1. Resolva, em $\mathbb{R}$ e por processos analíticos, a inequação:

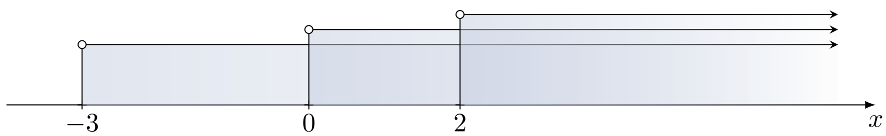
$$\log_2(x-2) \leq 1 + \log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x}\right) - \log_4(x+3)$$

Apresente o conjunto solução utilizando a notação de intervalos de números reais.

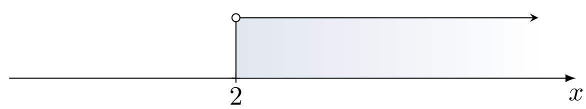
Proposta de resolução:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 > 0 \wedge \sqrt{x} > 0 \wedge x \geq 0 \wedge x + 3 > 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x > 2 \wedge x > 0 \wedge x > -3\}$$



$$D =]2, \ +\infty[$$



$$\log_2(x-2) \leq 1 + \log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x}\right) - \log_4(x+3) \Leftrightarrow$$

$$\log_2(x-2) + \log_4(x+3) \leq 1 + \frac{\log_2 \sqrt{x}}{\log_2 \sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\log_2(x-2) + \frac{\log_2(x+3)}{\log_2 4} \leq 1 + \frac{\frac{1}{2}\log_2 x}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\log_2(x-2) + \frac{1}{2}\log_2(x+3) \leq 1 + \log_2 x \Leftrightarrow$$

$$2\log_2(x-2) + \log_2(x+3) \leq 2 + 2\log_2 x \Leftrightarrow$$

$$\log_2\left[(x-2)^2(x+3)\right] \leq \log_2\left(4x^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2 - 4x + 4\right)(x+3) \leq 4x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^3 + 3x^2 - 4x^2 - 12x + 4x + 12 - 4x^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$x^3 - 5x^2 - 8x + 12 \leq 0$$

Os divisores do termo independente 12 são: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12 e -12.

Testando para $x = 1$:

$$1^3 - 5 \times 1^2 - 8 \times 1 + 12 = 1 - 5 - 8 + 12 = 0$$

Assim 1 é raíz do polinómio $x^3 - 5x^2 - 8x + 12$.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & -8 & 12 \\ 1 & & 1 & -4 & -12 \\ \hline & 1 & -4 & -12 & 0 \end{array}$$

Logo:

$$x^3 - 5x^2 - 8x + 12 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 - 4x - 12\right) \leq 0$$

Aplicando a fórmula resolvente:

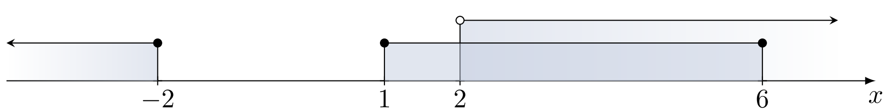
$$x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \times 12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 8}{2} \Leftrightarrow x = 6 \vee x = -2$$

Então:

$$(x-1)\left(x^2 - 4x - 12\right) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-6)(x+2) \leq 0$$

x	$-\infty$	-2		1		6	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$x-6$	-	-	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
P	-	0	+	0	-	0	+

$$C.S =]2, +\infty[\cap (]-\infty, -2] \cup [1, 6])$$



$$C.S =]2, 6]$$