

Tarea 6 Mecánica Analítica

Cerritos Lira Carlos

18 de Marzo del 2020

Problemas

1.-

3.4)

Un niño monta un "caballito" que sube y baja sinusoidalmente $h = h_0 \sin(\omega t)$ con relación a un tiovivo que gira alrededor de la vertical con una velocidad (tangencial) constante Ω . si el niño está a una distancia c del eje de rotación, halléase una expresión de su aceleración relativa al suelo en función de Ω, c, h_0, ω y t .

Definimos dos sistemas, S en reposo en el centro del juego y S' justo debajo del caballito como en la figura:



definimos los vectores:

$$\mathbf{e}_r = \cos(\Omega t)\mathbf{i} + \sin(\Omega t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_\theta = \sin(\Omega t)\mathbf{i} - \cos(\Omega t)\mathbf{j}$$

Sea \mathbf{r} la función de posición en el sistema S , se tiene:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}' + \mathbf{r}'$$

$$= c\mathbf{e}_r + h_0 \sin(\omega t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = -c\Omega \mathbf{e}_\theta + h_0 \omega \cos(\omega t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = -c\Omega^2 \mathbf{e}_r - h_0 \omega^2 \sin(\omega t)\mathbf{k}$$

2.-

4.2)

Encontrar la posición en un tiempo t de una partícula de masa m , cuando la fuerza aplicada es $F = 2m\cos(\omega t)$ y $x = 8$ a $t = 0$ y $x = -b$ a $t = \frac{\pi}{2\omega}$.

Tenemos la siguiente información:

$$\mathbf{a} = 2\cos(wt)\mathbf{i}$$

$$\mathbf{v} = \left(\frac{2}{w} \sin(wt) + v(0) \right) \mathbf{i}$$

$$\mathbf{x} = \left(-\frac{2}{w^2} \cos(wt) + v(0)t + \frac{2}{w^2} + x(0) \right) \mathbf{i}$$

donde

$$x(0) = 8$$

podemos encontrar el valor de $v(0)$ mediante la relación $\mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2w}\right) = -b\mathbf{i}$, de donde obtenemos:

$$v(0) = -\frac{\frac{2}{w^2} + 8 + b}{\frac{\pi}{2w}}$$

3.-

4.4)

- Si la velocidad límite de caída de un hombre de $80kg$, con paracaídas, es la misma que tendría al caer libremente $0.75m$; hallar el valor de esta velocidad límite y la constante de amortiguamiento k (supóngase $F_{amort} = -mkv$)
- Supongamos ahora que el hombre cae libremente (partiendo del reposo) durante 5 segundos y que después abre su paracaídas. Luego de otros 5 segundos, ¿cual será su velocidad?

Caída con paracaídas

Sea v la función de velocidad del hombre en caída libre con paracaídas, donde se elige un sistema de referencia tal que $x(0) = 0, v(0) = 0$, de acuerdo al problema se satisface la ecuación diferencial:

$$v' = g - kv$$

que tiene por solución:

$$v = \frac{g}{k} - \frac{g}{k} e^{-kt}$$

vemos que cuando $t \rightarrow \infty$ se cumple:

$$v_t = \frac{g}{k}$$

a)

La velocidad y posición en caída libre son:

$$v = gt$$

$$x = \frac{g}{2} t^2$$

el tiempo que transcurre cuando se recorre una distancia x_0 es:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2}{g} x_0}$$

la velocidad que se alcanza es:

$$v_t = \sqrt{2gx_t} = 3.83 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

despejando k obtenemos:

$$k = \frac{g}{v_t} = 2.55[s^{-1}]$$

b)

La función que nos dice su velocidad para $t > 5$ es:

$$v = \frac{g}{k} - \frac{g}{k}e^{-k(t-5)} + 5g$$
$$v(10) = 52 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

4.-

4.7)

Una partícula de masa m tiene aplicada una fuerza $F = -kx^2$. Si $\dot{x} = v_0$ cuando $x = 0$, hállese:

- a) la ecuación de la energía
- b) el punto de retorno
- c) la velocidad en cualquier posición

a)

Encontramos una energía potencial que satisface $U(0) = 0$ usando la relación:

$$U(x) = - \int_0^x F(x') dx'$$
$$= \frac{k}{3} x^3$$

por el teorema del trabajo y la energía se tiene la relación:

$$U + K = U(0) + K(0)$$
$$\frac{k}{3} x^3 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 = E$$

b)

En el punto de retorno se satisface $U = E \implies \dot{x} = 0$, despejando x de la ecuación de energía obtenemos:

$$x = \left(\frac{3m}{2k} v_0^2 \right)^{\frac{1}{3}}$$

c)

Despejando \dot{x} de la ecuación de energía obtenemos:

$$\dot{x} = \sqrt{v_0^2 - \frac{2k}{3m} x^3}$$

5.-

3.3)

Un semicilindro se balance sinusoidalmente sin deslizamiento, como se muestra en la figura 3 – 11, de tal forma que $\theta = \sin 2t$.

- a) Cuando pasa por la posición neutra $\theta = 0$, ¿cuál es la aceleración del punto de contacto con la superficie fija?

- b) Cuando el semicilindro está al ángulo máximo de 1 radian ¿cuál es la aceleración del punto de contacto con la superficie fija?

Caso general

Definimos dos sistemas como en la imagen:

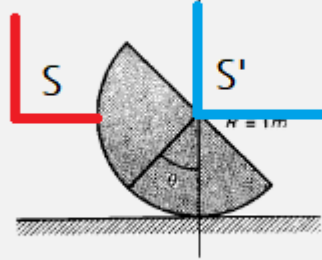


FIG. 3-11

Sea \mathbf{r} la función de posición en el sistema S para el punto que se hace de contacto al tiempo t_0 , como se balancea sin deslizamiento:

$$\mathbf{R} = \theta \mathbf{i}$$

$$\mathbf{r}' = \sin(\theta_0 - \theta) \mathbf{i} - \cos(\theta_0 - \theta) \mathbf{j}$$

El movimiento respecto al sistema en reposo S , está dado por:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{v} = \dot{\theta} \mathbf{i} - \dot{\theta} \cos(\theta_0 - \theta) \mathbf{i} - \dot{\theta} \sin(\theta_0 - \theta) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \ddot{\theta} \mathbf{i} - (\ddot{\theta} \cos(\theta_0 - \theta) + \dot{\theta}^2 \sin(\theta_0 - \theta)) \mathbf{i} - (\ddot{\theta} \sin(\theta_0 - \theta) - \dot{\theta}^2 \cos(\theta_0 - \theta)) \mathbf{j}$$

La aceleración de este punto cuando se hace de contacto es:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t_0) &= \ddot{\theta}(t_0) \mathbf{i} - \ddot{\theta}(t_0) \mathbf{i} + \dot{\theta}^2(t_0) \mathbf{j} \\ &= 4 \cos^2(2t_0) \mathbf{j} \left[\frac{m}{s^2} \right] \end{aligned}$$

a)

En este caso $t_0 = 0[s]$, sustituyendo obtenemos:

$$\mathbf{a} = 4 \mathbf{j} \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

b)

En este caso tenemos $t_0 = \frac{\pi}{4}[s]$, sustituyendo obtenemos:

$$\mathbf{a} = 0 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$