Proposta de resolução

1.

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} = \overline{BA} \times \overline{DC} \times \cos(90+60) = a \times a \times \big(-\sin(60)\big) = a^2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

Opção **(D)**

2.

$$\frac{\log_2 x}{5+\log_8 x^3} + (\log_4 x)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{5+\dfrac{\log_2 x^3}{\log_2 8}} + \left(\frac{\log_2 x}{\log_2 4}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{5+\dfrac{3\log_2 x}{3}} + \frac{1}{4}(\log_2 x)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\log_2 x\left(\frac{1}{5+\log_2 x} + \frac{\log_2 x}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 0 \vee \frac{4+5\log_2 x + (\log_2 x)^2}{4\,(5+\log_2 x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \vee \log_2 x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \wedge 5 + \log_2 x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \vee \log_2 x = -4 \vee \log_2 x = -1 \wedge x \neq 2^{-5} \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \vee x = \frac{1}{16} \vee x = \frac{1}{2} \wedge x \neq \frac{1}{32}$$

C.S $= \left\{\dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$

3.

3.1.

$$r : 2y - x + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$AB \perp r \Rightarrow m_{AB} \times m_r = -1 \Leftrightarrow m_{AB} \times \left(\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow m_{AB} = -2$$

$$A\,(1,3) \in AB \Rightarrow 3 = -2 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 5$$

$$\therefore AB : y = -2x + 5 \Leftrightarrow 2x + y = 5$$

3.2.

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} \\ y = -2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 5 = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 10 = x - 1 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{5} \\ y = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

$$\therefore B\left(\frac{11}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$r = \overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{11}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{3}{5} - 3\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{5}}$$

$\therefore$ Uma equação que define a circunferência é, por exemplo: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = \dfrac{36}{5}$

4. Seja $z = x + yi$

$$z + \overline{z} \geq 0 \Leftrightarrow x + yi + x - yi \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) \geq 0$$

$\therefore$ Semiplano vertical fechado, à direita do eixo dos imaginários.

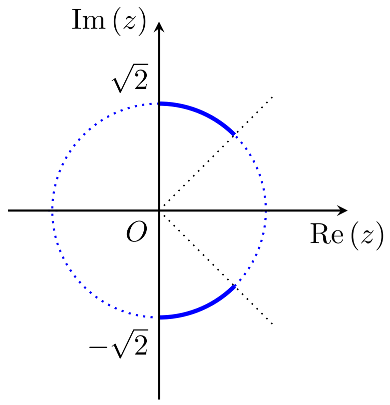
$$z \cdot \overline{z} = 2 \Leftrightarrow (x + yi)(x - yi) = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{2}$$

$\therefore$ Circunferência centrada na origem e de raio $\sqrt{2}$.

$$\left|\operatorname{Arg}(z)\right| \geq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \operatorname{Arg}(z) \geq \frac{\pi}{4} \vee \operatorname{Arg}(z) \leq -\frac{\pi}{4}$$

$\therefore$ Região exterior à região limitada por duas semirretas com origem na origem do referencial e que formam ângulos, respetivamente, de 45º e -45º com o eixo real.

$$z + \overline{z} \geq 0 \ \wedge \ z \cdot \overline{z} = 2 \ \wedge \ \left|\operatorname{Arg}(z)\right| \geq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) \geq 0 \wedge |z| = \sqrt{2} \wedge \left(\operatorname{Arg}(z) \geq \frac{\pi}{4} \vee \operatorname{Arg}(z) \leq -\frac{\pi}{4}\right)$$



Opção **(C)**

5.

$$53 = 13 \times 4 + 1 \Rightarrow i^{53} = i$$

$$w = z_1^3\left(\frac{\overline{z_2}^2}{i^{53}} + e^{i\frac{3\pi}{2}}\right) = \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^3\left[\frac{(2+i)^2}{i} - i\right] = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3+4i}{i} - i\right) = e^{i\frac{\pi}{4}}(4 - 3i - i) = e^{i\frac{\pi}{4}}(4 - 4i)$$

$$|4 - 4i| = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$$

$$\operatorname{Arg}(4 - 4i) = -\arctan\left(\frac{4}{4}\right) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore 4 - 4i = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

Assim,

$$w = e^{i\frac{\pi}{4}} \times 4\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = 4\sqrt{2}e^{i(0)} = 4\sqrt{2}$$

6.

$$S_{n+1} = 2 \times S_n$$

Assim,

$$\log_2 S_n - \log_2 S_{n+1} = \log_2 \left(\frac{S_n}{S_{n+1}} \right) = \log_2 \left(\frac{S_n}{2 \times S_n} \right) = \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = -1$$

Opção **(B)**

7.

