

# Tarea 7 Mecánica Analítica

Cerritos Lira Carlos

21 de Abril del 2020

## Problemas

1.-

5.2)

Utilizar el resultado del problema 5-1 para hallar las ecuaciones de Lagrange de una partícula cuya energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}a\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}b\dot{q}_2^2$$

y cuya energía cinética es:

$$U = \frac{1}{2}k_1(q_1 + q_2)^2 + \frac{1}{2}k_2(q_1 - q_2)^2$$

De acuerdo a las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Hacemos cuentas para  $q_1$ :

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0$$

$$-k_1(q_1 + q_2) - k_2(q_1 - q_2) - a\ddot{q}_1 = 0$$

Hacemos cuentas para  $q_2$ :

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0$$

$$-k_1(q_1 + q_2) + k_2(q_1 - q_2) - b\ddot{q}_2 = 0$$

2.-

5.3)

El punto de soporte de un péndulo simple de longitud  $l$  y masa  $m$  se mueve sobre una recta vertical de acuerdo con la ecuación:

$$y = y(t)$$

El movimiento del péndulo es en un plano vertical.

- Establecer las componentes de las ecuaciones de movimiento de Newton para la partícula en las direcciones  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$  mostradas en la figura 5 – 7 (Sugerencia: considérese el movimiento con respecto a un sistema de coordenadas cuya aceleración es  $A = \ddot{y}$ )
- Demostrar que la energía cinética de la partícula está dada por:

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + ml\dot{\theta}\dot{y}\sin\theta$$

c) Dado que la energía potencial escalar es:

$$U = mgy - mgl\cos\theta$$

demostrar que las ecuaciones de Lagrange deducidas de la energía cinética de la parte b) y esta función de la energía potencial para la variable  $\theta$  (ver problema 5 – 1) son equivalentes a la ecuación de Newton a lo largo de  $\vec{e}_2$

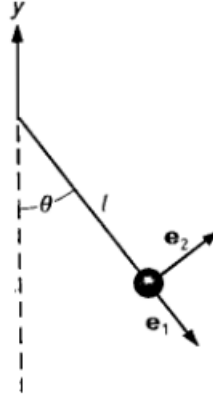


FIG. 5-7

a)

Definimos los vectores:

$$\mathbf{e}_1 = \sin\theta\mathbf{i} - \cos\theta\mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_2 = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$$

describimos el movimiento con ayuda de estos vectores:

$$\mathbf{x} = l\mathbf{e}_1 + y\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = l\dot{\theta}\mathbf{e}_2 + \dot{y}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = l\ddot{\theta}\mathbf{e}_2 - l\dot{\theta}^2\mathbf{e}_1 + \ddot{y}\mathbf{j}$$

de donde obtenemos:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_1 = -ml\dot{\theta}^2 - m\ddot{y}\cos\theta$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_2 = ml\ddot{\theta} + m\ddot{y}\sin\theta$$

por otra parte, haciendo un análisis de fuerzas también encontramos:

$$\mathbf{F} = mg\cos\theta\mathbf{e}_1 - R\mathbf{e}_1 - mg\sin\theta\mathbf{e}_2$$

con  $R$  la tracción o tensión de la cuerda, de donde encontramos nuevamente:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_1 = mg\cos\theta - R$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_2 = -mg\sin\theta$$

de donde encontramos las ecuaciones de movimiento:

$$mg\cos\theta + m\ddot{y}\cos\theta - R = -ml\dot{\theta}^2$$

$$-mg\sin\theta - m\ddot{y}\sin\theta = ml\ddot{\theta}$$

b)

Utilizaremos la coordenada generalizada  $\theta$  para describir el movimiento, donde:

$$x = l\sin\theta$$

$$y = -l\cos\theta + y$$

derivando obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} &= l\dot{\theta}\sin\theta + \dot{y}\end{aligned}$$

podemos encontrar la energía cinética en función de  $\theta$ :

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{y}\sin\theta + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + ml\dot{\theta}\dot{y}\sin\theta\end{aligned}$$

c)

Partimos de la relación:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= 0 \\ (ml\dot{\theta}\dot{y}\cos\theta - mgl\sin\theta) - (ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{y}\sin\theta + ml\dot{\theta}\dot{y}\cos\theta) &= 0 \\ -mgl\sin\theta - m\ddot{y}\sin\theta &= ml\ddot{\theta}\end{aligned}$$

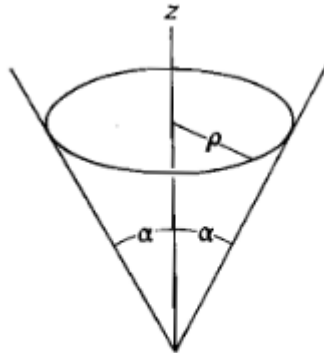
### 3.-

#### 5.9)

Una partícula de masa  $m$  se desliza, bajo la acción de la gravedad, en la superficie interior lisa del cono invertido de la figura 5 – 11 cuya ecuación es:

$$\rho = z \tan \alpha$$

- Establecer las ecuaciones de movimiento de Lagrange para la partícula.
- Demostrar que son posibles órbitas circulares, y hallar la velocidad de la partícula en una órbita de este tipo.



