Tarea 2 Matemáticas Avanzadas de la Física

Cerritos Lira Carlos

25 de Marzo del 2020

Nota: código utilizado se encuentra en https://github.com/carloscerlira/MAF/blob/master/Tarea_2/code.ipynb

1.-

Usar la transformada de Laplace para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales y estudiar la gráfica de las soluciones.

a) $y'' + 3y' + 2y = -5sin(t) + 5cos(t), \quad y_0 = 5, \quad y_0' = 3$

b) $y'' + y = 5u(t-\pi), \quad y_0 = 2, \quad y_0' = 4$, donde $u(t)$ es la función de Heaviside.

c) $y'' + 2y' + 2y = e^{-t} + 5\delta(t-2), \quad y_0 = 0, \quad y_0' = 1$, donde $\delta(t)$ es la delta de Dirac.

d) $y'' + 8y' + 15y = \begin{cases} 35e^{2t}, & \text{si } 0 < t < 2 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}, \quad y_0 = 3, \quad y_0' = -8$

Caso General

En el caso general se tiene:

$$\begin{aligned} Ay'' + By' + Cy &= f(t) \\ A(p^2Y - py_0 - y_0') + B(pY - y_0) + CY &= F \\ Y(Ap^2 + Bp + C) - (Ay_0p + Ay_0' + By_0) &= F \\ Y &= \frac{1}{A(p+a)(p+b)}(F + Ay_0p + Ay_0' + By_0) \\ Y &= \frac{1}{A}H(F+G) = \frac{1}{A}(Y_1 + Y_2) \end{aligned}$$

Resolvamos $Y_1 = HF$
En este caso tenemos $y_1 = f * h$, donde

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}, \quad a \neq b \\ h(t) &= te^{-at}, \quad a = b \end{aligned}$$

Resolvamos $Y_2 = HG$.
En este caso tenemos $y_2 = h * g$, donde

$$g = Ay_0\delta' + (Ay_0' + By_0)\delta$$

calculando la convolución obtenemos:

$$\begin{aligned} h * g &= Ay_0\delta' * h + (Ay_0' + By_0)\delta * h \\ h * g &= Ay_0h' + (Ay_0' + By_0)h \end{aligned}$$

entonces la solución es $y = \frac{1}{A}(y_1 + y_2)$

a)

Hacemos cuentas para encontrar los parametros del caso general:

$$\begin{aligned} Ap^2 + Bp + C &= p^2 + 3p + 2 \\ &= (p+1)(p+2) \end{aligned}$$

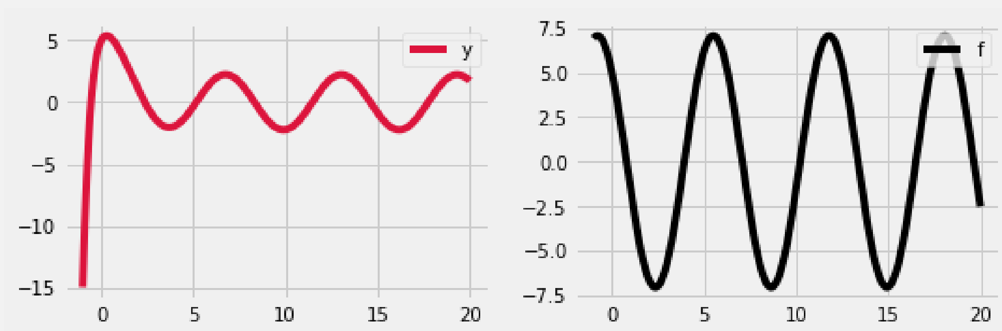
se tiene entonces:

$$\begin{aligned} &f(t) = -5sint + 5cost & &A, B, C = 1, 2, 3 \\ &y_0, y_0' = 5, 3 & &a, b = 1, 2 \end{aligned}$$

entonces nuestra solución es:

$$\begin{aligned} y &= h * f + h * g \\ &= \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau + A y_0 h' + (A y_0' + B y_0) h \end{aligned}$$

resolviendo numéricamente $h * f$ encontramos la gráfica de y:



b)

