Prova Modelo n.º 10

Proposta de Resolução Provisória

1.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = e^{i\alpha}$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

Qual das opções seguintes pode ser um argumento do complexo $w = -3i \cdot \bar{z}^2$?

(A) $\frac{3\pi}{7}$ $\in 1.^\circ Q$ (B) $\frac{4\pi}{7}$ $\in 2.^\circ Q$ (C) $\frac{8\pi}{7}$ $\in 3.^\circ Q$ (D) $\frac{13\pi}{7}$ $\in 4.^\circ Q$

$z = e^{i\alpha}$ $\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$

- $-3i = 3e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$
- $\bar{z} = e^{i(-\alpha)} \Rightarrow \bar{z}^2 = e^{i(-2\alpha)}$

Logo, $w = -3i\,\bar{z}^2 = 3e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \cdot e^{i(-2\alpha)} = 3e^{i\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)}$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \underset{\times 2}{\Leftrightarrow} 0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -2\alpha < 0 \Leftrightarrow \pi < \frac{3\pi}{2} - 2\alpha < \frac{3\pi}{2}$

$\Downarrow$

O afixo de w pertence ao $3.^\circ Q$

R: C

2. No referencial o.n. xOy da figura 1 encontram-se representados uma reta r e um triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- a reta r é definida por $3x + 4y = 12$
- A e B são os pontos de interseção da reta r com os eixos coordenados
- $[ABC]$ é um triângulo equilátero

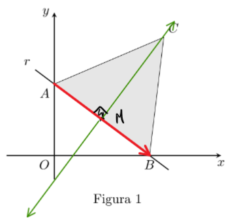


Figura 1

Determine, por processos analíticos, as coordenadas do ponto C.

1) $A(0,y) \in r \Rightarrow 3 \times 0 + 4y = 12 \Leftrightarrow y = 3 \Rightarrow A(0,3)$

$B(x,0) \in r \Rightarrow 3x + 4 \times 0 = 12 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow B(4,0)$

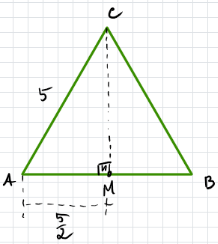
Logo $M_{[AB]}\left(\frac{0+4}{2}, \frac{3+0}{2}\right) = \left(2, \frac{3}{2}\right)$

2) $\vec{AB} = B - A = (4,0) - (0,3) = (4,-3)$

Seja $\vec{u} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{u}$ pode ser $\vec{u}(3,4)$

$\vec{MC}$ é colinear com $\vec{u}$ e a sua norma é igual a altura do triângulo. $\Rightarrow \vec{MC} = K(3,4) = (3K, 4K)$, $K \in \mathbb{R}$

3) $\|\vec{AB}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$



$\overline{MC}^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 5^2$ (Teorema de Pitágoras)

$\Leftrightarrow \overline{MC}^2 = 25 - \frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow \overline{MC}^2 = \frac{75}{4}$

$\underset{MC>0}{\Leftrightarrow} \overline{MC} = \frac{\sqrt{75}}{2} \Leftrightarrow \overline{MC} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \|\vec{MC}\| = \frac{5\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left(\cancel{\sqrt{(3K)^2 + (4K)^2}}\right)^{\cancel{2}} = \underbrace{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2}_{\frac{75}{4}}$

$\Leftrightarrow 9K^2 + 16K^2 = \frac{75}{4} \Leftrightarrow 25K^2 = \frac{75}{4}$

$\Leftrightarrow K^2 = \frac{75}{100} \Leftrightarrow K^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow K = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$

$\Rightarrow K = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ Se $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então $\vec{MC}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3}\right) \Rightarrow C = M + \vec{MC} = \left(2, \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3}\right) = \left(2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right)$

Se $k = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, então $\vec{MC}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -2\sqrt{3}\right) \Rightarrow C = M + \vec{MC} = \left(2, \frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -2\sqrt{3}\right) = \left(\underbrace{2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}}_{<0}, \underbrace{\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}}_{<0}\right)$ ×

$\therefore$ Como C pertence ao 1.º Q, então $C\left(2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right)$.

3.

Na figura 2 está representado um cubo $[ABCDEFGH]$ de aresta a.

