

Tarea 2 Matemáticas Avanzadas de la Física

Cerritos Lira Carlos

2 de Marzo del 2020

Nota: código utilizado se encuentra en https://github.com/carloscerlira/MAF/blob/master/Tarea_2/code.ipynb

1.-

Usar la transformada de Laplace para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales y estudiar la gráfica de las soluciones.

1. $y'' + 3y' + 2y = -5\sin(t) + 5\cos(t)$, $y_0 = 5$, $y'_0 = 3$
2. $y'' + y = 5h(t - \pi)$, $y_0 = 2$, $y'_0 = 4$, donde $h(t)$ es la función de Heaviside.
3. $y'' + 2y' + 2y = e^{-t} + 5\delta(t - 2)$, $y_0 = 0$, $y'_0 = 1$, donde $\delta(t)$ es la delta de Dirac.
4. $y'' + 8y' + 15y = \begin{cases} 35e^{2t}, & \text{si } 0 < t < 2 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$, $y_0 = 3$, $y'_0 = -8$

Caso General

En el caso general se tiene:

$$Ay'' + By' + Cy = f(t)$$

$$A(p^2Y - py_0 - y'_0) + B(pY - y_0) + CY = F$$

$$Y(Ap^2 + Bp + C) - (Ay_0p + Ay'_0 + By_0) = F$$

$$Y = \frac{1}{A(p+a)(p+b)}(F + Ay_0p + Ay'_0 + By_0)$$

$$Y = \frac{1}{A}H(F + G) = \frac{1}{A}(Y_1 + Y_2)$$

Resolvamos $Y_1 = HF$

En este caso tenemos $y_1 = f * h$, donde

$$h(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b - a}, \quad a \neq b$$

$$h(t) = te^{-at}, \quad a = b$$

Resolvamos $Y_2 = HG$.

En este caso tenemos $y_2 = g * h$, donde

$$g(t) = Ay_0\delta'(t) + (Ay'_0 + By_0)\delta(t)$$

calculando la convolución obtenemos:

$$g * h = Ay_0\delta' * h + (Ay'_0 + By_0)\delta * h$$

$$g * h = Ay_0h' + (Ay'_0 + By_0)h$$

entonces la solución es $y = \frac{1}{A}(y_1 + y_2)$

1)

Hacemos cuentas para encontrar los parametros del caso general:

$$\begin{aligned} Ap^2 + Bp + C &= p^2 + 3p + 2 \\ &= (p + 1)(p + 2) \end{aligned}$$

se tiene entonces:

$$A, B, C = 1, 2, 3$$

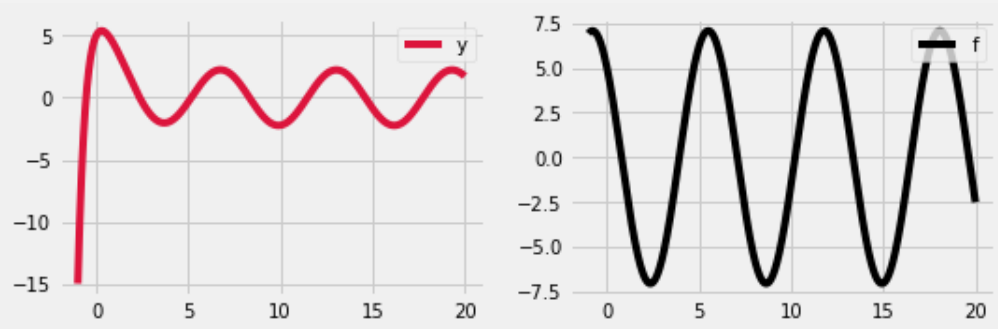
$$a, b = 1, 2$$

$$y_0, y'_0 = 5, 3$$

entonces nuestra solución es:

$$y = f * h + g * h$$

resolviendo numéricamente $f * h$ encontramos la gráfica de y :



2)

