Lección 3: Probabilidad

Juan Antonio Barceló
Israel Herraiz

9 de enero de 2014

1. Introducción y algunas definiciones

La Estadística Descriptiva presenta algunos métodos que son utilizados para describir un conjunto de datos, lo que es conocido como una muestra. Si el único propósito del investigador es describir un experimento concreto, tales métodos pueden considerarse suficientes. No obstante, si lo que se pretende es utilizar la información obtenida para extraer conclusiones generales sobre la población, entonces los métodos de la Estadística Descriptiva constituyen solamente el principio de los análisis. Para obtener conclusiones válidas y hacer predicciones correctas acerca de una población a través de una muestra, es necesario recurrir a métodos de inferencia Estadística. Estos métodos implican el uso de la teoría de probabilidades.

La Teoría de la Probabilidad es la base matemática sobre la que descansa la Estadística. El mismo concepto de probabilidad, aunque lo empleemos cotidianamente, es bastante esquivo: solo se pudo dar una definición matemática correcta bien entrado el siglo XX. Sin embargo no vamos a ser aquí muy rigurosos, ya que nuestro objetivo no es otro que adquirir los conocimientos y la destreza necesarios para avanzar en los principios y métodos de la Estadística.

Definición 1. Un **experimento o fenómeno aleatorio** es aquel en el que los resultados pueden ser distintos y no se sabe cuál de ellos aparecerá al final.

A continuación, se muestran algunos ejemplos de *experimentos aleatorios*. Cada uno de los ocho ejemplos constituye un experimento aleatorio diferente:

1. Tirar una moneda y ver si sale cara o cruz. Cara y cruz son los dos **sucesos elementales** asociados al experimento de tirar una moneda. El conjunto de sucesos elementales asociados al experimento aleatorio tirar una moneda es el **espacio muestral**, en nuestro caso $\Omega = \{\text{cara}, \text{ cruz}\}$.

2. Tirar un dado y ver el número que sale. Los **sucesos elementales asociados** a este experimento aleatorio serán aquellos resultados posibles tales que siempre ocurre alguno de ellos y son mutuamente excluyentes. Que salga el 2, es un suceso elemental, ya que si tiramos el dado, o sale el dos (y en este caso no sale ningún otro número) o no sale el dos. El conjunto de los sucesos elementales asociado al experimento aleatorio es el **espacio muestral**, en este caso $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3. Número de personas que entran entre las 12:00 y las 13:00 horas en El Corte Inglés de Callao (Madrid). Está claro que entre las 12:00 y las 13:00 entrará un número fijo de personas, por ejemplo, si entran 17.342, entra eso número exacto de personas, y no 17.346 ni 15.835. Un **suceso elemental** asociado a este experimento será el 17.342. Si suponemos que es imposible que en una hora entren más de un millón de personas, entonces el espacio muestral asociado a este experimento aleatorio podría ser
$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \cdots, 999{,}999\},$$
aunque también podríamos pensar en el espacio muestral como $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

4. Tomar al azar una persona el 8 de febrero de 2011, entre las 10:00 y las 13:00 horas, en la Puerta del Sol de Madrid y medir su altura. El espacio muestral será un intervalo que recoja las alturas que, razonablemente, puedan obtenerse, por ejemplo el intervalo $(1{,}30, 2{,}25)$, aunque también podríamos haber tomado el intervalo $(0, \infty)$.

   Un **suceso** asociado a este experimento aleatorio es **un subconjunto del espacio muestral** Ω. El suceso $(1{,}75, 1{,}90)$ corresponde a tener una altura mayor que 1.75 y menor que 1.90.

5. Tirar dos monedas distinta y ver el resultado, (importa el orden). El espacio muestral asociado a este experimento aleatorio es
$$\Omega = \{\text{cara-cara, cara-cruz, cruz-cara, cruz-cruz}\}.$$

6. Tirar simultáneamente dos monedas exactamente iguales y ver el resultado, (no importa el orden). El espacio muestral asociado a este experimento aleatorio es
$$\Omega = \{\text{dos caras, dos cruces, cara y cruz}\}.$$

7. Tirar simultáneamente dos dados exactamente iguales, (no importa el orden) El espacio muestral asociado asociado a este experimento aleatorio es
$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} \{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,2\}, \\ \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \\ \{3,6\}, \{4,4\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,5\}, \{5,6\}, \{6,6\} \end{array} \right\}.$$

Un **suceso** asociado al experimento aleatorio tirar simultáneamente dos monedas exactamente iguales y ver el resultado, es un subconjunto del espacio muestral. Por supuesto, cualquier suceso elemental es un suceso.

El suceso= $\{\{1,5\},\{2,4\},\{3,3\}\}$ lo podemos definir cualitativamente como: *al tirar simultáneamente dos dados exactamente iguales, su suma sea 6*.

El suceso que *al tirar simultáneamente dos dados exactamente iguales, su suma sea múltiplo de 3* es

$$\{\{1,2\},\{1,5\},\{2,4\},\{3,3\},\{3,6\},\{4,5\},\{6,6\}\}.$$

Dentro de los sucesos asociados a un experimento aleatorio, distinguimos el **suceso seguro** que es el espacio muestral, Ω, y el **suceso imposible** que es el conjunto vacío, $\emptyset$.

