Prova Modelo de Exame Nacional de Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Junho de 2020
$12^{\underline{o}}$ Ano de Escolaridade

Simulação de Prova 635

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

  2.1, **2.2**, **2.3** e **13.2**

  Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.

- Dos restantes 16 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência
αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular:
$Semiperímetro \times Apótema$

Área de um sector circular:
$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone:
$\pi r g$ (r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica:
$4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide:
$\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Volume de um cone:
$\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Volume de uma esfera:
$\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões:

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética:
$\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica:
$u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $(k \in \{0, ..., n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ $(n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ $(n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os complexos $z_1 = \sqrt{3} - i$ e $z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{9}}$.

1.1. Seja $w = \left(\dfrac{2\overline{z_1}^2 + z_2^3}{4i^{2019} + 4i^{2020}} + 3 + \sqrt{3} \right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$.

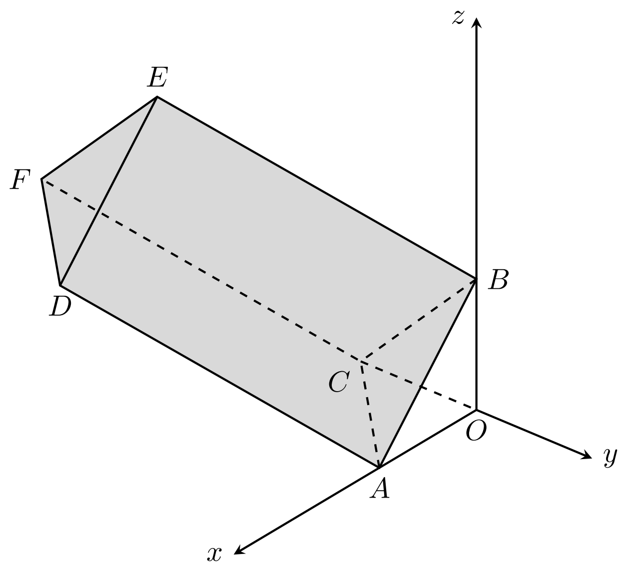
Sem utilizar a calculadora, determine o menor número natural n para o qual w é um número real.

1.2. Represente, no plano complexo, a região definida pela condição:

$$|z - i| \leq |z_2| \wedge -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z - i) \leq \operatorname{Arg}(z_1)$$

2.

Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma triangular regular $[ABCDEF]$.



Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo Ox, o vértice B pertence ao eixo Oz e o vértice C pertence ao eixo Oy
- o plano ABC é definido pela condição $x - y + z = 2$
- o volume do prisma é igual a 18

2.1. Defina a reta AD por uma equação vetorial.

2.2. Mostre que o vértice D tem coordenadas $(5, -3, 3)$.

2.3. Escolhem-se, ao acaso, três vértices do prisma $[ABCDEF]$.
Qual é a probabilidade de os três vértices escolhidos definirem um triângulo retângulo? Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

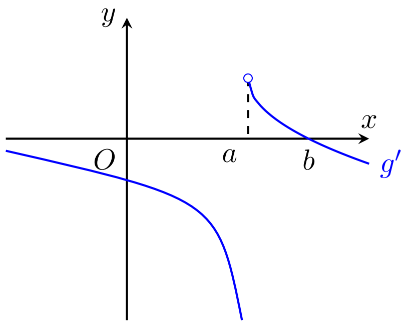
3. Qual dos seguinte é o valor de $\lim \left(2 - \dfrac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{n^2}$?

(A) 1 **(B)** e **(C)** $\dfrac{1}{e}$ **(D)** $\dfrac{1}{e^2}$

4. Seja g uma função contínua e de domínio $\mathbb{R}$.

Na figura está parte da representação gráfica da função g', primeira derivada da função g.

