Primeiro teste - Matemática A
Ensino Secundário | Novembro de 2021
12º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 10 minutos. 4 Páginas

---

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n > 2$ e $p \in \{0, 1, ..., n-2\}$.

Qual das opções seguintes é igual a ${}^{n+1}C_{n-p} -{}^{n} C_p +{}^{n} C_{p+2}$?

(A) ${}^{n}C_{p+2}$ **(B)** ${}^{n+1}C_{p+2}$ **(C)** ${}^{n}C_{p+3}$ **(D)** ${}^{n+1}C_{p+3}$

2. Considere uma pirâmide reta cuja base é um polígono regular com n lados.

Sabe-se que escolhendo três dos vértices da pirâmide podem ser definidos 29 planos distintos.

Determine o valor de n.

3. Num saco opaco estão cartões, uns quadrangulares outros circulares, com um algarismo de 1 a 9 inscrito.

Na figura 1, estão exemplificados alguns dos cartões que estão dentro do saco:

Figura 1

Na experiência aleatória que consiste em retirar do saco um cartão, ao acaso, e verificar o seu formato e o número nele inscrito, sabe-se que:

- 40% dos cartões são circulares;
- Dos cartões quadrados, um em cada três, têm inscrito um número par.

3.1. Qual é a probabilidade de retirar um cartão quadrado com um número ímpar inscrito?
Apresente o valor pedido na forma de fração irredutível.

3.2. Considere o saco com a sua constituição inicial. Sabe-se que estão no saco 60 cartões.
Vão ser extraídos, ao acaso, cinco cartões do saco e colocados lado a lado de modo a formar um número com cinco algarismos.
Qual é a probabilidade desse número ser ímpar e os cartões retirados serem todos quadrados?
Apresente o valor pedido com aproximação às centésimas.

4. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos possíveis de Ω ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Prove que:

$$P\left[A|\overline{A \cap B}\right] \times \left[1 - P\left(A \cap B\right)\right] + P\left(B\right) \times P\left(A|B\right) = P\left(A\right)$$

5. Um dos termos no desenvolvimento de $\left(\pi^2 + \dfrac{1}{\pi}\right)^n$ é $a\pi^7$, com $a \in \mathbb{N}$.

Qual dos seguintes pode ser o valor de n?

(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 16

6. No referencial o.n. $Oxyz$ da figura 2 encontra-se representado um prisma quadrangular regular.

Sabe-se que:

- Alguns dos vértices do prisma estão designados pelas letras A, B, C e D
- $\overrightarrow{EA} = (1, 3, 2)$
- $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, -1)$
- o vértice C tem coordenadas $(2, 5, 4)$

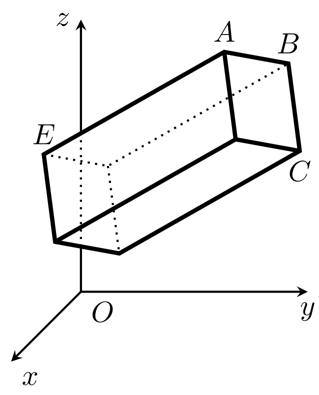

Figura 2

6.1. Defina por uma equação o plano paralelo a ABC e que contém o ponto E.
Apresente a sua resposta na forma $ax + by + cz + d = 0$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

6.2. Os restantes vértices do prisma vão ser designados, ao acaso, pelas letras D, F, G e H.
Qual dos valores seguintes é a probabilidade do plano EGH conter uma das faces do prisma?

(A) $\frac{5}{12}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{5}{24}$

7. No tabuleiro de xadrez, da figura 3, vão ser colocadas colocadas oito peças de xadrez: três peões pretos, dois peões brancos, o rei branco, a rainha branca e o rei preto, uma peça por cada casa do tabuleiro.

