Prova Modelo de Exame Nacional de Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Junho de 2020
12º Ano de Escolaridade

Simulação de Prova 635

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

  3, **9.1**, **9.2** e **13**

  Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.
- Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular:

Semiperímetro $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone:

$\pi r g$ (r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica:

$4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide:

$\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone:

$\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera:

$\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões:

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética:

$$\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

Progressão geométrica:

$$u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, ..., n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1. No seguimento de aplicação de medidas de desconfinamento após o período de isolamento devido à pandemia de Covid-19, o governo inglês decretou a reabertura de estabelecimentos de venda de produtos não essenciais para o dia 15 de Junho.

Numa conhecida loja de roupa em Shefflield vários clientes aproveitaram o dia para efetuar compras.

1.1. A utilização de máscara ou de luvas, como forma de proteção, não é obrigatória. No entanto, alguns dos clientes utilizaram-nas quando efetuaram compras na loja nesse dia.

Sabe-se que:

- 3 em cada 5 dos clientes que usaram máscara também utilizaram luvas
- 20% dos clientes não usaram máscara
- dos clientes que não usaram máscara, metade não utilizou qualquer outra forma de proteção

Escolhendo, ao acaso, um dos clientes da loja nesse dia, qual é a probabilidade de ter usado máscara sabendo que utilizou luvas?

Apresente o valor pedido na forma de percentagem com aproximação às unidades.

1.2. A loja decidiu recompensar os seus clientes com o sorteio de cinco vouchers para serem usados em futuras compras.

Nesse sentido, a loja recolheu informação sobre os clientes que efetuaram compras durante um determinado período do dia e que aceitaram ceder os seus dados.

Assim, 30 clientes ficaram habilitados a ganhar um voucher, 70% deles do sexo feminino.

Qual é a probabilidade de, ao sortear aleatoriamente os cinco vouchers pelos 30 clientes, serem escolhidos cinco clientes do mesmo sexo?

Apresente o valor pedido na forma de fração irredutível.

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere a equação $z^3 \cdot \overline{z} - i\overline{z} = 0$.

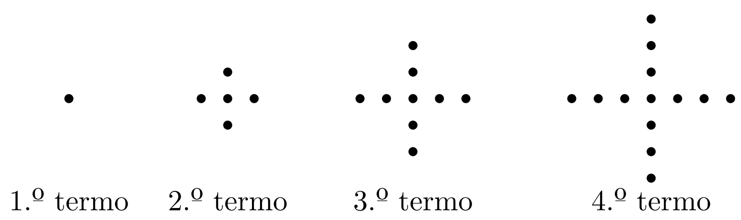
Os afixos (imagens geométricas) das soluções não nulas desta equação são vértices de um triângulo centrado na origem.

Qual é perímetro desse triângulo?

(A) $2\sqrt{3}$ **(B)** $3\sqrt{3}$ **(C)** $4\sqrt{3}$ **(D)** $5\sqrt{3}$

3.

Na figura estão representados geometricamente os quatro primeiros termos de uma sucessão (u_n).



Considere a sucessão (v_n) definida por $v_n = 2^{u_n}$.

Mostre que (v_n) é uma progressão geométrica e determine a soma dos seus primeiros 100 termos.

Apresente o valor pedido na forma $a\,(b^c - 1)$, com $a \in \mathbb{Q}$ e $b, c \in \mathbb{N}$.

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, definida por $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x-3} + \dfrac{1}{e^x}$.

Considere r a assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$ e o triângulo $[OAB]$ em que O é a origem do referencial e A e B são os pontos de interseção da reta r com os eixos coordenados.

A área do triângulo $[OAB]$ é?

(A) 8 **(B)** $\dfrac{3}{2}$ **(C)** 2 **(D)** $\dfrac{25}{2}$

5. Resolva, em $\mathbb{R}$ e por processos analíticos, a inequação:

$$\log_2(x+1) + \log_{\sqrt{2}}(x) \geq 1$$

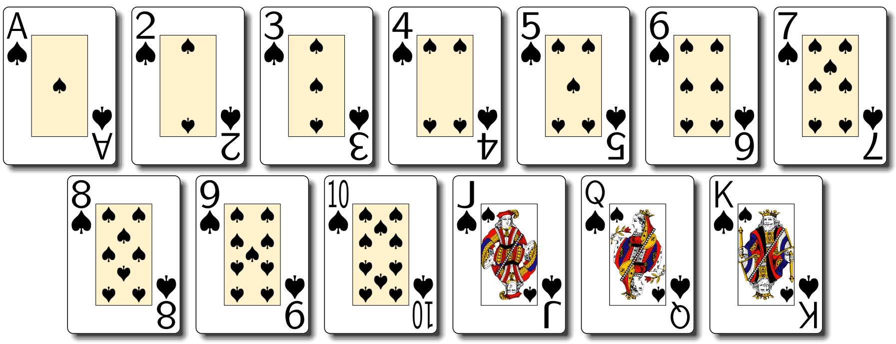
Apresente o conjunto solução utilizando a notação de intervalos de números reais.

