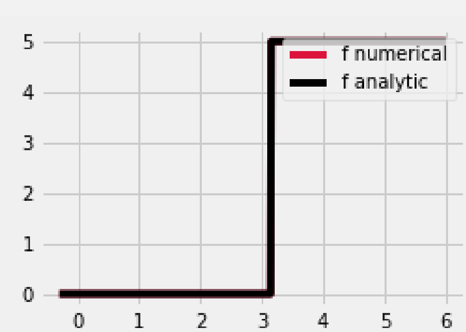
$$\begin{aligned} A, B, C &= 1, 1, 0 \\ a, b &= 1, 0 \\ y_0, y_0' &= 2, 4 \end{aligned}$$

entonces nuestra solución es:

$$y = f * h + g * h$$

resolviendo numéricamente $f * h$ encontramos la gráfica de y:





3)

Hacemos cuentas para encontrar los parametros del caso general:

$$\begin{aligned} Ay^2 + By + C &= y^2 + 2y + 2 \\ &= (y+1+i)(y+1-i) \end{aligned}$$

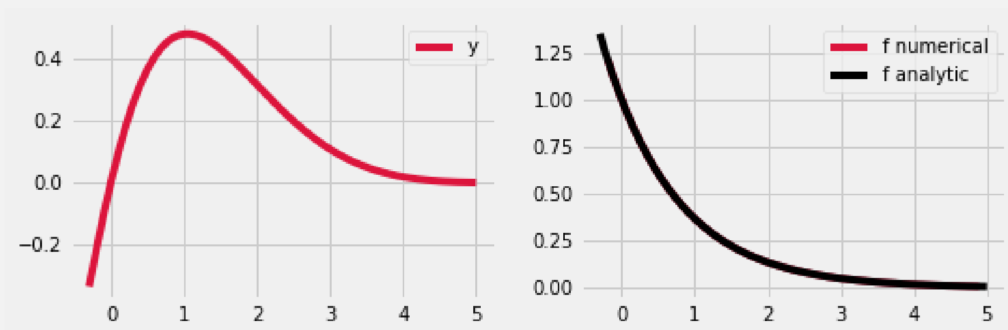
se tiene entonces:

$$\begin{aligned} A, B, C &= 1, 2, 2 \\ a, b &= 1+i, 1-i \\ y_0, y_0' &= 0, 1 \end{aligned}$$

entonces nuestra solución es:

$$y = f * h + g * h$$

resolviendo numéricamente $f * h$ encontramos la gráfica de y:



4)

Hacemos cuentas para encontrar los parametros del caso general:

$$\begin{aligned} Ay^2 + By + C &= y^2 + 8y + 15 \\ &= (y+5)(y+3) \end{aligned}$$

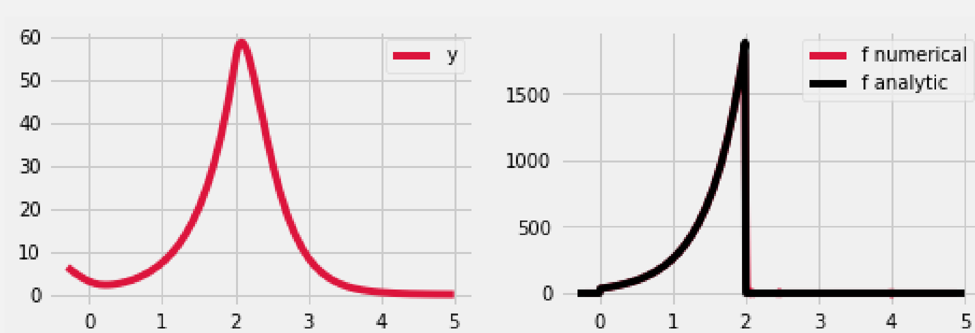
se tiene entonces:

$$\begin{aligned} A, B, C &= 1, 8, 15 \\ a, b &= 5, 3 \\ y_0, y_0' &= 3, -8 \end{aligned}$$

entonces nuestra solución es:

$$y = f * h + g * h$$

resolviendo numéricamente $f * h$ encontramos la gráfica de y:



2.-

Se define el siguiente conjunto de funciones (llamado lorentziano):

$$f_\epsilon(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{t^2+\epsilon^2}, t \in \mathbb{R}, \epsilon \geq > 0.$$

a) Argumentar que $\lim_{\epsilon\to 0^+} f_\epsilon(t) = \delta(t)$, donde $\delta(t)$ es la delta de Dirac.

b) A partir de $f_\epsilon(t)$ obtener un conjunto de funciones que aproximen a la función de Heaviside $h(t)$, a $\delta'(t)$ y a $\delta''(t)$ y estudiar las correspondientes gráficas.