Hacemos cuentas para encontrar los parametros del caso general:

$$\begin{aligned} Ay^2 + By + C &= y^2 + y \\ &= (y+1)(y+0) \end{aligned}$$

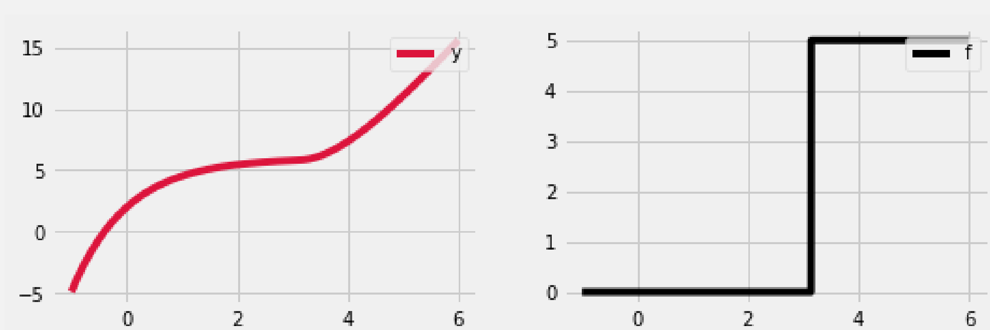
se tiene entonces:

$$\begin{aligned} &f(t) = 5u(t-\pi) & &A, B, C = 1, 1, 0 \\ &y_0, y_0' = 2, 4 & &a, b = 1, 0 \end{aligned}$$

entonces nuestra solución es:

$$\begin{aligned} y &= h * f + h * g \\ &= \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau + A y_0 h' + (A y_0' + B y_0) h \end{aligned}$$

resolviendo numéricamente $h * f$ encontramos la gráfica de y:



c)

Hacemos cuentas para encontrar los parametros del caso general:

$$\begin{aligned} Ay^2 + By + C &= y^2 + 2y + 2 \\ &= (y+1+i)(y+1-i) \end{aligned}$$

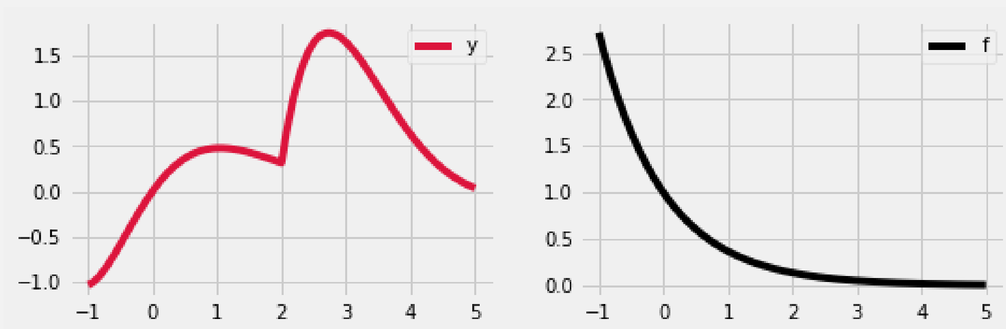
se tiene entonces:

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-t} + 5\delta(t-2) & \qquad A, B, C &= 1, 2, 2 \\ y_0, y_0' &= 0, 1 & a, b &= 1+i, 1-i \end{aligned}$$

entonces nuestra solución es:

$$\begin{aligned} y &= h * f + h * g \\ &= \int_0^t h(t-\tau)e^{-\tau} d\tau + 5h(t-2)u(t-2) + Ay_0 h' + (Ay_0' + By_0)h \end{aligned}$$

resolviendo numéricamente $h * e^{-t}$ encontramos la gráfica de y:



d)

Hacemos cuentas para encontrar los parametros del caso general:

$$\begin{aligned} Ay^2 + By + C &= y^2 + 8y + 15 \\ &= (y+5)(y+3) \end{aligned}$$