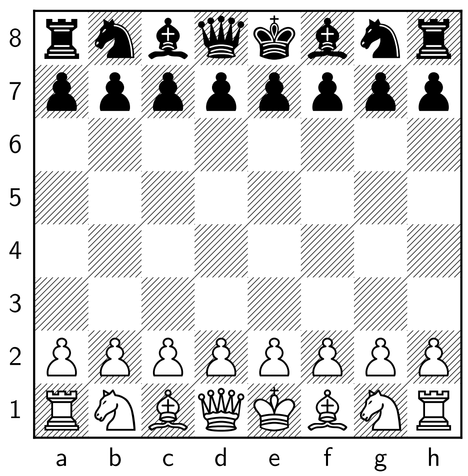

Figura 3

De quantas formas é possível colocar estas oito peças no tabuleiro de modo que elas fiquem na mesma fila, vertical ou horizontal, e as peças da mesma cor fiquem juntas?

(A) 512 **(B)** 1536 **(C)** 18432 **(D)** 9216

8. Novas matrículas nos automóveis em Portugal estão em circulação desde Março de 2020.

Essas novas matrículas consistem numa sequência de duas letras, seguidas de dois algarismos e novamente seguidas de duas letras.

As letras são escolhidas a partir do alfabeto português, com a inclusão das letras y, k e w. Ou seja, 26 escolhas possíveis para cada letra.

Os algarismos são escolhidos de entre 0 a 9.

Admita-se que não há restrições para a escolha das sequências de letras, nem para a sequência de algarismos.

Na figura 4 está representado um exemplo destas novas matrículas:

Figura 4

8.1. Quantas destas novas matrículas existem (ou poderão existir) de modo a que quando lidas da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda se obtém a mesma sequência?

8.2. Do conjunto de todas as novas matrículas possíveis de existir, considere a experiência aleatória que consiste em escolher uma delas ao acaso.
Considere os acontecimentos:

- A: "As duas sequências de letras na matrícula escolhida são iguais"
- B: "Todas as letras na matrícula são vogais"

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, determine o valor de $P\left(A|B\right)$.
Apresente o valor pedido na forma de fracção irredutível.
Nota: Considere que "y" é uma vogal.

9. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos possíveis de Ω ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- A e B são equiprováveis
- $P\left(A|B\right) = \dfrac{1}{3}$

Qual dos seguintes é o valor de $P\left(\overline{B}|A\right)$

(A) $\dfrac{1}{3}$ **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** 1 **(D)** $\dfrac{2}{3}$

FIM

Cotações

Itens	1	2	3.1	3.2	4	5	6.1	6.2	7	8.1	8.2	9	Total
Cotação (pontos)	15	20	15	20	20	15	20	15	15	15	15	15	200

Segundo teste - Matemática A
Ensino Secundário | Dezembro de 2021
12º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 10 minutos. 4 Páginas

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

1. No referencial o.n. da figura 5 está parcialmente representada uma função f.

Tal como a figura sugere, as retas de equação $x = 0$, $x = 2$ e $y = 0$ são as únicas assíntotas do gráfico de f

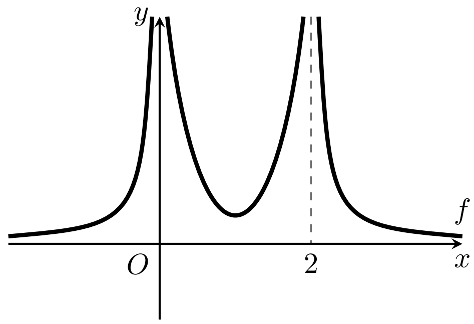

Figura 5

De uma determinada sucessão (u_n) sabe-se que $\lim f(u_n) = +\infty$

Qual das opções seguintes não pode ser o termo geral da sucessão (u_n)?

(A) $\dfrac{1}{n}$ **(B)** $\dfrac{2n+1}{n}$ **(C)** $\dfrac{n+2}{n}$ **(D)** $\dfrac{n+1}{n^2}$

2. Aos professores do grupo de Matemática de um determinado agrupamento de escolas foi-lhes proposto fazer formações no âmbito das novas tecnologias.

Foram propostas duas formações: "Formação em Geogebra" e "Formação em LaTeX", tendo os professores a liberdade de escolher fazer uma delas, ambas ou nenhuma.

