Tarea 2 Matemáticas Avanzadas de la Física

Cerritos Lira Carlos

25 de Marzo del 2020

Tercer parical

Función Gamma

Definición:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt, \quad p > 0$$

Propiedades:

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n! \\
\Gamma(p+1) &= p\Gamma(p) \quad p > 0 \\
\Gamma(p) &= \frac{1}{p}\Gamma(p+1) \quad p < 0 \\
\Gamma(\tfrac{1}{2}) &= \sqrt{\pi} \\
\Gamma(p)\Gamma(1-p) &= \frac{\pi}{sin(\pi p)}
\end{aligned}$$

Función Beta

Definición:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \quad p, q > 0$$

Propiedades:

$$\begin{aligned}
B(p,q) &= B(q,p) \\
B(p,q) &= \frac{1}{a^{p+q-1}} \int_0^a y^{p-1}(a-y)^{q-1} dy \\
B(p,q) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin\theta)^{2p-1}(cos\theta)^{2q-1} d\theta \\
B(p,q) &= \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy \\
B(p,q) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}
\end{aligned}$$

Ejemplo: Péndulo:

Se tiene la relación:

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= -\frac{g}{l} sin\theta \\
T &= 2\sqrt{\frac{l}{2g}} B(1/2, 1/4)
\end{aligned}$$

Función error

Definición:

$$erf(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

Propiedades:

$$\begin{aligned} erf(\infty) &= 1 \\ \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\ etf(x) &= 2\phi(x\sqrt{2}) - 1 \\ erfc(x) &= 1 - erf(x) \\ erf(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + ...) \quad |x| << 1 \\ erf(x) &= \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) \quad x >> 1 \end{aligned}$$

Fórmula de Stirling.

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \quad n \to \infty$$

$$\Gamma(p+1) \sim p^p e^{-p}\sqrt{2\pi p} \quad p \to \infty$$

Integrales y funciones elípticas

Primera especie

Forma de Legendre

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\theta}} \quad 0 \leq k \leq 1$$

se le llama a ϕ la amplitud y a k el módulo.

Forma de Jacobi

$$F(\phi, k) = \int_0^{sin\phi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$$

Definición:

$$K(k) = F(\tfrac{\pi}{2}, k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} \quad 0 \leq k \leq 1$$

Propiedades:

$$F(n\pi \pm \phi, k) = 2nK(k) \pm F(\phi, k)b$$

Segunda especia

Forma de Legendre

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 sin^2\theta}d\theta \quad 0 \leq k \leq 1$$

Forma de Jacobi

$$E(\phi, k) = \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2}t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

Definición forma completa:

$$E(k) = E(\tfrac{\pi}{2}, k)$$

Expansión en series

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)k^{2n}\right)$$
$$E(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{k^{2n}}{2n-1}\right)$$

Longitud de arco de una elipse

La elipse parametrizada por la función:

$$x(\theta) = asin\theta, \quad y(\theta) = bsin(\theta)$$

se tiene la relación:

$$\begin{aligned} L &= a\int_0^{\phi}\sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}sin^2\theta d\theta} \\ &= aE\left(\phi, \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right) \end{aligned}$$

Péndulo

Encontrar el periodo para un péndulo cuando $\alpha < \frac{\pi}{2}$

Cuarto parcial

Método de Frobenius

Soluciones en términos de series de potencias:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad p, q \text{ analíticas en } x_0 \in R$$

proponemos la solcuión:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

si p, q no son analíticas en x_0 se puede tener:

1. Punto singular regular si $(x-x_0)p(x), (x-x_0)^2q(x)$ analíticas en $x = x_0$
2. Punto irregular caso contrario

supondremos que $x_0 = 0$, nombraremos:

$$f(x) = xp(x) \quad g(x) = x^2q(x)$$

tenemos entonces una nueva ecación diferencial:

$$\begin{aligned} y'' + \frac{f'(x)}{x}y' + \frac{g(x)}{x^2}y = 0 \\ x^2y'' + xf(x)y' + g(x)y = 0 \end{aligned}$$

proponemos como solución:

$$y(x) = x^s\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad a_0 \neq 0, s \in R$$

solucionaremos pirmero la ecuación:

$$x^2y'' + xf_0y' + g_0y = 0$$

la solción está dada por $y = x^s$, donde:

$$s(s-1) + sf_0 + g_0 = 0$$

Ejemplo

Resolveremos la ecuación diferencial:
$$xy'' + 2y' + xy = 0$$

Teorema de Fuchs

Dada la ecuación diferencial:
$$x^2y'' + xf(x)y' + g(x)y = 0$$
$s_1 \geq s_2$ soluciones a la ecuación:
$$s(s-1) + sf_0 + g_0 = 0$$
siempre se tiene la solción:
$$y_1(x) = x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a_0 \neq 0$$
se tienen las condicones:

a) $s_1 - s_2 \notin N_0 \implies y_2(x) = x^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad b_0 \neq 0$

b) $s_1 - s_2 \in N \implies y_2(x) = x^{s_1+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + dy_1(x)log(x) \quad b_0 \neq 0, d \in R$

c) $s_1 = s_2 \implies y_2(x) = x^{s_1+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + y_1(x)log(x)$

Ecuación de Legendre

Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$$

Formula de Rodrigues

$$y(x) = P_l(x)$$
$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2-1)^l]$$

Función generadora

Se tiene la relación:
$$\Phi(x,h) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) h^n$$
para los polinomios de Legendre tenemos:
$$\Phi(x,h) = (1 - 2xh + h^2)^{\frac{1}{2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) h^l \quad |h| < 1$$

Relaciones de recurrencia

a) $(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)xP_l(x) + lP_{l-1} = 0$

b) $xP_l'(x) - P_{l-1}'(x) = lP_l(x)$

c) $P_l'(x) - xP_{l-1}'(x) = lP_{l-1}(x)$

Expansión del potencial gravitacional o eléctrico

$$I = (1 - 2xh + h^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Tenemos un potencial de la forma:

$$\begin{aligned} V &= \frac{k}{d} \\ &= \frac{k}{R}\Phi\left(cos\theta, \frac{r}{R}\right) \end{aligned}$$

podemos obtener una aproximación para V utilizando un número finito en la suma.

Ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0 \quad n \neq m$$

$$\int_{-1}^{1} P_l^2(x)dx = \frac{2}{2l+1}$$

se tiene entonces $\forall f : [-1, 1] \to R$ si f es Dirishlet:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x)P_m(x)$$

$$c_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx$$

Ec. de Legendre generalziada

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[l(l-1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0, m^2 < l^2$$

tiene por solución:

$$y = P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)$$

Ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \quad p \in R$$

tiene por solción:

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \qquad p > 0$$

Relaciones de recurrencia

1. $\frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x)$

Funciones de Hermite, Lagre y Jacobi