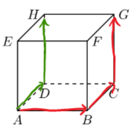


Figura 2

Em função de a, qual é o valor de $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH}$?

(A) a^2 **(B)** $2a^2$ **(C)** $3a^2$ **(D)** $4a^2$

$\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG}$

$\vec{AH} = \vec{AD} + \vec{DH}$

$\vec{AG} \cdot \vec{AH} = \left(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG}\right) \cdot \left(\vec{AD} + \vec{DH}\right) =$

$= \underbrace{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}_{0} + \underbrace{\vec{AB} \cdot \vec{DH}}_{0} + \vec{BC} \cdot \vec{AD} + \underbrace{\vec{BC} \cdot \vec{DH}}_{0} + \underbrace{\vec{CG} \cdot \vec{AD}}_{0} + \vec{CG} \cdot \vec{DH}$

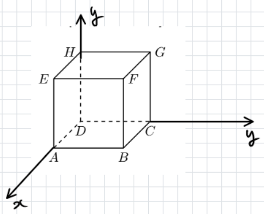
$\vec{AB} \perp \vec{AD}$ $\vec{AB} \perp \vec{DH}$ $\vec{BC} \perp \vec{DH}$ $\vec{CG} \perp \vec{AD}$

$= 0 + 0 + \underbrace{\|\vec{BC}\|}_{a} \times \underbrace{\|\vec{AD}\|}_{a} \times \underbrace{\cos(0^\circ)}_{1} + 0 + 0 + \underbrace{\|\vec{CG}\|}_{a} \times \underbrace{\|\vec{DH}\|}_{a} \times \underbrace{\cos(0^\circ)}_{1}$

$= a \times a \times 1 + a \times a \times 1 = a^2 + a^2 = 2a^2$ //

R: B

Outra maneira:



$A(a, 0, 0)$

$G(0, a, a)$

$H(0, 0, a)$

$\vec{AG} = G - A = (0, a, a) - (a, 0, 0) = (-a, a, a)$

$\vec{AH} = H - A = (0, 0, a) - (a, 0, 0) = (-a, 0, a)$

$\therefore \vec{AG} \cdot \vec{AH} = (-a, a, a) \cdot (-a, 0, a) = a^2 + 0 + a^2 = 2a^2$ //

4.

Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos e i a unidade imaginária.

Sem utilizar a calculadora, determine:

$$w = \frac{(3+2i)^2 + 12i^{2023}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9} + 5e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$5e^{i\frac{\pi}{2}} \rightarrow 5i$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

- $(3+2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$
- $i^{2023} = \underbrace{i^{2020}}_{1} \cdot \underbrace{i^3}_{-i} = -i$
- $\left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

Sendo α um arg. de $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, vem que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

e $\alpha \in$ 1.º Q $\Rightarrow \alpha$ pode ser $\frac{\pi}{3}$

$\therefore \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^9 = e^{i\frac{9\pi}{3}} = e^{i(3\pi)} =$

$= e^{i\pi} = \cos\pi + i\operatorname{sen}\pi = -1 + i \times 0$

$= -1$

Logo, $w = \frac{5 + \cancel{12i} - \cancel{12i}}{-1} + 5i =$

$= -5 + 5i$

$|w| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{\underbrace{25 + 25}_{2 \times 5^2}} = 5\sqrt{2}$

Sendo θ um arg. de w, vem que $\operatorname{tg}\theta = \frac{5}{-5} = -1$

e $\theta \in$ 2.º Q $\Rightarrow \theta$ pode ser $-\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$

$\therefore w = 5\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$ //

5. Sem utilizar a calculadora, determine o conjunto de números reais que satisfazem a inequação:

$$\ln\left[e^x(x+1)\right] \geq x - \log_{\sqrt{e}}\sqrt{x} + \ln(3-x)$$

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais.

$$\frac{\ln\sqrt{x}}{\ln\sqrt{e}} = \frac{\ln x^{\frac{1}{2}}}{\ln e^{\frac{1}{2}}} = \frac{\cancel{\tfrac{1}{2}}\ln x}{\cancel{\tfrac{1}{2}}} = \ln x$$

