Cuerpo Rígido.

1. Introducción.

Un caso muy especial de sistema de muchas partículas es el cuerpo rígido (CR). Este es un sistema de muchas partículas en el cual la distancia entre pares de partículas permanece constante durante su movimiento, estas constricciones holonómicas son constricciones internas. Estonces un cuerpo rígido no se deforma bajo la acción de fuerzas y torcas durante su movimiento, lo cual obviamente es una idealización, sin embargo muchos objetos se comportan en una primera aproximación como un CR. El cuerpo rígido puede trasladarse y puede rotar (no se puede deformar). Este sistema de muchas partículas, donde el número de partículas puede ser tan grande como el número de Avogadro, ó mayor, tiene seis grados de libertad como máximo, a continuación hacemos esto plausible. Damos las coordenadas de un punto en el cuerpo, es decir tres coordenadas independientes. Un segundo punto sólo necesitará dos coordenadas para quedar bien determinado, ya que su distancia al primer punto es constante. Podemos verlo así: el lugar geométrico de los puntos 2 tales que su distancia al punto 1 sea una constante, es una esfera centrada en el primer punto. Para determinar la posición sobre la superficie de una esfera requerimos de dos coordenadas solamente. Tomamos ahora un tercer punto, no colineal con los anteriores, tal que su distancia a los puntos 1 y 2 es constante. El lugar geométrico de estos puntos 3 es una circunferencia en el plano perpendicular a la línea que une los puntos 1 y 2. La posición sobre una circunferencia requiere de sólo una coordenada para quedar determinada. Si tomamos un cuarto punto las coodenadas de éste quedarán determinadas a partir de las distancias a los otros tres puntos dados. Entonce sólo requerimos de 6 coordenadas independientes (grados de libertad) para determinar la posición de un CR a cualquier tiempo. El movimiento más general de un CR (sin constricciones externas) requerirá de seis coordenadas independientes.

Las ecuaciones de movimiento para resolver el problema más general de la dinámica de un cuerpo rígido son,

$$M\mathbf{A} = \mathbf{F}^{\mathbf{ext}}, \tag{1}$$

que describe el movimiento de traslación del sistema y

$$\mathbf{N}' = \frac{\mathbf{d\ L}'}{\mathbf{d\ t}}\ , \tag{2}$$

que describe el movimiento de rotación alrededor de (con respecto a) un conjunto de ejes con orientación fija que pasan por el centro de masa (CM).

Si el CR tiene uno ó más puntos fijos en un sistema inercial de referencia, entonces la ecuación que describe el movimiento será

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{d\ L}}{\mathbf{d\ t}}\ , \tag{3}$$

donde la torca y el momento angular son calculados con respecto al sistema de referencia inercial que pasa por uno de los puntos fijos. En este caso el CR no tiene movimiento de traslación, sólo de rotación.

2. Momento angular de un cuerpo rígido.

Se encontrará la expresión para el momento angular de un cuerpo rígido y después se utilizará para obtener la ecuación para el movimiento de rotación. Como se vió antes la relación entre el momento lineal y la velocidad (lineal) es muy sencilla $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Estas dos cantidades están conectadas a través de la masa que es un escalar. Ahora queremos encontrar la relación entre el momento angular y la velocidad angular. Esperamos que aquí también aparezca un término de inercia que las conecte.

Consideremos un punto en el CR, O, por el cual pasaremos un sistema de referencia. Este punto puede ser el centro de masa si el cuerpo rígido se está trasladando, ó un punto fijo en un sistema inercial, si el CR tiene uno ó más puntos fijos en este sistema de referencia. Sea $\mathbf{r}_i$ el vector de posición desde O a la partícula i. Entonces

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\,\mathbf{r}_i}{d\,t} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i. \tag{4}$$

En la ecuación anterior la derivada del vector de posición sólo tiene el término debido al cambio en dirección del vector, ya que la magnitud de $\mathbf{r}_i$ no cambia pues es la posición de un punto del cuerpo desde otro punto también del CR. Por otra parte es importante notar que el vector $\boldsymbol{\Omega}$ es el mismo para todos los puntos en el CR, ya que si la velocidad angular fuera diferente para distintos puntos en el cuerpo, éste se deformaría.

Entonces

$$\mathbf{L} = \sum_i^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_i^N m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i) = \sum_i^N m_i [r_i^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\Omega})\mathbf{r}_i] \tag{5}$$

Expresando $\mathbf{r}_i$ y $\boldsymbol{\Omega}$ en términos de sus componentes cartesianas podemos encontrar las componentes cartesianas de $\mathbf{L}$. Estas son

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\Omega_x + I_{xy}\Omega_y + I_{xz}\Omega_z, \\ L_y &= I_{yx}\Omega_x + I_{yy}\Omega_y + I_{yz}\Omega_z, \\ L_z &= I_{zx}\Omega_x + I_{zy}\Omega_y + I_{zz}\Omega_z, \end{aligned} \tag{6}$$

donde los coeficientes que multiplican a las componentes del vector velocidad angular son las componentes del tensor de inercia I. Este es un tensor de rango 2. Los elementos de la diagonal I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} son los momentos de inercia respecto de los ejes x, y y z respectivamente y los elementos con índice distinto, fuera de la diagonal principal, son los productos de inercia. La ecuación que conecta el momento angular con la velocidad angular es entonces

$$\mathbf{L} = (I)\boldsymbol{\Omega}, \tag{7}$$

con (I) el tensor de inercia, cuya representación es una matriz de 3×3, y $\mathbf{L}$ y $\mathbf{\Omega}$ matrices de dimensión 3×1. De la ecuación anterior observamos que la relación entre el momento angular y la velocidad angular es vía el tensor (de rango 2) de inercia.

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \tag{8}$$

Las expresiones para los momentos de inercia son

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_i^N m_i[r_i^2 - x_i^2], \\ I_{yy} &= \sum_i^N m_i[r_i^2 - y_i^2], \\ I_{zz} &= \sum_i^N m_i[r_i^2 - z_i^2], \end{aligned} \tag{9}$$

y las de los productos de inercia:

$$\begin{aligned} I_{xy} = I_{yx} &= -\sum_i^N m_i x_i y_i, \\ I_{xz} = I_{zx} &= -\sum_i^N m_i x_i z_i, \\ I_{yz} = I_{zy} &= -\sum_i^N m_i y_i z_i. \end{aligned} \tag{10}$$

Como se observa, el tensor de inercia está representado por una matriz simétrica de dimensión 3×3. Esta matriz se puede diagonalizar por medio de una transformación ortogonal y el conjunto de ejes mutuamente ortogonales que diagonaliza esta matriz se conoce como el conjunto de ejes principales de inercia del cuerpo rígido. Un cuerpo rígido tendrá al menos un conjunto de ejes principales de inercia. Si el cuerpo rígido tiene alguna propiedad de simetría tendrá más de un conjunto de ejes principales. Por ejemplo si tenemos un cilindro circular recto de densidad uniforme, el eje de simetría del cilindro es un eje principal y cualquier par de ejes en el plano perpendicular al eje de simetría y perpendiculares entre sí, completarán el conjunto de ejes principales de inercia.

En general macroscópicamente un cuerpo rígido no es un conjunto de puntos masa, éste se ve como una distribución continua de materia. Las sumas en las ecuaciones arriba deben entonces ser substituídas por integrales sobre la masa

$$\sum_i^N m_i -> \int dm. \tag{11}$$

Usando la definición de densidad $\varrho = \frac{dm}{dV}$, podemos substituír la integral a la masa por una integral al volumen ocupado por el cuerpo.

$$\sum_i^N m_i -> \int dm = \int \varrho dV. \tag{12}$$

La expresión para el momento angular, Eq.(5), tiene la siguiente forma

$$\mathbf{L} = \int \varrho\ \mathbf{r}\ \times\ \mathbf{v}\ dV. \tag{13}$$

Lo mismo ocurre con las expresiones para los momentos y productos de inercia del cuerpo rígido, las sumas son substituidas por integrales sobre la masa. Hemos conservado la notación de suma por la familiaridad con ella, en el entendimiento de que se utilizará la ecuación (12) en el momento de realizar cálculos específicos.

