Prova Modelo de Exame Nacional de Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Abril de 2021
$12^{\underline{o}}$ Ano de Escolaridade

Simulação de Prova 635

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 7 Páginas

---

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

  Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.
- Dos restantes 15 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular:

Semiperímetro $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone:

$\pi r g$ (r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica:

$4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide:

$\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone:

$\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera:

$\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões:

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética:

$$\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

Progressão geométrica:

$$u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, ..., n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1. Na figura 1 está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cone de revolução.

Sabe-se que:

- o vertice V tem coordenadas $(4, 2, 1)$
- C é o centro da base do cone
- $[VC]$ é a altura do cone
- $[VA]$ é uma geratriz do cone
- o vetor $\overrightarrow{VA}$ tem coordenadas $\left(-\dfrac{7}{2}, 2, 0\right)$
- a reta VC é definida por:
  $(x, y, z) = (0, 4, 5) + \lambda\,(4, -2, -4)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$

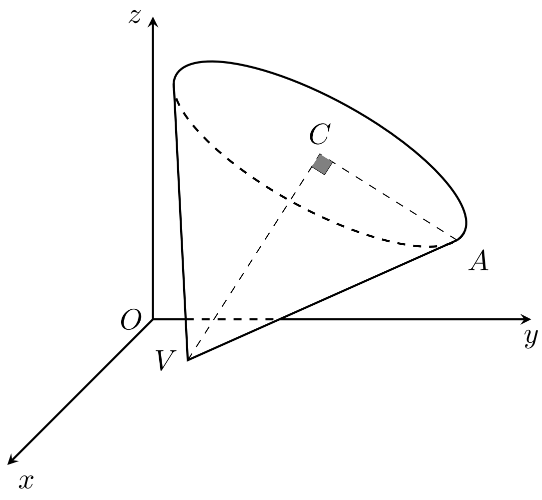

Figura 1

1.1. Mostre que o plano que contém a base do cone pode ser definido por $-2x + y + 2z = 5$.

1.2. Determine o volume do cone.

2. Complexos

2.1. Escolha múltipla

2.2. Calculo em $\mathbb{C}$

3. Probabilidades

3.1. Acontecimentos

3.2. Regra de Laplace

4. Escolha múltipla Probabilidades (problema de contagem)

5. Teorema de Bolzano

6. Sucessões

7. No referencial o.n. da figura 2 encontra-se parcialmente representado o gráfico da função f'', segunda derivada de uma função f.

Sabe-se que:

- o domínio de f, f' e f'' é $\mathbb{R}^+$
- a e b são zeros de f''

Qual das afirmações seguintes é falsa?

(A) $f'(a)$ é máximo relativo de f'

(B) $\big(a, f(a)\big)$ é ponto de inflexão do gráfico de f

(C) $f'(a) > f'(b)$

(D) $\big(b, f(b)\big)$ é ponto de inflexão do gráfico de f

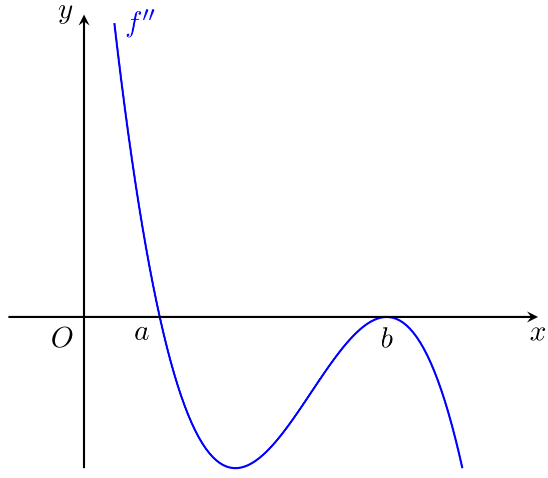

Figura 2

8. Uma certa linha do triângulo de Pascal tem 2021 elementos.

Quantos desses elementos são superiores a ${}^{2021}C_{100} - {}^{2019}C_{99} - {}^{2019}C_{1919}$?

(A) 1823 **(B)** 1821 **(C)** 1825 **(D)** 1819

9. Na figura 3 encontram-se representadas, num referencial o.n. xOy, duas retas, r e s, e parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}^+$.

Tal como a figura sugere:

- a reta s forma com o eixo das abcissas um ângulo de amplitude $\frac{\pi}{3}$
- as retas r e s são perpendiculares e intersetam-se no ponto de coordenadas $(1, 0)$
- r é assintota do gráfico de f quando $x \to +\infty$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

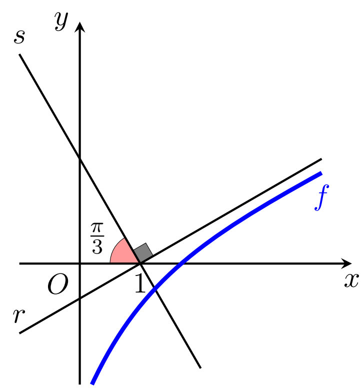

Figura 3

(A) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \sqrt{3}$

(B) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(3f(x) - \sqrt{3}x\right) = \sqrt{3}$

(C) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3}x - 3f(x)\right) = \sqrt{3}$

(D) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\sqrt{3}$

10. Na figura 4 está representado um pentágono regular de lado 2 unidades $[ABCDE]$ e dois vetores: $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$.