8. Elección al azar de un persona entre 40 y 45 años censada en Madrid y tomar su peso en kilogramos. El espacio muestral Ω será un intervalo de $\mathbb{R}$ que recoja los pesos que, razonablemente, puedan obtenerse, por ejemplo $\Omega = (30, 180)$.

   Un posible sucesos puede ser el siguiente:

   $$[65, 90] = \text{peso en kilogramos mayor o igual que 65 y menor o igual que 90},$$

$\square$

Resumen
Se llama **espacio muestral** Ω a un conjunto matemático donde cada elemento representa un resultado (concreto) de un experimento. Dado que es una imagen matemática (abstracta) de un problema (real), no es necesariamente único para un experimento dado, pudiendo por tanto existir diferentes espacios muestrales para un mismo problema.

A cada elemento del espacio muestral se le llama **suceso elemental**, ya que se considera como los resultados más simples que interesan de un experimento. Normalmente se desea estudiar características de algunos subconjuntos de sucesos elementales, que reciben el nombre de **sucesos**. Se dice que un suceso $A \subset \Omega$ **ocurre** cuando el resultado del experimento ω está asociado a uno de sus sucesos elementales, es decir, $\omega \in A$.

Ejercicio 1. Describir el espacio muestral para cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:

1. 250 personas son seleccionadas en la UPM y se les pregunta si van a votar al candidato A o B.

2. Un dado es lanzado cinco veces consecutivas.
3. Cinco lados son lanzados simultáneamente.
4. Una moneda es lanzada hasta que salen dos caras o dos cruces consecutivas.
5. Cuatro objetos diferentes se envasan en paquetes de dos.
6. Cuatro bolas son extraídas aleatoriamente y sin reemplazamiento de una urna que contiene ocho bolas blancas y seis azules.

1. Si ω_i representa la opción del i-ésimo encuestado, $i = 1, 2, \cdots, 250$, entonces un posible espacio muestral es

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{250}) : \omega_i \in \{A, B\},\ i = 1, 2, \cdots, 250\} \\ &= \{(A, A, \cdots, A), (A, B, \cdots, A), \cdots, (B, B, \cdots, B)\}.\end{aligned}$$

   Si no interesa conocer lo que vota cada persona, otro espacio muestral válido sería:

$$\Omega = \{0, 1, 2, \cdots, 250\},$$

   donde cada suceso elemental representa el número de encuestados que optan por el candidato A.

2. Representando por ω_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, el i-ésimo lanzamiento del dado, un elemento del espacio muestral sería $(4, 2, 6, 1, 1)$, que representa que con el primer dado hemos obtenido 4 puntos, con el segundo 2 puntos, con el tercero 6 puntos, con el cuarto 1 punto y con el quinto 1 punto.

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) : \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

3. Los dados se lanzan de forma simultánea, por lo que de cada lanzamiento tendremos en cuenta tan solo el número de veces que ha salido cada cara del dado. Si ω representa los resultados de un lanzamiento, $\omega = (0, 1, 0, 2, 2, 0)$ significa que en este lanzamiento no ha salido ningún 1, un 2, ningún 3, dos 4, dos 5 y ningún 6.

$$\Omega = \left\{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6) : \omega_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \sum_{i=1}^{6} \omega_i = 5\right\}.$$

4. Representando por ω_1 el número de lanzamiento hasta conseguir dos caras o dos cruces consecutivas, y por ω_2 el resultado de los últimos lanzamientos, el elemento $(\omega_1, \omega_2) = (7, X)$ significa que hemos necesitado 7 tiradas para obtener dos cruces consecutivas.

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \{2, 3, \cdots\}, \omega_2 \in \{C, X\}\}.$$

5. Hay 4 objetos, que representamos por A, B, C y D, y se envasan en dos paquetes de dos objetos cada uno. Por lo tanto, cuando se conozca la composición de un paquete ya se conoce la del otro. Además, elegido un objeto, por ejemplo A, basta saber quién va con él en el paquete. Teniendo esto en cuenta, podemos definir como espacio muestral para este experimento:
$$\Omega = \{B, C, D\}.$$
6. Designamos por B el color blanco y por A el azul. Supongamos que ω es una extracción, $\omega = (B, A, A, B)$ significa que la primera bola extraída ha sido blanca, la segunda y tercera azules y la cuarta blanca.
$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) : \omega_i \in \{B, A\}, i = 1, 2, 3, 4\}.$$

$\square$

Ejercicio 2. Una moneda es lanzada cinco veces. Definir espacios muestrales diferentes de acuerdo a los siguientes objetivos:

1. solo el número de caras es de interés.
2. El resultado de cada lanzamiento individual es de interés.
3. Mostrar que cualquier espacio muestral satisfactorio para 2. puede ser también usado en 1., pero que la afirmación recíproca no es cierta.

1. Si cada suceso elemental $\omega =$ "número de caras de caras obtenidas en los cinco lanzamientos", un posible espacio muestral es
$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$
2. Si es importante el resultado de cada uno de los lanzamientos, estos deben quedar reflejados en el espacio muestral. Un suceso elemental puede ser definido por (C, C, X, C, X) que nos indica que en el primer y segundo lanzamiento de la moneda hemos obtenido cara, en el tercero cruz, el el cuarto cara y en el quinto cruz. Si en un lanzamiento ω, ω_i indica el resultado del i-ésimo lanzamiento, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, un posible espacio muestral es
$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5),\ \omega_i \in \{C, X\},\ i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$
3. Si tomamos un suceso del espacio muestral del apartado 2 podemos calcular el número de caras que han salido (espacio muestral del apartado 1). Sin embargo, a partir del número de caras que se han obtenido en los cinco lanzamientos no podemos saber el resultado de cada lanzamiento individual.

