Prova Modelo de Exame Nacional de Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Junho de 2017 | adaptada para 2020
12.º Ano de Escolaridade

Simulação de Prova 635

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 9 Páginas

---

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

  8.2, **13.1**, **13.2** e **13.3**

  Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.
- Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular:

Semiperímetro $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone:

$\pi r g$ (r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica:

$4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide:

$\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Volume de um cone:

$\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Volume de uma esfera:

$\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões:

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética:

$$\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

Progressão geométrica:

$$u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, ..., n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1. Seja Ω o espaço de resultados de uma certa experiência aleatória e sejam A, B e C três acontecimentos possíveis de Ω ($A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ e $C \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- A e C são acontecimentos equiprováveis.
- $P(A \cup B) = 3P(C)$
- $P(A \cap B) + 5P(C) = 2P(B)$

Qual dos seguintes é o valor de $P\left(A|B\right)$?

(A) 0 **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** 1

2. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $z = \rho e^{i\theta}$, com $\rho, \theta \in \mathbb{R}$.

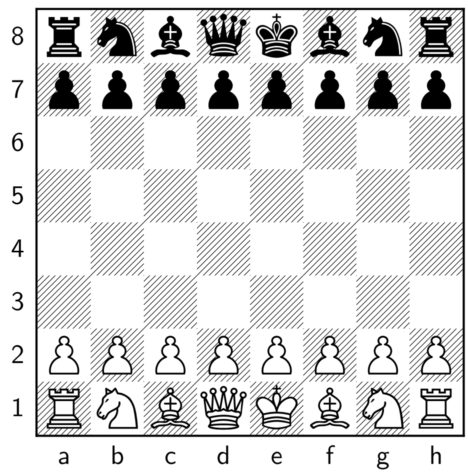
Prove que se $n \in \mathbb{N}$, então $(-z)^n + (\overline{z})^n$ é um número real quando n é par e é um imaginário puro quando n é impar.

3. Num jogo de xadrez, cada jogador tem na sua posse dezasseis peças: oito peões iguais, duas torres iguais, dois cavalos iguais, dois bispos iguais, um rei e uma rainha.

Um dos jogadores tem as peças brancas e o outro tem as peças pretas.

As peças dispoem-se nas duas primeiras filas mais próximas ao jogador. Na segunda fila ficam os peões e na primeira fila ficam as restantes peças na seguinte forma:

- As torres ficam nos extremos
- Os cavalos ficam na segunda e penúltima posições
- Os bispos ficam na terceira e ante-penúltima posições
- O rei e a rainha ficam no centro, ficando a rainha na casa da sua cor (rainha branca em casa branca/rainha preta em casa preta)

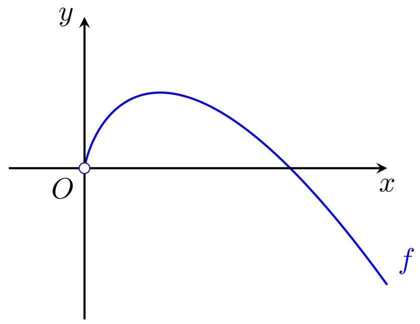


Colocando ao acaso as oito peças brancas que não são peões na primeira fila, uma por cada casa, qual é a probabilidade de elas ficarem colocadas na posição correta?

(A) $\dfrac{1}{{}^8C_2 \times {}^6C_2 \times {}^4A_2}$ **(B)** $\dfrac{2!}{8!}$ **(C)** $\dfrac{6!}{8!}$ **(D)** $\dfrac{2!}{{}^8C_2 \times {}^6C_2 \times {}^4A_2}$

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x\,(1 - \ln x)$

Na figura está representado, em referencial o.n. xOy parte do gráfico da função f.



Resolva os itens seguintes por processos analíticos, sem utilizar a calculadora:

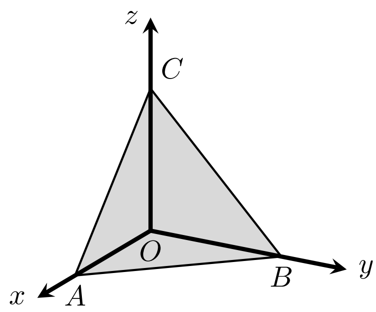
4.1. Mostre que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) = -\ln x$, e estude a função f quanto à monotonia e existência de extremos relativos.

