Proposta de resolução

1.

1.1. Sejam os acontecimentos:

- M:"o cliente utilizou máscara"
- L: "o cliente utilizou luvas"

$P\left(L|M\right)=\frac{3}{5}$, $P\left(\overline{M}\right)=0.2$ e $P\left(\overline{L}|\overline{M}\right)=\frac{1}{2}$

Pretende-se calcular $P\left(M|L\right)$

$$P\left(M|L\right)=\frac{P\left(M\cap L\right)}{P\left(L\right)}=\frac{P\left(L|M\right)\times P\left(M\right)}{P\left(L|M\right)\times P\left(M\right)+P\left(L|\overline{M}\right)\times P\left(\overline{M}\right)}=$$

$$=\frac{0.6\times 0.8}{0.6\times 0.8+0.5\times 0.2}\approx 83\%$$

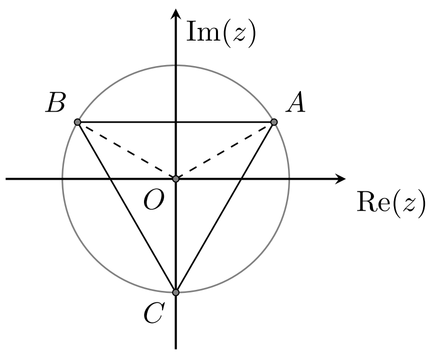
1.2. $30\times 0.7=21$ clientes do sexo feminino $\Rightarrow$ 9 clientes do sexo masculino

$$P=\frac{{}^{21}C_5+{}^{9}C_5}{{}^{30}C_5}=\frac{25}{174}$$

2.

$$\overline{z}\left(z^3-i\right)=0\Leftrightarrow \overline{z}=0\vee z^3=e^{i\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow z=0\vee z=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\ k\in\{0,1,2\}\Leftrightarrow$$

$$z=0\vee z=e^{i\frac{\pi}{6}}\vee z=e^{i\frac{5\pi}{6}}\vee z=e^{i\frac{3\pi}{2}}\Leftrightarrow z=0\vee z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\ \vee z=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\ \vee z=-i$$



$$P_{[ABC]}=3\times\overline{AB}=3\times\left|\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right|=3\times\left|\sqrt{3}\right|=3\sqrt{3}$$

Opção **(B)**

3. Uma expressão que define a sucessão (u_n) é $u_n = 4n - 3$

Assim, $v_n = 2^{4n-3}$

(v_n) é uma progressão geométrica se $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ for constante

$$r = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{4(n+1)-3}}{2^{4n-3}} = \frac{2^{4n+1}}{2^{4n-3}} = 2^4 = 16$$

$\therefore$ (v_n) é uma progressão geométrica de razão 16

A soma dos seus 100 primeiros termos é dada por:

$$S_{100} = v_1 \times \frac{1-r^{100}}{1-r} = 2 \times \frac{1-16^{100}}{1-16} = \frac{2}{15}\left(16^{100}-1\right)$$

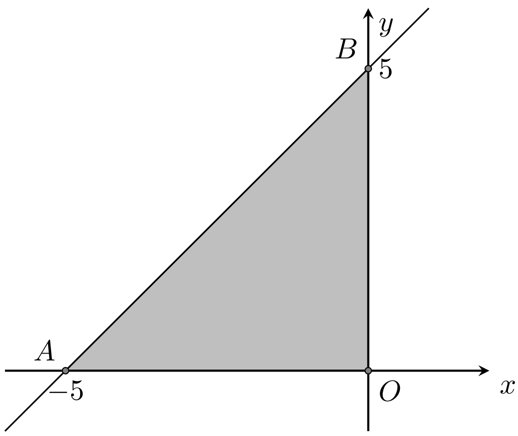
4.

