Prova Modelo de Exame Nacional de Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Junho de 2016 | adaptada para 2020
12.º Ano de Escolaridade

Simulação de Prova 635

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 9 Páginas

---

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

  7.1, **10.1**, **13.1** e **13.2**

  Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.

- Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular:

$Semiperímetro \times Apótema$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone:

$\pi r g$ (r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica:

$4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide:

$\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Volume de um cone:

$\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Volume de uma esfera:

$\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões:

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética:

$$\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

Progressão geométrica:

$$u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, ..., n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

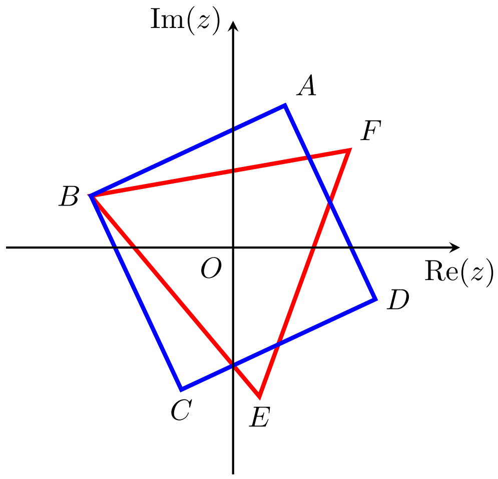
1. (a_n) é a progressão geométrica de razão e, cujo primeiro termo é igual a 2.

Considere também a sucessão (b_n) de termo geral $b_n = \ln(a_n)$.

Qual é o valor exato da soma dos dez primeiros termos da sucessão (b_n)?

(A) $4.5 + 2\ln(2)$ **(B)** $5\ln\left(4 \cdot e^9\right)$ **(C)** $\dfrac{2 \cdot e^{10} - 2}{e - 1}$ **(D)** $\dfrac{2}{1-e}$

2. No plano complexo da figura está representado um quadrado $[ABCD]$ e um triângulo equilátero $[BEF]$, ambos centrados na origem.



Sabe-se que:

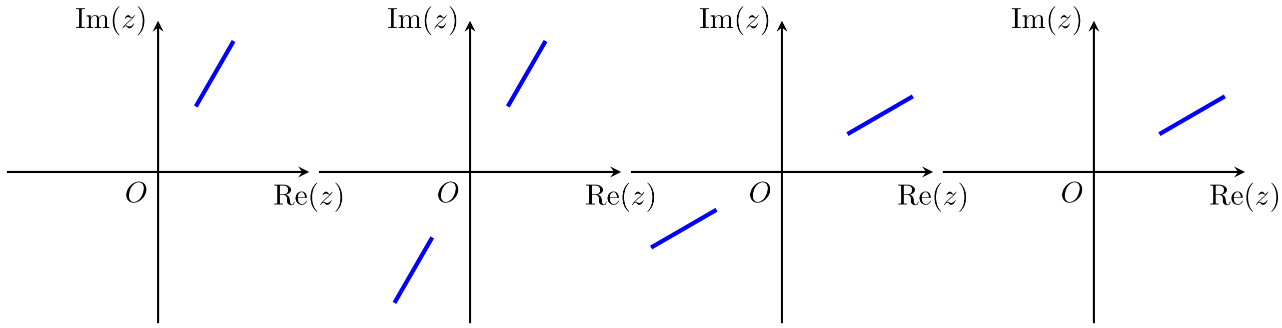
- o perímetro de $[ABCD]$ é $4\sqrt{2}$
- $\dfrac{7\pi}{18}$ rad é um argumento do número complexo cuja imagem geométrica é o ponto A
- A, B, C e D são as imagens geométricas das raízes quartas de um número complexo z
- B, E e F são as imagens geométricas das raízes cúbicas de um número complexo w

Determine $z^9 + w$, sem utilizar a calculadora.