$x \in D \Rightarrow x > 0$

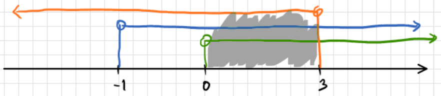
• $D = \{x \in \mathbb{R} : e^x(x+1) > 0 \wedge \sqrt{x} > 0 \wedge 3 - x > 0\} =]0,3[$

$e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

$x > 0$

$-x > -3 \Leftrightarrow x < 3$



Neste domínio D, tem-se $\ln(e^x(x+1)) \geq x - \ln x + \ln(3-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln e^x + \ln(x+1) \geq \cancel{x} - \ln x + \ln(3-x)$

$\Leftrightarrow \ln(x+1) + \ln x \geq \ln(3-x)$

$\Leftrightarrow \ln(x(x+1)) \geq \ln(3-x)$

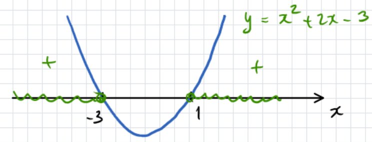
$\Leftrightarrow x^2 + x \geq 3 - x \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geq 0 \wedge x \in D$

C.A.: $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

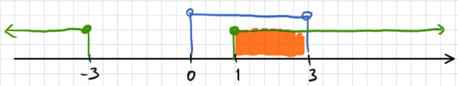
$\Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$



$\therefore x^2 + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$

Intersectando com o domínio, vem:



$\therefore$ O conj. solução é $[1, 3[$

6.

Uma turma de 12.º ano de uma escola tem 24 alunos, dos quais 8 são rapazes.

Duas das alunas dessa turma são irmãs gémeas.

6.1. Para organizar a viagem de finalistas, vai ser constituída uma comissão de cinco alunos da turma.

De quantas formas se pode formar a comissão se pelo menos uma das gémeas tiver que fazer parte dela?

(A) 16170 **(B)** 17710 **(C)** 14630 **(D)** 26334

6.2. Numa palestra organizada para a turma, os alunos vão sentar-se numa sala onde estão três filas de cadeiras, com 10 lugares em cada fila.

Supondo que os alunos se distribuem ao acaso pelos 30 lugares disponíveis, determine a probabilidade de em cada uma das filas ficarem apenas elementos do mesmo sexo.

Apresente uma expressão cujo valor dá o resultado pretendido.

24 alunos → 8 rapazes; 16 raparigas → existem duas irmãs gémeas

6.1. G_1 e $\overline{G_2}$ ou $\overline{G_1}$ e G_2 ou G_1 e G_2

$${}^{1}C_1 \times {}^{22}C_4 + {}^{1}C_1 \times {}^{22}C_4 + {}^{2}C_2 \times {}^{22}C_3 = 16170$$

ou $\underbrace{{}^{24}C_5}_{\text{Todos os grupos possíveis}} - \underbrace{{}^{22}C_5}_{\text{Total de grupos sem as gémeas}} = 16170$

R: A

6.2. n.c.p: ${}^{30}C_{24} \times 24! = {}^{30}A_{24}$

n.c.f: $\underbrace{{}^{3}C_1}_{\text{escolher a fila para os rapazes}} \times \underbrace{{}^{10}C_8 \times 8!}_{\text{escolher oito dos dez lugares dessa fila e permutá-los}} \times {}^{20}C_{16} \times 16! = 3 \times {}^{10}A_8 \times {}^{20}A_{16}$

$$\therefore P = \frac{3 \times {}^{10}A_8 \times {}^{20}A_{16}}{{}^{30}A_{24}}$$

7. Seja (a_n) a sucessão de termo geral:

$$a_n = \frac{2^{n+2} + n \times 2^{n+1} + 1}{2^n}$$

Determine a soma dos 100 primeiros termos de (a_n).