Após terminadas as inscrições para as formações, sabe-se que:

- 60% dos professores inscreveram-se na formação em Geogebra
- 20% dos professores inscreveram-se em ambas as formações
- dos professores que não se inscreveram na formação em Geogebra, 75% também não se inscreveu na formação em LaTeX

2.1. Escolhendo, ao acaso, um professor que se inscreveu na formação em LaTeX, qual é a probabilidade de não se ter inscrito na formação em Geogebra?

Apresente o valor pedido na forma de fração irredutível.

2.2. Sabe-se que o agrupamento de escolas tem 30 professores de Matemática.

De quantas formas distintas se podem escolher quatro professores que se tenham inscrito em apenas uma das formações?

(A) 15 **(B)** 495 **(C)** 1365 **(D)** 5985

3. Considere duas funções f e g contínuas, tais que:

- o domínio de f é $\mathbb{R}$ e o domínio de g é $[-2, 2]$
- f é estritamente crescente
- g é ímpar e $g(2) = 3$

Prove que existe pelo menos um valor $c \in \left]-2, 2\right[$ tal que $(f \circ g)(c) = f(0)$

4. Para um determinado número real a e um determinado número real b, considere a função f, definida em $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}}{3-x} & \text{se} \quad x < 1 \\ a & \text{se} \quad x = 1 \\ b + \dfrac{x^2-1}{\sqrt{3x+1}-2} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

4.1. O gráfico de f apresenta uma assíntota horizontal quando $x \to -\infty$.
Defina-a por uma equação.

4.2. Sabendo que f é contínua em $x = 1$, determine os valores de a e de b.

5. Na figura 6 encontra-se parcialmente representado o gráfico de uma função h de domínio $\mathbb{R}^+$ e uma reta r.

Tal como a figura sugere:

- A reta r é assíntota ao gráfico de de h
- A reta r interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 2
- A reta r interseta o eixo Oy no ponto de ordenada -1

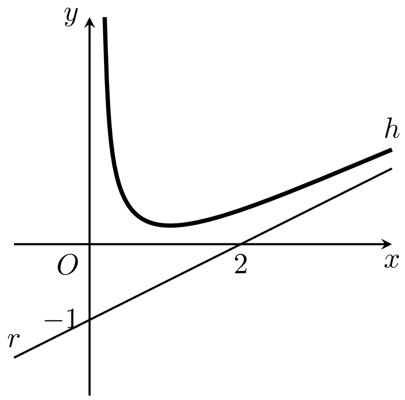

Figura 6

Qual dos seguintes é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x \cdot h(x) - x^2}{h(x)}$?

(A) 4 **(B)** 2 **(C)** -2 **(D)** -4

6. Qual dos seguintes é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{3x^2 + \sin(2x)}$?

(A) $\dfrac{3}{2}$ **(B)** $\dfrac{2}{3}$ **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

7. De uma função g, derivável, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{7}{2}\}$, sabe-se que $g'(x) = \dfrac{2x^2-12}{2x+7}$.

Resolva os dois itens seguintes por processos analíticos.

7.1. O valor de $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x^2-81}{g(x)-g(9)}$ é?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

7.2. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e existência de pontos de inflexão.

8. Dos dois itens seguintes, resolva apenas um deles à sua escolha:

8.1. Na figura 7 encontra-se parcialmente representado o gráfico de uma função quadrática f e duas retas r e s tangentes ao gráfico de f.

Tal como a figura sugere:

- -1 e 3 são os zeros de f
- a reta r é tangente ao gráfico em $x = -1$
- a reta s é tangente ao gráfico em $x = 3$
- as retas r e s são perpendiculares

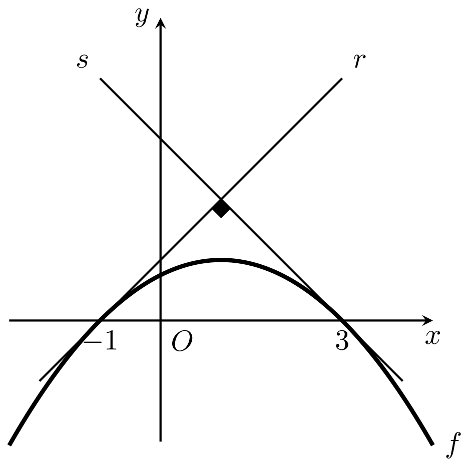

Figura 7

Determine uma expressão analítica que defina a função f.

