Tarea 4 Mecánica Analítica

Cerritos Lira Carlos

2 de Marzo del 2020

Problemas

1.-

2.11)

Obtener el radio de curvatura de una curva plana en:

a) Coordenadas rectangulares

b) Coordenadas polares

a)

Nuestra curva esta parametrizada por:

$$\boldsymbol{\gamma}(x) = x\boldsymbol{i} + f(x)\boldsymbol{j}$$

haciendo cuentas:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}'(x) &= \boldsymbol{i} + f'(x)\boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{\gamma}''(x) &= f''(x)\boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{\gamma}'(x)\times\boldsymbol{\gamma}''(x) &= f''(x)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

de donde obtenemos el radio de curvatura en el punto $\boldsymbol{\gamma}(x)$ es:

$$\begin{aligned}\rho(\phi) &= \frac{\|\boldsymbol{\gamma}(x)\|^3}{\|\boldsymbol{\gamma}'(x)\times\boldsymbol{\gamma}''(x)\|}\\ &= \frac{|1+f'(x)^2|^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}\end{aligned}$$

b)

Nuestra curva esta parametrizada por:

$$\boldsymbol{\gamma}(\phi) = r(\phi)\boldsymbol{e_\phi}$$

haciendo cuentas:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}'(\phi) &= r'(\phi)\boldsymbol{e_\phi} + r(\phi)\boldsymbol{e_\theta}\\ \boldsymbol{\gamma}''(\phi) &= r''(\phi)\boldsymbol{e_\phi} + r'(\phi)\boldsymbol{e_\theta} + r'(\phi)\boldsymbol{e_\theta} - r(\phi)\boldsymbol{e_\phi}\\ \boldsymbol{\gamma}'(\phi)\times\boldsymbol{\gamma}''(\phi) &= 2r'(\phi)^2\boldsymbol{k} - r(\phi)r''(\phi)\boldsymbol{k} + r(\phi)^2\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

de donde obtenemos el radio de curvatura en el punto $\boldsymbol{\gamma}(\phi)$ es:

$$\begin{aligned}\rho(\phi) &= \frac{\|\boldsymbol{\gamma}(\phi)\|^3}{\|\boldsymbol{\gamma}'(\phi)\times\boldsymbol{\gamma}''(\phi)\|}\\ &= \frac{(r(\phi)^2 + r'(\phi)^2)^{\frac{3}{2}}}{|2r'(\phi)^2 + r(\phi)^2 - r(\phi)r''(\phi)|}\end{aligned}$$

2.-

2.12)

Obtener las componentes tangencial y normal de las velocidades y las aceleraciones de las partículas de los problemas 2.1b)

La posición, velocidad y aceleración:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t) &= 3t\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j} + (t^2+3)\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{v}(t) &= 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{a}(t) &= 2\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

Para la velocidad la componente tangencial y perpendicular a la curva es:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{\|}(t) &= 0 \\ \boldsymbol{v}_{\perp}(t) &= \boldsymbol{v}(t)\end{aligned}$$

Para la aceleración la componente tangencial y perpendicular a la curva es:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{\|}(t) &= (\boldsymbol{u_t}(t)\cdot\boldsymbol{a}(t))\boldsymbol{u_t}(t) \\ &= \frac{1}{\|\boldsymbol{v}(t)\|^2}(\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{a}(t))\boldsymbol{v}(t) \\ &= \frac{4t}{\|\boldsymbol{v}(t)\|^2}\boldsymbol{v}(t) \\ \boldsymbol{a}_{\perp}(t) &= \boldsymbol{a}(t) - \boldsymbol{a}_{\|}(t) \\ &= \boldsymbol{a}(t) - \frac{4t}{\|\boldsymbol{v}(t)\|^2}\boldsymbol{v}(t)\end{aligned}$$

3.-

2.13)

Obtener el radio de curvatura de las curvas de los problemas 2.1b) para el punto en que está situado la partícula en el instante t.

Nuestra curva esta parametrizada por:

$$\boldsymbol{r}(t) = 3t\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j} + (t^2+3)\boldsymbol{k}$$

haciendo cuentas:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r'}(t) &= 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{r''}(t) &= 2\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{r'}(t)\times\boldsymbol{r''}(t) &= -6\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

de donde obtenemos el radio de curvatura en el punto $\boldsymbol{r}(t)$ es:

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \frac{\|\boldsymbol{r}(t)\|^3}{\|\boldsymbol{r'}(t)\times\boldsymbol{r''}(t)\|} \\ &= \frac{(9t^2+16t^3+(t^3+3)^2)^{\frac{3}{2}}}{|36+64|^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{(9t^2+16t^3+(t^3+3)^2)^{\frac{3}{2}}}{10}\end{aligned}$$

4.-

2.15)

En el punto $(2,1,1)$, obtener el vector unidad tangente a la intersección de la superficie del problema 2.14 y a la superficie:

$$\phi_2(x,y,z) = 3x^2 - xy + y^2 = 11$$

El vector tangente a la intersección de superficies esta dado por:

$$\boldsymbol{e_t}(\boldsymbol{x}) = \nabla\phi_1(\boldsymbol{x}) \times \nabla\phi_2(\boldsymbol{x})$$

haciendo cuentas obtenemos:

$$\begin{aligned}
\nabla\phi_1(\boldsymbol{x}) &= (2x+2y)\boldsymbol{i} + (2x-2y+z)\boldsymbol{j} + (y+2z)\boldsymbol{k} \\
\nabla\phi_2(\boldsymbol{x}) &= (6x-y)\boldsymbol{i} + (-x+2y)\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{e_t}(2,2,1) &= \nabla\phi_1(2,2,1) \times \nabla\phi_2(2,2,1) \\
&= (6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{z}) \times 11\boldsymbol{i} \\
&= 33\boldsymbol{j} - 33\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

finalmente nuestro vector unitario es:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u_t} &= \frac{\boldsymbol{e_t}}{\|\boldsymbol{e_t}\|} \\
&= \frac{1}{33\sqrt{2}}(33\boldsymbol{j} - 33\boldsymbol{k}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})
\end{aligned}$$

5.-

3.1)

Un helicóptero aterriza con un viento cruzando en un barco en movimiento, desde el cual se observa que desciende verticalmente a 10 nudos. Si el barco tiene una velocidad de avance de 20 nudos y el viendo cruzado está soplando perpendicularmente al curso del barco a 20 nudos, encontrar la velocidad del helicóptero a través del aire.

Consideremos S el sistema de un observador en reposo y S' el sistema de un observador en el barco, la posición del helicóptero en el sistema S está dada por:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r'}$$

de donde obtenemos:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v'} \\
&= (20\boldsymbol{i} - 20\boldsymbol{j}) + (-10\boldsymbol{k}) \\
&= 20\boldsymbol{i} - 20\boldsymbol{j} - 10\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

donde la velocidad es:

$$\begin{aligned}
v &= \|\boldsymbol{v}\| \\
v &= (20^2 + 20^2 + 10^2)^{\frac{1}{2}} \\
v &= 30 nudos
\end{aligned}$$