

Prova Modelo de Exame Nacional de Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Junho de 2022
12º Ano de Escolaridade

Simulação de Prova 635

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

7 Páginas

-
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
 - Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
 - É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
 - Apresente apenas uma resposta para cada item.
 - As cotações dos itens encontram-se no final da prova.
-

Prova em Construção

- A prova inclui um formulário.
 - Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
 - Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.
-

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

1, 3, 4, 6.1, 6.2, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2, 10, 12 e 15

Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.

- Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.
-

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular:

$\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone:

$\pi r g$ (r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica:

$4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide:

$\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone:

$\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera:

$\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões:

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética:

$\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica:

$u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Complexos

$$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1.

Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $z = e^{i\alpha}$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.
Qual das opções seguintes pode ser um argumento do complexo $w = -3i \cdot \bar{z}^2$?

(A) $\frac{3\pi}{7}$

(B) $\frac{4\pi}{7}$

(C) $\frac{8\pi}{7}$

(D) $\frac{13\pi}{7}$

2. No referencial o.n. xOy da figura 1 encontram-se representados uma reta r e um triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- a reta r é definida por $3x + 4y = 12$
- A e B são os pontos de interseção da reta r com os eixos coordenados
- $[ABC]$ é um triângulo equilátero

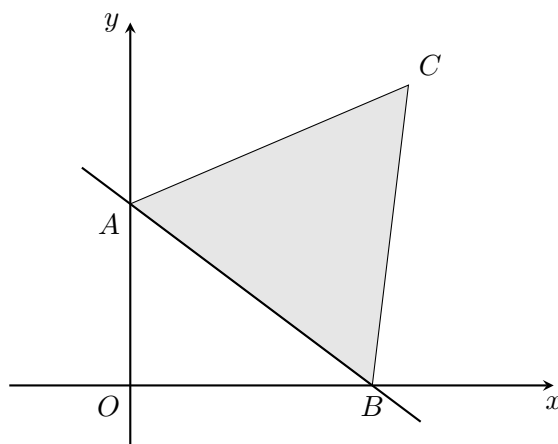


Figura 1

Determine, por processos analíticos, as coordenadas do ponto C .

3.

Na figura 2 está representado um cubo $[ABCDEFGH]$ de aresta a .

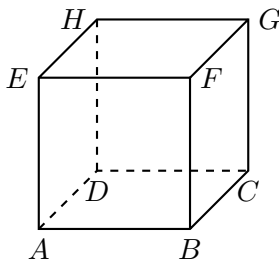


Figura 2

Em função de a , qual é o valor de $\vec{AG} \cdot \vec{AH}$?

(A) a^2

(B) $2a^2$

(C) $3a^2$

(D) $4a^2$

4.

Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos e i a unidade imaginária.

Sem utilizar a calculadora, determine:

$$\frac{(3 + 2i)^2 + 12i^{2023}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9} + 5e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

5. Sem utilizar a calculadora, determine o conjunto de números reais que satisfazem a inequação:

$$\ln [e^x (x + 1)] \geq x - \log_{\sqrt{e}} \sqrt{x} + \ln (3 - x)$$

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais.

6.

6.1. EM probabilidades

6.2. Probabilidades (composição)

7. Opcional Sucessões

8.

Na figura está representado em referencial o.n. $Oxyz$ um triângulo $[PQR]$ e um paralelepípedo.

Sabe-se que:

- o plano PQR é definido por $21x + 14y + 6z = 42$
- P , Q e R são vértices do paralelepípedo e pertencem aos eixos coordenados
- o paralelepípedo é retângulo e as arestas são paralelas ao eixos coordenados

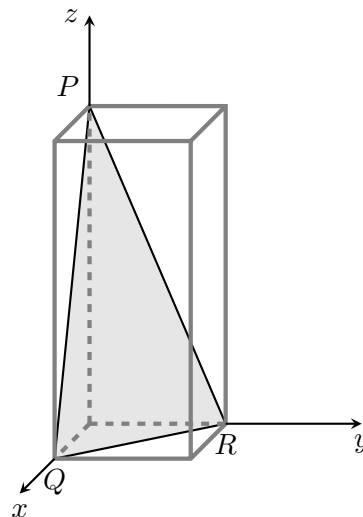


Figura 3

8.1. Determine o volume do paralelepípedo.

8.2. Defina por uma condição a superfície esférica centrada no ponto S de coordenadas $(17, 20, 13)$ e tangente ao plano PQR .

9. Funções (Função por ramos)

9.1. EM Continuidade (qual o valor do parâmetro para que f seja contínua em ...)

9.2. Extremos relativos/concavidades num dos ramos da função

10.

EM Problemas de contagens / Probabilidades

11. Na figura 4 encontra-se representado um quarto de círculo de raio 2 e um quadrilátero $[OABC]$.

Sabe-se que:

- A é um ponto fixo no arco PQ tal que a amplitude do ângulo POA é $\frac{\pi}{6}$ rad
- C é um ponto móvel que se desloca ao longo do arco AQ nunca coincidindo com o ponto A
- B acompanha o movimento de C de modo que ABC se mantém reto
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo AOC , com $x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$

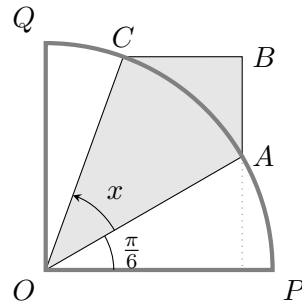


Figura 4

Seja f , a função que a cada valor de x , faz corresponder o perímetro do quadrilátero $[OABC]$.

Mostre que $f(x) = 3 + \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3}) \sin x + (1 - \sqrt{3}) \cos x, \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$.

12.

Item calculadora gráfica

13. Opcional Probabilidade condicionada

14. Opcional Teorema de Bolzano

15.

Demonstração - Funções - assíntotas

FIM

Cotações

- As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

Itens	1	3	4	6.1	6.2	8.1	8.2	9.1	9.2	10	12	15	Subtotal
Cotação (pontos)	12	12	14	12	14	14	14	12	14	12	14	14	158

- Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Itens	2	5	7	11	13	14	Subtotal
Cotação (pontos)	3×14 pontos						42