4.2. Considere, agora, a função g, de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{e^x - 1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Averigue se g é contínua em $x = 0$.

5. Na figura encontra-se representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um triângulo equilátero $[ABC]$.



Sabe-se que:

- os pontos A, B e C pertencem aos semieixos positivos das abcissas, das ordenadas e das cotas, respetivamente;
- $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$;
- o perímetro do triângulo $[ABC]$ é igual a 6.

Qual das condições seguintes define a reta perpendicular ao plano ABC que contém o ponto A?

(A) $(x, y, z) = (2, 0, 0) + k\,(1, 1, 1)\,,\ k \in \mathbb{R}$

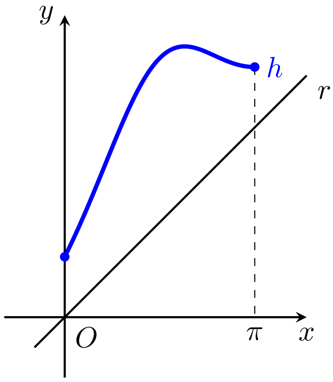
(B) $(x, y, z) = (2, 0, 0) + k\,(1, -1, 1)\,,\ k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = \left(\sqrt{2}, 0, 0\right) + k\,(1, 1, 1)\,,\ k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = \left(\sqrt{2}, 0, 0\right) + k\,(1, -1, 1)\,,\ k \in \mathbb{R}$

6. Na figura está representado, em referencial o. n. xOy:

- o gráfico da função h, de domínio $[0,\ \pi]$, definida por $h\left(x\right) = x + e^{\sin x}$;
- a reta r, bissetriz dos quadrantes ímpares.



Determine uma equação que defina a reta paralela à reta r que é tangente ao gráfico da função h, utilizando métodos exclusivamente analíticos.

7. Considere a sucessão de números reais (u_n) definida por:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 3 \\ u_{n+2} = \ln\left(u_{n+1}\right) + \ln\left(u_n\right),\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Qual das opções seguintes é o termo de ordem 4 da sucessão (u_n)?

(A) $\ln^2(216)$ **(B)** $\ln(18)$ **(C)** $\ln(216)$ **(D)** $\ln\left[\ln(216)\right]$

8. Em 1983, o estatístico francês M. Damiani, estabelece a seguinte equação:

$$X\left(n\right) = e^{0{,}422 \times n}\left[0,36\sin\left[9\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] + 0,08\sin\left[49,5\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]\right]$$

A função X fornece com bastante precisão a distância média, em unidades astronómicas, de todos os planetas (ou outros objetos celestes do sistema solar) em relação ao Sol com um erro máximo de 7%, inclusivé a localização de um planetoide situado entre Mercurio e o Sol, como também a do planeta X, o décimo, que alguns astrónomos presumem existir devido às anomalias na órbita de Urano e Neptuno.

Os argumentos das funções trigonométricas presentes na expressão algébrica da função estão expressos em graus e os valores de n variam no conjunto dos números naturais de 1 a 12 de acordo com a tabela seguinte:

Posição	Planeta/Objeto celeste
1	Volcano
2	Mercúrio
3	Venús
4	Terra
5	Marte
6	Cintura de asteróides
7	Júpiter
8	Saturno
9	Urano
10	Neptuno
11	Plutão
12	X

8.1. No dia 9 de maio de 2018, o planeta Júpiter estará em oposição, isto é, estará situado no lado oposto ao Sol para um observador terrestre.

Utilize a função de Damiani para estimar a distância entre Júpiter e a Terra no dia 9 de maio de 2018.

Apresente o valor pedido em milhões de quilómetros com aproximação às unidades.

Nota: Uma unidade astronómica é aproximadamente igual à distância média entre a Terra e o Sol, cerca de 150 milhões de quilómetros.

8.2.

Utilize as capacidades gráficas da sua calculadora para resolver o problema seguinte:

"A NASA detetou um asteroíde no sistema solar cuja distância média ao Sol é de aproximadamente 1.5 mil milhões de quilómetros. Qual é o planeta cuja órbita está o asteróide mais próximo?"