El **suceso seguro** es aquel que siempre ocurre, es decir es el espacio muestral Ω. El **suceso imposible o nulo** es aquel que nunca ocurre, es decir el $\emptyset$.

1.1. Operaciones con sucesos

Todo suceso puede ser escrito a partir de los sucesos elementales o de otros sucesos mediante las operaciones de la teoría de conjuntos.

Supongamos que hemos realizado un cierto experimento aleatorio con espacio muestral asociado Ω.

- **Unión de sucesos.** Dados n sucesos $S_1, S_2, \cdots, S_n \in \Omega$, $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$ es otro suceso ($\in \Omega$), y dado el suceso elemental ω se tiene

$$\omega \in \bigcup_{i=1}^{n} S_i \Longleftrightarrow \begin{cases} \omega \in S_1 \\ \text{ o } \omega \in S_2 \\ \quad \cdots \\ \quad \cdots \\ \text{ o } \omega \in S_n. \end{cases}$$

- **Intersección de sucesos.** Dados n sucesos $S_1, S_2, \cdots, S_n \in \Omega$, $\bigcap_{i=1}^{n} S_i$ es otro suceso ($\in \Omega$), y dado el suceso elemental ω se tiene

$$\omega \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i \Longleftrightarrow \begin{cases} \omega \in S_1 \\ \text{ y } \omega \in S_2 \\ \quad \cdots \\ \quad \cdots \\ \text{ y } \omega \in S_n. \end{cases}$$

- n sucesos $S_1, S_2, \cdots, S_n \in \Omega$ son **incompatibles o disjuntos** si su intersección es igual al suceso imposible

$$\bigcap_{i=1}^{n} S_i = \emptyset.$$

- n sucesos $S_1, S_2, \cdots, S_n \in \Omega$ son **disjuntos dos a dos** si

$$S_i \cap S_j = \emptyset, \quad i \neq j, \ \ i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

- n sucesos $S_1, S_2, \cdots, S_n \in \Omega$ forman una **partición** del espacio muestral Ω, si son disjuntos dos a dos y la unión de todos ellos es el espacio muestral. (Esta definición de partición puede ampliarse a un conjuntos numerable de sucesos disjuntos dos a dos).

- **Diferencia de sucesos.** Dados dos sucesos $S_1, S_2 \in \Omega$, su diferencia $S_1 - S_2$ es el suceso integrado por los elementos de S_1 que no pertenecen a S_2.

  La operación diferencia **no es conmutativa**, es decir, en general

$$S_1 - S_2 \neq S_2 - S_1.$$

- **Suceso complementario.** El suceso complementario de $S \in \Omega$ es designado por S^c y definido por
$$S^c = \Omega - S.$$
- **Propiedades** Dados los sucesos $S_1, S_2, S_3 \in \Omega$ se verifica:
  - $\left\{S_1^c\right\}^c = S_1.$
  - $\Omega^c = \emptyset.$
  - $\emptyset^c = \Omega.$
  - $S_1 \cup S_1^c = \Omega.$
  - $S_1 \cap S_1^c = \emptyset.$
  - Propiedad conmutativa
  $$S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_1 \qquad S_1 \cap S_2 = S_2 \cap S_1$$
  - Propiedad asociativa
  $$\{S_1 \cup S_2\} \cup S_3 = S_1 \cup \{S_2 \cup S_3\} \quad \{S_1 \cap S_2\} \cap S_3 = S_1 \cap \{S_2 \cap S_3\}$$
  - Propiedad distributiva
  $$S_1 \cup \{S_2 \cap S_3\} = \{S_1 \cup S_2\} \cap |\{S_1 \cup S_3\} \quad S_1 \cap \{S_2 \cup S_3\} = \{S_1 \cap S_2\} \cup |\{S_1 \cap S_3\}$$
  - Leyes de Morgan
  $$\{S_1 \cup S_2\}^c = S_1^c \cap S_2^c \qquad \{S_1 \cap S_2\}^c = S_1^c \cup S_2^c$$

Ejemplo 1. Consideramos Experimento aleatorio: Tirar simultáneamente dos dados exactamente iguales, (no importa el orden) El espacio muestral asociado asociado a este experimento aleatorio es

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} \{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,2\}, \\ \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \\ \{3,6\}, \{4,4\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,5\}, \{5,6\}, \{6,6\} \end{array} \right\}.$$

Consideramos los sucesos asociados a este experimento aleatorio:

S_1 = que “al tirar simultáneamente dos dados exactamente iguales, su suma sea múltiplo de 3”.

$$S_1 = \{\{1,2\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{3,3\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{6,6\}\}.$$

$S_2 =$ que "al tirar simultáneamente dos dados exactamente iguales, su suma sea 6".

$$S_2 = \{\{1,5\},\{2,4\},\{3,4\}\}.$$

$S_3 =$ que "al tirar simultáneamente dos dados exactamente iguales, su suma sea mayor o igual que 8".

$$S_3 = \{\{2,6\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,4\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,5\},\{5,6\},\{6,6\}\}.$$

