

# Proposta de Exame Nacional de Matemática A - 12.º Ano

Carlos Frias

4 de fevereiro de 2025

**Duração:** 150 minutos

**Data:** \_\_\_\_\_

**Nome:** \_\_\_\_\_

**Número:** \_\_\_\_\_

---

## Instruções:

- O exame é constituído por dois grupos: Grupo I e Grupo II.
- No Grupo I, para cada questão, indique a única opção correta.
- No Grupo II, apresente todos os cálculos e justificações necessárias.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor.
- É permitido o uso de calculadora gráfica.

## Grupo I

### Questões de Escolha Múltipla

Para cada uma das questões deste grupo, selecione a única opção correta.

1. Considere uma função  $f$ , cuja derivada é definida por  $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$ . Qual é o valor do limite seguinte?

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4}$$

- A.  $\frac{5}{4}$
- B.  $\frac{7}{4}$
- C.  $\frac{9}{4}$
- D.  $\frac{11}{4}$

2. Qual das expressões seguintes define a derivada de  $f(x) = e^{2x} \cdot \ln(x)$ ?

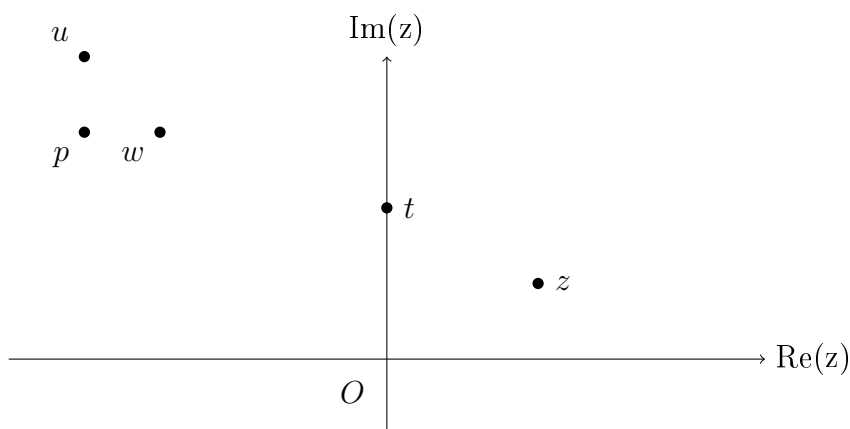
A.  $f'(x) = 2e^{2x} \cdot \ln(x) + \frac{e^{2x}}{x}$

B.  $f'(x) = e^{2x} \cdot \ln(x) + \frac{e^{2x}}{x}$

C.  $f'(x) = 2e^{2x} \cdot \ln(x) - \frac{e^{2x}}{x}$

D.  $f'(x) = e^{2x} \cdot \ln(x) - \frac{e^{2x}}{x}$

3. No plano complexo da figura estão representadas as imagens geométricas dos números complexos  $z$ ,  $w$ ,  $t$ ,  $u$  e  $p$ .



Qual é das imagens geométricas corresponde ao número complexo  $i \cdot z^2 + 1$ ?

