Primeiro teste - Matemática A
Ensino Secundário | Novembro de 2021

12º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 10 minutos. 8 Páginas

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n > 2$ e $p \in \{0, 1, ..., n-2\}$.

Qual das opções seguintes é igual a ${}^{n+1}C_{n-p} -{}^{n} C_p +{}^{n} C_{p+2}$?

(A) ${}^{n}C_{p+2}$ **(B)** ${}^{n+1}C_{p+2}$ **(C)** ${}^{n}C_{p+3}$ **(D)** ${}^{n+1}C_{p+3}$

2. Considere uma pirâmide reta cuja base é um polígono regular com n lados.

Sabe-se que escolhendo três dos vértices da pirâmide podem ser definidos 29 planos distintos.

Determine o valor de n.

3. Num saco opaco estão cartões, uns quadrangulares outros circulares, com um algarismo de 1 a 9 inscrito.

Na figura 1, estão exemplificados alguns dos cartões que estão dentro do saco:

Figura 1

Na experiência aleatória que consiste em retirar do saco um cartão, ao acaso, e verificar o seu formato e o número nele inscrito, sabe-se que:

- 40% dos cartões são circulares;
- Dos cartões quadrados, um em cada três, têm inscrito um número par.

3.1. Qual é a probabilidade de retirar um cartão quadrado com um número ímpar inscrito?
Apresente o valor pedido na forma de fração irredutível.

3.2. Considere o saco com a sua constituição inicial. Sabe-se que estão no saco 60 cartões.
Vão ser extraídos, ao acaso, cinco cartões do saco e colocados lado a lado de modo a formar um número com cinco algarismos.
Qual é a probabilidade desse número ser ímpar e os cartões retirados serem todos quadrados?
Apresente o valor pedido com aproximação às centésimas.

4. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos possíveis de Ω ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Prove que:

$$P\left[A|\overline{A \cap B}\right] \times \left[1 - P\left(A \cap B\right)\right] + P\left(B\right) \times P\left(A|B\right) = P\left(A\right)$$

5. Um dos termos no desenvolvimento de $\left(\pi^2 + \frac{1}{\pi}\right)^n$ é $a\pi^7$, com $a \in \mathbb{N}$.

Qual dos seguintes pode ser o valor de n?

(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 16

6. No referencial o.n. $Oxyz$ da figura 2 encontra-se representado um prisma quadrangular regular.

Sabe-se que:

- Alguns dos vértices do prisma estão designados pelas letras A, B, C e D
- $\overrightarrow{EA} = (1, 3, 2)$
- $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, -1)$
- o vértice C tem coordenadas $(2, 5, 4)$

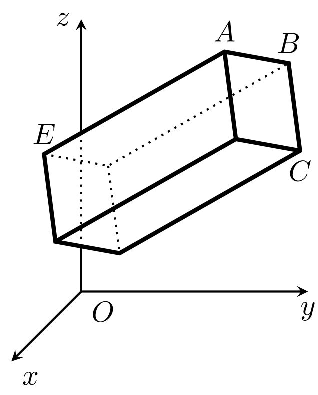

Figura 2

6.1. Defina por uma equação o plano paralelo a ABC e que contém o ponto E.
Apresente a sua resposta na forma $ax + by + cz + d = 0$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

6.2. Os restantes vértices do prisma vão ser designados, ao acaso, pelas letras D, F, G e H.
Qual dos valores seguintes é a probabilidade do plano EGH conter uma das faces do prisma?

(A) $\frac{5}{12}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{5}{24}$

7. No tabuleiro de xadrez, da figura 3, vão ser colocadas colocadas oito peças de xadrez: três peões pretos, dois peões brancos, o rei branco, a rainha branca e o rei preto, uma peça por cada casa do tabuleiro.

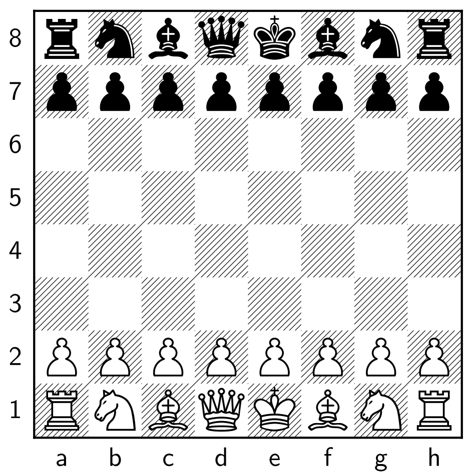

Figura 3

De quantas formas é possível colocar estas oito peças no tabuleiro de modo que elas fiquem na mesma fila, vertical ou horizontal, e as peças da mesma cor fiquem juntas?

(A) 512 **(B)** 1536 **(C)** 18432 **(D)** 9216

8. Novas matrículas nos automóveis em Portugal estão em circulação desde Março de 2020.

Essas novas matrículas consistem numa sequência de duas letras, seguidas de dois algarismos e novamente seguidas de duas letras.

As letras são escolhidas a partir do alfabeto português, com a inclusão das letras y, k e w. Ou seja, 26 escolhas possíveis para cada letra.

Os algarismos são escolhidos de entre 0 a 9.

Admita-se que não há restrições para a escolha das sequências de letras, nem para a sequência de algarismos.

Na figura 4 está representado um exemplo destas novas matrículas:

Figura 4

8.1. Quantas destas novas matrículas existem (ou poderão existir) de modo a que quando lidas da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda se obtém a mesma sequência?

8.2. Do conjunto de todas as novas matrículas possíveis de existir, considere a experiência aleatória que consiste em escolher uma delas ao acaso.

