

Tarea 8 Mecánica Analítica

Cerritos Lira Carlos

6 de Mayo del 2020

Problemas

1.-

6.7)

En un espectrómetro de masas, se acelera un ion positivo de una sola carga ($q = 1.602 \times 10^{-19} \text{coulombs}$) por medio de una diferencia de potencial de 1000volts . Luego pasa por un campo magnético uniforme en el que $B = 0.1 \text{weber/m}^2$, y se desvía en una trayectoria circular de 0.182m de radio. Determinar:

- a) La velocidad del ion.
- b) La masa del ion en kilogramos y unidades de masa atómica.
- c) El número de masa del ion.

a)

Encontramos la velocidad usando la energía potencial:

$$v^2 = \frac{2qV}{m}$$

encontramos la masa usando el movimiento circular que sigue una vez entra al campo magnético, donde:

$$v = \frac{rqB}{m}$$

juntando ambas obtenemos:

$$v = \frac{2V}{rB} = 1.1 \times 10^5 \text{m/seg}$$

b)

$$m = \frac{2T}{v_0^2} = 2.65 \times 10^{-26} \text{kg} = 15.97 \text{uma}$$

c)

$$A = 15$$

2.-

6.9

En la posición $x = 0, y = 0$, un cañón tiene un alcance máximo l_m . Determinar los dos ángulos de elevación para hacer blanco en el punto:

$$x = l_m/2, \quad y = l_m/4$$

$$\theta = 45,75$$

3.-

8.13

Una cuenta de masa $3m$ puede deslizarse horizontalmente sin rozamiento por un alambre como se indica en la figura 8 – 14. Unido a la cuenta hay un péndulo doble. Si, en una posición cercana a la de su equilibrio, se deja el sistema en libertad, a partir del reposo, las masas oscilan en el plano de la figura a un lado y al otro de la vertical.

- Escriba las ecuaciones de Lagrange del movimiento del sistema.
- Hállese las aceleraciones cuando los desplazamientos y las aceleraciones son pequeñas.

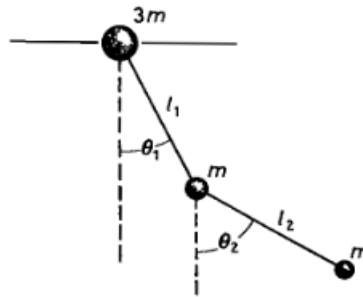


FIG. 8-14

a)

Sean x, x_1, x_2 la posición de las masas, definimos los vectores:

$$\mathbf{e}_{r_1} = \sin\theta_1 \mathbf{i} - \cos\theta_1 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_{\theta_1} = \cos\theta_1 \mathbf{i} + \sin\theta_1 \mathbf{j}$$

con ayuda de estos vectores describimos el movimiento:

$$\mathbf{x} = x \mathbf{i}$$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} + l_1 \mathbf{e}_{r_1}$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + l_2 \mathbf{e}_{r_2}$$

de donde obtenemos:

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{i}$$

$$\mathbf{v}_1 = \dot{x} \mathbf{i} + l_1 \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_{\theta_1}$$

$$= (\dot{x} + l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1) \mathbf{i} - l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_2 = \dot{x} \mathbf{i} + l_1 \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_{\theta_1} + l_2 \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_{\theta_2}$$

$$= (\dot{x} + l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2) \mathbf{i} - (l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2) \mathbf{j}$$

calculamos la energía cinética y potencial utilizando las coordenadas generalizadas θ_1, θ_2 :

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}_1^2\sin^2\theta_1 + \frac{1}{2}m(l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \dot{x})^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}m(l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}m(l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + \dot{x})^2 \\
 U &= mgy_1 + mgy_2 \\
 &= -mgl_1\cos\theta_1 - mg(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2) \\
 &= -2mgl_1\cos\theta_1 - mgl_2\cos\theta_2
 \end{aligned}$$

Obtenemos las ecuaciones de movimiento utilizando la relación:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

para θ_1 tenemos:

$$\begin{aligned}
 &ml_1^2\dot{\theta}_1^2\sin\theta_1\cos\theta_1 - m(l_1\dot{\theta}_1)\cos\theta_1 + \dot{x})(l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1) \\
 &+ m(l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2)l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 \\
 &+ m(l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + \dot{x})l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - 2mgl_1\sin\theta_1 \\
 &- \frac{d}{dt}(ml_1^2\dot{\theta}_1\sin^2\theta_1 + m(l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \dot{x})l_1\cos\theta_1 \\
 &+ m(l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2)l_1\sin\theta_1 \\
 &+ m(l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + \dot{x})l_1\cos\theta_1) = 0
 \end{aligned}$$

de forma similar se encuentra una ecuación para θ_2 .

b)

Usaremos la aproximación $\cos x = 1$, $\sin x = x$, además despreciaremos términos pequeños, calculamos la energía potencial y cinética:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l_1\dot{\theta}_1 + \dot{x})^2 + \frac{1}{2}m(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2 + \dot{x})^2 \\
 U &= -2mgl_1(1 - \frac{1}{2}\theta_1^2) - mgl_2(1 - \frac{1}{2}\theta_2^2) \\
 &= -mg(2l_1 + l_2) + mgl_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}mgl_2\theta_2^2 \\
 U &= mgl_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}mgl_2\theta_2^2
 \end{aligned}$$

donde redefinimos U sabiendo que podemos quitar constantes, usando nuevamente las ecuaciones de Lagrange para θ_1 obtenemos:

$$-2mgl_1\theta_1 - \frac{d}{dt} \left(m(l_1\dot{\theta}_1 + \dot{x})l_1 + m(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2 + \dot{x})l_1 \right) = 0$$

de forma similar se encuentra una ecuación para θ_2

4.-

Demostración 8.15

$$[x_i, l_j] = \sum_k e_{ijk} x_k$$

5.-

Demostración 8.18

$$\frac{\partial}{\partial x}[X, Y] = \left[\frac{\partial X}{\partial x}, Y\right] + \left[X, \frac{\partial Y}{\partial x}\right]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}[X, Y] &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_i \left(\frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial Y}{\partial p_i} \frac{\partial X}{\partial q_i} \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial Y}{\partial p_i} + \frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial p_i} \frac{\partial X}{\partial q_i} - \frac{\partial Y}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial q_i} \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial Y}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial X}{\partial x} \right) + \sum_i \left(+ \frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial q_i} \right) \\ &= \left[\frac{\partial X}{\partial x}, Y\right] + \left[X, \frac{\partial Y}{\partial x}\right]\end{aligned}$$