3.-

En los siguientes cuatro 4 apartados, a partir de las soluciones de la ecuación homogénea dadas, obtener una solución particular de la ecuación no homogénea usando funciones de Green.

a) $y'' - y = sech(x)$, con $sinh(x), cosh(x)$ soluciones de la homogénea.

b) $x^2y'' - 2xy' + 2y = xlog(x)$, con x, x^2 soluciones de la homogénea.

c) $y'' - 2cosec^2(x)y = sin^2(x)$, con $cotg(x), 1 - xcotg(x)$ soluciones de la homogénea.

d) $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2+1)^2$, con $x, 1-x^2$ soluciones de la homogénea.

Caso General

En el caso general tenemos la ecuación:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad y(a) = y(b) = 0$$

la solucuión esta dada por:

$$y(x) = \int_a^b G(x,x')f(x')dx'$$

donde G esta definida por:

$$G(x,x') = \begin{cases} A(x')y_1(x), & \text{si } 0 < x < x' < b \\ B(x')y_2(x), & \text{si } a < x' < x < b \end{cases}$$

donde:

$$A = \frac{y_2}{w} \quad B = \frac{y_1}{w}$$
$$w = y_1y_2' - y_1'y_2$$

con y_1, y_2 soluciones de la ecuación homogénea que satisfacen $y_1(a) = y_2(b) = 0$.

Observamos entonces que la solción esta expresada por:

$$y = y_2\int_a^x Bf dx' + y_1\int_x^b Af dx'$$

es importante notar que si y_1, y_2 son soluciones de la ecación homogénea entonces

$$y = y_1 \pm y_2$$

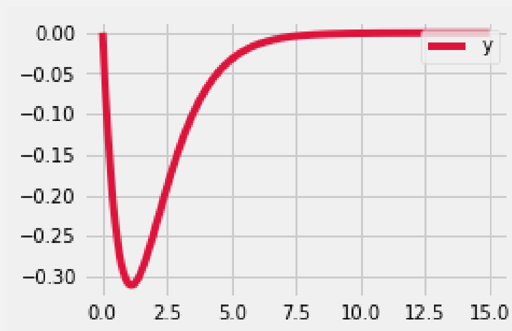
es solución de la ecuación homogénea.

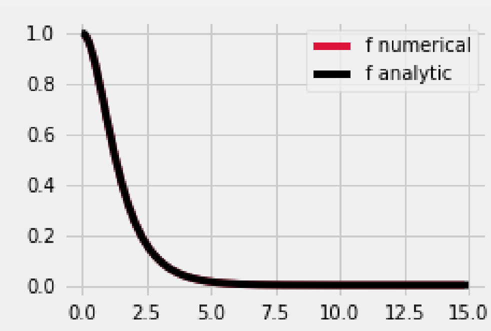
1)

Hacemos cuentas para obtener los parametros del caso general:

$$
\begin{aligned}
&f = sech & & \\
&a = 0 & &b = \frac{1}{2}\pi \\
&p = 0 & &q = -1 \\
&y_1 = sinh & &y_2 = cosh(x-b) - 1 \\
&y_1' = cosh & &y_2' = sinh
\end{aligned}
$$

de donde obtenemos y resolviendo la integral numéricamente:



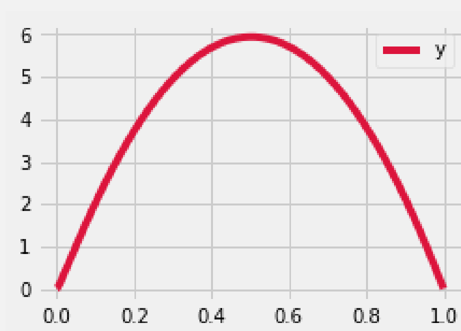


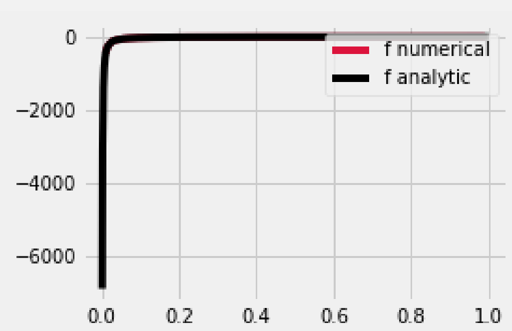
2)