Hacemos cuentas para encontrar los parametros del caso general:

$$\begin{aligned} Ay^2 + By + C &= y^2 + y \\ &= (y + 1)(y + 0) \end{aligned}$$

se tiene entonces:

$$A, B, C = 1, 1, 0$$

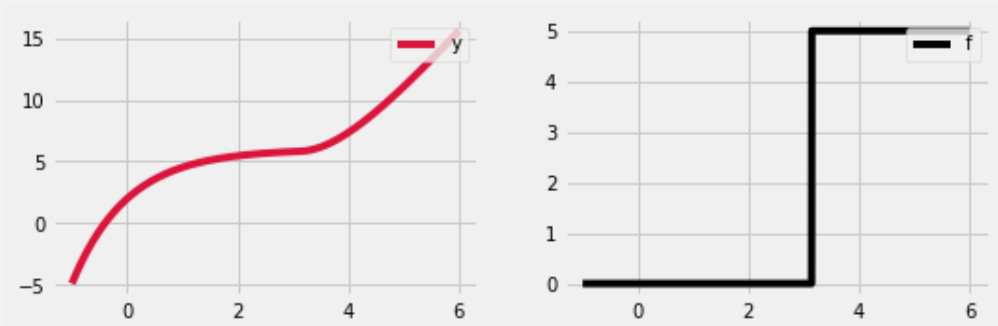
$$a, b = 1, 0$$

$$y_0, y'_0 = 2, 4$$

entonces nuestra solución es:

$$y = f * h + g * h$$

resolviendo numéricamente $f * h$ encontramos la gráfica de y :



3)

Hacemos cuentas para encontrar los parametros del caso general:

$$\begin{aligned} Ay^2 + By + C &= y^2 + 2y + 2 \\ &= (y + 1 + i)(y + 1 - i) \end{aligned}$$

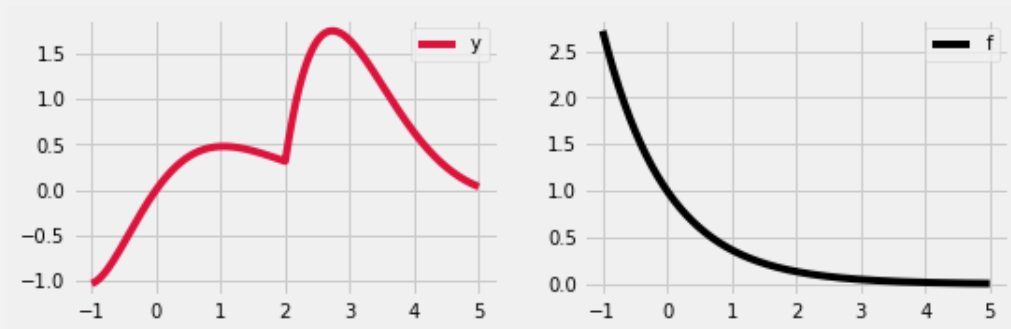
se tiene entonces:

$$\begin{aligned} A, B, C &= 1, 2, 2 \\ a, b &= 1 + i, 1 - i \\ y_0, y'_0 &= 0, 1 \end{aligned}$$

entonces nuestra solución es:

$$y = f * h + g * h$$

resolviendo numéricamente $f * h$ encontramos la gráfica de y :



4)

Hacemos cuentas para encontrar los parametros del caso general:

$$\begin{aligned} Ay^2 + By + C &= y^2 + 8y + 15 \\ &= (y + 5)(y + 3) \end{aligned}$$

