Tarea 9 Mecánica Analítica

Cerritos Lira Carlos

8 de Mayo del 2020

Problemas

1.-

6.10)

Una partícula positiva de carga e (fig. 6-16) se mueve en el campo eléctrico central

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\alpha}{\rho}\boldsymbol{e}_\rho$$

que hay entre las placas de un condensador cilíndrico, y en un campo magnético uniforme:

$$\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{k}$$

paralelo al eje del condensador.

a) Establecer las ecuaciones de movmiento de la partícula en coordenadas cilíndricas.

b) Demostrar que la ecuación de movmimiento, en función de la variable anular ϕ, que es una coordenada que se puede no considerar, se resuelve fácilmente y da como integral de movmiento

$$m\rho^2\dot{\phi} + \frac{1}{2}e\rho^2 B = h = constante$$

c) Demuestrar que, utilizando el resultado hallado en b), la ecuación radial se puede reducir a una ecuación de movimiento unidimensional, que nos dará una segunda integral del movimiento que expresa la conservación de la energía total.

d) Si la partícula es emitida del cilindro interior con una velocidad:

$$\boldsymbol{v}_0 = v_0\boldsymbol{e}_p$$

¿cuál debe ser el valor mínimo de v_0 para que la partícula llegue al otro cilindro cuyo radio es R_2. [Sugerencia: el valor mínimo de v_0 se obtendrá cuando R_2 sea un punto de retorno]

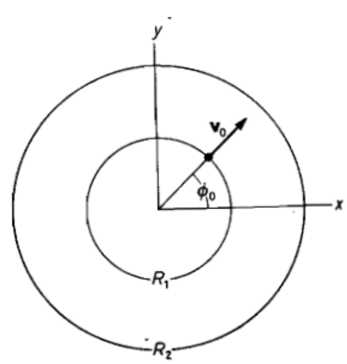

Fig. 6-16

a)

Recordamos que en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= \rho cos\phi \boldsymbol{i} + \rho sin\phi \boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{v} &= (\dot{\rho} cos\phi - \rho\dot{\phi} sin\phi)\boldsymbol{i} + (\dot{\rho} sin\phi + \rho\dot{\phi} cos\phi)\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k} \\
\dot{r}^2 &= \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 \\
\boldsymbol{e}_\rho &= cos\phi \boldsymbol{i} + sin\phi \boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

El campo eléctrico y magnético son de la forma:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= -\nabla\Phi = -\boldsymbol{\nabla}\alpha ln(\rho) \\
\boldsymbol{B} &= \nabla \times \boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

en este caso $\boldsymbol{A}$ está dado por:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= -\frac{1}{2}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}) \\
&= -\frac{1}{2}(\boldsymbol{r} \times B\boldsymbol{k}) \\
&= -\frac{1}{2}B\rho(sin\phi \boldsymbol{i} - cos\phi \boldsymbol{j}) \\
\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} &= -\frac{1}{2}B\rho\Big[sin\phi(\dot{\rho} cos\phi - \rho\dot{\phi} sin\phi) - cos\phi(\dot{\rho} sin\phi + \rho\dot{\phi} cos\phi)\Big] \\
&= \frac{1}{2}B\rho^2\dot{\phi}(cos\phi^2 + sin\phi^2) \\
&= \frac{1}{2}B\rho^2\dot{\phi}
\end{aligned}$$

de donde obtenemos:

$$\begin{aligned}
L &= T - U + e\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + z^2) - e\alpha ln(\rho) + \frac{1}{2}eB\rho^2\dot{\phi}
\end{aligned}$$

recordamos que se satisface la relación:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

aplicado a ϕ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= 0 \\
\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi} + \frac{1}{2}eB\rho^2) &= 0
\end{aligned}$$

aplicado a ρ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \rho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} &= 0 \\
m\rho\dot{\phi}^2 - e\alpha\frac{1}{\rho} + eB\rho\dot{\phi} - \frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) &= 0 \\
m\rho\dot{\phi}^2 - e\alpha\frac{1}{\rho} + eB\rho\dot{\phi} - m\ddot{\rho} &= 0
\end{aligned}$$

b)

De la ecuación de movmiento obtenida en a), para ϕ se tiene:

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi} + \frac{1}{2}eB\rho^2) = 0$$

de donde se obtiene la relación deseada.

c)

De la ecuación de movimiento obtenida en a), para ρ se tiene:

$$m\rho\dot{\phi}^2 - e\alpha\frac{1}{r} + eB\rho\dot{\phi} - m\ddot{\rho} = 0$$

remplazando $\dot{\phi}$ de la parte b) obtenemos:

$$\dot{\phi} = \frac{1}{m^2}\left(\frac{h}{\rho^2} - \frac{1}{2}eB\right)$$

remplazando obtenemos:

$$\begin{aligned} m\rho\dot{\phi}^2 - e\alpha\frac{1}{r} + eB\rho\dot{\phi} - m\ddot{\rho} = 0 \\ m\rho\frac{1}{m^2}\left(\frac{h}{\rho^2} - \frac{1}{2}eB\right)^2 - e\alpha\frac{1}{\rho} + eB\rho\frac{1}{m^2}\left(\frac{h}{\rho^2} - \frac{1}{2}eB\right) - m\ddot{\rho} = 0 \end{aligned}$$

donde se observa obtuvimos una ecuación unidimensional para ρ

d)

