Prova Modelo de Exame Nacional de Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Julho de 2020
12º Ano de Escolaridade

Simulação de Prova 635

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

  1, **7.1**, **7.2** e **10**

  Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.
- Dos restantes 15 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular:

$\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone:

$\pi r g$ (r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica:

$4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide:

$\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Volume de um cone:

$\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Volume de uma esfera:

$\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões:

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética:

$\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica:

$u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, ..., n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

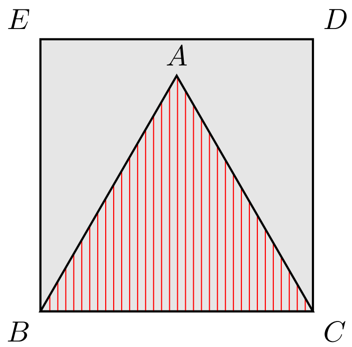
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1.

Na figura está representado um triângulo equilátero $[ABC]$ e um quadrado $[BCDE]$, ambos de lado a.



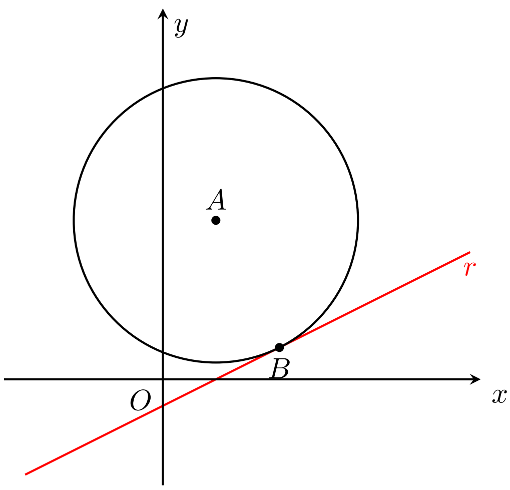
Qual dos seguintes é o valor de $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC}$?

(A) $\frac{1}{2}a^2$ **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ **(C)** $-\frac{1}{2}a^2$ **(D)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

2. Resolva, em $\mathbb{R}$ e por processos analíticos, a equação:

$$\frac{\log_2 x}{5+\log_8 x^3} + (\log_4 x)^2 = 0$$

3. No referencial o.n. xOy da figura estão representadas uma circunferência e uma reta r.



Sabe-se que:

- o ponto A, centro da circunferência, tem coordenadas $(1,\ 3)$
- a reta r é tangente à circunferência no ponto B e é definida pela equação $2y - x + 1 = 0$

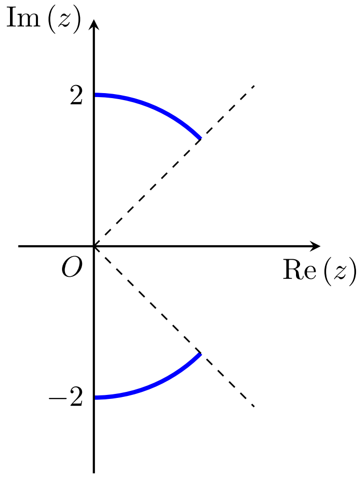
3.1. Mostre que a reta AB é definida por $2x + y = 5$.

3.2. Defina a circunferência por uma equação na forma $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c$, com $a, b \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{Q}$.

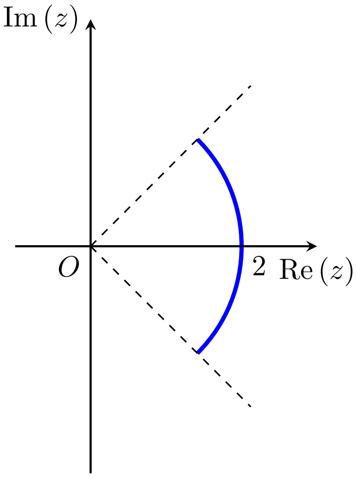
4. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere a condição:

$$z+\overline{z}\geq 0 \ \wedge \ z\cdot\overline{z}=2 \ \wedge \ \left|\operatorname{Arg}(z)\right|\geq\frac{\pi}{4}$$