Apresente o valor pedido na forma $\frac{a \times b^c - 1}{b^c}$, com $a, b, c \in \mathbb{N}$.

$$a_n = \frac{2^{n+2}}{2^n} + \frac{n \times 2^{n+1}}{2^n} + \frac{1}{2^n} =$$

$$= 2^{\cancel{n}+2-\cancel{n}} + n \times 2^{\cancel{n}+1-\cancel{n}} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 4 + 2n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \underbrace{2n+4}_{u_n} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{v_n} = \underbrace{u_n}_{\text{p.a.}} + \underbrace{v_n}_{\text{p.g.}}$$

- $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 4 - 2n - 4 = \cancel{2n} + 2 + \cancel{4} - \cancel{2n} - \cancel{4} = 2$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (u_n)$ é p.a. de razão 2

- $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\cancel{n}+1-\cancel{n}} = \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (v_n)$ é p.g. de razão $\frac{1}{2}$

$$\therefore\ a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_{100} + v_{100}) =$$

$$= \underbrace{(u_1 + u_2 + \dots + u_{100})}_{\frac{u_1 + u_{100}}{\cancel{2}} \times \overset{50}{\cancel{100}}} + \underbrace{(v_1 + v_2 + \dots + v_{100})}_{v_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{1 - \frac{1}{2}}}$$

C.A.

$u_1 = 2 \times 1 + 4 = 6$

$u_{100} = 2 \times 100 + 4 = 204$

$v_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

$$= (6 + 204) \times 50 + \cancel{\frac{1}{2}} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{\cancel{\frac{1}{2}}}$$

$$= 10500 + 1 - \frac{1}{2^{100}} = 10501 - \frac{1}{2^{100}} = \frac{10501 \times 2^{100} - 1}{2^{100}}$$

8.

Na figura 3 está representado em referencial o.n. $Oxyz$ um triângulo $[PQR]$ e um paralelepípedo.

Sabe-se que:

- o plano PQR é definido por $21x + 14y + 6z = 42$
- P, Q e R são vértices do paralelepípedo e pertencem aos eixos coordenados
- o paralelepípedo é retângulo e as arestas são paralelas ao eixos coordenados

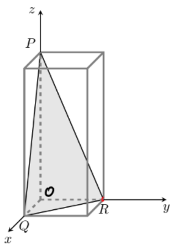


Figura 3

8.1. Determine o volume do paralelepípedo.

8.2. Defina por uma condição a superfície esférica centrada no ponto S de coordenadas $(17, 20, 13)$ e tangente ao plano PQR.

8.1

- $Q \in Ox \Rightarrow Q(x, 0, 0)$ e $Q \in PQR$

$\Rightarrow 21x + 14 \times 0 + 6 \times 0 = 42 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow Q(2, 0, 0)$

$\Rightarrow \overline{OQ} = 2$

- $R \in Oy \Rightarrow R(0, y, 0)$ e $R \in PQR$

$\Rightarrow 21 \times 0 + 14y + 6 \times 0 = 42 \Leftrightarrow y = 3 \Rightarrow R(0, 3, 0)$

$\Rightarrow \overline{OR} = 3$

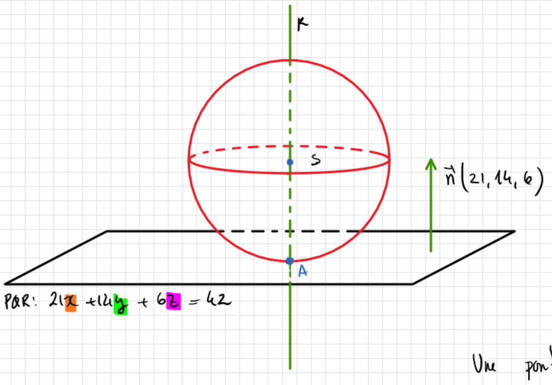
- $P \in Oz \Rightarrow P(0, 0, z)$ e $P \in PQR$

$\Rightarrow 21 \times 0 + 14 \times 0 + 6z = 42 \Leftrightarrow z = 7 \Rightarrow P(0, 0, 7)$

$\Rightarrow \overline{OP} = 7$

$$\therefore\ V_{\text{paralelepípedo}} = \overline{OQ} \times \overline{OR} \times \overline{OP} = 2 \times 3 \times 7 = 42$$

8.2.



Seja r a recta perpendicular a PαR que contém S

r intersecta PαR num ponto A tal que

$\overline{AS}$ é a medida do raio da S.E.

