

Proposta de Exame Nacional de Matemática A - 12.º Ano

Carlos Frias

2 de fevereiro de 2025

Duração: 150 minutos

Data: _____

Nome: _____

Número: _____

Instruções:

- O exame é constituído por dois grupos: Grupo I e Grupo II.
- No Grupo I, para cada questão, indique a única opção correta.
- No Grupo II, apresente todos os cálculos e justificações necessárias.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor.
- É permitido o uso de calculadora gráfica.

Grupo I

Questões de Escolha Múltipla

Para cada uma das questões deste grupo, selecione a única opção correta.

1. Considere uma função f , cuja derivada é definida por $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$. Qual é o valor do limite seguinte?

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4}$$

- A. $\frac{5}{4}$
- B. $\frac{7}{4}$
- C. $\frac{9}{4}$
- D. $\frac{11}{4}$

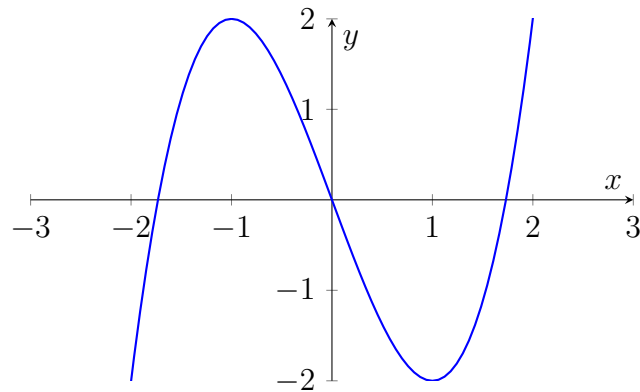
2. Qual das expressões seguintes define a derivada de $f(x) = e^{2x} \cdot \ln(x)$?

- A. $f'(x) = 2e^{2x} \cdot \ln(x) + \frac{e^{2x}}{x}$
- B. $f'(x) = e^{2x} \cdot \ln(x) + \frac{e^{2x}}{x}$
- C. $f'(x) = 2e^{2x} \cdot \ln(x) - \frac{e^{2x}}{x}$
- D. $f'(x) = e^{2x} \cdot \ln(x) - \frac{e^{2x}}{x}$

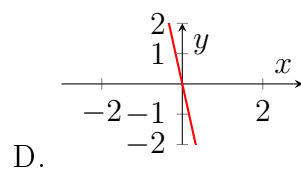
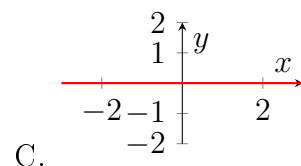
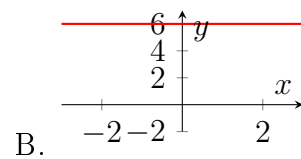
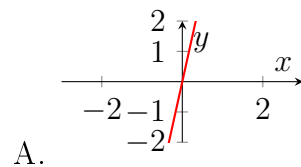
3. Qual é o valor de $\int_0^1 x^2 dx$?

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{1}{3}$
- C. $\frac{1}{4}$
- D. $\frac{1}{5}$

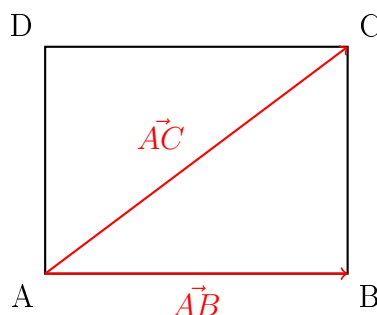
4. Considere o gráfico da função f representado abaixo:



Qual dos seguintes gráficos representa a segunda derivada f'' da função f ?



5. Considere o retângulo $[ABCD]$ representado abaixo:



Sabe-se que a área do retângulo é 12 e o perímetro é 14. Qual é o valor do produto escalar entre os vetores \vec{AB} e \vec{AC} ?

- A. 12
- B. 14
- C. 16
- D. 18

Grupo II

Questões de Desenvolvimento

Nas questões deste grupo, apresente todos os cálculos e justificações necessárias.

1. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 3x + 2)$.
 - (a) Determine os zeros da função f .
 - (b) Estude f quanto à monotonia, identificando os intervalos onde a função é crescente ou decrescente. Determine também a existência de extremos relativos (máximos ou mínimos relativos), caso existam.
2. Considere a função $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$.
 - (a) Mostre que a derivada de g é dada por $g'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.
 - (b) Estude a concavidade da função e identifique os pontos de inflexão, caso existam.
3. Resolva a seguinte inequação:

$$\log_2(x) + \log_2(x - 2) \geq 3$$

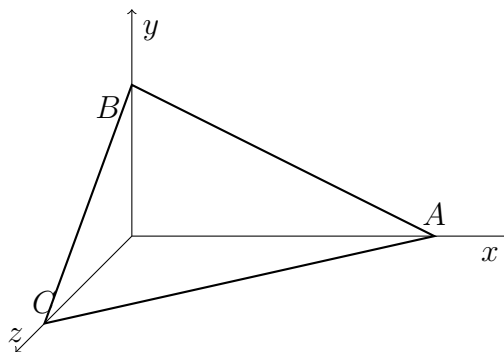
Apresente a solução na forma de intervalos ou união de intervalos.

4. Numa turma de 12.^o ano, há 20 alunos, dos quais 12 são raparigas e 8 são rapazes. O professor vai escolher aleatoriamente 4 alunos para formar uma comissão.
 - (a) Quantas comissões diferentes podem ser formadas?
 - (b) Qual é a probabilidade de a comissão ser constituída por 2 raparigas e 2 rapazes?

- (c) Qual é a probabilidade de a comissão incluir pelo menos uma rapariga?
5. Considere a equação trigonométrica:

$$2 \sin^2(x) - 3 \sin(x) + 1 = 0$$

- (a) Mostre que a equação pode ser escrita na forma $(2 \sin(x) - 1)(\sin(x) - 1) = 0$.
- (b) Resolva a equação no intervalo $[0, 2\pi]$.
6. No espaço tridimensional, considere os pontos $A(4, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ e $C(0, 0, 3)$.



- (a) Mostre que o plano ABC é definido por $3x + 6y + 4z = 12$.
- (b) Escreva uma condição que defina a esfera de centro $O(0, 0, 0)$ e tangente ao plano ABC .

Fim do Exame