

**Prova Modelo de Exame Nacional de Matemática A**  
**Prova 635 | Ensino Secundário | Junho de 2022**  
12º Ano de Escolaridade

Simulação de Prova 635

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

8 Páginas

- 
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
  - Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
  - É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
  - Apresente apenas uma resposta para cada item.
  - As cotações dos itens encontram-se no final da prova.
- 

## Prova em Construção

---

- A prova inclui um formulário.
  - Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
  - Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.
- 

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

**1, 3, 4, 6.1, 6.2, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2, 10, 12 e 15**

Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.

- Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.
-

# Formulário

---

## Geometria

### Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha r$  ( $\alpha$  - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  - raio)

### Área de um polígono regular:

$\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

### Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  - raio)

### Área lateral de um cone:

$\pi r g$  ( $r$  - raio da base;  $g$  - geratriz)

### Área de uma superfície esférica:

$4\pi r^2$  ( $r$  - raio)

### Volume de uma pirâmide:

$\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

### Volume de um cone:

$\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

### Volume de uma esfera:

$\frac{4}{3}\pi r^3$  ( $r$  - raio)

## Progressões:

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão ( $u_n$ ):

### Progressão aritmética:

$\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

### Progressão geométrica:

$u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

## Complexos

$$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

## Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

## Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1.

Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere  $z = e^{i\alpha}$ , com  $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ .  
Qual das opções seguintes pode ser um argumento do complexo  $w = -3i \cdot \bar{z}^2$  ?

(A)  $\frac{3\pi}{7}$

(B)  $\frac{4\pi}{7}$

(C)  $\frac{8\pi}{7}$

(D)  $\frac{13\pi}{7}$

2. No referencial o.n.  $xOy$  da figura 1 encontram-se representados uma reta  $r$  e um triângulo  $[ABC]$ .

Sabe-se que:

- a reta  $r$  é definida por  $3x + 4y = 12$
- $A$  e  $B$  são os pontos de interseção da reta  $r$  com os eixos coordenados
- $[ABC]$  é um triângulo equilátero

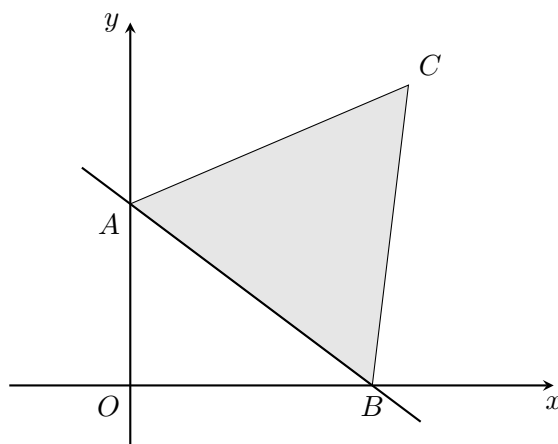


Figura 1

Determine, por processos analíticos, as coordenadas do ponto  $C$ .

3.

Na figura 2 está representado um cubo  $[ABCDEFGH]$  de aresta  $a$ .

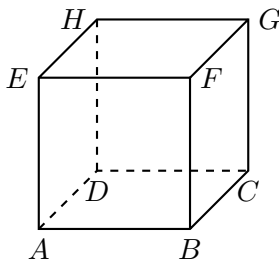


Figura 2

Em função de  $a$ , qual é o valor de  $\vec{AG} \cdot \vec{AH}$  ?

(A)  $a^2$

(B)  $2a^2$

(C)  $3a^2$

(D)  $4a^2$

4.

Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos e  $i$  a unidade imaginária.

Sem utilizar a calculadora, determine:

$$\frac{(3 + 2i)^2 + 12i^{2023}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9} + 5e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

5. Sem utilizar a calculadora, determine o conjunto de números reais que satisfazem a inequação:

$$\ln [e^x (x + 1)] \geq x - \log_{\sqrt{e}} \sqrt{x} + \ln (3 - x)$$

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais.

6.

**6.1.** EM probabilidades

**6.2.** Probabilidades (composição)

7. Seja  $(a_n)$  a sucessão de termo geral:

$$a_n = \frac{2^{n+2} + n \times 2^{n+1} + 1}{2^n}$$

Determine a soma dos 100 primeiros termos de  $(a_n)$ .

Apresente o valor pedido na forma  $\frac{a \times b^c - 1}{b^c}$ , com  $a, b, c \in \mathbb{N}$ .

8.

Na figura 3 está representado em referencial o.n.  $Oxyz$  um triângulo  $[PQR]$  e um paralelepípedo.

