Proposta de resolução - prova modelo 5

1.

1.1. $w = \left(\dfrac{2\overline{z_1}^2 + z_2^3}{4i^{2019} + 4i^{2020}} + 3 + \sqrt{3}\right)^n = \left[\dfrac{2\left(\sqrt{3}+i\right)^2 + \left(2e^{i\frac{2\pi}{9}}\right)^3}{-4i+4} + 3 + \sqrt{3}\right]^n$

$$= \left[\frac{2\left(2+2\sqrt{3}i\right) + 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}{4\left(1-i\right)} + 3 + 3\sqrt{3}\right]^n = \left(\frac{4+4\sqrt{3}i - 4 + 4\sqrt{3}i}{4\left(1-i\right)} + 3 + \sqrt{3}\right)^n$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{3}i}{1-i} + 3 + \sqrt{3}\right)^n = \left(\frac{2\sqrt{3}i - 2\sqrt{3}}{2} + 3 + \sqrt{3}\right)^n = \left(3 + \sqrt{3}i\right)^n = \left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n$$

$$= \left(2\sqrt{3}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$$

w é um número real se:

$$\frac{n\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

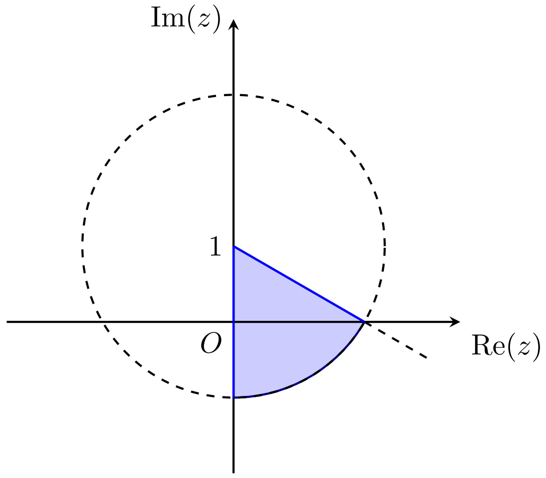
$$\Leftrightarrow n = 6k, k \in \mathbb{Z}$$

O menor número natural para o qual w é um número real é $n = 6$, quando $k = 1$.

1.2.

$$|z - i| \leq |z_2| \wedge -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}\left(z - i\right) \leq \operatorname{Arg}\left(z_1\right)$$

$$\Leftrightarrow |z - i| \leq 2 \wedge -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}\left(z - i\right) \leq -\frac{\pi}{6}$$



2.

2.1. $A\left(x, 0, 0\right)$

$$x - 0 + 0 = 2 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow A\left(2, 0, 0\right)$$

$$AD \perp ABC \Rightarrow \overrightarrow{n} = (1,-1,1) \parallel AD$$

Uma equação vetorial que define a reta AD é, por exemplo:

$$(x,y,z) = (2,0,0) + k\,(1,-1,1)\,, k \in \mathbb{R}$$

2.2. Por 2.1 $D\,(2+k,-k,k)$ para algum $k \in \mathbb{R}$

$$A_{[ABC]} = \frac{2 \times 2 \sin\frac{\pi}{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$V_{[ABCDEF]} = A_{[ABC]} \times \overline{AD} \Leftrightarrow 18 = 2\sqrt{3} \times \overline{AD} \Leftrightarrow \overline{AD} = 3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2+k-2)^2 + (-k-0)^2 + (k-0)^2} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}|k| = 3\sqrt{3}$$

$$|k| = 3 \Leftrightarrow k = \pm 3 \Rightarrow k = 3$$

Assim $D\,(5,-3,3)$

2.3. Casos possíveis: ${}^6C_3$ número de conjuntos de três dos seis vértices do prisma
Casos favoráveis: ${}^4C_3 \times 3$: 3 representa o número de faces retangulares e ${}^4C_3$ representa o número de formas de escolher três dos quatro vértices numa face retangular.

$$P = \frac{{}^4C_3 \times 3}{{}^6C_3} = \frac{3}{5}$$

3.

$$\lim\left(2 - \frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{n^2} = \lim\left(\frac{2n^2+2-n^2-3}{n^2+1}\right)^{n^2} = \lim\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2} = \frac{\lim\left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{n^2}}{\lim\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} = \frac{e^{-1}}{e} = \frac{1}{e^2}$$

Opção **D**

4. **(A)** é falsa pois g é crescente em $[a,b]$, uma vez que $g'(x) > 0,\ \forall x \in \,]a,b[$

(B) é falsa pois g tem dois extremos relativos: $g(a)$ é mínimo relativo e $g(b)$ é máximo relativo

(C) é verdadeira pois g' é decrescente em $]-\infty,a[$ e decrescente em $]a,+\infty[$

(D) é falsa pois g' é decrescente à esquerda de $x=a$ e decrescente à direita de $x=a$, ou seja, não existe mudança de sinal na segunda derivada de g.