Na sua resposta deverá:

- Equacionar o problema;
- Apresentar o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora gráfica, devidamente identificado(s);
- Assinalar o(s) ponto(s) relevante(s) com abcissa aproximada às centésimas;
- Indicar o planeta cuja órbita está mais próxima.

9. Seja h uma função de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que:

- a reta r é assíntota oblíqua do gráfico de h;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x+\frac{1}{e^x}+3h(x)-\frac{\ln x}{x}\right]=3$

Qual das opções seguintes é a equação reduzida da reta r?

(A) $y=\frac{2}{3}x+1$ **(B)** $y=-2x+3$ **(C)** $y=-\frac{2}{3}x-1$ **(D)** $y=-\frac{2}{3}x+1$

10. Considere as funções reais de variável real f e g, definidas respetivamente por $f(x)=\log_2(x+2)$ e $g(x)=\log_{\sqrt{2}}(x)$.

Qual dos conjuntos seguintes é o conjunto solução da inequação $f(x)>g(x)$.

(A) $]0,\ 2[$ **(B)** $]-1,\ 2[$ **(C)** $]-\infty,\ 2[$ **(D)** $]2,\ +\infty[$

11. O Rodrigo tem num saco 12 fidget spinners, com o mesmo formato e tamanho, apenas variando a sua cor. Cinco são vermelhos, quatro são verdes e os restantes são azuis.

11.1. Vão dispor-se os doze fidget spinners lado a lado em fila.

De quantas formas se pode fazê-lo de modo a que os fidget spinners vermelhos fiquem seguidos e os fidget spinners verdes também.

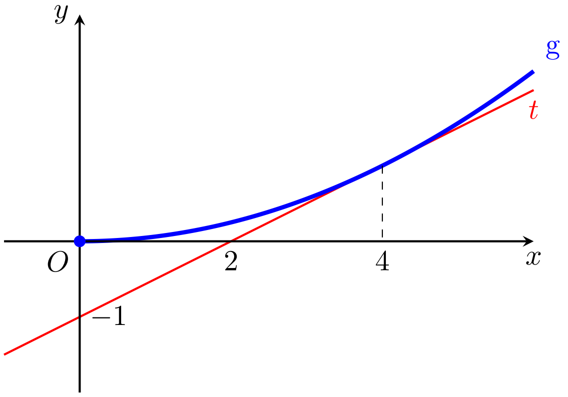
11.2. Considere que ao saco com a sua constituição inicial se adicionam mais alguns fidget spinners, da mesma marca, todos de cor cinzenta.

Na experiência aleatória que consiste em retirar do saco, simultaneamente e ao acaso, dois fidget spinners, sabe-se que a probabilidade de saírem dois fidget spinners com a mesma cor é $\frac{2}{9}$.

Determine a probabilidade de, na mesma experiência aleatória, retirar pelo menos um fidget spinner azul.

Apresente o valor pedido na forma de fração irredutível.

12. Considere uma função f, real de variável real, tal que $f'(4) = 2$ e $f''(4) = 1$ e a função g, de domínio $\mathbb{R}_0^+$, cujo gráfico está parcialmente representado no referencial o.n. xOy da figura.



Tal como a figura sugere:

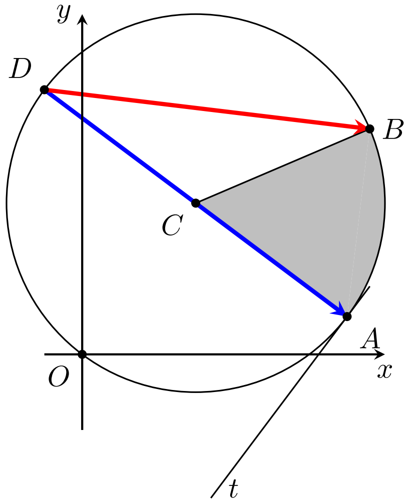
- a reta t é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 4;
- a reta t interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 2;
- a reta t interseta o eixo Oy no ponto de ordenada -1.

Qual dos seguintes é o valor de $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\left(f' \times g\right)(x) - 2}{x-4}$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

13.

Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência ζ, um setor circular a sombreado e uma reta t.



