Tecnológico de Monterrey

Física Matemática II
Departamento de Física

Prof. Julio C. Gutiérrez Vega

TAREA # 1

$$\frac{\mathrm{d}^\pi f}{\mathrm{d}x^\pi}$$

Nombre del equipo: **La π-ésima derivada**

Nombres	Matrícula
Isidro Isaac Reyes Quintero	A01730477
Rohan Ramesh	A01673352

Fecha de entrega: **20 Agosto 2018**

Calificación: _____ de ______ puntos

1)

¿Bajo cuál condición tres puntos distintos z_1, z_2 y z_3 estarán sobre una misma recta?

Consideramos los siguientes números complejos:

$$z_{21} = z_2 - z_1 = r_{21}e^{i\theta_{21}} \qquad z_{31} = z_3 - z_1 = r_{31}e^{i\theta_{31}}$$

Para que los números queden sobre la misma recta, los ángulos de los números tienen que cumplir que $\theta_{21} = \pm\theta_{31}$. Esto nos permite escribir la condición de la siguiente manera:

$$\boxed{|\arg(z_2 - z_1)| = |\arg(z_3 - z_1)|}$$

2)

¿Bajo cuál condición cuatro puntos distintos z_1, z_2, z_3 y z_4 estarán sobre una misma circunferencia?

Consideramos que el punto z_3 es el punto más lejano de z_1, es decir, $|z_3 - z_1| > |z_2 - z_1|$ y $|z_3 - z_1| > |z_4 - z_1|$. Si no cumple con esto, se cambia el orden de los puntos de tal manera que sea cierto(si z_2, z_3 y z_4 son equidistantes a z_1, entonces los puntos no son sobre la misma circunferencia dado que z_1 sería el centro de un circulo único que pasa por los otros puntos).Ahora podemos utilizar el **teorema de Ptolemy** para definir la condición para que los 4 puntos queden sobre la misma circunferencia:

$$\boxed{|z_3 - z_1||z_4 - z_2| = |z_2 - z_1||z_4 - z_3| + |z_4 - z_1||z_3 - z_2|}$$

3)

¿Bajo cuál condición n puntos distintos z_1, z_2, z_3, ..., z_n estarán sobre una misma esfera tridimensional?

Dado que todos los números complejos están definidos por 2 números reales(o dos grados de libertad) y sólo se requiere dos números reales para describir la superficie de una esfera, **todos los números complejos pertenecen a la misma esfera tridimensional**. Ej: *Esfera de Riemann.*

4)

Representar el conjunto de puntos

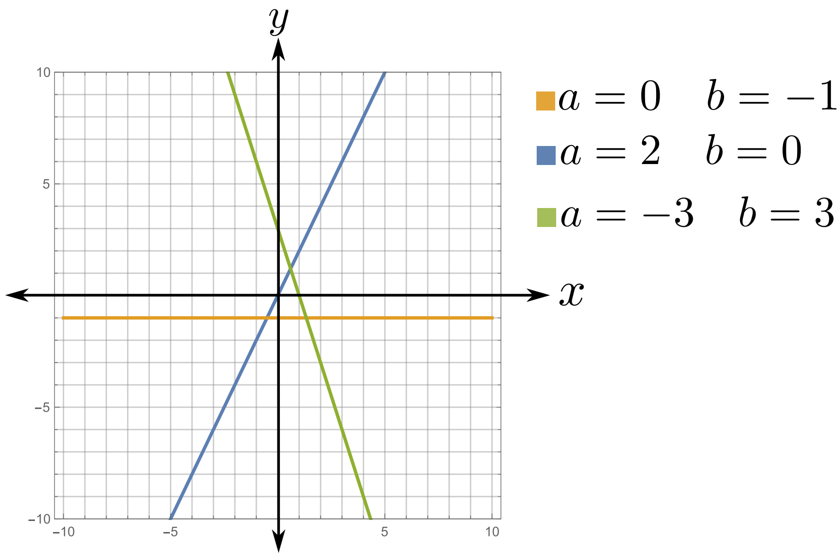
$$\text{Re}\,[(a + i)z + b] = 0$$

con a, $b \in \mathbb{R}$ y explicar el significado geométrico de a y b.

Dado que $z = x + iy$, la expresión dada se puede escribir como:

$$\text{Re}\left[ax - y + b + iay + ix)\right] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad ax - y + b = 0$$

Esto claramente es la ecuación de una línea recta, a describe la pendiente de la línea y b es la ordenada en el origen. A continuación se muestra una gráfica del conjunto de puntos, con valores a y b generados aleatoriamente.