8.2. Na figura 8 está parcialmente representado o gráfico da função g, de domínio $[-5, +\infty[$, definida por $g(x) = \sqrt{x+5}$ e uma reta r.

Tal como a figura sugere:

- a reta r é tangente ao gráfico de g num ponto de abcissa a, com $a < 0$
- a reta r interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 3

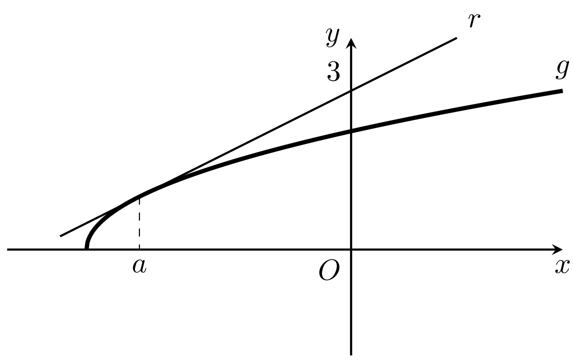

Figura 8

Determine o valor de a.

9. De uma progressão geométrica crescente (a_n) sabe-se que:

- $a_1 = 6$
- $a_5 - a_3 = 432$

Determine a soma dos primeiros 20 termos de ordem ímpar da sucessão (a_n).

Apresente o valor pedido na forma $a \cdot (b^c - 1)$, com $a \in \mathbb{Q}$ e $b, c \in \mathbb{N}$.

FIM

Cotações

Itens	1	2.1	2.2	3	4.1	4.2	5	6	7.1	7.2	8	9	Total
Cotação (pontos)	15	20	15	20	15	20	15	15	15	15	15	20	200

Resoluções

Proposta de resolução do 1.º teste

1.

$$^{n+1}C_{n-p} -^{n} C_p +^{n} C_{p+2} =^{n+1} C_{p+1} -^{n} C_p +^{n} C_{p+2} =^{n} C_p +^{n} C_{p+1} -^{n} C_p +^{n} C_{p+2} =$$

$$^{n}C_{p+1} +^{n} C_{p+2} =^{n+1} C_{p+2}$$

Opção B

2.

$$^{n+1}C_3 -^{n} C_3 + 1 = 29 \Leftrightarrow \frac{(n+1)\times n \times (n-1)}{3!} - \frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{3!} = 28 \Leftrightarrow$$

$$n \times (n-1) \times [n+1-n+2] = 168 \Leftrightarrow n^2 - n - 56 = 0 \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\times 56}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 15}{2} \Rightarrow n = 8$$

3. A: "O cartão é circular"

B: "O cartão tem um número par inscrito"

$$P(A) = 0.4$$
$$P\left(B|\overline{A}\right) = \frac{1}{3}$$

3.1. $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) =?$

$$\frac{P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P\left(\overline{A}\cap B\right) = \frac{0.6}{3} \Leftrightarrow P\left(\overline{A}\cap B\right) = 0.2$$

$$P\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{A}\cap B\right) + P\left(\overline{A}\cap \overline{B}\right) \Leftrightarrow 0.6 = 0.2 + P\left(\overline{A}\cap \overline{B}\right) \Rightarrow P\left(\overline{A}\cap \overline{B}\right) = 0.4 = \frac{2}{5}$$

3.2. $60 \times 0.4 = 24$ cartões circulares

$60 - 24 = 36$ cartões quadrados

$\frac{36}{3} = 12$ cartões quadrados com um número par inscrito

$36 - 12 = 24$ cartões quadrados um número ímpar inscrito

$$p = \frac{24 \times^{35} A_4}{^{60}A_5} \approx 0.05$$

4.