- **Unión de sucesos**

  1. Suceso que "al tirar simultáneamente dos dados exactamente iguales, su suma sea múltiplo de 3 **o** mayor o igual que 8"$= S_1 \cup S_3 =$ conjunto de sucesos elementales que están en S_1 **o** S_3.

  $$S_1 \cup S_3 = \left\{ \begin{array}{c} \{1,2\},\{1,5\},\{2,4\},\{2,6\},\{3,3\},\{3,5\}, \\ \{3,6\},\{4,4\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,5\},\{5,6\},\{6,6\} \end{array} \right\}.$$

  2. Suceso que "al tirar simultáneamente dos dados exactamente iguales, su suma sea múltiplo de 3 **o** sea igual a 6"$= S_1 \cup S_2 =$ conjunto de sucesos elementales que están en S_1 **o** S_2.

  $$S_1 \cup S_2 = S_1,$$

  S_2 está contenido en S_1, $S_2 \subset S_1$.

  3. $S_1 \cup \Omega = \Omega$.
  4. $S_1 \cup \emptyset = S_1$.

- **Intersección de sucesos**

  1. Suceso que "al tirar simultáneamente dos dados exactamente iguales, su suma sea múltiplo de 3 **y** mayor o igual que 8"$= S_1 \cap S_3 =$ conjunto de sucesos elementales que están en S_1 **y** S_3.

  $$S_1 \cap S_3 = \{\{3,6\},\{4,5\},\{6,6\}\}.$$

  2. Suceso que "al tirar simultáneamente dos dados exactamente iguales, su suma sea múltiplo de 3 **y** sea su suma sea 6"$= S_1 \cap S_2 =$ conjunto de sucesos elementales que están en S_1 **y** S_2.

  $$S_1 \cap S_2 = S_2,$$

  S_2 está contenido en S_1, $S_2 \subset S_1$.

  3. Suceso que "al tirar simultáneamente dos dados exactamente iguales, su suma 6 **y** sea mayor o igual que8"$= S_2 \cap S_3 =$ conjunto de sucesos elementales que están en S_1 **y** S_2.

  $$S_2 \cap S_3 = \emptyset,$$

  y decimos que S_2 **y** S_3 **son disjuntos** .

4. $S_1 \cap \Omega = S_1$.
5. $S_1 \cap \emptyset = \emptyset$.

- **Diferencia de sucesos**

1. Suceso que "al tirar simultáneamente dos dados exactamente iguales, su suma sea múltiplo de 3 **y** no sea mayor o igual que 8"= $S_1 - S_3 =$ conjunto de sucesos elementales que están en S_1 **y** no están S_3.

$$S_1 - S_3 = \{\{1,2\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{3,3\}\}.$$

2. Suceso que "al tirar simultáneamente dos dados exactamente iguales, su suma 6 **y** no sea mayor o igual que8"= $S_2 - S_3 =$ conjunto de sucesos elementales que están en S_1 **y** no están S_2.

$$S_2 - S_3 = S_2.$$

3. $S_1 \cap \emptyset = \emptyset$.

- **Suceso complementario**

1. Suceso complementario de S_1 es designado por S_1^c y definido por

$$S_1^c = \Omega - S_1 = \left\{ \begin{array}{l} \{1,1\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,6\}, \{2,2\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \\ \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,4\}, \{4,6\}, \{5,5\}, \{5,6\} \end{array} \right\}.$$

2. Probabilidad

Supongamos que realizamos un experimento aleatorio y sea Ω el espacio muestral asociado al experimento aleatorio.

Definición 2. **Álgebra de sucesos**
Sea $\mathcal{A}$ una familia de sucesos, (subconjuntos de Ω). Diremos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de sucesos si se verifica:

- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- Si un suceso S está en $\mathcal{A}$, también está su complementario S^c.
- Si $S_1, S_2 \in \mathcal{A}$, se tiene que $S_1 \cup S_2 \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 2. Consideramos el experimento aleatorio de lanzar un dado y ver la puntuación que obtenemos. En este caso el espacio muestral es

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Compruébese que el conjunto

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{S : \ S \text{ es un subconjunto de } \Omega\},$$

es un álgebra de sucesos.

$\mathcal{P}(\Omega)$ es el conjunto formado por los subconjuntos de Ω.

$$S = \text{"obtener un número par al lanzar el dado"} = \{2, 4, 6\},$$

es **un subconjunto** de Ω y por lo tanto **un elemento** de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Veamos que $\mathcal{P}(\Omega)$ es un álgebra de sucesos.

- Como Ω es un subconjunto de Ω, entonces $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$.
- Sea $S \in \mathcal{P}(\Omega)$, S es un subconjunto de Ω, entonces S^c también será un subconjunto de Ω y por la tanto $S^c \in \mathcal{P}(\Omega)$.
- Sean S_1, $S_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$, esto quiere decir que S_1 y S_2 son subconjuntos de Ω, de aquí $S_1 \cup S_2$ también es un subconjunto de Ω y por lo tanto $S_1 \cup S_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$,

y hemos demostrado que $\mathcal{P}(\Omega)$ es un álgebra de sucesos.

Vamos a describir en este caso quien es $\mathcal{P}(\Omega)$.

