

Péndulo Magnético

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México



Cerritos Lira, Carlos; Gamucero Arana, Juan Pablo; Torres Sepúlveda, Diego; Aguilera Torres, Fernando Barushi

RESUMEN

En el presente experimento se realizó un estudio teórico y experimental del movimiento de un péndulo magnético, dada una configuración de imanes particular. Para ello se construyó un péndulo magnético y se realizó un mapeo correspondiente al movimiento del mismo. Además, con base en la ecuación diferencial del movimiento del péndulo magnético, se programó un modelo computacional en tarjeta de video. De manera que se optimizó el desempeño del procesamiento para la generación de imágenes, a partir de la solución numérica de la ecuación diferencial.

Introducción

El péndulo magnético es un ejemplo perfecto de cómo se pueden combinar áreas de la física y la matemática. Es un experimento interesante en el que se pueden encontrar temas de electromagnetismo, caos, fractales, e incluso estética. Además, es un buen experimento introductorio a la tarjeta de video, cuyo uso es óptimo para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales de tal o mayor complejidad.

La ecuación diferencial que describe el movimiento del péndulo magnético en este experimento es:

$$\frac{d^2\vec{X}}{dt^2} + \frac{3b}{2M} \frac{d^2\vec{X}}{dt^2} + \frac{3g}{2L} \vec{X} = kL \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{X}_n - \vec{X}_{eq}}{\left(\|\vec{X}_n - \vec{X}_{eq}\|^2 + h^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

Donde \vec{X} es la posición del péndulo en el plano sobre el que está suspendido, b es una constante de proporción para la fricción del aire, k es una constante propia de los imanes, L es la longitud del péndulo, \vec{X}_n es la posición de los imanes y \vec{X}_{eq} es la posición de equilibrio en el plano.

El presente experimento tiene como objetivos mapear, experimentalmente y a partir de un programa en la tarjeta de video, el movimiento del péndulo magnético dada una configuración particular.

Método Experimental

Sección Experimental

Para construir el péndulo magnético se utilizaron cuatro imanes de neodimio. La configuración de imanes utilizada fue un triángulo equilátero (Figura 1). Se consideró una región cuadrada de 10.0(cm)x10.0(cm), la cual fue dividida posteriormente en 400 secciones cuadradas de igual tamaño. El mapeo consistió en registrar gráficamente sobre qué imán se detenía el péndulo magnético después de ser soltado desde el reposo desde una posición inicial (correspondiente a cada uno de los 400 cuadrados).

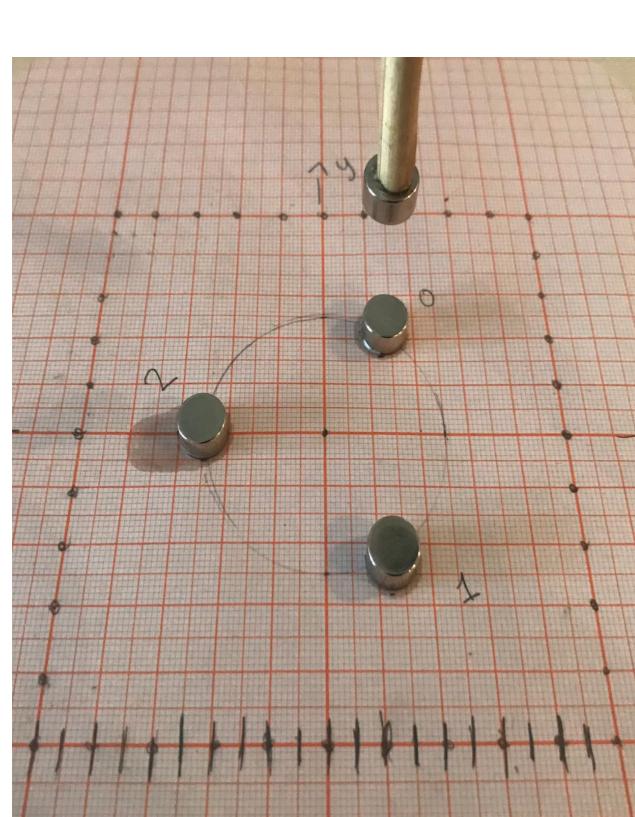


Figura 1. Péndulo magnético sobre la región de medición.



