Tarea 6 Mecánica Analítica

Cerritos Lira Carlos

28 de Marzo del 2020

Problemas

1.-

5.2)

Utilizar el resultado del problema 5-1 para hallar las ecuaciones de Lagrange de una partícula cuya energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}a\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}b\dot{q}_2^2$$

y cuya energía cinética es:

$$U = \frac{1}{2}k_1(q_1 + q_2)^2 + \frac{1}{2}k_2(q_1 - q_2)^2$$

2.-

5.3)

El putno de soporte de un péndulo simple de logntiud l y masa m se mueve sobre una recta vertical de acuerdo con la ecuación:

$$y = y(t)$$

El movmiento del péndulo es en un plano vertical.

a) Establecer las componentes de las ecuaciones de movimeinto de Newton para la partícula en las direcciones $\vec{e_1}$ y $\vec{e_2}$ mostradas en la figura $5-7$(Sugerencia: considérese el movimiento con respecto a un sistema de coordenadas cuya aceleración es $A = \ddot{y}$)

b) Demostrar que la energía cinética de la partícula está dada por:

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + ml\dot{\theta}\dot{y}sin\theta$$

c) Dado que la energía potencial escalar es:

$$U = mgy - mglcos\theta$$

demostrar que las ecuaciones de Lagrange deducidas de la energía cinética de la parte b) y esta función de la energía potencial para la variable θ (ver problema $5-1$) son equivalentes a la ecuación de Newton a lo largo de $\vec{e_2}$

3.-

5.9)

Una partícula de masa m se desliza, bajo la acción de la gravedad, en la superficie interior lisa del cono invertido de la figura $5-11$ cuya ecuación es:

$$\rho = ztan\alpha$$

a) Establecer las ecuaciones de movimiento de Lagrange para la partícula.

b) Demostrar que son posibles órbitas circulares, y hallar la velocidad de la partícula en una órbita de este tipo.

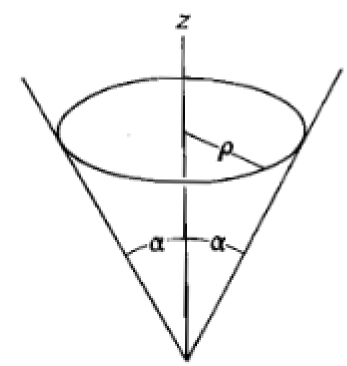

Fig. 5-11

a)

Describimos el movimiento utilizando las coordenadas generalizadas ρ, ϕ donde:

$$\begin{aligned} x &= \rho cos\phi \\ y &= \rho sin\phi \\ z &= \rho cot\alpha \end{aligned}$$

derivando obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\rho} cos\phi - \rho sin\phi\dot{\phi} \\ \dot{y} &= \dot{\rho} sin\phi + \rho cos\phi\dot{\phi} \\ \dot{z} &= \dot{\rho} cot\alpha \end{aligned}$$

elevando al cuadrado encontramos la energía cinética:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 csc^2\alpha + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

la fuerza es de la forma:

$$U = mgrcot\alpha$$

obtenemos las ecuaciones de movimiento recordando:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

aplicado a θ se tiene:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0$$
$$0 - \frac{d}{dt} mr^2\dot{\phi} = 0$$

aplicado a r se tiene:

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = 0$$
$$mr\dot{\phi}^2 - mgcot\alpha - m\ddot{\rho}csc^2\alpha = 0$$

b)

Veremos que una orbita de la forma:

$$\rho = \rho_0$$
$$\phi = vt$$

son solucion a las ecuaciones de Lagrange, de la ultima ecuación obtenemos la restricción:

$$m\rho_0\dot{\phi}^2 = mgcot\alpha$$
$$v^2 = \frac{gcot\alpha}{\rho}$$

4.-

5.10

Considerando el sistema de partículas mostrado en la figura $5-12$:

a) Escribir las ecuaciones de movimiento de Newton para cada una de las partículas, en función de las variables de desplazamiento, a partir del punto de equilibrio, x_1 y x_2.

b) Demostrar que para cualesqueira desplazamientos arbitrarios de las dos partículas, la energía potencial acumulada en los resortes está dada por:

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3x_2^2$$

c) Empleando la expresión

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

para la enrgía cinética, demostrar que las ecuaciones de Lagrange así obtenidas para las variables x_1 y x_2, a partir de esta T y la U de la parte b), concuerdan con las ecuaciones de Newton halladas en la parte a). ¿Cuáles supone usted que son las ecuaciones de Lagrange para un sistema de partículas?

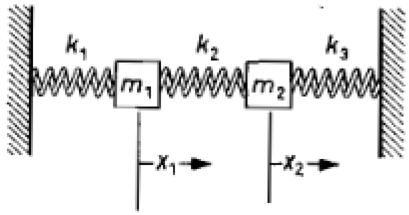

FIG. 5-12

a)

Para escribir las ecuaciones de movimiento de Newton solo hace falta notar que $(x_2 - x_1)$ es la longitud del resorte con constante k_2:

$$m\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1)$$
$$m\ddot{x}_2 = -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1)$$

b)

Obtenemos U mediante la relación:

$$\boldsymbol{F}_i = -\frac{d}{dx_i}U$$

para que se cumpla en x_1 se debe de tener $U = -\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$, para que se cumpla para x_2 se debe de tener $U = -\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k_3x_2^2$.

c)

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange están dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

sustituyendo para x_1:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0$$
$$-k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) - m_1\ddot{x}_1 = 0$$

sustituyendo para x_2:

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 0$$
$$k_2(x_2 - x_1) - k_2 x_3 - m\ddot{x}_2 = 0$$

donde podemos observar que las relaciones son las mismas obtenidas en la parte a).
Para describir el movimiento de un sistema de n partículas en R^k necesitaremos $n * k$, coordenadas generalizadas, donde se satisface:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

La energía potencial se va definir de tal forma que:

$$\boldsymbol{F_i} = \nabla_i U$$
$$\nabla_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_{i+1}}, \frac{\partial}{\partial x_{i+2}}\right)$$