Tarea 7 Mecánica Analítica

Cerritos Lira Carlos

21 de Abril del 2020

Problemas

1.-

5.2)

Utilizar el resultado del problema 5-1 para hallar las ecuaciones de Lagrange de una partícula cuya energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}a\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}b\dot{q}_2^2$$

y cuya energía cinética es:

$$U = \frac{1}{2}k_1(q_1 + q_2)^2 + \frac{1}{2}k_2(q_1 - q_2)^2$$

De acuerdo a las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Hacemos cuentas para q_1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= 0 \\ -k_1(q_1 + q_2) - k_2(q_1 - q_2) - a\ddot{q}_1 &= 0 \end{aligned}$$

Hacemos cuentas para q_2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= 0 \\ -k_1(q_1 + q_2) + k_2(q_1 - q_2) - b\ddot{q}_2 &= 0 \end{aligned}$$

2.-

5.3)

El putno de soporte de un péndulo simple de logntiud l y masa m se mueve sobre una recta vertical de acuerdo con la ecuación:

$$y = y(t)$$

El movmiento del péndulo es en un plano vertical.

a) Establecer las componentes de las ecuaciones de movimeinto de Newton para la partícula en las direcciones $\vec{e_1}$ y $\vec{e_2}$ mostradas en la figura $5 - 7$(Sugerencia: considérese el movimiento con respecto a un sistema de coordenadas cuya aceleración es $A = \ddot{y}$)

b) Demostrar que la energía cinética de la partícula está dada por:

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + ml\dot{\theta}\dot{y}sin\theta$$

c) Dado que la energía potencial escalar es:

$$U = mgy - mglcos\theta$$

demostrar que las ecuaciones de Lagrange deducidas de la energía cinética de la parte b) y esta función de la energía potencial para la variable θ (ver problema $5-1$) son equivalentes a la ecuación de Newton a lo largo de $\vec{e_2}$

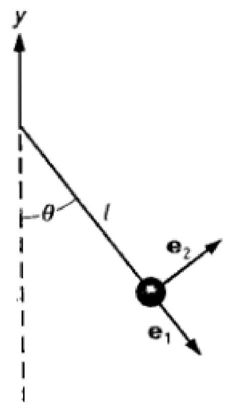

Fig. 5-7

a)

Definimos los vectores:

$$\boldsymbol{e}_1 = sin\theta\boldsymbol{i} - cos\theta\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{e}_2 = cos\theta\boldsymbol{i} + sin\theta\boldsymbol{j}$$

describimos el movimiento con ayuda de estos vectores:

$$\boldsymbol{x} = l\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{v} = l\dot{\theta}\boldsymbol{e}_2 + \dot{y}\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{a} = l\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_2 - l\dot{\theta}^2\boldsymbol{e_1} + \ddot{y}\boldsymbol{j}$$

de donde obtenemos:

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_1 = -ml\dot{\theta}^2 - m\ddot{y}cos\theta$$
$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_2 = ml\ddot{\theta} + m\ddot{y}sin\theta$$

por otra parte, haciendo un análisis de fuerzas también encontramos:

$$\boldsymbol{F} = mgcos\theta\boldsymbol{e_1} - R\boldsymbol{e_1} - mgsin\theta\boldsymbol{e_2}$$

con R la tracción o tensión de la cuerda, de donde encontramos nuevamente:

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_1 = mgcos\theta - R$$
$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_2 = -mgsin\theta$$

de donde encontramos las ecuaciones de movimiento:

$$mgcos\theta + m\ddot{y}cos\theta - R = -ml\dot{\theta}^2$$
$$-mgsin\theta - m\ddot{y}sin\theta = ml\ddot{\theta}$$

b)

Utilizaremos la coordenada generalizada θ para describir el movimiento, donde:

$$x = lsin\theta$$
$$y = -lcos\theta + y$$

derivando obtenemos:

$$\dot{x} = l\dot{\theta}cos\theta$$
$$\dot{y} = l\dot{\theta}sin\theta + \dot{y}$$

podemos encontrar la energía cinética en función de θ:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{y}sin\theta + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + ml\dot{\theta}\dot{y}sin\theta \end{aligned}$$

c)

Partimos de la relación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= 0 \\ (ml\dot{\theta}\dot{y}cos\theta - mglsin\theta) - (ml^2\dot{\theta} + ml\ddot{y}sin\theta + ml\dot{\theta}\dot{y}cos\theta) &= 0 \\ -mgsin\theta - m\ddot{y}sin\theta &= ml\ddot{\theta} \end{aligned}$$

3.-

5.9)

Una partícula de masa m se desliza, bajo la acción de la gravedad, en la superficie interior lisa del cono invertido de la figura $5 - 11$ cuya ecuación es:

$$\rho = ztan\alpha$$

a) Establecer las ecuaciones de movimiento de Lagrange para la partícula.

b) Demostrar que son posibles órbitas circulares, y hallar la velocidad de la partícula en una órbita de este tipo.