Como $r \perp$ PαR, um vector director de r é $\vec{n}(21,14,6)$

Pelo que r: $(x,y,z) = \underbrace{(17,20,13)}_{S} + k(21,14,6),\ k \in \mathbb{R}$

Um ponto genérico de r é $(17+21k,\ 20+14k,\ 13+6k),\ k \in \mathbb{R}$

Substituindo na equação de PαR, vem:

$$21(17+21k)+14(20+14k)+6(13+6k)=42 \Leftrightarrow 357+441k+280+196k+78+36k=42 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 673k=-673 \Leftrightarrow k=-1$$

Logo, $A(17+21\times(-1),\ 20+14\times(-1),\ 13+6\times(-1))$, ou seja, $A(-4,6,7)$ e portanto:

$$\overline{AS} = \sqrt{(17+4)^2+(20-6)^2+(13-7)^2} = \sqrt{673}$$

$\therefore$ Equação da S.E.: $(x-17)^2+(y-20)^2+(z-13)^2 = \underset{(\sqrt{673})^2}{673}$

9.

Considere a função g, de domínio $]-\infty,\pi]$, definida à custa de um parâmetro a não nulo, por:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(ax)}{e^x+x-1} & \text{se } x<0\\ e^{\sqrt{3}x+\sqrt{3}\sin x+\cos x} & \text{se } 0\le x\le\pi\end{cases}$$

9.1. Qual dos seguintes é o valor de a para o qual g é contínua em $x=0$?

(A) 1 **(B)** e **(C)** $2e$ **(D)** $3e$

9.2. Para $x\in]0,\pi]$, estude g quanto à monotonia e existência de extremos relativos. Na sua resposta, apresente os intervalos de monotonia e o(s) maximizante(s) e minimizante(s), caso existam.

9.1. g é contínua em $x=0$ se

$$\lim_{x\to0^-} g(x) = \lim_{x\to0^+} g(x) = g(0) \quad \hookrightarrow e^{\overset{0}{\sqrt{3}\times0}+\overset{0}{\sqrt{3}\sin(0)}+\overset{1}{\cos(0)}}=e$$

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = e^{\overset{0}{\sqrt{3}\times0}+\overset{0}{\sqrt{3}\sin(0)}+\overset{1}{\cos(0)}}=e$$

$$\lim_{x\to0^-} g(x) = \lim_{x\to0^-}\frac{\sin(ax)}{e^x+x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to0^-}\frac{\frac{\sin(ax)}{ax}\cdot a x}{\frac{e^x+x-1}{x}} =$$

$x\to0 \Rightarrow ax\to0$

$$= \lim_{x\to0^-}\frac{a\,\frac{\sin(ax)}{ax}}{\frac{e^x-1}{x}+\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}} = \frac{a\,\overbrace{\lim_{x\to0^-}\frac{\sin(ax)}{ax}}^{\text{L.N.}}}{\underbrace{\lim_{x\to0^-}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{L.N.}}+1} = \frac{a\times1}{1+1} = \frac{a}{2}$$

$\therefore \frac{a}{2}=e \Leftrightarrow a=2e$

R: C

9.2. Para $x\in]0,\pi]$, $g(x)=e^{\sqrt{3}x+\sqrt{3}\sin x+\cos x}$

- $g'(x) = \left(\sqrt{3}x+\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)' e^{\sqrt{3}x+\sqrt{3}\sin x+\cos x}$

$$=\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)e^{\sqrt{3}x+\sqrt{3}\sin x+\cos x}$$

- $g'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}+\sqrt{3}\cos x-\sin x=0 \ \vee\ \underbrace{e^{\sqrt{3}x+\sqrt{3}\sin x+\cos x}=0}_{\text{impossível em } \mathbb{R}}$

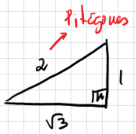
NOTA: $\sqrt{3}\cos x-\sin x=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x=\sin x$

$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x=\sqrt{3}$

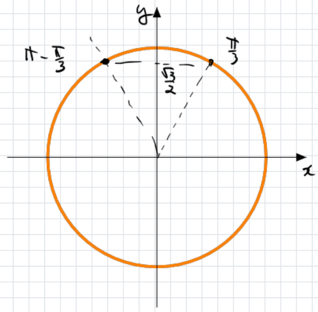
$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{R}$



$\Leftrightarrow -\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{3}$

$\underset{\div(-2)}{\Leftrightarrow} \operatorname{sen} x \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos\frac{\pi}{3}} - \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{sen} x \cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos x}_{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ x = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Como $x \in \left]0, \pi\right]$ vem que $x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \pi$