- Subconjuntos de Ω sin ningún elemento. El $\emptyset$.
- Subconjuntos de Ω con un elemento.

$$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}.$$

- Subconjuntos de Ω con dos elementos.

$$\{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{1, 4\},\ \{1, 5\},\ \{1, 6\},$$
$$\{2, 3\},\ \{2, 4\},\ \{2, 5\},\ \{2, 6\},\ \{3, 4\},$$
$$\{3, 5\},\ \{3, 6\},\ \{4, 5\},\ \{4, 6\},\ \{5, 6\}.$$

- Subconjuntos de Ω con tres elementos.

$$\{1,2,3\},\ \{1,2,4\},\ \{1,2,5\},\ \{1,2,6\},\ \{1,3,4\},$$
$$\{1,3,5\},\ \{1,3,6\},\ \{1,4,5\},\ \{1,4,6\},\ \{1,5,6\},$$
$$\{2,3,4\},\ \{2,3,5\},\ \{2,3,6\},\ \{2,4,5\},\ \{2,4,6\},$$
$$\{2,5,6\},\ \{3,4,5\},\ \{3,4,6\},\ \{3,5,6\},\ \{4,5,6\}.$$

- Subconjuntos de Ω con cuatro elementos.

$$\{1,2,3,4\},\ \{1,2,3,5\},\ \{1,2,3,6\},\ \{1,2,4,5\},\ \{1,2,4,6\},$$
$$\{1,2,5,6\},\ \{1,3,4,5\},\ \{1,3,4,6\},\ \{1,3,5,6\},\ \{1,4,5,6\},$$
$$\{2,3,4,5\},\ \{2,3,4,6\},\ \{2,3,5,6\},\ \{2,4,5,6\},\ \{3,4,5,6\},$$

- Subconjuntos de Ω con cinco elementos.

$$\{1,2,3,4,5\},\ \{1,2,3,4,6\},\ \{1,2,3,5,6\},\ \{1,2,4,5,6\},\ \{1,3,4,5,6\},\ \{2,3,4,5,6\}.$$

- Subconjuntos de Ω con seis elementos.

$$\{1,2,3,4,5,6\} = \Omega.$$

Observación 1. Si en vez de tener un número finito de sucesos n, tenemos un número infinito de ellos y cambiamos la tercera condición por que la unión numerable $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ de cualquiera de ellos pertenezca a $\mathcal{A}$, diremos que $\mathcal{A}$ es una $\sigma -$ álgebra. □

Definición 3. **Definición axiomática de probabilidad (Kolmogorov).**

Supongamos que se realiza un experimento o fenómeno aleatorio con espacio muestral asociado Ω, y sea $\mathcal{A}$ un $\sigma -$ álgebra definida sobre Ω. Una función de probabilidad asociada al experimento aleatorio, que designaremos por P, es una función real definida en $\mathcal{A}$ que satisface los siguientes axiomas

- **Axioma 1.** $P : \mathcal{A} \longmapsto [0,1]$.
  Si $S \in \mathcal{A}$, el número $P(S) \geq 0$ es denominado probabilidad del suceso S.
- **Axioma 2.** $P(\Omega) = 1$.
- **Axioma 3.** Sea $S_1, S_2; \cdots \in \mathcal{A}$ disjuntos dos a dos, se verifica

$$P\left(\bigcup_i S_i\right) = P(S_1) + P(S_2) + \cdots$$

La tripleta $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se conoce como **espacio probabilístico**.

Observación 2. Dado un experimento aleatorio con espacio muestral Ω, el alumno "debe pensar" en $\mathcal{A}$ como el conjunto $\mathcal{P}(\Omega)$.

Ejemplo 3. Consideramos el experimento aleatorio de lanzar un dado y ver la puntuación que obtenemos. En este caso el espacio muestral es

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

y como hemos comprobado en el Ejemplo 2, el conjunto

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{S : \ S \text{ es un subconjunto de } \Omega\},$$

es un álgebra de sucesos.

Si $S \in \mathcal{P}(\Omega)$, definimos

$$P(S) = \frac{\text{Cardinal de } S}{\text{Cardinal de } \Omega} = \frac{\text{Cardinal de } S}{6}.$$

Vamos a ver que P es una función de probabilidad. Para ello, vamos a ver que verifica los tres axiomas.

- Si $S \in \mathcal{P}(\Omega)$, se tiene que

  $$0 \leq \text{Cardinal de } S \leq \text{Cardinal de } \Omega,$$

  dividiendo por Cardinal de Ω

  $$0 \leq \frac{\text{Cardinal de } S}{\text{Cardinal de } \Omega} \leq 1,$$

  luego P toma valores en $[0, 1]$.