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-3} + \frac{1}{e^x} = \frac{x^2+2x+1}{x-3} + \frac{1}{e^x} = x + 5 + \frac{16}{x-3} + \frac{1}{e^x}$$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & 2 & 1 \\ 3 & & 3 & 15 \\ \hline & 1 & 5 & 16 \end{array}$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{16}{x-3}+\dfrac{1}{e^x}\right) = 0$, então a reta de equação $y = x+5$ é assintota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$



$$A_{[OAB]} = \frac{5\times 5}{2} = \frac{25}{2}$$

Opção **(D)**

5. $D = \mathbb{R}^+$

$$\log_2(x+1) + \log_{\sqrt{2}}(x) \geq 1 \Leftrightarrow \log_2(x+1) + \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} \geq 1 \Leftrightarrow \log_2(x+1) + 2\log_2 x \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\log_2\left[(x+1)\,x^2\right] \geq 1 \Leftrightarrow x^3 + x^2 \geq 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2 \geq 0$$

Cálculos auxiliares:

Como o polinómio x^3+x^2-2 tem coeficientes inteiros então qualquer raiz inteira deste polinómio é um divisor do seu termo independente -2

Os divisores de -2 são : 1, 2, -1 e -2

Testando para $x = 1$ obtém-se $1^3 + 1^2 - 2 = 0$, ou seja, 1 é raiz do polinómio

Aplicando a Regra de Ruffini:

	1	1	0	-2
1		1	2	2
	1	2	2	0

Assim,

$$(x-1)\left(x^2+2x+2\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)\underbrace{\left[(x+1)^2+1\right]}_{>0,\ \forall x\in\mathbb{R}} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$C.S = [1, +\infty[$$

6. Pretende-se identificar qual dos intervalos, o teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um valor x que é solução da equação:

$$f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{x} = 0$$

Seja h a função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $h(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$

h é contínua pois resulta da diferença de funções contínuas, uma função exponencial e uma função racional

Apenas resta verificar qual o intervalo em que ocorre mudança de sinal na função h

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = e^{0^+} - \frac{1}{0^+} = 1 - \infty = -\infty < 0 \quad h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0$$

$$h(1) = e - 1 > 0 \quad h\left(\frac{3}{2}\right) = e\sqrt{3} - \frac{2}{3} > 0$$

Como $h\left(\dfrac{1}{2}\right) \times h(1) < 0$ então a opção correta é a opção **(B)**

7. $2 \times 10 \times 3! \times 9! = 2 \times 10! \times 3!$ Opção **(A)**

- 2 representa o número de posições possíveis para o ás de espadas (posição inicial ou posição final)
- 10 representa o número de formas de colocar as três figuras seguidas nas restantes 12 posições
- 3! representa o número de permutações entre as três figuras
- 9! representa o número de permutações entre as restantes 9 cartas (do 2 ao 10 de espadas)

8.

$$^6C_p x^{6-p}\left(\frac{1}{x}\right)^p =^6 C_p x^{6-2p} \qquad 6-2p=0 \Leftrightarrow p=3$$

Opção **(C)**

9.

9.1.

$$A(x,0,0) \Rightarrow A(3,0,0) \qquad B(0,y,0) \Rightarrow B(0,3,0) \qquad C(0,0,z) \Rightarrow C(0,0,5)$$

$$\overrightarrow{DA} = (3,0,-5) \qquad \overrightarrow{DC} = (0,3,-5)$$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}}{\|\overrightarrow{DA}\| \times \|\overrightarrow{DC}\|} = \frac{25}{\sqrt{9+25}^2} = \frac{25}{34}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2 \times \left(\frac{25}{34}\right)^2 - 1 = \frac{47}{578}$$

9.2.

$$r:(y-2)^2 + (2z-5)^2 = 0 \Leftrightarrow y-2=0 \wedge 2z-5=0 \Leftrightarrow y=2 \wedge z=\frac{5}{2}$$

$$5x - 5\times 2 + 3\times\frac{5}{2} = 15 \Leftrightarrow 5x = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow P\left(-\frac{1}{2},2,\frac{5}{2}\right)$$