$$P\left[A|\overline{A\cap B}\right]\times\left[1-P\left(A\cap B\right)\right]+P\left(B\right)\times P\left(A|B\right)=$$

$$\frac{P\left[A\cap\overline{A\cap B}\right]}{P\left(\overline{A\cap B}\right)}\times P\left(\overline{A\cap B}\right)+P\left(A\cap B\right)=$$

$$P\left[A\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right]+P\left(A\cap B\right)=$$

$$P\left[\left(A\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\right]+P\left(A\cap B\right)=$$

$$P\left[\emptyset\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\right]+P\left(A\cap B\right)=$$

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)$$

5.

$$T={}^nC_p\left(\pi^2\right)^{n-p}\times\left(\frac{1}{\pi}\right)^p={}^nC_p\times\pi^{2n-3p}$$

n e p têm que ser inteiros não negativos, com $p\leq n$

Se $n=8$, então $2\times8-3p=7\Rightarrow 3p=9\Rightarrow p=3\in\mathbb{N}_0$

Se $n=10$, então $2\times10-3p=7\Rightarrow 3p=13\Rightarrow p=\frac{13}{3}\notin\mathbb{N}_0$

Se $n=12$, então $2\times12-3p=7\Rightarrow 3p=17\Rightarrow p=\frac{17}{3}\notin\mathbb{N}_0$

Se $n=16$, então $2\times16-3p=7\Rightarrow 3p=25\Rightarrow p=\frac{25}{3}\notin\mathbb{N}_0$

Opção A

6.

6.1.

$$E=C-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{EA}=(2,5,4)-(-1,1,-1)-(1,3,2)=(2,1,3)$$

$$(x-2)+3\left(y-1\right)+2\left(z-3\right)=0\Leftrightarrow x+3y+2z-11=0$$

6.2.

$$p=\frac{\left(2!+{}^3A_2\right)\times2!}{4!}=\frac{2}{3}$$

Opção C

7.

$$2\times8\times2\times{}^4C_3\times{}^4C_2\times2!=1536$$

Opção B

8.

8.1.

$$26^2 \times 10 = 6760$$

8.2.

$$P\left(A|B\right) = \frac{6^2}{6^4} = \frac{1}{36}$$

9.

$$P\left(B\right) = P\left(A\right)$$

$$\frac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{3} \times P\left(B\right) \Leftrightarrow P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{3} \times P\left(A\right)$$

$$P\left(\overline{B}|A\right) = \frac{P\left(\overline{B} \cap A\right)}{P\left(A\right)} = \frac{P\left(A\right) - P\left(A \cap B\right)}{P\left(A\right)} = \frac{P\left(A\right) - \frac{1}{3} \times P\left(A\right)}{P\left(A\right)} = \frac{\frac{2}{3} \times P\left(A\right)}{P\left(A\right)} = \frac{2}{3}$$

Opção D

Proposta de resolução do 2.º teste

1. Se $u_n = \dfrac{n+2}{n}$, então:

$$\lim\left(u_n\right) = \lim \frac{n+2}{n} = \lim\left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1 + 0 = 1$$

Assim,

$$\lim f\left(u_n\right) = f\left(1\right)$$

que é um valor finito.

Opção C

2.

2.1. Sejam os acontecimentos:

- G: "o professor inscreveu-se na formação em Geogebra"
- L: "o professor inscreveu-se na formação em LaTeX"

$$P\left(G\right) = 0.6 \Rightarrow P\left(\overline{G}\right) = 0.4$$

$$P\left(G \cap L\right) = 0.2$$

$$P\left(\overline{L}|\overline{G}\right) = 0.75 \Rightarrow P\left(L|\overline{G}\right) = 0.25$$

$$P\left(\overline{G}|L\right) = \frac{P\left(L \cap \overline{G}\right)}{P\left(L\right)} = \frac{P\left(L|\overline{G}\right) \times P\left(\overline{G}\right)}{P\left(L \cap G\right) + P\left(L \cap \overline{G}\right)} = \frac{0.25 \times 0.4}{0.2 + 0.25 \times 0.4} = \frac{1}{3}$$

2.2.