Sabemos que para este sistema $H = T + U$ es una constante, esto se puede comprobar si calculamos $H = p_i\dot{q}_i - L$, como R_2 es un punto de retorno $T(R_2) = 0$, de donde obtenemos:

$$\begin{aligned} T(R_1) + U(R_1) &= U(R_2) \\ \frac{1}{2}v_0^2 + \alpha ln(R_1) &= \alpha ln(R_2) \\ v_0^2 &= 2\alpha ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \end{aligned}$$

2.-

8.1)

Una partícula estacionaria de masa $3mkg$, estalla en tres piezas iguales dos de las cuales vuelan en direcciones perpendiculares entre sí, una con una velocidad $2a\frac{m}{s}$ y la otra a $3a\frac{m}{s}$. ¿Cuál es la magnitud, dirección y sentido de la cantidad de movimiento del tercer fragmento?. La explosión tiene lugar en $10^{-5}s$. Hállese la fuerza que actúa sobre cada pieza durante la explosión.

Elegimos un sistema de referencia donde las partículas salgan en direcciones $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ respectivamente.
Usando conservación del momento para un sistema de partículas cuando $\boldsymbol{F}^{ext} = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 &= 0 \\ 2ma\boldsymbol{i} + 3ma\boldsymbol{j} + \boldsymbol{p}_3 &= 0 \\ \boldsymbol{p}_3 &= -m(2a\boldsymbol{i} + 3a\boldsymbol{j}) \end{aligned}$$

Obtenemos la fuerza usando la relación:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_i(t_2) - \boldsymbol{p}_i(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} F_i(t)dt \\ \boldsymbol{p}_i &= F_i(t_2 - t_1) \\ F_i &= p_i \times 10^5 \tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

3.-

8.2)

Un núcleo, originalmente en reposo, se desintegra por la emisión de un electrón, cuya cantidad de movimiento es $1.73\frac{Mev}{C}$ y, perpendicularmente a la dirección del electrón, de un neutrino cuya cantidad de movimiento es $1.0\frac{Mev}{c}$. ¿En qué dirección y sentido recaulará el núcleo?. ¿Cuál será su cantidad de movimiento en $\frac{Mev}{c}$. $3.90 \times 10^{-22}g$. Si la masa del núcleo restante es $3.9 \times 10^{-22}g$, ¿cuál será su energía cinética en electrón volts?

Usamos nuevamente la conservación del momento para un sistema de partículas donde $\boldsymbol{F}^{ext} = 0$, donde tenemos:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 &= 0 \\
p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{p}_3 &= 0 \\
\boldsymbol{p}_3 &= -(p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j})
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2$$

$$\begin{aligned}
T_3 &= \frac{1}{2}m_3v^2 \\
&= \frac{1}{2m_3}p_3^2 \\
&= \frac{1}{2(3.9 \times 10^{-25})}(8.5 \times 10^{-31} + 2.84 \times 10^{-31}) \\
&= \frac{1.134 \times 10^{-30}}{7.8 \times 10^{-25}} \\
&= 1.45 \times 10^{-6}J \\
&= 9.10^6 MeV
\end{aligned}$$

4.-

8.4)

Una partícula de masa M_1 y velocidad V_1 es capturada por un núcleo en reposo, y otra partícula ligera de masa M_2 es expelida con una velocidad V_2 en ángulo recto con la trayectoria de la primera, reculando el resto del núcleo (de masa M_3) con una velocidad V_3. Demuestre que la energía cinética de M_2 es:

$$T = \frac{M_3}{M_2 + M_1}\left(Q + \frac{M_3 - M_1}{M_3}T_1\right)$$

donde Q es la energí liberada o desprendida en la reacción.

Usamos conservación del momento:

$$p_1 + p_3 = 0, \quad p_1 + p_2 = 0$$

de donde obtenemos:

$$V_3 = -\frac{M_1}{M_3}V_1, \quad V_3 = -\frac{M_2}{M_3}V_2$$

por conservación de la energía

$$T_i = T_f - Q$$

cálculamos T_i:

$$\begin{aligned}
T_i &= T_1 - T_3 \\
&= T_1 - \frac{M_3}{2}V_3 \\
&= T_1 - \left(\frac{1}{2}M_1V_1^2\right)\frac{M_1}{M_3} \\
&= T_1\left(1 - \frac{M_1}{M_3}\right) \\
&= T_1\left(\frac{M_3 - M_1}{M_3}\right)
\end{aligned}$$

de manera análoga encontramos T_f:

$$\begin{aligned}
T_f &= T_2 + T_3 \\
&= T_2\left(\frac{M_3 + M_2}{M_3}\right)
\end{aligned}$$

sustituimos en la igualdad y despejamos T_2:

$$\begin{aligned}
T_i &= T_f - Q \\
T_1\left(\frac{M_3 - M_1}{M_3}\right) &= T_2\left(\frac{M_3 + M_2}{M_3}\right) \\
T_2 &= \frac{M_3}{M_2 + M_3}\left(Q + \frac{M_3 - M_1}{M_3}T_1\right)
\end{aligned}$$

5.-

8.16)

Analícese el movimiento del regulador del problema 8.15, si la velocidad angular del eje no está restringida a w, sino que gira libremente sin que tenga ningún momento rotacional externo (o par resistente) aplicando.

a) Hállese la velocidad angular de rotación estacionara para una altura dada, z, del manguito inferior.

b) Hállese la frecuencia de las pequeñas vibraciones por encima y por debajo de este movimiento estacionario.

c) ¿Cuáles son las diferencias entre este movimiento y el del problema 8.15?

a)

b)

c)