Prova Modelo de Exame Nacional de Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Maio de 2015 | adaptada para 2020
12.º Ano de Escolaridade

Simulação de Prova 635

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

  6, **11.1**, **13.1** e **13.2**

  Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.
- Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular:

$Semiperímetro \times Apótema$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone:

$\pi r g$ (r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica:

$4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide:

$\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Volume de um cone:

$\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Volume de uma esfera:

$\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões:

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética:

$$\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

Progressão geométrica:

$$u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, ..., n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

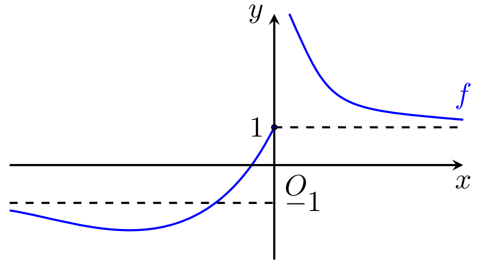
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.



Tal como a figura sugere, as retas de equação $y = 1$, $y = -1$ e $x = 0$ são assíntotas do gráfico de f.

Considere ainda a progressão geométrica (a_n) tal que $a_1 = -\frac{3}{5}$ e $a_2 = -\frac{2}{5}$.

Qual dos seguintes é o valor de $\lim f\,(a_n)$?

(A) 1 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** $+\infty$

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \frac{(1+2i)^2}{\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{10}}$ e $z_2 = 2i \times z_1$.

No plano complexo considere que A é a imagem geométrica de z_1, que B é imagem geométrica de z_2 e que O é a origem do referencial.

Prove, sem utilizar a calculadora, que $z_1 = 4 + 3i$ e determine a área do triângulo $[OAB]$.

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{2x-1} - 4$ e uma função ímpar g, tal que $g(2) = -\frac{1}{2}$ e $\lim\limits_{x \to -2} \frac{g(x)+g(2)}{x+2} = 3$.

Seja f^{-1} a função inversa da função f.

Qual é o valor de $g'(-2) + f^{-1}(e-4)$?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

4. De uma turma de 12.º ano, sabe-se que:

- 40% dos alunos são raparigas;
- duas em cada três raparigas da turma não pretendem seguir um curso de Engenharia;
- 30% dos alunos são rapazes que pretendem seguir um curso de Engenharia.

4.1. Selecionando um aluno ao acaso, de entre os alunos da turma que pretendem seguir um curso de Engenharia, qual é a probabilidade de ser rapaz?
Apresente o valor na forma de fração irredutível.

4.2. Suponha que a turma em questão tem 30 alunos.
Pretende-se selecionar quatro alunos da turma para formar uma comissão de finalistas. De quantas formas se pode fazer a seleção de modo que a comissão tenha pelo menos uma rapariga.

5. Considere, para um certo número real k, a função f, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}+x-1}{x-\sqrt{2x}} & \text{se } \; x > 0 \\ \\ \cos(3x-k) & \text{se } \; x \leq 0 \end{cases}$$

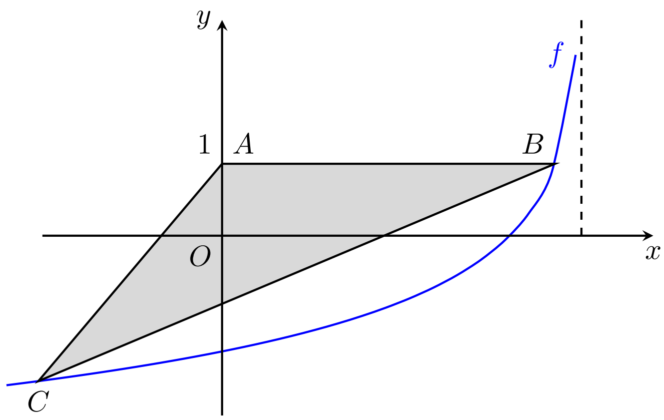
f é contínua em $x = 0$ se:

(A) $k = 0$ **(B)** $k = \frac{\pi}{4}$ **(C)** $k = \frac{\pi}{2}$ **(D)** $k = \pi$

6.

Considere a função f, de domínio $]-\infty, 5[$, definida por $f(x) = -\ln(5-x)$.