Igualmente se puede calcular la posición del centro de masa de un cuerpo continuo substituyendo las sumas a las partículas por integrales sobre la masa, las cuales a su vez se pueden escribir como integrales sobre el volumen a través de la definición de densidad.

$$M\mathbf{R} = \int \varrho\ \mathbf{r}\ dV, \tag{14}$$

con M la masa total,

$$M = \int \varrho\ dV. \tag{15}$$

Los momentos y productos de inercia de algunos sólidos serán evaluados a continuación. Consideremos un cilindro sólido homogéneo ($\varrho = cte$) de masa M, radio R y longitud L.

Calcularemos el momento de inercia respecto al eje de simetría, el cual escogeremos como el eje z. Las coordenadas que utilizaremos serán las cilíndricas. Recordando que el elemento de volumen en coordenadas generalizadas q_1, q_2, q_3 se puede escribir como

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3, \tag{16}$$

donde h_i son los factores de escala.

$$I_{zz} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L \varrho\, \rho^3\ d\rho\ d\phi\ dz = \frac{MR^2}{2} \tag{17}$$

El momento de inercia con respecto al eje y será también calculado para este cilindro obteniendo,

$$I_{yy} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L \varrho\, \rho^3\ d\rho\ \cos^2\phi\ d\phi\ dz + \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L \varrho\, \rho\ d\rho\ d\phi\ z^2\ dz = \frac{MR^2}{4} + \frac{ML^2}{12}. \tag{18}$$

De la simetría del cilindro $I_{xx} = I_{yy}$. Los momentos de inercia calculados para el cilindro son con respecto de ejes principales si calculamos los productos de inercia estos serán iguales a cero para esta selección de ejes. Los ejes principales de inercia son muy estables.

3. Teorema de ejes paralelos.

Existe un teorema de ejes paralelos para los elementos del tensor de inercia. Este teorema conecta los momentos y productos de inercia con respecto de cualquier punto del cuerpo rígido con los momentos y productos de inercia con respecto a un sistema de ejes paralelo al anterior, que pasa por el centro de masa.

En la sección anterior se vió que la velocidad angular de todos los puntos del cuerpo rígido con respecto a uno de sus puntos es la misma. Ahora veremos que la velocidad angular de los puntos del CR con respecto a dos de sus puntos tiene también el mismo valor. Tomemos el punto i como referencia y llamamos $\mathbf{r}_{ji}$ al vector de posición del punto j desde i, si $\mathbf{\Omega}$ es la velocidad angular del CR desde i, entonces

$$\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{ji} \tag{19}$$

es la velocidad lineal del punto j medida desde el punto i. Ahora, el vector $\mathbf{r}_{ij} = -\mathbf{r}_{ji}$ es el vector de posición del punto i desde el punto j. Supongamos que la velocidad angular del CR desde j tiene otro valor, por ejemplo $\mathbf{\Omega}'$, sabemos que la velocidad lineal del punto i desde j es

$$-\mathbf{v} = \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{r}_{ij} = -\mathbf{\Omega}' \times \mathbf{r}_{ji}. \tag{20}$$

Sumando estas dos ecuaciones,

$$\mathbf{v} - \mathbf{v} = (\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}') \times \mathbf{r}_{ji.} \tag{21}$$

El lado izquierdo en la ecuación anterior es igual a cero y siendo arbitrarios los puntos i y j la conclusión es que

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}'. \tag{22}$$

Este resultado es válido para cualquier par de puntos del cuerpo rígido, en particular podemos tomar el centro de masa como uno de esos puntos y utilizar un resultado ya obtenido en un capítulo anterior: El momento angular con respecto a un punto fijo O del cuerpo rígido es igual al momento angular del CM con respecto a ese punto más el momento angular del CR con respecto al sistema de referencia por el centro de masa.

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}\times\mathbf{P} + \mathbf{L}', \tag{23}$$

$\mathbf{R}$ y $\mathbf{P}$ son el vector de posición y el momento lineal del CM con respecto del otro punto del cuerpo rígido y $\mathbf{L}'$ es el momento angular del cuerpo rígido con respecto al CM. Esta ecuación puede escribirse como

$$\mathbf{L} = M\mathbf{R}\times(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}) + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}'_i). \tag{24}$$

En este ecuación se utilizó el resultado obtenido arriba y la velocidad angular del CM respecto del punto O es la misma que la velocidad de los puntos del cuerpo rígido con respecto al centro de masa, es decir $\mathbf{\Omega}$.

Tomando el sistema de ejes por el CM paralelo al sistema de ejes por O tenemos la expresión matricial de la ecuación anterior

$$\mathbf{L} = (I)\mathbf{\Omega} = (I_{CM} + I')\mathbf{\Omega}, \tag{25}$$

Donde (I) es el tensor de inercia del cuerpo rígido con respecto al sistema de ejes coordenados por O, (I_{CM}) es el tensor de inercia del centro de masa respecto del sistema de ejes por O e (I') es el tensor de inercia del cuerpo rígido con respecto al sistema de ejes (paralelo al anterior) que pasa por el centro de masa. Entonces

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(R^2 - X^2) & -MXY & -MXZ \\ -MYX & M(R^2 - Y^2) & -MYZ \\ -MZX & -MZY & M(R^2 - Z^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I'_{xx} & I'_{xy} & I'_{xz} \\ I'_{yx} & I'_{yy} & I'_{yz} \\ I'_{zx} & I'_{zy} & I'_{zz} \end{pmatrix} \tag{26}$$

Donde cada elemento de la matriz (I) es igual al correspondiente elemento que resulta de la suma de las matrices $I_{CM} + I'$. Así

$$I_{xx} = M(Y^2 + Z^2) + I'_{zz}, \tag{27}$$

para el elemento (1,1) de las matrices que representan al tensor de inercia.

4. Energía cinética rotacional de un cuerpo rígido .

Se va a evaluar la energética de rotación del cuerpo rígido. Esta debe depender de la velocidad angular del cuerpo y de las componentes del tensor de inercia

$$T = \sum_i^N \frac{1}{2} m v_i^2 = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{v}_i = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{\Omega} \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega} \cdot \sum_i^N (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i), \tag{28}$$

donde se utilizó la ecuación (4) para expresar el vector velocidad lineal en términos de la velocidad angular. La suma en la última igualdad de la ecuación anterior es igual al momento angular $\mathbf{L} = (\mathbf{I})\mathbf{\Omega}$. Por lo tanto la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2}\langle \mathbf{\Omega}|\mathbf{I}|\mathbf{\Omega}\rangle. \tag{29}$$

5. Ecuación de movimiento para el momento angular.

Para obtener la ecuación de movimiento del momento angular derivamos respecto del tiempo la ecuación(5). Es importante recordar que el vector de posición de un punto del cuerpo rígido con respecto a otro punto del cuerpo, sólo cambia su dirección con el tiempo, pero no su magnitud (debido a la definición de cuerpo rígido). Entonces el vector velocidad está dado por

$$\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}. \tag{30}$$

Hay que recalcar que $\mathbf{\Omega}$ es la misma para todos los puntos del cuerpo, por ser éste un cuerpo rígido. Derivando la ecuación del momento angular

$$\frac{d\,\mathbf{L}}{d\,t} = \frac{d}{dt}\sum_i^N m_i\mathbf{r}_i \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_i) = \sum_i^N m_i\mathbf{r}_i \times (\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}_i + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_i). \tag{31}$$

El segundo sumando

$$\mathbf{r}_i \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_i) = \mathbf{r}_i \times (\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_i)), \tag{32}$$

se puede escribir también como

$$\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{r}_i \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r_i})) = \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{r_i} \times \mathbf{v_i}). \tag{33}$$

Substituyendo este resultado en la Eq.(31),

$$\frac{d\,\mathbf{L}}{d\,t} = \sum_i^N m_i\mathbf{r}_i \times (\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}_i) + \mathbf{\Omega} \times \sum_i^N m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i). \tag{34}$$

El primer sumando del lado derecho tiene una expresión similar a la de la Ec.(5), sólo que en lugar de $\mathbf{\Omega}$ tenemos $\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt}$. El segundo sumando corresponde al producto vectorial de la velocidad angular por el momento angular. Entonces podemos escribir la ecuación anterior:

$$\mathbf{N} = \frac{d\,\mathbf{L}}{d\,t} = (\mathbf{I})\frac{d\,\mathbf{\Omega}}{d\,t} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{L}. \tag{35}$$

Estas ecuaciónes nos describen el movimiento de rotación del cuerpo rígido. Hay situaciones en las que estas ecuaciónes toman una forma sencilla como es el caso del movimiento de rotación del cuerpo rígido alrededor de un eje fijo, el cual estudiaremos a continuación.

6. Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo.

El movimiento de rotación más sencillo de un cuerpo rígido ocurre cuando el eje de rotación tiene una orientación fija en el espacio y no se traslada. Escogemos el eje z en la dirección del eje de rotación; entonces $\Omega_x = \Omega_y = 0$ y $\Omega_z = \Omega$ y él ó los puntos del cuerpo rígido que pasan por el eje de rotación están fijos en un sistema inercial de referencia y por lo tanto el cuerpo rígido sólo tiene movimiento de rotación y no se traslada. Las ecuaciones de movimiento están dadas por las ecuciones (3), las cuales en términos del tensor de inercia tienen la forma expresada en las ecuaciones (35). Substituyendo las componentes de la velocidad angular en la ecuación (35), obtenemos para las componentes de la torca las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} N_x &= I_{xz}\,\frac{d\,\Omega}{d\,t} - I_{yz}\,\Omega^2, \\ N_y &= I_{yz}\,\frac{d\,\Omega}{d\,t} + I_{xz}\,\Omega^2, \\ N_z &= I_{zz}\,\frac{d\,\Omega}{d\,t}\,. \end{aligned} \tag{36}$$

Las primeras dos ecuaciones, que dependen de las componentes fuera de la diagonal principal del tensor de inercia (productos de inercia), son las torcas de constricción, ya que éstas son las encargadas de mantener al cuerpo rígido rotando alrededor de un eje de rotación fijo que no es un eje principal. Si la rotación es alrededor de un eje principal estas componentes son cero, lo que indica que los ejes principales son muy estables. La tercera ecuación arriba es la que describe el movimiento de rotación del CR. I_{zz} es el momento de inercia con respecto al eje de rotación y $\frac{d\,\Omega}{d\,t}$ es la aceleración angular. La expresión para la energía cinética en este caso también toma una forma muy sencilla, debido a que escogimos el eje de rotación como uno de los ejes del sistema de coordenadas, quedando

$$T = \frac{1}{2} I_{zz} \Omega^2. \tag{37}$$

Como aplicación consideremos el problema de una mancuerna, esto es dos esferas de masa m cada una, unidas a los extremos de una varilla rígida, delgada, de longitud $2l$ y masa despreciable; la función de la varilla es mantener a las masas separadas una distancia $2l$ y comportarse como un cuerpo rígido. La mancuerna se pone a rotar con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ alrededor del eje vertical (z) que pasa por el punto medio de la varilla, el ángulo de la varilla con el eje de rotación θ, permanece fijo. Esta rotación no es alrededor de un eje principal de la mancuerna.

Cada partícula describe un círculo de radio $l\ sen(\theta)$ en el plano perpendicular al eje de rotación (plano $x-y$). En la posición mostrada en la figura las coordenadas esféricas de las partículas son $(l, \theta, \pi+\phi)$ y $(l, \pi-\theta, \phi)$. Con esta selección del eje de rotació,n paralelo al eje z, $\Omega_x = \Omega_y = 0$ y $\Omega_z = \Omega = \frac{d\,\phi}{d\,t}$.

Utilizando la ecuación (8),

$$L_x = I_{xz}\Omega = -\sum_i^N m_i x_i z_i \Omega,$$

$$L_y = I_{yz}\Omega = -\sum_i^N m_i y_i z_i \Omega,$$

$$L_z = I_{zz}\Omega = -\sum_i^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \Omega. \tag{38}$$

Las coordenadas cartesianas de cada partícula son

$$(-l\ sen(\theta)\ cos(\phi), -l\ sen(\theta)\ sen(\phi), l\ cos(\theta)),$$

$$y\ \ (l\ sen(\theta)\ cos(\phi), l\ sen(\theta)\ sen(\phi), -l\ cos(\theta))$$

respectivamente, y las componentes del momento angular,

$$L_x = 2ml^2 sen(\theta)cos(\theta)cos(\phi)\Omega,$$

$$L_y = 2ml^2 sen(\theta)cos(\theta)sen(\phi)\Omega,$$

$$L_z = 2ml^2 sen^2(\theta)\Omega. \tag{39}$$

En la ecuación anterior los coeficientes de la velocidad angular son los productos y momento de inercia I_{xz}, I_{yz}, I_{zz}, respectivamente. Substituyendo estos en las ecuaciones (36), obtenemos las componentes cartesianas de la torca

$$N_x = 2ml^2 sen(\theta)cos(\theta)cos(\phi)\ \frac{d\,\Omega}{d\,t}\ - 2ml^2 sen(\theta)cos(\theta)sen(\phi)\ \Omega^2,$$
$$N_y = 2ml^2 sen(\theta)cos(\theta)sen(\phi)\ \frac{d\,\Omega}{d\,t}\ + 2ml^2 sen(\theta)cos(\theta)cos(\phi)\ \Omega^2,$$
$$N_z = 2ml^2 sen^2(\theta)\ \frac{d\,\Omega}{d\,t}\ . \tag{40}$$

Como se mencionó antes las dos primeras ecuaciones dependen de productos de inercia y son torcas de constricción cuyo efecto es mantener al cuerpo rígido rotando alrededor de ese eje fijo que no es un eje principal de inercia. La última ecuación es la ecuación que describe el movimiento de rotación de la mancuerna.

En el caso particular que la velocidad angular de rotación fuera constante, la componente z de la torca sería cero, y por lo tanto, la componente z del momento angular igual a constante. Las otras dos componentes de la torca son responsables del cambio en la proyección del momento angular en el plano $x - y$, ésta tiene magnitud constante, pero precesa alrededor del eje z con velocidad angular Ω, lo que indica que el vector momento angular, que forma un ángulo $\pi/2\ -\ \theta$ con el eje z, precesa alrededor del eje de rotación sin cambiar su magnitud.

7. Rodamiento.

Consideremos ahora el movimiento de un cuerpo rígido donde el eje de rotación no está fijo y se traslada pero sin cambiar su dirección. En este caso no hay puntos del cuerpo rígido que estén fijos en un sistema inercial de referencia y éste se traslada y rota. Las ecuaciones de movimiento serán obtenidas de las expresiones (2) y (3), es decir, la ecuación de movimiento del centro de masa y la ecuación de rotación del CR con respecto al sistema de referencia por el CM. Si el cuerpo rígido se mueve sobre una superficie y la velocidad instantánea de los puntos del cuerpo en contacto con la superficie es cero, entonces el CR rueda sin resbalar sobre esta superficie. Estudiaremos a continuación este movimiento de rodamiento sin deslizamiento.

Supongamos que tenemos un cuerpo rígido de densidad uniforme y de sección transversal circular, de radio R, éste puede ser una esfera, ó un cilindro. Si la velocidad angular del cuerpo con respecto al eje de rotación (este eje pasa por el centro de masa) es $\mathbf{\Omega}$, la velocidad del centro de masa respecto al sistema de referencia fijo en la superficie sobre la que rueda, será $V = \Omega\, R$, en dirección paralela a la superficie. Todos los puntos del cuerpo rígido que estén a una distancia R del eje de rotación (por el CM) tendrán una velocidad de magnitud $\Omega\, R$, tangente al cilindro cuyo eje de simetría es el eje de rotación. De estos hay un subconjunto de puntos cuya velocidad es paralela o antiparalela a la velocidad del CM. Los primeros tendrán una velocidad instantánea $2V$ respecto al sistema de referencia fijo en la superficie sobre la que rueda en cuerpo, los otros, que llamaremos los puntos p, tendrán velocidad instantánea 0, estos últimos constituyen el eje de rotación instantáneo. Entonces, respecto al sistema de refencia fijo en la superficie de rodamiento,

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{V} \ - \ \mathbf{\Omega} \ \times \mathbf{R} \ = \ 0, \tag{41}$$

donde los puntos p son los puntos del cuerpo en contacto con la superficie de rodamiento. Si el cuerpo rígido además de rodar se deslizara sobre esta superficie, entonces la velocidad de los puntos del cuerpo en contacto con la superficie no sería igual a cero.

