Prova Modelo de Exame Nacional de Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Abril de 2021
12º Ano de Escolaridade

Simulação de Prova 635

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 6 Páginas

---

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

  Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.
- Dos restantes 15 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular:

$Semiperímetro \times Apótema$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone:

$\pi r g$ (r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica:

$4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide:

$\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Volume de um cone:

$\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Volume de uma esfera:

$\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões:

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética:

$\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica:

$u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, ..., n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1. Na figura 1 está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cone de revolução.

Sabe-se que:

- o vertice V tem coordenadas $(4, 2, 1)$
- C é o centro da base do cone
- $[VC]$ é a altura do cone
- $[VA]$ é uma geratriz do cone
- o vetor $\overrightarrow{VA}$ tem coordenadas $\left(-\dfrac{7}{2}, 2, 0\right)$
- a reta VC é definida por:
  $(x, y, z) = (0, 4, 5) + \lambda\,(4, -2, -4)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$

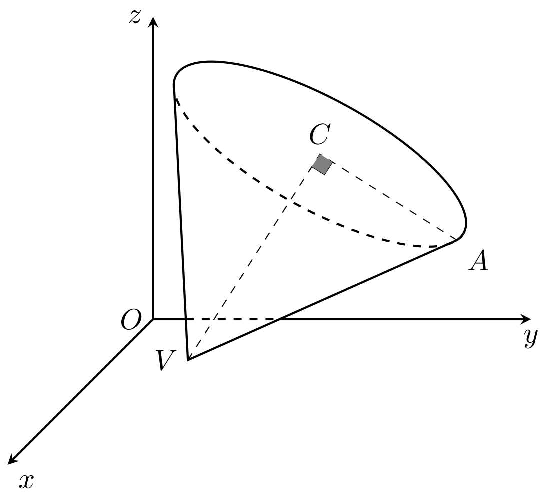

Figura 1

1.1. Mostre que o plano que contém a base do cone pode ser definido por $-2x + y + 2z = 5$.

1.2. Determine o volume do cone.

2. No referencial o.n. da figura 2 encontra-se parcialmente representado o gráfico da função f'', segunda derivada de uma função f.

Sabe-se que:

- o domínio de f, f' e f'' é $\mathbb{R}^+$
- a e b são zeros de f''

Qual das afirmações seguintes é falsa?

(A) $f'(a)$ é máximo relativo de f'

(B) $\big(a, f(a)\big)$ é ponto de inflexão do gráfico de f

(C) $f'(a) > f'(b)$

(D) $\big(b, f(b)\big)$ é ponto de inflexão do gráfico de f

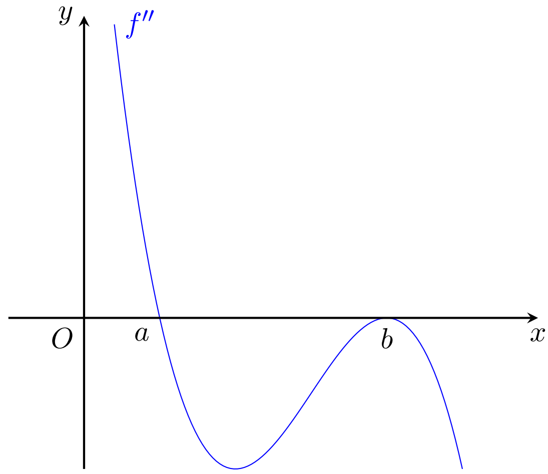

Figura 2

3. Complexos

3.1. Escolha múltipla

3.2. Calculo em $\mathbb{C}$

4. Escolha múltipla assimptotas

5. Probabilidades

5.1. Acontecimentos

5.2. Regra de Laplace

6. Escolha múltipla Probabilidades (problema de contagem)

7. Triângulo de Pascal (EM)

8. Teorema de Bolzano

9. Probabilidades regra de Laplace, composição

10. Na figura 3 encontram-se representadas, num referencial o.n. xOy, duas retas, r e s, e parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}^+$.