Opção **C**

5.

5.1. Seja h a altura do triângulo $[PQR]$ em relação à base $[QR]$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \frac{h}{1} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \overline{PQ}\sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \overline{PQ} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \Leftrightarrow$$

$$\overline{PQ}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\Leftrightarrow 3\overline{PQ}=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\Leftrightarrow P_{[PQR]}=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\Leftrightarrow$$

$$P_{[PQR]}=2\sqrt{3}\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\sin x\cos\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow P_{[PQR]}=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow P_{[PQR]}=3\cos x-\sqrt{3}\sin x$$

5.2.

$$P\left(x\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow 3\cos x-\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow$$

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)=1\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{6}+x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\vee\frac{\pi}{6}+x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\vee x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

A única solução em $\left]0,\frac{\pi}{3}\right[$ é $x=\frac{\pi}{6}$

Assim, o valor de x para o qual o perímetro do triângulo $[PQR]$ é $\sqrt{3}$ é $x=\frac{\pi}{6}$.

6.

$$m_t=f'(5)$$

$$f'\left(x\right)=\frac{3\left(x-2\right)^2}{\left(x-2\right)^3}=\frac{3}{x-2}$$

$$f'\left(5\right)=\frac{3}{5-2}=1$$

A inclinação da reta t é $\arctan\left(f'\left(5\right)\right)=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$

Como $A\hat{B}C=\dfrac{\pi}{3}$, então a inclinação da reta BC é $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{7\pi}{12}$

Opção **A**

7.

$$\frac{P\left(A|\overline{B}\right)\times\left(1-P\left(B\right)\right)}{P\left(A\right)}\times P\left(\overline{A}\right)+P\left(A\cap\overline{B}\right)=\frac{P\left(A|\overline{B}\right)\times P\left(\overline{B}\right)}{P\left(A\right)}\times\left(1-P\left(A\right)\right)+P\left(A\cap\overline{B}\right)=$$

$$\frac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(A\right)}\times\left(1-P\left(A\right)\right)+P\left(A\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{B}|A\right)-P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(A\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{B}|A\right)$$

8. Essa linha do triângulo de Pascal tem 2021 elementos, doze dos quais são inferiores ou iguais a ${}^{2020}C_5$ que são: os seis primeiros elementos (${}^{2020}C_0$, ${}^{2020}C_1$, ${}^{2020}C_2$, ${}^{2020}C_3$, ${}^{2020}C_4$ e ${}^{2020}C_5$) e os seis últimos elementos (${}^{2020}C_{2015}$, ${}^{2020}C_{2016}$, ${}^{2020}C_{2017}$, ${}^{2020}C_{2018}$, ${}^{2020}C_{2019}$ e ${}^{2020}C_{2020}$).

Assim $2021 - 12 = 2009$ dos elementos dessa linha são superiores a ${}^{2020}C_5$.

Opção **B**

9. ${}^{7}C_5 \times 8^2$ onde ${}^{7}C_5$ representa o número de formas de escolher 5 das 7 posições onde colocar os algarismos 2 e 8^2 representa o número de formas de preencher as restantes duas posições com algarismos diferentes de 2, mas podendo ser iguais entre si.

Opção **A**

10.

10.1. Seja $P_1\left(-3,0\right)$ e $P_2\left(0,1\right)$, então $m = \dfrac{1-0}{0+3} = \dfrac{1}{3}$ é o declive da assintota oblíqua ao gráfico de h. 1 é a ordenada na origem da assíntota oblíqua ao gráfico de h.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x - 3h\left(x\right) + \frac{x}{h\left(x\right)}\right) = -3\lim_{x\to+\infty}\left(h\left(x\right) - \frac{1}{3}x\right) + \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}} = -3\times1+\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3+3 = 0$$

Opção **A**

10.2.

$$\lim\left(u_n\right) = \lim\frac{\ln\left(n\right)}{n} = 0^+$$

$$\lim\left(v_n\right) = \lim\left(e^{-n} - n^2\right) = e^{-\infty} - \left(+\infty\right)^2 = 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim\left[h\left(u_n\right) + h\left(v_n\right)\right] = h\left(0^+\right) + h\left(-\infty\right) = 0 + \left(-1\right) = -1$$

Opção **C**

11.