En este tipo de movimiento el eje de rotación del CR no cambia su dirección y tomamos el eje z', en la dirección del eje de rotación. Entonces la ecuación del movimiento de rotación será,

$$N'_z = I'_{zz} \, \frac{d\,\Omega}{d\,t} \ , \tag{42}$$

donde $\Omega_z = \Omega$ y cero las otras dos componentes de la velocidad angular.

Es interesante considerar de donde proviene la torca que produce el movimiento de rodamiento. Este movimiento se debe a la torca producida por la fuerza de fricción entre el cuerpo rígido y la superficie en contacto con éste. Recordemos que la fuerza de fricción estática entre dos superficies cambia desde un valor muy pequeño, hasta el valor de la máxima fuerza de fricción estática, cuya ley de fuerza está dada por $f_e = \mu_e\, N$; esta fuerza es tangente a las superficies en contacto y se opone al movimiento, μ_e es el coeficiente de fricción estática. Si la torca requerida para que el cuerpo rígido ruede sobre la superficie es menor ó igual que $R\, f_e$, éste rodará sin resbalar; en caso contrario, el cuerpo deslizará y la fricción que actuará en este caso será la fricción de deslizamiento $f_d = \mu_d\, N$, con μ_d, el coeficiente de fricción de deslizamiento.

En el movimiento de un cuerpo rígido que rueda sin resbalar la energía $E = T + U$ es una constante de movimiento, pues el trabajo realizado por la fuerza de fricción estática es cero, ya que no hay desplazamiento entre ambas superficies en contacto. En cambio si la fuerza que actúa es la de deslizamiento, la energía E no se conserva.

A continuación consideremos el problema de un cilindro homogéneo (densidad uniforme) de radio r y masa m que rueda sin resbalar sobre la superficie de un plano inclinado un ángulo θ con respecto de la horizontal, el plano de masa M se puede deslizar sobre una superficie horizontal sin fricción. Suponemos que el cilindro parte del reposo de la parte más alta del plano. Encontrar la Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange del movimiento. Encontrar el movimiento del cilindro y del plano e indicar si se conserva E.

Al tiempo inicial $t_0 = 0$: $\dot{x_0} = 0$, $\dot{\phi}_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\phi_0 = 0$. Donde la variable x da la posición del plano inclinado, el ángulo ϕ se mide respecto del radio que une el CM del cilindro con el punto de contacto de éste con la superficie del plano. La posición inicial del CM del cilindro es $(a,\ h)$.

La condición de rodamiento (sin resbalar) para los puntos P del cuerpo rígido, en contacto con la superficie del plano inclinado, se escribe como

$$\dot{s} \ - \ r\ \dot{\phi} \ = \ 0, \tag{43}$$

donde $\dot{s}$ es la velocidad del centro de masa. Integrando esta ecuación, obtenemos $s \ = \ r\ \phi$, que puede substituirse en la posición del CM al tiempo t. Al tiempo posterior t la posición del CM es entonces $(a \ + \ x \ + \ r\ \phi\ cos(\theta),\ h \ - \ r\ \phi\ sen(\theta))$, donde ya se incluyó la condición de rodamiento.

La lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{m}{2}[(\dot{x} + r\dot{\phi}cos(\theta))^2 + (r\dot{\phi}sen(\theta))^2] + \frac{I}{2}\dot{\phi}^2 - mg[h - r\phi sen(\theta)] \tag{44}$$

Como el plano inclinado se desplaza sobre un plano horizontal, su centro de masa está siempre a la misma altura, l, por lo que no escribimos este término constante Mgl en la energía potencial ya que no altera las ecuaciones de movimiento. La Lagrangiana no depende del tiempo por lo que la función de Hamilton ó hamiltoniana H, es una constante del movimiento (con dimensiones de energía) que determinaremos usando la transformación de Legendre. La coordenada x es también una coordenada ignorable, por lo que el momento generalizado p_x, que corresponde a la proyección en la dirección horizontal del momento lineal, es una constante del movimiento. La fuerza externa sobre este sistema de partículas es la fuerza de gravedad, ésta actúa en la dirección vertical; sin embargo no hay fuerza externa en la dirección horizontal. Los momento generalizados son

$$p_x = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}L = (M + m)\dot{x} + mr\dot{\phi}cos(\theta) = cte.,$$

$$p_\phi = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}L = (mr^2 + I)\dot{\phi} + mr\dot{x}cos(\theta). \tag{45}$$

Las ecuaciones de Lagrange obtenidas son,

$$(M+m)\ddot{x} + mr\ddot{\phi}cos(\theta) = 0$$

$$(mr^2 + I)\ddot{\phi} + mr\ddot{x}cos(\theta) - mgrsen(\theta) = 0. \tag{46}$$

De las dos ecuaciones obtenemos

$$\ddot{\phi} = \frac{mrsen(\theta)g}{mr^2 + I - \frac{m^2r^2cos^2(\theta)}{M+m}} = cte, \tag{47}$$

y

$$\ddot{x} = -\frac{mrcos(\theta)\ddot{\phi}}{M+m}, \tag{48}$$

Integrando respecto del tiempo y con las condiciones iniciales,

$$\phi = \frac{mrsen(\theta)g\frac{t^2}{2}}{mr^2 + I - \frac{m^2r^2cos^2(\theta)}{M+m}}. \tag{49}$$

Para la variable x

$$x = -\frac{mrcos(\theta)\phi}{M+m}, \tag{50}$$

donde substituyendo la solución para ϕ, obtenemos x como función del tiempo. Note que mientras el cilindro se desliza hacia abajo del plano (y hacia la derecha), éste se mueve hacia la izquierda (ver figura).

Aplicando la transformación de Legendre, para la hamiltoniana,

$$H = \dot{x}p_x + \dot{\phi}p_\phi - L, \tag{51}$$

obtenemos que ésta es igual a $H = T + U = E = cte.$, como era de esperarse pues la fuerza de fricción que actúa es la fricción estática.

8. Angulos de Eüler.

Ya se vió con anterioridad que la orientación en el espacio de un sistema de ejes mutuamente ortogonales que está girando con respecto de otro conjunto de ejes que mantiene su orientación fija, está determinada por tres parámetros independientes. Hay muchas selecciones de estas tres coordenadas, una de ellas es la llamada ángulos de E*ü*ler. Este conjunto de coordenadas generalizadas permite obtener la orientación del cuerpo rígido en cualquier tiempo con respecto al sistema de ejes con orientación fija. Tomemos dos conjuntos de ejes que pasan por un punto del cuerpo rígido, éste puede ser el centro de masa ó un punto fijo en un sistema inercial de referencia. Uno de estos sistemas de ejes está fijo con respecto al CR (ejes primados en la figura) y rota con él; el otro sistema tiene orientación fija en el espacio (ejes no primados en la figura). Los ángulos de E*ü*ler nos determinan tres rotaciones independientes que nos llevan del sistema de ejes del espacio (orientación fija), al sistema de ejes del cuerpo rígido (que giran con él).

Comenzamos con los ejes fijos en el espacio x, y, z y realizamos una rotación por un ángulo ϕ alrededor del eje-z, ésta transforma los ejes al conjunto x_1, y_1, z_1, donde $z_1 = z$, puesto que el eje de rotación no cambia. Ahora se realiza una rotación alrededor del eje x_1, que llamaremos línea de los nodos por un ángulo θ. Esta última lleva el eje z_1 ó z al z_2, que forma un ángulo θ con el primero y el nuevo eje y_2 ya no está en el plano $x - y$, ahora se encuentra en el plano perpendicular a z_2 que también contiene el eje $x_1 = x_2$. Note que la línea de los nodos es el lugar donde se cortan los planos $x - y$ perpendiculares a los ejes z y z_2. Finalmente se realiza una rotación por un ángulo ψ alrededor del eje z_2 que nos lleva al conjunto de ejes que denotaremos con primas, fijo en el CR. Si Llamaremos $\mathbf{e}_\phi$ al vector unitario a lo largo de la línea de los nodos, entonces tenemos tres rotaciones alrededor de $\mathbf{k}$, de $\mathbf{e}_\phi$ y de $\mathbf{k}'$.

