Prova Modelo de Exame Nacional de Matemática A

Prova 635 | Ensino Secundário | Junho de 2015 | adaptada para 2020

12.º Ano de Escolaridade

Simulação de Prova 635

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

  1, **6**, **12.1** e **12.2**

  Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.

- Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular:

Semiperímetro $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone:

$\pi r g$ (r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica:

$4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide:

$\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Volume de um cone:

$\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Volume de uma esfera:

$\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões:

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética:

$$\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

Progressão geométrica:

$$u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, ..., n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

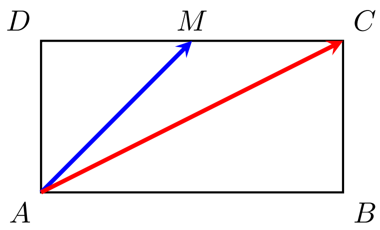
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1.

Na figura está representado um retângulo $[ABCD]$ e os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AM}$, onde M é o ponto médio de $[DC]$.



Qual das opções seguintes é igual a $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}$?

(A) $\overline{AB}^2 - \frac{1}{2}\overline{AD}^2$ **(B)** $\overline{AB}^2 + \frac{1}{2}\overline{AD}^2$ **(C)** $\overline{AC}^2 + \frac{1}{2}\overline{AB}^2$ **(D)** $\overline{AC}^2 - \frac{1}{2}\overline{AB}^2$

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w_1 = e^{i\frac{\pi}{14}}$ e $w_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e a região ξ do plano complexo definida por:

$$1 \leq |z| \leq 2 \;\wedge\; \left[\mathrm{Im}(z) \times \mathrm{Re}(z) \geq 0 \;\vee\; \left|\mathrm{Arg}(z)\right| < \frac{\pi}{3}\right]$$

2.1. Represente num referencial a região ξ e determine a sua área.

2.2. Mostre que o afixo (imagem geométrica) do complexo $\dfrac{\left[(w_1)^7 - i^{355}\right] \times e^{i\frac{\pi}{3}}}{(\overline{w_2})^3}$ pertence à fronteira da região ξ.

3. Sejam a e b dois números reais positivos tais que $a = 4^b$.

Qual das seguintes expressões é igual a $\log_8\left(32a^3\right) - \log_{32}\left(16a^2\right)$?

(A) $1 + 2b$ **(B)** $\frac{7}{15} + \frac{3}{5}b$ **(C)** $\frac{13}{15} + \frac{6}{5}b$ **(D)** $1 + 4b$

4. Num saco opaco estão bolas indistinguíveis ao tato, algumas bolas têm inscrito o número 1, outras têm inscrito o número 2 e as restantes têm inscrito o número 3.

Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma bola do saco e observar o número nela inscrito.

Sejam os acontecimentos:

A: *"sair uma bola com um número ímpar inscrito"*

B: *"sair uma bola com um número primo inscrito"*

Sabe-se que:

- $P\left(A|B\right) = \frac{1}{3}$
- $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = \frac{7}{9}$

Determine a probabilidade de sair uma bola com o número 1 inscrito.

Apresente o valor pedido na forma de fração irredutível.

5. Sejam f' e f'', de domínio $\mathbb{R}$, a primeira e segunda derivada de uma função f, respetivamente. Sabe-se que:

- a é um número real
- P é o ponto do gráfico de f de abcissa a
- a reta de equação $y = 3$ é tangente ao gráfico de f no ponto P
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{x-a} = 2$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) a é um zero de f

(B) $f(a)$ é um máximo relativo de f

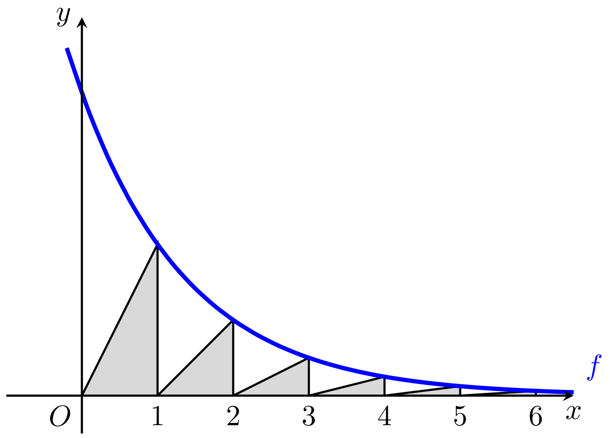
(C) $f(a)$ é um mínimo relativo de f

(D) P é ponto de inflexão do gráfico de f

6.

Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2^{3-x}$.

Na figura, estão representados, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f e uma sequência infinita de triângulos retângulos.



Sabe-se que:

- um dos lados de cada triângulo está contido no eixo das abcissas, de modo que os vértices desse lado correspondem a pontos com abcissas inteiras consecutivas
- um dos vértices de cada triângulo pertence ao gráfico da função f
- a sucessão (a_n) é a sucessão das áreas dos triângulos, sendo a_1 a área do triângulo maior
- a unidade do referencial é o centímetro.

Prove, utilizando processos analíticos, que a soma das áreas de todos os triângulos é igual a 4 cm^2.

7. Um dos termos do desenvolvimento do binómio $\left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x^2}{2}\right)^{10}$ é um monómio cuja parte literal é x^{10}. Qual é o coeficiente desse termo?

(A) $\frac{8505}{32}$ **(B)** $\frac{688905}{8}$ **(C)** $\frac{405}{256}$ **(D)** $-\frac{405}{16}$

8. Considere a função f, de domínio $]-1, +\infty[$, definida por $f(x) = 3 - \log_2(1+x)$.

No gráfico desta função, considere os pontos cujas abcissas são $-\frac{1}{2}$, 0, 1, 7 e 15.

Escolhem-se, ao acaso, dois desses cinco pontos e desenha-se o segmento de reta que tem por extremidades esses dois pontos.

Qual é a probabilidade de esse segmento intersetar a reta de equação $y = 1$?

(A) $0,4$ **(B)** $0,5$ **(C)** $0,6$ **(D)** $0,7$

9. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - 3(x+1)e^{2x} & \text{se } x \leq 0 \\ x \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

9.1. Estude, por processos analíticos, a função f quanto à existência de assíntotas não verticais do seu gráfico.

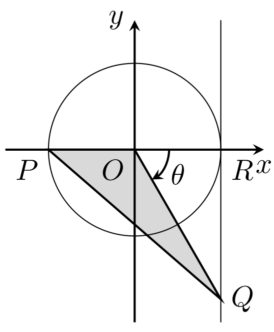
9.2. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função f, o ponto A pertencente ao gráfico de f com abcissa $-\frac{3}{2}$ e um ponto B que se desloca ao longo do gráfico de f com abcissa b positiva.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, para que valores de b, abcissa do ponto B, é que o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é obtuso.

Na sua resposta, deve:

- determinar, analiticamente, a ordenada do ponto A
- definir, em função de b, uma condição que traduza o problema
- apresentar o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora e ponto(s) relevante(s) com abcissa(s) aproximada(s) às centésimas
- apresentar a resposta ao problema na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais

10. Na figura encontra-se representado a circunferência trigonométrica, a reta de equação $x = 1$ e o triângulo $[OPQ]$.



Tal como a figura sugere:

- os pontos P e R têm coordenadas $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, respetivamente
- θ é a amplitude, em radianos, do ângulo ROQ, com $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$

Qual das seguintes expressões representa a área do triângulo $[OPQ]$?

(A) $\frac{\cos\theta}{2}$ **(B)** $-\frac{\sin\theta}{2}$ **(C)** $\frac{\tan\theta}{2}$ **(D)** $-\frac{\tan\theta}{2}$

11. O João tem cinco livros, dois deles são iguais e os restantes três são diferentes.

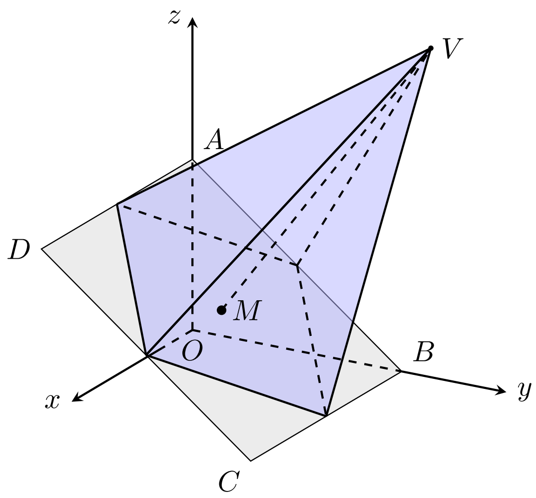
O João vai colocar os livros numa prateleira uns ao lado dos outros.