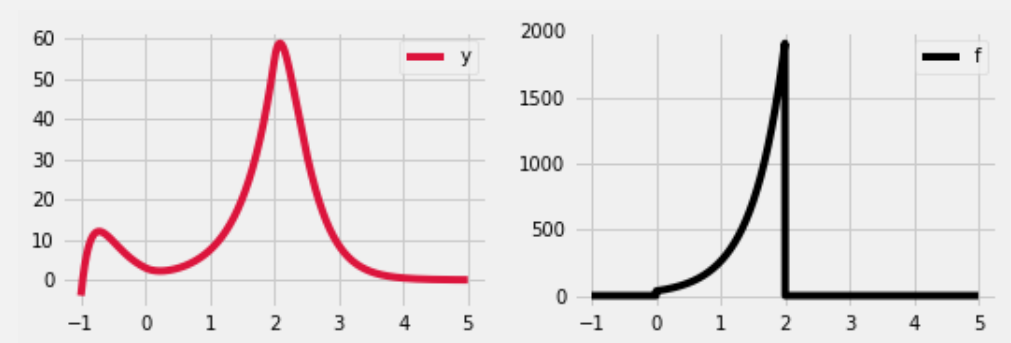
se tiene entonces:

$$\begin{aligned} A, B, C &= 1, 8, 15 \\ a, b &= 5, 3 \\ y_0, y'_0 &= 3, -8 \end{aligned}$$

entonces nuestra solución es:

$$y = f * h + g * h$$

resolviendo numéricamente $f * h$ encontramos la gráfica de y :



2.-

Se define el siguiente conjunto de funciones (llamado lorentziano):

$$f_{\epsilon}(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{t^2 + \epsilon^2}, t \in \mathbb{R}, \epsilon \geq 0.$$

- a) Argumentar que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f_{\epsilon}(t) = \delta(t)$, donde $\delta(t)$ es la delta de Dirac.
 b) A partir de $f_{\epsilon}(t)$ obtener un conjunto de funciones que aproximen a la función de Heaviside $h(t)$, a $\delta'(t)$ y a $\delta''(t)$ y estudiar las correspondientes gráficas.

a)

Nuestro conjunto de funciones debe de satisfacer:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\epsilon} g dt = g(0) \quad \forall g \in S(R)$$

esto sucede si se cumplen las relaciones:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\epsilon} dt &= 1, \quad \forall \epsilon > 0 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f_{\epsilon}(t) &= 0, \quad \forall t \neq 0 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f_{\epsilon}(0) &= \infty \end{aligned}$$

para la primera relación:

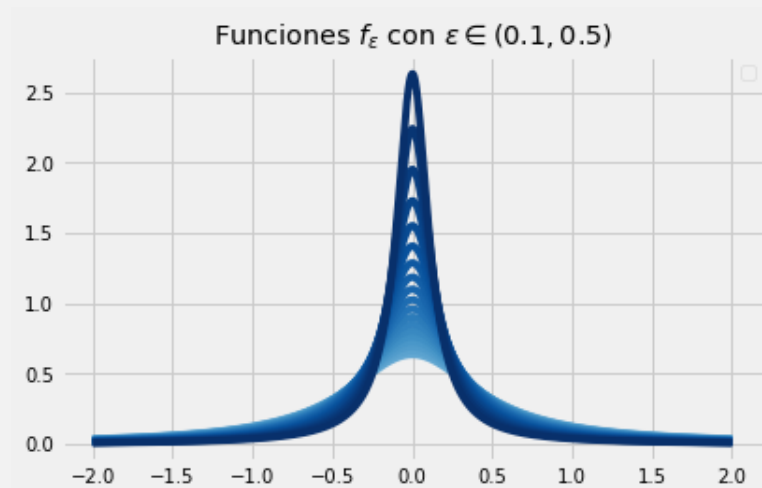
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\epsilon} dt &= \frac{1}{\pi} \arctan \frac{t}{\epsilon} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{1}{\pi} \pi = 1 \end{aligned}$$

para la segunda relación:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f_{\epsilon}(t) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon}{t^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

para la tercer relación:

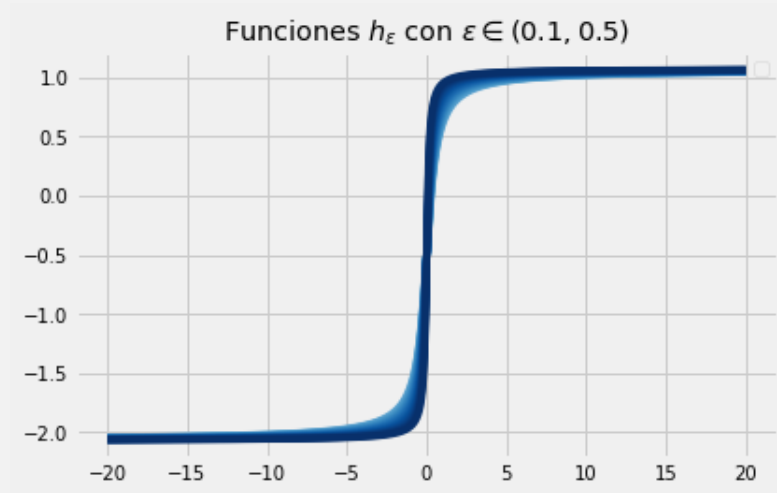
$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f_{\epsilon}(0) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\epsilon} \\ &= \infty \end{aligned}$$



b)

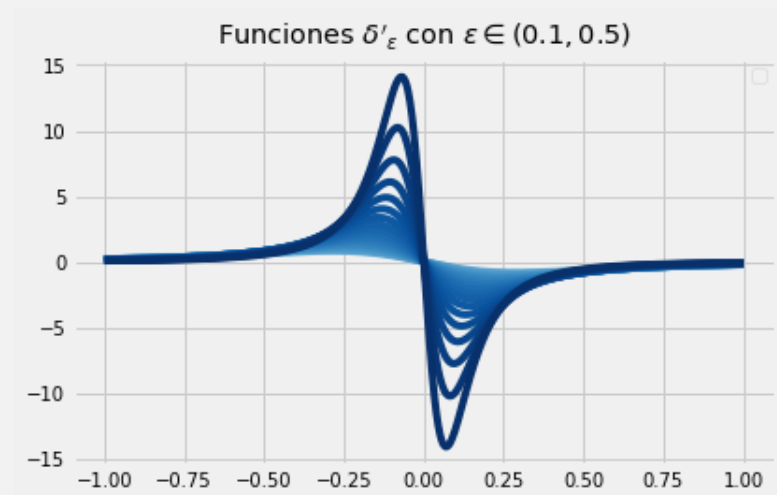
Obtenemos $h(t)$ usando la relación $h'(t) = \delta(t)$ de donde tenemos:

$$\begin{aligned} h_\epsilon(t) &= \int_c^t f_\epsilon(\alpha) d\alpha + h_\epsilon(c) \\ &= \int_{-\infty}^t f_\epsilon dt \\ &= \arctan\left(\frac{t}{\epsilon}\right) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Obtenemos $\delta'(t)$

$$\begin{aligned} \delta'_\epsilon(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \delta'_\epsilon(t) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -\frac{2\epsilon t}{\pi(t^2 + \epsilon^2)^2} \end{aligned}$$

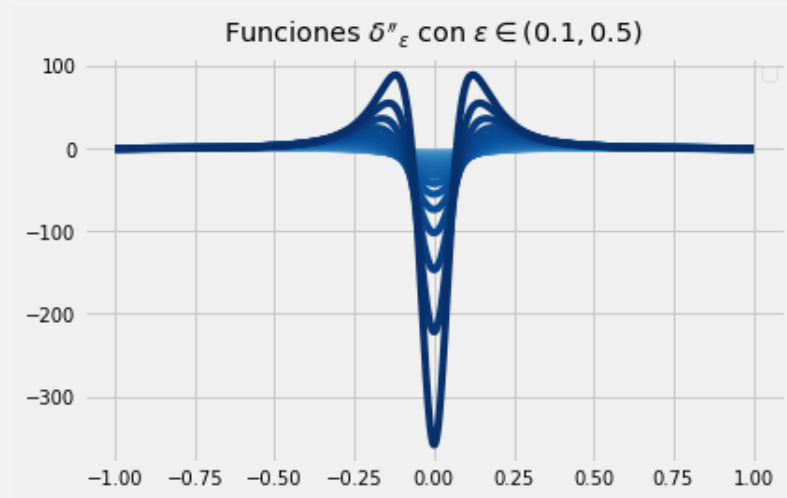


La gráfica es consistente con la relación:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'_\epsilon g dt = -g'(0) \quad \forall g \in S(R)$$

