**Primeiro teste - Matemática A**
**Ensino Secundário | Novembro de 2021**
12º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 10 minutos. 8 Páginas

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

---

- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

**1.** Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n > 2$ e $p \in \{0, 1, ..., n-2\}$.

Qual das opções seguintes é igual a ${}^{n+1}C_{n-p} -{}^{n} C_p +{}^{n} C_{p+2}$?

**(A)** ${}^{n}C_{p+2}$ **(B)** ${}^{n+1}C_{p+2}$ **(C)** ${}^{n}C_{p+3}$ **(D)** ${}^{n+1}C_{p+3}$

**2.** Considere uma pirâmide reta cuja base é um polígono regular com $n$ lados.

Sabe-se que escolhendo três dos vértices da pirâmide podem ser definidos 29 planos distintos.

Determine o valor de $n$.

**3.** Num saco opaco estão cartões, uns quadrangulares outros circulares, com um algarismo de 1 a 9 inscrito.

Na figura 1, estão exemplificados alguns dos cartões que estão dentro do saco:


Figura 1

Na experiência aleatória que consiste em retirar do saco um cartão, ao acaso, e verificar o seu formato e o número nele inscrito, sabe-se que:

- 40% dos cartões são circulares;
- Dos cartões quadrados, um em cada três, têm inscrito um número par.

**3.1.** Qual é a probabilidade de retirar um cartão quadrado com um número ímpar inscrito?
Apresente o valor pedido na forma de fração irredutível.

**3.2.** Considere o saco com a sua constituição inicial. Sabe-se que estão no saco 60 cartões.
Vão ser extraídos, ao acaso, cinco cartões do saco e colocados lado a lado de modo a formar um número com cinco algarismos.
Qual é a probabilidade desse número ser ímpar e os cartões retirados serem todos quadrados?
Apresente o valor pedido com aproximação às centésimas.

**4.** Seja $\Omega$ o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam $A$ e $B$ dois acontecimentos possíveis de $\Omega$ ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Prove que:

$$P\left[A|\overline{A \cap B}\right] \times \left[1 - P\left(A \cap B\right)\right] + P\left(B\right) \times P\left(A|B\right) = P\left(A\right)$$

**5.** Um dos termos no desenvolvimento de $\left(\pi^2 + \dfrac{1}{\pi}\right)^n$ é $a\pi^7$, com $a \in \mathbb{N}$.

Qual dos seguintes pode ser o valor de $n$?

**(A)** 8 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 16

**6.** No referencial o.n. $Oxyz$ da figura 2 encontra-se representado um prisma quadrangular regular.

Sabe-se que:

- Alguns dos vértices do prisma estão designados pelas letras $A$, $B$, $C$ e $D$
- $\overrightarrow{EA} = (1, 3, 2)$
- $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, -1)$
- o vértice $C$ tem coordenadas $(2, 5, 4)$

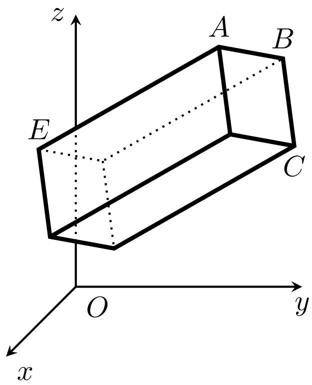


Figura 2

**6.1.** Defina por uma equação o plano paralelo a $ABC$ e que contém o ponto $E$.
Apresente a sua resposta na forma $ax + by + cz + d = 0$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

**6.2.** Os restantes vértices do prisma vão ser designados, ao acaso, pelas letras $D$, $F$, $G$ e $H$.
Qual dos valores seguintes é a probabilidade do plano $EGH$ conter uma das faces do prisma?

**(A)** $\frac{5}{12}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{5}{24}$

**7.** No tabuleiro de xadrez, da figura 3, vão ser colocadas colocadas oito peças de xadrez: três peões pretos, dois peões brancos, o rei branco, a rainha branca e o rei preto, uma peça por cada casa do tabuleiro.

