Radiação, Aceleração e o Efeito Unruh

Processo: 24/01141-1

Carlos H. Correr da Silva
Orientador: André G. S. Landulfo

Vigência: 01/05/2024 a 30/04/2025
Período coberto: 01/05/2024 a 10/10/2024

Resumo: A conexão entre aceleração e radiação e sua relação com o princípio da equivalência vêm intrigando a comunidade científica a décadas. Mais recentemente, esta questão foi investigada da perspectiva da mecânica quântica no âmbito da teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos e foi encontrado o que parece ser uma conexão impressionante entre o bremsstrahlung (um efeito clássico) e o efeito Unruh (um efeito puramente quântico). Mais do que isso, os chamados fótons de Rindler de *energia nula* desempenham um papel surpreendente, porém crucial, em tal conexão. Neste projeto de iniciação científica, pretendemos estudar os aspectos clássicos e quânticos da radiação emitida por uma carga (escalar) acelerada e o papel exato desempenhado pelos fótons de Rindler de energia nula (já no contexto clássico). Tal análise servirá como "cavalo de batalha"para introduzir o estudante à teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos e seus mais diversos aspectos conceituais.

Conteúdo

1 Graduação

Ao longo do período coberto, conclui o meu 5° semestre da graduação, em que cursei as seguintes matérias: Mecânica Quântica I, Eletromagnetismo I, Termodinâmica, Mecânica I e Física Experimental V. As bases teóricas de quântica estudadas para o projeto complementaram-se e solidificaram-se com o andamento da disciplina cursada. Além disso, a matéria de eletromagnetismo forneceu o arcabouço para o estudo da radiação emitida por uma carga acelerada.

No fim do período, estou na metade do 6° semestre, cursando as disciplinas: Relatividade Geral, Eletromagnetismo II, Grupos e Tensores, Mecânica Estatística e Física Computacional I. A matéria de relatividade está reforçando os conceitos que estudei antes do início do projeto e complementando o incentivo com diversos exercícios. Enquanto isso, eletromagnetismo está enfatizando a importância dos potenciais eletromagnéticos e as liberdades de escolha que permitem obter equações de onda para as grandezas relevantes, mantendo a física do sistema de estudo.

Ainda por cima, participei dos Journal Clubs do grupo, que permite o contato com diversas tópicos atuais de pesquisa na área. Também apresentei um pôster sobre o Efeito Unruh na VI Escola Jayme Tiomno, uma escola de inverno do IFUSP, na qual sou um dos organizadores.

2 Teoria quântica de um campo escalar em espaços-curvos

Campo de Klein-Gordon

Seja $(\mathcal{M}, g_{ab})$ um espaço-tempo globalmente hiperbólico, então, podemos decompor $\mathcal{M}$ em uma folição parametrizada por uma função diferenciável $t : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ de superfícies de Cauchy Σ_t tal que $\mathcal{M} \cong \mathbb{R} \times \Sigma_t$.

Um campo escalar (spin-0) e massa m nesse espaço-tempo satisfaz a equação de Klein-Gordon,

$$\left(\nabla^a \nabla_a + m^2\right) \phi = 0, \tag{1}$$

em que ∇^a é a derivada covariante compatível com a métrica. O momento conjugado ao campo é dado por

$$\pi = n^a \nabla_a \phi. \tag{2}$$

Assim, dada a hierbolicidade global do campo, uma solução da equação de Klein-Gordon está unicamente definido dadas condições iniciais, isto é, funções suaves numa superfície de Cauchy para o valor do campo e seu momento. Agora, dadas duas soluções ϕ_1 e ϕ_2 da Eq. (1), definimos a forma simplética

$$\Omega(\phi_1, \phi_2) \equiv \int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3 x \sqrt{h} \left(\phi_2 n^a \nabla_a \phi_1 - \phi_1 n^a \nabla_a \phi_2\right), \tag{3}$$

em que $h_{ab} = g_{ab}|_{\Sigma_t}$. Notando que duas superfícies de Cauchy definem um volume no espaço-tempo, podemos usar a lei da divergência de Gauss para mostrar que a forma independe do parâmetro t da superfície, ou seja,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Omega(\phi_1, \phi_2) = 0. \tag{4}$$

Finalmente, se $\mathcal{S}$ é o espaço de soluções da Eq. (1), o par $(\mathcal{S}, \Omega)$ é suficiente para realizar a quantização do campo.