$$P\left(G\cap\overline{L}\right)=0.6-0.2=0.4\Rightarrow 0.4\times 30=12$$

12 professores inscreveram-se apenas na formação em Geogebra

$$P\left(L\cap\overline{G}\right)=P\left(L\cap\overline{G}\right)\times P\left(\overline{G}\right)=0.25\times 0.4=0.1\Rightarrow 0.1\times 30=3$$

3 professores inscreveram-se apenas na formação em LaTeX

12+3=15 professores inscreveram-se apenas em uma das formações

Assim,

$$^{15}C_4=1365$$

Opção C

3. Seja h a função de domínio $[-2,2]$ definida por $h\left(x\right)=\left(f\circ g\right)\left(x\right)-f\left(0\right)$

h é contínua em $[-2,2]$, por ser resultar da composição de duas funções contínuas à qual se subtraí uma constante.

$$h\left(-2\right)=\left(f\circ g\right)\left(-2\right)-f\left(0\right)=f\left(g\left(-2\right)\right)-f\left(0\right)=f\left(-g\left(2\right)\right)-f\left(0\right)=f\left(-3\right)-f\left(0\right)<0$$

Como f é estritamente crescente, então:

$$-3<0\Rightarrow f\left(-3\right)<f\left(0\right)\Leftrightarrow f\left(-3\right)-f\left(0\right)<0$$

$$h\left(2\right)=\left(f\circ g\right)\left(2\right)-f\left(0\right)=f\left(g\left(2\right)\right)-f\left(0\right)=f\left(3\right)-f\left(0\right)>0$$

Como f é estritamente crescente, então:

$$0<3\Rightarrow f\left(0\right)<f\left(3\right)\Leftrightarrow f\left(0\right)-f\left(3\right)<0\Leftrightarrow f\left(3\right)-f\left(0\right)>0$$

Como $h\left(-2\right)$ e $h\left(2\right)$ têm sinais contrários e h é contínua em $[-2,2]$, então, pelo corolário do teorema de Bolzano conclui-se que existe pelo menos um valor $c\in\left]-2,2\right[$ tal que $h\left(c\right)=0\Leftrightarrow\left(f\circ g\right)\left(c\right)-f\left(0\right)=0\Leftrightarrow\left(f\circ g\right)\left(c\right)=f\left(0\right)$

4.

4.1.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+2}}{3-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(\dfrac{3}{x}-1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x\left(\dfrac{3}{x}-1\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x\left(\dfrac{3}{x}-1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}{-\dfrac{3}{x}+1}=\frac{\sqrt{1+0+0}}{-0+1}=1$$

A reta definida por $y=1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x\to-\infty$

4.2.

$$a=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{x^2+x+2}}{3-x}=\frac{\sqrt{4}}{2}=1$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{\sqrt{3x+1}-2}=\lim_{x\to1^+}\frac{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{3x+1-4}=$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{3(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x+1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{3}=\frac{2\times4}{3}=\frac{8}{3}$$

$$b+\frac{8}{3}=1\Leftrightarrow b=1-\frac{8}{3}\Leftrightarrow b=-\frac{5}{3}$$

5.

$$m_r=\frac{-1-0}{0-2}=\frac{1}{2}$$

$$r:y=\frac{1}{2}x-1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\frac{1}{2}\wedge\lim_{x\to+\infty}\left(h(x)-\frac{1}{2}x\right)=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\cdot h(x)-x^2}{h(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2h(x)-x\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}}=\frac{2\lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)-\frac{1}{2}x\right)}{\dfrac{1}{2}}=\frac{2\times(-1)}{\dfrac{1}{2}}=-4$$

Opção D

6.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{3x^2+\sin(2x)}=\frac{2}{3+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\times\sin(2x)}=\frac{2}{3+0}=\frac{2}{3}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\times\sin(2x)=0$ pois é o produto de um infinitésimo por uma função limitada

Opção B

7.