Figura 2. Péndulo magnético suspendido sobre la región de medición.

Sección de Programación

Dada la ecuación diferencial, esta se resolvió numéricamente a través del método de Beeman. Para realizar el programa se utilizó CUDA, la API de NVIDIA, que nos permite usar sus tarjetas de video, mientras que para la parte gráfica se usó OpenGL.



Escanee para ver el código utilizado en la programación del modelo.

Conclusiones

- Dados los resultados experimentales y obtenidos del modelo teórico, se determina que el movimiento del péndulo magnético es el de un sistema dinámico caótico en los alrededores de la configuración de imanes.
- Tomando en cuenta los errores sistemáticos propios del método de medición, así como la naturaleza del sistema, se determina que es muy limitado el alcance de los resultados empíricos en comparación al programa del modelo.
- La tarjeta de video en efecto optimiza el desempeño para generar una imagen en comparación al procesador interno de una computadora.

RESULTADOS

Estudio Experimental

Para realizar estas mediciones se asignó el siguiente código de colores a los imanes: blanco al imán 0, negro al imán 1, verde al imán 2. De 400 mediciones realizadas, se obtuvo que 119 veces se detuvo el péndulo sobre el imán correspondiente al color blanco, 124 veces se detuvo sobre el imán correspondiente al color negro y 157 veces sobre el imán correspondiente al color verde.

Dado que la región sobre la que se realizaron las mediciones era simétrica, con respecto a la posición de cada imán, podría esperarse obtener una cantidad muy similar de resultados para cada imán. Sin embargo, fuera de las regiones de estabilidad (dadas evidentemente en la zona central de la imagen), se observa en el modelo teórico que existe una región caótica, donde dadas pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales del movimiento (posición, velocidad inicial, constantes de los imanes, distancia entre los imanes, fuerza en la sujeción del péndulo, material del péndulo y la sustancia para adherir los imanes), el resultado puede ser impredecible. Este resultado explica por qué se observan diferencias en cuanto al número de cuadrados correspondientes a cada imán.

Es difícil aumentar la resolución de la región de estudio a partir de mediciones directas, debido a los errores sistemáticos que involucra el procedimiento, además del comportamiento caótico del sistema, que disminuye la precisión de tales mediciones.