Tal como a figura sugere:

- a reta s forma com o eixo das abcissas um ângulo de amplitude $\frac{\pi}{3}$
- as retas r e s são perpendiculares e intersetam-se no ponto de coordenadas $(1, 0)$
- r é assintota do gráfico de f quando $x \to +\infty$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

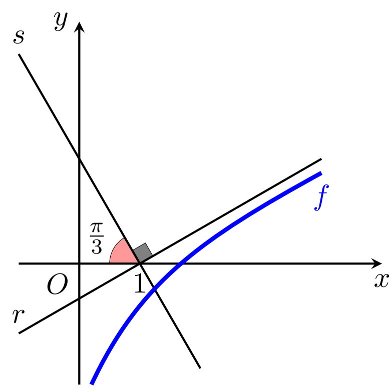

Figura 3

(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \sqrt{3}$

(B) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3f(x) - \sqrt{3}x\right) = \sqrt{3}$

(C) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3}x - 3f(x)\right) = \sqrt{3}$

(D) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\sqrt{3}$

11. Geometria no plano (produto escalar)

12. Na figura 4 está representado, em referencial o.n. xOy a circunferência trigonométrica, uma reta r e uma região a sombreado.

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial
- P é o ponto de coordenadas $(1, 0)$
- r é a reta definida por $x = 1$
- Q desloca-se sobre a circunferência ao longo do primeiro quadrante
- θ é a amplitude, em radianos, do ângulo POQ, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
- R acompanha o movimento do ponto Q deslocando-se sobre a circunferência ao longo do quarto quadrante de modo que o ângulo ROQ é um ângulo reto
- os pontos S e T são os pontos de interseção da reta r com as semirretas $\dot{O}Q$ e $\dot{O}R$, respectivamente.

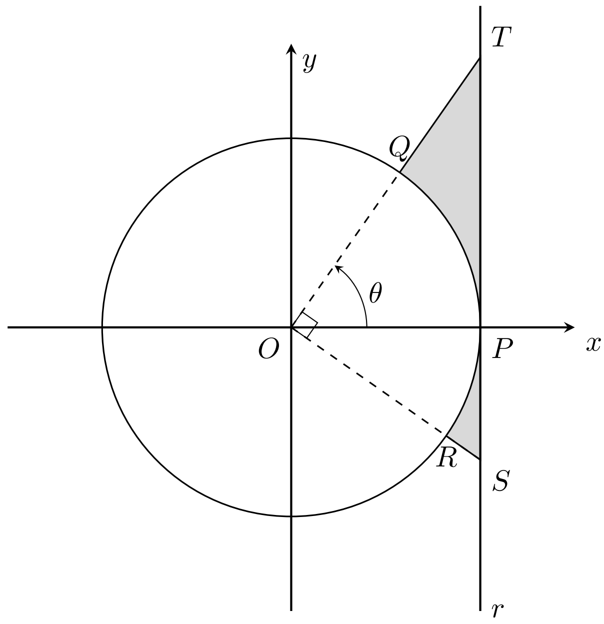

Figura 4

Seja A a função que a cada valor de θ faz corresponder o valor da área da região a sombreado.

12.1. Mostre que $A(\theta) = \dfrac{1}{\sin(2\theta)} - \dfrac{\pi}{4}$, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

12.2. Determine, por processos analíticos, o valor de θ para o qual é mínima a área da região a sombreado.

12.3. Qual é conjunto de valores de θ para os quais a área da região a sombreado é menor que a área do triângulo [OPQ]?

Recorra às capacidades gráficas da sua calculadora para resolver esta questão.

Na sua resposta deve:

- Formular uma inequação cuja solução responde ao problema
- Representar graficamente a(s) função(ões) que lhe permitem obter a resposta ao problema
- Assinalar o(s) ponto(s) relevante(s), indicando a(s) sua(s) abcissa(s) com aproximação às centésimas
- Indicar o conjunto solução utilizando a notação de números reais

13. Resolva, em $\mathbb{R}$ e por processos analíticos, a inequação:

$$\log_2(x-2) \leq 1 + \log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x}\right) - \log_4(x+3)$$

Apresente o conjunto solução utilizando a notação de intervalos de números reais.

14. Considere f, a função de domínio $]-\infty, 2\pi]$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\ln(e^x+1) - \ln(4)}{e^x - 1} & \text{se} \ \ x < 0 \\ \\ e^x(\cos x + \sin x) & \text{se} \ \ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

14.1. Mostre que f é contínua em $x = 0$.

14.2. Na restrição de f a $[0, \ 2\pi]$ considere que:

- A e B são os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo das abcissas;
- C é o ponto de gráfico de f com ordenada mínima.

Mostre, por processos analíticos, que a área do triângulo $[ABC]$ é igual a $\dfrac{\pi}{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$

FIM

Cotações

- As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

Itens	1	7.1	7.2	10	Subtotal
Cotação (pontos)	16	16	20	20	72

- Destes 15 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Itens	2	3.1	3.2	4	5	6	8	9	Subtotal
	11.1	11.2	12	13.1	13.2	14	15		
Cotação (pontos)	8×16 pontos								128