Prova Modelo de Exame Nacional de Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Abril de 2021
12º Ano de Escolaridade

Simulação de Prova 635

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 7 Páginas

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

  1.1, **1.2**, **3.2** e **9.3**

  Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.

- Dos restantes 15 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular:

Semiperímetro $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone:

$\pi r g$ (r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica:

$4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide:

$\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone:

$\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera:

$\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões:

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética:

$\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica:

$u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, ..., n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1.

Na figura 1 está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cone de revolução.

Sabe-se que:

- o vertice V tem coordenadas $(4, 2, 1)$
- C é o centro da base do cone
- $[VC]$ é a altura do cone
- $[VA]$ é uma geratriz do cone
- o vetor $\overrightarrow{VA}$ tem coordenadas $\left(-\frac{7}{2}, 2, 0\right)$
- a reta VC é definida por:
  $(x, y, z) = (0, 4, 5) + \lambda\,(4, -2, -4)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$

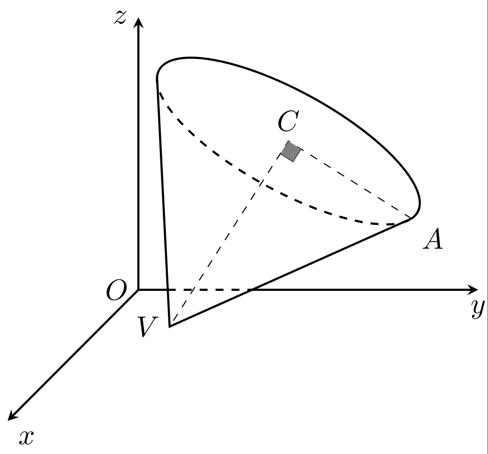


Figura 1

1.1. Mostre que o plano que contém a base do cone pode ser definido por $-2x + y + 2z = 5$.

1.2. Determine o volume do cone.

2. Um saco contém n bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a n, sendo n ímpar maior que dois.

2.1. Extraem-se, sucessivamente, ao acaso e sem reposição, duas bolas do saco.
Sabe-se que a probabilidade de ser retirada pelo menos uma bola numerada com número ímpar é de $\frac{11}{14}$.
Determine o valor de n.

2.2. Admita agora que $n = 9$ e que todas as bolas estão novamente dentro do saco.

2.2.1. Novamente, extraem-se, sucessivamente, ao acaso e sem reposição, duas bolas do saco.
Considere os acontecimentos:

- A: "A primeira bola extraída está numerada com um número ímpar";
- B: "A primeira bola extraída está numerada com um número múltiplo de 3";
- C: "A segunda bola extraída está numerada com um número par".

Determine o valor de $P\left[C \mid \left(\overline{A \cup \overline{B}}\right)\right]$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada. Na sua resposta deve:

- explicar o significado de $P\left[C \mid \left(\overline{A \cup \overline{B}}\right)\right]$ no contexto da situação descrita;
- justificar qual foi a primeira bola extraída;
- indicar o número de casos possíveis;
- indicar o número de casos favoráveis;
- apresentar o valor pedido na forma de fração irredutível.

2.2.2. Retirando uma a uma, todas as bolas do saco e colocando-as lado a lado em fila, de quantas formas podem ficar os números ímpares colocados de forma crescente?
Por exemplo: 183245796 ou 135792486 ou ainda 123456789

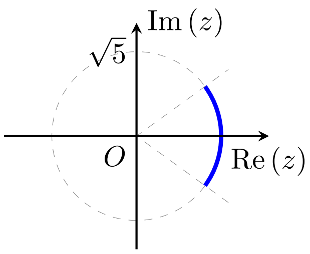
(A) 24 **(B)** 126 **(C)** 3024 **(D)** 15120

3. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = e^{\frac{\pi}{5}i}$.

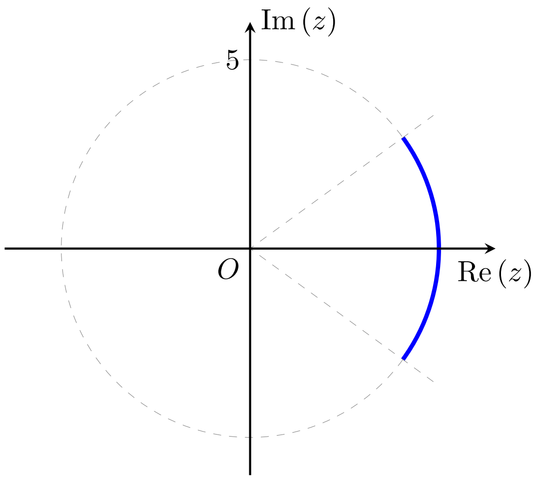
3.1. Em qual das opções está representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definidos pela condição seguinte:

$$|z| = |z_1| \ \wedge \ |\operatorname{Arg}(z)| \leq \operatorname{Arg}(z_2)$$

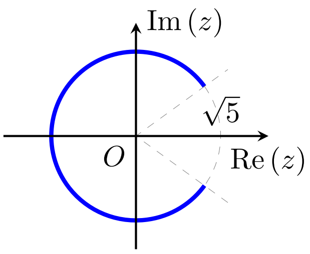
(A)