De quantas formas o pode fazer de modo que os dois livros iguais não fiquem juntos?

(A) 24 **(B)** 120 **(C)** 36 **(D)** 96

12.

No referencial o.n. $Oxyz$ da figura seguinte, encontra-se representado um quadrado $[ABCD]$ e uma pirâmide quadrangular regular cuja base está assente no quadrado $[ABCD]$.



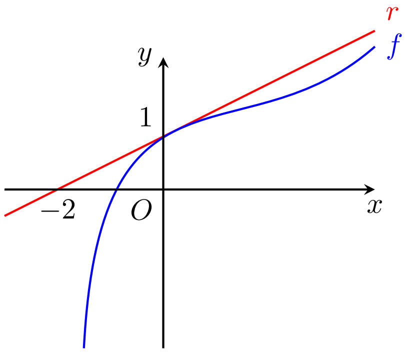
Sabe-se que:

- O é a origem do referencial
- o ponto A pertence ao eixo Oz e tem cota 3
- o ponto B pertence ao eixo Oy e tem ordenada 4
- os segmentos $[AD]$ e $[BC]$ pertencem aos planos xOz e xOy, respetivamente
- os vértices da base da pirâmide são os pontos médios dos lados do quadrado $[ABCD]$
- o centro M da base da pirâmide é o centro do quadrado $[ABCD]$

12.1. Mostre que a reta MV é definida pela condição $(x, y, z) = \left(\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}\right) + k\,(0, 3, 4)\,,\ k \in \mathbb{R}$.

12.2. Sabendo que o volume da pirâmide é igual a 25, determine as coordenadas do vértice V.

13. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, e uma reta r.



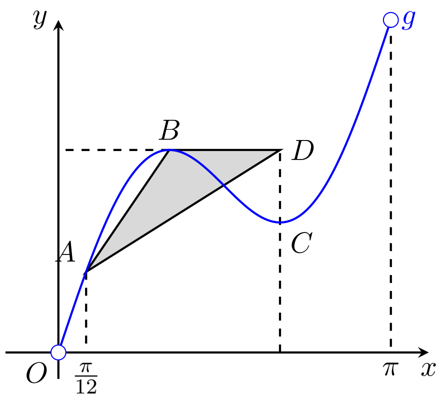
Sabe-se que:

- a reta r interseta os eixos coordenados nos pontos $(-2, 0)$ e $(0, 1)$
- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa nula
- a reta r é assíntota oblíqua do gráfico da função f quando $x \to +\infty$

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x \left(f\left(x^{-1}\right) - 1 \right) + \frac{x}{2f(x)} \right]$?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** 1 **(C)** $\frac{3}{2}$ **(D)** 2

14. Na figura, estão representadas, em referencial o.n. xOy, o gráfico da função g, de domínio $]0, \pi[$, definida por $g(x) = 4\left(\sin(2x) + x\right)$ e um triângulo $[ABD]$.



Sabe-se que:

- A é o ponto do gráfico de g com abcissa $\dfrac{\pi}{12}$
- os pontos A e C pertencem ao gráfico de g e as suas ordenadas são extremos relativos de g
- o ponto D tem a mesma abcissa do ponto C
- o segmento de reta $[BD]$ é paralelo ao eixo das abcissas

Resolva os itens seguintes utilizando apenas processos analíticos.

14.1. Prove que $g'(x) = 4\left(2\cos(2x) + 1\right)$ e que a área do triângulo $[ABD]$ é igual a $\frac{\pi}{6}\left[\pi + 2\left(\sqrt{3} - 1\right)\right]$.

14.2. Mostre que a reta tangente ao gráfico de g com declive mínimo é definida por $4x + y = 4\pi$.

FIM

Cotações

- As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

Itens	1	6	12.1	12.2	Subtotal
Cotação (pontos)	16	20	18	18	72

- Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

<table>
<tr><td rowspan="2">Itens</td><td>2.1</td><td>2.2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>7</td><td>8</td><td>9.1</td><td rowspan="2">Subtotal</td></tr>
<tr><td></td><td>9.2</td><td>10</td><td>11</td><td>13</td><td>14.1</td><td>14.2</td><td></td></tr>
<tr><td>Cotação (pontos)</td><td colspan="8">8×16 pontos</td><td>128</td></tr>
</table>