

# L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X e TikZ workshop

## Ficha de exercícios

### Preparação para o Exame de Matemática A

12<sup>o</sup> Ano de Escolaridade

5 Páginas

#### 1. (José Carlos Pereira)

Na figura 1 está representado, em referencial o.n.  $xOy$ , parte do gráfico de uma função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = 1 + 2 \cos(2x)$  e um triângulo  $[OAB]$ .

Sabe-se que:

- o gráfico de  $f$  intersecta o eixo  $Ox$  no ponto  $B$  e o eixo  $Oy$  no ponto  $C$ ;
- o ponto  $A$  desloca-se sobre o gráfico de  $f$ , no primeiro quadrante, nunca coincidindo com  $B$  nem com  $C$ .

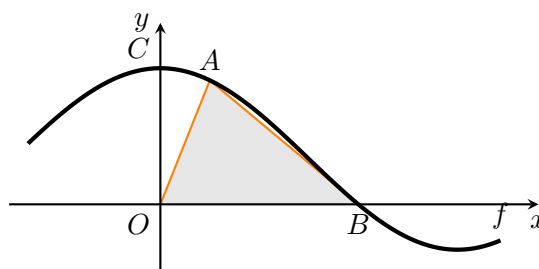


Figura 1

Qual é a abscissa do ponto  $A$  de modo que a área do triângulo  $[OAB]$  seja igual a  $\frac{\pi}{6}$ ?

(A)  $\frac{\pi}{4}$

(B)  $\frac{\pi}{6}$

(C)  $\frac{\pi}{8}$

(D)  $\frac{\pi}{12}$

#### 2. (José Carlos Pereira)

Na figura 2 estão representados três planos,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , definidos respetivamente por:  $a^2x + y + z = ax$ ,  $2x + y = -2 - z$  e  $x + a(y + z) = 0$ , com  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Sabe-se que:

- os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são estritamente paralelos;
- o plano  $\gamma$  intersecta os planos  $\alpha$  e  $\beta$  sobre duas retas paralelas,  $r$  e  $s$  ( $\alpha$  e  $\gamma$  intersectam-se sobre  $r$  e  $\beta$  e  $\gamma$  intersectam-se sobre  $s$ );
- $\gamma$  não é perpendicular nem a  $\alpha$  nem a  $\beta$ .

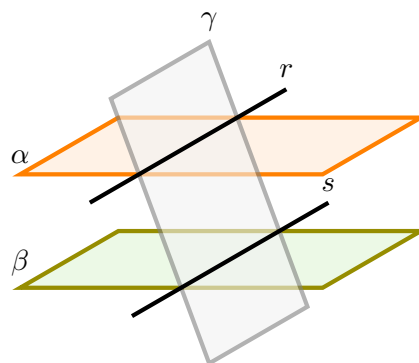


Figura 2

Qual é o valor de  $a$ ?

(A)  $-1$

(B)  $1$

(C)  $2$

(D)  $3$

3. (Francisco Cabral)

Na figura 3 está representada uma pirâmide quadrangular regular reta  $[ABCDV]$ .

Sabe-se que:

- a base  $[ABCD]$  é um quadrado de lado  $l$ , com  $l > 0$ ;
- o ponto  $U$  é o centro da base da pirâmide;
- $T$  é o ponto médio da aresta  $[BC]$ ;
- $x$  é a amplitude, em radianos, do ângulo  $UTV$ ;
- $x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ .

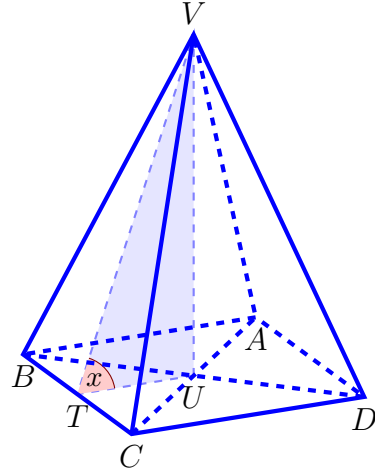


Figura 3

Em qual das opções seguintes está, uma expressão, em função de  $x$  e de  $l$ , que representa a área da superfície da pirâmide  $[ABCDV]$ ?