- $$P(\Omega) = \frac{\text{Cardinal de } \Omega}{\text{Cardinal de } \Omega} = 1.$$

- El tercer axioma lo vamos a comprobar solo para dos sucesos disjuntos S_1 y S_2. Si son disjuntos, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, se tiene que

  $$\text{Cardinal de } S_1 \cup S_2 = \text{Cardinal de } S_1 + \text{Cardinal de } S_2,$$

  entonces

  $$P(S_1 \cup S_2) = \frac{\text{Cardinal de } S_1 \cup S_2}{6} = \frac{\text{Cardinal de } S_1 + \text{Cardinal de } S_2}{6}$$
  $$= \frac{\text{Cardinal de } S_1}{6} + \frac{\text{Cardinal de } S_2}{6} = P(S_1) + P(S_1).$$

□

Ejemplo 4. Consideramos el experimento aleatorio de lanzar simultáneamente dos monedas iguales y ver el resultado.Si designamos por $E_1 = (+,+)$ que salgan dos caras en el lanzamiento de las dos monedas, $E_2 = (+,-)$ que salga una cara y una cruz en el lanzamiento de las dos monedas, y $E_3 = (-,-)$ que salgan dos cruces en el lanzamiento de las dos monedas, el espacio muestral es

$$\Omega = \{E_1, E_2, E_2\},$$

y se puede comprobar que el conjunto

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{S : \ S \text{ es un subconjunto de } \Omega\}$$

$$= \{\emptyset, E_1, E_2, E_3, E_1 \cup E_2, E_1 \cup E_3, E_2 \cup E_3, E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \Omega\},$$

es un álgebra de sucesos.

1. Definimos
$$P(\emptyset) = 0, \ P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3},$$
$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1 \cup E_3) = P(E_2 \cup E_3) = \frac{2}{3}, \ P(\Omega) = 1,$$
es fácil ver que P es una función de probabilidad:
   - P es una función que toma valores en $[0,1]$,
   - $P(\Omega) = 1$,
   - Tomemos dos sucesos disjuntos, por ejemplo E_1 y $E_2 \cup E_3$, se verifica
   $$P(E_1 \cup (E_2 \cup E_3)) = P(\Omega) = 1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = P(E_1) + P(E_2 \cup E_3).$$
   Análogamente lo veríamos con cualquier otro par de conjuntos.

   P es entonces una función de probabilidad.
2. Definimos
$$\bar{P}(\emptyset) = 0, \ \bar{P}(E_1) = P(E_3) = \frac{1}{4}, \ \bar{P}(E_2) = \frac{1}{2}$$
$$\bar{P}(E_1 \cup E_2) = P(E_2 \cup E_3) = \frac{3}{4}, \ \bar{P}(E_1 \cup E_3) = \frac{1}{2}, \ \bar{P}(\Omega) = 1,$$
es fácil ver que $\bar{P}$ es una función de probabilidad:
   - $\bar{P}$ es una función que toma valores en $[0,1]$,

- $\bar{P}(\Omega) = 1$,
- Tomemos dos sucesos disjuntos, por ejemplo E_1 y $E_2 \cup E_3$, se verifica

$$\bar{P}(E_1 \cup (E_2 \cup E_3)) = \bar{P}(\Omega) = 1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \bar{P}(E_1) + \bar{P}(E_2 \cup E_3).$$

Análogamente lo veríamos con cualquier otro par de conjuntos.

$\bar{P}$ es también una función de probabilidad.

Si entendemos, por lo menos intuitivamente, que

$$P(S) = \alpha \in [0, 1],$$

significa que si realizamos el experimento aleatorio muchas veces, por ejemplo 1000, entonces S se produciría aproximadamente en 1000α veces; con esta interpretación, que $P(E_1) = \frac{1}{3}$, entenderíamos que si realizamos el experimento de lanzar dos monedas iguales simultáneamente 1000 veces, obtendríamos aproximadamente $333 \sim 1000 \cdot \frac{1}{3}$ veces las dos monedas son cara, lo cual, aunque puede ser cierto, no es lo de esperar. Uno pensaría que si repite el experimento 1000 veces,

$250 = 1000 \cdot \frac{1}{4}$ se produciría E_1,
$500 = 1000 \cdot \frac{1}{2}$ se produciría E_2, y
$250 = 1000 \cdot \frac{1}{4}$ se produciría E_3.

Lo razonable es que la función de probabilidad que utilizásemos para el experimento aleatorio de tirar dos monedas iguales simultáneamente sería $\bar{P}$.

Asociado a un experimento aleatorio, *la función de probabilidad que vamos a utilizar* viene definida empíricamente.

$\square$

Propiedades Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico. se verifica

1. $P(S^c) = 1 - P(S)$.
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. Si $S_1 \subset S_2$, se tiene
$$P(S_1) \leq P(S_2), \quad \text{y} \quad P(S_2 - S_1) = P(S_2) - P(S_1). \tag{1}$$
4. $$P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2). \tag{2}$$

Demostración

1. Sea S un suceso. Sabemos que $S \cup S^c = \Omega$ y que S y S^c son disjuntos, por **Axioma 3.**
$$1 = P(\Omega) = P(S \cup S^c) = P(S) + P(S^c) \implies P(S^c) = 1 - P(S).$$

2. $P(\emptyset) = 1 - P(\emptyset^c) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0.$

3. Si $S_1 \subset S_2$, podemos escribir $S_2 = S_1 \cup \{S_2 - S_1\}$. Sabiendo que $S_1 \cap \{S_2 - S_1\} = \emptyset$,

$$P(S_2) = P(S_1 \cup \{S_2 - S_1\}) = P(S_1) + P(S_2 - S_1) \implies P(S_2 - S_1) = P(S_2) - P(S_1).$$

Puesto que $P(S_2 - S_1) \geq 0$, de $P(S_2) = P(S_1) + P(S_2 - S_1)$ se deduce que $P(S_1) \leq P(S_2)$.

