

Primeiro teste - Matemática A
Ensino Secundário | Novembro de 2021
12^o Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 10 minutos.

4 Páginas

-
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
 - Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
 - É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
 - Apresente apenas uma resposta para cada item.
 - As cotações dos itens encontram-se no final da prova.
-

-
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
 - Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.
-

1. Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n > 2$ e $p \in \{0, 1, \dots, n-2\}$.

Qual das opções seguintes é igual a ${}^{n+1}C_{n-p} - {}^nC_p + {}^nC_{p+2}$?

- (A) ${}^nC_{p+2}$ (B) ${}^{n+1}C_{p+2}$ (C) ${}^nC_{p+3}$ (D) ${}^{n+1}C_{p+3}$

2. Considere uma pirâmide reta cuja base é um polígono regular com n lados.

Sabe-se que escolhendo três dos vértices da pirâmide podem ser definidos 29 planos distintos.

Determine o valor de n .

3. Num saco opaco estão cartões, uns quadrangulares outros circulares, com um algarismo de 1 a 9 inscrito.

Na figura 1, estão exemplificados alguns dos cartões que estão dentro do saco:



Figura 1

Na experiência aleatória que consiste em retirar do saco um cartão, ao acaso, e verificar o seu formato e o número nele inscrito, sabe-se que:

- 40% dos cartões são circulares;
- Dos cartões quadrados, um em cada três, têm inscrito um número par.

- 3.1. Qual é a probabilidade de retirar um cartão quadrado com um número ímpar inscrito? Apresente o valor pedido na forma de fração irredutível.

- 3.2. Considere o saco com a sua constituição inicial. Sabe-se que estão no saco 60 cartões.

Vão ser extraídos, ao acaso, cinco cartões do saco e colocados lado a lado de modo a formar um número com cinco algarismos.

Qual é a probabilidade desse número ser ímpar e os cartões retirados serem todos quadrados?

Apresente o valor pedido com aproximação às centésimas.

4. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos possíveis de Ω ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Prove que:

$$P\left[A|\overline{A \cap B}\right] \times [1 - P(A \cap B)] + P(B) \times P(A|B) = P(A)$$

5. Um dos termos no desenvolvimento de $\left(\pi^2 + \frac{1}{\pi}\right)^n$ é $a\pi^7$, com $a \in \mathbb{N}$.

Qual dos seguintes pode ser o valor de n ?

- (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 16

6. No referencial o.n. $Oxyz$ da figura 2 encontra-se representado um prisma quadrangular regular.

Sabe-se que:

- Alguns dos vértices do prisma estão designados pelas letras A , B , C e D
- $\overrightarrow{EA} = (1, 3, 2)$
- $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, -1)$
- o vértice C tem coordenadas $(2, 5, 4)$

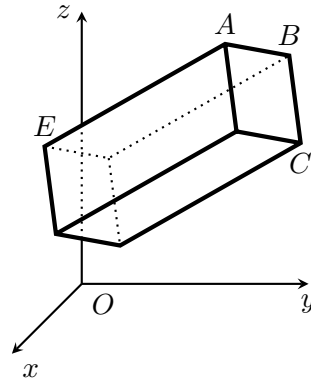


Figura 2

6.1. Defina por uma equação o plano paralelo a ABC e que contém o ponto E .

Apresente a sua resposta na forma $ax + by + cz + d = 0$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

6.2. Os restantes vértices do prisma vão ser designados, ao acaso, pelas letras D , F , G e H .

Qual dos valores seguintes é a probabilidade do plano EGH conter uma das faces do prisma?

- (A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{5}{24}$

7. No tabuleiro de xadrez, da figura 3, vão ser colocadas colocadas oito peças de xadrez: três peões pretos, dois peões brancos, o rei branco, a rainha branca e o rei preto, uma peça por cada casa do tabuleiro.

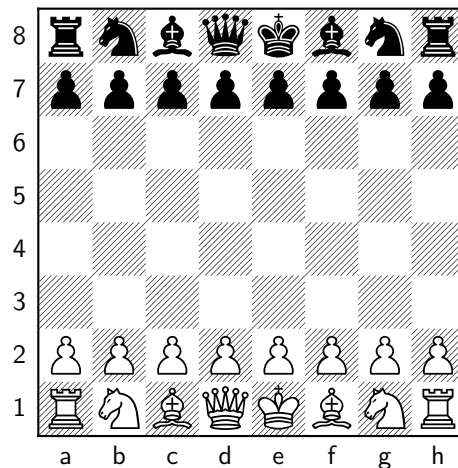


Figura 3

De quantas formas é possível colocar estas oito peças no tabuleiro de modo que elas fiquem na mesma fila, vertical ou horizontal, e as peças da mesma cor fiquem juntas?