Tal como a figura sugere, a função g' está definida em $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ e b é um zero de g'.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

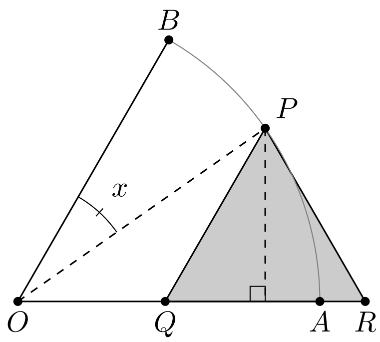
(A) g é decrescente em $\mathbb{R}$

(B) g tem um e um só extremo relativo

(C) $g''(x) < 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$

(D) $\big(a, g(a)\big)$ é um ponto de inflexão do gráfico de g

5. Na figura está representado um setor circular e um triângulo $[PQR]$.



Sabe-se que:

- $\overline{OA} = 1$ e $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ rad;
- o ponto P move-se ao longo do arco AB nunca coincidindo com A nem com B;
- os pontos Q e R acompanham o movimento do ponto P, ao longo da semirreta $\dot{O}A$, de modo a que $[PQR]$ se mantenha um triângulo equilátero;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo POB, com $x \in \left]0, \ \frac{\pi}{3}\right[$.

Seja P a função que a cada valor de x faz corresponder o perímetro do triângulo $[PQR]$.

5.1. Mostre que $P(x) = 3\cos x - \sqrt{3}\sin x, \ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$.

5.2. Determine, por processos analíticos, o valor de x para o qual o perímetro do triângulo $[PQR]$ é igual a $\sqrt{3}$.

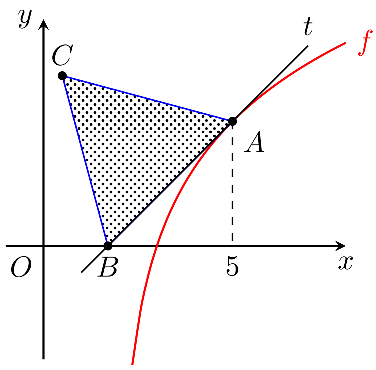
Sugestão: Comece por mostrar que $3\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

6. Seja f a função, de domínio $]2, +\infty[$, definida por $f(x) = \ln(x-2)^3$.

Na figura está parte da representação gráfica da função f, a reta t e o triangulo equilátero $[ABC]$.

Tal como a figura sugere:

- a reta t é tangente ao gráfico de f no ponto A de abcissa 5
- B é o ponto de interseção da reta t com o eixo das abcissas



Qual dos seguintes é, em radianos, o valor da inclinação da reta BC?

(A) $\frac{7\pi}{12}$ **(B)** $\frac{2\pi}{3}$ **(C)** $\frac{5\pi}{12}$ **(D)** $\frac{5\pi}{9}$

7. Seja Ω o espaço amostral (espaço de resultados) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Mostre que:

$$\frac{P\left(A|\overline{B}\right) \times (1 - P(B))}{P(A)} \times P\left(\overline{A}\right) + P\left(A \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{B}|A\right)$$

8. Considere a linha do triângulo de Pascal cujos elementos são da forma ${}^{2020}C_k$, com $k \in \{0,\ 1,\ 2, ..., 2020\}$.

Quantos elementos dessa linha são superiores a ${}^{2020}C_5$?

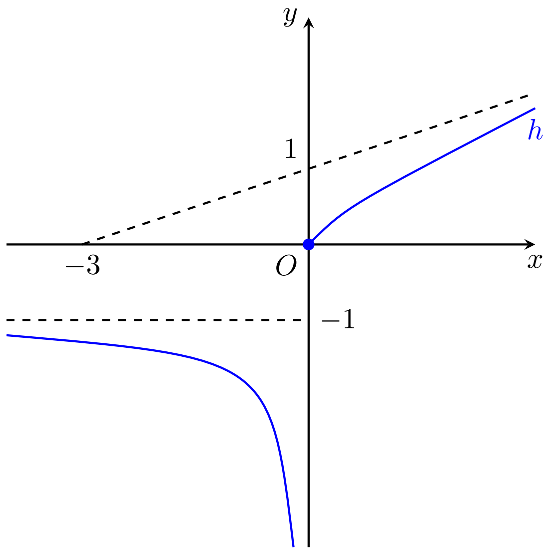
(A) 2008 **(B)** 2009 **(C)** 2010 **(D)** 2011

9. Considere todos os números naturais de sete algarismos que se podem escrever com os algarismos de 1 a 9.

Quantos desses números têm exatamente cinco algarismos 2?