4. Ya que $S_1 \cup S_2 = S_1 \cup \{S_2 - \{S_1 \cap S_2\}\}$ y $S_1 \cap \{S_2 - \{S_1 \cap S_2\}\} = \emptyset$, aplicando las propiedades anteriores

$$\begin{aligned} P(S_1 \cup S_2) &= P(S_1 \cup \{S_2 - \{S_1 \cap S_2\}\}) = P(S_1) + P(S_2 - \{S_1 \cap S_2\}) \\ &= P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2). \end{aligned}$$

■

Ejemplo 5. El 60 % de la población M de una determinada ciudad lee el periódico A, el 35 % el B y un 15 % ambos. Elegido un ciudadano al azar, calcular la probabilidad de:

1. ser lector de algún periódico:
2. no ser lector de ninguno;
3. leer solo el periódico A;
4. leer solo uno de los dos periódicos.

Solución.

Experimento aleatorio: elegir un ciudadano de la población M y ver si lee o no alguno de los periódicos A o B.

El espacio muestral podría ser

$$\Omega = \{A, B, N\},$$

donde

$$A = \text{"el ciudadano elegido lee el periódico } A\text{"},$$

$$B = \text{"el ciudadano elegido lee el periódico } B\text{"},$$

$$A = \text{"el ciudadano elegido no lee ni el periódico } A \text{ ni el } B\text{"}.$$

Vamos a pensar que tenemos definido un espacio probabilístico "asociado" a este experimento aleatorio $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Salvo que se nos indique lo contrario, siempre pensaremos en la $\sigma-$álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) =$ subconjuntos de Ω. Suponemos que P es una función de probabilidad definida en esta $\sigma-$álgebra, y por datos que tenemos, tomados de forma empírica,

$$P(A) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}, \qquad P(B) = \frac{35}{100}, \qquad P(A \cap B) = \frac{15}{100}.$$

1. Nos están pidiendo la probabilidad del suceso $A \cup B$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{60}{100} + \frac{35}{100} - \frac{15}{100} = 0,8.$$

2. Nos están pidiendo la probabilidad del suceso $(A \cup B)^c$.

$$P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,8 = 0,2.$$

3. Nos están pidiendo la probabilidad del suceso $A - (A \cap B)$. Como $A \cap B \subseteq A$,

$$P(A - (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{60}{100} - \frac{15}{100} = \frac{45}{100}.$$

4. Nos están pidiendo la probabilidad del suceso $(A - (A \cap B)) \cup (B - (A \cap B))$. Ya que $A - (A \cap B)$ y $B - (A \cap B)$ son disjuntos.

$$P((A - (A \cap B)) \cup (B - (A \cap B))) = P((A - (A \cap B)) + P((B - (A \cap B))$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

$$= \frac{60}{100} + \frac{35}{100} - \frac{30}{100} = \frac{65}{100}.$$

$\square$

Observación 3. La definición de probabilidad, (debida a Kolmogorov), que hemos dado es axiomática y nos dice, qué aplicaciones de $\mathcal{A}$ en $[0, 1]$ son una probabilidad; sin embargo no nos dice como construir una de ellas. Llegados a este punto, y teniendo en cuenta que en la mayor parte de nuestros casos los espacios muestrales van a ser finitos, conviene recordar la definición de **Laplace**, que es el concepto intuitivo que todos tenemos de probabilidad.

Definición 4. **Regla de Laplace**.

Consideremos el espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Esto significa que hemos realizado un experimento o fenómeno aleatorio, con espacio muestral asociado Ω, $\mathcal{A}$ es

una $\sigma-$álgebra en Ω y en esta hemos definido una función de probabilidad P. Vamos a suponer que el espacio muestral asociado está formado por un conjunto finito de n sucesos elementales
$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\},$$
y que son igualmente probables.

Esto significa que
$$P(\omega_i) = P(\omega_j), \quad i \neq j,\ i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

Al ser los $\omega_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$ sucesos elementales, son dos a dos disjuntos, y por lo tanto
$$P(\omega_i \cup \omega_j) = P(\omega_i) + P(\omega_j), \quad i \neq j.$$
Como $\Omega = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \cdots \cup \omega_n$, se tiene
$$1 = P(\Omega) = P(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \cdots \cup \omega_n) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n) = nP(\omega_i),$$
cualquiera que sea $i = 1, 2, \cdots, n$. De esto deducimos que
$$\boxed{P(\omega_i) = \frac{1}{n}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.}$$

A continuación mostramos cuatro ejemplos de experimentos aleatorios y sus correspondientes *espacios probabilísticos*:

1. Tirar una moneda y ver si sale cara o cruz.
$$\Omega = \{\text{cara, cruz}\}.$$
El espacio probabilístico que solemos considerar es $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ donde
$$P(\text{cara}) = P(\text{cruz}) = \frac{1}{2}.$$
En este caso, los dos sucesos elementales son igualmente probables.

2. Tirar un dado y ver el número que sale.
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$
El espacio probabilístico que solemos considerar es $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ donde
$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}.$$
En este caso, los 6 sucesos elementales son igualmente probables.,

3. Tirar simultáneamente dos monedas exactamente iguales y ver el resultado.

$$\Omega = \{\text{dos caras, dos cruces, cara y cruz}\}.$$

El espacio probabilístico que solemos considerar es $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ donde

$$P(\text{dos caras}) = P(\text{dos cruces}) = \frac{1}{4}, \qquad P(\text{cara y cruz}) = \frac{1}{2}.$$

Es este caso, los tres sucesos elementales no son igualmente probables.

