Prova Modelo de Exame Nacional de Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Julho de 2021
12.º Ano de Escolaridade

Simulação de Prova 635

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

  1.1, **1.2**, **3**, **4**, **6**, **8**, **10.1**, **10.2**, **13.1**, **13.2** e **15**

  Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.

- Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular:

Semiperímetro $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone:

$\pi r g$ (r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica:

$4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide:

$\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone:

$\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera:

$\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões:

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética:

$\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica:

$u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, ..., n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 4 - 3i^{2021}$ e $z_2 = e^{i\frac{\pi}{5}}$

Na figura 1 está representado, no plano complexo, um arco de circunferência centrado na origem.

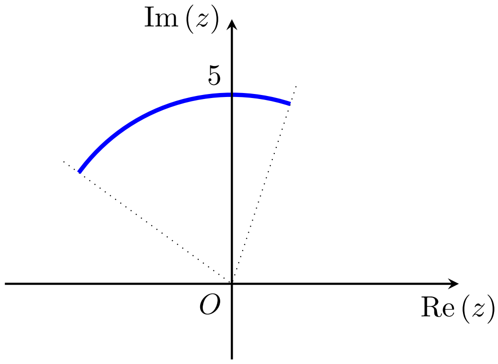

Figura 1

1.1. Atendendo aos dados da figura, qual das seguintes pode ser a condição que define a região dada?

(A) $|z| = |z_1| \ \wedge \ \text{Arg}\left(z_2{}^2\right) < \text{Arg}\,(z) < \text{Arg}\,(z_2 \times i)$
(B) $|z| = |z_1| \ \wedge \ \text{Arg}\left(z_2{}^3\right) < \text{Arg}\,(z) < \text{Arg}\,(-\overline{z_2})$
(C) $|z| = |z_2| \ \wedge \ \text{Arg}\left(z_2{}^2\right) < \text{Arg}\,(z) < \text{Arg}\,(-\overline{z_2})$
(D) $|z| = |z_1| \ \wedge \ \text{Arg}\left(z_2{}^2\right) < \text{Arg}\,(z) < \text{Arg}\,(-\overline{z_2})$

1.2. Para $\alpha \in \left]0, \ \frac{\pi}{2}\right[$ considere o complexo w definido por:

$$w = \frac{\overline{z_1}^2 + 17 z_2{}^{10}}{12\sqrt{2}\,(i\cos\alpha - \sin\alpha)}$$

Sabendo que w é uma das raízes sextas de um número real, determine o(s) valor(es) de α.

2. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Sabe-se que:

- $P\,(A) = \frac{1}{3}$
- $P\left[A \cap \left(B \cup \overline{A}\right)\right] = P\left(\overline{B}|A\right)$

Determine o valor da probabilidade condicionada $P\left(B|A\right)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3.

Três amigos, a Ana, o Bernardo e o Carlos, escolhem cada um, em segredo, um vértice de um prisma quadrangular regular.

Qual das opções seguintes dá o valor da probabilidade de os pontos escolhidos pelos três amigos definirem um plano que contém uma das faces do prisma?

(A) $\frac{6}{{}^8C_3}$ **(B)** $\frac{6 \times {}^4A_3}{{}^8A_3}$ **(C)** $\frac{6 \times {}^4A_3}{8^3}$ **(D)** $\frac{6 \times {}^4C_3}{8^3}$

4.

Considere um dado tetraédrico, equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 4 e um dado octaédrico, também equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 8.

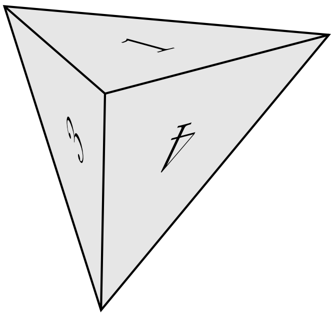

Figura 2

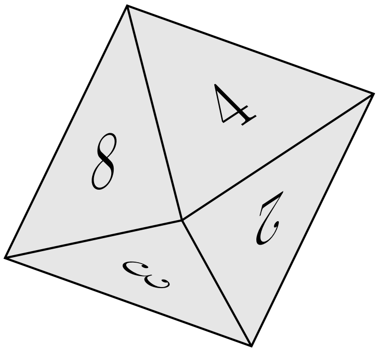

Figura 3

Qual é a probabilidade de, ao lançar os dois dados, obter a soma dos valores de todas as faces visíveis (que não ficam voltadas para baixo) inferior a 35?

Apresente o valor pedido na forma de fração irredutível.

5. Considere, para um determinado a e b reais, a função h, contínua em $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x < 0 \\ ax + b & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{e^{x-1} - e} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Qual das opções seguintes é verdadeira?

(A) $a = \frac{1}{4e}$ e $b = 0$

(B) $a = \frac{1}{8e}$ e $b = 0$

(C) $a = \frac{1}{4e}$ e $b = 1$

(D) $a = \frac{1}{8e}$ e $b = 1$

6.

Na figura 4 está representada, em referencial o.n. xOy, uma circunferência e uma reta t.