- (A) 512 (B) 1536 (C) 18432 (D) 9216

8. Novas matrículas nos automóveis em Portugal estão em circulação desde Março de 2020.

Essas novas matrículas consistem numa sequência de duas letras, seguidas de dois algarismos e novamente seguidas de duas letras.

As letras são escolhidas a partir do alfabeto português, com a inclusão das letras y , k e w . Ou seja, 26 escolhas possíveis para cada letra.

Os algarismos são escolhidos de entre 0 a 9.

Admita-se que não há restrições para a escolha das sequências de letras, nem para a sequência de algarismos.

Na figura 4 está representado um exemplo destas novas matrículas:



Figura 4

8.1. Quantas destas novas matrículas existem (ou poderão existir) de modo a que quando lidas da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda se obtém a mesma sequência?

8.2. Do conjunto de todas as novas matrículas possíveis de existir, considere a experiência aleatória que consiste em escolher uma delas ao acaso.

Considere os acontecimentos:

- A : “As duas sequências de letras na matrícula escolhida são iguais”
- B : “Todas as letras na matrícula são vogais”

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, determine o valor de $P(A|B)$.

Apresente o valor pedido na forma de fracção irredutível.

Nota: Considere que “ y ” é uma vogal.

9. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos possíveis de Ω ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- A e B são equiprováveis
- $P(A|B) = \frac{1}{3}$

Qual dos seguintes é o valor de $P(\overline{B}|A)$

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 1

(D) $\frac{2}{3}$

FIM

Cotações

Itens	1	2	3.1	3.2	4	5	6.1	6.2	7	8.1	8.2	9	Total
Cotação (pontos)	15	20	15	20	20	15	20	15	15	15	15	15	200

Segundo teste - Matemática A
Ensino Secundário | Dezembro de 2021
12^o Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 10 minutos.

4 Páginas

-
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
 - Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
 - É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
 - Apresente apenas uma resposta para cada item.
 - As cotações dos itens encontram-se no final da prova.
-

-
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
 - Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.
-

1. No referencial o.n. da figura 5 está parcialmente representada uma função f .

Tal como a figura sugere, as retas de equação $x = 0$, $x = 2$ e $y = 0$ são as únicas assíntotas do gráfico de f

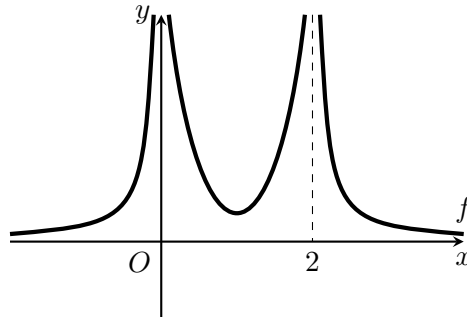


Figura 5

De uma determinada sucessão (u_n) sabe-se que $\lim f(u_n) = +\infty$

Qual das opções seguintes não pode ser o termo geral da sucessão (u_n) ?

- (A) $\frac{1}{n}$ (B) $\frac{2n+1}{n}$ (C) $\frac{n+2}{n}$ (D) $\frac{n+1}{n^2}$

2. Aos professores do grupo de Matemática de um determinado agrupamento de escolas foi-lhes proposto fazer formações no âmbito das novas tecnologias.

Foram propostas duas formações: “Formação em Geogebra” e “Formação em \LaTeX ”, tendo os professores a liberdade de escolher fazer uma delas, ambas ou nenhuma.

Após terminadas as inscrições para as formações, sabe-se que:

- 60% dos professores inscreveram-se na formação em Geogebra
- 20% dos professores inscreveram-se em ambas as formações
- dos professores que não se inscreveram na formação em Geogebra, 75% também não se inscreveu na formação em \LaTeX

- 2.1. Escolhendo, ao acaso, um professor que se inscreveu na formação em \LaTeX , qual é a probabilidade de não se ter inscrito na formação em Geogebra?

Apresente o valor pedido na forma de fração irredutível.

- 2.2. Sabe-se que o agrupamento de escolas tem 30 professores de Matemática.

De quantas formas distintas se podem escolher quatro professores que se tenham inscrito em apenas uma das formações?