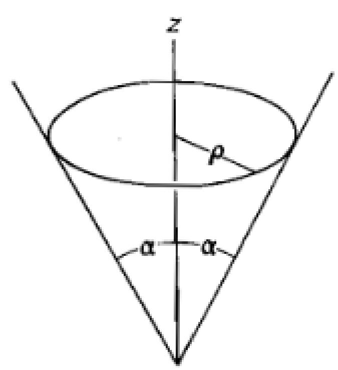

Fig. 5-11

a)

Describimos el movimiento utilizando las coordenadas generalizadas ρ, ϕ donde:

$$x = \rho cos\phi$$
$$y = \rho sin\phi$$
$$z = \rho cot\alpha$$

derivando obtenemos:

$$\dot{x} = \dot{\rho} cos\phi - \rho sin\phi\dot{\phi}$$
$$\dot{y} = \dot{\rho} sin\phi + \rho cos\phi\dot{\phi}$$
$$\dot{z} = \dot{\rho} cot\alpha$$

elevando al cuadrado encontramos la energía cinética:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 csc^2\alpha + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

la energía potencial es de la forma:

$$\begin{aligned} U &= mgz \\ &= mg\rho cot\alpha \end{aligned}$$

obtenemos las ecuaciones de movimiento recordando:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

aplicado a ϕ se tiene:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0$$
$$0 - \frac{d}{dt}m\rho^2\dot{\phi} = 0$$

aplicado a ρ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \rho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} &= 0 \\ m\rho\dot{\phi}^2 - mgcot\alpha - m\ddot{\rho}csc^2\alpha &= 0 \end{aligned}$$

b)

Veremos que una orbita de la forma:

$$\rho = \rho_0$$
$$\phi = w_0 t$$

son solucion a las ecuaciones de Lagrange, de la ultima ecuación obtenemos la restricción:

$$m\rho_0\dot{\phi}^2 = mgcot\alpha$$
$$w_0^2 = \frac{gcot\alpha}{\rho_0}$$

la velocidad de la particula es en esta orbita es:

$$\begin{aligned} v^2 &= \rho_0^2 w_0^2 \\ &= \rho_0 gcot\alpha \\ &= gz \end{aligned}$$

4.-

5.10

Considerando el sistema de partículas mostrado en la figura $5-12$:

a) Escribir las ecuaciones de movimiento de Newton para cada una de las partículas, en función de las variables de desplazamiento, a partir del punto de equilibrio, x_1 y x_2.

b) Demostrar que para cualesqueira desplazamientos arbitrarios de las dos partículas, la energía potencial acumulada en los resortes está dada por:

$$U = \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3 x_2^2$$

c) Empleando la expresión

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

para la enrgía cinética, demostrar que las ecuaciones de Lagrange así obtenidas para las variables x_1 y x_2, a partir de esta T y la U de la parte b), concuerdan con las ecuaciones de Newton halladas en la parte a). ¿Cuáles supone usted que son las ecuaciones de Lagrange para un sistema de partículas?

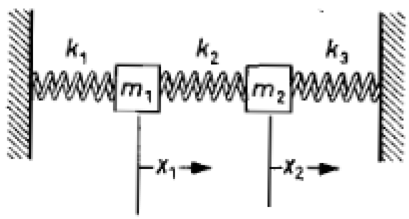

Fig. 5-12

a)

Para escribir las ecuaciones de movimiento de Newton solo hace falta notar que $(x_2 - x_1)$ es la longitud que se a comprimido el resorte con constante k_2:

$$m\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1)$$
$$m\ddot{x}_2 = -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1)$$

b)

Obtenemos U mediante la relación:

$$\boldsymbol{F}_i = -\frac{d}{dx_i}U$$

para que se cumpla en x_1 se debe de tener

$$U = -\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

para que se cumpla para x_2 se debe de tener

$$U = -\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k_3 x_2^2$$

c)

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange están dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

sustituyendo para x_1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= 0 \\ -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) - m_1 \ddot{x_1} &= 0 \end{aligned}$$

sustituyendo para x_2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= 0 \\ k_2(x_2 - x_1) - k_2 x_3 - m\ddot{x}_2 &= 0 \end{aligned}$$

donde podemos observar que las relaciones son las mismas obtenidas en la parte *a*).
Para describir el movimiento de un sistema de n partículas en R^k necesitaremos $n \cdot k$, coordenadas generalizadas, donde se satisface:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

La energía potencial se va definir de tal forma que:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F_i} = \nabla_i U \\ &\nabla_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_{i+1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{i+k}}\right) \qquad i = 0; n \cdot k; k \end{aligned}$$