- (A)  $l + \frac{l}{\cos(x)}$       (B)  $l^2 + \frac{l^2}{\sin(x)}$       (C)  $l + \frac{l^2}{\cos(x)}$       (D)  $l^2 + \frac{l^2}{4 \cos(x)}$

4. (José Carlos Pereira)

Na figura 4 está representado, num referencial o.n.  $Oxyz$ , o prisma  $[ABCDEFGH]$  em que as bases são paralelogramos.

Sabe-se que:

- a base  $[OABC]$  está contida no plano  $xOy$ ;
- a aresta  $[OE]$  está contida no eixo  $Oz$ ;
- o ponto  $A$  tem ordenada  $-2$
- uma equação do plano  $ABG$  é  $5x - 2y = 24$
- uma equação da reta  $CG$  é:  
 $(x, y, z) = (-2, 7, -4) + k(4, -2, 4), k \in \mathbb{R}$

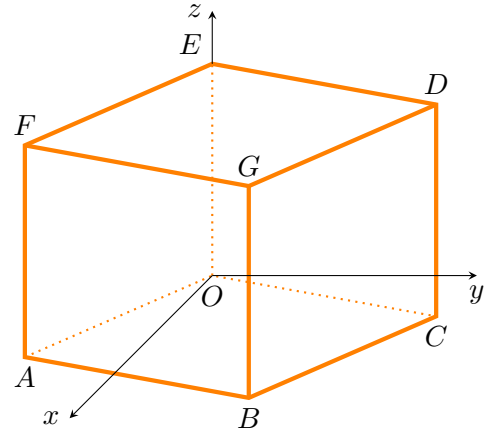


Figura 4

4.1. Escreva uma equação cartesiana do plano  $ACG$ .

4.2. Considere um prisma, semelhante ao prisma  $[ABCDEFGH]$ , em que a medida da sua altura é três meios de  $\overline{BG}$ . Qual é o seu volume?

5. (José Carlos Pereira)

Na figura 5 está representado num referencial o.n.  $Oxyz$  o sólido  $[ABCDEFGHPQ]$  constituído por duas pirâmides octogonais regulares tais que o polígono  $[ACDEFGH]$  é paralelo ao plano  $xOz$ .

Escolhem-se, simultaneamente e ao acaso, três vértices do sólido. Qual é a probabilidade de definirem um plano perpendicular ao plano  $xOz$ ?

- (A)  $\frac{1}{15}$  (C)  $\frac{4}{15}$   
(B)  $\frac{2}{15}$  (D)  $\frac{14}{15}$

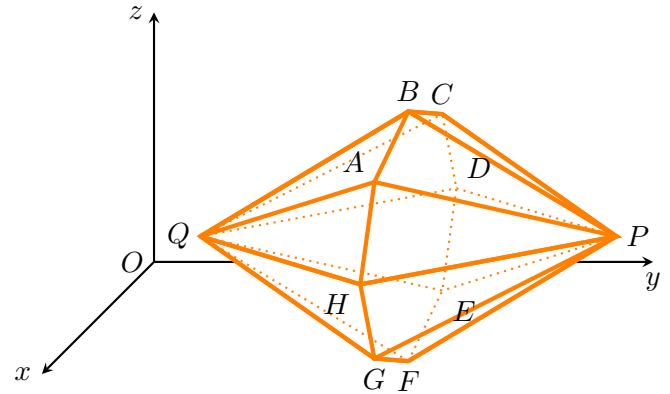


Figura 5

6. (José Carlos Pereira)

Na figura 6 estão representados num referencial o.n.  $xOy$  os gráficos das funções  $f$  e  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definidas por  $f(x) = \log_3 x$  e  $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$  e o trapézio  $[ABCD]$ .

Sabe-se que:

- Os pontos  $A$  e  $D$  pertencem ao gráfico de  $f$  e os pontos  $B$  e  $C$  pertencem ao gráfico de  $g$ .
- Os pontos  $A$  e  $B$  têm abcissa  $a$  e os pontos  $C$  e  $D$  têm abcissa  $3a$ .