5)

Dibuja en el plano complejo las regiones definidas por las siguientes relaciones

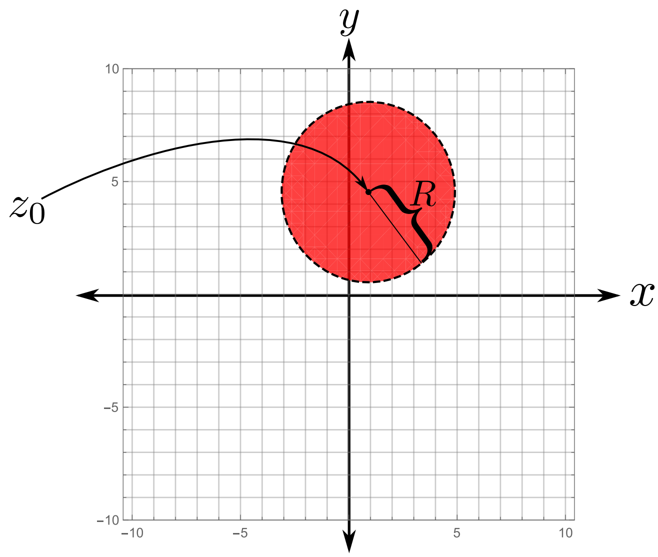
A) $|z - z_0| < R$

La región representa todos los puntos en el plano complejo que se encuentran a una distancia menor a R de z_0. En coordenadas cartesianas, la región está descrita por:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < R$$

a continuación se muestra la región utilizando los siguientes valores:

$$z_0 = 0.898998 + i4.53115 \qquad R = 4$$

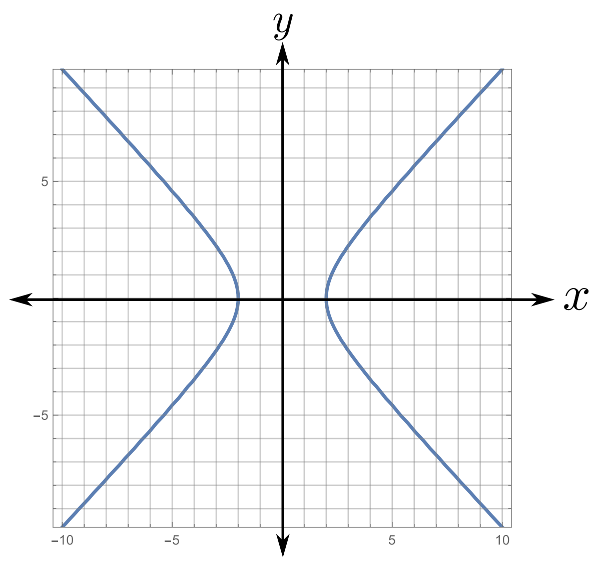


B) $\text{Re}[z^2] = 4$

La expresión dada se puede simplificar a lo siguiente:

$$\text{Re}[x^2 - y^2 + 2ixy] = x^2 - y^2 = 4$$

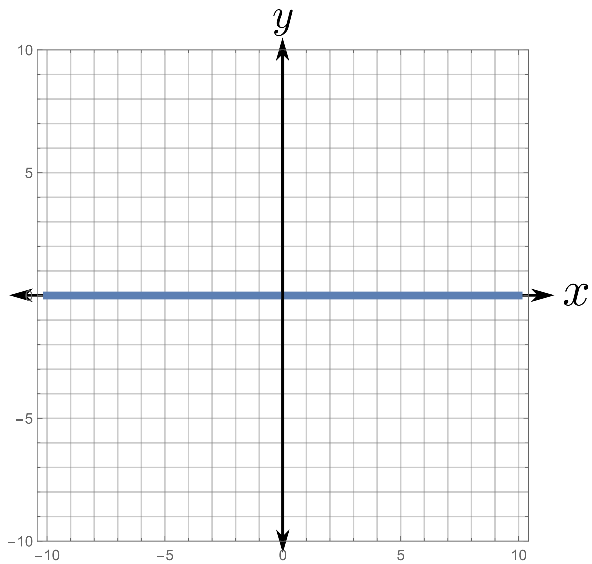
Esto describe una hipérbola como se muestra en la siguiente gráfica:



C) $\text{Re}[e^{i\pi/2}z] = 0$

Simplificando, obtenemos:

$$\text{Re}[ix - y] = -y = 0$$

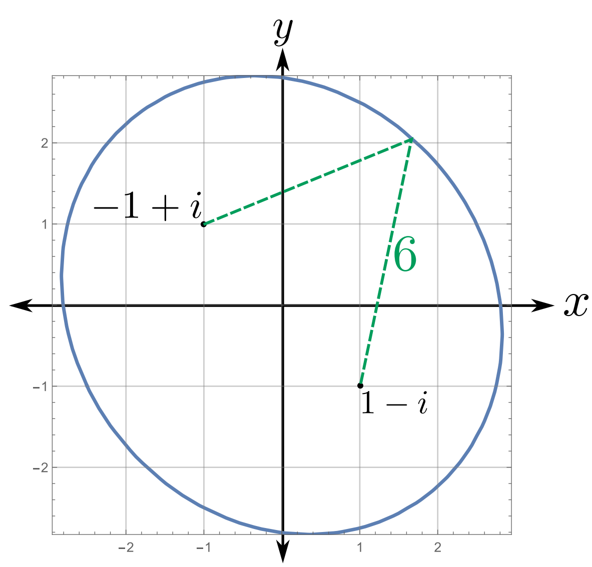


D) $|z - 1 + i| + |z + 1 - i| = 6$

Si consideramos que $z_0 \equiv 1 - i$, entonces podemos escribir la relación como:

$$|z - z_0| + |z + z_0| = 6$$

Esto es la definición de un ellipse con focos en z_0 y $-z_0$.

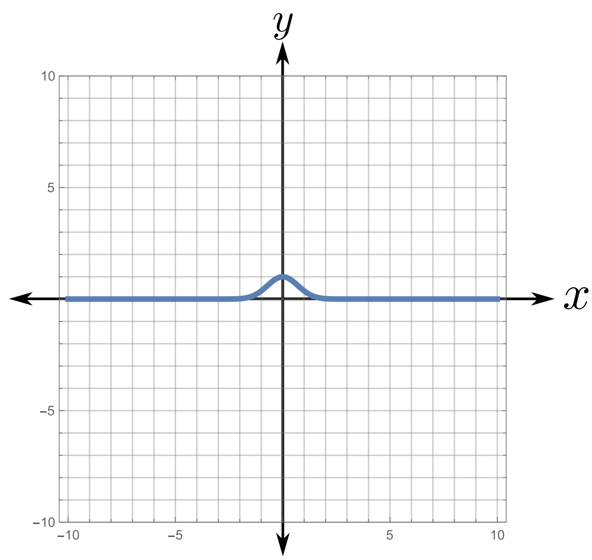


E) $\dfrac{e^{[\mathrm{Im}(z)]^2}}{e^{|z|^2}} - \mathrm{Im}(z) = 0$

Simplificando, obtenemos:

$$\frac{e^{y^2}}{e^{x^2+y^2}} - y = 0 \qquad \Leftarrow \qquad y = e^{-x^2}$$

la cual describe una campana gaussiana, como se muestre en al siguiente gráfica:



6)

Encontrar y graficar cuidadosamente la región en el plano $w = u + iv$ que corresponde a la región triangular limitada por las rectas $x = 1$, $y = 1$ and $x + y = 1$ bajo la transformación $w = -z^2$

Escribiendo explicitamente la transformación,obtenemos:

$$w = f(z) = -z^2 = (y^2 - x^2) + i(-2xy)$$

$$u = y^2 - x^2 \qquad v = -2xy$$

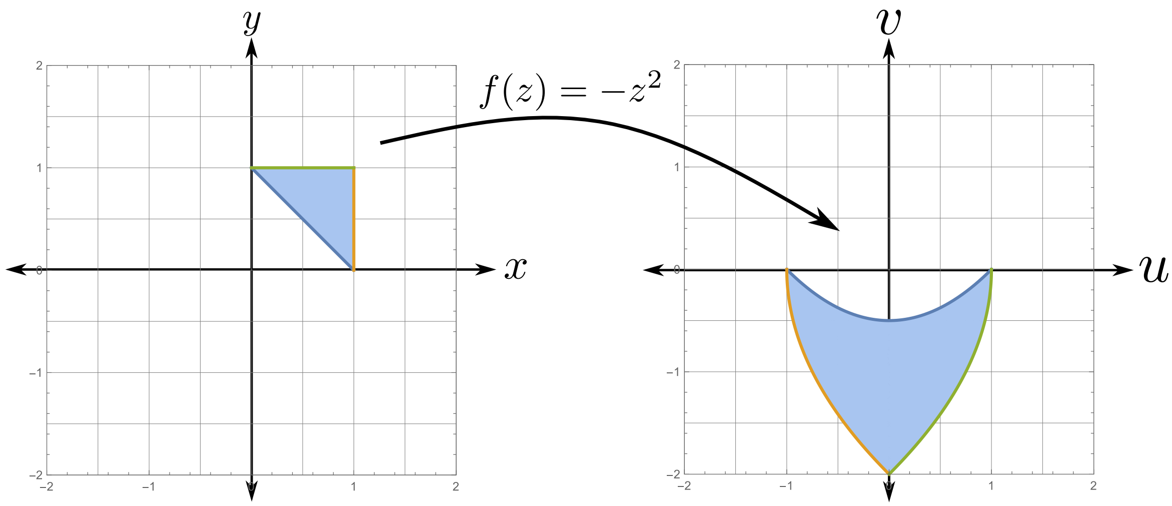
utilizamos las siguientes parametrizaciones de las rectas dadas para generar las curvas correspondientes en el espacio w:

$$x = 1 \quad y = t \qquad \rightarrow \qquad u = t^2 - 1 \quad v = -2t$$

$$x = t \quad y = 1 \qquad \rightarrow \qquad u = 1 - t^2 \quad v = -2t$$

$$x = t \quad y = 1 - t \qquad \rightarrow \qquad u = 2t - 1 \quad v = 2t(t-1)$$

utilizando estas curvas se generó la siguiente gráfica:



7)

> *¿Cómo se transforman las líneas coordenadas del plano z cuando se aplica esta transformación?*
> $$e^z = \frac{a-w}{a+w}$$
> *donde a es una constante compleja en general y $w = u + iv$. Para ilustrar sus conclusiones grafiquen cuidadosamente la imagen en el plano w del rectángulo definido por los puntos $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 + i$, $z_3 = 3 + 2i$ y $z_4 = 1 + 2i$.*

Queremos despegar la expresión para $w = f(z)$. Primero, tomamos el logaritmo de ambos lados:

$$z = \ln \frac{1 - w/a}{1 + w/a}$$

recordando que:

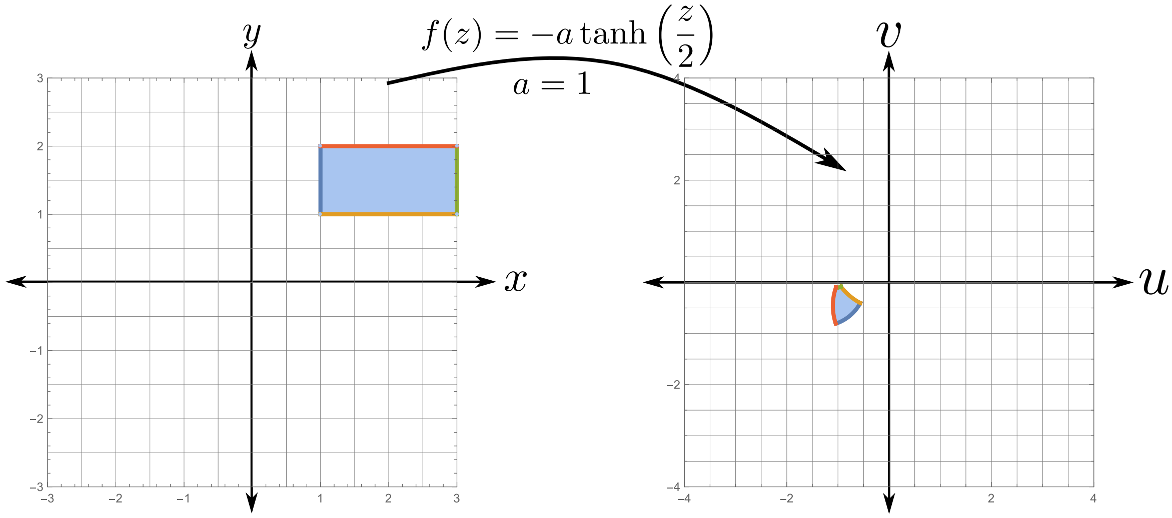
$$\tanh^{-1}(s) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+s}{1-s}$$