Se a reta é perpendicular ao plano α então $\overrightarrow{n} = (5,5,3)$ é um vetor diretor da reta

$$\therefore\ (x,y,z) = \left(-\frac{1}{2},2,\frac{5}{2}\right) + k(5,5,3),\ k\in\mathbb{R}$$

10.

$$\lim_{x\to1^+} h(x) = \lim_{x\to1^+}\frac{e^{1-x^2}-1}{1-\sqrt{x}} = \lim_{1-x^2\to0}\frac{e^{1-x^2}-1}{1-x^2} \times \lim_{x\to1^+}\frac{(1-x)(1+x)\left(1+\sqrt{x}\right)}{1-x} =$$

$$1 \times \lim_{x\to1^+}\left[(1+x)\left(1+\sqrt{x}\right)\right] = 4$$

$$h(1) = 4 \Leftrightarrow 2\left(e^k - e^{-k}\right) + 1 = 4 \Leftrightarrow 2e^k - 2e^{-k} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2e^{2k} - 3e^k - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^k = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4} \Leftrightarrow e^k = \frac{3\pm5}{4} \Leftrightarrow e^k = 2 \vee e^k = -\frac{1}{2} \Rightarrow k = \ln 2$$

Opção **(B)**

11.

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi\ln 2}{8}$$

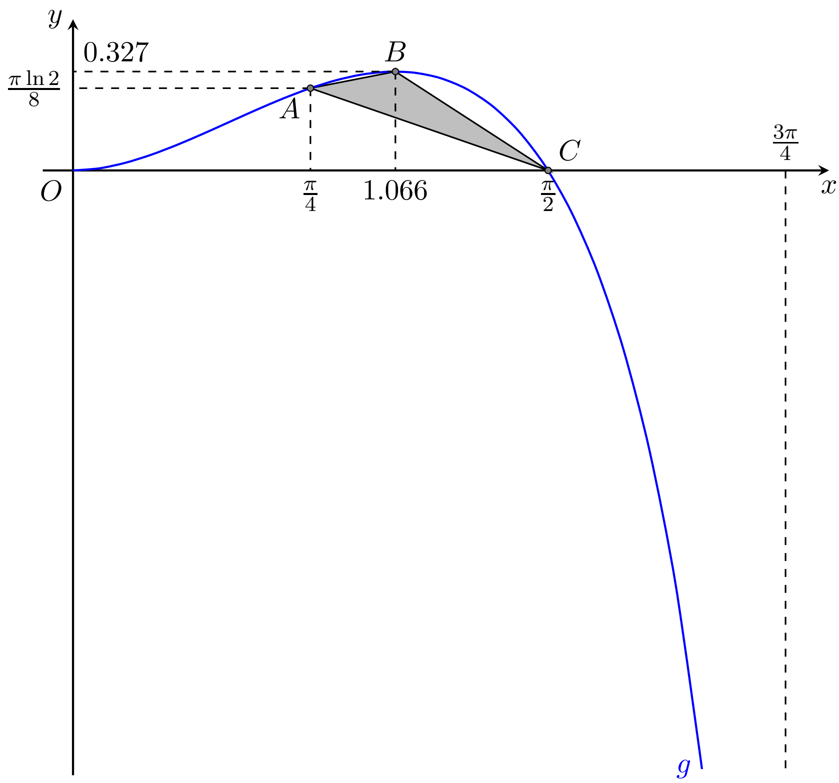
$$g\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=0\vee\ln\left(\sin x+\cos x\right)=0\Leftrightarrow x=0\vee\sin x+\cos x=1\Leftrightarrow$$

$$x=0\vee\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x=0\vee\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$x=0\vee\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi\vee\frac{\pi}{4}+x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$x=0\vee x=2k\pi\vee x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