Qual é a expressão que dá a área do trapézio  $[ABCD]$  em função de  $a$ ?

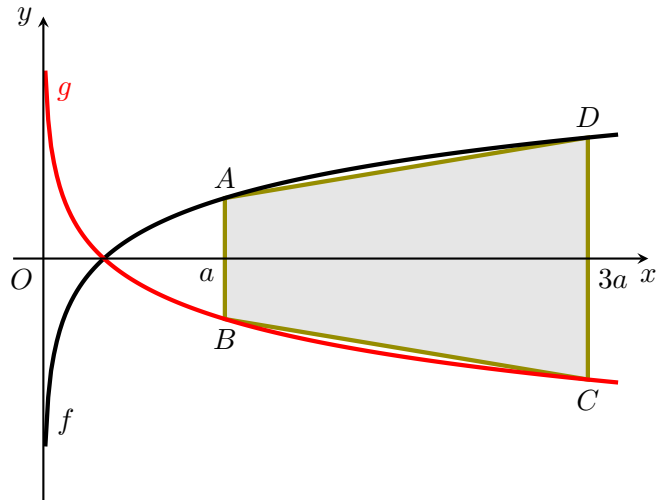


Figura 6

- (A)  $a \log_3 (3a^2)$  (B)  $2a \log_3 (9a^2)$  (C)  $2a \log_3 (3a^2)$  (D)  $a \log_3 (9a^2)$

7. (Carlos Frias)

Na figura 7, está representada, num referencial o.n.  $xOy$ , uma circunferência  $\zeta$ , um setor circular a sombreado e uma reta  $t$ .

Sabe-se que:

- $O$  é a origem do referencial e pertence à circunferência  $\zeta$ ;
- $C$  é o centro da circunferência  $\zeta$ ;
- o ponto  $A$  pertence à circunferência  $\zeta$  e tem ordenada 1;
- a reta  $t$  é tangente à circunferência  $\zeta$  no ponto  $A$ ;
- o setor circular  $CAB$  tem área igual a  $\frac{25\pi}{6}$ ;
- a circunferência  $\zeta$  é definida por:  

$$x^2 + y^2 - 6x - 2ay = 16 - a^2, \text{ com } a \in \mathbb{R}^+$$

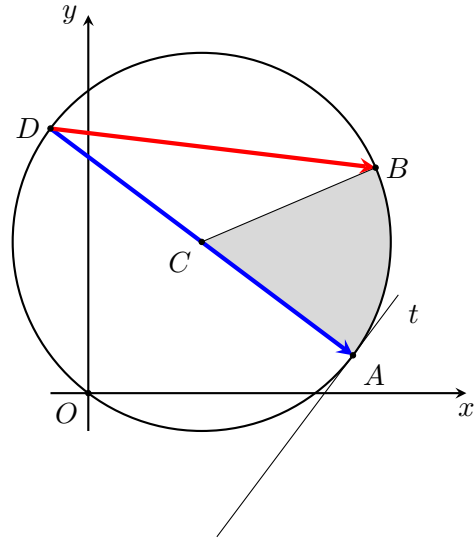


Figura 7

7.1. Mostre que  $a = 4$  e indique as coordenadas do ponto  $C$ .

7.2. Determine o valor do produto escalar  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$ .

**Nota:** Se não resolveu o item anterior, considere que  $C(3, 4)$ .

7.3. Escreva uma equação vetorial que defina a reta  $t$ .

8. (José Carlos Pereira)

Na figura 8 estão representados, num referencial o.n.  $xOy$ , parte do gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = \ln x$ , parte do gráfico da função  $f^{-1}$ , função inversa de  $f$ , o triângulo  $[ABC]$  e o triângulo  $[CDE]$ .

Sabe-se que:

- $A$  é o ponto de interseção do gráfico de  $f$  com o eixo  $Ox$ ;
- $C$  é o ponto de interseção do gráfico de  $f^{-1}$  com o eixo  $Oy$ ;
- o ponto  $B$  pertence ao gráfico de  $f$  e tem abcissa  $a$ ;
- o ponto  $D$  pertence ao gráfico de  $f^{-1}$  e tem ordenada  $a$ ;
- o ponto  $E$  pertence ao eixo  $Oy$  e tem a mesma ordenada que o ponto  $D$ ;
- $a$  é um número real maior que 2.

