# Tarea 3 Matemáticas Avanzadas de la Física

Cerritos Lira Carlos

16 de Abril del 2020

## 1)

Sea $\psi(p) = \frac{d}{dp} log\Gamma(p)$ la denominada función *digamma*(ver problema 11.7 del capítulo 11). Demostrar las siguientes identidades:

a) $\psi(1-p) - \psi(p) = \pi cotg(\pi p)$

b) $\psi(p) + \psi(p+1/2) + 2log2 = 2\psi(2p)$

c) Usar las propiedades de la función digamma para Demostrar que:

$$\psi(n+1/2) = -\gamma - 2log2 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}, \quad n = 1, 2...$$

donde $\gamma = -\psi(1) = -\Gamma'(1) = 0.05721566...$ es la constante de Euler.

**a)**

Comenzamos con la formula de reflección de Euler:

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(1-p) &= \frac{\pi}{sin\pi p} \\
log(\Gamma(p)) + log(\Gamma(1-p)) &= log\pi - log(sin\pi p) \\
\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} - \frac{\Gamma'(1-p)}{\Gamma(1-p)} &= -\frac{\pi cos\pi p}{sin\pi p} \\
\psi(p) - \psi(1-p) &= -\pi cot\pi p \\
\psi(1-p) - \psi(p) &= \pi cot\pi p
\end{aligned}$$

**b)**

Comenzamos con la formula de duplicación de Legendre:

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(p+1/2) &= 2^{1-2p}\sqrt{\pi}\Gamma(2p) \\
log(\Gamma(p)) + log(\Gamma(p+1/2)) &= log(2)(1-2p) + log(\Gamma(2p)) \\
\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} + \frac{\Gamma'(p+1/2)}{\Gamma(p+1/2)} &= -2log2 + 2\frac{\Gamma'(2p)}{\Gamma(2p)} \\
\psi(p) + \psi(p+1/2) + 2log2 &= 2\psi(2p)
\end{aligned}$$

**c)**

Despejamos $\psi(n+1/2)$ de la última expresión:

$$\begin{aligned}
\psi(n+1/2) &= -2log2 + 2\psi(2n) - \psi(n) \\
&= -2log2 + 2\left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k} - \gamma\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \gamma\right) \\
&= -\gamma - 2log2 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}
\end{aligned}$$

## 2)

Sea $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$. Demostrar que $F$ verifica la ecuación diferencial $F'(x) + 2xF(x) = 1$. Usar este hecho para demostrar la expansión:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{2n+1}}{(2n+1)!!}, \quad \left|x\right| < \infty$$

Por último demostrar que $F(x) \sim \frac{1}{2x}$ a medida que $x \to \infty$ y hacer un esbozo de la gráfica de $F$. Esta función está relacionada con la función error y aparece en la teoría de propagación de ondas electromagnéticas sobre la superfiece de la Tierra.

**Primer relación**

Hacemos las cuentas para obtener $F'(x) + 2xF(x)$:

$$\begin{aligned} F'(x) + 2xF(x) &= -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + e^{-x^2} e^{x^2} + 2F(x) \\ &= -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + 1 + 2F(x) \\ &= -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + 1 + 2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt = 1 \end{aligned}$$

**Expansión**

queremos que la función sea de la forma:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad F''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

se debe satisfacer la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} F''(x) + 2xF'(x) + 2F(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n \\ &= 2a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+2)(n+1) a_{n+2} + 2(n+1) a_n) x^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

se tienen las condiciones:

$$\begin{aligned} 2a_2 + a_0 &= 0 \\ (n+2)(n+1) a_{n+2} + 2(n+1) a_n &= 0 \end{aligned}$$

de donde obtenemos la relación:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= -\frac{2(n+1)}{(n+2)(n+1)} a_n \\ &= -\frac{2}{n+2} a_n \end{aligned}$$

usando la condición $F(0) = 0, F'(0) = 1$ obtenemos $a_0 = 0, a_1 = 1$, por lo tanto se tiene:

$$\begin{aligned} a_{2n} &= 0 \\ a_{2n+1} &= \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!!} \end{aligned}$$

substituyendo obtenemos la expansión deseada:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$$

**Relación** $F(x) \sim \frac{1}{2x}$

Queremos saber si se cumple:

$$\lim_{x\to\infty} F(x)2x = 1$$

primero calcularemos $\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

usando esta información podemos calcular $\lim_{x\to\infty} F'(x)$:

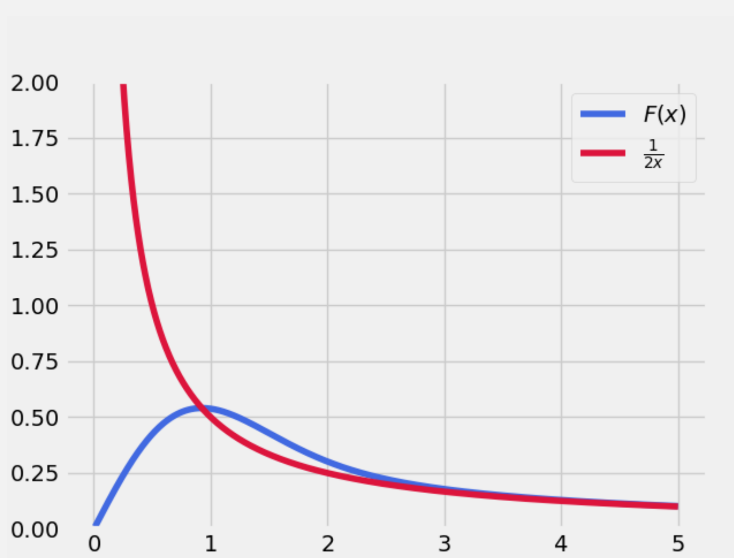
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} F'(x) &= \lim_{x\to\infty} \left(-2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt + 1\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-2x\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}}\right) + 1 \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-2\int_0^x e^{t^2}\,dt + -2x^2e^{x^2}}{e^{x^2}}\right) + 1 \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}}\right) - 1 + 1 \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right) \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ahora bien tomando limite de ambos lados para la primer relación tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} (F'(x) + 2xF(x)) &= \lim_{x\to\infty} 1 \\
\lim_{x\to\infty} F'(x) + \lim_{x\to\infty} 2xF(x) &= 1 \\
\lim_{x\to\infty} 2xF(x) &= 1
\end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar.

