Tarea 6 Mecánica Analítica

Cerritos Lira Carlos

28 de Marzo del 2020

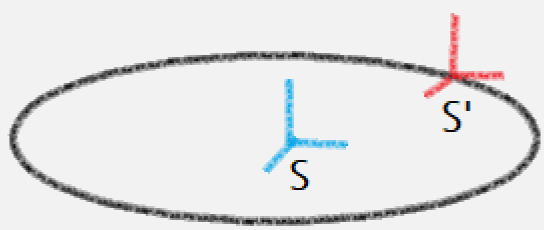
Problemas

1.-

3.4)

Un niño monta un "caballito" que sube y baja sinusoidalemtne $h = h_0 sin(wt)$ con relación a un tiovivo que gira alrededor de la vertical con una velocidad(tangencial) constante Ω. si el niño está a una distancia c del eje de rotación, hallése una expresión de su aceleración relativa al suelo en funcion de Ω, c, h_0, w y t.

Definimos dos sistemas, S en resposo en el centro del juego y S' justo debajo del caballito como en la figura:



definimos los vectores:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e_r} &= cos(\Omega t)\boldsymbol{i} + sin(\Omega t)\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{e_\theta} &= sin(\Omega t)\boldsymbol{i} - cos(\Omega t)\boldsymbol{j}
\end{aligned}
$$

Sea $\boldsymbol{r}$ la función de posición en el sistema S, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{R'} + \boldsymbol{r'} \\
&= c\boldsymbol{e_r} + h_0 sin(wt)\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{v} &= -c\Omega\boldsymbol{e_\theta} + h_0 w cos(wt)\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{a} &= -c\Omega^2\boldsymbol{e_r} - h_0 w^2 sin(wt)\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

2.-

4.2)

Encontrar la posición en un tiempo t de una partícula de masa m, cuando la fuerza aplicada es $F = 2mcos(wt)$ y $x = 8$ a $t = 0$ y $x = -b$ a $t = \frac{\pi}{2w}$.

Tenemos la siguiente información:

$$a = 2cos(wt)$$
$$v = \frac{2}{w} sin(wt) + v(0)$$
$$x = -\frac{2}{w^2} cos(wt) + v(0)t + \frac{2}{w^2} + x(0)$$

donde

$$x(0) = 8$$

podemos encontrar el valor de $v(0)$ mediante la relación $x(\frac{\pi}{2w}) = -b$, de donde obtenemos:

$$v(0) = -\frac{\frac{2}{w^2} + 8 + b}{\frac{\pi}{2w}}$$

3.-

4.4)

a) Si la velocidad límite de caída de un hombre de $80kg$, con paracaídas, es la misma que tendría al caer libremente $0.75m$; hallar el valor de esta velocidad límite y la constante de amortiguamiento k (supóngase $F_{amort} = -mkv$)

b) Supongamos ahora que el hombre cae libremente (partiendo del reposo) durante 5 segundos y que después abre su paracaídas. Luego de otros 5 segundos, ¿cual será su velocidad?

Caida con paracaídas

Sea v la función de velocidad del hombre en caída libre con paracaídas, donde se elige un sistema de referencia tal que $x(0) = 0, v(0) = 0$, de acuerdo al problema se satisface la ecuación diferencial:

$$v' = g - kv$$

que tiene por solución:

$$v = \frac{g}{k} - \frac{g}{k} e^{-kt}$$

vemos que cuando $t \to \infty$ se cumple:

$$v_t = \frac{g}{k}$$

a)

La velocidad y posición en caída libre son:

$$v = gt$$
$$x = \frac{g}{2} t^2$$

el tiempo que transcurre cuando se recorre una distancia x_0 es:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2}{g} x_0}$$

la velocidad que se alcanza es:

$$v_t = \sqrt{2gx_t} = 3.83 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

despejando k obtenemos:

$$k = \frac{g}{v_t} = 2.55[s^{-1}]$$

b)