Na figura, estão representados, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, e o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(0, 1)$;
- B é o ponto do gráfico da função f com ordenada 1;
- o ponto C pertence ao gráfico da função f e tem abcissa negativa;
- a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 7.

Determine as coordenadas do ponto C, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Na sua resposta, deve:

- determinar, analiticamente, a abcissa do ponto B;
- escrever uma expressão para a área do triângulo $[ABC]$ em função da abcissa do ponto C;
- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizadas, devidamente identificados;
- indicar a abcissa do ponto C com aproximação às centésimas;
- determinar a ordenada do ponto C com aproximação às centésimas.

7. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(\overline{A}) = 0,7$
- $P(\overline{A} \cap B) = 0,55$
- A e B são acontecimentos incompatíveis;

Qual é o valor de $P(\overline{A}|\overline{B})$?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{5}{9}$ **(C)** 0 **(D)** $\frac{1}{3}$

8. Considere a o número natural que verifica a igualdade:

$$^{2013}C_{100} + ^{2013}C_{1912} + a = ^{2015}C_{102}$$

Qual é o valor de a?

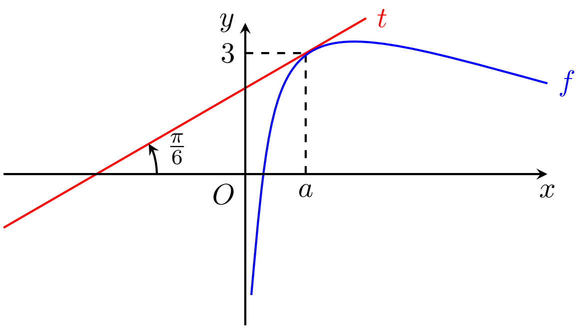
(A) $^{2015}C_{101}$ **(B)** $^{2015}C_{102}$ **(C)** $^{2014}C_{101}$ **(D)** $^{2014}C_{102}$

9. Considere a função g, de domínio $[0, 2\pi]$, cuja derivada g', com o mesmo domínio, é definida por $g'(x) = e^{\sin x} + \cos(2x)$.

9.1. Determine, sem utilizar a calculadora, o valor de $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}} \frac{g\left(\frac{3\pi}{2}\right) - g(x)}{2x - 3\pi}$.

9.2. Recorra ao teorema de Bolzano para provar que o gráfico da função g admite pelo menos um ponto de inflexão de abcissa a, com $a \in \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right[$.

10. Na figura está representado o gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$ e uma reta t, tangente ao gráfico de f, no ponto $(a, 3)$, com $a > 0$.



A função f admite primeira e segunda derivada finitas em $x = a$.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

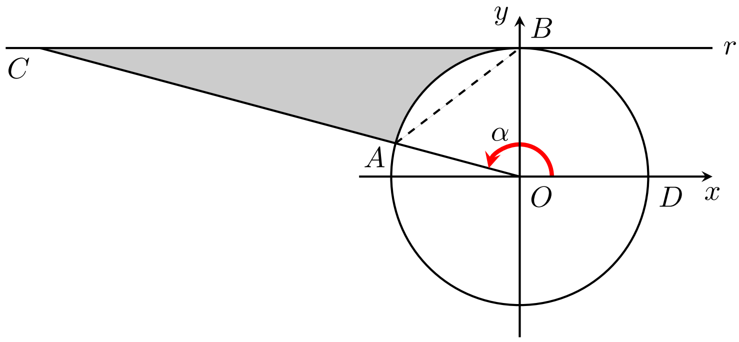
(A) $f(a) \times f'(a) + f''(a) > \sqrt{3}$

(B) $f(a) \times f'(a) + f''(a) < \sqrt{3}$

(C) $f(a) \times f'(a) + f''(a) > 0$

(D) $f(a) \times f'(a) + f''(a) < 0$

11. Na figura, estão representadas, em referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro O e uma reta r.



Sabe-se que:

- os pontos A, B e D pertencem à circunferência;
- os pontos B e D têm coordenadas $(0, 1)$ e $(1, 0)$, respetivamente;
- r é a reta de equação $y = 1$ e é tangente à circunferência;
- o ponto C move-se sobre a reta r no segundo quadrante;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo DOC com $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