Qual dos seguintes é o valor de $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ com aproximação às décimas?

(A) $8,4$

(B) $8,5$

(C) $8,6$

(D) $8,7$

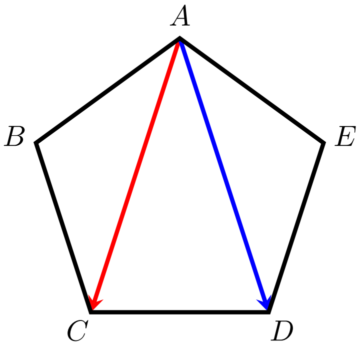

Figura 4

11. Na figura 5 está representado, em referencial o.n. xOy a circunferência trigonométrica, uma reta r e uma região a sombreado.

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial
- P é o ponto de coordenadas $(1, 0)$
- r é a reta definida por $x = 1$
- Q desloca-se sobre a circunferência ao longo do primeiro quadrante
- θ é a amplitude, em radianos, do ângulo POQ, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
- R acompanha o movimento do ponto Q deslocando-se sobre a circunferência ao longo do quarto quadrante de modo que o ângulo ROQ é um ângulo reto
- os pontos S e T são os pontos de interseção da reta r com as semirretas $\dot{O}Q$ e $\dot{O}R$, respectivamente.

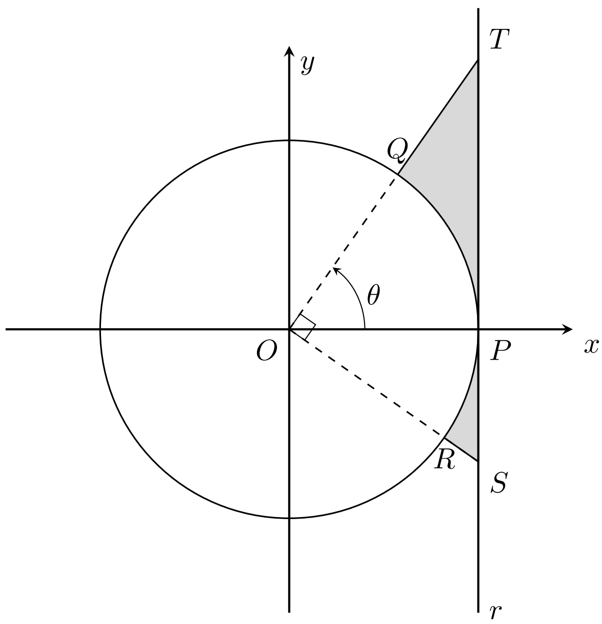

Figura 5

Seja A a função que a cada valor de θ faz corresponder o valor da área da região a sombreado.

11.1. Mostre que $A(\theta) = \dfrac{1}{\sin(2\theta)} - \dfrac{\pi}{4}$, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

11.2. Determine, por processos analíticos, o valor de θ para o qual é mínima a área da região a sombreado.

11.3. Qual é conjunto de valores de θ para os quais a área da região a sombreado é menor que a área do triângulo [OPQ]?

Recorra às capacidades gráficas da sua calculadora para resolver esta questão.

Na sua resposta deve:

- Formular uma inequação cuja solução responde ao problema
- Representar graficamente a(s) função(ões) que lhe permitem obter a resposta ao problema

- Assinalar o(s) ponto(s) relevante(s), indicando a(s) sua(s) abcissa(s) com aproximação às centésimas
- Indicar o conjunto solução utilizando a notação de números reais

12. Resolva, em $\mathbb{R}$ e por processos analíticos, a inequação:

$$\log_2(x-2) \leq 1 + \log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x}\right) - \log_4(x+3)$$

Apresente o conjunto solução utilizando a notação de intervalos de números reais.

13. Considere f, a função de domínio $]-\infty, 2\pi]$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\ln(e^x+1)-\ln(4)}{e^x-1} & \text{se } \ x<0 \\ \\ e^x(\cos x + \sin x) & \text{se } \ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

13.1. Mostre que f é contínua em $x = 0$.

13.2. Na restrição de f a $[0,\ 2\pi]$ considere que:

- A e B são os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo das abcissas;
- C é o ponto de gráfico de f com ordenada mínima.

Mostre, por processos analíticos, que a área do triângulo $[ABC]$ é igual a $\dfrac{\pi}{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$

FIM

Cotações

- As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

Itens	1	7.1	7.2	10	Subtotal
Cotação (pontos)	16	16	20	20	72

- Destes 15 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

<table>
<tr><td rowspan="2">Itens</td><td>2</td><td>3.1</td><td>3.2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>8</td><td>9</td><td rowspan="2">Subtotal</td></tr>
<tr><td>11.1</td><td>11.2</td><td>12</td><td>13.1</td><td>13.2</td><td>14</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>Cotação (pontos)</td><td colspan="8">8×16 pontos</td><td>128</td></tr>
</table>