Obtenemos $\delta''(t)$:

$$\begin{aligned}\delta''(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \delta''_{\epsilon}(t) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{2\epsilon(3t^2 - \epsilon^2)}{\pi(t^2 + \epsilon^2)^3}\end{aligned}$$



La gráfica es consistente con la relación:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta''_{\epsilon} g dt = g''(0) \quad \forall g \in S(R)$$

3.-

En los siguientes cuatro apartados, a partir de las soluciones de la ecuación homogénea dadas, obtener una solución particular de la ecuación no homogénea usando funciones de Green.

- a) $y'' - y = \operatorname{sech}(x)$, con $\sinh(x), \cosh(x)$ soluciones de la homogénea.
- b) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x \log(x)$, con x, x^2 soluciones de la homogénea.
- c) $y'' - 2\operatorname{cosec}^2(x)y = \sin^2(x)$, con $\cot g(x), 1 - x \cot g(x)$ soluciones de la homogénea.
- d) $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 + 1)^2$, con $x, 1 - x^2$ soluciones de la homogénea.

Caso General

En el caso general tenemos la ecuación:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad y(a) = y(b) = 0$$

la solución esta dada por:

$$y(x) = \int_a^b G(x, x') f(x') dx'$$

donde G esta definida por:

$$G(x, x') = \begin{cases} A(x')y_1(x), & \text{si } 0 < x < x' < b \\ B(x')y_2(x), & \text{si } a < x' < x < b \end{cases}$$

donde:

$$A = \frac{y_2}{w} \quad B = \frac{y_1}{w} \\ w = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

con y_1, y_2 soluciones de la ecuación homogénea que satisfacen $y_1(a) = y_2(b) = 0$.

Observamos entonces que la solución esta expresada por:

$$y = y_2 \int_a^x B f dx' + y_1 \int_x^b A f dx'$$

es importante notar que si y_1, y_2 son soluciones de la ecuación homogénea entonces

$$y = y_1 \pm y_2$$

es solución de la ecuación homogénea.

1)

Hacemos cuentas para obtener los parametros del caso general:

$$f = \operatorname{sech}$$

$$a = 0$$

$$p = 0$$

$$y_1 = \sinh$$

$$y_1' = \cosh$$

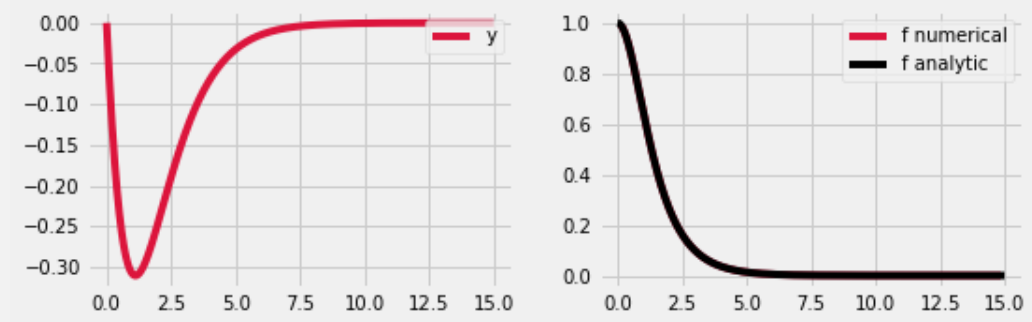
$$b = 15$$

$$q = -1$$

$$y_2 = \cosh(x - b) - 1$$

$$y_2' = \sinh$$

de donde obtenemos y resolviendo la integral numéricamente:



2)

Hacemos cuentas para obtener los parametros del caso general:

$$f = \frac{\log x}{x}$$

$$a = 0$$

$$p = \frac{-2}{x}$$

$$y_1 = x^2$$

$$y_1' = 2x$$

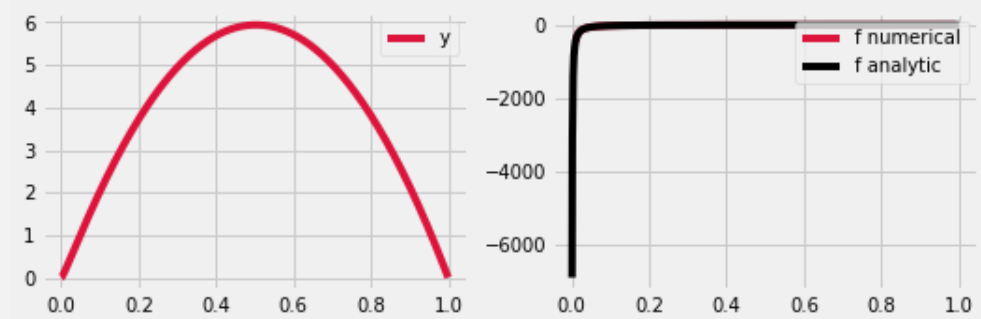
$$b = 1$$

$$q = \frac{2}{x^2}$$

$$y_2 = x^2 - x$$

$$y_2' = 2x - 1$$

de donde obtenemos y resolviendo la integral numéricamente:



3)

Hacemos cuentas para obtener los parametros del caso general:

$$f = \sin^2 x$$

$$a = 0$$

$$p = 0$$

$$y_1 = 1 - x \cot x$$

$$y_1' = -\cot x + x \csc^2 x$$

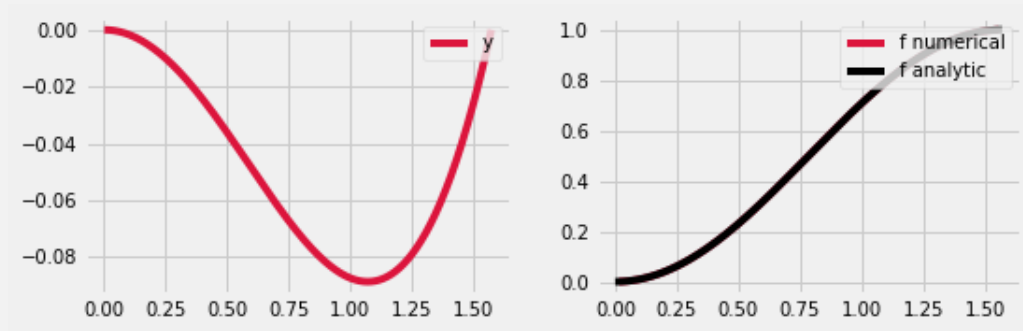
$$b = \frac{1}{2}\pi$$

$$q = -2 \csc^2 x$$

$$y_2 = \cot x$$

$$y_2' = -\csc^2 x$$

de donde obtenemos y resolviendo la integral numéricamente:



4)

Hacemos cuentas para obtener los parametros del caso general:

$$f = 1$$

$$a = 0$$

$$p = \frac{-2x}{x^2 + 1}$$

$$y_1 = x$$

$$y'_1 = 1$$

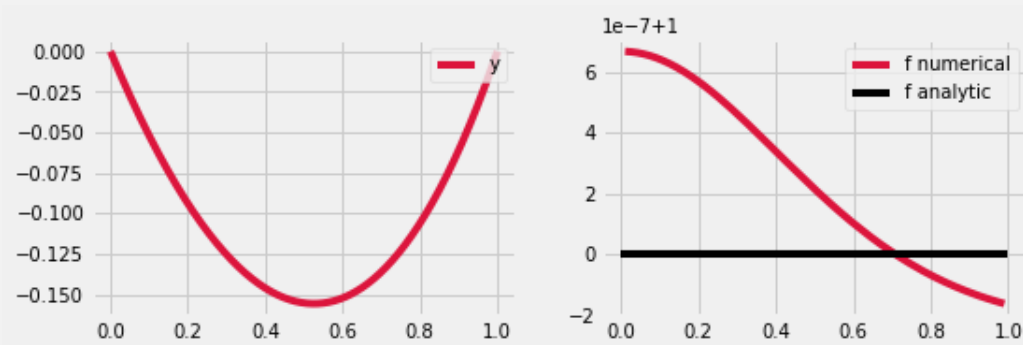
$$b = 1$$

$$q = \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$y_2 = 1 - x^2$$

$$y'_2 = -2x$$

de donde obtenemos y resolviendo la integral numéricamente:



4.-

Resolver las siguientes ecuaciones en derivadas parciales con condiciones iniciales usando el método de separación de variables:

- a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ en $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x, y < c, 0 < z < L\}$ con $u(x, y, z)$ anulándose en todos los lados del paralelepípedo excepto en $z = L$ donde $u(x, y, L) = V$.
- b) $-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = Eu$ en $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c\}$ con $u(x, y, z)$ anulándose en todos los lados del paralelepípedo.

a)

Suponemos nuestra solución es de la forma:

$$U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

se tiene entonces:

$$\nabla U = U \left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} \right)$$

por las condiciones del problema se debe de satisfacer:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

de donde obtenemos la relacion:

$$k_n^2 + k_m^2 - k_{nm}^2 = 0$$

las soluciones a esto son:

$$X_n = \begin{cases} \sin(k_n x) \\ \cos(k_n x) \end{cases}$$

$$Y_m = \begin{cases} \sin(k_m y) \\ \cos(k_m y) \end{cases}$$

$$Z_{nm} = \begin{cases} \sinh(k_{nm} z) \\ \cosh(k_{nm} z) \end{cases}$$

de acuerdo a las condiciones del problema:

$$\begin{aligned} U(x, 0, z) &= 0 & U(0, y, z) &= 0 \\ U(x, c, z) &= 0 & U(c, y, z) &= 0 \\ U(x, y, 0) &= 0 & U(x, y, L) &= V \end{aligned}$$

por lo cual elegimos:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{2\pi n}{c}x\right)$$

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{2\pi m}{c}y\right)$$

$$Z_{nm}(z) = \sinh(k_{nm}z) \quad k_{nm} = \frac{2\pi}{c}\sqrt{n^2 + m^2}$$

ahora bien, proponemos como solución una combinación lineal de nuestras soluciones, esto es:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} X_n Y_m Z_{nm}$$

definimos $C_{mn} = A_{mn}Z_{mn}(L)$ y obtenemos la relación:

$$U(x, y, L) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} X_n(x) Y_m(y)$$

como $\left\{ \frac{4}{c^2} \sin\left(\frac{2\pi n}{c}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{c}y\right), \quad n, m \in N \right\}$ son base ortonormal del espacio de funciones continuas de período c en x y y :

$$C_{mn} = \frac{4}{c^2} \int_0^c \int_0^c V \sin\left(\frac{2\pi n}{c}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{c}y\right) dx dy$$

haciendo cuentas encontramos:

$$A_{mn} = \begin{cases} \frac{16V}{mn\pi^2} \frac{1}{\sinh(k_{mn}L)} & m, n \in \text{impares} \\ 0 & c.c \end{cases}$$

b)

Nuevamente calculando el gradiente obtenemos:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -E$$

de donde obtenemos las relaciones:

$$k_n^2 + k_m^2 - k_{nm}^2 = -E$$

Nuevamente podemos

Bibliografía

- *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. Boas, Mary. Tercera Edición. Lehigh Press. 2006. Cap.