Proposta de resolução

1.

1.1.

$$A = V + \overrightarrow{VA} = (4,2,1) + \left(-\frac{7}{2}, 2, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 4, 1\right)$$

$\overrightarrow{n} = (4,-2,-4)$ é um vetor diretor da reta VC e, portanto, um vetor normal ao plano que contém a base do cone.

O plano que contém a base do cone pode ser definido por:

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right) - 2(y-4) - 4(z-1) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 - 2y + 8 - 4z + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x - 2y - 4z = -10 \Leftrightarrow -2x + y + 2z = 5$$

1.2. C é a interseção da reta VC com o plano que contém a base do cone, assim:

$$(x,y,z) = (0,4,5) + \lambda(4,-2,-4),\ \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y,z) = (4\lambda, 4-2\lambda, 5-4\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$-2x + y + 2z = 5 \Leftrightarrow -2(4\lambda) + (4-2\lambda) + 2(5-4\lambda) = 5 \Leftrightarrow$$

$$-8\lambda + 4 - 2\lambda + 10 - 8\lambda = 5 \Leftrightarrow 18\lambda = 9 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\therefore C(2,3,3)$$

$$\overline{VC} = \sqrt{(4-2)^2 + (2-3)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$\overline{CA} = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + (3-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 1 + 4} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\therefore V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2 \times 3 = \frac{29}{4}\pi$$

2.

2.1. Se n é ímpar então $\dfrac{n-1}{2}$ é o número de bolas mumeradas com número par e $\dfrac{n+1}{2}$ é o número de bolas numeradas com número ímpar.

A probabilidade de ser retirada pelo menos uma bola numerada com número par é dada por:

$$1 - \frac{{}^{\frac{n-1}{2}}C_2}{{}^{n}C_2}$$

Então:

$$1 - \frac{{}^{\frac{n-1}{2}}C_2}{{}^{n}C_2} = \frac{11}{14} \Leftrightarrow \frac{{}^{\frac{n-1}{2}}C_2}{{}^{n}C_2} = \frac{3}{14} \Leftrightarrow \frac{\dfrac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2} - 1\right)}{2}}{\dfrac{n(n-1)}{2}} = \frac{3}{14} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{1}{4}(n-1)(n-3)}{n^2-n}=\frac{3}{14}\Leftrightarrow\frac{n^2-4n+3}{n^2-n}=\frac{6}{7}\Leftrightarrow 7n^2-28n+21=6n^2-6n\Leftrightarrow$$

$$n^2-22n+21=0\Leftrightarrow n=\frac{22\pm\sqrt{22^2-4\times 21}}{2}\Leftrightarrow n=1\vee n=21\Rightarrow n=21$$

2.2.

2.2.1.

$$P\left[C\mid\left(\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}\right)\right]=P\left[C\mid\left(\overline{A}\cap B\right)\right]=\frac{3}{8}$$

$P\left[C\mid\left(\overline{A}\cap B\right)\right]$ é a probabilidade de a segunda bola extraída ser numerada com número par, sabendo que a primeira bola extraída estava numerada com um número par e múltiplo de três. Se o primeiro valor extraído era par e múltiplo de três, então a bola extraída continha o número seis. Assim, para a segunda extração restam oito bolas, três delas numeradas com número par (2,4 e 8).

2.2.2. ${}^9A_4=3024$ Opção C

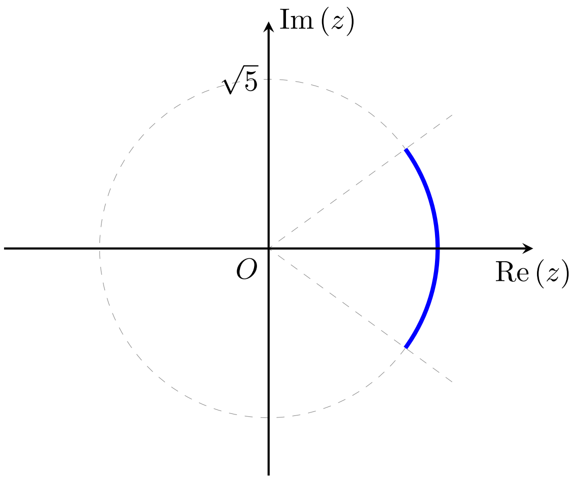
$9A_4$ representa o número de formas de distribuir as 4 bolas numeradas com número par por 4 das nove posições no total. As bolas numeradas com números ímpares ficam automaticamente com as 5 posições que sobram e apenas existe uma forma de as colocar de forma crescente.

3.

