

Tarea 8 Mecánica Analítica

Cerritos Lira Carlos

6 de Mayo del 2020

Problemas

1.-

6.7)

En un espectrómetro de masas, se acelera un ion positivo de una sola carga ($q = 1.602 \times 10^{-19} \text{coloumbs}$) por medio de una diferencia de potencial de 1000voltios . Luego pasa por un campo magnético uniforme en el que $B = 0.1 \text{weber/m}^2$, y se desvía en una trayectoria circular de 0.182m de radio. Determinar:

- a) La velocidad del ion.
- b) La masa del ion en kilogramos y unidades de masa atómica.
- c) El número de masa del ion.

a)

Despejamos v^2 de la ecuación del trabajo y la energía:

$$v^2 = \frac{2qV}{m}$$

encontramos la nuevamente la velocidad usando el movimiento circular que sigue una vez entra al campo magnético, donde:

$$v = \frac{rqB}{m}$$

juntando ambas obtenemos:

$$v = \frac{2V}{rB} = 1.1 \times 10^5 \text{m/seg}$$

b)

De la ecuación del trabajo y la energía despejamos m

$$m = \frac{2qV}{v^2} = 2.64 \times 10^{-26} \text{kg} = 15.94 \text{uma}$$

c)

$$A = 15$$

2.-

6.9

En la posición $x = 0, y = 0$, un cañón tiene un alcance máximo l_m . Determinar los dos ángulos de elevación para hacer blanco en el punto:

$$x = l_m/2, \quad y = l_m/4$$

Usamos las coordenadas x, y , donde tomamos un sistema de referencia tal que al inicio ambas sean cero:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$U = mgy$$

usando Lagrange llegamos a las ecuaciones:

$$m\ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{y} + mg = 0$$

de donde obtenemos:

$$x = v_{0x}t$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} - v_{0y}t$$

de la ecuación para y despejamos el tiempo en función de θ :

$$t = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

la distancia recorrida para este tiempo es:

$$x = v_{0x}t$$

$$= v_0 \cos \theta \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

$$= \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta$$

de donde obtenemos el alcance máximo se obtiene cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$, dando:

$$l_m = \frac{v_0^2}{g}$$

veremos el tiempo que tarda el proyectil en alcanzar $l_m/2$

$$t = \frac{l_m}{2v_0 \cos \theta}$$

para este tiempo queremos $y = \frac{l_m}{4}$, sustituyendo en la ecuación de movimiento:

$$\frac{l_m}{4} = -\frac{g}{2} \frac{l_m^2}{4v_0^2 \cos^2 \theta} + v_0 \sin \theta \frac{l_m}{2v_0 \cos \theta}$$

$$\frac{1}{4} = -\frac{gl_m}{8v_0^2 \cos^2 \theta} + \frac{\tan \theta}{2}$$

$$\frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(1 + \tan^2 \theta) + \frac{1}{2} \tan \theta$$

$$0 = \tan^2 \theta - 4 \tan \theta + 3$$

cambiando nuestra variable por $x = \tan \theta$, encontramos las soluciones:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3$$

$$\theta_1 = 45, \quad \theta_2 = 71.5$$

3.-

8.13

Una cuenta de masa $3m$ puede deslizarse horizontalmente sin rozamiento por un alambre como se indica en la figura 8 – 14. Unido a la cuenta hay un péndulo doble. Si, en una posición cercana a la de su equilibrio, se deja el sistema en libertad, a partir del reposo, las masas oscilan en el plano de la figura a un lado y al otro de la vertical.

- Escriba las ecuaciones de Lagrange del movimiento del sistema.
- Hállese las aceleraciones cuando los desplazamientos y las aceleraciones son pequeñas.

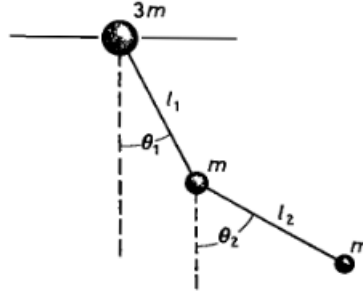


FIG. 8-14

a)

Sean x, x_1, x_2 la posición de las masas, definimos los vectores:

$$\mathbf{e}_{r_1} = \sin\theta_1 \mathbf{i} - \cos\theta_1 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_{\theta_1} = \cos\theta_1 \mathbf{i} + \sin\theta_1 \mathbf{j}$$

con ayuda de estos vectores describimos el movimiento:

$$\mathbf{x} = \dot{x} \mathbf{i}$$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} + l_1 \mathbf{e}_{r_1}$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + l_2 \mathbf{e}_{r_2}$$

de donde obtenemos:

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{i}$$

$$\mathbf{v}_1 = \dot{x} \mathbf{i} + l_1 \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_{\theta_1}$$

$$= (\dot{x} + l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1) \mathbf{i} - l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_2 = \dot{x} \mathbf{i} + l_1 \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_{\theta_1} + l_2 \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_{\theta_2}$$

$$= (\dot{x} + l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2) \mathbf{i} - (l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2) \mathbf{j}$$

calculamos la energía cinética y potencial utilizando las coordenadas generalizadas θ_1, θ_2 :

