Matemáticas Avanzadas de la Física. Semestre 2020-2

Tarea 3

Fecha de entrega: 14 de abril de 2020

1.- Sea $\psi(p) = \frac{d}{dp}\log\Gamma(p)$ la denominada *función digamma* (ver problema 11.7 del Capítulo 11). Demostrar las siguientes identidades:

a) $\psi(1-p) - \psi(p) = \pi\text{cotg}(\pi p)$.

b) $\psi(p) + \psi(p+1/2) + 2\log 2 = 2\psi(2p)$.

Usar las propiedades de la función digamma para demostrar que

$$\psi(n+1/2) = -\gamma - 2\log 2 + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

donde $\gamma = -\psi(1) = -\Gamma'(1) = 0.57721566\cdots$ es la *constante de Euler*.

2.- Sea $F(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt$. Demostrar que F verifica la ecuación diferencial $F'(x) + 2xF(x) = 1$. Usar este hecho para demostrar la expansión:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n x^{2n+1}}{(2n+1)!!}, \quad |x| < \infty.$$

Por último demostrar que $F(x) \sim \dfrac{1}{2x}$ a medida que $x \to \infty$ y hacer un esbozo de la gráfica de F. Esta función está relacionada con la función error y aparece en teoría de propagación de ondas electromagnéticas sobre la superficie de la Tierra.

3.- Obtener las series asintóticas de las siguientes integrales y comprobar la identidad (10.7) ó (10.8) del Capítulo 11 del Boas:

a) $G(\varepsilon) = \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{1+\varepsilon x}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n!\varepsilon^n, \quad \varepsilon \to 0^+.$

b) $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2-\varepsilon x^4}dx = \sqrt{2\pi}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(4n-1)!!}{n!}\varepsilon^n\right), \quad \varepsilon \to 0^+.$

c) $\text{Ei}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt = \frac{e^x}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{x^n}, \quad x \to \infty.$

EXTRA.- Sean $K(k)$ y $E(k)$ las integrales elípticas completas de primera y segunda especie. Demostrar la denominada *relación de Legendre*:

$$K(k)E\left(\sqrt{1-k^2}\right) + E(k)K\left(\sqrt{1-k^2}\right) - K(k)K\left(\sqrt{1-k^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Ayuda: Consultar el siguiente artículo (si no lo consiguen, pídanmelo):

Duren, Peter (1991), *The Legendre relation for elliptic integrals*, in Ewing, John H.; Gehring, F. W. (eds.), Paul Halmos. Celebrating 50 years of mathematics, New York: Springer-Verlag, pp. 305-315.