Sabe-se que:

- o plano  $PQR$  é definido por  $21x + 14y + 6z = 42$
- $P$ ,  $Q$  e  $R$  são vértices do paralelepípedo e pertencem aos eixos coordenados
- o paralelepípedo é retângulo e as arestas são paralelas aos eixos coordenados

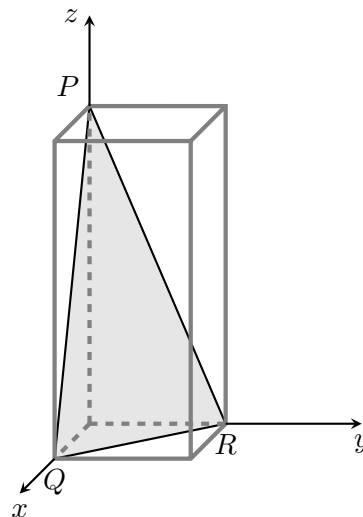


Figura 3

**8.1.** Determine o volume do paralelepípedo.

**8.2.** Defina por uma condição a superfície esférica centrada no ponto  $S$  de coordenadas  $(17, 20, 13)$  e tangente ao plano  $PQR$ .

9.

Considere a função  $g$ , de domínio  $]-\infty, \pi]$ , definida à custa de um parâmetro  $a$  não nulo, por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{e^x + x - 1} & \text{se } x < 0 \\ e^{\sqrt{3}x + \sqrt{3}\sin x + \cos x} & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

**9.1.** Qual dos seguintes é o valor de  $a$  para o qual  $g$  é contínua em  $x = 0$ ?

- (A) 1                      (B)  $e$                       (C)  $2e$                       (D)  $3e$

**9.2.** Para  $x \in ]0, \pi]$ , estude  $g$  quanto à monotonia e existência de extremos relativos.

Na sua resposta, apresente os intervalos de monotonia e o(s) maximizante(s) e minimizante(s), caso existam.

10.

EM Problemas de contagens / Probabilidades

11. Na figura 4 encontra-se representado um quarto de círculo de raio 2 e um quadrilátero  $[OABC]$ . Sabe-se que:

- $A$  é um ponto fixo no arco  $PQ$  tal que a amplitude do ângulo  $POA$  é  $\frac{\pi}{6}$  rad
- $C$  é um ponto móvel que se desloca ao longo do arco  $AQ$  nunca coincidindo com o ponto  $A$
- $B$  acompanha o movimento de  $C$  de modo que  $ABC$  se mantém reto
- $x$  é a amplitude, em radianos, do ângulo  $AOC$ , com  $x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$

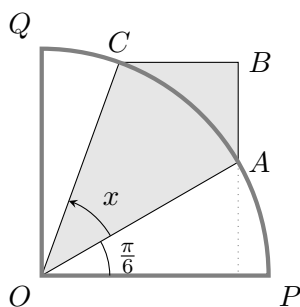


Figura 4

Seja  $f$ , a função que a cada valor de  $x$ , faz corresponder o perímetro do quadrilátero  $[OABC]$ .

Mostre que  $f(x) = 3 + \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3}) \sin x + (1 - \sqrt{3}) \cos x, \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$ .

12.

Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = x - x \ln x$ .

Sejam  $P$  e  $R$  os pontos do gráfico de  $f$  com ordenada nula.

Seja  $Q$  um ponto que se desloca ao longo do gráfico de  $f$ , nunca sendo igual ao ponto  $P$  nem igual ao ponto  $R$ .

Seja  $A$  a função que a cada abscissa  $x$  do ponto  $Q$ , faz corresponder a área do triângulo  $[PQR]$ .

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora determine, com aproximação às centésimas, as abscissas do ponto  $Q$  de modo que a área do triângulo  $[PQR]$  é igual a 1.

Na sua resposta deve:

- Determinar, analiticamente, as abscissas dos pontos  $P$  e  $R$
- Apresentar uma expressão algébrica que defina  $A(x)$  e equacionar o problema
- Resolver o problema graficamente, apresentando os gráficos visualizados na calculadora e pontos relevantes
- Indicar as possíveis abscissas do ponto  $Q$

13. Opcional Probabilidade condicionada

14. Opcional Teorema de Bolzano

15.

**FIM**

## Cotações

- As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

Itens	1	3	4	6.1	6.2	8.1	8.2	9.1	9.2	10	12	15	Subtotal
Cotação (pontos)	12	12	14	12	14	14	14	12	14	12	14	14	158

- Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Itens	2	5	7	11	13	14	Subtotal
Cotação (pontos)	$3 \times 14$ pontos						42