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$= \frac{3}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2\theta_1 + \frac{1}{2} m (l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + \dot{x})^2$$

$$+ \frac{1}{2} m (l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2)^2$$

$$+ \frac{1}{2} m (l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 + \dot{x})^2$$

$$U = mgy_1 + mgy_2$$

$$= -mgl_1 \cos\theta_1 - mg(l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2)$$

$$= -2mgl_1 \cos\theta_1 - mgl_2 \cos\theta_2$$

Obtenemos las ecuaciones de movimiento utilizando la relación:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

para θ_1 tenemos:

$$\begin{aligned} & ml_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 - m(l_1 \dot{\theta}_1) \cos \theta_1 + \dot{x}(l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1) \\ & + m(l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ & + m(l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \dot{x}) l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - 2mgl_1 \sin \theta_1 \\ & - \frac{d}{dt} (ml_1^2 \dot{\theta}_1 \sin^2 \theta_1 + m(l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \dot{x}) l_1 \cos \theta_1 \\ & + m(l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) l_1 \sin \theta_1 \\ & + m(l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \dot{x}) l_1 \cos \theta_1) = 0 \end{aligned}$$

de forma similar se encuentra una ecuación para θ_2 .

b)

Usaremos la aproximación $\cos x = 1$, $\sin x = x$, además despreciaremos términos pequeños, calculamos la energía potencial y cinética:

$$\begin{aligned} T &= \frac{3}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{x})^2 + \frac{1}{2} m (l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 + \dot{x})^2 \\ U &= -2mgl_1(1 - \frac{1}{2}\theta_1^2) - mgl_2(1 - \frac{1}{2}\theta_2^2) \\ &= -mg(2l_1 + l_2) + mgl_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}mgl_2\theta_2^2 \\ U &= mgl_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}mgl_2\theta_2^2 \end{aligned}$$

donde redefinimos U sabiendo que podemos quitar constantes, usando nuevamente las ecuaciones de Lagrange para θ_1 obtenemos:

$$-2mgl_1\theta_1 - \frac{d}{dt} (m(l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{x}) l_1 + m(l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 + \dot{x}) l_1) = 0$$

de forma similar se encuentra una ecuación para θ_2

4.-

Demostración 8.15

$$[x_i, l_j] = \sum_k e_{ijk} x_k$$

Usaremos las propiedades:

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [x_i, p_j] = \delta_{ij}, \quad [a, b] = -[b, a]$$

para $i = 1$ hacemos cálculos:

$$\begin{aligned}
[x_1, l_1] &= [x_1, x_2 p_3 - x_3 p_2] \\
&= [x_1, x_2 p_3] - [x_1, x_3 p_2] \\
&= p_3 [x_1, x_2] + x_2 [x_1, p_3] - x_3 [x_1, p_2] + p_2 [x_1, x_3] \\
&= x_2 [x_1, p_3] - x_3 [x_1, p_2] \\
&= 0 \\
[x_1, l_2] &= [x_1, x_3 p_1 - x_1 p_3] \\
&= x_3 [x_1, p_1] - x_1 [x_1, p_3] \\
&= x_3 \\
[x_1, l_3] &= [x_1, x_1 p_2 - x_2 p_1] \\
&= x_1 [x_1, p_2] - x_2 [x_1, p_1] \\
&= -x_2
\end{aligned}$$

viendo el patrón solo necesitamos hacer permutaciones ciclicas y cambiar el signo cuando no se siga el orden correcto:

$$\begin{aligned}
[x_2, l_1] &= -x_3 \\
[x_2, l_2] &= 0 \\
[x_2, l_3] &= x_1 \\
[x_3, l_1] &= -x_2 \\
[x_3, l_2] &= x_1 \\
[x_3, l_3] &= 0
\end{aligned}$$

donde se comprueba que en efecto:

$$[x_i, l_j] = \sum_k e_{ijk} x_k$$

5.-

Demostración 8.18

$$\frac{\partial}{\partial x} [X, Y] = \left[\frac{\partial X}{\partial x}, Y \right] + \left[X, \frac{\partial Y}{\partial x} \right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} [X, Y] &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_i \left(\frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial Y}{\partial p_i} \frac{\partial X}{\partial q_i} \right) \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial Y}{\partial p_i} + \frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial p_i} \frac{\partial X}{\partial q_i} - \frac{\partial Y}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial q_i} \right) \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial Y}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial X}{\partial x} \right) + \sum_i \left(+ \frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial q_i} \right) \\
&= \left[\frac{\partial X}{\partial x}, Y \right] + \left[X, \frac{\partial Y}{\partial x} \right]
\end{aligned}$$