- (A) 15 (B) 495 (C) 1365 (D) 5985

3. Considere duas funções f e g contínuas, tais que:

- o domínio de f é \mathbb{R} e o domínio de g é $[-2, 2]$
- f é estritamente crescente
- g é ímpar e $g(2) = 3$

Prove que existe pelo menos um valor $c \in]-2, 2[$ tal que $(f \circ g)(c) = f(0)$

4. Para um determinado número real a e um determinado número real b , considere a função f , definida em \mathbb{R} , por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2}}{3 - x} & \text{se } x < 1 \\ a & \text{se } x = 1 \\ b + \frac{x^2 - 1}{\sqrt{3x + 1} - 2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

4.1. O gráfico de f apresenta uma assíntota horizontal quando $x \rightarrow -\infty$.

Defina-a por uma equação.

4.2. Sabendo que f é contínua em $x = 1$, determine os valores de a e de b .

5. Na figura 6 encontra-se parcialmente representado o gráfico de uma função h de domínio \mathbb{R}^+ e uma reta r .

Tal como a figura sugere:

- A reta r é assíntota ao gráfico de h
- A reta r intersesta o eixo Ox no ponto de abscissa 2
- A reta r intersesta o eixo Oy no ponto de ordenada -1

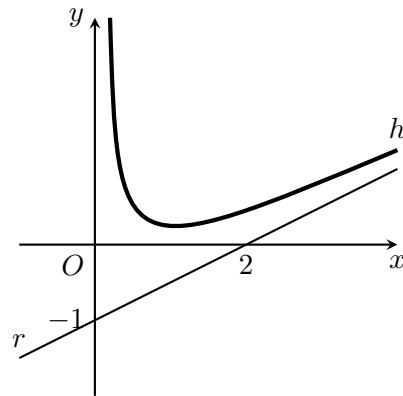


Figura 6

Qual dos seguintes é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \cdot h(x) - x^2}{h(x)}$?

- (A) 4 (B) 2 (C) -2 (D) -4

6. Qual dos seguintes é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{3x^2 + \sin(2x)}$?

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) $+\infty$

7. De uma função g , derivável, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{7}{2}\}$, sabe-se que $g'(x) = \frac{2x^2 - 12}{2x + 7}$.

Resolva os dois itens seguintes por processos analíticos.

7.1. O valor de $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{g(x) - g(9)}$ é?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

7.2. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e existência de pontos de inflexão.

8. Dos dois itens seguintes, resolva apenas um deles à sua escolha:

8.1. Na figura 7 encontra-se parcialmente representado o gráfico de uma função quadrática f e duas retas r e s tangentes ao gráfico de f .

Tal como a figura sugere:

- -1 e 3 são os zeros de f
- a reta r é tangente ao gráfico em $x = -1$
- a reta s é tangente ao gráfico em $x = 3$
- as retas r e s são perpendiculares

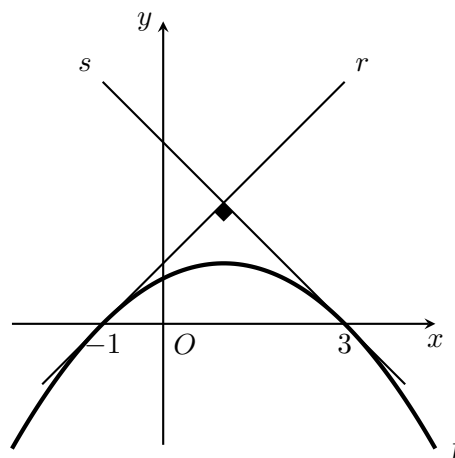


Figura 7

Determine uma expressão analítica que defina a função f .

8.2. Na figura 8 está parcialmente representado o gráfico da função g , de domínio $[-5, +\infty[$, definida por $g(x) = \sqrt{x+5}$ e uma reta r .

Tal como a figura sugere:

- a reta r é tangente ao gráfico de g num ponto de abscissa a , com $a < 0$
- a reta r interseca o eixo Oy no ponto de ordenada 3

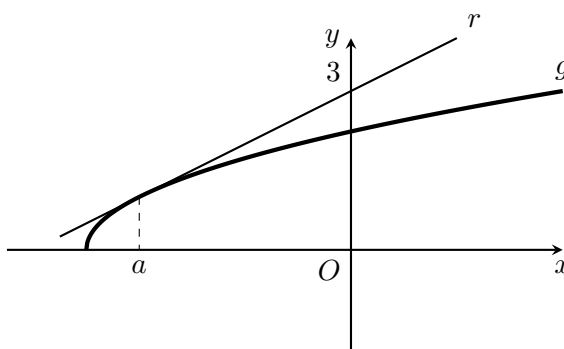


Figura 8

Determine o valor de a .

