# Soluções e tópicos de resolução

**1.** Opção C

- Escrever $-3i = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$, por exemplo
- Escrever $\overline{z}^2 = e^{-2\alpha}$
- Escrever $-3i\overline{z}^2 = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}$
- Concluir que $-\pi < -\frac{\pi}{2} - 2\alpha < -\frac{\pi}{2}$
- Concluir que o único argumento pertencente ao 3.º quadrante é $\dfrac{8\pi}{7}$

**2.**

- Determinar as coordenadas de $A\,(0,3)$
- Determinar as coordenadas de $B\,(4,0)$
- Determinar o ponto médio de $[AB]$
- Escrever uma equação para a mediatriz de $[AB]$ ($y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{7}{6}$, por exemplo)
- Escrever uma equação para a circunferência centrada em $A$ e que contém, $B$ e $C$. ($x^2 + (y-3)^2 = 25$, por exemplo)
- Escrever $x^2 + \left(\dfrac{4}{3}x - \dfrac{7}{6} - 3\right)^2 = 25$
- Obter $100x^2 - 400x - 275 = 0$ (ou equivalente)
- Concluir que $x = \dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}$
- Obter $y = \dfrac{3+4\sqrt{3}}{2}$

**3.** Opção B

**4.**

- Concluir que $i^{2023} = -i$
- Escrever $5e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- Determinar $(3+2i)^2$ na forma algébrica $(5+12i)$
- Escrever $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$
- Determinar $\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^9$
- Obter $-5+5i$
- Escrever $-5+5i = 5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

**5.**

- Determinar o domínio da inequação ($D = ]0,3[$)
- Escrever $\ln\left[e^x(x+1)\right] = x + \ln(x+1)$
- Concluir que $\log_{\sqrt{e}}\sqrt{x} = \ln x$
- Obter $\ln\left(x^2+x\right) \geq \ln(3-x)$
- Obter $x^2 + 2x - 3 \geq 0$
- Determinar as soluções da equação $x^2 + 2x - 3 = 0$
- Concluir que $S = [1,3[$

**6.**

**6.1.** Opção A ($^{24}C_5 -^{22}C_5$, por exemplo)

**6.2.** $\dfrac{3 \times^{10} A_8 \times^{20} A_{16}}{^{30}A_{24}}$, por exemplo

**7.**

- Escrever $a_n = 4 + 2n + \dfrac{1}{2^n}$
- Reconhecer (justificar) que $(a_n)$ é a soma de uma progressão aritmética com uma progressão geométrica
- Escrever $S_{100} = \dfrac{6+204}{2} \times 100 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{1-\frac{1}{2}}$
- Obter $S_{100} = \dfrac{10501 \times 2^{100} - 1}{2^{100}}$

**8.**

**8.1.**

- Determinar a abcissa do ponto $Q$ (2)
- Determinar a ordenada do ponto $R$ (3)
- Determinar a cota do ponto $P$ (7)
- Determinar o volume do paralelepípedo (42)

**8.2.**

- Escrever uma equação da reta que contém $S$ e é perpendicular ao plano $PQR$ ($(x,y,z) = (17,20,13) + \lambda(21,14,6), \lambda \in \mathbb{R}$)
- Determinar o ponto de interseção da reta anterior com o plano $PQR$ $(-4,6,7)$
- Determinar o raio da superfície esférica $\sqrt{673}$
- Escrever $(x-17)^2 + (y-20)^2 + (z-13)^2 = 673$

**9.**

**9.1.** Opção C

**9.2.**

Para $0 < x < \pi$:

- Determinar $g'(x)$ ($\left(\sqrt{3} + \sqrt{3}\cos x - \sin x\right) e^{\sqrt{3}x + \sqrt{3}\sin x + \cos x}$)
- Escrever $\sqrt{3} + \sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$
- Escrever $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right)$, por exemplo
- Obter $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- Concluir que $x = \dfrac{2\pi}{3} \vee x = \pi$
- Apresentar uma tabela de monotonia
- Indicar os intervalos de monotonia (crescente em $\left]0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$, decrescente em $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right]$)
- Indicar o maximizante $\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ e o minimizante $(\pi)$