7.1.

$$g'(9)=\frac{2\times9^2-12}{2\times9+7}=\frac{150}{25}=6$$

$$\lim_{x\to9}\frac{x^2-81}{g(x)-g(9)}=\frac{\lim\limits_{x\to9}(x+9)}{\lim\limits_{x\to9}\dfrac{g(x)-g(9)}{x-9}}=\frac{18}{g'(9)}=\frac{18}{6}=3$$

Opção C

7.2.

$$g''(x)=\frac{4x(2x+7)-\left(2x^2-12\right)\times2}{(2x+7)^2}=\frac{8x^2+28x-4x^2+24}{(2x+7)^2}=\frac{4x^2+28x+24}{(2x+7)^2}$$

$$g''(x)=0\Leftrightarrow4x^2+28x+24=0\wedge x\neq-\frac{7}{2}\Leftrightarrow x^2+7x+6=0\wedge x\neq-\frac{7}{2}\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-4\times6}}{2}\wedge x\neq-\frac{7}{2}\Leftrightarrow x=\frac{-7\pm5}{2}\wedge x\neq-\frac{7}{2}\Leftrightarrow x=-6\vee x=-1\wedge x\neq-\frac{7}{2}$$

$$g''(x)=\frac{4(x+6)(x+1)}{(2x+7)^2}$$

x	$-\infty$	-6		$-\frac{7}{2}$		-1	$+\infty$
$4(x+6)$	-	0	+	+	+	+	+
$x+1$	-	-	-	-	-	0	+
$(2x+7)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$g''(x)$	+	0	-	n.d.	-	0	+
g	$\cup$	P.I.	$\cap$	n.d.	$\cap$	P.I.	$\cup$

8.

8.1. $f(x) = a(x+1)(x-3)$, para algum $a < 0$

$$f'(x) = a\left[1 \times (x-3) + (x+1) \times 1\right] = a(2x-2)$$

$$r \perp s \Rightarrow m_s \times m_r = -1 \Leftrightarrow f'(-1) \times f'(3) = -1 \Leftrightarrow a(-2-2) \times a(6-2) = -1 \Leftrightarrow$$

$$a^2 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} \vee a = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

Assim,

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x+1)(x-3)$$

8.2.

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

$$-5 < a < 0$$

$$m_r = g'(a) \Leftrightarrow \frac{3-g(a)}{0-a} = \frac{1}{2\sqrt{a+5}} \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{a+5}}{-a} = \frac{1}{2\sqrt{a+5}}$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{a+5} - 2a - 10 = -a \Leftrightarrow$$

$$6\sqrt{a+5} = a + 10 \Rightarrow 36(a+5) = a^2 + 20a + 100 \Leftrightarrow a^2 - 16a - 80 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 + 4 \times 80}}{2} \Leftrightarrow a = 20 \vee a = -4 \Rightarrow a = -4$$

9.

$$a_5 - a_3 = 432 \Leftrightarrow a_3 \times r^2 - a_3 = 432 \Leftrightarrow \left(r^2 - 1\right)6r^2 = 432 \Leftrightarrow 6r^4 - 6r^2 = 432 \Leftrightarrow r^4 - r^2 - 72 = 0 \Leftrightarrow$$

$$r^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 72}}{2} \Leftrightarrow r^2 = \frac{1 \pm 17}{2} \Leftrightarrow r^2 = 9 \vee r^2 = -8 \Rightarrow r^2 = 9 \Leftrightarrow r = 3 \vee r = -3 \Rightarrow r = 3$$

$$a_n = 6 \times 3^{n-1} = 2 \times 3^n$$

A sucessão de termo geral $b_n = 2n - 1$ é a sucessão dos números ímpares

Assim, a sucessão dos termos ímpares de (a_n) é dada por:

$$c_n = 2 \times 3^{2n-1}$$

Repare-se que (c_n) é uma progressão geométrica:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2 \times 3^{2(n+1)-1}}{2 \times 3^{2n-1}} = \frac{3^{2n+1}}{3^{2n-1}} = 3^2 = 9 = r$$

Assim, a soma dos 20 primeiros termos de (c_n) é:

$$S_{20} = c_1 \times \frac{1 - r^{20}}{1 - r} = 6 \times \frac{1 - 9^{20}}{-8} = \frac{3}{4}\left(9^{20} - 1\right)$$