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

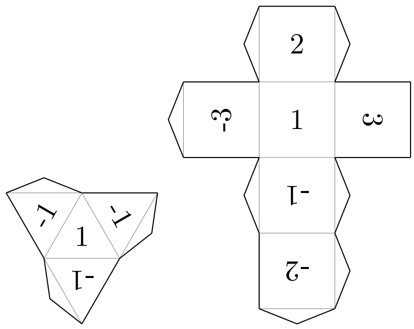
3. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere a condição $1 \leq |z| \leq 2 \wedge \left|\dfrac{\pi}{3} + 2\,\mathrm{Arg}(z)\right| = \pi$.

Em qual das opções seguintes está representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?



(A) **(B)** **(C)** **(D)**

4. A figura mostra a planificação de dois dados equilibrados, um tetraédrico e outro cúbico, com as faces numeradas como a figura ilustra.



Considere a experiência aleatória que consiste lançar uma vez cada um dos dados e assinalar num referencial o.n. xOy o ponto de coordenadas (a, b), sendo a o valor obtido no dado tetraédrico e b o valor obtido no dado cúbico.

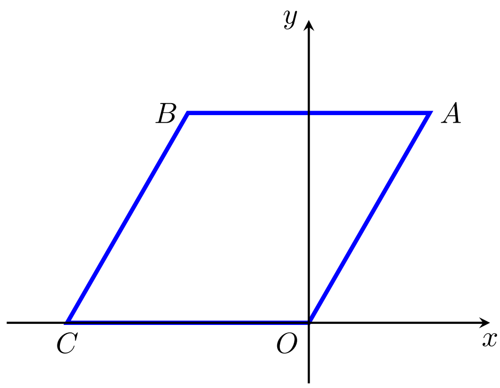
Sejam os acontecimentos:

- **A**: "O ponto coordenadas (a, b) não pertence ao primeiro quadrante"
- **B**: "O produto dos valores obtidos no dado tetraédrico e no dado cúbico é negativo"

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, determine o valor de $P\left(B|A\right)$.

Numa composição justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de $P\left(B|A\right)$ no contexto da situação descrita.

5. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, o losango $[OABC]$.



Sabe-se que:

- O é a origem do referencial
- C pertence ao semieixo negativo das abcissas
- $\dfrac{2\pi}{3}$ rad é a amplitude do ângulo ABC
- o perímetro de $[OABC]$ é igual a 16

Qual das condições seguintes define a reta AC?

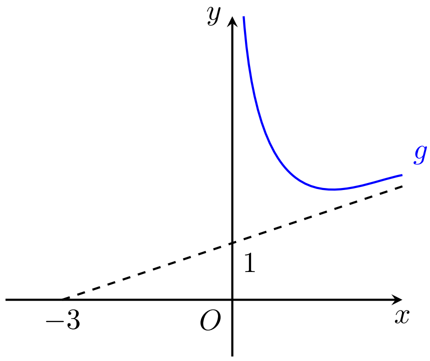
(A) $\sqrt{3}x - 3y + 4\sqrt{3} = 0$

(B) $(x, y) = (-4, 0) + \lambda\left(6, \sqrt{3}\right), \lambda \in \mathbb{R}$

(C) $\sqrt{3}x - y + 4\sqrt{3} = 0$

(D) $2x - 3y + 8 = 0$

6. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}^+$.



Tal como a figura sugere:

- a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de g
- a reta que passa pelos pontos de coordenadas $(-3, 0)$ e $(0, 1)$ é assíntota oblíqua do gráfico de g

