Radiação, Aceleração e o Efeito Unruh

Carlos Henrique Correr da Silva

Orientador: André Landulfo

Universidade de São Paulo / Universidade Federal do ABC

carloscorrer@usp.br

Objetivos

O conceito de radiação emitida por uma carga acelerada foi amplamente discutido e várias questões conceituais sobre sua consistência intrigaram a comunidade científica. Atualmente, foi mostrado [1] que cargas aceleradas de fato irradiam e, ainda por cima, este conceito não é covariante, isto é, observadores acelerados juntamente com a carga não observam a radiação.

Por outro lado, no contexto da teoria quântica de campos (QFT) em espaços-tempos curvos, um resultado notável é o chamado efeito Unruh, que prevê que observadores uniformemente acelerados observam o vácuo dos observadores inerciais no espaço-tempo de Minkowski como um banho térmico de partículas, cuja temperatura é dada por

$$T = \frac{a\hbar}{2\pi c k_B}, \tag{1}$$

em que a é a aceleração própria do observador.

O resultado surpreendente é que usando o formalismo de QFT, chegamos a conclusão de que os observadores uniformemente acelerados interpretam o emissão (inercial) como uma combinação de absorção e emissão de fótons de Rindler de energia nula pelo e do banho térmico de Unruh.

O objetivo do projeto é analisar o modelo de brinquedo de radiação emitida por uma carga (escalar) uniformemente acelerada no espaço-tempo de Mikowski nos contextos clássicos e quânticos. Para o caso clássico, desejamos verificar a hipótese de que, de fato, os modos de Rindler de energia nula são os únicos que contribuem e recuperam a solução retardada do campo escalar. Para análise quântica, queremos calcular como observadores no futuro assintótico medem o valor esperado do campo e do tensor de energia momento quando o estado é o vácuo (inercial) de Minkowski, $|0_{\text{in}}\rangle$. Por fim, analisamos a taxa de emissão de partículas para ambas as situções.

Métodos e procedimentos

Para começar a análise, primeiro, tivemos que aprender o formalismo da teoria de campos em espaços-tempos curvos. A principal bibliografia utilizada foi o livro do Wald [3] do capítulo 1 ao 5 (omitindo o tratamento algébrico).

Após essa etapa, era necessário entender a emissão de radiação por uma carga acelerada e seu diversos aspectos conceituais. Num primeiro momento, seguimos o livro do Zangwill [4] que discutem desde a definição de radiação até resultados como a expressão da radiação Larmor emitida por uma carga uniformemente acelerada. Por fim, o tratamento completo do caso eletrodinâmico clássico foi estudado a partir do paper do Boulware [1], em que a não covariância da radiação é discutida.

Finalmente, com a base teórica estabelecida, disparamos para análise do paper do meu orientador [2] em que as perguntas apresentadas ao longo dos objetivos foram pautadas.

Resultados

Classicamente, começamos com a equação de não homogênea de Klein-Gordon cuja fonte é uma carga, com magnitude q, e com aceleração própria constante a entre $-T < t < T$ na cunha da direita,

$$\nabla^a \nabla_a \phi = j. \tag{2}$$

Tomando uma superfície de Cauchy $\Sigma \subset \mathbb{R}^4 - J^-(\text{supp} j)$, na qual a solução avançada, A_j, se anula podemos expandir a solução retardada , Rj, em modos de Unruh, $w^{\sigma}_{\omega \mathbf{k}_\perp}$ $(\sigma = 1, 2)$, como

$$Rj = -\sum_{\sigma=1}^{2} \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}^2\mathbf{k}_\perp w^{\sigma}_{\omega \mathbf{k}_\perp} \langle w^{\sigma}_{\omega \mathbf{k}_\perp}, Ej \rangle \, w^{\sigma}_{\omega \mathbf{k}_\perp}, \tag{3}$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno de Klein-Gordon e $Ej = Aj - Rj$. Os modos de Unruh são extremamente úteis porque são indexados com parâmetros dos observadores acelerados, mas tem frequência positiva com respeito ao tempo inercial t.

No limite em que a carga acelera desde o infinito passado, o cálculo dos coeficientes na região $t > |z|$ leva a

$$
\begin{aligned}
Rj &= -\frac{iq}{\pi\sqrt{2a}} \int \mathrm{d}^2\mathbf{k}_\perp K_0\left(\frac{k_\perp}{a}\right) w^2_{0\mathbf{k}_\perp} \\
&= -\frac{q}{4\pi\rho_0(x)},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

em que K_0 é a função modificada de Bessel de ordem 0. É evidente da expressão acima que, não somente apenas os modos de energia nula de Rindler, $\omega = 0$, contribuem para a construção da solução retardada, mas também o cálculo explícito leva exatamente a solução retardada usual.