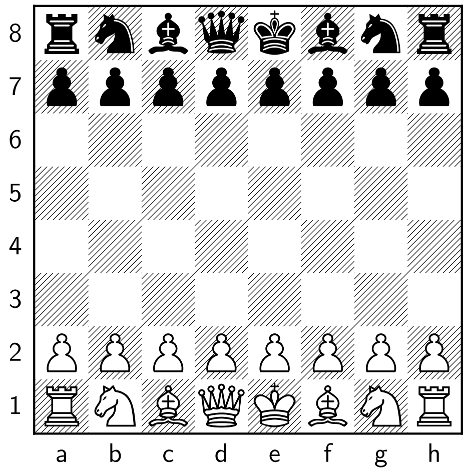


Figura 3

De quantas formas é possível colocar estas oito peças no tabuleiro de modo que elas fiquem na mesma fila, vertical ou horizontal, e as peças da mesma cor fiquem juntas?

**(A)** 512 **(B)** 1536 **(C)** 18432 **(D)** 9216

**8.** Novas matrículas nos automóveis em Portugal estão em circulação desde Março de 2020.

Essas novas matrículas consistem numa sequência de duas letras, seguidas de dois algarismos e novamente seguidas de duas letras.

As letras são escolhidas a partir do alfabeto português, com a inclusão das letras $y$, $k$ e $w$. Ou seja, 26 escolhas possíveis para cada letra.

Os algarismos são escolhidos de entre 0 a 9.

Admita-se que não há restrições para a escolha das sequências de letras, nem para a sequência de algarismos.

Na figura 4 está representado um exemplo destas novas matrículas:


Figura 4

**8.1.** Quantas destas novas matrículas existem (ou poderão existir) de modo a que quando lidas da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda se obtém a mesma sequência?

**8.2.** Do conjunto de todas as novas matrículas possíveis de existir, considere a experiência aleatória que consiste em escolher uma delas ao acaso.
Considere os acontecimentos:

- $A$: "As duas sequências de letras na matrícula escolhida são iguais"
- $B$: "Todas as letras na matrícula são vogais"

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, determine o valor de $P\left(A|B\right)$.
Apresente o valor pedido na forma de fracção irredutível.
**Nota:** Considere que "$y$" é uma vogal.

**9.** Seja $\Omega$ o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam $A$ e $B$ dois acontecimentos possíveis de $\Omega$ ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $A$ e $B$ são equiprováveis
- $P\left(A|B\right) = \dfrac{1}{3}$

Qual dos seguintes é o valor de $P\left(\overline{B}|A\right)$

**(A)** $\dfrac{1}{3}$ **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** $1$ **(D)** $\dfrac{2}{3}$

# FIM

## Cotações

| Itens | 1 | 2 | 3.1 | 3.2 | 4 | 5 | 6.1 | 6.2 | 7 | 8.1 | 8.2 | 9 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cotação (pontos) | 15 | 20 | 15 | 20 | 20 | 15 | 20 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 200 |

# Resoluções

Proposta de resolução do 1.º teste

**1.**

$$^{n+1}C_{n-p} - ^{n}C_p + ^{n}C_{p+2} = ^{n+1}C_{p+1} - ^{n}C_p + ^{n}C_{p+2} = ^{n}C_p + ^{n}C_{p+1} - ^{n}C_p + ^{n}C_{p+2} =$$

$$^{n}C_{p+1} + ^{n}C_{p+2} = ^{n+1}C_{p+2}$$

**Opção B**

**2.**

$$^{n+1}C_3 - ^{n}C_3 + 1 = 29 \Leftrightarrow \frac{(n+1)\times n\times(n-1)}{3!} - \frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{3!} = 28 \Leftrightarrow$$

$$n\times(n-1)\times[n+1-n+2] = 168 \Leftrightarrow n^2 - n - 56 = 0 \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{1\pm\sqrt{1+4\times 56}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1\pm 15}{2} \Rightarrow n = 8$$

