

1. Resolva, em  $\mathbb{R}$  e por processos analíticos, a inequação:

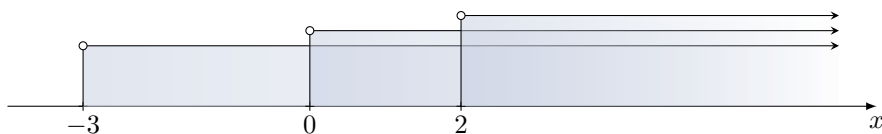
$$\log_2(x-2) \leq 1 + \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x}) - \log_4(x+3)$$

Apresente o conjunto solução utilizando a notação de intervalos de números reais.

**Proposta de resolução:**

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x-2 > 0 \wedge \sqrt{x} > 0 \wedge x \geq 0 \wedge x+3 > 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x > 2 \wedge x > 0 \wedge x > -3\}$$



$$D = ]2, +\infty[$$



$$\log_2(x-2) \leq 1 + \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x}) - \log_4(x+3) \Leftrightarrow$$

$$\log_2(x-2) + \log_4(x+3) \leq 1 + \frac{\log_2 \sqrt{x}}{\log_2 \sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\log_2(x-2) + \frac{\log_2(x+3)}{\log_2 4} \leq 1 + \frac{\frac{1}{2} \log_2 x}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\log_2(x-2) + \frac{1}{2} \log_2(x+3) \leq 1 + \log_2 x \Leftrightarrow$$

$$2 \log_2(x-2) + \log_2(x+3) \leq 2 + 2 \log_2 x \Leftrightarrow$$

$$\log_2 \left[ (x-2)^2 (x+3) \right] \leq \log_2 (4x^2) \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 4x + 4)(x+3) \leq 4x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^3 + 3x^2 - 4x^2 - 12x + 4x + 12 - 4x^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$x^3 - 5x^2 - 8x + 12 \leq 0$$

Os divisores do termo independente 12 são: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12 e -12.

Testando para  $x = 1$ :

$$1^3 - 5 \times 1^2 - 8 \times 1 + 12 = 1 - 5 - 8 + 12 = 0$$

Assim 1 é raiz do polinómio  $x^3 - 5x^2 - 8x + 12$ .

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$1 \begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & -8 & 12 \\ & & 1 & -4 & -12 \\ \hline & 1 & -4 & -12 & 0 \end{array}$$

Logo:

$$x^3 - 5x^2 - 8x + 12 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 4x - 12) \leq 0$$

Aplicando a fórmula resolvente:

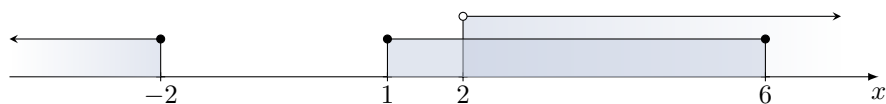
$$x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \times 12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 8}{2} \Leftrightarrow x = 6 \vee x = -2$$

Então:

$$(x - 1)(x^2 - 4x - 12) \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 6)(x + 2) \leq 0$$

$x$	$-\infty$	-2		1		6	$+\infty$
$x - 1$	-	-	-	0	+	+	+
$x - 6$	-	-	-	-	-	0	+
$x + 2$	-	0	+	+	+	+	+
P	-	0	+	0	-	0	+

$$C.S = ]2, +\infty[ \cap (]-\infty, -2] \cup [1, 6])$$



$$C.S = ]2, 6]$$

