Tarea 10 Mecánica Analítica

Cerritos Lira Carlos

27 de Mayo del 2020

1.-

7.2 a)

Hállese las fuerzas centrales bajo cuya acción una partícula seguirá las órbitas

$$r = a(1 + cos\theta)$$

Primero hacemos cuentas:

$$\begin{aligned} r &= a(1+cos\theta) \\ u &= \frac{1}{a(1+cos\theta)} \\ \frac{du}{d\theta} &= \frac{sin\theta}{a(1+cos\theta)^2} \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{sin^2\theta + cos\theta + 1}{a(cos\theta+1)^3} \end{aligned}$$

Suponemos que la fuerza es de la forma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}(r) &= F(r)\boldsymbol{e}_r \\ m\boldsymbol{a} &= F(r)\boldsymbol{e}_r \\ m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta &= F(r)\boldsymbol{e}_r \end{aligned}$$

de donde obtenemos:

$$\begin{aligned} r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} &= 0 \\ r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) &= 0 \\ r^2\dot{\theta} &= h \end{aligned}$$

sabemos que se cumple:

$$
\begin{aligned}
F(r) &= -\frac{h^2}{m}u^2(u + \tfrac{d^2u}{d\theta^2}) \\
&= -\frac{h^2}{m}u^2\left[\frac{1}{a(1+cos\theta)} + \frac{sin^2 + cos\theta + 1}{a(cos\theta+1)^3}\right] \\
&= -\frac{h^2}{m}u^2\left[\frac{(1+cos\theta)^2 + sin^2\theta + cos\theta + 1}{a(cos\theta+1)^3}\right] \\
&= -\frac{h^2}{m}u^2\left[\frac{1 + 2cos\theta + cos^2\theta + sin^2\theta + cos\theta + 1}{a(cos\theta+1)^3}\right] \\
&= -\frac{h^2}{m}u^2\left[\frac{3 + 3cos\theta}{a(cos\theta+1)^3}\right] \\
&= -\frac{h^2}{m}u^2\left[\frac{3aa(1+cos\theta}{r^3}\right] \\
&= -\frac{h^2}{m}\frac{1}{r^2}\frac{3ar}{r^3} \\
&= -\frac{h^2 3a}{m}\frac{1}{r^4}
\end{aligned}
$$

2.-

7.10)

Hállese la velocidad de escape de una partícula de la superficie de la Tierra, dado que la constante gravitacional es:

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}$$

Como la energía mecánica para una partícula sometida a la fuerza de gravedad de la Tierra se conserva:

$$
\begin{aligned}
T_1 + U_1 &= T_2 + U_2 \\
\frac{1}{2}mv_{escape}^2 - \frac{GM_T m}{R_T} &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GM_T m}{R_2} \\
\frac{1}{2}mv_{escape}^2 - \frac{GM_T m}{R_T} &= 0 \\
v_{escape} &= \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \\
&= \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \times 10^{-11} \cdot 5.976 \times 10^{24}}{6378}} \\
&= 11.2\frac{km}{s}
\end{aligned}
$$

3.-

Esféra homógenea

Dado un eje arbitrario que pasa por el centro de masa, tomemos un sistema de referencia tal que este eje es z, debido a la simétria de la esféra:

$$
\begin{aligned}
3I_{zz} &= I_{zz} + I_{xx} + I_{yy} \\
&= \int_S 2(x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz \\
&= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 2r^4 sin\phi \frac{3M}{4\pi R^3} drd\theta d\phi \\
&= \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 4\pi \cdot 2 \\
&= \frac{6}{5}MR^2 \\
I_{zz} &= \frac{2}{5}MR^2
\end{aligned}
$$

4.-

Anillo cilíndrico homogéneo

Tomamos un sistema de referencia tal que el eje de simétria es el eje z, tenemos entonces:

$$
\begin{aligned}
I_{zz} &= \int_{Ring} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dxdydz \\
&= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^3 \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)h} drd\theta dz \\
&= \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)h} h2\pi \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \\
&= \frac{1}{2}M\frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^2 - R_1^2} \\
&= \frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2) \\
&\approx MR_2^2
\end{aligned}
$$