**Gráfica de la función**



## 3)

Obtener las series asintóticas de las sigueintes integrales y comprobar la identidad (10.7) ó (1.7) del Capítulo 11 del Boas:

a) $G(\epsilon) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+\epsilon x} dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n n! \epsilon^n, \quad \epsilon \to 0^+$

b) $I(\epsilon) = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2-\epsilon x^4} dx = \sqrt{2\pi}\left(1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n(4n-1)!!}{n!}\epsilon^n\right), \quad \epsilon \to 0^+$

c) $Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt = \frac{e^x}{x}\sum_{n=0}^\infty \frac{n!}{x^n}, \quad x \to \infty$

**a)**

Integramos por partes para obtener los términos $\epsilon^n$ de la serie:

$$\begin{aligned} G(\epsilon) &= \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+\epsilon x} dx \\ &= 1 - \epsilon \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(1+\epsilon x)^2} dx \\ &= 1 - \epsilon + ... + (-1)^N N! \epsilon^N + (-1)^{N+1}(N+1)!\epsilon^{N+1} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(1+\epsilon x)^{N+1}} dx \end{aligned}$$

veremos que la serie $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n n! \epsilon^n = \sum_{n=0}^\infty a_n \epsilon^n$ es asintótica:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{|G(\epsilon) - \sum_{n=0}^N a_n \epsilon^n|}{\epsilon^N} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{|(-1)^{N+1}(N+1)!\epsilon^{N+1} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(1+\epsilon x)^{N+1}} dx|}{\epsilon^N} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} (N+1)! \epsilon | \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(1+\epsilon x)^N} dx| \\ &\leq \lim_{\epsilon \to 0^+} (N+1)! \epsilon \int_0^\infty e^{-x} dx \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} (N+1)! \epsilon \\ &= 0 \end{aligned}$$

haciendo sandwich podemos ver que $L = 0$, por lo tanto la serie es asintótica por definición.

**b)**

Hacemos serie de Tylor para obtener los términos $\epsilon^n$ de la serie:

$$\begin{aligned} e^{-x^2/2-\epsilon x^4} &= e^{-x^2/2}\left(\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!}\epsilon^n x^{4n} + \epsilon^{N+1} r_{N+1}(x)\right) \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!} e^{-x^2/2} x^{4n} \epsilon^n + \epsilon^{N+1} e^{-x^2/2} r_{N+1}(x) \end{aligned}$$

por el teorema de Tylor sabemos que se cumple:

$$\begin{aligned} |r_{N+1}(x)| &= \left|(-1)^{N+1} \frac{e^c}{(N+1)!} x^{4(N+1)}\right| \quad c \in (-\epsilon x^4, 0) \\ &\leq x^{4(N+1)} \end{aligned}$$

integrando término por término obtenemos:

$$
\begin{aligned}
I(\epsilon) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2-\epsilon x^4} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!} e^{-x^2/2} x^{4n} \epsilon^n + \epsilon^{N+1} e^{-x^2/2} r_{N+1}(x) \right) dx \\
&= \sum_{n=0}^{N} \left( \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^{4n} dx \epsilon^n \right) + \epsilon^{N+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} r_{N+1(x)} dx \\
&= \sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^{N} a_n \epsilon^n + \epsilon^{N+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} r_{N+1}(x) dx
\end{aligned}
$$

donde $a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^{4n} dx = \frac{(-1)^n (4n-1)!!}{n!}$. veremos que se satisface la condición 1.7:

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{|I(\epsilon) - \sum_{n=0}^{N} a_n \epsilon^n|}{\epsilon^N} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{|\epsilon^{N+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} r_{N+1}(x) dx|}{\epsilon^N} \\
&\leq \lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} x^{4(N+1)} e^{-x^2/2} dx \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon \sqrt{2\pi} a_{n+1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

haciendo sandwich nuevamente podemos ver que $L = 0$, por lo tanto la serie es asintótica por definición.

**c)**

Integramos por partes para obtener los terminos $\frac{1}{x}$ de la serie:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt &= \frac{e^t}{t}\Big|_{-\infty}^{x} + \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^2} dt \\
&= \frac{e^x}{x} + \frac{e^t}{t^2}\Big|_{-\infty}^{x} + \int_{-\infty}^{x} 2\frac{e^t}{t^3} dt \\
&= \frac{e^x}{x} \left( 1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) + (3)(2) \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^4} dt \\
&= \frac{e^x}{x} \sum_{n=0}^{N} \frac{n!}{x^n} + (N+1)! \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^{N+2}} dt
\end{aligned}
$$

veremos que se satisface la condicion más general:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x \to \infty} \frac{|Ei(x) - \sum_{n=0}^{N} \phi_n(x)|}{\phi_N(x)} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{(N+1)! \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^{N+2}}}{\frac{e^x}{x} \frac{N!}{x^N}} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{(N+1) x^{N+1} \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^{N+2}}}{e^x} \\
&= 0
\end{aligned}
$$