**3.** $A$: "O cartão é circular"

$B$: "O cartão tem um número par inscrito"

$$P(A) = 0.4$$
$$P\left(B|\overline{A}\right) = \frac{1}{3}$$

**3.1.** $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) =?$

$$\frac{P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P\left(\overline{A}\cap B\right) = \frac{0.6}{3} \Leftrightarrow P\left(\overline{A}\cap B\right) = 0.2$$

$$P\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{A}\cap B\right) + P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) \Leftrightarrow 0.6 = 0.2 + P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) \Rightarrow P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) = 0.4 = \frac{2}{5}$$

**3.2.** $60\times 0.4 = 24$ cartões circulares

$60 - 24 = 36$ cartões quadrados

$\frac{36}{3} = 12$ cartões quadrados com um número par inscrito

$36 - 12 = 24$ cartões quadrados um número ímpar inscrito

$$p = \frac{24\times ^{35}A_4}{^{60}A_5} \approx 0.05$$

**4.**

$$P\left[A|\overline{A\cap B}\right]\times\left[1-P\left(A\cap B\right)\right]+P\left(B\right)\times P\left(A|B\right)=$$

$$\frac{P\left[A\cap\overline{A\cap B}\right]}{P\left(\overline{A\cap B}\right)}\times P\left(\overline{A\cap B}\right)+P\left(A\cap B\right)=$$

$$P\left[A\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right]+P\left(A\cap B\right)=$$

$$P\left[\left(A\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\right]+P\left(A\cap B\right)=$$

$$P\left[\emptyset\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\right]+P\left(A\cap B\right)=$$

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)$$

**5.**

$$T={}^nC_p\left(\pi^2\right)^{n-p}\times\left(\frac{1}{\pi}\right)^p={}^nC_p\times\pi^{2n-3p}$$

$n$ e $p$ têm que ser inteiros não negativos, com $p\leq n$

Se $n=8$, então $2\times 8-3p=7\Rightarrow 3p=9\Rightarrow p=3\in\mathbb{N}_0$

Se $n=10$, então $2\times 10-3p=7\Rightarrow 3p=13\Rightarrow p=\frac{13}{3}\notin\mathbb{N}_0$

Se $n=12$, então $2\times 12-3p=7\Rightarrow 3p=17\Rightarrow p=\frac{17}{3}\notin\mathbb{N}_0$

Se $n=16$, então $2\times 16-3p=7\Rightarrow 3p=25\Rightarrow p=\frac{25}{3}\notin\mathbb{N}_0$

**Opção A**

**6.**

**6.1.**

$$E=C-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{EA}=(2,5,4)-(-1,1,-1)-(1,3,2)=(2,1,3)$$

$$(x-2)+3\left(y-1\right)+2\left(z-3\right)=0\Leftrightarrow x+3y+2z-11=0$$

**6.2.**

$$p=\frac{\left(2!+{}^3A_2\right)\times 2!}{4!}=\frac{2}{3}$$

**Opção C**

**7.**

$$2\times 8\times 2\times{}^4C_3\times{}^4C_2\times 2!=1536$$

**Opção B**

**8.**

**8.1.**

$$26^2 \times 10 = 6760$$

**8.2.**

$$P\left(A|B\right) = \frac{6^2}{6^4} = \frac{1}{36}$$

**9.**

$$P\left(B\right) = P\left(A\right)$$

$$\frac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{3} \times P\left(B\right) \Leftrightarrow P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{3} \times P\left(A\right)$$

$$P\left(\overline{B}|A\right) = \frac{P\left(\overline{B} \cap A\right)}{P\left(A\right)} = \frac{P\left(A\right) - P\left(A \cap B\right)}{P\left(A\right)} = \frac{P\left(A\right) - \frac{1}{3} \times P\left(A\right)}{P\left(A\right)} = \frac{\frac{2}{3} \times P\left(A\right)}{P\left(A\right)} = \frac{2}{3}$$

**Opção D**