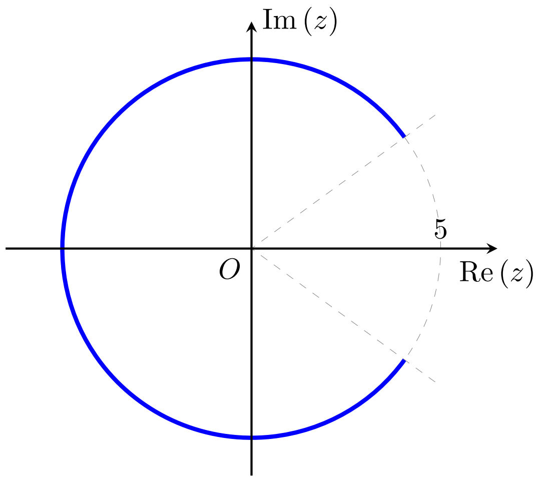
(B)



(C)



(D)



3.2.

Sem utilizar a calculadora, determine:

$$\frac{\overline{z_1}^3 + \left(3 \cdot \overline{z_2}^{15}\right)^2}{1 + i^{2021}}$$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

4. Seja g uma função de domínio $[-3,\ 3]$.

Sabe-se que:

- g é uma função ímpar
- g é contínua no seu domínio
- $g(1) = g(3) = 2$
- $g(2) > 0$

Prove que existe pelo menos um número real $c \in \,]-3, 1[$ tal que $(g \circ g)(c) + g(c+1) = 0$

5. No referencial o.n. xOy da figura 2 encontra-se parcialmente representado o gráfico da função f'', segunda derivada de uma função f.

Sabe-se que:

- o domínio de f, f' e f'' é $\mathbb{R}^+$
- a e b são zeros de f''

Qual das afirmações seguintes é falsa?

(A) $f'(a)$ é máximo relativo de f'

(B) $\big(a, f(a)\big)$ é ponto de inflexão do gráfico de f

(C) $f'(a) > f'(b)$

(D) $\big(b, f(b)\big)$ é ponto de inflexão do gráfico de f

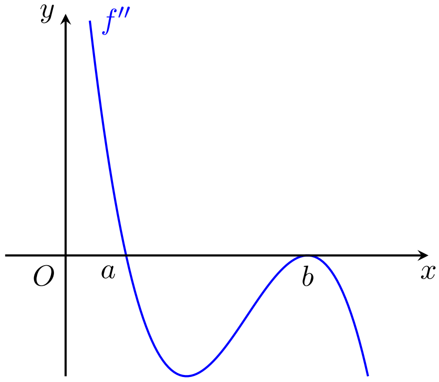


Figura 2

6. Uma certa linha do triângulo de Pascal tem 2021 elementos.

Quantos desses elementos são superiores a ${}^{2021}C_{100} - {}^{2019}C_{99} - {}^{2019}C_{1919}$?

(A) 1823 **(B)** 1821 **(C)** 1825 **(D)** 1819

7. Na figura 3 encontram-se representadas, num referencial o.n. xOy, duas retas, r e s, e parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}^+$.

Tal como a figura sugere:

- a reta s forma com o eixo das abcissas um ângulo de amplitude $\frac{\pi}{3}$
- as retas r e s são perpendiculares e intersetam-se no ponto de coordenadas $(1, 0)$
- r é assintota do gráfico de f quando $x \to +\infty$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

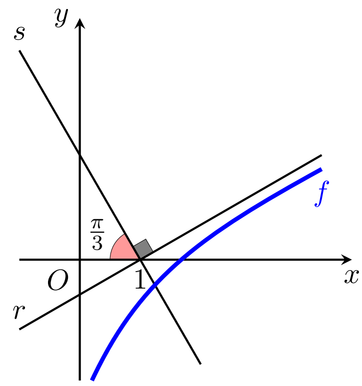


Figura 3

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \sqrt{3}$

(B) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3f(x) - \sqrt{3}x\right) = \sqrt{3}$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3}x - 3f(x)\right) = \sqrt{3}$

(D) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\sqrt{3}$

8. Na figura 4 está representado um pentágono regular de lado 2 unidades $[ABCDE]$ e dois vetores: $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$.
Qual dos seguintes é o valor de $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ com aproximação às décimas?