9. De uma progressão geométrica crescente (a_n) sabe-se que:

- $a_1 = 6$
- $a_5 - a_3 = 432$

Determine a soma dos primeiros 20 termos de ordem ímpar da sucessão (a_n) .

Apresente o valor pedido na forma $a \cdot (b^c - 1)$, com $a \in \mathbb{Q}$ e $b, c \in \mathbb{N}$.

FIM

Cotações

Itens	1	2.1	2.2	3	4.1	4.2	5	6	7.1	7.2	8	9	Total
Cotação (pontos)	15	20	15	20	15	20	15	15	15	15	15	20	200

Resoluções

Proposta de resolução do 1.º teste

1.

$${}^{n+1}C_{n-p} - {}^nC_p + {}^nC_{p+2} = {}^{n+1}C_{p+1} - {}^nC_p + {}^nC_{p+2} = {}^nC_p + {}^nC_{p+1} - {}^nC_p + {}^nC_{p+2} =$$

$${}^nC_{p+1} + {}^nC_{p+2} = {}^{n+1}C_{p+2}$$

Opção B

2.

$${}^{n+1}C_3 - {}^nC_3 + 1 = 29 \Leftrightarrow \frac{(n+1) \times n \times (n-1)}{3!} - \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{3!} = 28 \Leftrightarrow$$

$$n \times (n-1) \times [n+1-n+2] = 168 \Leftrightarrow n^2 - n - 56 = 0 \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \times 56}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 15}{2} \Rightarrow n = 8$$

3. A: “O cartão é circular”

B: “O cartão tem um número par inscrito”

$$P(A) = 0.4$$

$$P(B|\bar{A}) = \frac{1}{3}$$

3.1. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = ?$

$$\frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = \frac{0.6}{3} \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = 0.2$$

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) \Leftrightarrow 0.6 = 0.2 + P(\bar{A} \cap \bar{B}) \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.4 = \frac{2}{5}$$

3.2. $60 \times 0.4 = 24$ cartões circulares

$60 - 24 = 36$ cartões quadrados

$\frac{36}{3} = 12$ cartões quadrados com um número par inscrito

$36 - 12 = 24$ cartões quadrados um número ímpar inscrito

$$p = \frac{24 \times {}^{35}A_4}{{}^{60}A_5} \approx 0.05$$

4.

$$P \left[A | \overline{A \cap B} \right] \times [1 - P(A \cap B)] + P(B) \times P(A|B) =$$

$$\frac{P \left[A \cap \overline{A \cap B} \right]}{P(\overline{A \cap B})} \times P(\overline{A \cap B}) + P(A \cap B) =$$

$$P \left[A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \right] + P(A \cap B) =$$

$$P \left[(A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \right] + P(A \cap B) =$$

$$P \left[\emptyset \cup (A \cap \overline{B}) \right] + P(A \cap B) =$$

$$P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = P(A)$$

5.

$$T = {}^n C_p \left(\pi^2 \right)^{n-p} \times \left(\frac{1}{\pi} \right)^p = {}^n C_p \times \pi^{2n-3p}$$

n e p têm que ser inteiros não negativos, com $p \leq n$

Se $n = 8$, então $2 \times 8 - 3p = 7 \Rightarrow 3p = 9 \Rightarrow p = 3 \in \mathbb{N}_0$

Se $n = 10$, então $2 \times 10 - 3p = 7 \Rightarrow 3p = 13 \Rightarrow p = \frac{13}{3} \notin \mathbb{N}_0$

Se $n = 12$, então $2 \times 12 - 3p = 7 \Rightarrow 3p = 17 \Rightarrow p = \frac{17}{3} \notin \mathbb{N}_0$

Se $n = 16$, então $2 \times 16 - 3p = 7 \Rightarrow 3p = 25 \Rightarrow p = \frac{25}{3} \notin \mathbb{N}_0$

Opção A

6.

6.1.

$$E = C - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{EA} = (2, 5, 4) - (-1, 1, -1) - (1, 3, 2) = (2, 1, 3)$$

$$(x - 2) + 3(y - 1) + 2(z - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 3y + 2z - 11 = 0$$

6.2.

$$p = \frac{(2! + {}^3 A_2) \times 2!}{4!} = \frac{2}{3}$$

Opção C

7.

$$2 \times 8 \times 2 \times {}^4 C_3 \times {}^4 C_2 \times 2! = 1536$$

Opção B

8.