La rotación alrededor del eje z cambia el ángulo $\phi(t)$ que la proyección de z' en el plano $x - y$ forma con la dirección $-y$. A este movimiento del CR se le llama precesión. La rotación alrededor del eje $\mathbf{e}_\phi$ cambia el ángulo $\theta(t)$ entre los eje z y z', a este movimiento se le llama nutación; finalmente la rotación alrededor del eje z' cambia el ángulo $\psi(t)$ que el eje x' forma con la línea de los nodos y corresponde al movimiento de rotación del cuerpo rígido alrededor de uno de sus ejes (z').

Como las velocidades angulares se suman como vectores podemos escribir,

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi}\mathbf{k} + \dot{\theta}\mathbf{e}_\phi + \dot{\psi}\mathbf{k}'. \tag{52}$$

Note que los tres vectores $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$ y $\mathbf{e}_\phi$ son no-coplanares y que $\mathbf{e}_\phi$ es perpendicular a $\mathbf{k}$ y $\mathbf{k}'$. Esto es,

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{k}'}{sen\theta}, \tag{53}$$

puesto que el vector es unitario. De las figuras vemos que ϕ es el ángulo de la línea de los nodos con el eje x, y que $-\psi$ es el angulo de la línea de los nodos con el eje x'. Entonces,

$$\mathbf{e}_\phi = cos\phi\mathbf{i} + sen\phi\mathbf{j} = cos\psi\mathbf{i}' - sen\psi\mathbf{j}' \tag{54}$$

son las componentes cartesianas del vector unitario a lo largo de la línea de los nodos en los sistemas fijo (orientación fija) en el espacio y fijo en el cuerpo.

La proyección del vector $\mathbf{k}$ en el plano $x' - y'$ es perpendicular a la línea de los nodos, por lo que el ángulo de ésta con el eje x' es $\frac{\pi}{2} - \psi$, entonces las componentes del vector $\mathbf{k}$ en la base fija en el cuerpo son

$$\mathbf{k} = sen\theta sen\psi\mathbf{i}' + sen\theta cos\psi\mathbf{j}' + cos\theta\mathbf{k}'. \tag{55}$$

Finalmente como el ángulo de la proyección de $\mathbf{k}'$ en el plano $x - y$ con el eje x es $\phi - \frac{\pi}{2}$, tenemos la ecuación para el vector $\mathbf{k}'$ en términos de sus componentes en la base no primada.

$$\mathbf{k}' = sen\theta sen\phi\mathbf{i} - sen\theta cos\phi\mathbf{j} + cos\theta\mathbf{k}. \tag{56}$$

Las ecuaciones (54-56) dan las expresiones para los tres vectores $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$ y $\mathbf{e}_\phi$ en las dos bases, la primada y la no primada; entonces de la ecuación para la velocidad angular (52), podemos obtener las componentes de ésta en la base que rota con el cuerpo y la base con orientación fija: esto es,

$$\Omega_x = \dot{\theta}cos\phi + \dot{\psi}sen\theta sen\phi$$

$$\Omega_y = \dot{\theta}sen\phi - \dot{\psi}sen\theta cos\phi$$

$$\Omega_z = \dot{\phi} + \dot{\psi}cos\theta, \tag{57}$$

en la base no primada, y,

$$\Omega'_x = \dot{\theta} cos\psi + \dot{\phi} sen\theta sen\psi$$

$$\Omega'_y = -\dot{\theta} sen\psi + \dot{\phi} sen\theta cos\psi$$

$$\Omega'_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} cos\theta, \tag{58}$$

en la base primada.

La matriz de transformación de los ángulos de E$\ddot{u}$ler entre los vectores unitarios de ambas bases se puede obtener de las siguientes ecuaciones en las que se utilizan los vectores $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$ y $\mathbf{e}_\phi$ como base al ser no-coplanares.

$$\mathbf{i} = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k_r} + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}')\mathbf{k}'_\mathbf{r} + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_\phi)\mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{j} = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k_r} + (\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}')\mathbf{k}'_\mathbf{r} + (\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_\phi)\mathbf{e}_\phi \tag{59}$$

donde $\mathbf{k_r}$ y $\mathbf{k}'_\mathbf{r}$ son los vectores recíprocos de $\mathbf{k}$ y $\mathbf{k}'$ respectivamente. Nótese que el vector unitario a lo largo de la línea de los nodos es su propio vector recíproco, puesto que es perpendicular a los vectores $\mathbf{k}$ y $\mathbf{k}'$. La expresión que se usa para los vectores recíprocos es la de la base primada, así obtenemos la transformación de esta base a la no-primada. Por otra parte, el vector $\mathbf{k}$ ya lo tenemos expresado en términos de los vectores de la base primada ecuación (55), por lo que no aparece en las ecuaciones (59). La matriz de transformación es

$$\begin{pmatrix} cos(\phi)cos(\psi) - sen(\phi)cos(\theta)sen(\psi) & -cos(\phi)sen(\psi) - sen(\phi)cos(\theta)cos(\psi) & sen(\phi)sen(\theta) \\ sen(\phi)cos(\psi) + cos(\phi)cos(\theta)sen(\psi) & -sen(\phi)sen(\psi) + cos(\phi)cos(\theta)cos(\psi) & -cos(\phi)sen(\theta) \\ sen(\theta)sen(\psi) & sen(\theta)cos(\psi) & cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{60}$$

La transformación inversa, que nos lleva de la base no primada a la primada se obtiene con la matriz transpuesta de la anterior, ya que las rotaciones son transformaciones ortogonales y por lo tanto su matriz inversa es la matriz transpuesta.

9. Ecuaciones generalizadas del movimiento para los ángulos de Eüler.

Las ecuaciones generalizadas del movimiento para los ángulos de Eü**ü**ler pueden ser obtenidas utilizando la ecuación

$$Q_l = \frac{d}{d\,t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_l}T - \frac{\partial}{\partial q_l}T \qquad l = 1, 2, 3, \tag{61}$$

donde las fuerzas generalizadas Q_l son las proyecciones de la torca a lo largo de los ejes alrededor de los cuales gira el cuerpo rígido cuando hay un cambio en el correspondiente ángulo de E*ü*ler. Así por ejemplo, un cambio en el ángulo ϕ se debe a una rotación alrededor del eje z fijo en el espacio; mientras que un cambio en θ se debe a una rotación alrededor de la línea de los nodos.

Se obtuvo antes que la la energía cinética rotacional se puede expresar

$$T = \frac{1}{2}\langle \mathbf{\Omega}|\mathbf{I}|\mathbf{\Omega}\rangle. \tag{62}$$

Como el tensor de inercia toma su forma más simple en términos de los momento principales de inercia, escogeremos estos ejes y obtenemos

$$T = \frac{1}{2}(I_1\Omega'^2_x + I_2\Omega'^2_y + I_3\Omega'^2_z) =$$

$$\frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}cos\psi + \dot{\phi}sen\theta sen\psi)^2 + \frac{1}{2}I_2(-\dot{\theta}sen\psi + \dot{\phi}sen\theta cos\psi)^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}cos\theta)^2. \tag{63}$$

De la ecuación (61) obtenemos para la variable ϕ,

$$N_z = \frac{d}{d\,t}\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}T - \frac{\partial}{\partial \phi}T. \tag{64}$$

Igualmente para la variable ψ,

$$N'_z = \frac{d}{d\,t}\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}}T - \frac{\partial}{\partial \psi}T. \tag{65}$$

Finalmente, la proyección de la torca a lo largo de la línea de los nodos

$$N_{ln} = \frac{d}{d\,t}\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}T - \frac{\partial}{\partial \theta}T. \tag{66}$$

El subíndice ln se refiere a línea de los nodos.