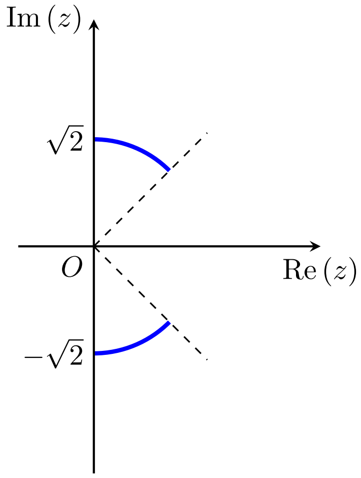
Em qual das opções seguintes está representada a região do plano complexo que verifica a condição?



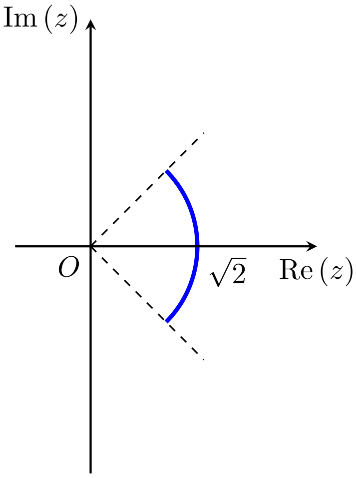
(A)



(B)



(C)



(D)

5. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1=e^{i\frac{\pi}{12}}$ e $z_2=2-i$.

Determine $w=z_1^3\left(\frac{\overline{z_2}^2}{i^{53}}+e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$ na forma algébrica.

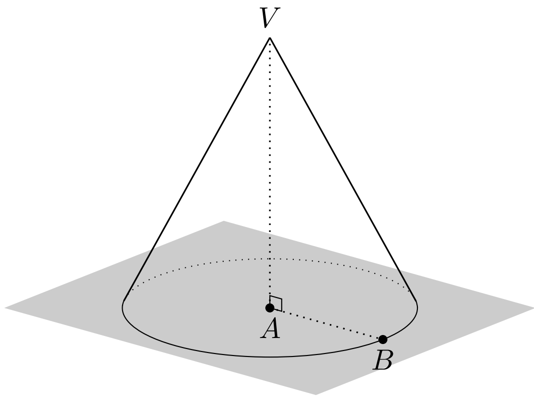
6. Sejam S_n e S_{n+1}, respetivamente, a soma de todos os elementos de duas linhas consecutivas do triângulo de Pascal.

Qual dos seguintes é o valor de $\log_2 S_n-\log_2 S_{n+1}$?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2

7.

Na figura encontra-se representado geometricamente um cone e o plano α que contém a base do cone.



Sabe-se que:

- a reta AV contém a altura do cone e é definida por:

$$(x, y, z) = (-2, -4, 6) + k\,(3, 4, -3)\,,\ k \in \mathbb{R}$$

- A pertence ao plano xOz e o ponto V pertence ao plano xOy
- $[AB]$ é um raio da base do cone
- o ponto B pertence à reta definida por: $z = 1 \ \wedge\ y = 0$

7.1. Mostre que o plano α é definido por $3x + 4y - 3z + 6 = 0$.

7.2. Seja θ a amplitude, em radianos, do ângulo AVB.
Determine o valor de:

$$\sin(\theta - 5\pi) \times \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) + \tan^2(3\pi - \theta)$$

8. Considere todos os números com cinco algarismos distintos formados a partir dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Quantos destes números começam por um algarismo ímpar ou terminam com um algarismo ímpar?