8.1.

$$26^2 \times 10 = 6760$$

8.2.

$$P(A|B) = \frac{6^2}{6^4} = \frac{1}{36}$$

9.

$$P(B) = P(A)$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3} \times P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3} \times P(A)$$

$$P(\overline{B}|A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) - \frac{1}{3} \times P(A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3} \times P(A)}{P(A)} = \frac{2}{3}$$

Opção D

Proposta de resolução do 2.º teste

1. Se $u_n = \frac{n+2}{n}$, então:

$$\lim(u_n) = \lim \frac{n+2}{n} = \lim \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1 + 0 = 1$$

Assim,

$$\lim f(u_n) = f(1)$$

que é um valor finito.

Opção C

2.

2.1. Sejam os acontecimentos:

- G : “o professor inscreveu-se na formação em Geogebra”
- L : “o professor inscreveu-se na formação em L^AT_EX”

$$P(G) = 0.6 \Rightarrow P(\overline{G}) = 0.4$$

$$P(G \cap L) = 0.2$$

$$P(\overline{L}|\overline{G}) = 0.75 \Rightarrow P(L|\overline{G}) = 0.25$$

$$P(\overline{G}|L) = \frac{P(L \cap \overline{G})}{P(L)} = \frac{P(L|\overline{G}) \times P(\overline{G})}{P(L \cap G) + P(L \cap \overline{G})} = \frac{0.25 \times 0.4}{0.2 + 0.25 \times 0.4} = \frac{1}{3}$$

2.2.

$$P(G \cap \bar{L}) = 0.6 - 0.2 = 0.4 \Rightarrow 0.4 \times 30 = 12$$

12 professores inscreveram-se apenas na formação em Geogebra

$$P(L \cap \bar{G}) = P(L \cap \bar{G}) \times P(\bar{G}) = 0.25 \times 0.4 = 0.1 \Rightarrow 0.1 \times 30 = 3$$

3 professores inscreveram-se apenas na formação em L^AT_EX

12+3=15 professores inscreveram-se apenas em uma das formações

Assim,

$${}^{15}C_4 = 1365$$

Opção C

3. Seja h a função de domínio $[-2, 2]$ definida por $h(x) = (f \circ g)(x) - f(0)$

h é contínua em $[-2, 2]$, por ser resultar da composição de duas funções contínuas à qual se subtrai uma constante.

$$h(-2) = (f \circ g)(-2) - f(0) = f(g(-2)) - f(0) = f(-g(2)) - f(0) = f(-3) - f(0) < 0$$

Como f é estritamente crescente, então:

$$-3 < 0 \Rightarrow f(-3) < f(0) \Leftrightarrow f(-3) - f(0) < 0$$

$$h(2) = (f \circ g)(2) - f(0) = f(g(2)) - f(0) = f(3) - f(0) > 0$$

Como f é estritamente crescente, então:

$$0 < 3 \Rightarrow f(0) < f(3) \Leftrightarrow f(0) - f(3) < 0 \Leftrightarrow f(3) - f(0) > 0$$

Como $h(-2)$ e $h(2)$ têm sinais contrários e h é contínua em $[-2, 2]$, então, pelo corolário do teorema de Bolzano conclui-se que existe pelo menos um valor $c \in]-2, 2[$ tal que $h(c) = 0 \Leftrightarrow (f \circ g)(c) - f(0) = 0 \Leftrightarrow (f \circ g)(c) = f(0)$

4.

4.1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2}}{3 - x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}}{x \left(\frac{3}{x} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x \left(\frac{3}{x} - 1\right)} = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x \left(\frac{3}{x} - 1\right)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{-\frac{3}{x} + 1} = \frac{\sqrt{1 + 0 + 0}}{-0 + 1} = 1 \end{aligned}$$

A reta definida por $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$

4.2.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2}}{3 - x} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{3x + 1} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)(\sqrt{3x + 1} + 2)}{3x + 1 - 4} = \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{3x+1}+2)}{3(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)(\sqrt{3x+1}+2)}{3} = \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$b + \frac{8}{3} = 1 \Leftrightarrow b = 1 - \frac{8}{3} \Leftrightarrow b = -\frac{5}{3}$$

5.

$$m_r = \frac{-1-0}{0-2} = \frac{1}{2}$$

$$r: y = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \frac{1}{2} \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(h(x) - \frac{1}{2}x \right) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \cdot h(x) - x^2}{h(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2h(x) - x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(h(x) - \frac{1}{2}x \right)}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \times (-1)}{\frac{1}{2}} = -4$$

Opção D

6.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{3x^2 + \sin(2x)} = \frac{2}{3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \times \sin(2x)} = \frac{2}{3+0} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \times \sin(2x) = 0 \text{ pois é o produto de um infinitésimo por uma função limitada}$$

Opção B

7.