Obtenemos para N'_z,

$$N'_z = \frac{d}{d\,t}[I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}cos\theta)] - (I_1 - I_2)sen\psi cos\psi(\dot{\phi}sen^2\theta - \dot{\theta}^2)$$
$$-(I_1 - I_2)\dot{\theta}\dot{\phi}sen\theta(cos^2\psi - sen^2\psi). \qquad (67)$$

10. Ecuaciones de Eüler.

Se van a obtener las componentes ecuaciones del movimiento de rotación refiriéndonos a un conjunto de ejes fijos en el CR, para los cuales el momento de inercia no cambia. Tomando como sistema de ejes del cuerpo rígido los ejes principales de inercia, tenemos para el momento angular la siguiente expresión,

$$\mathbf{L} = I_1\Omega'_x\mathbf{i}' + I_2\Omega'_y\mathbf{j}' + I_3\Omega'_z\mathbf{k}', \qquad (68)$$

donde tenemos las componentes de la velocidad angular a lo largo de los ejes principales y los momentos de inercia son los momentos principales.

La expresión que conecta las derivadas en el tiempo de un vector en dos sistemas de referencia uno de los cuales gira con velocidad angular Ω respecto del otro, se demostró antes que es

$$\mathbf{N} = \frac{d\,\mathbf{L}}{d\,t} = \left(\frac{d\,\mathbf{L}}{d\,t}\right)' + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{L}, \qquad (69)$$

donde $\left(\frac{d\,\mathbf{L}}{d\,t}\right)'$ es la derivada con respecto al sistema de ejes del cuerpo rígido. Tomando éste como el conjunto de ejes principales de inercia,

$$\left(\frac{d\,\mathbf{L}}{d\,t}\right)' = I_1\frac{d\,\Omega'_x}{d\,t}\,\mathbf{i}' + I_2\frac{d\,\Omega'_y}{d\,t}\,\mathbf{j}' + I_3\frac{d\,\Omega'_z}{d\,t}\,\mathbf{k}', \qquad (70)$$

y finalmente evaluando $\mathbf{\Omega}\times\mathbf{L}$ en este sistema de ejes, obtenemos las ecuaciones para las componentes de la torca a lo largo de la dirección instantánea de los ejes principales de inercia

$$
\begin{aligned}
N'_x &= I_1\frac{d\,\Omega'_x}{d\,t}\ -(I_2-I_3)\Omega'_y\Omega'_z,\\
N'_y &= I_2\frac{d\,\Omega'_y}{d\,t}\ -(I_3-I_1)\Omega'_z\Omega'_x,\\
N'_z &= I_3\frac{d\,\Omega'_z}{d\,t}\ -(I_1-I_2)\Omega'_x\Omega'_y. \qquad (71)
\end{aligned}
$$

Este conjunto de ecuaciones se conoce como las ecuaciones de E*ü*ler del movimiento del cuerpo rígido. Note que la última de estas ecuaciones es idéntica a la ecuación generalizada del movimiento para el ángulo de E*ü*ler ψ, ecuación (67), ya que un cambio en esta coordenada angular implica una rotación alrededor del eje z'.

La ecuación (69) puede ser obtenida también a partir de la ecuación (35) si se escribe ésta tomando como ejes los ejes principales de inercia, los cuales están fijos en el cuerpo rígido.

11. Movimiento libre de fuerzas del trompo simétrico.

Consideremos un cuerpo rígido simétrico sobre el que no actúan fuerzas. De la ecuación (1), esto implica que su centro de masa está en reposo ó se mueve con movimiento rectilíneo uniforme respecto de un sistema inercial de referencia, entonces el sistema del CM es también un sistema inercial de referencia. Supondremos, por generalidad, que el vector velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ no está en la dirección de un eje principal de inercia.

Escogiendo el sistema de referencia del CM y tomando el eje z' (fijo en el cuerpo) a lo largo del eje de simetría, tenemos $I_1 = I_2 = I \neq I_3$ y las ecuaciones de E*ü*ler para este problema pueden escribirse,

$$
\begin{aligned}
0 &= I\frac{d\,\Omega'_x}{d\,t}\ -(I-I_3)\ \Omega'_y\Omega'_z,\\
0 &= I\frac{d\,\Omega'_y}{d\,t}\ -(I_3-I)\ \Omega'_z\Omega'_x,
\end{aligned}
$$

$$0 = I_3 \frac{d\,\Omega'_z}{d\,t}\ . \tag{72}$$

De la última de las ecuaciones se observa que Ω'_z es constante, entonces las primers dos ecuaciones quedan

$$\begin{aligned} \frac{d\,\Omega'_x}{d\,t} &+ [\frac{I_3 - I}{I}\ \Omega'_z]\ \Omega'_y = 0, \\ \frac{d\,\Omega'_y}{d\,t} &- [\frac{I_3 - I}{I}\ \Omega'_z]\ \Omega'_x = 0, \end{aligned} \tag{73}$$

donde el término en el paréntesis cuadrado es una constante que llamaremos ω. Con el objeto de resover este sistema de dos ecuaciones diferenciales acopladas multiplicamos la segunda ecuación por $i = \sqrt{-1}$ y sumamos ambas quedando una ecuación en la variable compleja σ,

$$\dot{\sigma} - i\ \omega\ \sigma = 0, \tag{74}$$

con $\sigma = \Omega'_x + i\Omega'_y$. La solución a esta ecuación es $\sigma = A\exp(i\omega t)$, con $\Omega'_x = Re(\sigma)$ y $\Omega'_y = Im(\sigma)$, entonces

$$\begin{aligned} \Omega'_x &= Acos(\omega t) \\ \Omega'_y &= Asen(\omega t). \end{aligned} \tag{75}$$

De estas dos ecuaciones $\Omega'^2_x + \Omega'^2_y = A^2$, y como Ω'_z es también constante, tenemos que la magnitud del vector $\mathbf{\Omega}$ es constante y que éste precesa alrededor de z' con frecuencia angular constante $\vec{\omega}$. El vector $\mathbf{\Omega}$ traza un cono alrededor del eje de simetría del cuerpo rígido, que llamaremos el cono del cuerpo.

Por otra parte al ser cero la torca, el vector momento angular es una constante del movimiento. Podemos escoger el eje z del sistema fijo en el espacio en la dirección fija del momento angular. Del hecho de que el trabajo realizado por la fuerza resultante es igual al cambio en la energía cinética (principio de trabajo-energía), al ser cero la fuerza , la energía cinética, que en este caso es sólo de rotación es también una constante del movimiento. De la ecuación (29) para la energía cinética de rotación, tenemos que la proyección del vector

$\boldsymbol{\Omega}$ en la dirección del momento angular debe ser constante. Esto implica que $\boldsymbol{\Omega}$ precesa alrededor del vector $\mathbf{L}$ con un ángulo fijo, trazando un cono: cono del espacio. La línea de contacto del cono del cuerpo y el del espacio está en la dirección de $\boldsymbol{\Omega}$ que da el eje de rotación instantáneo. Al ser éste instantáneamenta fijo en el CR, el cono del cuerpo rueda sin resbalar en el cono del espacio.

12. Estabilidad de las rotaciones de un cuerpo rígido.

A continuación estudiamos otro problema de rotación que involucra aplicación de las ecuaciones de E**ü**ler. Supongamos que tenemos un cuerpo rígido libre de la acción de fuerzas, el cual está girando alrededor de uno de sus ejes principales de inercia. Si se aplica una perturbación pequeña al sistema, nos preguntamos si el movimiento que resulta consistirá de oscilaciones pequeñas alrededor del movimiento original.