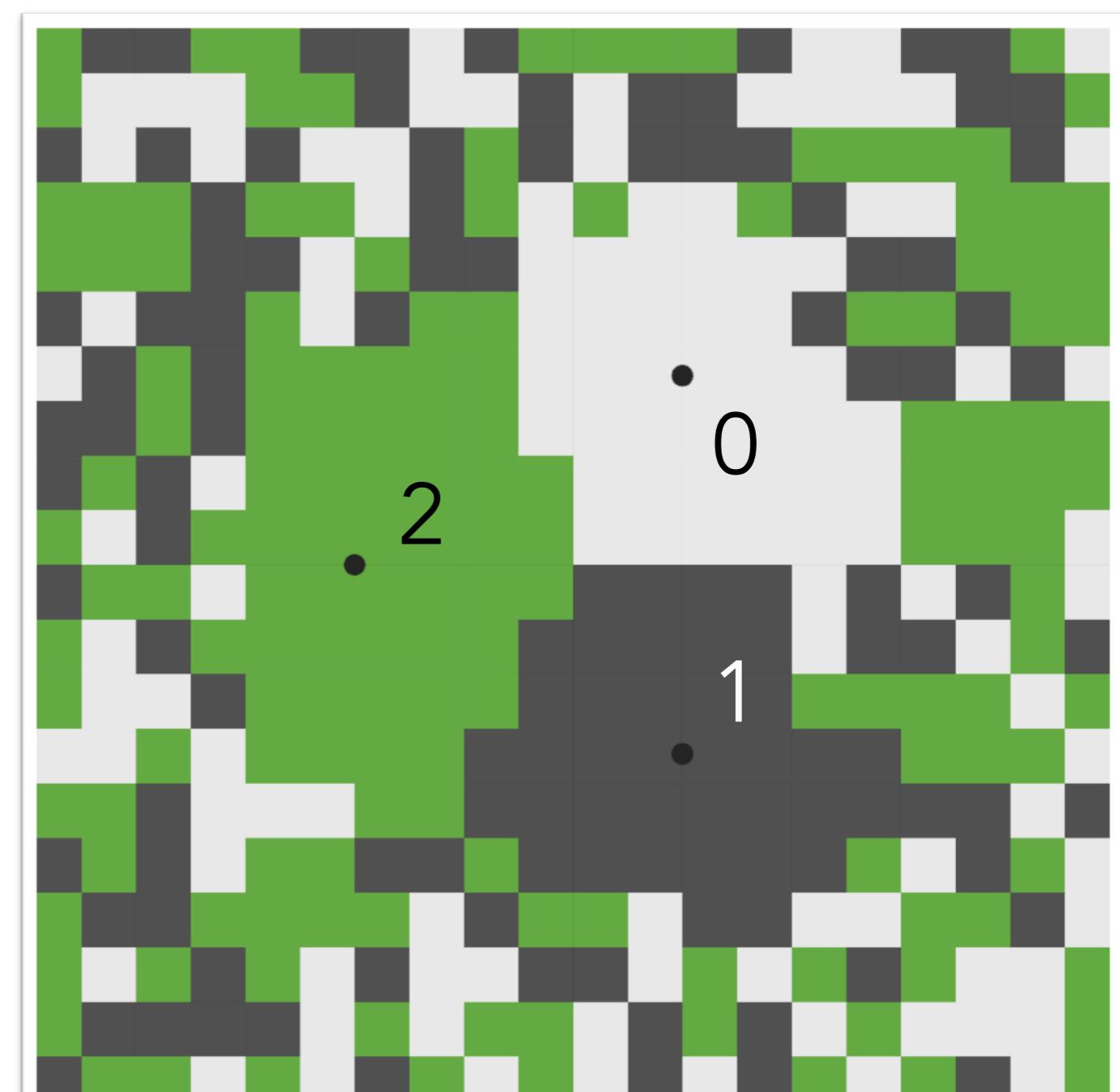


Figura 3. Mapeo realizado a partir de mediciones.

Estudio Teórico

Tal como se planteó en la ecuación diferencial, existe una constante k , propia de los imanes. Para determinar el valor de k se consideró un ajuste donde la fuerza sea inversamente proporcional a la cuarta potencia de la distancia entre los imanes, debido a la relación de proporcionalidad de la ecuación diferencial.

A partir de un análisis cualitativo es evidente que se respetaron las regiones estables que se observan de igual manera en ambas imágenes (Figura 3 y Figura 4). Es decir, dentro de las regiones confinadas por la región de estabilidad, no hay datos incoherentes. La parte estética del mapeo del movimiento del péndulo magnético se encuentra en lo que la literatura se menciona como cuencas de atracción o lo que nosotros hemos llamado regiones estables. Cada cuenca tiene como frontera curvas fractales que crean figuras atractivas física y matemáticamente. Sin embargo, debemos recordar que el modelo está limitado en su uso debido a su misma naturaleza. Es imposible medir con precisión la posición inicial del péndulo para poder comparar con la teoría. Dados los resultados, se observa cómo las cuencas de atracción son difíciles de obtener con buena resolución, a diferencia del mapeo generado computacionalmente.

