Tarea 5 Mecánica Analítica

Cerritos Lira Carlos

18 de Marzo del 2020

Problemas

1.-

Calcule la desviación de la plomada en el hemisferio sur.

Consideremos dos sistemas de referencia, S en el centro de la tierra y S' en la superficie de la Tierra orientado como en el dibujo:

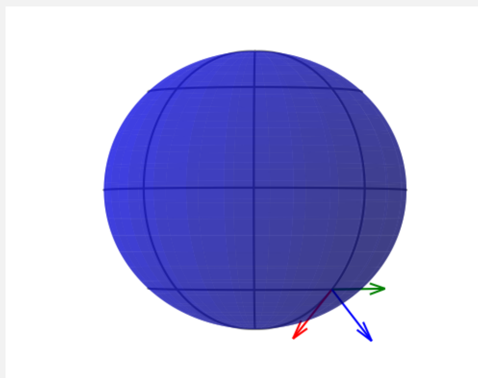

Figure 1: Sistema de referencia S'

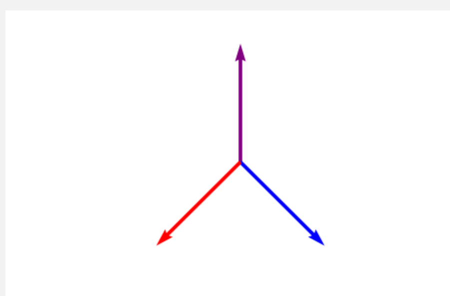

Figure 2: Relación entre vectores $\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}$

sabemos que se cumple la relación:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2(\boldsymbol{r'} + \boldsymbol{R'})}{dt^2} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d(\boldsymbol{r'} + \boldsymbol{R'})}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{r'} + \boldsymbol{R'}))$$

usando las condiciones del problema:

$$\boldsymbol{R'} = R\boldsymbol{k}$$
$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -g\boldsymbol{k}$$

quitando los términos que se hacen cero o son muy pequeños obtenemos la relación:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\boldsymbol{r'}}{dt^2} &= \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R'}) \\ &= \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a_c}\end{aligned}$$

escribimos a $\boldsymbol{\Omega}$ como combinación lineal de $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}$:

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} &= cos(\pi - \lambda)\boldsymbol{i} + cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)\boldsymbol{k} \\ \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} &= -cos\lambda\boldsymbol{i} + sin\lambda\boldsymbol{k} \\ \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R'}}{\Omega R} &= cos\lambda\boldsymbol{j} \\ \frac{\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R'})}{\Omega^2 R} &= -cos^2\lambda\boldsymbol{k} - sin\lambda cos\lambda\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

sustituyendo obtenemos la aceleración:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\boldsymbol{r'}}{dt^2} &= \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a_c} \\ &= -g\boldsymbol{k} + \Omega^2 Rcos^2\lambda\boldsymbol{k} + \Omega^2 Rsin\lambda cos\lambda\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

procedemos a encontrar el ángulo entre $\boldsymbol{g}$ y $\boldsymbol{g_{real}}$

$$\begin{aligned}cos\theta &= \frac{\boldsymbol{g}}{g} \cdot \frac{\boldsymbol{g - a_c}}{\Omega^2 R} \\ &= \frac{\frac{g}{\Omega^2 R} - cos^2\lambda}{((\frac{g}{\Omega^2 R})^2 + cos^4\lambda + sin^2\lambda cos^2\lambda)^{1/2}} \\ &= \frac{\frac{g}{\Omega^2 R} - cos^2\lambda}{((\frac{g}{\Omega^2 R})^2 + cos^2\lambda)^{1/2}}\end{aligned}$$

se puede ver un resultado esperado, esto es, cuando $\lambda = \frac{\pi}{2}$, se tiene $\theta = 0$

2.-

Calcule la magnitud y la dirección de la desviación de la caída libre en el hemisferio sur.