Considere os acontecimentos:

- A: "As duas sequências de letras na matrícula escolhida são iguais"
- B: "Todas as letras na matrícula são vogais"

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, determine o valor de $P\left(A|B\right)$.

Apresente o valor pedido na forma de fracção irredutível.

Nota: Considere que "y" é uma vogal.

9. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos possíveis de Ω ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- A e B são equiprováveis
- $P\left(A|B\right) = \dfrac{1}{3}$

Qual dos seguintes é o valor de $P\left(\overline{B}|A\right)$

(A) $\dfrac{1}{3}$ **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** 1 **(D)** $\dfrac{2}{3}$

FIM

Cotações

Itens	1	2	3.1	3.2	4	5	6.1	6.2	7	8.1	8.2	9	Total
Cotação (pontos)	15	20	15	20	20	15	20	15	15	15	15	15	200

Resoluções

Proposta de resolução do 1.º teste

1.

$$^{n+1}C_{n-p} -^n C_p +^n C_{p+2} =^{n+1} C_{p+1} -^n C_p +^n C_{p+2} =^n C_p +^n C_{p+1} -^n C_p +^n C_{p+2} =$$

$$^nC_{p+1} +^n C_{p+2} =^{n+1} C_{p+2}$$

Opção B

2.

$$^{n+1}C_3 -^n C_3 + 1 = 29 \Leftrightarrow \frac{(n+1)\times n \times (n-1)}{3!} - \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{3!} = 28 \Leftrightarrow$$

$$n \times (n-1) \times [n+1-n+2] = 168 \Leftrightarrow n^2 - n - 56 = 0 \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\times 56}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 15}{2} \Rightarrow n = 8$$

3. A: "O cartão é circular"

B: "O cartão tem um número par inscrito"

$$P(A) = 0.4$$
$$P\left(B|\overline{A}\right) = \frac{1}{3}$$

3.1. $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) =?$

$$\frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P\left(\overline{A} \cap B\right) = \frac{0.6}{3} \Leftrightarrow P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0.2$$

$$P\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{A} \cap B\right) + P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \Leftrightarrow 0.6 = 0.2 + P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \Rightarrow P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0.4 = \frac{2}{5}$$

3.2. $60 \times 0.4 = 24$ cartões circulares

$60 - 24 = 36$ cartões quadrados

$\frac{36}{3} = 12$ cartões quadrados com um número par inscrito

$36 - 12 = 24$ cartões quadrados um número ímpar inscrito

$$p = \frac{24 \times^{35} A_4}{^{60}A_5} \approx 0.05$$

4.

$$P\left[A|\overline{A\cap B}\right]\times\left[1-P\left(A\cap B\right)\right]+P\left(B\right)\times P\left(A|B\right)=$$

$$\frac{P\left[A\cap\overline{A\cap B}\right]}{P\left(\overline{A\cap B}\right)}\times P\left(\overline{A\cap B}\right)+P\left(A\cap B\right)=$$

$$P\left[A\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right]+P\left(A\cap B\right)=$$

$$P\left[\left(A\cap\overline{A}\right)\cap\left(A\cap\overline{B}\right)\right]+P\left(A\cap B\right)=$$

$$P\left[\emptyset\cap\left(A\cap\overline{B}\right)\right]+P\left(A\cap B\right)=$$

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)$$

5.

$$T={}^nC_p\left(\pi^2\right)^{n-p}\times\left(\frac{1}{\pi}\right)^p={}^nC_p\times\pi^{2n-3p}$$

n e p têm que ser inteiros não negativos, com $p\leq n$

Se $n=8$, então $2\times 8-3p=7\Rightarrow 3p=9\Rightarrow p=3\in\mathbb{N}_0$

Se $n=10$, então $2\times 10-3p=7\Rightarrow 3p=13\Rightarrow p=\frac{13}{3}\notin\mathbb{N}_0$

Se $n=12$, então $2\times 12-3p=7\Rightarrow 3p=17\Rightarrow p=\frac{17}{3}\notin\mathbb{N}_0$

Se $n=16$, então $2\times 16-3p=7\Rightarrow 3p=25\Rightarrow p=\frac{25}{3}\notin\mathbb{N}_0$

Opção A

6.

6.1.

$$E=C-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{EA}=(2,5,4)-(-1,1,-1)-(1,3,2)=(2,1,3)$$

$$(x-2)+3\left(y-1\right)+2\left(z-3\right)=0\Leftrightarrow x+3y+2z-11=0$$

6.2.

$$p=\frac{\left(2!+{}^3A_2\right)\times 2!}{4!}=\frac{2}{3}$$

Opção C

7.

$$2\times 8\times 2\times{}^4C_3\times{}^4C_2\times 2!=1536$$

Opção B

8.

8.1.

$$26^2 \times 10 = 6760$$

8.2.

$$P\left(A|B\right) = \frac{6^2}{6^4} = \frac{1}{36}$$

9.

$$P\left(B\right) = P\left(A\right)$$

$$\frac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{3} \times P\left(B\right) \Leftrightarrow P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{3} \times P\left(A\right)$$

$$P\left(\overline{B}|A\right) = \frac{P\left(\overline{B} \cap A\right)}{P\left(A\right)} = \frac{P\left(A\right) - P\left(A \cap B\right)}{P\left(A\right)} = \frac{P\left(A\right) - \frac{1}{3} \times P\left(A\right)}{P\left(A\right)} = \frac{\frac{2}{3} \times P\left(A\right)}{P\left(A\right)} = \frac{2}{3}$$

Opção D