(A) $2 \times 5 \times {}^8A_4 - {}^5A_2 \times {}^7A_3$

(B) $2 \times 5 \times {}^8A_4$

(C) ${}^5A_2 \times {}^7A_3$

(D) $2 \times 5 \times {}^8A_4 + {}^5A_2 \times {}^7A_3$

9. Seja Ω o espaço amostral (espaço de resultados) associado a uma certa experiência aleatória.
A e B são dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), tais que:

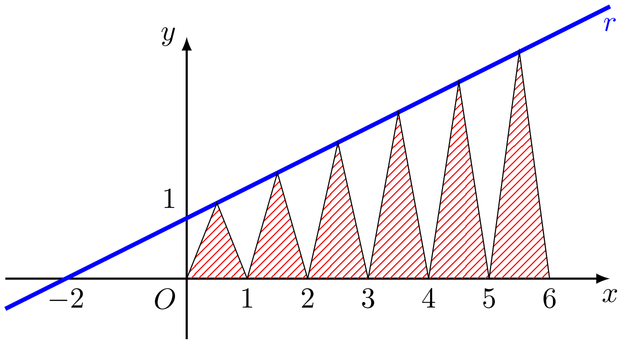
- $P(A) = 0,3$
- $P\left(A|B\right) = P(A)$
- $P\left(\overline{A} \cup B\right) = 0,8$

O valor de $P(B)$ é?

(A) $\frac{5}{7}$ **(B)** $\frac{2}{7}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{2}{3}$

10.

No referencial o.n. xOy da figura estão representados uma reta r e seis triângulos isósceles.



Tal como a figura sugere:

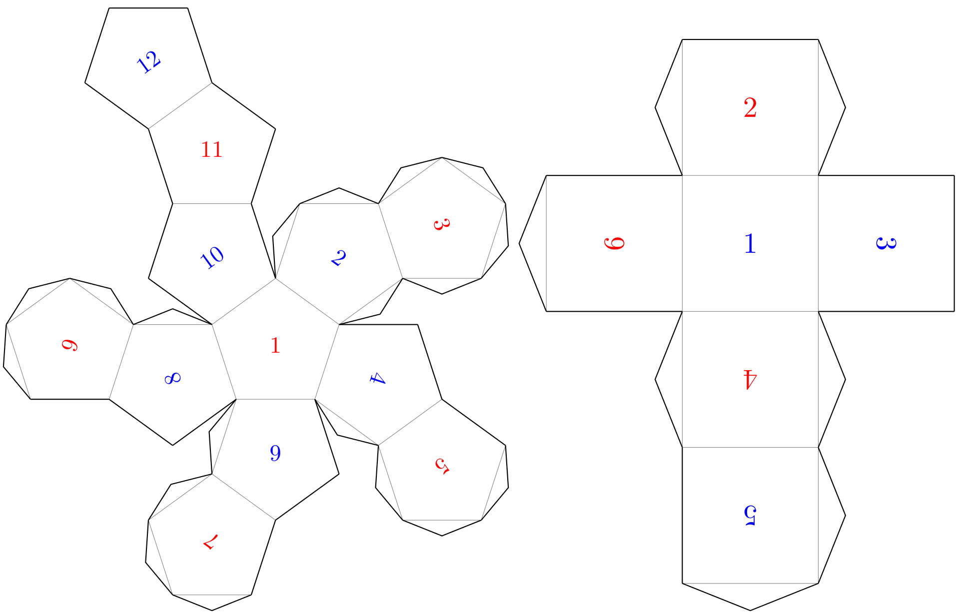
- a reta r interseta o eixo Ox no ponto de abcissa -2
- a reta r interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 1
- os vértices das bases dos triângulos pertencem ao eixo Ox e têm abcissas inteiras consecutivas, não negativas
- o restante vértice de cada um dos triângulos pertence à reta r

O João, seguindo esta regra de construção, desenhou mais alguns triângulos para além dos seis que já existiam.

No final, a soma das áreas de todos os triângulos era igual a $127,5$.

Quantos triângulos desenhou o João?

