Tarea 6 Mecánica Analítica

Cerritos Lira Carlos

18 de Marzo del 2020

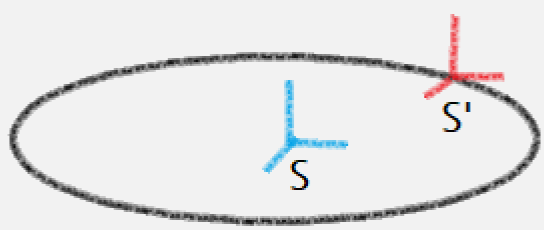
Problemas

1.-

3.4)

Un niño monta un ”caballito” que sube y baja sinusoidalemtne $h = h_0 sin(wt)$ con relación a un tiovivo que gira alrededor de la vertical con una velocidad(tangencial) constante Ω. si el niño está a una distancia c del eje de rotación, hallése una expresión de su aceleración relativa al suelo en funcion de Ω, c, h_0, w y t.

Definimos dos sistemas, S en resposo en el centro del juego y S' justo debajo del caballito como en la figura:



definimos los vectores:

$$\boldsymbol{e_r} = cos(\Omega t)\boldsymbol{i} + sin(\Omega t)\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{e_\theta} = sin(\Omega t)\boldsymbol{i} - cos(\Omega t)\boldsymbol{j}$$

Sea $\boldsymbol{r}$ la función de posición en el sistema S, se tiene:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{R'} + \boldsymbol{r'}\\ &= c\boldsymbol{e_r} + h_0 sin(wt)\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{v} &= -c\Omega\boldsymbol{e_\theta} + h_0 w cos(wt)\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{a} &= -c\Omega^2\boldsymbol{e_r} - h_0 w^2 sin(wt)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

2.-

4.2)

Encontrar la posición en un tiempo t de una partícula de masa m, cuando la fuerza aplicada es $F = 2mcos(wt)$ y $x = 8$ a $t = 0$ y $x = -b$ a $t = \frac{\pi}{2w}$.

Tenemos la siguiente información:

$$\boldsymbol{a} = 2cos(wt)\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{2}{w}sin(wt) + v_0\right)\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{x} = \left(-\frac{2}{w^2}cos(wt) + v_0 t + \frac{2}{w^2} + x_0\right)\boldsymbol{i}$$

donde

$$x_0 = 8$$

podemos encontrar el valor de v_0 mediante la relación $\boldsymbol{x}(\frac{\pi}{2w}) = -b\boldsymbol{i}$, de donde obtenemos:

$$v_0 = \frac{\frac{2}{w^2}cos\frac{\pi}{2w} - \frac{2}{w^2} - x_0 - b}{\frac{\pi}{2w}}$$

3.-

4.4)

a) Si la velocidad límite de caída de un hombre de $80kg$, con paracaídas, es la misma que tendría al caer libremente $0.75m$; hallar el valor de esta velocidad límite y la constante de amortiguamiento k (supóngase $F_{amort} = -mkv$)

b) Supongamos ahora que el hombre cae libremente (partiendo del reposo) durante 5 segundos y que después abre su paracaídas. Luego de otros 5 segundos, ¿cual será su velocidad?

4.-

4.7)

Una partícula de masa m tiene aplicada una fuerza $F = -kx^2$. Si $\dot{x} = v_0$ cuando $x = 0$, hállese:

a) la ecuación de la energía

b) el punto de retorno

c) la velocidad en cualquier posición

a)

Encontramos una energía potencial que satisface $U_0 = 0$ usando la relación:

$$U(x) = -\int_0^x F(x')dx'$$
$$= \frac{k}{3}x^3$$

por el teorema del trabajo y la energía se tiene la relación:

$$U + K = U_0 + K_0$$
$$\frac{k}{3}x^3 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 = E$$

b)

En el punto de retorno se satisface $U = E \implies \dot{x} = 0$, despejando obtenemos:

$$x = \left(\frac{3m}{2k}v_0^2\right)^{\frac{1}{3}}$$

c)

Despejando $\dot{x}$ obtenemos:

$$\dot{x} = \sqrt{v_0^2 - \frac{2k}{3m}x^3}$$

5.-

3.3)

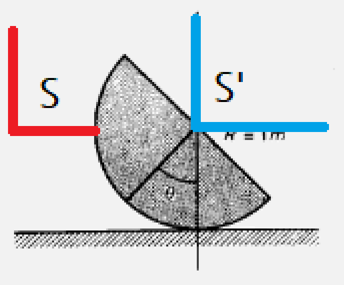
Un semicilindro se balance sinusoidalmente sin deslizamiento, como se muestra en la figura $3-11$, de tal forma que $\theta = sin2t$.

a) Cuando pasa por la posición neutra $\theta = 0$, ¿cuál es la aceleración del punto de contacto con la superfice fija?.

b) Cuando el semicilindro está al ángulo máximo de 1 radían ¿cuál es la aceleración del punto de contacto con la superficie fija?

Caso general

Definimos dos sistemas como en la imagen:



Sea $\boldsymbol{r}$ la función de posición en el sistema S para el punto que se hace de contacto al tiempo t_0, como se balancea sin deslizamiento:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= \theta \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{r'} &= sin(\theta_0 - \theta)\boldsymbol{i} - cos(\theta_0 - \theta)\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

El movimiento respecto al sistema en reposo S, está dado por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r'} \\ \boldsymbol{v} &= \dot{\theta}\boldsymbol{i} - \dot{\theta}cos(\theta_0 - \theta)\boldsymbol{i} - \dot{\theta}sin(\theta_0 - \theta)\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{a} &= \ddot{\theta}\boldsymbol{i} - (\ddot{\theta}cos(\theta_0 - \theta) + \dot{\theta}^2 sin(\theta_0 - \theta))\boldsymbol{i} - (\ddot{\theta}sin(\theta - \theta_0) - \dot{\theta}^2 cos(\theta_0 - \theta))\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

La aceleración de este punto cuando se hace de contacto es:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}(t_0) &= \ddot{\theta}(t_0)\boldsymbol{i} - \ddot{\theta}(t_0)\boldsymbol{i} + \dot{\theta}^2(t_0)\boldsymbol{j} \\ &= 4cos^2(2t_0)\boldsymbol{j}\left[\frac{m}{s^2}\right] \end{aligned}$$

a)

En este caso $t_0 = 0[s]$, sustituyendo obtenemos:

$$\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{j}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

b)

En este caso tenemos $t_0 = \frac{\pi}{4}[s]$, sustituyendo obtenemos:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$