Tarea 8 Mecánica Analítica

Cerritos Lira Carlos

6 de Mayo del 2020

Problemas

1.-

6.7)

En un espectrómetro de masas, se acelera un ion posotivo de una sola carga ($q = 1.602 \times 10^{-19} coloumbs$) por medio de una diferencia de potencial de $1000 voltios$. Luego pasa por un campo magnético uniforme en el que $B = 0.1 weber/m^2$, y se desvía en una trayectoria circular de $0.182m$ de radio. Determinar:

a) La velocidad del ion.

b) La masa del ion en kilogramos y unidades de masa atómica.

c) El número de masa del ion.

a)

Despejamos v^2 de la ecuación del trabajo y la energía:

$$v^2 = \frac{2qV}{m}$$

encontramos la nuevamente la velocidad usando el movmiento circular que sigue una vez entra al campo magnético, donde:

$$v = \frac{rqB}{m}$$

juntando ambas obtenemos:

$$v = \frac{2V}{rB} = 1.1 \times 10^5 m/seg$$

b)

De la equación del trabajo y la energía despejamos m

$$m = \frac{2qV}{v^2} = 2.64 \times 10^{-26} kg = 15.94 uma$$

c)

$$A = 15$$

2.-

6.9

En la posición $x = 0, y = 0$, un cañón tiene un alcance máximo l_m. Determinar los dos ángulos de elevación para hacer blanco en el punto:

$$x = l_m/2, \quad y = l_m/4$$

Usamos las coordenadas x, y, donde tomamos un sistema de referencia tal que al incio ambas sean cero:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ U &= mgy \end{aligned}$$

usando Lagrange llegamos a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{y} + mg &= 0 \end{aligned}$$

de donde obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= v_{0x}t \\ y &= -\frac{gt^2}{2} - v_{0yt} \end{aligned}$$

de la ecuación para y despejamos el tiempo en función de θ:

$$t = \frac{2v_0 sin\theta}{g}$$

la distancia recorrida para este tiempo es:

$$\begin{aligned} x &= v_{0x}t \\ &= v_0 cos\theta \frac{2v_0 sin\theta}{g} \\ &= \frac{2v_0^2}{g} sin\theta cos\theta \end{aligned}$$

de donde obtenemos el alcance máximo se obtiene cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$, dando:

$$l_m = \frac{v_0^2}{g}$$

veremos el tiempo que tarda el proyectil en alcanzar $l_m/2$

$$t = \frac{l_m}{2v_0 cos\theta}$$

para este tiempo queremos $y = \frac{l_m}{4}$, sustituyendo en la ecuación de movimiento:

$$\begin{aligned} \frac{l_m}{4} &= -\frac{g}{2}\frac{l_m^2}{4v_0^2 cos^2\theta} + v_0 sin\theta \frac{l_m}{2v_0 cos\theta} \\ \frac{1}{4} &= -\frac{gl_m}{8v_0^2 cos^2\theta} + \frac{tan\theta}{2} \\ \frac{1}{4} &= -\frac{1}{8}(1 + tan^2\theta) + \frac{1}{2}tan\theta \\ 0 &= tan^2\theta - 4tan\theta + 3 \end{aligned}$$

cambiando nuestra variable por $x = tan\theta$, encontramos las soluciones:

$$\begin{aligned} x_1 = 1, \quad x_2 = 3 \\ \theta_1 = 45, \quad \theta_2 = 71.5 \end{aligned}$$

3.-

8.13

Una cuenta de masa $3m$ puede deslizarse horizontalmente sin rozamiento por un alambre como se indica en la figura $8-14$. Unido a la cuerta hay un péndulo doble. Si, en una posición cercana a la de su equilibrio, se deja el sistema en libertad, a partir del reposo, las masas oscilan en el plano de la figura a un lado y al otro de la vertical.

a) Escriba las ecuaciones de Lagrange del movimiento del sistema.

b) Hállese las aceleraciones cuando los desplazamientos y las aceleraciones son pequeñas.

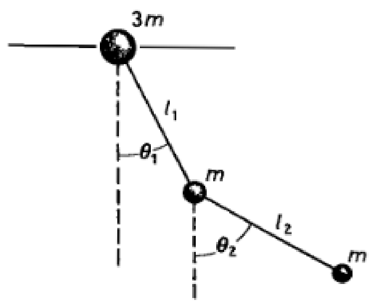

FIG. 8-14

a)

Sean x, x_1, x_2 la posición de las masas, definimos los vectores:

$$\boldsymbol{e}_{r_1} = sin\theta_1 \boldsymbol{i} - cos\theta_1 \boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{e}_{\theta_1} = cos\theta_1 \boldsymbol{i} + sin\theta_1 \boldsymbol{j}$$

con ayuda de estos vectores describimos el movimiento:

$$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x} + l_1\boldsymbol{e}_{r_1}$$
$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 + l_2\boldsymbol{e}_{r_2}$$

de donde obtenemos:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \dot{x}\boldsymbol{i} \\
\boldsymbol{v}_1 &= \dot{x}\boldsymbol{i} + l_1\dot{\theta}_1\boldsymbol{e}_{\theta_1} \\
&= (\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 cos\theta_1)\boldsymbol{i} - l_1\dot{\theta}_1 sin\theta_1 \boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{v}_2 &= \dot{x}\boldsymbol{i} + l_1\dot{\theta}_1\boldsymbol{e}_{\theta_1} + l_2\dot{\theta}_2\boldsymbol{e}_{\theta_2} \\
&= (\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 cos\theta_2)\boldsymbol{i} - (l_1\dot{\theta}_1 sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 sin\theta_2)\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