Quantização

Primeiro, complexificamos o espaço de soluções, isto é, $\mathcal{S} \to \mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ e definimos nele o produto interno de Klein-Gordon,

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{\mathrm{KG}} \equiv -i\Omega(f_1^*, f_2), \ \ f_1, f_2 \in \mathcal{S}^{\mathbb{C}}. \tag{5}$$

Agora, basta tomar um subconjunto $\mathcal{H} \subset \mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ que satisfaça as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{S}^{\mathbb{C}} = \mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}}$, em que $\overline{\mathcal{H}}$ é o espaço conjugado a $\mathcal{H}$
2. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{KG}}$ é positivo definido em $\mathcal{H}$ e, portanto, $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{KG}})$ é um espaço de Hilbert.
3. Para todo $f_1 \in \mathcal{H}$ e $f_2 \in \overline{\mathcal{H}}$ temos $\langle f_1, f_2 \rangle_{\mathrm{KG}} = 0$.

Nessa construção, $\mathcal{H}$ é o espaço de «1-partícula»[1], portanto, o espaço de estados será dado pelo espaço de Fock $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ associado à escolha de $\mathcal{H}$.

É possível definir naturalmente operadores de aniquilação e de criação, $a(\xi^*)$ e $a^\dagger(\xi)$ no espaço de Fock simétrico, em que $\xi \in \mathcal{H}$ representa o modo que está sendo

[1] A seguir veremos que o conceito de partícula é delicado no contexto de TQCEC

criado ou aniquilado. Além disso, diramente da definição, obtemos as relações de comutação

$$\left[a(\xi^*), a^\dagger(\eta)\right] = \langle \xi, \eta \rangle_{\mathrm{KG}} \mathbb{1}, \tag{6a}$$

$$[a(\xi^*), a(\eta^*)] = 0, \tag{6b}$$

$$\left[a^\dagger(\xi), a^\dagger(\eta)\right] = 0, \tag{6c}$$

para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Além disso, a construção leva a uma noção de vácuo associado com o estado que é anulado por qualquer operador de aniquilação,

$$a(\xi^*) \left|0\right\rangle = 0, \ \forall \xi \in \mathcal{H}, \tag{7}$$

do qual podemos definir um estado de n partículas com modo ξ como

$$\left|n_\xi\right\rangle \equiv \frac{\left[a^\dagger(\xi)\right]^n}{\sqrt{n!}} \left|0\right\rangle. \tag{8}$$

Finalmente, podemos expandir o campo (quantizado) num conjunto completo de soluções $\{u_j\}$ de frequência positiva como

$$\hat{\phi}(x) = \sum_j \left[u_j a(u_j^*) + u_j^* a^\dagger(u_j)\right]. \tag{9}$$

É conveniente definir os projetores $K : \mathcal{S}^{\mathbb{C}} \to \mathcal{H}$ e $\overline{K} : \mathcal{S}^{\mathbb{C}} \to \overline{\mathcal{H}}$ que dado uma solução $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$ com $\varphi^+ \in \mathcal{H}$ e $\varphi^- \in \overline{\mathcal{H}}$, a ação desses operadores é definida como

$$K\varphi = \varphi^+ \qquad \text{e} \qquad \overline{K}\varphi = \varphi^-. \tag{10}$$

Portanto, expandindo φ no base de soluções $\{u_j\}$, obtemos a ação explícita dos projetores,

$$\varphi = \sum_j \left[\langle u_j, \varphi \rangle_{\mathrm{KG}} u_j - \langle u_j^*, \varphi \rangle_{\mathrm{KG}} u_j^*\right], \tag{11}$$

então,

$$K\varphi = \langle u_j, \varphi \rangle_{\mathrm{KG}} u_j \qquad \text{e} \qquad \overline{K}\varphi = -\sum_j \langle u_j^*, \varphi \rangle_{\mathrm{KG}} u_j^*. \tag{12}$$