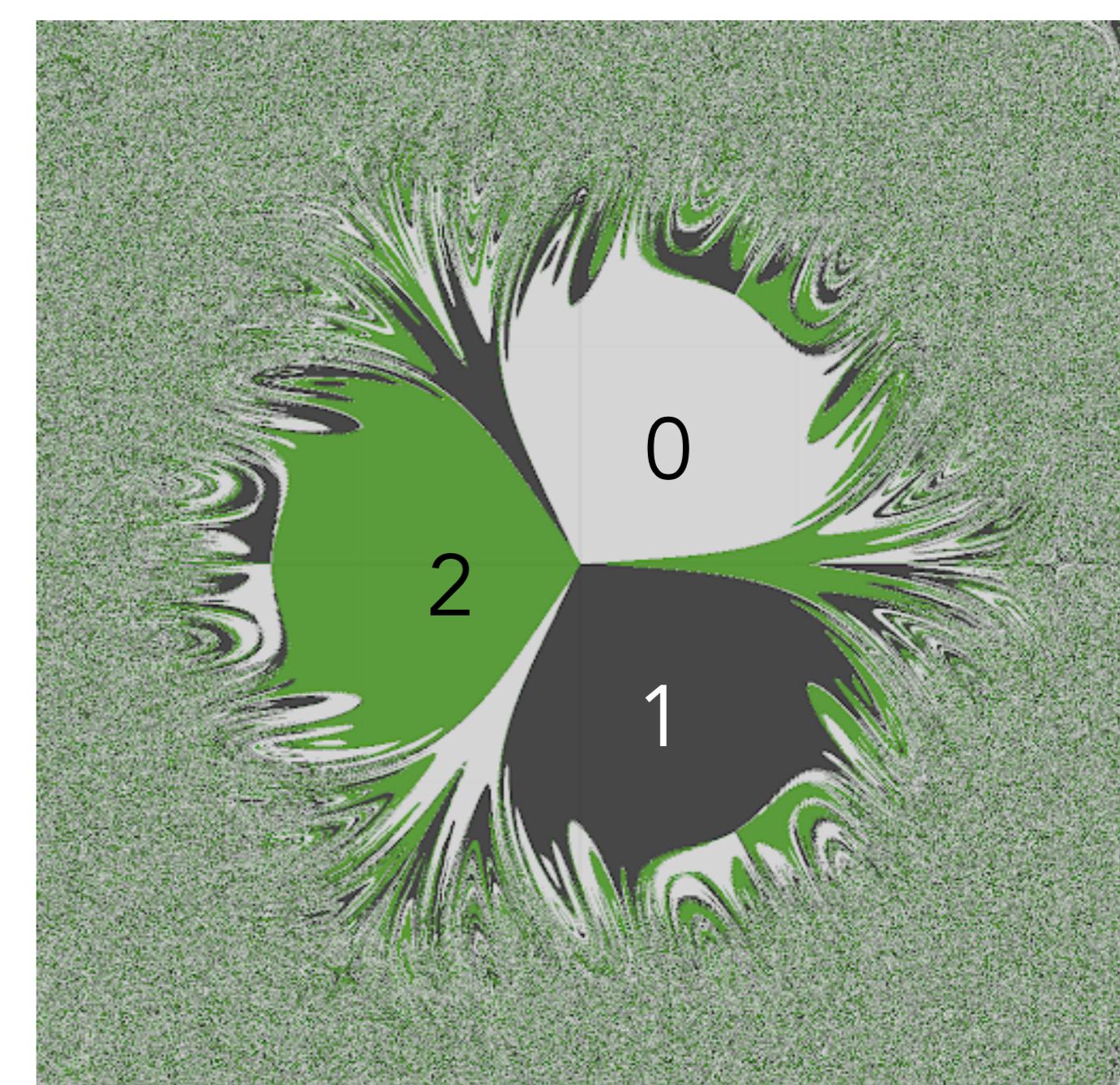


Figura 4. Mapeo realizado a partir de la solución del modelo.