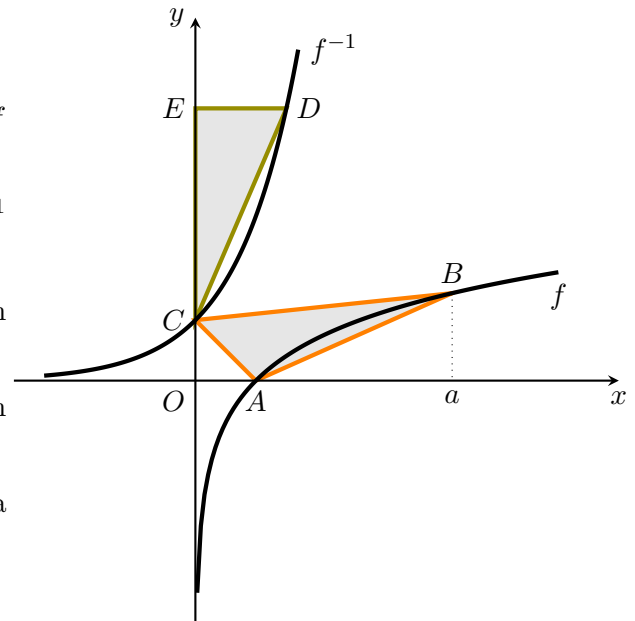


Figura 8

**8.1.** Mostre que a área do triângulo  $[ABC]$  é igual à área do triângulo  $[CDE]$  se e só se:

$$\ln a = \frac{a-1}{a-2}$$

**8.2.** Recorrendo à calculadora gráfica determine as coordenadas do ponto  $B$  de modo que a área do triângulo  $[ABC]$  é igual à área do triângulo  $[CDE]$ .

Na sua resposta deve:

- escrever a condição que permite resolver o problema.
- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema.
- indicar as coordenadas do ponto  $B$ , arredondadas às centésimas.

**9.** (Carlos Frias)

No plano complexo da figura 9 está representado um quadrado  $[ABCD]$  e um triângulo equilátero  $[BEF]$ , ambos centrados na origem.

Sabe-se que:

- o perímetro de  $[ABCD]$  é  $4\sqrt{2}$ ;
- $\frac{7\pi}{18}$  rad é um argumento do número complexo cuja imagem geométrica é o ponto  $A$ ;
- $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são as imagens geométricas das raízes quartas de um número complexo  $z$ ;
- $B$ ,  $E$  e  $F$  são as imagens geométricas das raízes cúbicas de um número complexo  $w$ .

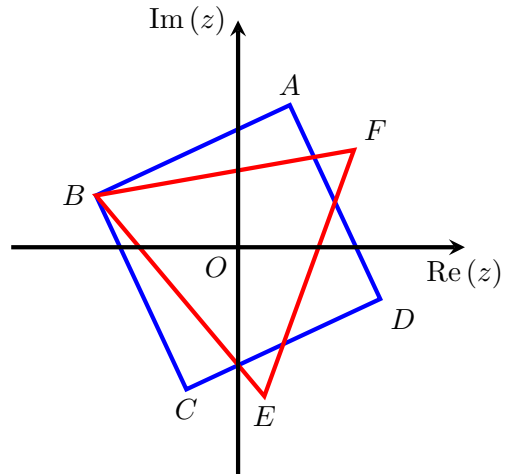


Figura 9

Determine  $z^9 + w$ , sem utilizar a calculadora.

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

# FIM

## Soluções

1. (A)

2. (C)

3. (C)

4.

4.1.  $7x + 2y - 6z - 24 = 0$

4.2. 324

5. (B)

6. (D)

7.

7.1.  $C(3, 4)$

7.2. 75

7.3.  $(x, y) = (7, 1) + k(3, 4), k \in \mathbb{R}$

8.

8.1.

8.2.  $B(4, 24; 1, 45)$

9.  $e^{i\frac{\pi}{3}}$