Definimos nuevamente dos sistemas de referencia, S en el centro del planeta y S' como en la figura 1.
Sabemos que se cumple la relación:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2(\boldsymbol{r'} + \boldsymbol{R'})}{dt^2} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d(\boldsymbol{r'} + \boldsymbol{R'})}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{r'} + \boldsymbol{R'}))$$

usamos las condiciones del problema:

$$\boldsymbol{R'} = R\boldsymbol{k}$$
$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -g\boldsymbol{k}$$

ignorando la aceleración centrípeta obtenemos la relaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\boldsymbol{r'}}{dt^2} &= \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\boldsymbol{r'}}{dt} \\
&= \boldsymbol{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\boldsymbol{r'}}{dt} \\
\frac{d\boldsymbol{r'}}{dt} &= (t-t_0)\boldsymbol{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r'_0}) + \boldsymbol{v'_0} \\
\boldsymbol{r'} &= \frac{(t-t_0)^2}{2}\boldsymbol{g} + (t-t_0)\boldsymbol{v'_0} - \int_{t_0}^{t} 2\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r'_0}) + \boldsymbol{r'_0} \\
&= \frac{(t-t_0)^2}{2}\boldsymbol{g} + (t-t_0)\boldsymbol{v'_0} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{r'} + 2(t-t_0)\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r'_0} + \boldsymbol{r'_0}
\end{aligned}$$

aproximamos el valor de $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r'}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r'} &= \boldsymbol{\Omega} \times \left[\frac{(t-t_0)^2}{2}\boldsymbol{g} + (t-t_0)\boldsymbol{v'_0} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{r'} + 2(t-t_0)\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r'_0} + \boldsymbol{r'_0}\right] \\
&= \boldsymbol{\Omega} \times \left[\frac{(t-t_0)^2}{2}\boldsymbol{g} + (t-t_0)\boldsymbol{v'_0} + \boldsymbol{r'_0}\right]
\end{aligned}$$

sustituyendo encontramos expresión analítica de $\frac{d\boldsymbol{r'}}{dt}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{r'}}{dt} &= (t-t_0)\boldsymbol{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \left[\frac{(t-t_0)^2}{2}\boldsymbol{g} + (t-t_0)\boldsymbol{v'_0}\right] + \boldsymbol{v'_0} \\
\boldsymbol{r'} &= \left[(t-t_0) - (t-t_0)^2\boldsymbol{\Omega}\times\right]\boldsymbol{v'_0} + \left[\frac{(t-t_0)^2}{2} - \frac{(t-t_0)^3}{3}\boldsymbol{\Omega}\times\right]\boldsymbol{g} \\
&= \left[\frac{(t-t_0)^2}{2} - \frac{(t-t_0)^3}{3}\boldsymbol{\Omega}\times\right]\boldsymbol{g}
\end{aligned}$$

si definimos $\boldsymbol{d} = -\frac{(t-t_0)^3}{3}\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{g}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d} &= -\frac{(t-t_0)^3}{3}\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{g} \\
&= \frac{g(t-t_0)^3}{3}g\Omega(-cos\lambda\boldsymbol{i} + sin\lambda\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{k} \\
&= \frac{(t-t_0)^3}{3}g\Omega cos\lambda\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

de donde obtenemos $\boldsymbol{r'}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r'} &= \frac{(t-t_0)^2}{2}\boldsymbol{g} + \boldsymbol{d} \\
&= -\frac{(t-t_0)^2}{2}g\boldsymbol{k} + \frac{(t-t_0)^3}{3}g\Omega cos\lambda\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

obtenemos un resultado esperado, la fuerza centrifuga es la mismas latitudes pero diferentes hemisferios.