11. A figura mostra a planificação de dois dados equilibrados, um dodecaédrico e outro cúbico, com as faces numeradas.



Tal como a figura sugere:

- as faces do dado dodecaédrico estão numeradas de 1 a 12, estando os números pares desenhados a azul e os números ímpares desenhados a vermelho
- as faces do dado cúbico estão numeradas de 1 a 6, estando os números pares desenhados a vermelho e os números ímpares desenhados a azul

Considere a experiência aleatória que consiste lançar uma vez cada um dos dados e assinalar a cor e o número marcado na face que fica voltada para cima.

11.1. Determine a probabilidade da soma dos valores obtidos nos dois dados ser superior a 10.

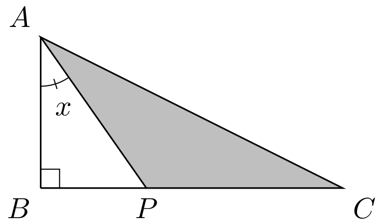
Apresente o valor pedido na forma de fração irredutível.

11.2. Considere os acontecimentos:

- A: "O números obtidos nas faces voltadas para cima nos dois dados têm a mesma cor"
- B: "O produto dos números obtidos é par"

Justifique que $P\left(B|A\right) = 1$, numa composição, começando por explicar o significado de $P\left(B|A\right)$ no contexto da situação descrita.

12. Na figura está representado um triângulo retângulo $[ABC]$.



Considere que um ponto P move-se ao longo de $[BC]$ nunca coincidindo com o ponto B nem com o ponto C.

Sabe-se que:

- x é a amplitude, em radianos, do ângulo BAP
- $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = 2a$, com $a > 0$

Qual das seguintes expressões dá, em função de x e de a, a área do triângulo $[APC]$?

(A) $\frac{a^2}{2}\tan x$ **(B)** $a^2\left(1 - \frac{1}{2}\sin x\right)$ **(C)** $a^2\left(1 - \frac{1}{2}\cos x\right)$ **(D)** $a^2\left(1 - \frac{1}{2}\tan x\right)$

13. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

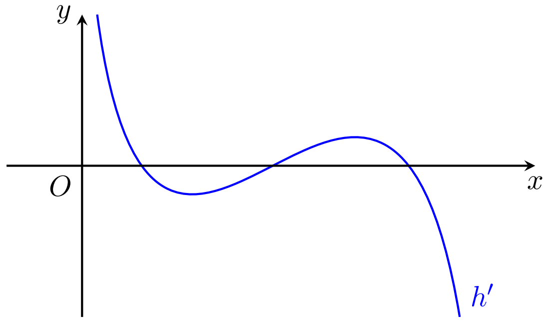
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{3xe^x + 1}{e^x} & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}{1 - x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

13.1. Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto, prove que $g'(1) = \dfrac{3e - 1}{e}$.

13.2. Averigue a existência de assintotas não verticais ao gráfico de g.

Caso exista(m), defina-a(s) pela sua equação reduzida.

14. No referencial o.n. xOy da figura encontra-se parcialmente representado o gráfico de h', primeira derivada da função h, de domínio $\mathbb{R}^+$.



Atendendo aos dados da figura, qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) O gráfico de h tem apenas um ponto de inflexão

(B) h tem dois mínimos relativos

(C) h tem dois máximos relativos

(D) h'' é estritamente crescente

15. Seja (a_n) a sucessão de termo geral $a_n = n^2 e^{-n} + \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Qual é o valor de $\lim(a_n)$?

(A) 1 **(B)** 0 **(C)** $-\infty$ **(D)** $+\infty$

FIM

Cotações

- As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

Itens	1	7.1	7.2	10	Subtotal
Cotação (pontos)	16	16	20	20	72

- Destes 15 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

<table>
<tr><td rowspan="2">Itens</td><td>2</td><td>3.1</td><td>3.2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>8</td><td>9</td><td rowspan="2">Subtotal</td></tr>
<tr><td>11.1</td><td>11.2</td><td>12</td><td>13.1</td><td>13.2</td><td>14</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>Cotação (pontos)</td><td colspan="8">8 × 16 pontos</td><td>128</td></tr>
</table>