**10.** Opção D

- Escrever $\lim a_{n+1} = \lim \left(1 + \dfrac{1}{a_n}\right)$
- Obter $\lim a_n = 1 + \dfrac{1}{\lim a_n}$
- Escrever $s = 1 + \dfrac{1}{s}$
- Obter $s^2 - s - 1 = 0$
- Concluir que $s = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

**11.**

- Escrever $\overline{OA} = \overline{OC} = 2$
- Escrever $\overline{AB} = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right) - 2\sin\dfrac{\pi}{6}$
- Obter $\overline{AB} = \cos x + \sqrt{3}\sin x - 1$
- Escrever $\overline{BC} = 2\cos\dfrac{\pi}{6} - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right)$
- Obter $\overline{BC} = \sqrt{3} - \sqrt{3}\cos x + \sin x$
- Concluir o pretendido

**12.**

- Determinar a abcissa do ponto $P\ (e)$
- Escrever $A\,(x) = \dfrac{e \times |x - x\ln x|}{2}$
- Escrever $\dfrac{e \times |x - x\ln x|}{2} = 1$ (ou equivalente)
- Resolver equação graficamente
- Apresentar gráficos visualizados e pontos relevantes
- Concluir que as possíveis abcissas para o ponto $Q$ são aproximadamente 0,37 ou 1,81 ou 3.38

**13.**

- Escrever $P\left(\overline{A} \cup B\right) = P\left(\overline{A}\right) + P\,(B) - P\left(\overline{A} \cap B\right)$
- Escrever $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P\,(A) - P\,(A \cap B)$
- Escrever $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P\,(A)$
- Escrever $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P\,(B) - P\,(A \cap B)$
- Obter $6P\,(A \cap B) = 4P\,(A)$ (ou equivalente)
- Concluir que $P\left(B|A\right) = \dfrac{2}{3}$

**14.**

- Referir (justificar) a continuidade de $g'$ em $[-1, 1]$
- Determinar $g'(-1)$ (1)
- Escrever $f(1) = -3$
- Determinar $g'(1)$ $(-1)$
- Referir que $g'(-1)$ e $g'(1)$ têm sinais contrários (ou equivalente)
- Concluir, pelo teorema de Bolzano, que $g'(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]-1, 1[$
- Concluir que $g$ tem pelo menos um extremo relativo em $]-1, 1[$
- Como $g'(-1) > 0$ e $g'(1) < 0$ concluir que "pelo menos"um dos extremos relativos é máximo relativo

**15.**

- Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[g(x) - 3x - \ln\left(\dfrac{1+e}{e}\right)\right]$
- Obter $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\ln\left(e^{f(x)} + e^{3x}\right) - 3x\right] - \ln\left(\dfrac{1+e}{e}\right)$
- Escrever $e^{f(x)} + e^{3x} = e^{f(x)}\left(1 + e^{-\left(f(x)-3x\right)}\right)$
- Escrever $\ln\left[e^{f(x)}\left(1 + e^{-\left(f(x)-3x\right)}\right)\right] = f(x) + \ln\left[1 + e^{-\left(f(x)-3x\right)}\right]$
- Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - 3x\right) = -1$
- Obter $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\ln\left(e^{f(x)} + e^{3x}\right) - 3x\right] = -1 + \ln(1+e)$
- Escrever $-1 + \ln(1+e) = \ln\left(\dfrac{1+e}{e}\right)$
- Concluir que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[g(x) - 3x - \ln\left(\dfrac{1+e}{e}\right)\right] = 0$ e portanto, a reta de equação $y = 3x + \ln\left(\dfrac{1+e}{e}\right)$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g