Proposta de resolução - Prova Modelo 4

Grupo I

1. $P(A) = P(C)$

   $P(A \cap B) + 5P(C) = 2P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 2P(B) - 5P(C)$

   $P(A \cup B) = 3P(C) \Leftrightarrow$

   $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3P(C) \Leftrightarrow$

   $P(C) + P(B) - 2P(B) + 5P(C) = 3P(C) \Leftrightarrow$

   $P(B) = 3P(C)$

   $P(A \cap B) = 2P(B) - 5P(C) = P(C)$

   $P\left(A|B\right) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(C)}{3P(C)} = \dfrac{1}{3}$

   Opção C

2. $a = 1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

   $\mu = 0 \times \dfrac{1}{6} + 1 \times \dfrac{1}{3} + 2 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{3}$

   $\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{6} \times \left(0 - \dfrac{4}{3}\right)^2 + \dfrac{1}{3} \times \left(1 - \dfrac{4}{3}\right)^2 + \dfrac{1}{2} \times \left(2 - \dfrac{4}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

   Opção A

3. $\overline{AB} = \dfrac{6}{3} = 2$

   $\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow 2\overline{OA}^2 = 4 \Rightarrow \overline{OA} = \sqrt{2}$

   $A\left(\sqrt{2},\ 0,\ 0\right)$

   $B\left(0,\ \sqrt{2},\ 0\right)$

   $C\left(0,\ 0,\ \sqrt{2}\right)$

   Seja $\overrightarrow{n} = (a,\ b,\ c) \perp ABC$

   $$\begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a,\ b,\ c) \cdot \left(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}, 0\right) = 0 \\ (a,\ b,\ c) \cdot \left(-\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}a + \sqrt{2}b = 0 \\ -\sqrt{2}a + \sqrt{2}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ c = a \end{cases}$$

   $\overrightarrow{n} = (a,\ a,\ a)\,,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   Se $a = 1$, tem-se $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ 1)$

   R: $x - \sqrt{2} = y = z$

   Opção C

4. $u_3 = \ln(u_2) + \ln(u_1) = \ln 3 + \ln 2 = \ln 6$

   $u_4 = \ln(u_3) + \ln(u_2) = \ln(\ln 6) + \ln 3 = \ln(3 \ln 6) = \ln\left(\ln 6^3\right) = \ln\left[\ln(216)\right]$

   Opção D

5. $f'(1) = 3$

$f''(1) = 4$

$(2,\ 0) \in t$

$(0,\ -1) \in t$

$m_t = \dfrac{0+1}{2-0} = \dfrac{1}{2} = g'(4)$

$t: y = \frac{1}{2}x - 1$

$g(4) = \dfrac{1}{2} \times 4 - 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f'\left[g(x)\right] - 3}{x - 4} = \dfrac{\left(f' \circ g\right)(x) - \left(f' \circ g\right)(4)}{x - 4} = \left(f' \circ g\right)'(4) = f''\left(g(4)\right) \times g'(4) = f''(1) \times \dfrac{1}{2} =$
$4 \times \dfrac{1}{2} = 2$

Opção B

6. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow \log_2(x+2) > \log_{\sqrt{2}} x \Leftrightarrow \log_2(x+2) > \dfrac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} \Leftrightarrow \log_2(x+2) > 2\log_2 x \Leftrightarrow$
$\log_2(x+2) > \log_2\left(x^2\right) \Leftrightarrow x + 2 > x^2 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 > 0$

C.A.

$-x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$

$D = \mathbb{R}^+$

$S =]0,\ 2[$

Opção A

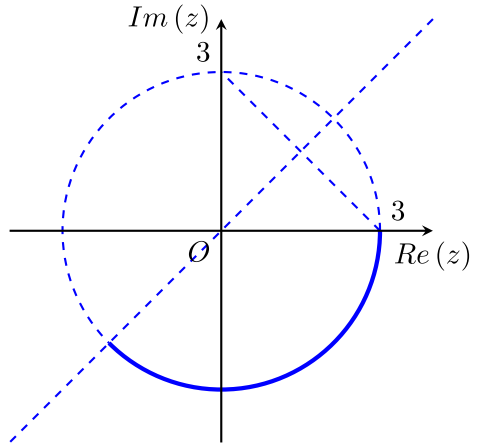
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[2x + \dfrac{1}{e^x} + 3h(x) - \dfrac{\ln x}{x}\right] = 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(3h(x) + 2x\right) + \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} - \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 3 \Leftrightarrow$
$3 \lim\limits_{x \to +\infty} \left(h(x) + \dfrac{2}{3}x\right) + \dfrac{1}{e^{+\infty}} - 0 = 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left[h(x) - \left(-\dfrac{2}{3}x + 1\right)\right] = 0$