3.1.

$$|z|=|z_1|\ \wedge\ |\operatorname{Arg}(z)|\leq\operatorname{Arg}(z_2)\Leftrightarrow$$

$$|z|=\sqrt{5}\ \wedge\ -\frac{\pi}{5}\leq\operatorname{Arg}(z)\leq\frac{\pi}{5}$$



Opção A

3.2.

C.A) $2021=505\times 4+1\Rightarrow i^{2021}=i^1=i$

$$\frac{\overline{z_1}^3+\left(3\cdot\overline{z_2}^{15}\right)^2}{1+i^{2021}}=\frac{(1-2i)^3+\left(3\times\left(e^{-\frac{\pi}{5}i}\right)^{15}\right)^2}{1+i}=\frac{(-3-4i)(1-2i)+9\times e^{-6\pi i}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}=$$

$$\frac{-3+6i-4i-8+9}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}=\frac{-2+2i}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}=\frac{2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}=2e^{\frac{\pi}{2}i}$$

4. Seja h a função de domínio $[-3,\ 1]$ definida por $h(x) = (g \circ g)(x) + g(x+1)$

h é contínua em $[-3,\ 1]$ por ser a soma de funções contínuas.

$$h(-3) = (g \circ g)(-3) + g(-3+1) = g\big(g(-3)\big) + g(-2) = g\big(-g(3)\big) - g(2) =$$

$$= g(-2) - g(2) = -2g(2) < 0$$

$$h(1) = (g \circ g)(1) + g(1+1) = g\big(g(1)\big) + g(2) = g(2) + g(2) = 2g(2) > 0$$

Como $h(-3)$ e $h(1)$ têm sinais contrários e h é contínua em $[-3,\ 1]$, então pelo corolário do teorema de Bolzano, existe pelo menos um $c \in \left]-3, 1\right[$ tal que $h(c) = 0$, ou seja, tal que $(g \circ g)(c) + g(c+1) = 0$

5. Opção D, uma vez que não existe mudança de sinal de f'' da "esquerda"para a "direita"de $x = b$

6.

$$^{2021}C_{100} -^{2019} C_{99} -^{2019} C_{1919} =^{2020} C_{99} +^{2020} C_{100} - \left(^{2019}C_{99} +^{2019} C_{100}\right) =$$

$$=^{2020} C_{99} +^{2020} C_{100} -^{2020} C_{100} =^{2020} C_{99}$$

Os primeiros 100 e os últimos 100 elementos dessa linha são inferiores ou iguais a $^{2020}C_{99}$, assim existem $2021 - 100 \times 2 = 1821$ elementos superiores a esse elemento.

Opção B

7.

$$m_r = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty}\left(f(x) - \frac{\sqrt{3}}{3}x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt{3}x - 3f(x)\right) = \sqrt{3}$$

Opção C

8.

$$A\hat{B}C = \pi - \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$$

$$\overline{AC}^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = 8 - 8\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$$

$$C\hat{A}D = \frac{\frac{2\pi}{5}}{2} = \frac{\pi}{5}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overline{AC} \times \overline{AD} \times \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \overline{AC}^2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \left(8 - 8\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 8,5$$

Opção B

9.

9.1.

$$\overline{PT} = \tan\theta$$

$$\overline{PS} = -\tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\overline{ST} = \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\tan^2\theta + 1}{\tan\theta} = \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$A(\theta) = \frac{\overline{OP} \times \overline{ST}}{2} - \frac{\pi \overline{OP}^2}{4} = \frac{1 \times \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2\sin\theta\cos\theta} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sin(2\theta)} - \frac{\pi}{4}$$

9.2.

$$A'(\theta) = -\frac{2\cos(2\theta)}{\sin^2(2\theta)}$$

$$A'(\theta) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2\cos(2\theta)}{\sin^2(2\theta)} = 0 \Leftrightarrow \cos(2\theta) = 0 \wedge \sin(2\theta) \neq 0 \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge 2\theta \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \ \wedge \ \theta \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

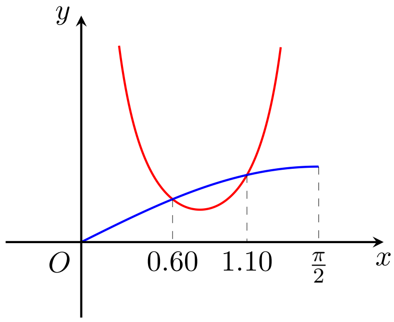
x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$A'(\theta)$	n.d.	$-$	0	$+$	n.d.
A	n.d.	$\downarrow$	Min.	$\uparrow$	n.d.