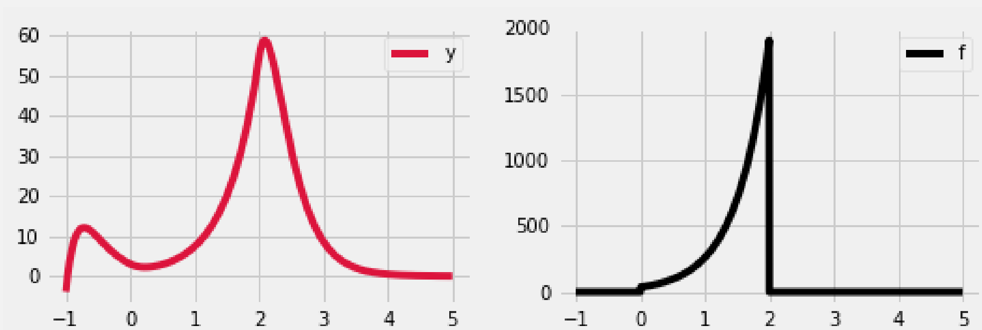
se tiene entonces:

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} 35e^{2t}, & \text{si } 0 < t < 2 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases} & \qquad A, B, C &= 1, 8, 15 \\ y_0, y_0' &= 3, -8 & a, b &= 5, 3 \end{aligned}$$

entonces nuestra solución es:

$$\begin{aligned} y(t) &= h * f + h * g \\ &= \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau + Ay_0 h' + (Ay_0' + By_0)h \end{aligned}$$

resolviendo numéricamente $h * f$ encontramos la gráfica de y:



2.-

Se define el siguiente conjunto de funciones (llamado lorentziano):

$$f_\epsilon(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{t^2+\epsilon^2}, t \in \mathbb{R}, \epsilon \geq> 0.$$

a) Argumentar que $\lim_{\epsilon\to 0^+} f_\epsilon(t) = \delta(t)$, donde $\delta(t)$ es la delta de Dirac.

b) A partir de $f_\epsilon(t)$ obtener un conjunto de funciones que aproximen a la función de Heaviside $h(t)$, a $\delta'(t)$ y a $\delta''(t)$ y estudiar las correspondientes gráficas.

a)

Nuestro conjunto de funciones debe de satisfacer:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon g dt = g(0) \quad \forall g \in S(R)$$

esto sucede si se cumplen las relaciones:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon dt &= 1, \quad \forall \epsilon > 0 \\ \lim_{\epsilon\to 0^+} f_\epsilon(t) &= 0, \quad \forall t \neq 0 \\ \lim_{\epsilon\to 0^+} f_\epsilon(0) &= \infty \end{aligned}$$

para la primera relación:

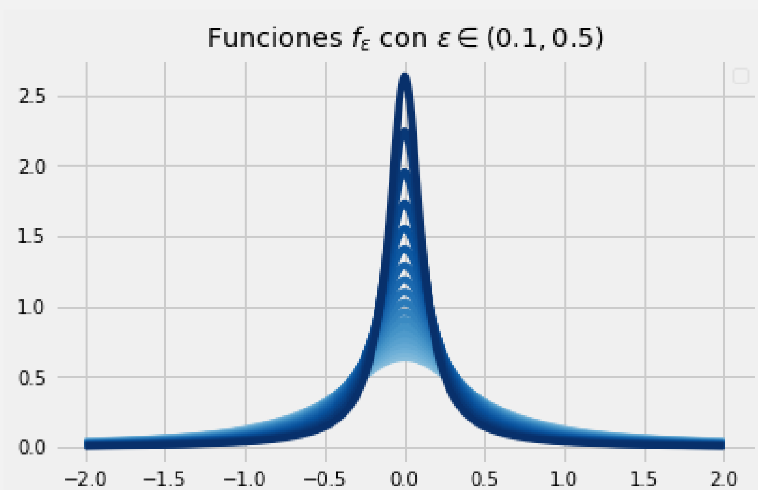
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon dt &= \frac{1}{\pi} arctan \frac{t}{\epsilon}\bigg|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{1}{\pi}\pi = 1 \end{aligned}$$

para la segunda relación:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0^+} f_\epsilon(t) &= \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\epsilon}{t^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

para la tercer relación:

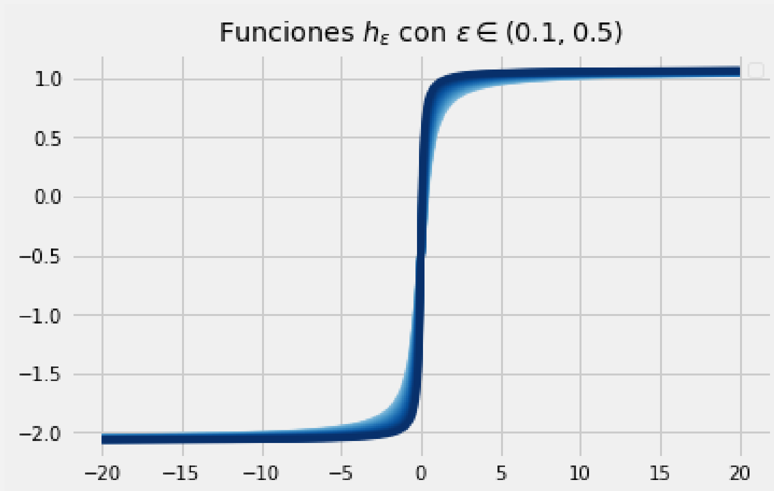
$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0^+} f_\epsilon(t) &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\epsilon} \\ &= \infty \end{aligned}$$



b)

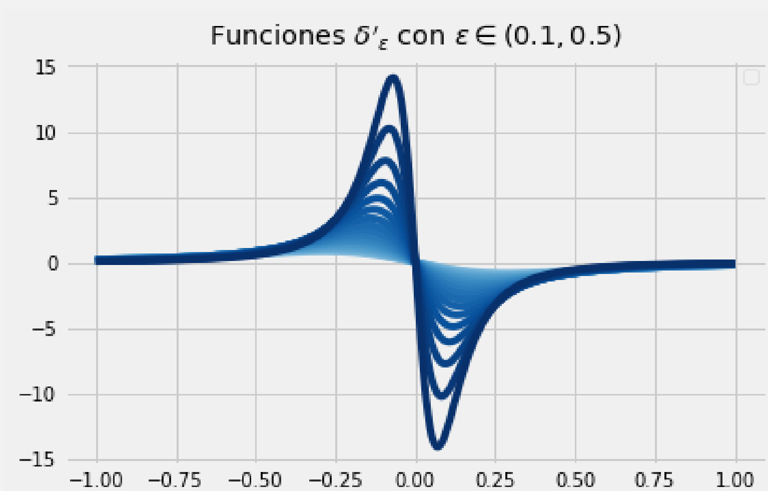
Obtenemos $h(t)$ usando la relación $h'(t) = \delta(t)$ de donde tenemos:

$$\begin{aligned} h_\epsilon(t) &= \int_c^t f_\epsilon(\alpha)d\alpha + h_\epsilon(c) \\ &= \int_{-\infty}^t f_\epsilon dt \\ &= arctan\left(\frac{t}{\epsilon}\right) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Obtenemos $\delta'(t)$

$$\begin{aligned} \delta'_\epsilon(t) &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \delta'_\epsilon(t) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} -\frac{2\epsilon t}{\pi\left(t^2+\epsilon^2\right)^2} \end{aligned}$$

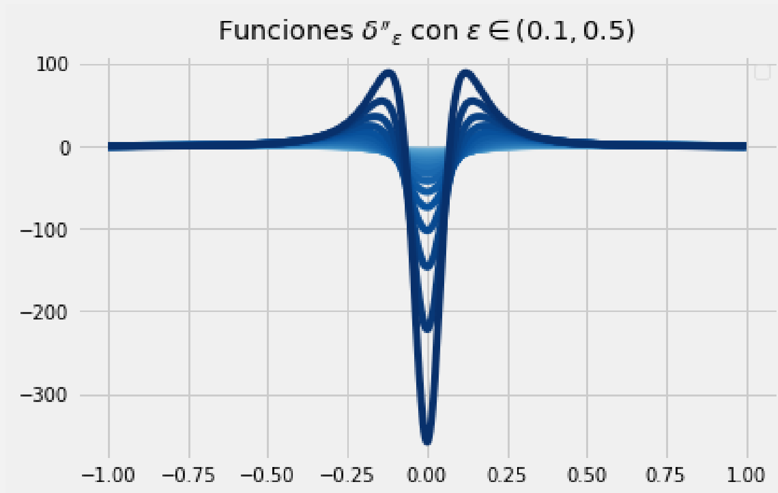


La gráfica es consistente con la relación:

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'_n g dt = -g'(0) \quad \forall g \in S(R)$$

Obtenemos $\delta''(t)$:

$$\begin{aligned}\delta''(t) &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \delta''_\epsilon(t) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{2\epsilon\left(3t^2-\epsilon^2\right)}{\pi\left(t^2+\epsilon^2\right)^3}\end{aligned}$$



La gráfica es consistente con la relación:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta''_n g dt = g''(0) \quad \forall g \in S(R)$$

3.-

En los siguientes cuatro 4 apartados, a partir de las soluciones de la ecuación homogénea dadas, obtener una solución particular de la ecuación no homogénea usando funciones de Green.

a) $y'' - y = sech(x)$, con $sinh(x), cosh(x)$ soluciones de la homogénea.

b) $x^2y'' - 2xy' + 2y = xlog(x)$, con x, x^2 soluciones de la homogénea.

c) $y'' - 2cosec^2(x)y = sin^2(x)$, con $cotg(x), 1 - xcotg(x)$ soluciones de la homogénea.

d) $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 + 1)^2$, con $x, 1 - x^2$ soluciones de la homogénea.

Caso General

En el caso general tenemos la ecuación:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad y(a) = y(b) = 0$$

la solucuión esta dada por:

$$y(x) = \int_a^b G(x, x')f(x')dx'$$

donde G esta definida por:

$$G(x, x') = \begin{cases} A(x')y_1(x), & \text{si } 0 < x < x' < b \\ B(x')y_2(x), & \text{si } a < x' < x < b \end{cases}$$

donde:

$$A = \frac{y_2}{w} \quad B = \frac{y_1}{w}$$
$$w = y_1y_2' - y_1'y_2$$

con y_1, y_2 soluciones de la ecuación homogénea que satisfacen $y_1(a) = y_2(b) = 0$.

Observamos entonces que la solción esta expresada por:

$$y = y_2 \int_a^x Bfdx' + y_1 \int_x^b Afdx'$$

es importante notar que si y_1, y_2 son soluciones de la ecación homogénea entonces

$$y = y_1 \pm y_2$$

es solución de la ecuación homogénea.

a)

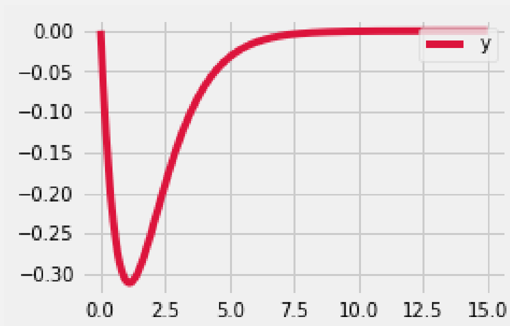
Hacemos cuentas para obtener los parametros del caso general:

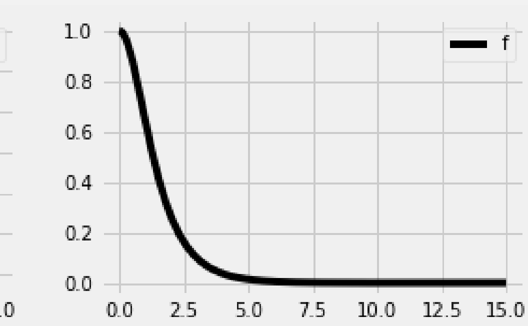
$$
\begin{aligned}
&f = sech && \\
&a = 0 && b = 15 \\
&p = 0 && q = -1 \\
&y_1 = sinh && y_2 = cosh(x-b) - 1 \\
&y_1' = cosh && y_2' = sinh(x-b)
\end{aligned}
$$

entonces nuestra solución es:

$$y = y_2 \int_a^x B f dx' + y_1 \int_x^b A f dx'$$

resolviendo la integral númericamente obtenemos la gráfica de y:





b)

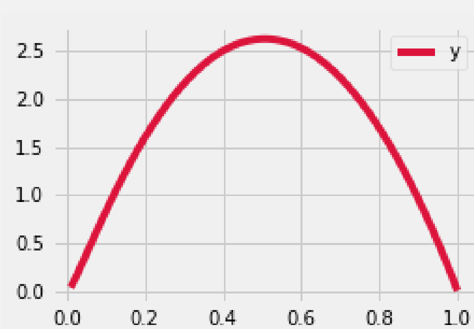
Hacemos cuentas para obtener los parametros del caso general:

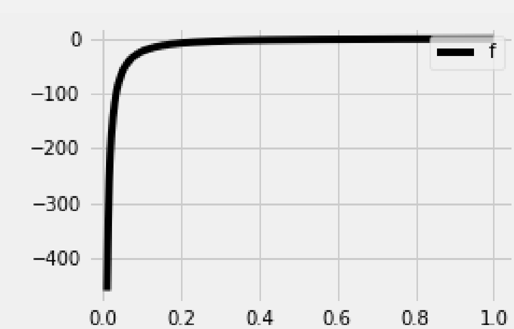
$$
\begin{aligned}
&f = \frac{logx}{x} && \\
&a = 0 && b = 1 \\
&p = \frac{-2}{x} && q = \frac{2}{x^2} \\
&y_1 = x^2 && y_2 = x^2 - x \\
&y_1' = 2x && y_2' = 2x - 1
\end{aligned}
$$

entonces nuestra solución es:

$$y = y_2 \int_a^x B f dx' + y_1 \int_x^b A f dx'$$

resolviendo la integral númericamente obtenemos la gráfica de y:





c)

Hacemos cuentas para obtener los parametros del caso general:

$$f = sin^2 x$$

$$a = 0 \qquad b = \frac{1}{2}\pi$$

$$p = 0 \qquad q = -2cscx^2$$

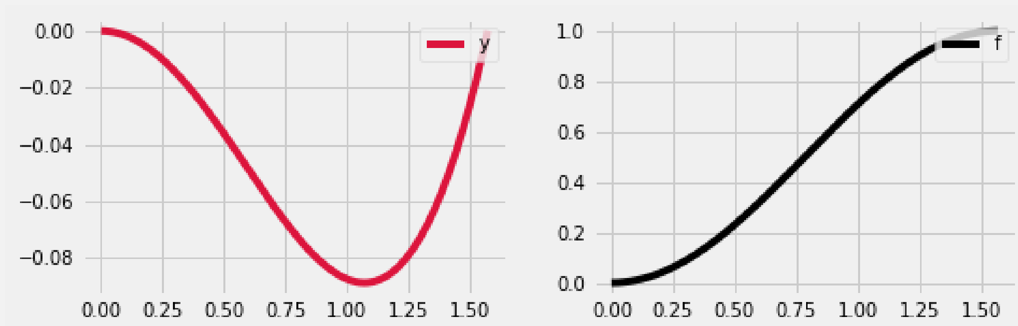
$$y_1 = 1 - xcotx \qquad y_2 = cotx$$

$$y_1' = -cotx + xcsc^2 x \qquad y_2' = -csc^2 x$$

entonces nuestra solución es:

$$y = y_2 \int_a^x Bf dx' + y_1 \int_x^b Af dx'$$

resolviendo la integral númericamente obtenemos la gráfica de y:



d)

Hacemos cuentas para obtener los parametros del caso general:

$$f = x^2 + 1$$

$$a = 0 \qquad b = 1$$

$$p = \frac{-2x}{x^2+1} \qquad q = \frac{2}{x^2+1}$$

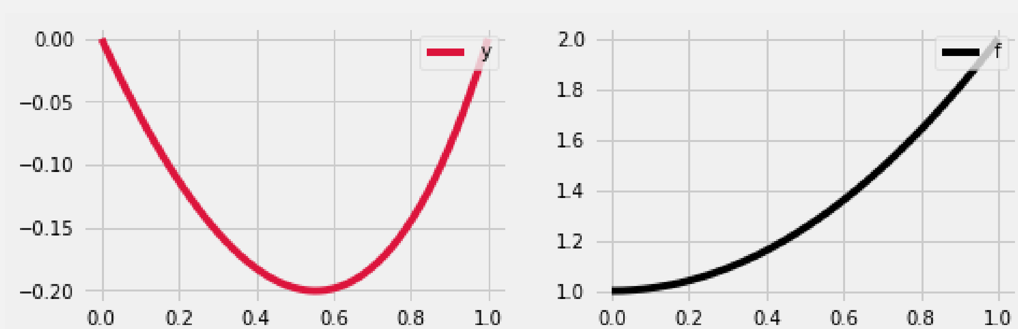
$$y_1 = x \qquad y_2 = 1 - x^2$$

$$y_1' = 1 \qquad y_2' = -2x$$

entonces nuestra solución es:

$$y = y_2 \int_a^x Bf dx' + y_1 \int_x^b Af dx'$$

resolviendo la integral númericamente obtenemos la gráfica de y:



4.-

Resolver las siguientes ecuaciones en derivadas parciales con condiciones iniciales usando el método de separación de variables:

a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ en $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x, y < c, 0 < z < L\}$ con $u(x, y, z)$ anulándose en todos los lados del parlelepípedo excepto en $z = L$ donde $u(x, y, L) = V$.

b) $-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = Eu$ en $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c\}$ con $u(x, y, z)$ anulándose en todos los lados del paralelepípedo.

a)

Suponemos nuestra solución es de la forma:

$$U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

se tiene entonces:

$$\nabla U = U\left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z}\right)$$

por las condiciones del problema se debe de satisfacer:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

proponemos las relaciones:

$$-k_n^2 - k_m^2 + k_{nm}^2 = 0$$

las solciones a esto son:

$$X_n = \begin{cases} sin(k_n x) \\ cos(k_n x) \end{cases}$$

$$Y_m = \begin{cases} sin(k_m y) \\ cos(k_m y) \end{cases}$$

$$Z_{nm} = \begin{cases} sinh(k_{nm} z) \\ cosh(k_{nm} z) \end{cases}$$

de acuerdo a las condiciones del problema:

$$\begin{aligned} U(x, 0, z) &= 0 \qquad & U(0, y, z) &= 0 \\ U(x, c, z) &= 0 & U(c, y, z) &= 0 \\ U(x, y, 0) &= 0 & U(x, y, L) &= V \end{aligned}$$

por lo cual elegimos:

$$X_n(x) = sin\left(\frac{\pi n}{c} x\right)$$

$$Y_m(y) = sin\left(\frac{\pi m}{c} y\right)$$

$$Z_{nm}(z) = sinh(k_{nm} z) \quad k_{nm} = \frac{\pi\sqrt{n^2 + m^2}}{c}$$

ahora bien, proponemos como solución una combinación lineal de nuestras soluciones, esto es:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} X_n Y_m Z_{nm}$$

definimos $C_{nm} = A_{nm}Z_{nm}(L)$ y obtenemos la relación:

$$U(x,y,L) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{nm}X_n(x)Y_m(y)$$

como $\{\frac{4}{c^2}sin(\frac{\pi n}{c}x)sin(\frac{\pi m}{c}y), \quad n,m \in N\}$ son base ortonormal del espacio de funciones continuas de périodo c en x y y:

$$C_{nm} = \frac{4}{c^2}\int_0^c\int_0^c V sin\left(\frac{\pi n}{c}x\right) sin\left(\frac{\pi m}{c}y\right) dxdy$$

haciendo cuentas encontramos:

$$A_{nm} = \begin{cases} \frac{16V}{nm\pi^2}\frac{1}{sinh(k_{nm}L)} & m,n \in impares \\ 0 & c.c \end{cases}$$

b)

Nuevamente calculando el gradiente obtenemos:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -E$$

proponemos las relaciones:

$$-k_n^2 - k_m^2 - k_l^2 = -E$$

dada las condiciones del problema elegimos:

$$X_n(x) = sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)$$
$$Y_m(y) = sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right)$$
$$Z_l(z) = sin\left(\frac{\pi l}{c}z\right)$$

entonces tenemos un conjunto de soluciones:

$$U_{nml} = X_nY_mZ_l$$

que satisfacen:

$$-\nabla^2 U_{nml} = E_{nml}$$
$$E_{nml} = k_n^2 + k_m^2 + k_l^2$$

tambien cualqueir multiplicación por un escalar de estas solcuiones sigue siendo solución al problema, en el caso de que E no se pueda ver de esta forma se tiene la solución trivial $U = 0$.

Bibliografía

- *Mathematical Methods in the Physical Sciences.* Boas, Mary. Tercera Edición. Lehigh Press. 2006. Cap.