$r\colon\ y = -\dfrac{2}{3}x + 1$

Opção D

8.

$$|z - 3i| \geq |z - 3| \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 0 \wedge |z| = 3$$



Opção B

Grupo II

1. $(-z)^n + (\overline{z})^n = \left[\rho e^{(\theta+\pi)i}\right]^n + \left[\rho e^{(-\theta)i}\right]^n = \rho^n \left[e^{(n\theta+n\pi)i} + e^{(-n\theta)i}\right] =$
$\rho^n \left[\cos(n\theta + n\pi) + i\sin(n\theta + n\pi) + \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right] =$
$\rho^n \left[\cos(n\theta + n\pi) + i\sin(n\theta + n\pi) + \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)\right]$

    - Se n é par, então $\cos(n\theta + n\pi) = \cos(n\theta)$ e $\sin(n\theta + n\pi) = \sin(n\theta)$. Assim,
    $(-z)^n + (\overline{z})^n = \rho^n \left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) + \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)\right] =$
    $2\rho^n \cos(n\theta)$, que é um número real.
    - Se n é ímpar, então $\cos(n\theta + n\pi) = -\cos(n\theta)$ e $\sin(n\theta + n\pi) = -\sin(n\theta)$. Assim,
    $(-z)^n + (\overline{z})^n = \rho^n \left[-\cos(n\theta) - i\sin(n\theta) + \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)\right] =$
    $-2i\rho^n \sin(n\theta)$, que é um imaginário puro.

2. 2.1. t.m.v.$_{\left[\frac{1}{e},\ e^2\right]} = \dfrac{f\left(e^2\right) - f\left(\frac{1}{e}\right)}{e^2 - \frac{1}{e}} = \dfrac{e^2(1-2) - \frac{1}{e}(1+1)}{\frac{e^3-1}{e}} = \dfrac{-e^2 - \frac{2}{e}}{\frac{e^3-1}{e}} = \dfrac{-\frac{e^3+2}{e}}{\frac{e^3-1}{e}} = \dfrac{e^3+2}{1-e^3}$

    2.2. $f'(x) = 1 - \ln x + x\left(0 - \dfrac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$
    $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1	$+\infty$
f'	n.d.	$+$	0	$-$
f	n.d.	$\uparrow$	Máx.	$\downarrow$

    f é estritamente crescente em $]0,\ 1]$
    f é estritamente decrescente em $[1,\ +\infty[$
    $f(1)$ é máximo relativo.

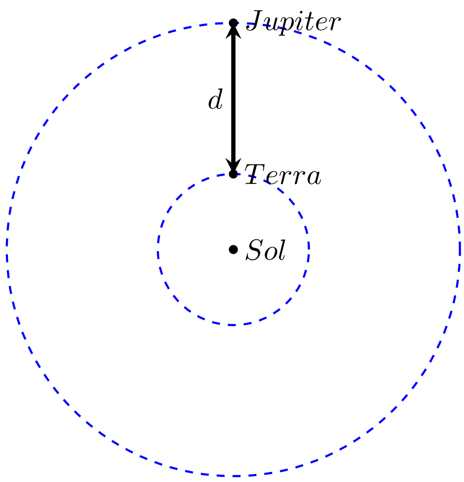
    2.3. g é contínua em $x = 0$ se e só se $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = g(0)$
    $g(0) = 0$
    $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x(1 - \ln x) = \lim\limits_{y\to +\infty} \dfrac{1}{y}\left(1 - \ln\left(\dfrac{1}{y}\right)\right) \lim\limits_{y\to+\infty}\left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{\ln y}{y}\right) = \lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{y} +$
    $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln y}{y} = 0 + 0 = 0$
    $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{e^x - 1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} =$
    $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x} \times \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = 1 \times \dfrac{0}{1+1} = 0$
    Como $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = g(0)$ então g é contínua em $x = 0$.