Sabe-se que:

- a circunferência é definida por:
  $x^2 + y^2 - x - 6y + 8 = 0$
- a reta t é tangente à circunferência no ponto de intersecção da circunferência com o eixo Oy com menor ordenada
- A é o ponto de interseção da reta t com o eixo das abcissas

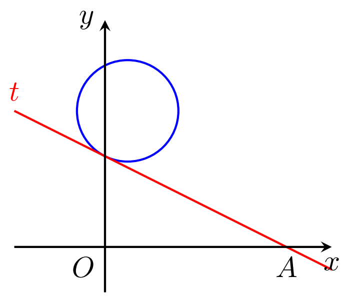

Figura 4

A abcissa do ponto A é:

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

7. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = x^2 \cdot e^x + 2x + 1$.

Considere ainda duas funções g e h, definidas em $\mathbb{R}^+$, tais que:

- a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa nula é assíntota ao gráfico de g
- $g(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^+$
- h é definida por $h(x) = \dfrac{2x^2}{g(x)}$

Mostre que a reta de equação $y = x - \dfrac{1}{2}$ é assíntota oblíqua ao gráfico de h.

8.

Considere a e b, números reais, tais que:

- $5^{\log_7(49a)} = 1$
- $b = \dfrac{1}{\log_a(7)} + 1$

Qual das opções seguintes é igual a a^b?

(A) 7 **(B)** 49 **(C)** $\dfrac{1}{7}$ **(D)** $\dfrac{1}{49}$

9. Seja g', primeira derivada de uma função g, a função real de variável real definida por:

$$g'(x) = e^x + x - 2$$

Prove que g tem um único mínimo relativo em $]0,1[$ e determine uma aproximação do valor do minimizante.

Percorra as seguintes etapas:

- Utilize o teorema de Bolzano para provar que $g'(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]0,1[$.
- Justifique, analiticamente, que g tem um único extremo relativo em $]0,1[$ e que esse extremo é um mínimo.
- Utilize as capacidades gráficas da sua calculadora para determinar, o minimizante de g em $]0,1[$.

  Apresente o gráfico que visualizou na calculadora, bem com a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) com aproximação às centésimas.

10.

Na figura 5 encontra-se representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[OABCDEFG]$ e a secção $[PQRS]$ produzida no cubo por um plano γ.

Sabe-se que:

- três das arestas do cubo estão contidas nos eixos coordenados
- o plano γ é definido por $5x + 5y + 2z = 40$
- a ordenada do ponto S é o triplo da ordenada do ponto P

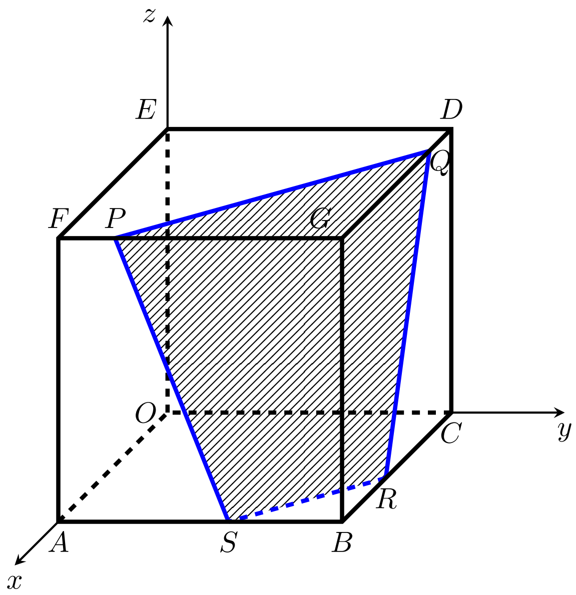

Figura 5

10.1. Determine o valor da aresta do cubo.

10.2. Seja T o ponto de interseção do plano γ com o eixo das abcissas.

Defina, por uma equação vetorial, a reta que é perpendicular ao plano γ e que contém o ponto T.

11. Resolva em $\mathbb{R}$ e por processos analíticos a inequação:

$$2^{x+2} + 2^{1-x} \leq 9$$

Apresente o conjunto solução utilizando a notação de intervalos de números reais.

12. Considere as dez primeiras letras do alfabeto.

Quantas palavras, com ou sem significado, se podem formar com seis dessas dez letras se tiver que ter exatamente três letras A e uma letra C, sendo as restantes duas letras diferentes?

13.

Seja f a função, de domínio $\left]-\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \sin x}$.

13.1. Em qual das opções seguintes está o valor de $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{x^2 - \pi x}{f(\pi) - f(x)}$?

(A) π **(B)** 2π **(C)** 3π **(D)** 4π

13.2. Considere A o ponto do gráfico de f cuja ordenada é máxima, e considere B e C os pontos do gráfico cuja ordenada é mínima.

Determine, por processos exclusivamente analíticos, a área do triângulo $[ABC]$.

14. De uma progressão aritmética (a_n) sabe-se que:

- a soma dos primeiros dez termos é igual a 290
- a diferença entre o sétimo e o terceiro termos é 24

Seja (u_n) a sucessão de termo geral $\dfrac{a_n}{n+2}$.

Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

15.

Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \dfrac{\cos x}{e^x}$.

Seja g' a primeira derivada da função g, e seja g'' a segunda derivada da função g.

Mostre que:

$$2g(x) + g''(x) + 2g'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

FIM

Cotações

- As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

Itens	1.1	1.2	3	4	6	8	10.1	10.2	13.1	13.2	15	Subtotal
Cotação (pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	144

- Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Itens	2	5	7	9	11	12	14	Subtotal
Cotação (pontos)	4×14 pontos							56