Prova Modelo de Exame Nacional de Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Junho de 2022
12.º Ano de Escolaridade

Simulação de Prova 635

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

Prova em Construção

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

  1, **3**, **4**, **6.1**, **6.2**, **8.1**, **8.2**, **9.1**, **9.2**, **10**, **12** e **15**

  Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.
- Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular:

Semiperímetro $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone:

$\pi r g$ (r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica:

$4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide:

$\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone:

$\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera:

$\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões:

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética:

$$\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

Progressão geométrica:

$$u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, ..., n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = e^{i\alpha}$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

Qual das opções seguintes pode ser um argumento do complexo $w = -3i \cdot \overline{z}^2$?

(A) $\frac{3\pi}{7}$ **(B)** $\frac{4\pi}{7}$ **(C)** $\frac{8\pi}{7}$ **(D)** $\frac{13\pi}{7}$

2. No referencial o.n. xOy da figura 1 encontram-se representados uma reta r e um triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- a reta r é definida por $3x + 4y = 12$
- A e B são os pontos de interseção da reta r com os eixos coordenados
- $[ABC]$ é um triângulo equilátero

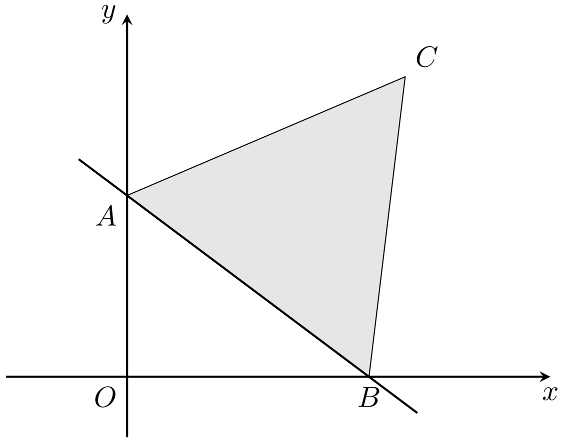

Figura 1

Determine, por processos analíticos, as coordenadas do ponto C.

3.

Na figura 2 está representado um cubo $[ABCDEFGH]$ de aresta a.

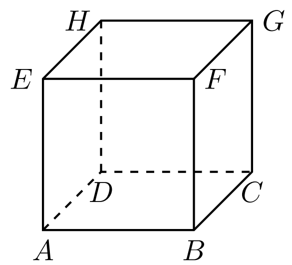

Figura 2

Em função de a, qual é o valor de $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH}$?

(A) a^2 **(B)** $2a^2$ **(C)** $3a^2$ **(D)** $4a^2$

4.

Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos e i a unidade imaginária.

Sem utilizar a calculadora, determine:

$$\frac{(3+2i)^2 + 12i^{2023}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9} + 5e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

5. Sem utilizar a calculadora, determine o conjunto de números reais que satisfazem a inequação:

$$\ln\left[e^x (x+1)\right] \geq x - \log_{\sqrt{e}} \sqrt{x} + \ln(3-x)$$

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais.

6.

6.1. EM probabilidades

6.2. Probabilidades

7. Seja (a_n) a sucessão de termo geral:

$$a_n = \frac{2^{n+2} + n \times 2^{n+1} + 1}{2^n}$$

Determine a soma dos 100 primeiros termos de (a_n).

Apresente o valor pedido na forma $\dfrac{a \times b^c - 1}{b^c}$, com $a, b, c \in \mathbb{N}$.

8.

Na figura 3 está representado em referencial o.n. $Oxyz$ um triângulo $[PQR]$ e um paralelepípedo.

Sabe-se que:

- o plano PQR é definido por $21x + 14y + 6z = 42$
- P, Q e R são vértices do paralelepípedo e pertencem aos eixos coordenados
- o paralelepípedo é retângulo e as arestas são paralelas ao eixos coordenados

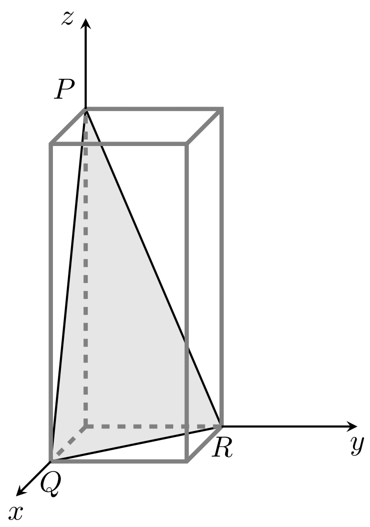

Figura 3

8.1. Determine o volume do paralelepípedo.

8.2. Defina por uma condição a superfície esférica centrada no ponto S de coordenadas $(17, 20, 13)$ e tangente ao plano PQR.