Estudiaremos un cuerpo rígido cuyos momentos principales de inercia son distintos y tales que $I_3 > I_2 > I_1$. Inicialmente ponemos a girar al cuerpo alrededor del eje principal con momento de inercia I_1. entonces

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega'_x \mathbf{i}'. \tag{76}$$

Aplicamos una pequeña perturbación tal que ahora

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega'_x \mathbf{i}' + \Omega'_y \mathbf{j}' + \Omega'_z \mathbf{k}', \tag{77}$$

donde y Ω'_y y Ω'_z son cantidades pequeñas tales que podemos despreciar el producto de ellas. Las ecuaciones de E**ü**ler quedan entonces

$$\begin{aligned} 0 &= I_1 \frac{d\,\Omega'_x}{d\,t} - (I_2 - I_3)\Omega'_y \Omega'_z, \\ 0 &= I_2 \frac{d\,\Omega'_y}{d\,t} - (I_3 - I_1)\Omega'_z \Omega'_x, \\ 0 &= I_3 \frac{d\,\Omega'_z}{d\,t} - (I_1 - I_2)\Omega'_x \Omega'_y. \end{aligned} \tag{78}$$

Como el producto $\Omega'_y\Omega'_z$ puede despreciarse, la primera ecuación nos lleva al resultado $\Omega'_x = C$, con C una constante. Las otras dos ecuaciones permiten despejar a $\frac{d\ \Omega'_y}{d\ t}$ y $\frac{d\ \Omega'_z}{d\ t}$, obteniendo

$$\frac{d\ \Omega'_y}{d\ t} = \left(\frac{I_3 - I_1}{I_2}\Omega'_x\right)\Omega'_z \tag{79}$$

$$\frac{d\ \Omega'_z}{d\ t} = \left(\frac{I_1 - I_2}{I_3}\Omega'_x\right)\Omega'_y. \tag{80}$$

Derivando la primera de las ecuaciones arriba con respecto del tiempo

$$\ddot{\Omega}'_y = \left(\frac{I_3 - I_1}{I_2}\Omega'_x\right)\dot{\Omega}'_z, \tag{81}$$

donde el término entre paréntesis es una constante y la derivada respecto al tiempo de Ω'_z la substituímos de las ecuaciones de movimiento arriba, quedando una ecuación para la componente de la velocidad angular en la dirección del eje principal con momento de inercia I_2.

$$\ddot{\Omega}'_y + \left(\frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3}\Omega'^2_x\right)\Omega'_y = 0, \tag{82}$$

La solución a esta ecuación es una combinación de senos y cosenos. La podemos escribir como

$$\Omega'_y(t) = A\exp\left(i\omega_{y,x}t\right) + B\exp\left(-i\omega_{y,x}t\right), \tag{83}$$

con $\omega_{y,x} = \Omega'_x\ \sqrt{\frac{(I_1-I_3)(I_1-I_2)}{I_2 I_3}}$. Donde los subíndices en $\omega_{y,x}$ indican que esta frecuencia corresponde a la solución para Ω'_y cuando la rotación inicial es alrededor del eje x del cuerpo. Como $I_1 < I_3$ y $I_1 < I_2$, $\omega_{y,x}$ es un número real Podemos hacer algo similar para obtener la solución para Ω'_z, obteniendo el mismo valor para $\omega_{z,x}$. Concluímos entonces que una perturbación en el movimiento alrededor de x', forzando componentes pequeñas de la velocidad angular alrededor de y' y z' no aumenta con el tiempo y por lo tanto una rotación alrededor del eje con menor momento de inercia es muy estable. El mismo result5ado se obtiene para una rotación con respecto al eje con mayor momento de inercia, ya que también obtenemos una frecuencia que es un número real. Sin embargo, una rotación alrededor del eje que tiene momento de inercia intermedio da una frecuencia imaginaria, dando lugar a exponenciales crecientes y la perturbación aumenta con el tiempo, resultando un movimiento inestable. Concluímos que la rotación alrededor de un eje principalque corresponde al mayor ó al menor momento principal de inercia es estable, mientras que la rotación alrededor del eje de momento de inercia intermedio es inestable.

13. Trompo simétrico con un punto fijo bajo la acción de la fuerza de gravedad.

Consideremos ahora el movimiento de un cuerpo rígido simétrico, con un punto de su eje de simetría fijo en el espacio, y que se mueve en presencia del campo gravitatorio. Como ejemplos de este sistema de partículas tenemos el giróscopo de los instrumentos de navegación y el trompo con el que juegan los niños.

El sistema de referencia fijo en el espacio y el fijo en el cuerpo tienen su origen en el punto fijo. Debido a que el trompo no se traslada, sólo tiene tres grados de libertad, para el movimiento de rotación sin traslación. El eje de simetría es uno de los ejes principales de inercia, tomaremos éste como el eje z', llamamos l a la distancia del punto fijo al centro de masa del cuerpo. Como coordenadas generalizadas se escogen los ángulos de E**ü**ler, ϕ es el azimuth del trompo, θ mide la inclinación del eje se simetría con respecto a la vertical y ψ es el ángulo de rotación del trompo alrededor de su eje de simetría.

Con la selección de los ejes fijos en el cuerpo, con z' el eje de simetría, $I_1 = I_2 = I$, $I \neq I_3$, tenemos la lagrangiana del cuerpo rígido $L = T + U$,

$$L = \frac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 sen^2\theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}cos\theta)^2 - mglcos\theta, \tag{84}$$

donde se utilizó la ecuación(63) para la energía cinética con las componenes del vector velocidad angular a lo largo de los ejes principales de inercia, m es la masa del cuerpo rígido.

Se observa que los ángulos ϕ y ψ son coordenadas ignorables; el tiempo t tampoco aparece explícitamente en la lagrangiana. Entonces los momentos generalizados p_ϕ y p_ψ, son constantes del movimiento; así como el hamiltoniano H, que en este caso haciendo la transformación de Legendre, será $H = T + U = E$, ya que la fuerza de gravedad es conservativa. Las constantes de movimiento tienen las siguientes ecuaciones,

$$p_\psi = \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} L = I_3 \omega'_z = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} cos\theta) = Ia, \tag{85}$$

de esta ecuación, tomando en cuenta que los momentos principales de inercia son constantes, tenemos que la componente de la velocidad angular $\omega'_z = \frac{I\ a}{I_3} = cte.$

Para el siguiente momento generalizado

$$p_\phi = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} L = I\dot{\phi} sen^2\theta + I_3 cos\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi} cos\theta) = Ib, \tag{86}$$

donde a y b en las ecuaciones anteriores son constantes que se obtienen de las condiciones iniciales.

Finalmente la energía mecánica $E = T + U$,

$$E = T + U = \frac{1}{2} I(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 sen^2\theta) + \frac{1}{2} I_3 \omega'^2_z + mglcos\theta. \tag{87}$$

De las ecuaciones para los momentos generalizados es fácil despejar a $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ como funciones de θ, esto es

$$\dot{\phi} = \frac{b - a\ cos\theta}{sen^2\theta},$$

$$\dot{\psi} = \frac{Ia}{I_3} - cos\theta\ \frac{b - a\ cos\theta}{sen^2\theta}. \tag{88}$$

Utilizando las dos ecuaciones arriba podemos escribir la energía como función de la variable $\theta(t)$ y su primera derivada con respecto del tiempo. Si resolvemos esta ecuación para $\theta(t)$, podemos integrar a su vez las dos ecuaciones anteriores y resolver completamente el problema. Haciendo la substitución mencionada en la ecuación para la enrgía,

$$E - \frac{(I\ a)^2}{2\ I_3} = E' = \frac{I}{2}\ \dot{\theta(t)}^2 + \frac{I}{2}\ \frac{(b - a\ cos\theta)^2}{sen^2\theta} + mglcos\theta \tag{89}$$

Esta es la ecuación que hay que resolver para obtener $\theta(t)$, desafortunadamente como veremos más adelante, conduce a integrales elípticas. Sin embargo se puede hacer una discusión cualitativa del problema utilizando el método de energía. La ecuación arriba se puede ver como una ecuación de movimiento en una dimensión para la variable θ donde el primer término es la energía cinética y los dos últimos, que son funciones de esta variable corresponden al potencial efectivo U_{ef}.

$$U_{ef} = \frac{I}{2}\ \frac{(b - a\ cos\theta)^2}{sen^2\theta} + mglcos\theta. \tag{90}$$

Se considera el potencial efectivo en el intervalo $0 < \theta < \pi$ que corresponde al intervalo de variación de la variable. En $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ el potencial tiene valor infinito. Este potencial tiene un mínimo en algún valor del ángulo θ, en el intervalo mencionado, el cual llamaremos θ_0. Si la energía es $E' = U_{ef,min}$, el trompo rota alrededor de su eje de simetría y precesa alrededor del eje vertical con un ángulo de inclinación constante, es decir no hay nutación. Para energías E' mayores que la mínima el movimiento está acotado entre los valores θ_1 y θ_2, es decir, la inclinación del eje de rotación (eje de simetría) cambia entre los valores $\theta_1 < \theta < \theta_2$, resultando en un movimiento de nutación, adicional a los de rotación y precesión.