Hacemos cuentas para obtener los parametros del caso general:

$$
\begin{aligned}
&f = \frac{logx}{x} & & \\
&a = 0 & &b = 1 \\
&p = \frac{-2}{x} & &q = \frac{2}{x^2} \\
&y_1 = x^2 & &y_2 = x^2 - x \\
&y_1' = 2x & &y_2' = 2x - 1
\end{aligned}
$$

de donde obtenemos y resolviendo la integral numéricamente:



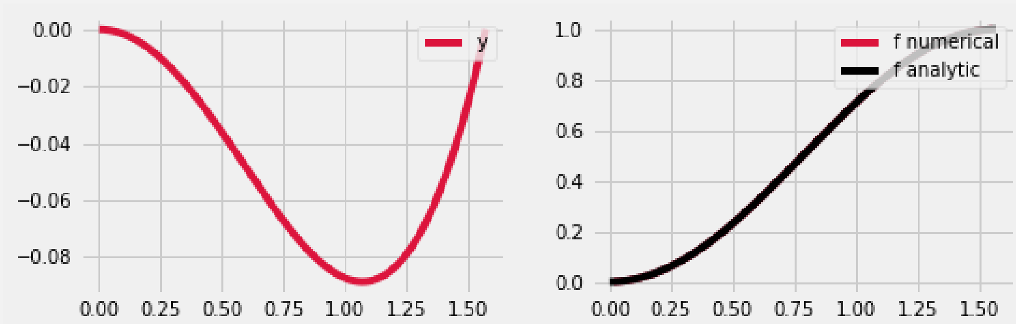


3)

Hacemos cuentas para obtener los parametros del caso general:

$$f = sin^2 x$$
$$a = 0 \qquad b = \frac{1}{2}\pi$$
$$p = 0 \qquad q = -2cscx^2$$
$$y_1 = 1 - xcotx \qquad y_2 = cotx$$
$$y_1' = -cotx + xcsc^2 x \qquad y_2' = -csc^2 x$$

de donde obtenemos y resolviendo la integral numéricamente:

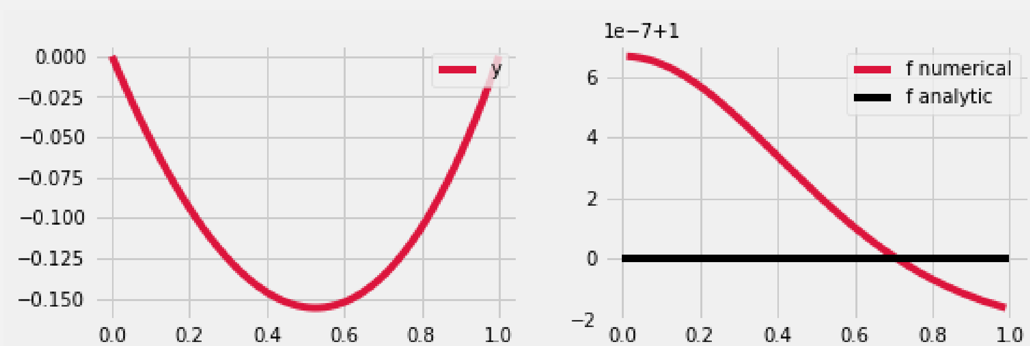


4)

Hacemos cuentas para obtener los parametros del caso general:

$$f = 1$$
$$a = 0 \qquad b = 1$$
$$p = \frac{-2x}{x^2+1} \qquad q = \frac{2}{x^2+1}$$
$$y_1 = x \qquad y_2 = 1 - x^2$$
$$y_1' = 1 \qquad y_2' = -2x$$

de donde obtenemos y resolviendo la integral numéricamente:



4.-

Resolver las siguientes ecuaciones en derivadas parciales con condiciones iniciales usando el método de separación de variables:

a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x, y < c, 0 < z < L\}$ con $u(x,y,z)$ anulándose en todos los lados del parlelepípedo excepto en $z = L$ donde $u(x,y,L) = V$.

b) $-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = Eu$ en $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c\}$ con $u(x, y, z)$ anulándose en todos los lados del paralelepípedo.

Bibliografía

- *Mathematical Methods in the Physical Sciences.* Boas, Mary. Tercera Edición. Lehigh Press. 2006. Cap.