(A) $8,4$ **(C)** $8,6$

(B) $8,5$ **(D)** $8,7$

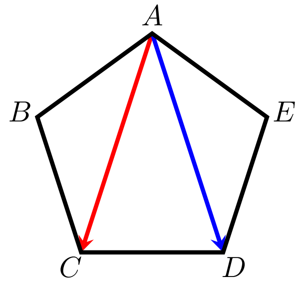


Figura 4

9. Na figura 5 está representado, em referencial o.n. xOy a circunferência trigonométrica, uma reta r e uma região a sombreado.

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial
- P é o ponto de coordenadas $(1, 0)$
- r é a reta definida por $x = 1$
- Q desloca-se sobre a circunferência ao longo do primeiro quadrante
- θ é a amplitude, em radianos, do ângulo POQ, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
- R acompanha o movimento do ponto Q deslocando-se sobre a circunferência ao longo do quarto quadrante de modo que o ângulo ROQ é um ângulo reto
- os pontos S e T são os pontos de interseção da reta r com as semirretas $\dot{O}Q$ e $\dot{O}R$, respectivamente.

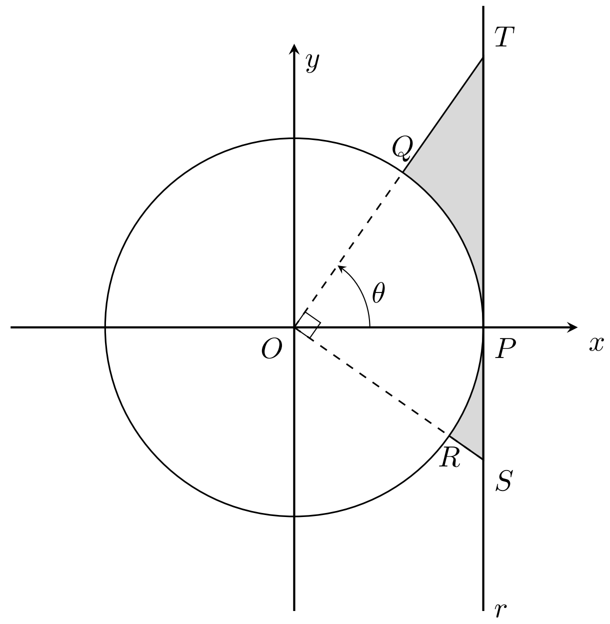


Figura 5

Seja A a função que a cada valor de θ faz corresponder o valor da área da região a sombreado.

9.1. Mostre que $A(\theta) = \dfrac{1}{\sin(2\theta)} - \dfrac{\pi}{4}$, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

9.2. Determine, por processos analíticos, o valor de θ para o qual é mínima a área da região a sombreado.

9.3.

> Qual é conjunto de valores de θ para os quais a área da região a sombreado é menor que a área do triângulo [OPQ]?
>
> Recorra às capacidades gráficas da sua calculadora para resolver esta questão.
>
> Na sua resposta deve:
>
> - Formular uma inequação cuja solução responde ao problema
> - Representar graficamente a(s) função(ões) que lhe permitem obter a resposta ao problema
> - Assinalar o(s) ponto(s) relevante(s), indicando a(s) sua(s) abcissa(s) com aproximação às centésimas
> - Indicar o conjunto solução utilizando a notação de intervalos de números reais

10. Resolva, em $\mathbb{R}$ e por processos analíticos, a inequação:

$$\log_2(x-2) \leq 1 + \log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x}\right) - \log_4(x+3)$$

Apresente o conjunto solução utilizando a notação de intervalos de números reais.

11. Seja (a_n) uma progressão geométrica de razão r e termos positivos e (b_n) a sucessão definida por:

$$\begin{cases} b_1 = a_1 & \text{se } \; n = 1 \\ \\ b_n = b_{n-1} + \ln(a_n) - \ln(a_{n-1}) & \text{se } \; n > 1 \end{cases}$$

Mostre que (b_n) é uma progressão aritmética e que o seu termo geral pode ser definido por $b_n = a_1 + \ln\left(r^{n-1}\right)$

12. Considere f, a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\ln(e^x + 1) - \ln(4)}{e^x - 1} & \text{se } \; x < 0 \\ \\ \ln\left(2e^{1+x} - e\right) - x & \text{se } \; x \geq 0 \end{cases}$$

12.1. Mostre que f é contínua em $x = 0$.

12.2. O gráfico de f apresenta uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$.
Defina essa assíntota por uma equação.

FIM

Cotações

- As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

Itens	1.1	1.2	3.2	9.3	Subtotal
Cotação (pontos)	16	18	20	18	72

- Destes 15 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Itens	2.1	2.2.1	2.2.2	3.1	4	5	6	7	Subtotal
	8	9.1	9.2	10	11	12.1	12.2		
Cotação (pontos)	8×16 pontos								128