

Proposta de resolução - Prova Modelo 4

Grupo I

1. $P(A) = P(C)$

$$P(A \cap B) + 5P(C) = 2P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 2P(B) - 5P(C)$$

$$P(A \cup B) = 3P(C) \Leftrightarrow$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3P(C) \Leftrightarrow$$

$$P(C) + P(B) - 2P(B) + 5P(C) = 3P(C) \Leftrightarrow$$

$$P(B) = 3P(C)$$

$$P(A \cap B) = 2P(B) - 5P(C) = P(C)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(C)}{3P(C)} = \frac{1}{3}$$

Opção C

2. $a = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$$\mu = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{6} \times \left(0 - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(2 - \frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Opção A

3. $\overline{AB} = \frac{6}{3} = 2$

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow 2\overline{OA}^2 = 4 \Rightarrow \overline{OA} = \sqrt{2}$$

$$A(\sqrt{2}, 0, 0)$$

$$B(0, \sqrt{2}, 0)$$

$$C(0, 0, \sqrt{2})$$

$$\text{Seja } \vec{n} = (a, b, c) \perp ABC$$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}a + \sqrt{2}b = 0 \\ -\sqrt{2}a + \sqrt{2}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ c = a \end{cases}$$

$$\vec{n} = (a, a, a), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\text{Se } a = 1, \text{ tem-se } \vec{n} = (1, 1, 1)$$

$$R: x - \sqrt{2} = y = z$$

Opção C

4. $u_3 = \ln(u_2) + \ln(u_1) = \ln 3 + \ln 2 = \ln 6$

$$u_4 = \ln(u_3) + \ln(u_2) = \ln(\ln 6) + \ln 3 = \ln(3 \ln 6) = \ln(\ln 6^3) = \ln[\ln(216)]$$

Opção D

5. $f'(1) = 3$

$$f''(1) = 4$$

$$(2, 0) \in t$$

$$(0, -1) \in t$$

$$m_t = \frac{0+1}{2-0} = \frac{1}{2} = g'(4)$$

$$t: y = \frac{1}{2}x - 1$$

$$g(4) = \frac{1}{2} \times 4 - 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f'[g(x)] - 3}{x - 4} = \frac{(f' \circ g)(x) - (f' \circ g)(4)}{x - 4} = (f' \circ g)'(4) = f''(g(4)) \times g'(4) = f''(1) \times \frac{1}{2} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

Opção B

$$6. f(x) > g(x) \Leftrightarrow \log_2(x+2) > \log_{\sqrt{2}}x \Leftrightarrow \log_2(x+2) > \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} \Leftrightarrow \log_2(x+2) > 2\log_2 x \Leftrightarrow \log_2(x+2) > \log_2(x^2) \Leftrightarrow x+2 > x^2 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 > 0$$

C.A.

$$-x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$$

$$D = \mathbb{R}^+$$

$$S =]0, 2[$$

Opção A

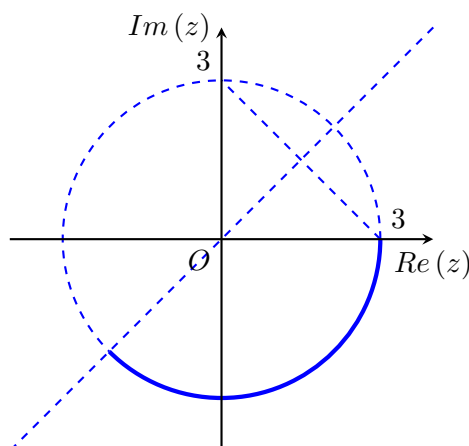
$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x + \frac{1}{e^x} + 3h(x) - \frac{\ln x}{x} \right] = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (3h(x) + 2x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 3 \Leftrightarrow 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(h(x) + \frac{2}{3}x \right) + \frac{1}{e^{+\infty}} - 0 = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[h(x) - \left(-\frac{2}{3}x + 1 \right) \right] = 0$$

$$r: y = -\frac{2}{3}x + 1$$

Opção D

8.

$$|z - 3i| \geq |z - 3| \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 0 \wedge |z| = 3$$



Opção B

Grupo II

$$1. (-z)^n + (\bar{z})^n = [\rho e^{(\theta+\pi)i}]^n + [\rho e^{(-\theta)i}]^n = \rho^n [e^{(n\theta+n\pi)i} + e^{(-n\theta)i}] = \\ \rho^n [\cos(n\theta + n\pi) + i \sin(n\theta + n\pi) + \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)] = \\ \rho^n [\cos(n\theta + n\pi) + i \sin(n\theta + n\pi) + \cos(n\theta) - i \sin(n\theta)]$$

- Se n é par, então $\cos(n\theta + n\pi) = \cos(n\theta)$ e $\sin(n\theta + n\pi) = \sin(n\theta)$. Assim, $(-z)^n + (\bar{z})^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) + \cos(n\theta) - i \sin(n\theta)] = 2\rho^n \cos(n\theta)$, que é um número real.
- Se n é ímpar, então $\cos(n\theta + n\pi) = -\cos(n\theta)$ e $\sin(n\theta + n\pi) = -\sin(n\theta)$. Assim, $(-z)^n + (\bar{z})^n = \rho^n [-\cos(n\theta) - i \sin(n\theta) + \cos(n\theta) - i \sin(n\theta)] = -2i\rho^n \sin(n\theta)$, que é um imaginário puro.