Operador campo

Seja $f \in C_0^\infty(\mathcal{M})$, ou seja, uma função suave de suporte compacto. Denotamos por $G_A(x, x')$ e $G_R(x, x')$ as funções de Green avançada e retardada do operador de Klein-Gordon. Assim, temos as soluções retardada e avançada com fonte f dadas por

$$Rf(x) \equiv \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^4 x' \sqrt{-g} G_R(x, x') f(x') \tag{13a}$$

$$Af(x) \equiv \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^4 x' \sqrt{-g} G_A(x, x') f(x'), \tag{13b}$$

em que Rf tem suporte no futuro do suporte de f e Af no passado. Note que podemos definir uma solução da Eq. (1) a partir das soluções retardada e avançada como

$$Ef(x) \equiv Af(x) - Rf(x). \tag{14}$$

De fato esta é uma solução homogênea, dado que

$$\left(\nabla^a\nabla_a + m^2\right) Ef(x) = \left(\nabla^a\nabla_a + m^2\right) Af(x) - \left(\nabla^a\nabla_a + m^2\right) Rf(x) \tag{15a}$$

$$= f(x) - f(x) = 0. \tag{15b}$$

Essa solução é extramemente útil pois goza da propriedade que dada um solução qualquer φ da Eq. (1), o produto interno desta com Ef pode ser escrito como uma integral no espaço-tempo,

$$-i\langle\varphi, Ej\rangle_{\mathrm{KG}} = \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^4x f(x)\varphi^*(x). \tag{16}$$

Além disso, se identificarmos $E : C_0^\infty(\mathcal{M}) \to \mathcal{S}$ como um mapa de funções em soluções, temos que esse mapa é sobrejetor, isto é, toda solução está associada a uma função suave da variedade.

Agora, definimos o operador campo associado a uma função f como

$$\hat{\phi}(f) \equiv \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\phi(x)f(x). \tag{17a}$$

Note que é possível escrevê-lo a partir dos operadores de aniquilação e criação expandindo o campo nos modos

$$\hat{\phi}(f) = \sum_j \left[\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}u_j f(x)a(u_j^*) + \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}u_j^* f(x)a^\dagger(u_j)\right] \tag{18a}$$

$$= \sum_j \left[-i\langle u_j^*, Ef\rangle_{\mathrm{KG}}a(u_j^*) - i\langle u_j, Ef\rangle_{\mathrm{KG}}a^\dagger(u_j)\right] \tag{18b}$$

$$= ia\left(-i\sum_j\langle u_j^*, Ef\rangle_{\mathrm{KG}}u_j^*\right) - ia^\dagger\left(\sum_j\langle u_j, Ef\rangle_{\mathrm{KG}}u_j\right) \tag{18c}$$

$$= ia\left(\overline{K}Ef\right) - a^\dagger\left(KEf\right), \tag{18d}$$

onde na segunda linha usamos a propriedade da Eq. (16) para trocar as integrais espaciais por produtos internos e, a partir da linearidade dos operadores, identificamos a parte de frequência positiva e negativa do modo Ef. Denotando $\overline{K}Ef$ por KEf^* temos,

$$\hat{\phi}(f) = ia\left(KEf^*\right) - ia^\dagger\left(KEf\right). \tag{19}$$

Relações de comutação

Seja $f, g \in C_0^\infty(\mathcal{M})$, então

$$\begin{aligned}
\left[\hat{\phi}(f), \hat{\phi}(g)\right] &= \left[ia\left(KEf^*\right) - ia^\dagger\left(KEf\right), ia\left(KEg^*\right) - ia^\dagger\left(KEg\right)\right] && \text{(20a)}\\
&= \left[a\left(KEf^*\right), a^\dagger\left(KEg\right)\right] - \left[a\left(KEg^*\right), a^\dagger\left(KEf\right)\right] && \text{(20b)}\\
&= \langle KEf, KEg\rangle_{\text{KG}} - \langle KEg, KEf\rangle_{\text{KG}} && \text{(20c)}\\
&= \langle KEf, KEg\rangle_{\text{KG}} - \langle KEf, KEg\rangle^*_{\text{KG}}. && \text{(20d)}
\end{aligned}$$

Agora, note que podemos usar da forma simplética do espaço para escrever

$$\begin{aligned}
\langle KEf^*, KEg^*\rangle_{\text{KG}} &= -i\Omega(KEf, KEg^*) && \text{(21a)}\\
&= i\Omega(KEg^*, KEf) && \text{(21b)}\\
&= -\langle KEg, KEf\rangle_{\text{KG}} && \text{(21c)}\\
&= -\langle KEf, KEg\rangle^*_{\text{KG}}. && \text{(21d)}
\end{aligned}$$

