

Prova Modelo de Exame Nacional de Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Junho de 2022
12^o Ano de Escolaridade

Simulação de Prova 635

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

8 Páginas

-
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
 - Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
 - É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
 - Apresente apenas uma resposta para cada item.
 - As cotações dos itens encontram-se no final da prova.
-

-
- A prova inclui um formulário.
 - Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
 - Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.
-

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

1, 3, 4, 6.1, 6.2, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2, 10, 12 e 15

Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.

- Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.
-

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular:

$\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone:

$\pi r g$ (r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica:

$4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide:

$\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone:

$\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera:

$\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões:

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética:

$\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica:

$u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Complexos

$$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1.

Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $z = e^{i\alpha}$, com $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{4} \right[$.
Qual das opções seguintes pode ser um argumento do complexo $w = -3i \cdot \bar{z}^2$?

(A) $\frac{3\pi}{7}$

(B) $\frac{4\pi}{7}$

(C) $\frac{8\pi}{7}$

(D) $\frac{13\pi}{7}$

2. No referencial o.n. xOy da figura 1 encontram-se representados uma reta r e um triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- a reta r é definida por $3x + 4y = 12$
- A e B são os pontos de interseção da reta r com os eixos coordenados
- $[ABC]$ é um triângulo equilátero

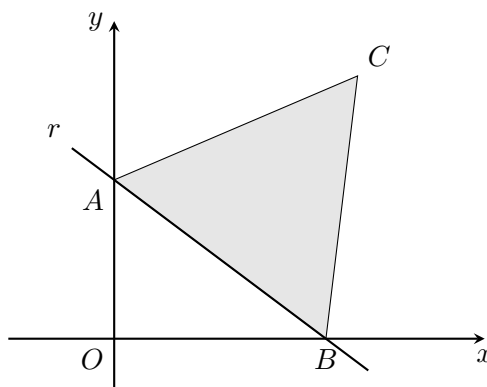


Figura 1

Determine, por processos analíticos, as coordenadas do ponto C .

3.

Na figura 2 está representado um cubo $[ABCDEFGH]$ de aresta a .

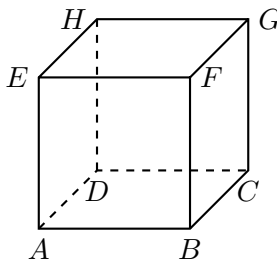


Figura 2

Em função de a , qual é o valor de $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH}$?

(A) a^2

(B) $2a^2$

(C) $3a^2$

(D) $4a^2$

4.

Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos e i a unidade imaginária.

Sem utilizar a calculadora, determine:

$$\frac{(3 + 2i)^2 + 12i^{2023}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9} + 5e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

5. Sem utilizar a calculadora, determine o conjunto de números reais que satisfazem a inequação:

$$\ln [e^x (x + 1)] \geq x - \log_{\sqrt{e}} \sqrt{x} + \ln (3 - x)$$

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais.

6.

Uma turma de 12.^o ano de uma escola tem 24 alunos, dos quais 8 são rapazes.

Duas das alunas dessa turma são irmãs gémeas.

6.1. Para organizar a viagem de finalistas, vai ser constituída uma comissão de cinco alunos da turma.

De quantas formas se pode formar a comissão se pelo menos uma das gémeas tiver que fazer parte dela?

(A) 16170

(B) 17710

(C) 14630

(D) 26334

6.2. Numa palestra organizada para a turma, os alunos vão sentar-se numa sala onde estão três filas de cadeiras, com 10 lugares em cada fila.

Supondo que os alunos se distribuem ao acaso pelos 30 lugares disponíveis, determine a probabilidade de em cada uma das filas ficarem apenas elementos do mesmo sexo.

Apresente uma expressão cujo valor dá o resultado pretendido.

7. Seja (a_n) a sucessão de termo geral:

$$a_n = \frac{2^{n+2} + n \times 2^{n+1} + 1}{2^n}$$

Determine a soma dos 100 primeiros termos de (a_n) .

Apresente o valor pedido na forma $\frac{a \times b^c - 1}{b^c}$, com $a, b, c \in \mathbb{N}$.

8.

Na figura 3 está representado em referencial o.n. $Oxyz$ um triângulo $[PQR]$ e um paralelepípedo.

