

# Tarea 4 Mecánica Analítica

Cerritos Lira Carlos

2 de Marzo del 2020

## Problemas

1.-

2.11)

Obtener el radio de curvatura de una curva plana en:

- a) Coordenadas rectangulares
- b) Coordenadas polares

a)

Nuestra curva esta parametrizada por:

$$\gamma(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$$

haciendo cuentas:

$$\gamma'(x) = \mathbf{i} + f'(x)\mathbf{j}$$

$$\gamma''(x) = f''(x)\mathbf{j}$$

$$\gamma'(x) \times \gamma''(x) = f''(x)\mathbf{k}$$

de donde obtenemos el radio de curvatura en el punto  $\gamma(x)$  es:

$$\begin{aligned}\rho(\phi) &= \frac{\|\gamma(x)\|^3}{\|\gamma'(x) \times \gamma''(x)\|} \\ &= \frac{|1 + f'(x)^2|^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}\end{aligned}$$

b)

Nuestra curva esta parametrizada por:

$$\gamma(\phi) = r(\phi)\mathbf{e}_\phi$$

haciendo cuentas:

$$\gamma'(\phi) = r'(\phi)\mathbf{e}_\phi + r(\phi)\mathbf{e}_\theta$$

$$\gamma''(\phi) = r''(\phi)\mathbf{e}_\phi + r'(\phi)\mathbf{e}_\theta + r'(\phi)\mathbf{e}_\theta - r(\phi)\mathbf{e}_\phi$$

$$\gamma'(\phi) \times \gamma''(\phi) = 2r'(\phi)^2\mathbf{k} - r(\phi)r''(\phi)\mathbf{k} + r(\phi)^2\mathbf{k}$$

de donde obtenemos el radio de curvatura en el punto  $\gamma(\phi)$  es:

$$\begin{aligned}\rho(\phi) &= \frac{\|\gamma(\phi)\|^3}{\|\gamma'(\phi) \times \gamma''(\phi)\|} \\ &= \frac{(r(\phi)^2 + r'(\phi)^2)^{\frac{3}{2}}}{|2r'(\phi)^2 + r(\phi)^2 - r(\phi)r''(\phi)|}\end{aligned}$$

2.-

2.12)

Obtener las componentes tangencial y normal de las velocidades y las aceleraciones de las partículas de los problemas 2.1b)

La posición, velocidad y aceleración:

$$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} + (t^2 + 3)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}(t) = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{k}$$

Para la velocidad la componente tangencial y perpendicular a la curva es:

$$\mathbf{v}_{\parallel}(t) = 0$$

$$\mathbf{v}_{\perp}(t) = \mathbf{v}(t)$$

Para la aceleración la componente tangencial y perpendicular a la curva es:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{\parallel}(t) &= (\mathbf{u}_t(t) \cdot \mathbf{a}(t))\mathbf{u}_t(t) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{v}(t)\|^2}(\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t))\mathbf{v}(t) \\ &= \frac{4t}{\|\mathbf{v}(t)\|^2}\mathbf{v}(t) \\ \mathbf{a}_{\perp}(t) &= \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_{\parallel}(t) \\ &= \mathbf{a}(t) - \frac{4t}{\|\mathbf{v}(t)\|^2}\mathbf{v}(t)\end{aligned}$$

3.-

2.13)

Obtener el radio de curvatura de las curvas de los problemas 2.1b) para el punto en que está situado la partícula en el instante  $t$ .

Nuestra curva esta parametrizada por:

$$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} + (t^2 + 3)\mathbf{k}$$

haciendo cuentas:

$$\mathbf{r}'(t) = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = -6\mathbf{j} - 8\mathbf{i}$$

de donde obtenemos el radio de curvatura en el punto  $\mathbf{r}(t)$  es:

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \frac{\|\mathbf{r}(t)\|^3}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|} \\ &= \frac{(9t^2 + 16t^3 + (t^3 + 3)^2)^{\frac{3}{2}}}{|36 + 64|^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{(9t^2 + 16t^3 + (t^3 + 3)^2)^{\frac{3}{2}}}{10}\end{aligned}$$

4.-

2.15)

En el punto  $(2, 1, 1)$ , obtener el vector unidad tangente a la intersección de la superficie del problema 2.14 y a la superficie:

$$\phi_2(x, y, z) = 3x^2 - xy + y^2 = 11$$

El vector tangente a la intersección de superficies esta dado por:

$$\mathbf{e}_t(\mathbf{x}) = \nabla\phi_1(\mathbf{x}) \times \nabla\phi_2(\mathbf{x})$$

haciendo cuentas obtenemos:

$$\begin{aligned}\nabla\phi_1(\mathbf{x}) &= (2x + 2y)\mathbf{i} + (2x - 2y + z)\mathbf{j} + (y + 2z)\mathbf{k} \\ \nabla\phi_2(\mathbf{x}) &= (6x - y)\mathbf{i} + (-x + 2y)\mathbf{j} \\ \mathbf{e}_t(2, 2, 1) &= \nabla\phi_1(2, 2, 1) \times \nabla\phi_2(2, 2, 1) \\ &= (6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \times 11\mathbf{i} \\ &= 33\mathbf{j} - 33\mathbf{k}\end{aligned}$$

finalmente nuestro vector unitario es:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_t &= \frac{\mathbf{e}_t}{\|\mathbf{e}_t\|} \\ &= \frac{1}{33\sqrt{2}}(33\mathbf{j} - 33\mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j} - \mathbf{k})\end{aligned}$$

5.-

3.1)

Un helicóptero aterriza con un viento cruzando en un barco en movimiento, desde el cual se observa que desciende verticalmente a 10 nudos. Si el barco tiene una velocidad de avance de 20 nudos y el viento cruzado está soplando perpendicularmente al curso del barco a 20 nudos, encontrar la velocidad del helicóptero a través del aire.

Consideremos  $S$  el sistema de un observador en reposo y  $S'$  el sistema de un observador en el barco, la posición del helicóptero en el sistema  $S$  está dada por:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$$

de donde obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{V} + \mathbf{v}' \\ &= (20\mathbf{i} - 20\mathbf{j}) + (-10\mathbf{k}) \\ &= 20\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 10\mathbf{k}\end{aligned}$$

donde la velocidad es:

$$\begin{aligned}v &= \|\mathbf{v}\| \\ v &= (20^2 + 20^2 + 10^2)^{\frac{1}{2}} \\ v &= 30\text{nudos}\end{aligned}$$