Portanto, definimos

$$\begin{aligned}
-iE(f,g) &\equiv \langle Ef, Eg\rangle_{\text{KG}} && \text{(22a)}\\
&= \langle KEf + KEf^*, KEg + KEg^*\rangle_{\text{KG}} && \text{(22b)}\\
&= \langle KEf, KEg\rangle_{\text{KG}} + \langle KEf^*, KEg^*, && \text{(22c)}\\
\rangle_{\text{KG}} &= \langle KEf, KEg\rangle_{\text{KG}} - \langle KEf, KEg\rangle^*_{\text{KG}}, && \text{(22d)}
\end{aligned}$$

de modo que, comparando com a Eq. (20), temos as relações de comutação para os campos dadas por

$$\left[\hat{\phi}(f), \hat{\phi}(g)\right] = -E(f,g). \tag{23}$$

3 Efeito Unruh

Espaços-tempos estacionários

Uma das consequências paradigmáticas da teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos é que arbitrariedade da escolha do espaço $\mathcal{H}$ de 1-partícula, leva a conclusão que o conceito de partícula não é covariante. Na realidade, este conceito só faz sentido quando associado a um campo de Killing, isto é, a alguma simetria do espaço em questão.

Dado um espaço-tempo $(\mathcal{M}, g_{ab})$ globalmente hiperbólico e estacionário, isto é, que admite um campo de Killing tipo-tempo ξ com grupo de órbitas $\phi_\xi^t : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$, temos uma escolha natural de quantização. O espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ “preferencial” é aquele cujas soluções são de frequência positiva com respeito ao tempo de Killing t, uma função que satisfaz

$$\xi^a \nabla_a t = 1. \tag{24}$$

A saber, estudando a resposta de um detector de dois-níveis seguindo as órbitas do campo de Killing, chegamos a conclusão de que suas excitações e desexcitações estão associadas com a absroção e emissão da definição natural de partícula. Esse resultado é motivador para a interpretação dada nesse tipo de espaço-tempo.

Campos de Killing no espaço de Minkowski

O alto grau de simetria do espaço-tempo de Minkowski, descrito pela métrica,

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2, \tag{25}$$

carrega consigo diversos campos de Killing. Considere os seguintes,

$$\xi^a = (\partial_t)^a \qquad \text{e} \qquad \chi^a = a\left[x\,(\partial_t)^a + t\,(\partial_x)^a\right]. \tag{26}$$

O primeiro, tem suas órbitas associadas com translação temporal e imediatamente segue que um observador com 4-velocidade dada por ξ^a tem 4-aceleração nula, logo correspondem a observadores inerciais. Agora, se um observador tem 4-velocidade dada por χ^a normalizado, ou seja, $u^a = \chi^a/B^2$ onde $B^2 = -\chi^a\chi_a = a^2(x^2 - t^2)$, sua 4-aceleração é

$$\begin{aligned} A^a &= \frac{1}{B^2}\chi^b\nabla_b\chi^a = -\frac{1}{B^2}\chi_b\nabla^a\chi^b = -\frac{1}{2B^2}\nabla^a\left(\chi^b\chi_b\right) && \text{(27a)}\\ &= \frac{1}{2B^2}\nabla^a B^2 = \nabla^a \ln B. && \text{(27b)}\end{aligned}$$

Portanto, a sua magnitude é

$$A = (A^aA_a)^{\frac{1}{2}} = (x^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{B}, \tag{28}$$

ou seja, esses observadores estão uniformemente acelerados. Além disso, note que o campo χ^a divide o espaço-tempo em 4 regiões delimitadas pelas superfícies em que ele se anula, $\mathfrak{h}_A$ e $\mathfrak{h}_B$:

$$\begin{array}{ll} \text{Região I} = I^-\left(\mathfrak{h}_A\right) \cap I^+\left(\mathfrak{h}_B\right) & \text{Região II} = I^+\left(\mathfrak{h}_A\right) \cap I^-\left(\mathfrak{h}_B\right) \\ \text{Região III} = J^-(S) & \text{Região IV} = J^+(S) \end{array}. \tag{29}$$

4 Radiação por uma carga acelerada