9.

Considere a função g, de domínio $]-\infty, \pi]$, definida à custa de um parâmetro a não nulo, por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{e^x + x - 1} & \text{se } x < 0 \\[2ex] e^{\sqrt{3}x + \sqrt{3}\sin x + \cos x} & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

9.1. Qual dos seguintes é o valor de a para o qual g é contínua em $x = 0$?

(A) 1 **(B)** e **(C)** $2e$ **(D)** $3e$

9.2. Para $x \in]0, \pi]$, estude g quanto à monotonia e existência de extremos relativos.
Na sua resposta, apresente os intervalos de monotonia e o(s) maximizante(s) e minimizante(s), caso existam.

10.

Seja (a_n) a sucessão convergente de termos positivos, definida recursivamente, por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n}, \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

Qual dos seguintes é o valor $\lim a_n$?

Sugestão: Repare que $\lim a_{n+1} = \lim a_n$. Considere $s = \lim a_n$.

(A) 2 **(B)** $\sqrt{2}$ **(C)** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ **(D)** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

11. Na figura 4 encontra-se representado um quarto de círculo de raio 2 e um quadrilátero $[OABC]$. Sabe-se que:

- A é um ponto fixo no arco PQ tal que a amplitude to ângulo POA é $\dfrac{\pi}{6}$ rad
- C é um ponto móvel que se desloca ao longo do arco AQ nunca coincidindo com o ponto A
- B acompanha o movimento de C de modo que ABC se mantém reto
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo AOC, com $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{3}\right]$

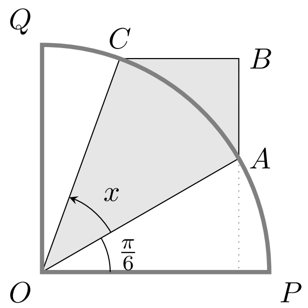

Figura 4

Seja f, a função que a cada valor de x, faz corresponder o perímetro do quadrilátero $[OABC]$. Mostre que $f(x) = 3 + \sqrt{3} + \left(1 + \sqrt{3}\right) \sin x + \left(1 - \sqrt{3}\right) \cos x$, $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

12.

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x - x\ln x$.

Seja O a origem do referencial e P o ponto do gráfico de f com ordenada nula.

Seja Q um ponto que se desloca ao longo do gráfico de f, nunca sendo igual ao ponto P.

Seja A a função que a cada abcissa x do ponto Q, faz corresponder a área do triângulo $[OPQ]$.

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora determine, com aproximação às centésimas, as abcissas do ponto Q de modo que a área do triângulo $[OPQ]$ seja igual a 1.

Na sua resposta deve:

- Determinar, analiticamente, a abcissa do ponto P
- Apresentar uma expressão algébrica que defina $A(x)$ e equacionar o problema
- Resolver o problema graficamente, apresentando os gráficos visualizados na calculadora e pontos relevantes
- Indicar as possíveis abcissas do ponto Q

13. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), de probabilidade não nula.

Sabe-se que:

$$2P(A) + P\left(\overline{A} \cup B\right) = 1 + 5P\left(A \cap \overline{B}\right)$$

Determine a probabilidade de B acontecer, sabendo que A aconteceu.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

14. Opcional Teorema de Bolzano

15.

Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que:

- A reta de equação $y = 3x - 1$ é assíntota do gráfico de f
- $g(x) = \ln\left(e^{f(x)} + e^{3x}\right)$

Mostre que a reta de equação $y = 3x + \ln\left(\dfrac{1+e}{e}\right)$ é assíntota do gráfico de g.

FIM

Cotações

- As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

Itens	1	3	4	6.1	6.2	8.1	8.2	9.1	9.2	10	12	15	Subtotal
Cotação (pontos)	12	12	14	12	14	14	14	12	14	12	14	14	158

- Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Itens	2	5	7	11	13	14	Subtotal
Cotação (pontos)	3×14 pontos						42