La función que nos dice su velocidad para $t > 5$ es:

$$v = \frac{g}{k} - \frac{g}{k}e^{-k(t-5)} + 5g$$
$$v(10) = 52\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

4.-

4.7)

Una partícula de masa m tiene aplicada una fuerza $F = -kx^2$. Si $\dot{x} = v_0$ cuando $x = 0$, hállese:

a) la ecuación de la energía

b) el punto de retorno

c) la velocidad en cualquier posición

a)

Encontramos una energía potencial que satisface $U(0) = 0$ usando la relación:

$$\begin{aligned} U(x) &= -\int_0^x F(x')dx' \\ &= \frac{k}{3}x^3 \end{aligned}$$

por el teorema del trabajo y la energía se tiene la relación:

$$\begin{aligned} U + K &= U(0) + K(0) \\ \frac{k}{3}x^3 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 &= \frac{1}{2}mv_0^2 = E \end{aligned}$$

b)

En el punto de retorno se satisface $U = E \implies \dot{x} = 0$, despejando x de la ecuación de energía obtenemos:

$$x = \left(\frac{3m}{2k}v_0^2\right)^{\frac{1}{3}}$$

c)

Despejando $\dot{x}$ de la ecuación de energía obtenemos:

$$\dot{x} = \sqrt{v_0^2 - \frac{2k}{3m}x^3}$$

5.-

3.3)

Un semicilindro se balance sinusoidalmente sin deslizamiento, como se muestra en la figura $3-11$, de tal forma que $\theta = sin2t$.

a) Cuando pasa por la posición neutra $\theta = 0$, ¿cuál es la aceleración del punto de contacto con la superfice fija?

b) Cuando el semicilindro está al ángulo máximo de 1 radían ¿cuál es la aceleración del punto de contacto con la superficie fija?

Caso general

Definimos dos sistemas como en la imagen:

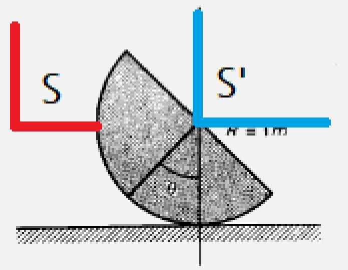


Fig. 3-11

Sea $\boldsymbol{r}$ la función de posición en el sistema S para el punto que se hace de contacto al tiempo t_0, como se balancea sin deslizamiento:

$$\boldsymbol{R} = \theta \boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{r'} = sin(\theta_0 - \theta)\boldsymbol{i} - cos(\theta_0 - \theta)\boldsymbol{j}$$

El movimiento respecto al sistema en reposo S, está dado por:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r'}$$
$$\boldsymbol{v} = \dot{\theta}\boldsymbol{i} - \dot{\theta}cos(\theta_0 - \theta)\boldsymbol{i} - \dot{\theta}sin(\theta_0 - \theta)\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{a} = \ddot{\theta}\boldsymbol{i} - (\ddot{\theta}cos(\theta_0 - \theta) + \dot{\theta}^2 sin(\theta_0 - \theta))\boldsymbol{i} - (\ddot{\theta}sin(\theta - \theta_0) - \dot{\theta}^2 cos(\theta_0 - \theta))\boldsymbol{j}$$

La aceleración de este punto cuando se hace de contacto es:

$$\boldsymbol{a}(t_0) = \ddot{\theta}(t_0)\boldsymbol{i} - \ddot{\theta}(t_0)\boldsymbol{i} + \dot{\theta}^2(t_0)\boldsymbol{j}$$
$$= 4cos^2(2t_0)\boldsymbol{j}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

a)

En este caso $t_0 = 0[s]$, sustituyendo obtenemos:

$$\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{j}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

b)

En este caso tenemos $t_0 = \frac{\pi}{4}[s]$, sustituyendo obtenemos:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$