Uso de la Tarjeta de Video

En este experimento el uso de la tarjeta de video (17% de su capacidad máxima) disminuyó hasta en un 99% el tiempo de procesamiento, teniendo un promedio por debajo de 0.2 min, el cual con el procesador (90% de su capacidad máxima) llegó hasta 5 minutos. Como se observa en la figura 5, es evidente que el uso de la tarjeta de video optimiza la velocidad con la que se realizan las operaciones necesarias para arrojar los resultados.

A partir de la experiencia en la modelación del péndulo magnético en la tarjeta de video, se puede seguir trabajando en la descripción de fenómenos cuya modelación requiera de un gran número de operaciones, como es el caso del problema de los N cuerpos en astronomía, el modelo Ising en termodinámica, dinámica de cuerpos suaves en mecánica, o simulación de fluidos. Otras áreas además de la física incluyen machine learning.

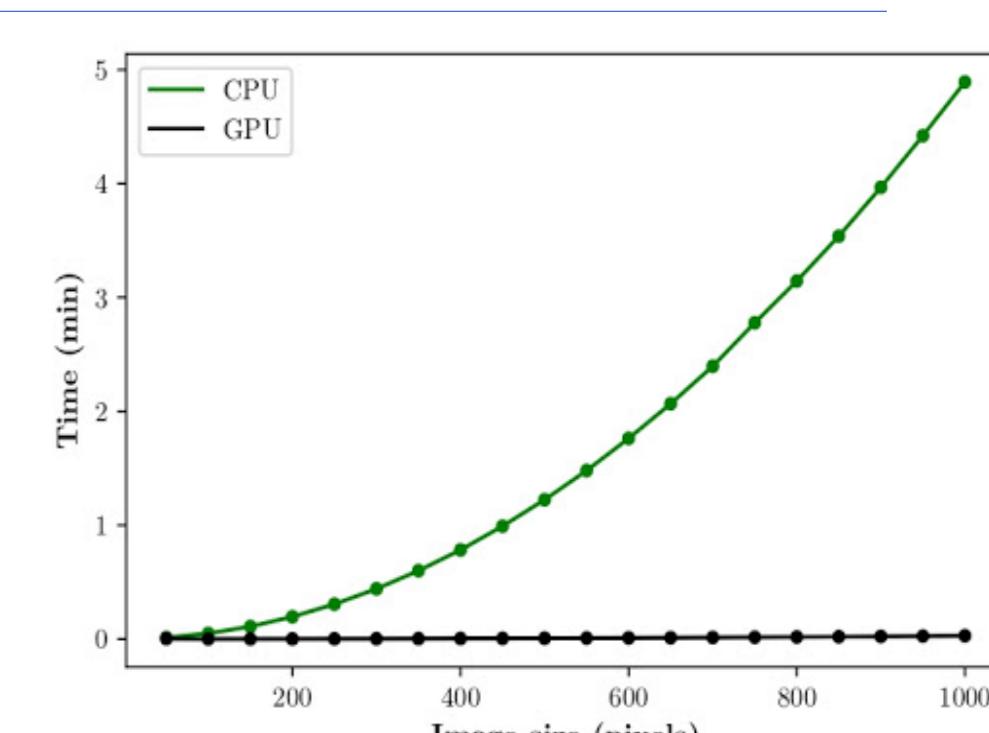


Figura 5. Gráfica del TvsN, el tiempo que tarda el procesador (CPU) y la tarjeta de video (GPU) en realizar los cálculos para una imagen de NxN pixeles.

Referencias

- C. J. (2018, October 18). The magnetic pendulum. Recopilado de <http://chalkdustmagazine.com/features/the-magnetic-pendulum/>
- Simulation Setup. (n.d.). Recopilado de https://beltoforion.de/article.php?a=magnetic_pendulum
- Beeman's algorithm. (2018, April 06). Recopilado de https://en.wikipedia.org/wiki/Beeman's_algorithm