3.-

Calcule la magnitud y la dirección de la desviación del tiro vertical en el hemisferio norte

Tomemos dos sistemas de referencia, S en el centro del planeta y S' como en la figura 1. En el problema 1 vimos que $\boldsymbol{\Omega}$ tiene los mismos coeficientes en la combinación lineal para ambos hemisferios.
Del problema 2 tenemos la relación

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r'} &= \left[(t-t_0) - (t-t_0)^2\boldsymbol{\Omega}\times\right]\boldsymbol{v_0'} + \left[\frac{(t-t_0)^2}{2} - \frac{(t-t_0)^3}{3}\boldsymbol{\Omega}\times\right]\boldsymbol{g} \\
&= (t-t_0)\boldsymbol{v_0'} + \frac{(t-t_0)^2}{2}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\Omega}\times\left[(t-t_0)^2\boldsymbol{v_0'} + \frac{(t-t_0)^3}{3}\boldsymbol{g}\right] \\
&= (t-t_0)\boldsymbol{v_0'} + \frac{(t-t_0)^2}{2}\boldsymbol{g} + \boldsymbol{d}
\end{aligned}$$

desarrollamos $\boldsymbol{d}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d} &= -\boldsymbol{\Omega}\times\left[(t-t_0)^2\boldsymbol{v_0'} + \frac{(t-t_0)^3}{3}\boldsymbol{g}\right] \\
&= -\boldsymbol{\Omega}\times\left[(t-t_0)^2 v_0' - \frac{(t-t_0)^3}{3}g\right]\boldsymbol{k} \\
&= -\left[(t-t_0)^2 v_0' - \frac{(t-t_0)^3}{3}g\right]\Omega cos\lambda\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

encontramos un resultado intuitivo, a medida que nuestro objeto sube observamos una fuerza lo desvia en la dirección $-\boldsymbol{j}$.

4.-

Encontrar las velocidades y las aceleraciones de las partículas p_1 y p_2 del péndulo doble representando en la figura $3-17$: a) cuando el movimiento está confinado a un plano vertical (expresar $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{a}$ en función de $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$, etc)

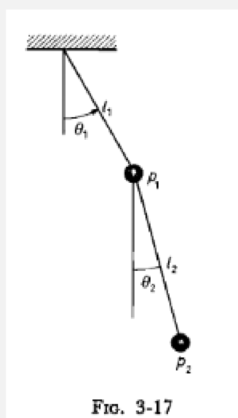

Figure 3: Péndulo doble, movimiento contenido en un plano

Consideremos nuevos vectores para describir el movimiento $\boldsymbol{e_{\theta_1}}, \boldsymbol{e_{\theta_2}}$, llamemos $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ a las funciones que nos dan la posición de las respectivas partículas en un tiempo t, se tiene la relación:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x_1} &= l_1\boldsymbol{e_{\theta_1}} \\
\boldsymbol{x_2} &= \boldsymbol{x_1} + l_2\boldsymbol{e_{\theta_2}}
\end{aligned}$$

hacemos analisis para $\boldsymbol{e_{\theta_1}}$:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e_{\theta_1}} &= sin\theta_1\boldsymbol{i} - cos\theta_1\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{e_{\dot{\theta}_1}} &= \dot{\theta}_1(cos\theta_1\boldsymbol{i} + sin\theta_1\boldsymbol{j}) \\
&= \dot{\theta}_1\boldsymbol{e_{\phi_1}} \\
\boldsymbol{e_{\dot{\phi}_1}} &= \dot{\theta}_1(-sin\theta_1\boldsymbol{i} + cos\theta_1\boldsymbol{j}) \\
&= -\dot{\theta}_1\boldsymbol{e_{\theta_1}}
\end{aligned}
$$

para $\boldsymbol{e_{\theta_1}}$ se cumplen las mismas relaciones, esto es:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e_{\dot{\theta}_2}} &= \dot{\theta}_2\boldsymbol{e_{\phi_2}} \\
\boldsymbol{e_{\dot{\phi}_2}} &= -\dot{\theta}_2\boldsymbol{e_{\theta_2}}
\end{aligned}
$$

haciendo calculos encontramos:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v_1} &= l_1\dot{\theta}_1\boldsymbol{e_{\phi_1}} \\
\boldsymbol{v_2} &= \boldsymbol{v_1} + l_2\dot{\theta}_2\boldsymbol{e_{\phi_2}} \\
\boldsymbol{a_1} &= l_1(\ddot{\theta}_1\boldsymbol{e_{\phi_1}} - \dot{\theta}_1^{\,2}\boldsymbol{e_{\theta_1}}) \\
\boldsymbol{a_2} &= \boldsymbol{a_1} + l_2(\ddot{\theta}_2\boldsymbol{e_{\phi_2}} - \dot{\theta}_2^{\,2}\boldsymbol{e_{\theta_2}})
\end{aligned}
$$

las cuales son las relaciones que buscamos.