Olhando agora para equação quantizada, a solução geral pode ser escrita em função da solução avançada,

$$\hat{\phi}(t, \mathbf{x}) = Aj(t, \mathbf{x})\hat{\mathbb{1}} + \hat{\phi}_{\text{out}}(t, \mathbf{x}), \tag{5}$$

em que $\hat{\phi}_{\text{out}}$ é solução da equação homogênea que pode ser expandida em termos dos operadores de criação e aniquilação, $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$, e um conjunto completos de modos frequência positiva.

Seja $|0_{\text{in}}\rangle$ e $|0_{\text{out}}\rangle$ os estados de vácuo como definido pelos observadores no infinito passado e futuro, respectivamente. Podemos relacionar ambos a partir de uma transformação de Bogoliubov $\hat{S}$, tal que $|0_{\text{in}}\rangle = \hat{S}\,|0_{\text{out}}\rangle$, de modo que, expandindo $\hat{\phi}_{\text{out}}$ em termo dos modos de Unruh, temos

$$|0_{\text{in}}\rangle = e^{-\frac{\|KEj\|^2}{2}} e^{-\hat{a}^\dagger_{\text{out}}(KEj)}\,|0_{\text{out}}\rangle \tag{6}$$

em que KEj é a parte de frequência positiva de Ej. Note que este estado é coerente e construído apenas a partir dos modos com $\omega = 0$, visto que apenas estes estão tem produto escalar não nulo com Ej no limite de interesse. A partir dele, também é possível calcular os valor esperado do campo como

$$\langle 0_{\text{in}}|\,\hat{\phi}_{\text{out}}(x)\,|0_{\text{in}}\rangle = Rj, \tag{7}$$

que é justamente o resultado clássico. Para o tensor de energia-momento normalmente ordenado, obtemos

$$\langle 0_{\text{in}}| : \hat{T}^{\text{out}}_{ab} : |0_{\text{in}}\rangle = \nabla_a Rj \nabla_b Rj - \frac{1}{2}\eta_{ab}\nabla^c Rj \nabla_c Rj, \tag{8}$$

que também é o expressão da teoria clássica. Particularmente, se integramos o fluxo de energia no futuro assintótico, encontramos

$$\int \mathrm{d}S^b\,\langle 0_{\text{in}}| : \hat{T}^{\text{out}}_{ab} : |0_{\text{in}}\rangle\,(\partial_t)^a = \frac{q^2 a^2}{12\pi}, \tag{9}$$

que é a fórmula de Larmor (escalar) usual encontrada no contexto da eletrodinâmica.

Por fim, se definirmos um número clássico de partículas irradiados (como visto por observadores inerciais) como $N = \langle KRj, KRj\rangle$ e consideramos o operador número (quântico) de cada modo $\hat{N}^{\text{out}}_{\omega\mathbf{k}_\perp}$ e integramos sobre todos os possíveis modos, obtemos

$$\frac{N}{T} = \frac{\langle 0_{\text{in}}|\,\hat{N}^{\text{out}}_{\omega\mathbf{k}_\perp}\,|0_{\text{in}}\rangle}{T} = \frac{q^2 a}{4\pi^2}. \tag{10}$$

Conclusão

A análise do problema no limite em que $T \to \infty$, mostra que de fato, tanto no caso clássico, quanto no quântico, apenas os modos com energia nula de Rindler contribuem para a solução retardada do campo. Ademais, ambos os formalismos concordam no número de partículas irradiadas no processo de emissão.

Além disso, especificamente no caso quântico, quando o estado inicial é o vácuo dos observadores inerciais, os valores esperados do campo e do tensor de energia-momento recupera os resultados clássicos. Ainda por cima, para observadores no infinito futuro, o estado evolui para um estado coerente e o fluxo de energia devolve a expressão conhecida da radiação Larmor.

Referências

[1] D. G. Boulware. Radiation from a uniformly accelerated charge. *Annals of Physics*, 124(1):169–188, 1980.

[2] A. G. S. Landulfo, S. A. Fulling, and G. E. A. Matsas. Classical and quantum aspects of the radiation emitted by a uniformly accelerated charge: Larmor-unruh reconciliation and zero-frequency rindler modes. *Phys. Rev. D*, 100:045020, Aug 2019.

[3] R. M. Wald. *Quantum field theory in curved spacetime and black hole thermodynamics*. Chicago lectures in physics. University of Chicago Press, 1994.

[4] A. Zangwill. *Modern electrodynamics*. Cambridge University Press, 2012.