3. $h'(x) = 1 + \cos x e^{\sin x}$
$m_r = 1 \Leftrightarrow h'(a) = 1 \Leftrightarrow 1 + \cos a e^{\sin a} = 1 \Leftrightarrow \cos a e^{\sin a} = 0 \Leftrightarrow \cos a = 0 \vee \underbrace{e^{\sin a} = 0}_{eq.imp.} \Leftrightarrow$
$a = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
A única solução em $[0,\ \pi]$ é $a = \dfrac{\pi}{2}$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+e^{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+e$$

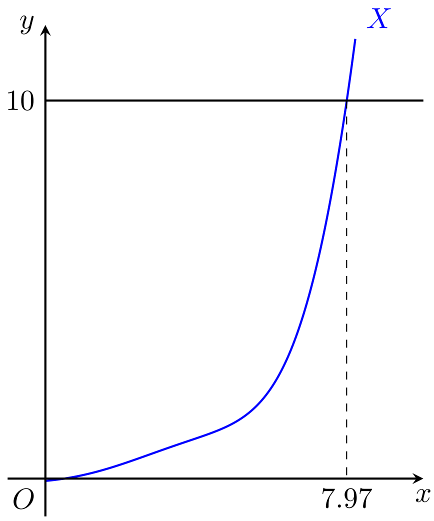
$$y-\frac{\pi}{2}-e=1\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y=x+e$$

4. 4.1.



$d=\big(X\left(7\right)-X\left(4\right)\big)\times 150=$
$\left[e^{0.422\times 7}\left[0.36\sin\left(9\times 6.5\right)+0.08\sin\left(49.5\times 6.5\right)\right]-e^{0.422\times 4}\left[0.36\sin\left(9\times 3.5\right)+0.08\sin\left(49.5\times 3.5\right)\right]\right]\times$
$150\approx 581$ milhões de quilómetros.

4.2. 1.5 milhões de quilómetros $=10$ u.a
$X\left(n\right)=10$



O asteróide está mais próximo da órbita de Saturno.

5. 5.1. $0^2+0^2-6\times 0-2a\times 0=16-a^2\Leftrightarrow a^2=16\Rightarrow a=4$
$x^2+y^2-6x-8y=0\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2-8y+16=25\Leftrightarrow\left(x-3\right)^2+\left(y-4\right)^2=25$
$C\left(3,\ 4\right)$ e $r=5$

5.2. $A_{\text{Setor circular}}=\frac{\alpha}{2}r^2\Leftrightarrow\frac{25\pi}{6}=\frac{\alpha}{2}\times 5^2\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow A\hat{C}B=\frac{\pi}{3}$

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} \cdot \left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = 10 \times 5 \times \cos 0 + 10 \times 5 \times \cos \frac{\pi}{3} = 50 + 50 \times \frac{1}{2} = 75$

5.3. $x^2 + 1^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 1 \times (-7)}}{2} \Leftrightarrow x = 7 \vee x = -1 \Rightarrow x = 7$

$A\,(7,\ 1)$

$\overrightarrow{CA} = (7,\ 1) - (3,\ 4) = (4,\ \ -3)$

$m_{CA} = -\frac{3}{4} \Rightarrow m_t = \frac{4}{3}$, pois $t \perp CA$

$\overrightarrow{t}\,(3,\ 4)$ é um vetor diretor da reta t.

t: $(x,\ y) = (7,\ 1) + k\,(3,\ 4)\,,\ k \in \mathbb{R}$

6. 6.1. $P = \frac{{}^{12}C_2 - {}^{9}C_2}{{}^{12}C_2} = \frac{5}{11}$

6.2. $P\,(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.6827 \Leftrightarrow P\,(1.5 \leq X \leq 2.5) = 0.6827$

$1 - {}^{12}C_{11} \times 0,6827^{11} \times 0,3173 - 0,6827^{12} = 1 - P\,(X = 11) - P\,(X = 12) = 1 - P\,(X \geq 11) = P\,(X \leq 10)$

Uma questão de probabilidade relacionada com esta experiência que tenha como resposta a expressão dada poderá ser:

Qual é a probabilidade de, no máximo, dez dos doze fidget spinners rodarem entre um minuto e meio e dois minutos e meio?