5.-

Se lanza un bloque hacia arriba sobre un plano inclinado con una velocidad inicial v_0. Si el plano forma un ángulo θ con la horizontal y el coeficiente de rozamiento(deslizante) entre el plano y el bloque es μ, hallése el tiempo que tarda el bloque en volver al pie del plano inclinado. ¿Cuál será el valor mínimo del coficiente de rozamiento en resposo o estático para que el bloque se detenga en el plano inclinado?

Diagrama de fuerzas del problema:

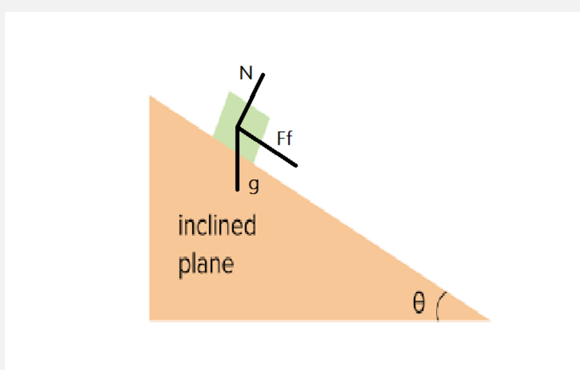

Figure 4: Diagrama problema plano inclinado con velocidad inicial

Encontramos que la fuerza que actua en el objecto es

$$\frac{\boldsymbol{F}}{m} = -g(\mu cos\theta + sin\theta)\boldsymbol{i}$$

de donde obtenemos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}$ la posición y velocidad en function del tiempo:

$$\boldsymbol{v} = (v_0 - tg(\mu cos\theta + sin\theta))\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{x} = (tv_0 - \frac{t^2}{2}g(\mu cos\theta + sin\theta))\boldsymbol{i}$$

encontramos el tiempo de ascenso t_a, usando la condición $\boldsymbol{v} = 0$

$$\begin{aligned} t_a &= \frac{v_0}{g(\mu cos\theta + sin\theta)} \\ \boldsymbol{x}(t_a) &= \left[\frac{v_0^2}{g(\mu cos\theta + sin\theta)} - \frac{v_0^2}{2g(\mu cos\theta + sin\theta)}\right]\boldsymbol{i} \\ &= \frac{v_0^2}{g(\mu cos\theta + sin\theta)}\boldsymbol{i} \\ &= x_a\boldsymbol{i} \end{aligned}$$

ahora bien, una ves se detiene las fuerzas que actuan en el objeto son:

$$\frac{\boldsymbol{F}}{m} = g(\mu cos\theta - sin\theta)\boldsymbol{i}$$

de donde obtenemos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}$ para $t \geq t_a$:

$$\boldsymbol{v} = (t - t_a)g(\mu cos\theta - sin\theta)\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{x} = (x_a + \frac{(t-t_a)^2}{2}g(\mu cos\theta - sin\theta))\boldsymbol{i}$$

encontramos el tiempo de descenso t_d, usando la condición $\boldsymbol{x}(t_d + t_a) = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} t_d^2 &= -\frac{x_a}{g(\mu cos\theta - sin\theta)} \\ &= -\frac{v_0^2}{g(\mu cos\theta + sin\theta)g(\mu cos\theta - sin\theta)} \\ &= \frac{v_0^2}{g^2(sin^2\theta - \mu^2 cos^2\theta)} \\ t_d &= \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2(sin^2\theta - \mu^2 cos^2\theta)}} \end{aligned}$$

el tiempo que tarda el bloque en volver es entonces:

$$t = t_a + t_d$$

para que el bloque se detenga se debe de cumplir $\boldsymbol{v}(t_a + t_d) = \mathbf{0}$, de donde obtenemos la condición:

$$\mu_{min} = tan\theta$$