6. Considere as funções f e g, de domínios $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$ respetivamente, definidas por $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$.

Em qual dos intervalos seguintes, o teorema de Bolzano permite garantir a existência dois pontos P e Q, com a mesma abcissa, pertencentes, respetivamente, aos gráficos de f e de g, onde as retas tangentes aos gráficos nesses pontos são paralelas?

(A) $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ **(B)** $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$ **(C)** $\left]1, \dfrac{3}{2}\right[$ **(D)** $\left]\dfrac{3}{2}, 2\right[$

7. Considere um baralho de cartas, apenas com as cartas do naipe de espadas (do ás ao dez de espadas e as figuras de espadas).



De quantas formas é possível distribuir as 13 cartas numa fila de modo que as três figuras fiquem seguidas e o ás fique num dos extremos?

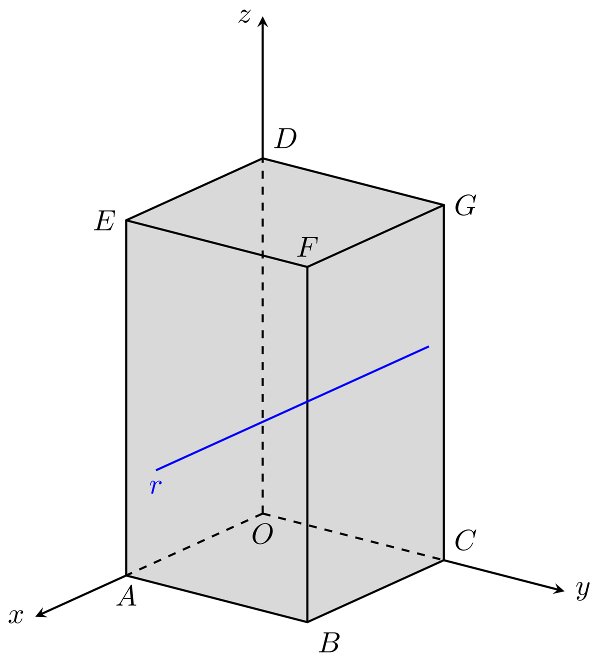
(A) $2 \times 10! \times 3!$ **(B)** $10! \times 3!$ **(C)** $2 \times 12!$ **(D)** $2 \times 9! \times 3!$

8. O coeficiente do termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^6$ é ?

(A) ${}^6C_1$ **(B)** ${}^6C_2$ **(C)** ${}^6C_3$ **(D)** $2 \times {}^6C_2$

9.

No referencial o.n. $Oxyz$ da figura, está representado um prisma quadrangular regular $[OABCDEFG]$ e parte de uma reta r.



Sabe-se que:

- o plano ACD, designado por α, é definido por $5x + 5y + 3z = 15$
- θ é a amplitude do ângulo ADC
- a reta r é definida por $(y-2)^2 + (2z-5)^2 = 0$

9.1. Determine o valor de $\cos(2\theta)$.

9.2. Seja P o ponto de intersecção da reta r com o plano α.
Escreva uma equação vetorial que defina a reta perpendicular ao plano α e que contém o ponto P.

10. Para um certo número real k é contínua a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1-x^2} - 1}{1 - \sqrt{x}} & \text{se } x > 1 \\ 2\left(e^{kx} - e^{-kx}\right) + 1 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

Qual dos seguintes é o valor de k?

(A) 1 **(B)** $\ln 2$ **(C)** $2\ln 2$ **(D)** 2

11. Seja g a função, de domínio $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right[$, definida por $g(x) = x \ln(\sin x + \cos x)$.

Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica de g e um triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- A é o ponto do gráfico de g com abcissa $\frac{\pi}{4}$
- B é o ponto gráfico de g com ordenada máxima
- C é o ponto de intersecção gráfico de g com o eixo Ox de abcissa positiva

Determine um valor aproximado para a área do triângulo $[ABC]$.