Sabe-se que:

- O é a origem do referencial e pertence à circunferência ζ;
- C é o centro da circunferência ζ;
- o ponto A pertence à circunferência ζ e tem ordenada 1;
- a reta t é tangente à circunferência ζ no ponto A;
- o setor circular CAB tem área igual a $\frac{25\pi}{6}$;
- $[AD]$ é um diâmetro da circunferência ζ;
- a circunferência ζ é definida por:
  $x^2 + y^2 - 6x - 2ay = 16 - a^2$, com $a \in \mathbb{R}^+$

13.1. Mostre que $a = 4$ e indique as coordenadas do ponto C.

13.2. Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$.
Nota: Se não resolveu o item anterior considere que $C\,(3, 4)$.

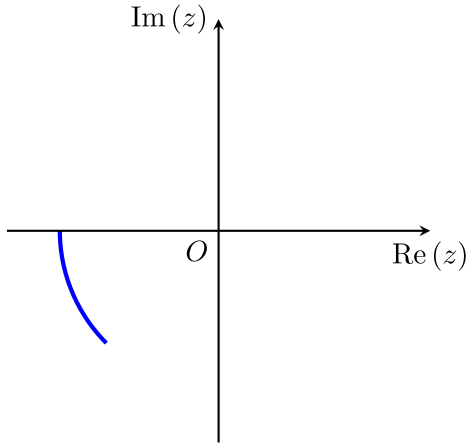
13.3. Escreva uma equação vetorial que defina a reta t.

14. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a seguinte condição:

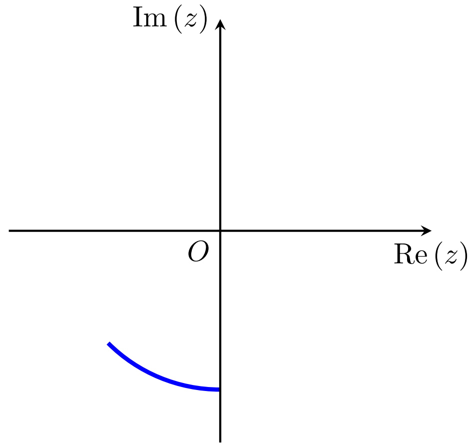
$$|z - 3i| \geq |z - 3| \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 0 \wedge |z| = 3$$

Em qual das opções seguintes está representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definidos por esta condição?

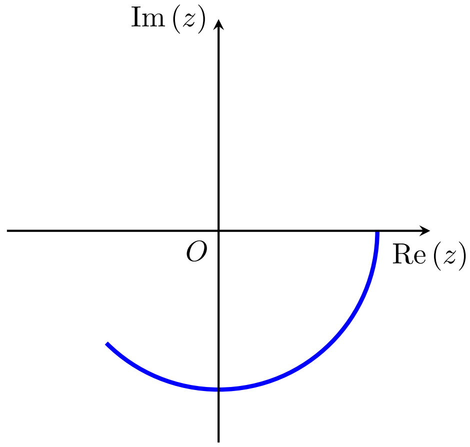
(A)



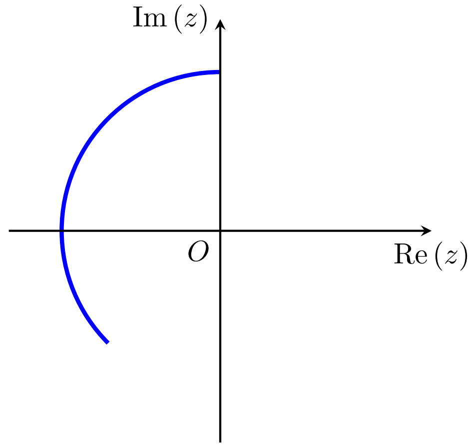
(C)



(B)



(D)



FIM

Cotações

- As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

Itens	8.2	13.1	13.2	13.3	Subtotal
Cotação (pontos)	20	16	20	16	72

- Destes 15 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

<table>
<tr><td rowspan="2">Itens</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4.1</td><td>4.2</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td rowspan="2">Subtotal</td></tr>
<tr><td>8.1</td><td>9</td><td>10</td><td>11.1</td><td>11.2</td><td>12</td><td>14</td><td></td></tr>
<tr><td>Cotação (pontos)</td><td colspan="8">8 × 16 pontos</td><td>128</td></tr>
</table>