calculamos la energía cinética y potencial utilizando las coordenadas generalizadas θ_1, θ_2:

$$\begin{aligned}
T = &\frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}_1^2 sin^2\theta_1 + \frac{1}{2}m(l_1\dot{\theta}_1 cos\theta_1 + \dot{x})^2 \\
&+ \frac{1}{2}m(l_1\dot{\theta}_1 sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 sin\theta_2)^2 \\
&+ \frac{1}{2}m(l_1\dot{\theta}_1 cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 cos\theta_2 + \dot{x})^2 \\
U = &\, mgy_1 + mgy_2 \\
&= -mgl_1 cos\theta_1 - mg(l_1 cos\theta_1 + l_2 cos\theta_2) \\
&= -2mgl_1 cos\theta_1 - mgl_2 cos\theta_2
\end{aligned}$$

Obtenemos las ecuaciones de movmiento utilizando la relación:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

para θ_1 tenemos:

$$\begin{aligned}
&ml_1^2\dot{\theta}_1^2 sin\theta_1 cos\theta_1 - m(l_1\dot{\theta}_1)cos\theta_1 + \dot{x})(l_1\dot{\theta}_1 sin\theta_1)\\
&+ m(l_1\dot{\theta}_1 sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 sin\theta_2)l_1\dot{\theta}_1 cos\theta_1\\
&+ m(l_1\dot{\theta}_1 cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 cos\theta_2 + \dot{x})l_1\dot{\theta}_1 sin\theta_1 - 2mgl_1 sin\theta_1\\
&- \frac{d}{dt}\big(ml_1^2\dot{\theta}_1 sin^2\theta_1 + m(l_1\dot{\theta}_1 cos\theta_1 + \dot{x})l_1 cos\theta_1\\
&+ m(l_1\dot{\theta}_1 sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 sin\theta_2)l_1 sin\theta_1\\
&+ m(l_1\dot{\theta}_1 cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 cos\theta_2 + \dot{x})l_1 cos\theta_1\big) = 0
\end{aligned}$$

de forma similar se encuentra una ecuación para θ_2.

b)

Usaremos la aproximación $cosx = 1$, $sinx = x$, además despreciaremos términos pequeños, calculamos la energía potencial y cinética:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l_1\dot{\theta}_1 + \dot{x})^2 + \frac{1}{2}m(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2 + \dot{x})^2\\
U &= -2mgl_1(1 - \tfrac{1}{2}\theta_1^2) - mgl_2(1 - \tfrac{1}{2}\theta_2^2)\\
&= -mg(2l_1 + l_2) + mgl_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}mgl_2\theta_2^2\\
U &= mgl_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}mgl_2\theta_2^2
\end{aligned}$$

donde redefinimos U sabiendo que podemos quitar constantes, usando nuevamente las ecuaciones de Lagrange para θ_1 obtenemos:

$$-2mgl_1\theta_1 - \frac{d}{dt}\Big(m(l_1\dot{\theta}_1 + \dot{x})l_1 + m(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2 + \dot{x})l_1\Big) = 0$$

de forma similar se encuentr auna ecuación para θ_2

4.-

Demostración 8.15

$$[x_i, l_j] = \sum_k e_{ijk}x_k$$

Usaremos las propiedades:

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [x_i, p_j] = \delta_{ij}, \quad [a, b] = -[b, a]$$

para $i = 1$ hacemos cálculos:

$$\begin{aligned}
[x_1, l_1] &= [x_1, x_2p_3 - x_3p_2] \\
&= [x_1, x_2p_3] - [x_1, x_3p_2] \\
&= p_3[x_1, x_2] + x_2[x_1, p_3] - x_3[x_1, p_2] + p_2[x_1, x_3] \\
&= x_2[x_1, p_3] - x_3[x_1, p_2] \\
&= 0 \\
[x_1, l_2] &= [x_1, x_3p_1 - x_1p_3] \\
&= x_3[x_1, p_1] - x_1[x_1, p_3] \\
&= x_3 \\
[x_1, l_3] &= [x_1, x_1p_2 - x_2p_1] \\
&= x_1[x_1, p_2] - x_2[x_1, p_1] \\
&= -x_2
\end{aligned}$$

viendo el patrón solo necesitamos hacer permutaciones ciclicas y cambiar el signo cuando no se siga el orden correcto:

$$\begin{aligned}
[x_2, l_1] &= -x_3 \\
[x_2, l_2] &= 0 \\
[x_2, l_3] &= x_1 \\
[x_3, l_1] &= -x_2 \\
[x_3, l_2] &= x_1 \\
[x_3, l_3] &= 0
\end{aligned}$$

donde se comprueba que en efecto:

$$[x_i, l_j] = \sum_k e_{ijk}x_k$$

5.-

Demostración 8.18

$$\frac{\partial}{\partial x}[X, Y] = [\frac{\partial X}{\partial x}, Y] + [X, \frac{\partial Y}{\partial x}]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}[X, Y] &= \frac{\partial}{\partial x}\sum_i \left(\frac{\partial X}{\partial q_i}\frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial Y}{\partial p_i}\frac{\partial X}{\partial q_i}\right) \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial q_i}\frac{\partial Y}{\partial p_i} + \frac{\partial X}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial p_i}\frac{\partial X}{\partial q_i} - \frac{\partial Y}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial q_i}\right) \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial Y}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial X}{\partial x}\right) + \sum_i \left(+\frac{\partial X}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial q_i}\right) \\
&= [\frac{\partial X}{\partial x}, Y] + [X, \frac{\partial Y}{\partial x}]
\end{aligned}$$