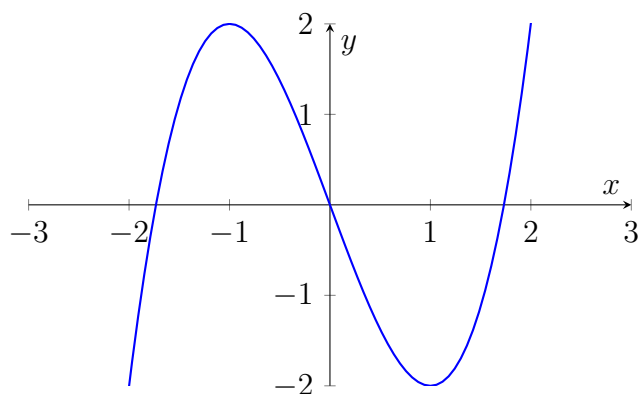
A.  $w$

B.  $u$

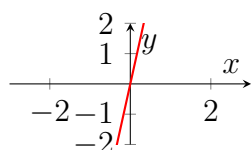
C.  $p$

D.  $t$

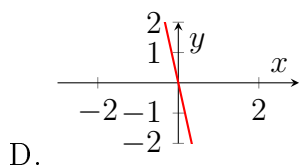
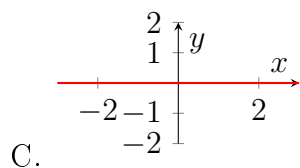
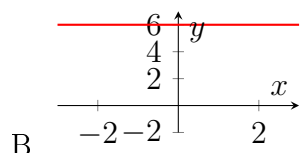
4. Considere o gráfico da função  $f$  representado abaixo:



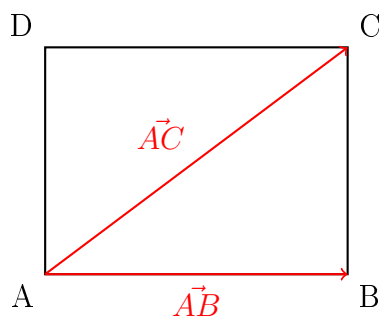
Qual dos seguintes gráficos representa a segunda derivada  $f''$  da função  $f$ ?



A.



5. Considere o retângulo  $[ABCD]$  representado abaixo:



Sabe-se que a área do retângulo é 12 e o perímetro é 14. Qual é o valor do produto escalar entre os vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{AC}$ ?

- A. 12
- B. 14
- C. 16
- D. 18

## Grupo II

### Questões de Desenvolvimento

Nas questões deste grupo, apresente todos os cálculos e justificações necessárias.

1. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 3x + 2)$ .
  - (a) Determine os zeros da função  $f$ .
  - (b) Estude  $f$  quanto à monotonia, identificando os intervalos onde a função é crescente ou decrescente. Determine também a existência de extremos relativos (máximos ou mínimos relativos), caso existam.
2. Considere a função  $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ .

- (a) Mostre que a derivada de  $g$  é dada por  $g'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ .
- (b) Estude a concavidade da função e identifique os pontos de inflexão, caso existam.
3. Resolva a seguinte inequação:

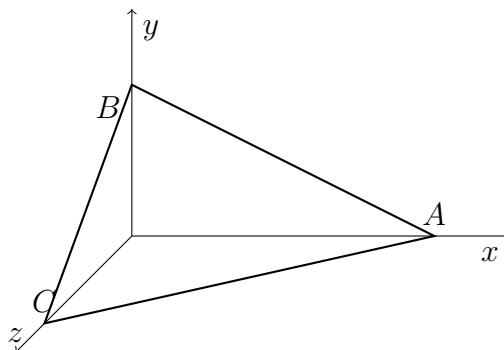
$$\log_2(x) + \log_2(x-2) \geq 3$$

Apresente a solução na forma de intervalo ou união de intervalos.

4. Numa turma de 12.<sup>o</sup> ano, há 20 alunos, dos quais 12 são raparigas e 8 são rapazes. O professor vai escolher aleatoriamente 4 alunos para formar uma comissão.
- (a) Quantas comissões diferentes podem ser formadas?
- (b) Qual é a probabilidade de a comissão ser constituída por 2 raparigas e 2 rapazes?
- (c) Qual é a probabilidade de a comissão incluir pelo menos uma rapariga?
5. Considere a equação trigonométrica:

$$2 \sin^2(x) - 3 \sin(x) + 1 = 0$$

- (a) Mostre que a equação pode ser escrita na forma  $(2 \sin(x) - 1)(\sin(x) - 1) = 0$ .
- (b) Resolva a equação no intervalo  $[0, 2\pi]$ .
6. No espaço tridimensional, considere os pontos  $A(4, 0, 0)$ ,  $B(0, 2, 0)$  e  $C(0, 0, 3)$ .



- (a) Mostre que o plano  $ABC$  é definido por  $3x + 6y + 4z = 12$ .
- (b) Escreva uma condição que defina a esfera de centro  $O(0, 0, 0)$  e tangente ao plano  $ABC$ .

**Fim do Exame**