$$2. \quad 2.1. \quad \text{t.m.v.} \left[\frac{1}{e}, e^2 \right] = \frac{f(e^2) - f\left(\frac{1}{e}\right)}{e^2 - \frac{1}{e}} = \frac{e^2(1-2) - \frac{1}{e}(1+1)}{\frac{e^3-1}{e}} = \frac{-e^2 - \frac{2}{e}}{\frac{e^3-1}{e}} = \frac{-e^3-2}{e^3-1} = \frac{e^3+2}{1-e^3}$$

$$2.2. \quad f'(x) = 1 - \ln x + x \left(0 - \frac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	0		1	$+\infty$
f'	n.d.	+	0	-
f	n.d.	\uparrow	Máx.	\downarrow

f é estritamente crescente em $]0, 1]$

f é estritamente decrescente em $[1, +\infty[$

$f(1)$ é máximo relativo.

$$2.3. \quad g \text{ é contínua em } x = 0 \text{ se e só se } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0)$$

$$g(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \left(1 - \ln\left(\frac{1}{y}\right)\right) \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} + \frac{\ln y}{y}\right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} +$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 \times \frac{0}{1 + 1} = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0)$ então g é contínua em $x = 0$.

$$3. \quad h'(x) = 1 + \cos x e^{\sin x}$$

$$m_r = 1 \Leftrightarrow h'(a) = 1 \Leftrightarrow 1 + \cos a e^{\sin a} = 1 \Leftrightarrow \cos a e^{\sin a} = 0 \Leftrightarrow \cos a = 0 \vee e^{\sin a} = 0 \Leftrightarrow \text{eq. imp.}$$

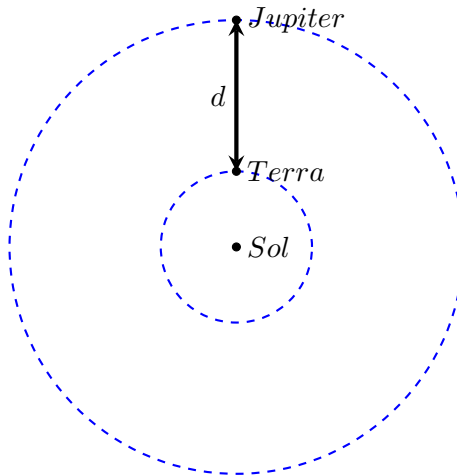
$$a = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

A única solução em $[0, \pi]$ é $a = \frac{\pi}{2}$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + e^{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + e$$

$$y - \frac{\pi}{2} - e = 1\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y = x + e$$

4. 4.1.

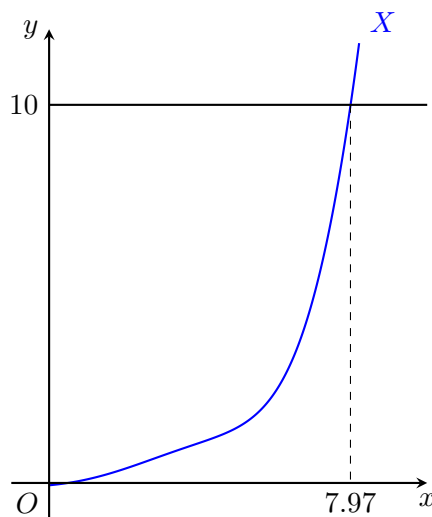


$$d = (X(7) - X(4)) \times 150 =$$

$$\left[e^{0.422 \times 7} [0.36 \sin(9 \times 6.5) + 0.08 \sin(49.5 \times 6.5)] - e^{0.422 \times 4} [0.36 \sin(9 \times 3.5) + 0.08 \sin(49.5 \times 3.5)] \right] \times 150 \approx 581 \text{ milhões de quilómetros.}$$

4.2. 1.5 milhões de quilómetros = 10 u.a

$$X(n) = 10$$



O asteróide está mais próximo da órbita de Saturno.

$$5. \quad 5.1. \quad 0^2 + 0^2 - 6 \times 0 - 2a \times 0 = 16 - a^2 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

$$C(3, 4) \text{ e } r = 5$$

$$5.2. \quad A_{\text{Setor circular}} = \frac{\alpha}{2} r^2 \Leftrightarrow \frac{25\pi}{6} = \frac{\alpha}{2} \times 5^2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$$

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = 10 \times 5 \times \cos 0 + 10 \times 5 \times \cos \frac{\pi}{3} = 50 + 50 \times \frac{1}{2} = 75$$

$$5.3. \quad x^2 + 1^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 1 \times (-7)}}{2} \Leftrightarrow x = 7 \vee x = -1 \Rightarrow x = 7$$

$$A(7, 1)$$

$$\overrightarrow{CA} = (7, 1) - (3, 4) = (4, -3)$$

$$m_{CA} = -\frac{3}{4} \Rightarrow m_t = \frac{4}{3}, \text{ pois } t \perp CA$$

$$\vec{t}(3, 4) \text{ é um vetor diretor da reta } t.$$

$$t: (x, y) = (7, 1) + k(3, 4), \quad k \in \mathbb{R}$$

$$6. \quad 6.1. \quad P = \frac{{}^{12}C_2 - {}^9C_2}{{}^{12}C_2} = \frac{5}{11}$$

$$6.2. \quad P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.6827 \Leftrightarrow P(1.5 \leq X \leq 2.5) = 0.6827$$

$$1 - {}^{12}C_{11} \times 0,6827^{11} \times 0,3173 - 0,6827^{12} = 1 - P(X = 11) - P(X = 12) = 1 - P(X \geq 11) = P(X \leq 10)$$

Uma questão de probabilidade relacionada com esta experiência que tenha como resposta a expressão dada poderá ser:

Qual é a probabilidade de, no máximo, dez dos doze fidget spinners rodarem entre um minuto e meio e dois minutos e meio?