A única solução positiva em $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right[$ é $x=\frac{\pi}{2}$



$$A_{[ABC]}=\frac{\frac{\pi\ln 2}{8}+0.327}{2}\times\left(1.066-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-1.066\right)\times 0.327}{2}-\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\times\frac{\pi\ln 2}{8}}{2}\approx 0.06$$

12. C.A.)

$$\begin{array}{rr|ll} 6 & 1 & 4 & \\ \cline{3-4} 2 & 1 & 1 & 5 \\ & 1 & & \end{array}$$

$$i^{61} = i$$

$$w = \frac{(2-i)^3 + 8 + i}{1+i} = \frac{(4-4i-1)(2-i)+8+i}{i+i} = \frac{6-3i-8i-4+8+i}{1+i} = \frac{10-10i}{1+i}$$

C.A.)

$$|10-10i| = \sqrt{100+100} = 10\sqrt{2} \qquad \operatorname{Arg}(10-10i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$|i+i| = \sqrt{2} \qquad \operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

$$w = \frac{10\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}} = 10e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 10e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$$

13.

$$m_r = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \qquad r: y = -\sqrt{3} + b \Rightarrow 0 = -\sqrt{3}\times 1 + b \Leftrightarrow b = \sqrt{3} \qquad r: y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

$$m_s \times m_r = -1 \Leftrightarrow m_s \times \left(-\sqrt{3}\right) = -1 \Leftrightarrow m_s = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad s: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -3$$

Opção **(A)**

14.

14.1.

$$A_{[OAB]} = \frac{2\cos\alpha \times \sin\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$$

$$A_{[OCD]} = \frac{2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \times \left[-\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\right]}{2} = -\frac{1}{2}\sin\left(2\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$-\frac{1}{2}\left[\sin(2\alpha) \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \cos(2\alpha) \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{1}{4}\sin(2\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos(2\alpha)$$

$$A_{OBC} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2} \times 1^2 = \frac{\pi}{6}$$

$$A_{Sombreada} = A_{[OAB]} + A_{[OCD]} + A_{OBC} = \frac{1}{2}\sin(2\alpha) + \frac{1}{4}\sin(2\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos(2\alpha) + \frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{3}{4}\sin(2\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos(2\alpha)$$

14.2.

$$A'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\cos(2\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow 3\cos(2\alpha) = \sqrt{3}\sin(2\alpha) \Leftrightarrow \tan(2\alpha) = \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \underset{\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[}{\Rightarrow} \alpha = \frac{\pi}{6}$$

α	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
$f'(\alpha)$	n.d.	+	0	-	n.d.
f	n.d.	$\uparrow$	Max.	$\downarrow$	n.d.

A área da região sombreada é máxima quando $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

15. Se a reta de equação $y = 3x - 5$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2, então:
$f'(2) = 3$ e $f(2) = 3 \times 2 - 5 = 1$

1.º processo:

$$\lim_{x\to 2} \frac{f'(x) \cdot f(x) - 3}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{f'(x) \cdot f(x) - 3f(x) + 3f(x) - 3}{x - 2} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)\left(f'(x) - 3\right)}{x - 2} + \lim_{x\to 2} \frac{3\left(f(x) - 1\right)}{x - 2} = f(2) \times f''(2) + 3f'(2) =$$

$$= 1 \times (-3) + 3 \times 3 = 6$$

Notar que $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$, pois f é contínua em $x = 2$ uma vez que possui derivada finita nesse ponto

2.º processo:

Seja g a função definida por $g(x) = f'(x) \cdot f(x)$

$$g(2) = 3 \times 1 = 3 \qquad g'(x) = f''(x) \times f(x) + \left[f'(x)\right]^2 \qquad g'(2) = -3 \times 1 + 3^2 = 6$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f'(x) \cdot f(x) - 3}{x - 2} = g'(2) = 6$$

Opção **(D)**