7.1.

$$(3, 4, -3) \parallel AV \Rightarrow (3, 4, -3) \perp \alpha$$

$$A \in xOz \Rightarrow A\,(x, 0, z)$$

$$(x, 0, z) = (-2, -4, 6) + k\,(3, 4, -3)\,,\ k \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 3k \\ 0 = -4 + 4k \\ z = 6 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\therefore A\,(1, 0, 3)$$

$$3 \times 1 + 4 \times 0 - 3 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 6$$

$$\therefore \alpha : 3x + 4y - 3z + 6 = 0$$

7.2.

$$B\,(x, 0, 1) \wedge B \in \alpha \Rightarrow 3x + 4 \times 0 - 3 \times 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = -3 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\therefore B\,(-1, 0, 1)$$

$$V \in xOy \Rightarrow V\,(x, y, 0)$$

$$(x, y, 0) = (-2, -4, 6) + k\,(3, 4, -3)\,,\ k \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = -4 + 4k \\ 0 = 6 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ k = 2 \end{cases}$$

$$\therefore V\,(4, 4, 0)$$

$$\overrightarrow{VA} = A - V = (1, 0, 3) - (4, 4, 0) = (-3, -4, 3)$$

$$\overrightarrow{VB} = B - V = (-1, 0, 1) - (4, 4, 0) = (-5, -4, 1)$$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{VA}\cdot\overrightarrow{VB}}{\overline{VA}\times\overline{VB}} = \frac{15+16+3}{\sqrt{9+16+9}\times\sqrt{25+16+1}} = \frac{\sqrt{357}}{21}$$

$$\sin(\theta-5\pi)\times\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)+\tan^2(3\pi-\theta) = -\sin\theta\times\sin\theta+(-\tan\theta)^2 = -\sin^2\theta+\tan^2\theta$$

$$\sin^2\theta = 1-\left(\frac{\sqrt{357}}{21}\right)^2 = \frac{4}{21}$$

$$\tan^2\theta = \frac{\frac{4}{21}}{\left(\frac{\sqrt{357}}{21}\right)^2} = \frac{4}{17}$$

Assim, o valor pedido é:

$$-\frac{4}{21}+\frac{4}{17} = \frac{16}{357}$$

8. $2\times 5\times^8 A_4 -^5 A_2 \times^7 A_3$

Opção **(A)**

- 5 representa o número de escolhas para o algarismo ímpar para a primeira ou última posição
- 2 representa o número de posições onde colocar esse número ímpar (primeira ou última)
- $^8A_4$ representa o número de formas de distribuir 4 dos 8 restantes algarismos pelas restantes posições
- $^5A_2\times^7 A_3$ representa o número de formas de colocar um algarismo ímpar na primeira e na última posições e distribuir 3 dos restantes 7 algarismos nas três posições do meio. Este valor tem de ser subtraído pois está a ser contabilizado em duplicado na primeira parcela.

9.

$$P\left(A|B\right) = P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$$

$P(A) = 0,3$

$$P\left(\overline{A}\cup B\right) = 0.8 \Leftrightarrow P\left(\overline{A}\right)+P(B)-P\left(\overline{A}\cap B\right) = 0.8 \Leftrightarrow 0.7+P(B)-P(B)+P(A\cap B) = 0.8$$

$$\Leftrightarrow P(A)\times P(B) = 0.1 \Leftrightarrow 0.3\times P(B) = 0.1 \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

Opção **(C)**

10.

$$m_r = \frac{1-0}{0+2} = \frac{1}{2}$$

$$r : y = \frac{1}{2}x + 1$$

Seja (a_n) a sucessão das áreas dos triângulos:

$$a_1 = \frac{1 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1\right)}{2} = \frac{5}{8}$$

$$a_2 = \frac{1 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + 1\right)}{2} = \frac{7}{8}$$

$$a_3 = \frac{1 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} + 1\right)}{2} = \frac{9}{8}$$

...

Repare-se que $a_{n+1} - a_n$ é constante e igual a $a_2 - a_1 = \frac{1}{4}$.

$\therefore$ (a_n) é uma p.a. de razão $\frac{1}{4}$.

Assim,

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r = \frac{5}{8} + (n-1) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}n + \frac{3}{8}$$

$$S_n = 127.5 \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_n}{2} \times n = 127.5 \Leftrightarrow \frac{\frac{5}{8} + \frac{1}{4}n + \frac{3}{8}}{2} \times n = 127.5 \Leftrightarrow n^2 + 4n - 1020 = 0 \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4080}}{2} \Leftrightarrow n = 30 \vee n = -34 \Rightarrow n = 30$$

Como já existiam 6 triângulos, o João desenhou $30 - 6 = 24$ triângulos.

11.