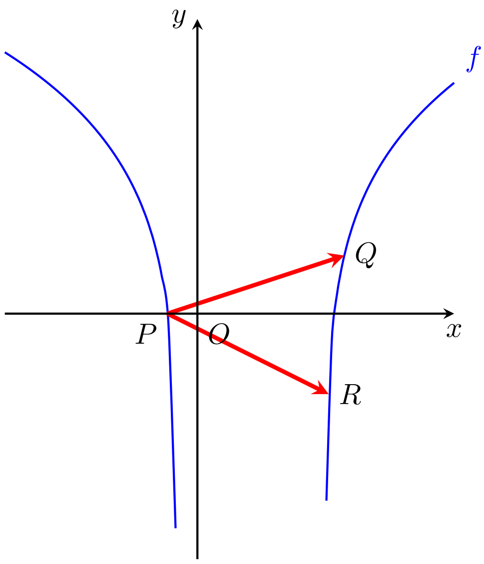
Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \dfrac{3x}{g(x)} + 1$

Qual das equações seguintes define a assíntota não vertical do gráfico da função h?

(A) $y = 9$ **(B)** $y = 10$ **(C)** $y = 9x + 1$ **(D)** $y = 8$

7. Considere a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \log_2\left(3x^2 - 5x - 2\right)$.

Na figura, estão representados, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f e dois vetores, $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$.



Sabe-se que:

- P é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox cuja abcissa é negativa
- Q e R são pontos do gráfico de f, com abcissa positiva
- Os vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ têm ambos norma 3

7.1.

> Utilize as capacidades gráficas da sua calculadora para determinar, com aproximação às centésimas do radiano, a amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$.
> Na sua resposta apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na sua calculadora, bem como as coordenadas dos pontos relevantes à resolução do problema.
> **Sugestão:** Percorra as seguintes etapas:
> - Com a ajuda da calculadora gráfica, determine com aproximação às milésimas, a abcissa do ponto P
> - Escreva uma equação que defina o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância ao ponto P é igual a 3
> - Resolva a equação anterior em ordem a y
> - Com a ajuda da calculadora gráfica determine as coordenadas dos pontos Q e R, com aproximação às milésimas
> - Determine a amplitude do ângulo pretendido

7.2. Resolva, em $\mathbb{R}$ e por processos analíticos, a inequação:

$$1 + \log_2(x-2) \leq f(x) - \log_4\left(x^2\right)$$

Apresente o conjunto solução utilizando a notação de intervalos de números reais.

8. Para um certo número real positivo, k, é contínua a função f definida em $\left]\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$ por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan x}{\pi - x} & \text{se } \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \\ k + \ln\left(2 + \cos(x)\right) & \text{se } x \geq \pi \end{cases}$$

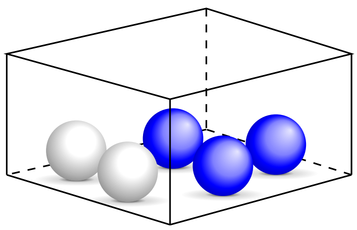
Qual é o valor de k?

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** $-1 - \ln(2)$ **(D)** $-1 - \ln(3)$

9. Numa caixa estão colocadas cinco bolas indistinguíveis ao tato. Três bolas azuis e duas bolas brancas.

Considere a seguinte experiência aleatória:

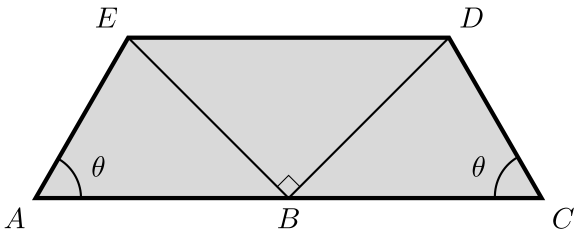
- "retirar as bolas da caixa, uma a uma, ao acaso, até que saiam consecutivamente duas bolas com a mesma cor"



Qual dos seguintes é o valor da probabilidade de serem extraídas todas as bolas?

(A) $\frac{1}{15}$ **(B)** $\frac{1}{10}$ **(C)** $\frac{1}{5}$ **(D)** $\frac{4}{5}$

10. Na figura está representado um trapézio $[ACDE]$ e um triângulo retângulo e isósceles $[BED]$.



Sabe-se que:

- B é o ponto médio de $[AC]$;
- $\overline{BE} = \overline{BD} = 1$;
- θ é a amplitude, em radianos, dos ângulos BAE e BCD, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Seja A a função que a cada valor de θ faz corresponder a área do trapézio $[ACDE]$.