**FIG. 5-11**

a)

Describimos el movimiento utilizando las coordenadas generalizadas  $\rho, \phi$  donde:

$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \phi$$

$$z = \rho \cot \alpha$$

derivando obtenemos:

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \phi - \rho \sin \phi \dot{\phi}$$

$$\dot{y} = \dot{\rho} \sin \phi + \rho \cos \phi \dot{\phi}$$

$$\dot{z} = \dot{\rho} \cot \alpha$$

elevando al cuadrado encontramos la energía cinética:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \csc^2 \alpha + \frac{1}{2} m \rho^2 \dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

la energía potencial es de la forma:

$$\begin{aligned} U &= mgz \\ &= mg \rho \cot \alpha \end{aligned}$$

obtenemos las ecuaciones de movimiento recordando:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

aplicado a  $\phi$  se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= 0 \\ 0 - \frac{d}{dt} m \rho^2 \dot{\phi} &= 0 \end{aligned}$$

aplicado a  $\rho$  se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \rho} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} &= 0 \\ m \rho \dot{\phi}^2 - mg \cot \alpha - m \ddot{\rho} \csc^2 \alpha &= 0 \end{aligned}$$

b)

Veremos que una órbita de la forma:

$$\rho = \rho_0$$

$$\phi = w_0 t$$

son solución a las ecuaciones de Lagrange, de la última ecuación obtenemos la restricción:

$$\begin{aligned} m \rho_0 \dot{\phi}^2 &= mg \cot \alpha \\ w_0^2 &= \frac{g \cot \alpha}{\rho_0} \end{aligned}$$

la velocidad de la partícula es en esta órbita es:

$$\begin{aligned} v^2 &= \rho_0^2 w_0^2 \\ &= g \rho_0 \cot \alpha \\ &= gz \end{aligned}$$

4.-

### 5.10

Considerando el sistema de partículas mostrado en la figura 5 – 12:

- Escribir las ecuaciones de movimiento de Newton para cada una de las partículas, en función de las variables de desplazamiento, a partir del punto de equilibrio,  $x_1$  y  $x_2$ .
- Demostrar que para cualesquiera desplazamientos arbitrarios de las dos partículas, la energía potencial acumulada en los resortes está dada por:

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3x_2^2$$

- Empleando la expresión

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

para la energía cinética, demostrar que las ecuaciones de Lagrange así obtenidas para las variables  $x_1$  y  $x_2$ , a partir de esta  $T$  y la  $U$  de la parte b), concuerdan con las ecuaciones de Newton halladas en la parte a). ¿Cuáles supone usted que son las ecuaciones de Lagrange para un sistema de partículas?

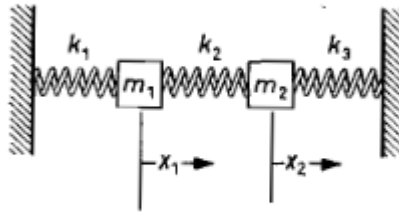


FIG. 5-12

a)

Para escribir las ecuaciones de movimiento de Newton solo hace falta notar que  $(x_2 - x_1)$  es la longitud que se ha comprimido el resorte con constante  $k_2$ :

$$m\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1)$$

b)

Obtenemos  $U$  mediante la relación:

$$\mathbf{F}_i = -\frac{d}{dx_i}U$$

para que se cumpla en  $x_1$  se debe de tener

$$U = -\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

para que se cumpla para  $x_2$  se debe de tener

$$U = -\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k_3x_2^2$$

c)

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange están dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

sustituyendo para  $x_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= 0 \\ -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) - m_1 \ddot{x}_1 &= 0 \end{aligned}$$

sustituyendo para  $x_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= 0 \\ k_2(x_2 - x_1) - k_2 x_3 - m_2 \ddot{x}_2 &= 0 \end{aligned}$$

donde podemos observar que las relaciones son las mismas obtenidas en la parte a).

Para describir el movimiento de un sistema de  $n$  partículas en  $R^k$  necesitaremos  $n \cdot k$ , coordenadas generalizadas, donde se satisface:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

La energía potencial se va definir de tal forma que:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i &= \nabla_i U \\ \nabla_i &= \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_{i+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i+k}} \right) \quad i = 0; n \cdot k; k \end{aligned}$$