11.1.

$$f\left(3e\right) = 3e\ln\left(3e\right)^2 = 2\times3e\left(\ln3+\ln e\right) = 6e\left(\frac{\log_3 3}{\log_3 e} + 1\right) = 6e\left(1 + \frac{1}{\log_3 e}\right)$$

11.2.

$$f'\left(x\right) = \ln x^2 + x \times \frac{2x}{x^2} = 2 + \ln x^2$$

$$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow 2 + \ln x^2 = 0 \Leftrightarrow \ln x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = e^{-2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{e^2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{e}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$		0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'\left(x\right)$	+	0	-	n.d.	-	0	+
f	$\uparrow$	Max.	$\downarrow$	n.d.	$\downarrow$	Min.	$\uparrow$

f é crescente em $\left]-\infty, -\frac{1}{e}\right]$ e em $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$

f é decrescente em $\left[-\frac{1}{e}, 0\right[$ e em $\left]0, \frac{1}{e}\right]$

$f\left(-\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$ é máximo relativo de f e $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{2}{e}$ é mínimo relativo de f

12.

$$w = z_2 - \overline{z_1}^2 = 2i - \left(e^{i(-\alpha)}\right)^2 = 2i - e^{i(-2\alpha)} = 2i - \cos(-2\alpha) - i\sin(-2\alpha)$$

$$= -\cos(2\alpha) + i\left(2 + \sin(2\alpha)\right)$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(2\alpha) > 0 \wedge \sin(2\alpha) > 0 \Rightarrow -\cos(2\alpha) < 0 \wedge 2 + \sin(2\alpha) > 2$$

Assim, a única opção que verifica estas condições é a opção **C**

13.

13.1.

$$g(0) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4\left(2-\sqrt{x+4}\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{4\left(4-\left(\sqrt{x+4}\right)^2\right)}{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)} = 4\lim_{x\to 0^+} \frac{4-x-4}{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)} =$$

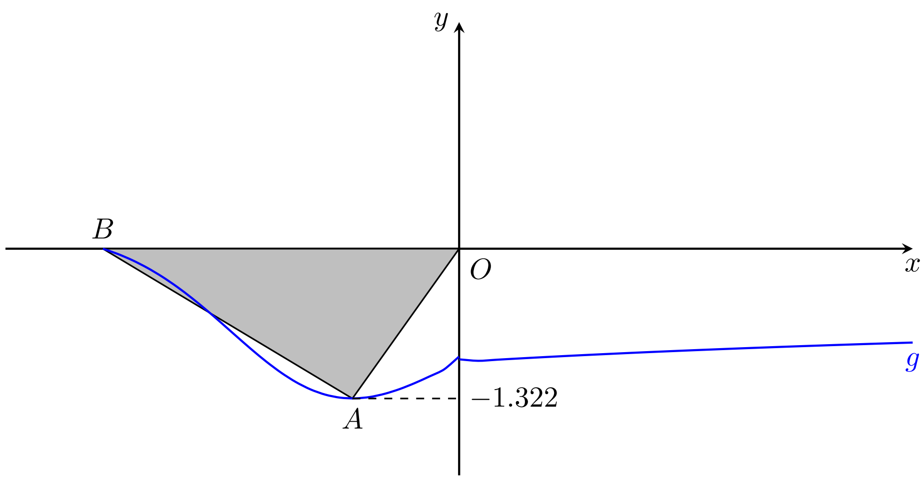
$$-4\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2+\sqrt{x+4}} = -4 \times \frac{1}{4} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\sin x}-1}{x} = -\lim_{-\sin x\to 0^+} \frac{e^{-\sin x}-1}{-\sin x} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = -1 \times 1 = -1$$

Como $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$, então g é contínua em $x = 0$

13.2.

$$g(-\pi) = \frac{e^{-\sin\pi}-1}{-\pi} = \frac{e^0-1}{-\pi} = 0$$



$$A_{[OAB]} = \frac{\pi \times 1.322}{2} \approx 2.1$$