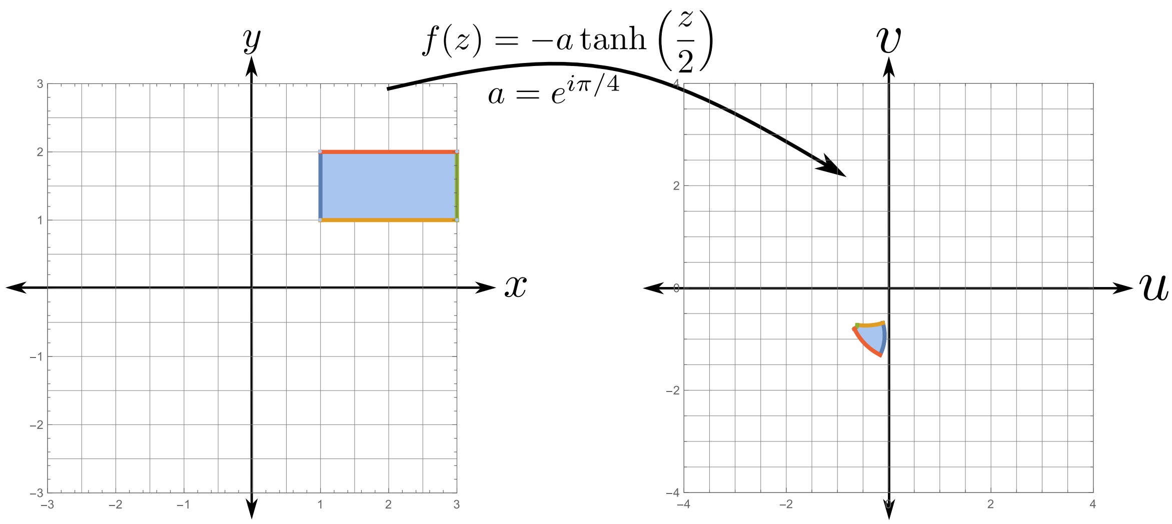
podemos decir que:

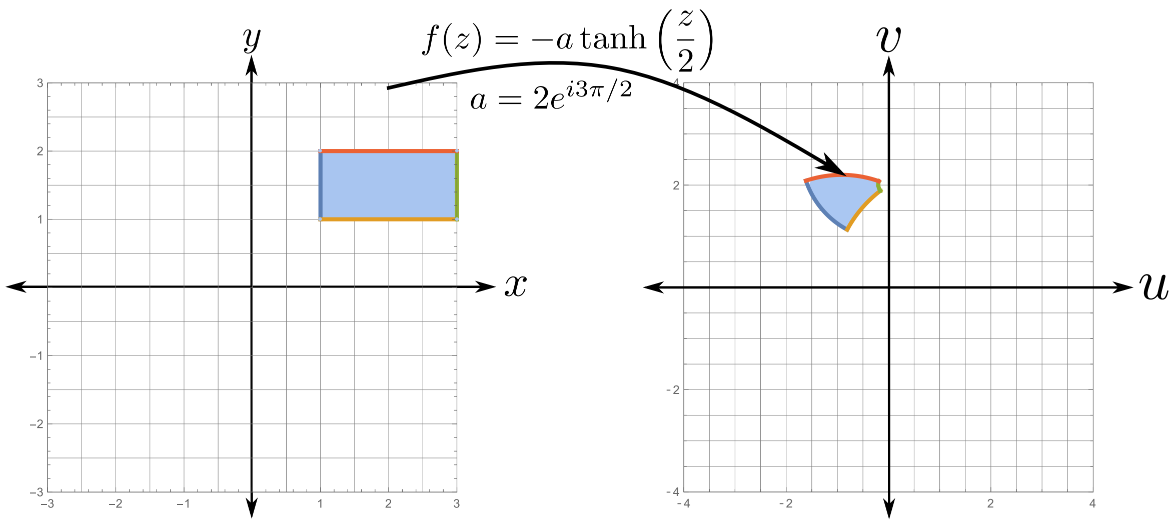
$$z = 2\tanh^{-1}\left(\frac{-w}{a}\right) \qquad \Rightarrow \qquad w = -a\tanh\left(\frac{z}{2}\right)$$

Ya sabemos que el efecto del valor de a escala y rota la transformación por las propiedades de los números complejos. Por lo tanto en las siguientes gráficas se utilizarán los valores:

$$a = 1 \qquad a = e^{i\pi/4} \qquad a = 2e^{i3\pi/2}$$


$f(z) = -a \tanh\left(\frac{z}{2}\right)$
$a = 1$
x
y
u
v


$f(z) = -a \tanh\left(\frac{z}{2}\right)$
$a = e^{i\pi/4}$
x
y
u
v


$f(z) = -a \tanh\left(\frac{z}{2}\right)$
$a = 2e^{i3\pi/2}$
y
x
v
u