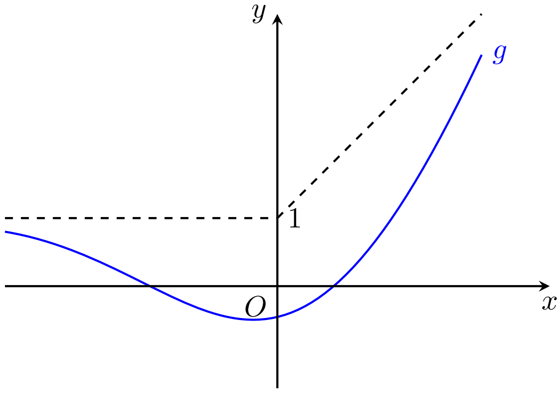
Seja A a função, de domínio $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, que a cada valor de α faz corresponder a área da região sombreada da figura.

11.1.

Mostre que $A(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{1}{\tan \alpha}\right)$.

11.2. Por processos analíticos, prove que a função A é estritamente crescente em $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

12. Na figura estão representados o gráfico de uma função g, contínua em $\mathbb{R}$ e as duas assíntotas do seu gráfico, definidas por $y = 1$ e por $y = 1 + x$.

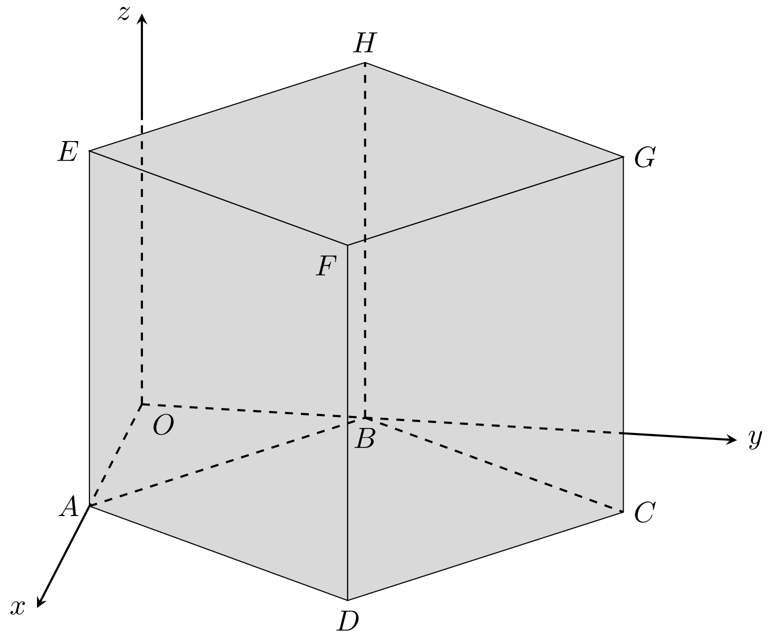


Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[g(-x) \times \frac{x}{g(x)} + x - g(x)\right]$?

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** -1

13.

Num referencial o.n. $Oxyz$ da figura seguinte, encontra-se representado um cubo $[ABCDEFGH]$.



Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy;
- o ponto A pertence ao eixo Ox e tem abcissa 4;
- o ponto B pertence ao eixo Oy e tem ordenada 3;
- o plano α é o plano EDG.

13.1. Prove que $D(7,4,0)$ e que $G(3,7,5)$ e determine o valor de $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DG}$.

13.2. Mostre que o plano α é definido por $7x + y + 5z = 53$.

14. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere, para um determinado $k \in \mathbb{N}_0$ e $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, o número complexo $z = (1+i)^4 \times \left[\frac{i^{4k+3}}{e^{\alpha i}}\right]^2$.

Para que valor de α a imagem geométrica de z pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares?

(A) $\frac{3\pi}{8}$ **(B)** $\frac{\pi}{8}$ **(C)** $\frac{\pi}{4}$ **(D)** $\frac{\pi}{3}$

FIM

Cotações

- As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

Itens	6	11.1	13.1	13.2	Subtotal
Cotação (pontos)	16	16	20	20	72

- Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Itens	1	2	3	4.1	4.2	5	7	8	Subtotal
		9.1	9.2	10	11.2	12	14		
Cotação (pontos)	8×16 pontos								128