Como $x \in \left]0, \pi\right]$ vem que $x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \pi$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$g'(x)$	n.d.	$+$	0	$-$	0
g	n.d.	↗	Máx	↘	Mín

$\therefore$ Em $\left]0, \pi\right]$ g é crescente em $\left]0, \frac{2\pi}{3}\right]$, é decrescente em $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$, tem máximo em $x = \frac{2\pi}{3}$ (maximizante) e mínimo em $x = \pi$ (minimizante)

10. $\lim a_{n+1} = \lim a_n = S$

$\lim a_{n+1} = \lim\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \Leftrightarrow S = 1 + \frac{1}{\lim a_n} \Leftrightarrow S = 1 + \frac{1}{S} \underset{\times S}{\Leftrightarrow} S^2 = S + 1 \ \wedge \ S \neq 0$

$\Leftrightarrow S^2 - S - 1 = 0 \ \wedge \ S \neq 0$

$\Leftrightarrow S = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \ \wedge \ S \neq 0$

R: D

Como $a_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$, vem que $\lim a_n = S = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ //

11. Na figura 4 encontram-se representados um quarto de círculo de raio 2 e um quadrilátero $[OABC]$.

Sabe-se que:

- A é um ponto fixo no arco PQ tal que a amplitude to ângulo POA é $\frac{\pi}{6}$ rad
- C é um ponto móvel que se desloca ao longo do arco AQ nunca coincidindo com o ponto A
- B acompanha o movimento de C de modo que ABC se mantém reto
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo AOC, com $x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$

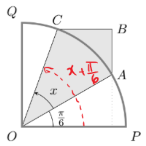
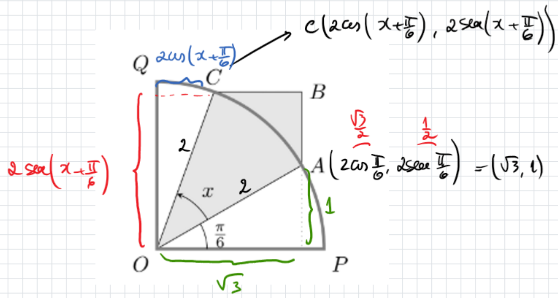


Figura 4

Seja f, a função que a cada valor de x, faz corresponder o perímetro do quadrilátero $[OABC]$.

Mostre que $f(x) = 3 + \sqrt{3} + \left(1+\sqrt{3}\right)\sin x + \left(1-\sqrt{3}\right)\cos x,\ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$.



$$P_{[OABC]} = \underbrace{\overline{OA}}_{2} + \underbrace{\overline{AB}}_{2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1} + \underbrace{\overline{BC}}_{\sqrt{3}-2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} + \underbrace{\overline{OC}}_{2}$$

$$= 2 + 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - 1 + \sqrt{3} - 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) + 2$$

$$= 3+\sqrt{3} + 2\left(\sin x \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cos x\right) - 2\left(\cos x \cos\frac{\pi}{6} - \sin x \sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 3+\sqrt{3} + \cancel{2}\left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} + \frac{1}{\cancel{2}}\cos x\right) - \cancel{2}\left(\cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} - \sin x \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\right)$$

$$= 3+\sqrt{3} + \sqrt{3}\sin x + \cos x - \sqrt{3}\cos x + \sin x$$

$$= 3+\sqrt{3} + \underbrace{\sqrt{3}\sin x + \sin x}_{\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x} + \underbrace{\cos x - \sqrt{3}\cos x}_{\left(1-\sqrt{3}\right)\cos x} = 3+\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}+1\right)\sin x + \left(1-\sqrt{3}\right)\cos x \;//$$

12.

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x - x\ln x$.

Seja O a origem do referencial, P o ponto do gráfico de f com ordenada nula e Q um ponto que se desloca ao longo do gráfico de f, nunca sendo igual ao ponto P.