Derivamos el potencial efectivo respecto de θ e igualamos a cero para obtener el valor de θ_0.

$$\frac{d\ U_{ef}}{d\ \theta} = I\ a\ sen\theta\ \frac{b -\ a\ cos\theta}{sen^2\theta} - Icos\theta\frac{(b - a\ cos\theta)^2}{sen^3\theta} - mglsen\theta. \tag{91}$$

Simplificando la ecuación anterior podemos escribirla de la siguiente forma:

$$\frac{d\ U_{ef}}{d\ \theta}\ |_{\theta_0} = I\ \ \frac{(b - a\ cos\theta_0)(a - bcos\theta_0)}{sen^3\theta_0} - mglsen\theta_0 = 0. \tag{92}$$

Una expresión alternativa se obtiene identificando a $\dot{\phi}$ en los dos primeros términos de la ecuación (91) y substituyendo la constante a en términos de los momentos de inercia y

$\omega_{z'}$. Esta puede escribirse en términos de la velocidad de precesión para este movimiento sin nutación utilizando las ecuaciones (85), (86) y (88)

$$\frac{d\ U_{ef}}{d\ \theta}\ |_{\theta_0}= 0 = -mglsen\theta_0 + I_3\ \omega_{z'}\ \dot{\phi} sen\theta_0 - I\dot{\phi}^2 sen\theta_0 cos\theta_0. \tag{93}$$

Para este valor del ángulo $\theta = \theta_0$ el trompo no tiene movimiento de nutación, sólo precesa y gira alrededor de su eje. Factorizando,

$$(I\ cos\theta_0\ \dot{\phi}_0^2 - I_3\ \omega'_z\ \dot{\phi}_0 + mgl)\ sen\theta_0 = 0. \tag{94}$$

Los valores $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ quedaron descartados antes, así que sólo tenemos que estudiar las raíces de la ecuación entre paréntesis igual a cero. Esta es una ecuación cuadrática en $\dot{\phi}_0$, resolviendo obtenemos que las dos soluciones para $\dot{\phi}_0$ son,

$$\dot{\phi}_0 = \frac{1}{2\ I\ cos\theta_0}\ (\ I_3\omega'_z \pm \sqrt{I_3^2{\omega'_z}^2 - 4mglIcos\theta_0}\ \ ), \tag{95}$$

entonces cuando no hay nutación, existen dos valores de la velocidad angular de precesión del trompo. Tomando el signo positivo $\dot{\phi}_{0+}$ tenemos precesión rápida y con el signo negativo $\dot{\phi}_{0-}$, la precesión es lenta.

Como la solución para $\dot{\phi}_0$ debe ser real, tenemos la restricción

$$\omega'_z \geq \frac{2}{I_3}\sqrt{mglIcos\theta_0}, \tag{96}$$

lo que limita la componente de la velocidad angular del trompo a lo largo de su eje de simetría. Note que esta última condición es requerida sólo si $0 < \theta_0 < \pi/2$. Si por otra parte $\theta_0 > \pi/2$ su coseno será negativo y no tendreamos ninguna restricción.

Cuando ω'_z (ó p_ψ) es grande el primer término en el radical es mayor que el segundo y podemos desarrollar la raíz cuadrada quedándonos con los términos más grandes, así tenemos para las dos raíces de$\dot{\phi}_0$,

$$\dot{\phi}_0 \simeq \frac{I_3\ \omega'_z}{2\ Icos\theta_0}(1 \pm (1 - \frac{2mglIcos\theta_0}{I_3^2{\omega'_z}^2})), \tag{97}$$

quedando las dos soluciones aproximadas,

$$\dot{\phi}_{0+} = \frac{I_3\ \omega'_z}{Icos\theta_0}$$
$$\dot{\phi}_{0-} = \frac{mg\ l}{I_3\ \omega'_z}. \tag{98}$$

La primera raíz corresponde a precesión rápida y la segunda a precesión lenta. Es la segunda solución la que se observa usualmente para el trompo que gira rápidamente alrededor de su eje de simetría.

En el caso particular que $\theta > \pi/2$ la raíz es real y es mayor que $I_3\ \omega'_z$, por lo que habrá un valor positivo y uno negativo de la velocidad angular de precesión $\dot{\phi}_0$.

Para energías E' arriba del mínimo el movimiento es acotado entre los valores del ángulo de inclinación del eje del trompo $\theta_1 < \theta < \theta_2$ como se observa de la gráfica del potencial efectivo y el trompo tendrá movimiento de nutación entre estos valores de θ alrededor del mínimo. Dependiendo de los valores de p_ϕ y p_ψ, la velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$ puede tener signo positivo ó negativo mientras θ cambia entre sus valores límite.

En los puntos de retorno $E' = U_{ef}$.

$$E' = \frac{I}{2}\ \frac{(b - a\ cos\theta)^2}{sen^2\theta} + mglcos\theta, \tag{99}$$

donde las constantes a, b y E' son determinadas a partir de las condiciones iniciales del movimiento. Multiplicando esta ecuación por $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, se obtiene una ecuación cúbica en $\cos\theta$,

$$-mgl\cos^3\theta + (\frac{I}{2}a^2 + E)\cos^2\theta + (mgl - Iab)\cos\theta + \frac{I}{2}b^2 = 0. \tag{100}$$

La cual debe tener dos raíces reales $\cos\theta_1$ y $\cos\theta_2$ entre -1 y $+1$, la tercera debe estar fuera de este intervalo. Se puede demostrar que la tercer raíz es mayor que $+1$. Cuando tenemos una energía E' que corresponde al mínimo en la curva de U_{ef}, las dos raíces son iguales $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$.

Consideremos energías arriba del mínimo. Supondremos que inicialmente $\dot{\theta} = 0$, esto corresponde a un punto de retorno en la curva del potencial efectivo. El valor inicial $\cos\theta_1$ satisface la ecuación cúbica. Conociendo una de las raíces podemos factorizar la ecuación y encontrar las otras dos. La velocidad de precesión cambia con el valor de θ (con la nutación), ya que

$$\dot{\phi} = \frac{b - a\ cos\theta}{sen^2\theta}, \tag{101}$$

como se vió antes. Si $|b| < |a|$, podemos definir un ángulo θ_3 que haga cero el numerador, esto es $\cos\theta_3 = b/a$. Substituyendo este valor de θ en la ecuación (92) obtenemos un valor negativo de la derivada de U_{ef}, es decir de la pendiente de la curva, esto implica que si θ_2 es el valor máximo de θ, $\theta_3 < \theta_2$, donde la pendiente es positiva, y también $\theta_3 < \theta_0$, donde la pendiente se hace cero.

Entonces de la ecuación para $\dot{\phi}$ vemos que si $\theta > \theta_3$, $\dot{\phi}$ tiene el mismo signo que ω_z' y si $\theta_3 > \theta$, , tiene signo opuesto.

Para visualizar estos movimientos del eje de simetría del trompo se construye una esfera unitaria en la que se marca la trayectoria del eje del trompo en su movimiento entre los valores de θ_1 y θ_2. Se observan los siguientes movimientos del eje de simetría del trompo: Si θ_1, el valor mínimo de θ es tal que $\theta_1 > \theta_3$, $\dot{\phi}$ tendrá el mismo signo que ω_z' durante toda la nutación y el trompo precesa monotónicamente alrededor del eje vertical mientras el eje de simetría del trompo se mueve entre los valores límite de la variable θ. Este movimiento se observa en la parte (a) de la figura.

Si por el contrario $\theta_1 < \theta_3$, $\dot{\phi}$ cambia de signo durante la nutación y la velocidad de precesión tiene signos distintos en los dos puntos de retorno, por lo que el movimiento de precesión describe bucles en la trayectoria del eje de simetría. Este movimiento se observa en la parte (b) de la figura.

Si tenemos las condiciones iniciales $\theta = \theta_1$ y $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ y el trompo se pone a girar alrededor de su eje con velocidad ω_z' , se le da una cierta inclinación θ_1 y se suelta; éste inicialmente aumenta el valor del ángulo de inclinación, debido a la fuerza de gravedad, hasta que llega al valor θ_2, resultando el movimiento de la parte (c) en la figura.