

Tarea 2 Matemáticas Avanzadas de la Física

Cerritos Lira Carlos

25 de Marzo del 2020

Tercer parical

Función Gamma

Definición:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt, \quad p > 0$$

Propiedades:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad p > 0$$

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\Gamma(p+1) \quad p < 0$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

Función Beta

Definición:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad p, q > 0$$

Propiedades:

$$B(p, q) = B(q, p)$$

$$B(p, q) = \frac{1}{a^{p+q-1}} \int_0^a y^{p-1} (a-y)^{q-1} dy$$

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p-1} (\cos\theta)^{2q-1} d\theta$$

$$B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy$$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Ejemplo: Péndulo:

Se tiene la relación:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin\theta$$

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{2g}} B(1/2, 1/4)$$

Función error

Definición:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Propiedades:

$$\operatorname{erf}(\infty) = 1$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\operatorname{erf}(x) = 2\phi(x\sqrt{2}) - 1$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right) \quad |x| \ll 1$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2x^2} \right) \quad x \gg 1$$

Fórmula de Stirling.

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad n \rightarrow \infty$$

$$\Gamma(p+1) \sim p^p e^{-p} \sqrt{2\pi p} \quad p \rightarrow \infty$$

Integrales y funciones elípticas

Primera especie

Forma de Legendre

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad 0 \leq k \leq 1$$

se le llama a ϕ la amplitud y a k el módulo.

Forma de Jacobi

$$F(\phi, k) = \int_0^{\sin \phi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}}$$

Definición:

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}} \quad 0 \leq k \leq 1$$

Propiedades:

$$F(n\pi \pm \phi, k) = 2nK(k) \pm F(\phi, k)$$

Segunda especie

Forma de Legendre

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad 0 \leq k \leq 1$$

Forma de Jacobi

$$E(\phi, k) = \int_0^{\sin \phi} \frac{\sqrt{1-k^2 t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Definición forma completa:

$$E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$$

Expansión en series

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right) k^{2n} \right)$$
$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} \right)$$

Longitud de arco de una elipse

La elipse parametrizada por la función:

$$x(\theta) = a \sin \theta, \quad y(\theta) = b \sin(\theta)$$

se tiene la relación:

$$L = a \int_0^\phi \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \theta} d\theta$$
$$= a E \left(\phi, \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \right)$$

Péndulo

Encontrar el periodo para un péndulo cuando $\alpha < \frac{\pi}{2}$

Cuarto parcial

Método de Frobenius

Soluciones en términos de series de potencias:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad p, q \text{ analíticas en } x_0 \in \mathbb{R}$$

proponemos la solución:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

si p, q no son analíticas en x_0 se puede tener:

1. Punto singular regular si $(x - x_0)p(x), (x - x_0)^2 q(x)$ analíticas en $x = x_0$
2. Punto irregular caso contrario

supondremos que $x_0 = 0$, nombraremos:

$$f(x) = xp(x) \quad g(x) = x^2 q(x)$$

tenemos entonces una nueva ecuación diferencial:

$$y'' + \frac{f'(x)}{x} y' + \frac{g(x)}{x^2} y = 0$$
$$x^2 y'' + x f(x) y' + g(x) y = 0$$

proponemos como solución:

$$y(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a_0 \neq 0, s \in \mathbb{R}$$

solucionaremos primero la ecuación:

$$x^2 y'' + x f_0 y' + g_0 y = 0$$

la solución está dada por $y = x^s$, donde:

$$s(s-1) + s f_0 + g_0 = 0$$

Ejemplo

Resolveremos la ecuación diferencial:

$$xy'' + 2y' + xy = 0$$

Teorema de Fuchs

Dada la ecuación diferencial:

$$x^2y'' + xf(x)y' + g(x)y = 0$$

$s_1 \geq s_2$ soluciones a la ecuación:

$$s(s-1) + sf_0 + g_0 = 0$$

siempre se tiene la solución:

$$y_1(x) = x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a_0 \neq 0$$

se tienen las condiciones:

- a) $s_1 - s_2 \notin \mathbb{N}_0 \implies y_2(x) = x^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad b_0 \neq 0$
- b) $s_1 - s_2 \in \mathbb{N} \implies y_2(x) = x^{s_1+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + dy_1(x) \log(x) \quad b_0 \neq 0, d \in \mathbb{R}$
- c) $s_1 = s_2 \implies y_2(x) = x^{s_1+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + y_1(x) \log(x)$

Funciones de Legendre

Funciones de Bessel

Funciones de Hermite, Lagrange y Jacobi