7.1.

$$g'(9) = \frac{2 \times 9^2 - 12}{2 \times 9 + 7} = \frac{150}{25} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{g(x) - g(9)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 9} (x+9)}{\lim_{x \rightarrow 9} \frac{g(x) - g(9)}{x-9}} = \frac{18}{g'(9)} = \frac{18}{6} = 3$$

Opção C

7.2.

$$g''(x) = \frac{4x(2x+7) - (2x^2-12) \times 2}{(2x+7)^2} = \frac{8x^2 + 28x - 4x^2 + 24}{(2x+7)^2} = \frac{4x^2 + 28x + 24}{(2x+7)^2}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 28x + 24 = 0 \wedge x \neq -\frac{7}{2} \Leftrightarrow x^2 + 7x + 6 = 0 \wedge x \neq -\frac{7}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 6}}{2} \wedge x \neq -\frac{7}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm 5}{2} \wedge x \neq -\frac{7}{2} \Leftrightarrow x = -6 \vee x = -1 \wedge x \neq -\frac{7}{2}$$

$$g''(x) = \frac{4(x+6)(x+1)}{(2x+7)^2}$$

x	$-\infty$	-6		$-\frac{7}{3}$		-1	$+\infty$
$4(x+6)$	-	0	+	+	+	+	+
$x+1$	-	-	-	-	-	0	+
$(2x+7)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$g''(x)$	+	0	-	n.d.	-	0	+
g	\cup	P.I.	\cap	n.d.	\cap	P.I.	\cup

8.

8.1. $f(x) = a(x+1)(x-3)$, para algum $a < 0$

$$f'(x) = a[1 \times (x-3) + (x+1) \times 1] = a(2x-2)$$

$$r \perp s \Rightarrow m_s \times m_r = -1 \Leftrightarrow f'(-1) \times f'(3) = -1 \Leftrightarrow a(-2-2) \times a(6-2) = -1 \Leftrightarrow$$

$$a^2 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} \vee a = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

Assim,

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x+1)(x-3)$$

8.2.

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

$$-5 < a < 0$$

$$m_r = g'(a) \Leftrightarrow \frac{3-g(a)}{0-a} = \frac{1}{2\sqrt{a+5}} \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{a+5}}{-a} = \frac{1}{2\sqrt{a+5}}$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{a+5} - 2a - 10 = -a \Leftrightarrow$$

$$6\sqrt{a+5} = a+10 \Rightarrow 36(a+5) = a^2 + 20a + 100 \Leftrightarrow a^2 - 16a - 80 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 + 4 \times 80}}{2} \Leftrightarrow a = 20 \vee a = -4 \Rightarrow a = -4$$

9.

$$a_5 - a_3 = 432 \Leftrightarrow a_3 \times r^2 - a_3 = 432 \Leftrightarrow (r^2 - 1)6r^2 = 432 \Leftrightarrow 6r^4 - 6r^2 = 432 \Leftrightarrow r^4 - r^2 - 72 = 0 \Leftrightarrow$$

$$r^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \times 72}}{2} \Leftrightarrow r^2 = \frac{1 \pm 17}{2} \Leftrightarrow r^2 = 9 \vee r^2 = -8 \Rightarrow r^2 = 9 \Leftrightarrow r = 3 \vee r = -3 \Rightarrow r = 3$$

$$a_n = 6 \times 3^{n-1} = 2 \times 3^n$$

A sucessão de termo geral $b_n = 2n - 1$ é a sucessão dos números ímpares

Assim, a sucessão dos termos ímpares de (a_n) é dada por:

$$c_n = 2 \times 3^{2n-1}$$

Repare-se que (c_n) é uma progressão geométrica:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2 \times 3^{2(n+1)-1}}{2 \times 3^{2n-1}} = \frac{3^{2n+1}}{3^{2n-1}} = 3^2 = 9 = r$$

Assim, a soma dos 20 primeiros termos de (c_n) é:

$$S_{20} = c_1 \times \frac{1 - r^{20}}{1 - r} = 6 \times \frac{1 - 9^{20}}{-8} = \frac{3}{4} (9^{20} - 1)$$