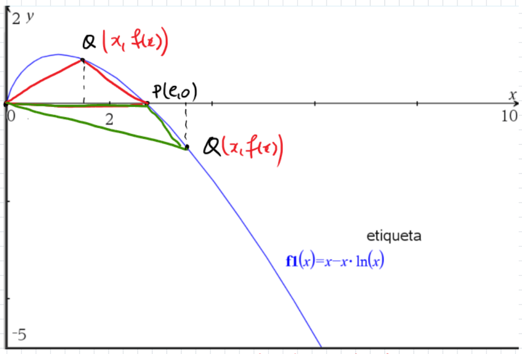
Considere A a função que a cada abcissa x do ponto Q, faz corresponder a área do triângulo $[OPQ]$.

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora determine, com aproximação às centésimas, as abcissas do ponto Q de modo que a área do triângulo $[OPQ]$ seja igual a 1.

Na sua resposta deve:

- Determinar, analiticamente, a abcissa do ponto P
- Apresentar uma expressão algébrica que defina $A(x)$ e equacionar o problema
- Resolver o problema graficamente, apresentando os gráficos visualizados na calculadora e pontos relevantes
- Indicar as possíveis abcissas do ponto Q

1) Definir $y_1 = x - x\ln x$ na janela $[0,10]\times[-5,2]$

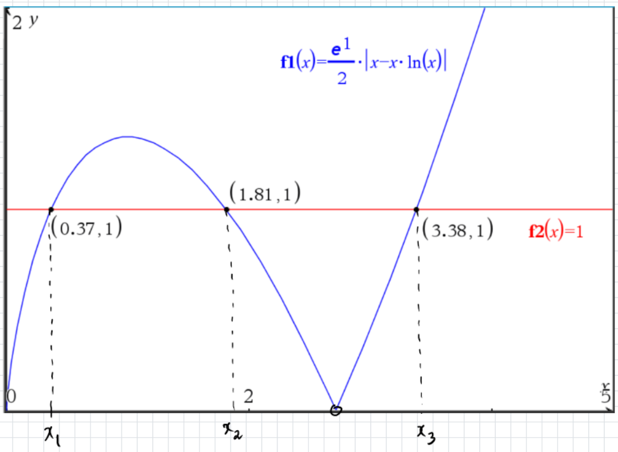


- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - x\ln x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x(1-\ln x) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \lor 1 - \ln x = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \lor \ln x = 1$
$\Leftrightarrow x = 0 \lor x = e \Rightarrow P(e,0)$

- $A(x) = \dfrac{\overset{e}{\overline{OP}} \times \overset{|f(x)| = |x - x\ln x|}{|y_Q|}}{2} = \dfrac{e}{2}\cdot|x - x\ln x|,\ x \neq e$

- Pretende-se $x \in \mathbb{R}^+ : A(x) = 1$

- Definir $y_1 = A(x)$ e $y_2 = 1$ na janela $[0,5]\times[0,2]$



$A(x)=1 \Leftrightarrow x = x_1 \vee x = x_2 \vee x = x_3$,

em que $x_1 \approx 0{,}37$, $x_2 \approx 1{,}81$ e $x_3 \approx 3{,}38$

13. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), de probabilidade não nula.
Sabe-se que:

$$2P(A) + P\left(\overline{A} \cup B\right) = 1 + 5P\left(A \cap \overline{B}\right)$$

Determine a probabilidade de B acontecer, sabendo que A aconteceu.
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \underset{*}{=} \frac{\frac{2}{3}\cancel{P(A)}}{\cancel{P(A)}} = \frac{2}{3}$$

$$2P(A) + \boxed{P(\overline{A}\cup B)} = 1 + 5\overbrace{P(A\cap\overline{B})}^{P(A)-P(A\cap B)} \Leftrightarrow 2P(A) + \boxed{\overbrace{P(\overline{A})}^{1-P(A)} + P(B) - \underbrace{P(\overline{A}\cap B)}_{P(B)-P(A\cap B)}} = 1 + 5\left(P(A) - P(A\cap B)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2P(A) + \cancel{1} - P(A) + \cancel{P(B)} - \cancel{P(B)} + P(A\cap B) = \cancel{1} + 5P(A) - 5P(A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A) - 5P(A) = -P(A\cap B) - 5P(A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow -4P(A) = -6P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A\cap B) = \underbrace{\frac{4}{6}}_{\frac{2}{3}} P(A) \quad *$$

14. Sejam f e g duas funções, de domínio $[-1,1]$, tais que:

- f é contínua
- f é ímpar com contradomínio $[-3,3]$
- $f(-1) = 3$
- g é derivável, sendo $g'(x) = \log_2[f(x)+5] - 2$

Mostre que g admite, pelo menos, um máximo relativo em $]-1,1[$.

