Matemáticas Avanzadas de la Física. Semestre 2020-2

Tarea 2

Fecha de entrega: antes del 26 de marzo de 2020

1.- Usar la transformada de Laplace para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales y estudiar la gráfica de las soluciones:

a) $y'' + 3y' + 2y = -5\sin(t) + 5\cos(t), \quad y_0 = 5, y_0' = 3.$

b) $y'' + y = 5h(t - \pi), \quad y_0 = 2, y_0' = 4$, donde $h(t)$ es la función de Heaviside.

c) $y'' + 2y' + 2y = e^{-t} + 5\delta(t - 2), \quad y_0 = 0, y_0' = 1$, donde $\delta(t)$ es la delta de Dirac.

d) $y'' + 8y' + 15y = \begin{cases} 35e^{2t}, & \text{si} \quad 0 < t < 2 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}, \quad y_0 = 3, y_0' = -8.$

2.- Se define el siguiente conjunto de funciones (llamado lorentziano):

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{t^2 + \varepsilon^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0.$$

a) Argumentar que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} f_\varepsilon(t) = \delta(t)$, donde $\delta(t)$ es la delta de Dirac.

b) A partir de $f_\varepsilon(t)$ obtener un conjunto de funciones que aproximen a la función de Heaviside $h(t)$, a $\delta'(t)$ y a $\delta''(t)$ y estudiar las correspondientes gráficas.

3.- En los siguientes 4 apartados, a partir de las soluciones de la ecuación homogénea dadas, obtener una solución particular de la ecuación no homogénea usando funciones de Green:

a) $y'' - y = \mathrm{sech}(x)$, con $\mathrm{senh}(x)$ y $\cosh(x)$ soluciones de la homogénea.

b) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x\log(x)$, con x y x^2 soluciones de la homogénea.

c) $y'' - 2\mathrm{cosec}^2(x)y = \sin^2(x)$, con $\mathrm{cotg}(x)$ y $1 - x\mathrm{cotg}(x)$ soluciones de la homogénea.

d) $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 + 1)^2$, con x y $1 - x^2$ soluciones de la homogénea.

4.- Resolver las siguientes ecuaciones en derivadas parciales con condiciones iniciales usando el método de separación de variables:

a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ en $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x, y < c, 0 < z < L\}$ con $u(x, y, z)$ anulándose en todos los lados del paralelepípedo excepto en $z = L$ donde $u(x, y, L) = V$.

b) $-\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = Eu$ en $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c\}$ con $u(x, y, z)$ anulándose en todos los lados del paralelepípedo.