Resolva os itens seguintes por processos analíticos.

10.1.

Mostre que $A(\theta) = 1 + \dfrac{1}{2\tan\theta}$, $\forall\, \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

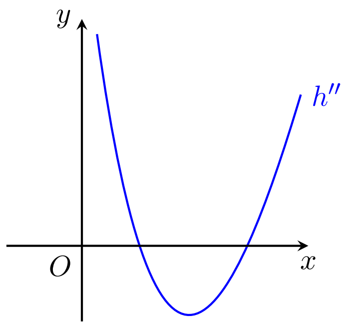
10.2. Prove que a função A é estritamente decrescente.

11. De uma certa linha do triângulo de Pascal sabe-se que a soma dos três primeiros elementos dessa linha com os últimos três elementos da linha seguinte é 258.

Quantos elementos dessa linha são superiores a 1000?

(A) 10 **(B)** 9 **(C)** 8 **(D)** 7

12. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função h'', função segunda derivada da função h, de domínio $\mathbb{R}^+$.



Qual das afirmações é verdadeira?

(A) O gráfico da função h apresenta apenas um ponto de inflexão.

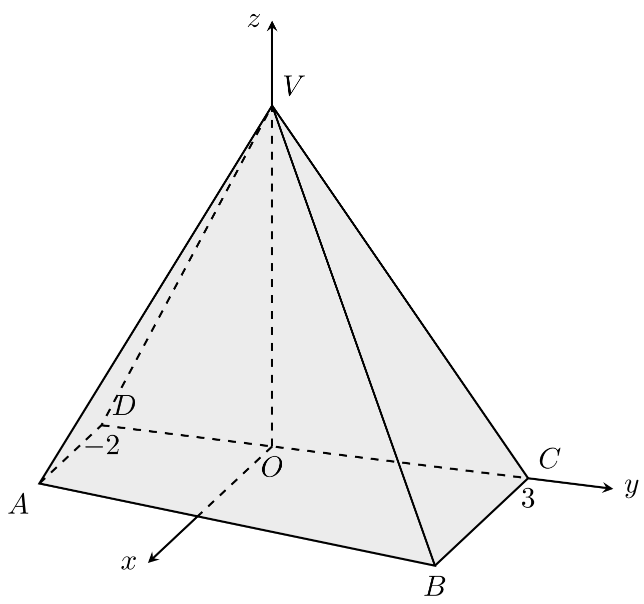
(B) O gráfico da função h apresenta concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}^+$.

(C) A função h', primeira derivada da função h, tem apenas um extremo relativo.

(D) A função h', primeira derivada da função h, tem dois extremos relativos.

13.

Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide não regular $[ABCDV]$.



Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- $[ABCD]$ é um trapézio retângulo contido no plano xOy;
- os pontos C e D pertencem ao eixo Oy e têm ordenadas 3 e -2, respetivamente;
- o ponto V pertence ao semieixo positivo das cotas;
- o plano ABV é definido por $5x - y + 3z = 12$.

13.1. Defina por uma equação vetorial a reta perpendicular ao plano ABV que contém o ponto V.

13.2. Determine, por processos analíticos, o volume da pirâmide $[ABCDV]$.

14. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2 + 6e^{-x}$.

14.1. Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto, mostre que $g'(1) = \dfrac{2e-6}{e}$.

14.2. Resolva, em $\mathbb{R}$ e por processos analíticos, a equação $x^2 + e^x = g(x) + 1$.

FIM

Cotações

- As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

Itens	7.1	10.1	13.1	13.2	Subtotal
Cotação (pontos)	18	18	18	18	72

- Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Itens	1	2	3	4	5	6	7.2	8	Subtotal
		9	10.2	11	12	14.1	14.2		
Cotação (pontos)	8×16 pontos								128