11.1.

$$P = \frac{3 \times 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}{12 \times 6} = \frac{11}{24}$$

- Se no dado dodecaédrico sair face 10 ou superior, então a soma será sempre superior a 10. Assim 3×6 representa o número de situações em que sai face 10, 11, ou 12 no dado dodecaédrico e qualquer uma das faces no dado cúbico
- Se sair face 9 no dado dodecaédrico então existem 5 situações que a soma é superior a 10 (sair 2, 3, 4, 5 ou 6 no dado cúbico)
- Se sair face 8 no dado dodecaédrico então existem 4 situações que a soma é superior a 10 (sair 3, 4, 5 ou 6 no dado cúbico)
- Se sair face 7 no dado dodecaédrico então existem 3 situações que a soma é superior a 10 (sair 4, 5 ou 6 no dado cúbico)
- Se sair face 6 no dado dodecaédrico então existem 2 situações que a soma é superior a 10 (sair 5 ou 6 no dado cúbico)
- Se sair face 5 no dado dodecaédrico então existe apenas uma situação que a soma é superior a 10 (sair 6 no dado cúbico)
- Em todas as outras situações a soma dos valores obtidos é inferior ou igual a 10

11.2. $P\left(B|A\right)$ é a probabilidade do produto dos números obtidos ser par, sabendo que ambos estão desenhados com a mesma cor.

Se estão desenhados com a mesma cor, estão são ambos vermelhos ou são ambos azuis.

Se são ambos vermelhos, significa que saiu número ímpar no dado dodecaédrico e saiu número par no dado cúbico. Portanto, neste caso o produto será par, já que um dos dois números é par.

Se são ambos vermelhos, significa que saiu número par no dado dodecaédrico e saiu número ímpar no dado cúbico. De igual modo, neste caso o produto também será par.

Assim, em todas as situações em que os números obtidos estão desenhados com a mesma cor, o produto entre eles é par, portanto $P\left(B|A\right) = 1$.

12.

$$\tan x = \frac{\overline{BP}}{a} \Leftrightarrow \overline{BP} = a \tan x$$

$$A_{[APC]} = A_{[ABC]} - A_{[ABP]} = \frac{2a \times a}{2} - \frac{a \tan x \times a}{2} = a^2 - \frac{a^2}{2} \tan x = a^2 \left(1 - \frac{1}{2} \tan x\right)$$

Opção **(D)**

13.

13.1.

$$g'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{3xe^x + 1}{e^x} - \dfrac{3e + 1}{e}}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x + e^{-x} - 3 - e^{-1}}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{3(x - 1)}{x - 1} + \lim_{x \to 1} \frac{e^{-1}\left(e^{-x+1} - 1\right)}{x - 1} = 3 - e^{-1} \underbrace{\lim_{-x+1 \to 0} \frac{e^{-x+1} - 1}{-x + 1}}_{\text{limite notável}} = 3 - \frac{1}{e} = \frac{3e - 1}{e}$$

13.2.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3xe^x+1}{e^x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3xe^x+1}{xe^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{1}{xe^x}\right)=3+\frac{1}{+\infty}=3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3xe^x+1}{e^x}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(3x+\frac{1}{e^x}-3x\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

A reta de equação $y=3x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{1-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}{\frac{1}{x}-1}=$$

$$=-\frac{\sqrt{1+0+0}+1}{0-1}=2$$

A reta de equação $y=2$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x\to-\infty$.

14. **(A)** é falsa, h tem dois pontos de inflexão, de abcissas iguais aos dois extremantes (minimizante e maximizante) de h'. Repare-se que a monotonia de h' "inverte" duas vezes.

(B) é falsa, h tem apenas um mínimo relativo, imagem por h do "segundo" zero de h' (o sinal de h' "vem" de negativo para positivo).

(C) é verdadeira, h tem dois máximos relativos, imagens por h dos "primeiro" e "terceiro" zeros de h'.

(D) é falsa. Como h' "começa" por decrescer, até atingir o mínimo relativo, depois cresce, até atingir o máximo relativo e "torna" a decrescer em seguida, então o sinal de h'' "começa" por ser negativo, depois positivo e, de seguida, novamente negativo. Assim, como o sinal de h'' muda duas vezes, h'' não é monótona.

Opção **(C)**

15.

$$\lim(a_n)=\lim\left(n^2e^{-n}+\frac{\ln(n)}{n}\right)=\lim\frac{n^2}{e^n}+\underbrace{\lim\frac{\ln(n)}{n}}_{\text{limite notável}}=\frac{1}{\underbrace{\lim\frac{e^n}{n^2}}_{\text{limite notável}}}+0=\frac{1}{+\infty}+0=0$$

Opção **(B)**