Sabe-se que:

- o plano PQR é definido por $21x + 14y + 6z = 42$
- P , Q e R são vértices do paralelepípedo e pertencem aos eixos coordenados
- o paralelepípedo é retângulo e as arestas são paralelas ao eixos coordenados

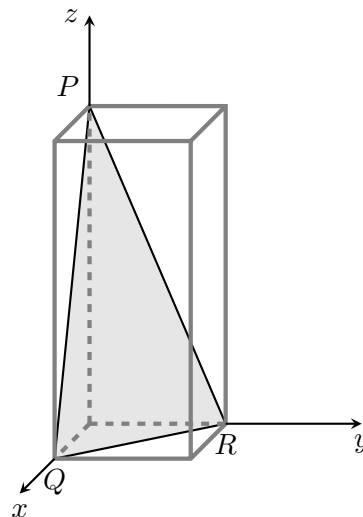


Figura 3

8.1. Determine o volume do paralelepípedo.

8.2. Defina por uma condição a superfície esférica centrada no ponto S de coordenadas $(17, 20, 13)$ e tangente ao plano PQR .

9.

Considere a função g , de domínio $]-\infty, \pi]$, definida à custa de um parâmetro a não nulo, por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{e^x + x - 1} & \text{se } x < 0 \\ e^{\sqrt{3}x + \sqrt{3}\sin x + \cos x} & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

9.1. Qual dos seguintes é o valor de a para o qual g é contínua em $x = 0$?

- (A) 1 (B) e (C) $2e$ (D) $3e$

9.2. Para $x \in]0, \pi]$, estude g quanto à monotonia e existência de extremos relativos.

Na sua resposta, apresente os intervalos de monotonia e o(s) maximizante(s) e minimizante(s), caso existam.

10.

Seja (a_n) a sucessão convergente de termos positivos, definida recursivamente, por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Qual dos seguintes é o valor $\lim a_n$?

Sugestão: Repare que $\lim a_{n+1} = \lim a_n$. Considere $s = \lim a_n$.

(A) 2

(B) $\sqrt{2}$

(C) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

(D) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

11. Na figura 4 encontram-se representados um quarto de círculo de raio 2 e um quadrilátero $[OABC]$.

Sabe-se que:

- A é um ponto fixo no arco PQ tal que a amplitude do ângulo POA é $\frac{\pi}{6}$ rad
- C é um ponto móvel que se desloca ao longo do arco AQ nunca coincidindo com o ponto A
- B acompanha o movimento de C de modo que ABC se mantém reto
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo AOC , com $x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$

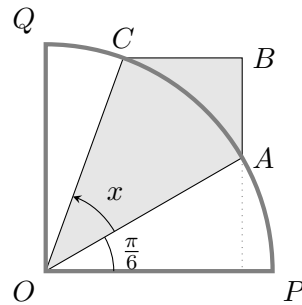


Figura 4

Seja f , a função que a cada valor de x , faz corresponder o perímetro do quadrilátero $[OABC]$.

Mostre que $f(x) = 3 + \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3}) \sin x + (1 - \sqrt{3}) \cos x, \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$.

12.

Seja f a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = x - x \ln x$.

Seja O a origem do referencial, P o ponto do gráfico de f com ordenada nula e Q um ponto que se desloca ao longo do gráfico de f , nunca sendo igual ao ponto P .

Considere A a função que a cada abscissa x do ponto Q , faz corresponder a área do triângulo $[OPQ]$.

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora determine, com aproximação às centésimas, as abscissas do ponto Q de modo que a área do triângulo $[OPQ]$ seja igual a 1.

Na sua resposta deve:

- Determinar, analiticamente, a abscissa do ponto P
- Apresentar uma expressão algébrica que defina $A(x)$ e equacionar o problema
- Resolver o problema graficamente, apresentando os gráficos visualizados na calculadora e pontos relevantes
- Indicar as possíveis abscissas do ponto Q

13. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), de probabilidade não nula.

Sabe-se que:

$$2P(A) + P(\overline{A} \cup B) = 1 + 5P(A \cap \overline{B})$$

Determine a probabilidade de B acontecer, sabendo que A aconteceu.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

14. Sejam f e g duas funções, de domínio $[-1, 1]$, tais que:

- f é contínua
- f é ímpar com contradomínio $[-3, 3]$
- $f(-1) = 3$
- g é derivável, sendo $g'(x) = \log_2[f(x) + 5] - 2$

Mostre que g admite, pelo menos, um máximo relativo em $] -1, 1[$.

15.

Sejam f e g duas funções de domínio \mathbb{R}^+ .

Sabe-se que:

- A reta de equação $y = 3x - 1$ é assíntota do gráfico de f
- $g(x) = \ln(e^{f(x)} + e^{3x})$

Mostre que a reta de equação $y = 3x + \ln\left(\frac{1+e}{e}\right)$ é assíntota do gráfico de g .

FIM

Cotações

- As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

Itens	1	3	4	6.1	6.2	8.1	8.2	9.1	9.2	10	12	15	Subtotal
Cotação (pontos)	12	12	14	12	14	14	14	12	14	12	14	14	158

- Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Itens	2	5	7	11	13	14	Subtotal
Cotação (pontos)	3×14 pontos						42