(A) ${}^7C_5 \times 8^2$ **(B)** ${}^7C_5 \times {}^8A_2$ **(C)** ${}^7A_5 \times {}^8A_2$ **(D)** ${}^7A_5 \times 8^2$

10. Na figura está parte da representação gráfica de uma função h de domínio $\mathbb{R}$.



Tal como a figura sugere:

- a reta de equação $y=-1$ é assintota ao gráfico de h
- o eixo das ordenadas é assintota ao gráfico de h
- a reta oblíqua que interseta o eixo das abcissas no ponto de abcissa -3 e que interseta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 1 é assintota ao gráfico de h

10.1. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-3h(x)+\dfrac{x}{h(x)}\right)$?

(A) 0 **(B)** $\dfrac{10}{3}$ **(C)** 6 **(D)** 4

10.2. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por $u_n=\dfrac{\ln(n)}{n}$ e por $v_n=e^{-n}-n^2$.

Qual é o valor de $\lim\left[h(u_n)+h(v_n)\right]$?

(A) $-\infty$ **(B)** $+\infty$ **(C)** -1 **(D)** 0

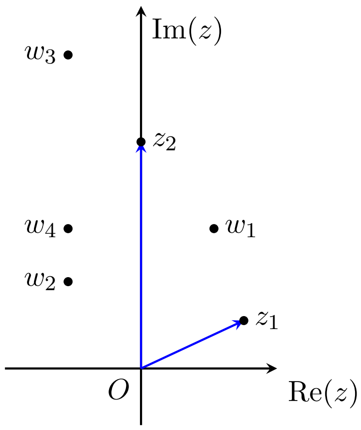
11. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $f(x)=x\ln x^2$.

11.1. Prove que $f(3e)=6e\left(1+\dfrac{1}{\log_3 e}\right)$.

11.2. Estude, por processos analíticos, a função f quanto à monotonia e existência de extremos relativos.

12. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = e^{i\alpha}$ e $z_2 = 2i$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de z_1 e z_2, bem como as imagens geométricas de outros quatro números complexos: w_1, w_2, w_3 e w_4.



Atendendo aos dados da figura, qual dos seguintes poder ser o complexo $w = z_2 - \overline{z_1}^2$?

(A) w_1 **(B)** w_2 **(C)** w_3 **(D)** w_4

13. Seja g a função, de domínio $[-\pi, +\infty[$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\sin x} - 1}{x} & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{4\left(2 - \sqrt{x+4}\right)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

13.1. Averigue se g é contínua em $x = 0$.

13.2.

Seja O a origem do referencial o.n. xOy, A o ponto do gráfico de g com ordenada mínima e B o ponto do gráfico de g com abcissa $-\pi$.

Utilize as capacidades gráficas da calculadora para determinar um valor aproximado da área do triângulo $[OAB]$.

Na sua resposta:

- Determine, analiticamente, a ordenada do ponto B
- Represente o gráfico da função g num referencial o.n. xOy
- Determine, graficamente e com aproximação às milésimas, a ordenada do ponto A
- Desenhe o triângulo $[OAB]$
- Determine a área de $[OAB]$ apresentando o resultado com aproximação às décimas

FIM

Cotações

- As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

Itens	2.1	2.2	2.3	13.2	Subtotal
Cotação (pontos)	18	20	18	16	72

- Destes 16 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Itens	1.1	1.2	3	4	5.1	5.2	6	7	Subtotal
	8	9	10.1	10.2	11.1	11.2	12	13.1	
Cotação (pontos)	8×16 pontos								128