Vamos começar por mostrar que g' tem pelo menos um zero. $\rightarrow \exists\, c \in]-1,1[: g'(c) = 0$

- f é ímpar $\Rightarrow \forall x, -x \in [-1,1]$, $f(-x) = -f(x)$
- $D'_f = [-3,3] \Rightarrow \forall x \in [-3,3]$, $-3 \leq f(x) \leq 3$
- $f(-1) = 3$, como $\underbrace{f(-1)}_{3} = -f(1)$, vem que $f(1) = -3$

- g' é contínua em $[-1,1]$ pois é a composição, a soma e diferença entre funções contínuas no seu domínio
- $g'(-1) = \log_2(f(-1)+5) - 2 = \log_2(3+5) - 2 = \overbrace{\log_2 8}^{\log_2 2^3 = 3} - 2 = 3 - 2 = 1 \Rightarrow g'(-1) > 0$

$g'(1) = \log_2(f(1)+5) - 2 = \log_2(-3+5) - 2 = \overbrace{\log_2 2}^{1} - 2 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow g'(1) < 0$

∴ Como g' é contínua em $[-1,1]$, $g'(-1)$ e $g'(1)$ têm sinais contrários $\left(\Rightarrow g'(-1) \times g'(1) < 0\right)$, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, g' tem pelo menos um zero. A sua abcissa poderá ser um maximizante ou um minimizante de g. Se este zero for único, terá de ser, necessariamente, um maximizante de g, pois $g'(-1) > 0$ e $g'(1) < 0$, é o seguinte caso:

zero de g'

x	-1		c		1
$g'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
g	Mín	↗	Máx	↘	Mín

∴ g tem pelo menos um máximo.

15.

Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que:

- A reta de equação $y = 3x - 1$ é assíntota do gráfico de f
- $g(x) = \ln\left(e^{f(x)} + e^{3x}\right)$

Mostre que a reta de equação $y = 3x + \ln\left(\frac{1+e}{e}\right)$ é assíntota do gráfico de g.

A reta de equação $y = 3x - 1$ é A.O. ao gráfico de f, quando $x \to +\infty$.

Então:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 3x) = -1$

O declive, m, da assíntota ao gráfico de g é dado por:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(e^{f(x)} + e^{3x}\right)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(e^{3x}\left(e^{f(x)-3x} + 1\right)\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{\ln e^{3x}}^{3x} + \ln\left(e^{f(x)-3x} + 1\right)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} + \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(e^{f(x)-3x} + 1\right)}{x}$$

$$= 3 + \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(e^{f(x)-3x} + 1\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} x} = 3 + \frac{\ln\left(e^{\overbrace{\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x)-3x)}^{-1}} + 1\right)}{+\infty} = 3 + \underbrace{\frac{\ln\left(e^{-1} + 1\right)}{+\infty}}_{0} =$$

$y = \ln x$ e $y = e^x$ são contínuas

$$= 3 + 0 = 3$$

A ordenada na origem, b, é dada por:

$$b = \lim_{x \to +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{\ln\left(e^{f(x)} + e^{3x}\right)} - 3x \right) =$$

$$\ln\left(e^{3x}\left(e^{f(x)-3x}+1\right)\right) = \underbrace{\ln e^{3x}}_{3x} + \ln\left(e^{f(x)-3x}+1\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\cancel{3x} + \ln\left(e^{f(x)-3x}+1\right) - \cancel{3x} \right) = \ln\left(e^{\overbrace{\lim_{x \to +\infty}(f(x)-3x)}^{-1}} + 1\right)$$

$y = \ln x$ e $y = e^x$ são contínuas

$$= \ln\left(e^{-1}+1\right) = \ln\left(\frac{1}{e}+1\right) = \ln\left(\frac{1+e}{e}\right)$$

$\therefore$ A recta de equação $y = 3x + \ln\left(\frac{1+e}{e}\right)$ é A.O. ao gráfico de g, quando $x \to +\infty$.

FIM