O valor de θ para o qual é mínima a área da região sombreada é $\frac{\pi}{4}$

9.3.

$$A_{[OPQ]} = \frac{1 \times \sin\theta}{2} = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\frac{1}{\sin(2\theta)} - \frac{\pi}{4} < \frac{1}{2}\sin\theta$$

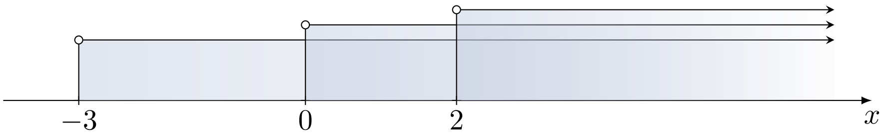


$$S =]0.60;\ 1.10[$$

10.

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 > 0 \wedge \sqrt{x} > 0 \wedge x \geq 0 \wedge x + 3 > 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x > 2 \wedge x > 0 \wedge x > -3\}$$



$$D = \left]2,\ +\infty\right[$$

$$\log_2(x-2) \leq 1 + \log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x}\right) - \log_4(x+3) \Leftrightarrow$$

$$\log_2(x-2) + \log_4(x+3) \leq 1 + \frac{\log_2\sqrt{x}}{\log_2\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\log_2(x-2) + \frac{\log_2(x+3)}{\log_2 4} \leq 1 + \frac{\frac{1}{2}\log_2 x}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\log_2(x-2) + \frac{1}{2}\log_2(x+3) \leq 1 + \log_2 x \Leftrightarrow$$

$$2\log_2(x-2) + \log_2(x+3) \leq 2 + 2\log_2 x \Leftrightarrow$$

$$\log_2\left[(x-2)^2(x+3)\right] \leq \log_2\left(4x^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2 - 4x + 4\right)(x+3) \leq 4x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^3 + 3x^2 - 4x^2 - 12x + 4x + 12 - 4x^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$x^3 - 5x^2 - 8x + 12 \leq 0$$

Os divisores do termo independente 12 são: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12 e -12.

Testando para $x = 1$:

$$1^3 - 5 \times 1^2 - 8 \times 1 + 12 = 1 - 5 - 8 + 12 = 0$$

Assim 1 é raíz do polinómio $x^3 - 5x^2 - 8x + 12$.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & -8 & 12 \\ 1 & & 1 & -4 & -12 \\ \hline & 1 & -4 & -12 & 0 \end{array}$$

Logo:

$$x^3 - 5x^2 - 8x + 12 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 - 4x - 12\right) \leq 0$$

Aplicando a fórmula resolvente:

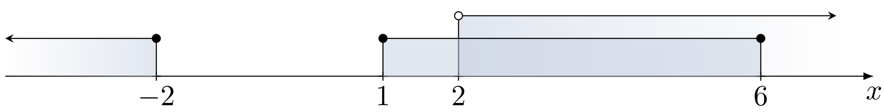
$$x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \times 12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 8}{2} \Leftrightarrow x = 6 \vee x = -2$$

Então:

$$(x-1)\left(x^2 - 4x - 12\right) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-6)(x+2) \leq 0$$

x	$-\infty$	-2		1		6	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$x-6$	-	-	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
P	-	0	+	0	-	0	+

$$C.S =]2, +\infty[\cap \left(]-\infty, -2] \cup [1, 6]\right)$$



$$C.S =]2, 6]$$

11.

$$b_n = b_{n-1} + \ln(a_n) - \ln(a_{n-1}) \Leftrightarrow b_n - b_{n-1} = \ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) \Leftrightarrow b_n - b_{n-1} = \ln r,\ \forall n > 1$$

$\therefore (b_n)$ é uma progressão aritmética de razão $\ln r$

$$b_n = b_1 + (n-1)\ln r = a_1 + \ln\left(r^{n-1}\right)$$

12.

12.1. f é contínua em $x = 0$ se e só se:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$f(0) = \ln\left(2e^{1+0} - e\right) = \ln e = 1 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2\ln(e^x + 1) - \ln(4)}{e^x - 1} = 2 \lim_{x \to 0^-} \frac{\ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right)}{e^x - 1}$$

M.V: $y = \ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right) \Leftrightarrow 2e^y = e^x + 1 \Leftrightarrow 2e^y - 2 = e^x - 1$

$$x \to 0^- \Rightarrow y \to 0^-$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2\lim_{y\to 0^-}\frac{y}{2(e^y-1)} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to 0^-}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Limite notável}}} = 1$$

$\therefore f$ é contínua em $x = 0$

12.2.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(2e^{1+x}-e\right)-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x\left(2e-\frac{e}{e^x}\right)\right)-x\right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x+\ln\left(2e-\frac{e}{e^x}\right)-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(2e-\frac{e}{e^x}\right) = \ln(2e-0) = \ln(2e)$$

O gráfico de f apresenta uma assíntota horizontal definida por $y = \ln(2e)$ quando $x \to +\infty$