Na sua resposta deve:

- Determinar, analiticamente, a ordenada do ponto A
- Determinar, analiticamente, a abcissa do ponto C
- Representar graficamente a função g
- Desenhar o triângulo $[ABC]$
- Determinar, com ajuda da calculadora gráfica, as coordenadas do ponto B, com aproximação às milésimas
- Determinar, com aproximação às centésimas, a área do triângulo $[ABC]$

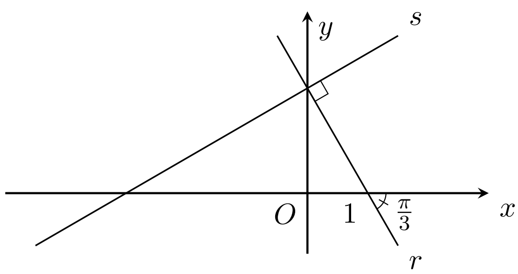
Nota: Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve três casas decimais.

12. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 8 - i$ e $w = \dfrac{z_1^3 + \overline{z_2}}{\left[e^{i\left(\frac{\pi}{5}\right)}\right]^{10} + i^{61}}$.

Determine w apresentando-o na forma trigonométrica.

13.

Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy, duas retas r e s.



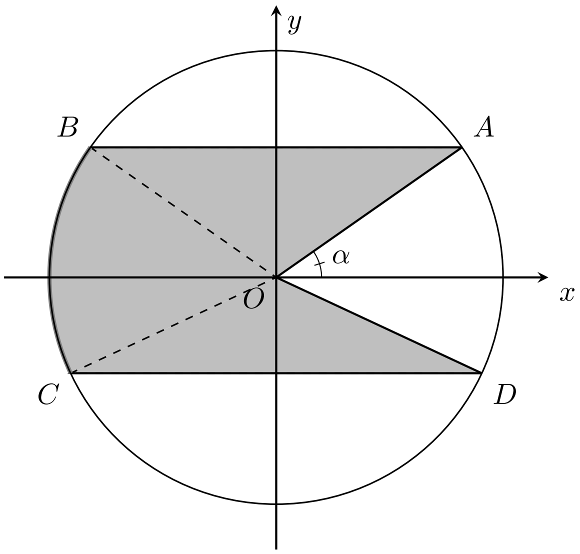
Sabe-se que:

- a reta r interseta o eixo das abcissas em $x = 1$
- a amplitude do menor ângulo formado entre a reta r e o eixo das abcissas é $\frac{\pi}{3}$
- a reta s é perpendicular à reta r e intersecta-a no ponto de abcissa nula

A abcissa do ponto de interseção da reta s com o eixo Ox é:

(A) -3 **(B)** $-\sqrt{3}$ **(C)** $-2\sqrt{3}$ **(D)** -2

14. No referencial o.n. xOy da figura encontra-se representada a circunferência trigonométrica e uma região sombreada limitada pelos segmentos de reta $[OA]$, $[AB]$, $[OD]$, $[CD]$ e pelo arco BC.



Sabe-se que:

- O é a origem do referencial
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo formado entre o semieixo positivo Ox e a semirreta $\dot{O}A$
- o ponto A desloca-se, ao longo da circunferência no primeiro quadrante, tal que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$
- o ponto D acompanha o movimento do ponto A deslocando-se sobre a circunferência, ao longo do quarto quadrante, de modo que $D\hat{O}A$ é sempre igual a $\frac{\pi}{3}$
- os pontos B e C são simétricos dos pontos A e D, respectivamente, em relação ao eixo das ordenadas

Seja A a função que a cada valor de α faz corresponder a área da região sombreada.

14.1. Mostre que:

$$A(\alpha) = \frac{\pi}{6} + \frac{3}{4}\sin(2\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos(2\alpha), \quad \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$$

14.2. Determine, por processos analíticos, o valor de α para o qual é máxima a área da região sombreada.

15. De uma função f, derivável, sabe-se $f''(2) = -3$ e que $y = 3x - 5$ define a reta tangente ao seu gráfico no ponto de abcissa 2.

Qual dos seguintes é o valor de $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f'(x) \cdot f(x) - 3}{x - 2}$?

(A) 3 **(B)** 9 **(C)** 12 **(D)** 6

FIM

Cotações

- As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

Itens	3	9.1	9.2	13	Subtotal
Cotação (pontos)	20	18	18	16	72

- Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

<table>
<tr><td rowspan="2">Itens</td><td>1.1</td><td>1.2</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td rowspan="2">Subtotal</td></tr>
<tr><td></td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>14.1</td><td>14.2</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>Cotação (pontos)</td><td colspan="8">8×16 pontos</td><td>128</td></tr>
</table>