4. Sacar una carta de la baraja española y ver cual es.

$$\Omega = \text{ conjunto formado por la 40 cartas de la baraja española.}$$

El espacio probabilístico que solemos considerar es $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ donde la probabilidad de sacar cualquier carta de la baraja española es $\frac{1}{40}$.

En este caso los sucesos elementales son igualmente probables.

$\square$

La **regla de Laplace** nos dice que si tenemos un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, con cardinal de Ω finito y sucesos elementales igualmente probables, entonces si $S \subset \Omega$ es un suceso,

$$\boxed{P(S) = \frac{\text{cardinal de } S}{\text{cardinal de } \Omega} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}}.$$

Ejemplo 6. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado dos veces se obtenga una suma de puntos de siete?

Experimento aleatorio: tirar dos veces un mismo dado viendo la puntuación que hemos sacado.

En el vector $(\cdot, \cdot)$, en la primera componente pondremos la puntuación que hemos sacado al tirar el dado la primera vez, y en la segunda componente, la puntuación que hemos obtenido al tirarlo la segunda vez. $(4, 2)$ quiere decir que al tirar el dado la primera vez obtuvimos 4 puntos y la segunda vez 2 puntos.

Espacio muestral $\Omega = \{(i, j),\ i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. El espacio probabilístico que solemos considerar es $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ donde

$$P((i, j)) = \frac{1}{36}, \quad i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

En este caso el espacio muestral tiene 36 sucesos elementales igualmente probables.
Suceso $S =$ "la suma de las dos tiradas sea 7"

$$S = \{(i, j) :\ i + j = 7\} = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}.$$

Son seis los casos posible, o lo que es lo mismo el cardinal de S es 6.

$$P(S) = \frac{\text{cardinal de } S}{\text{cardinal de } \Omega} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

□

Ejemplo 7. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos monedas se obtenga por lo menos una cara?

Experimento aleatorio: tirar dos monedas. Espacio muestral

$$\{\text{dos caras}, \text{dos cruces}, \text{cara y cruz}\}.$$

Espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ donde

$$P(\text{dos caras}) = P(\text{dos cruces}) = \frac{1}{4},\ P(\text{cara y cruz}) = \frac{1}{2}.$$

En este caso los sucesos elementales no son igualmente probables y no podemos aplicar la regla de Laplace.

¿Podemos modificar el espacio probabilístico de tal manera que podamos aplicar la regla de Laplace?.

Suponemos que diferenciamos las monedas, por lo menos mentalmente, por un 1 y un 2. Si ponemos $(\text{cruz}, \text{cara})$ queremos expresar que al tirar las monedas, la primera fue cruz y la segunda cara.

Espacio muestral

$$\Omega = \{(\text{cara}, \text{cara}), (\text{cara}\ , \text{cruz}), (\text{cruz}, \text{cara}), (\text{cruz}\ , \text{cruz})\}.$$

Espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ donde

$$P(\text{cara}, \text{cara}) = P(\text{cara}\ , \text{cruz}) = P(\text{cruz}, \text{cara}) = P(\text{cruz}\ , \text{cruz}) = \frac{1}{4}.$$

Ahora el espacio muestral consta de 4 sucesos elementales igualmente probables.

Suceso $S =$ "obtener al menos una cara".

$$S = \{(\text{cara}, \text{cara}), (\text{cara}\ , \text{cruz}), (\text{cruz}, \text{cara})\},$$

y su cardinal es tres. (Ocurre en 3 sucesos elementales, luego el número de casos favorables es 3).

$$P(S) = \frac{\text{cardinal de } S}{\text{cardinal de } \Omega} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{3}{4}.$$

□

A partir de ahora, no vamos a ser tan explícito en especificar el espacio probabilístico. Cuando apliquemos la regla de Laplace, se supone que estamos trabajando con sucesos elementales igualmente probables.

Ejemplo 8. En una baraja de 40 cartas se sacan tres simultáneamente. ¿Cuál es la probabilidad de que sean oros?

Experimento aleatorio: sacar tres cartas simultáneamente de una baraja de 40 catas

El espacio muestral Ω estará formado por todos los grupos de tres cartas que yo pueda hacer con las 40 cartas de la baraja. Al sacar un grupo de tres cartas, vemos primero una carta, y es el as de oros, la segunda es el 7 de espadas y la tercera es el 3 de copas. Este posible resultado, o suceso elemental, lo designamos por el grupo

$$\{\text{as de oros}, \ \text{7 de espadas}, \ \text{3 de copas}\}.$$

Está claro que este grupo es el mismo que el grupo

$$\{\text{7 de espadas}, \text{3 de copas} \ , \ \text{as de oros}\},$$

no interviene el orden.

El cardinal de Ω vendrá dado por

$$C_{40}^{3} = \frac{V_{40}^{3}}{P_3} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 9980.$$

Consideramos el suceso

$S =$ "las tres cartas elegidas son oros".

¿Cuál es el cardinal de S?, ¿cuántos posibles grupos de tres cartas hay, en los cuales las tres cartas sean oros? Como tenemos 10 oros en la baraja, el número vendrá dado por

$$C_{10}^{3} = \frac{V_{10}^{3}}{P_3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

$$P(S) = \frac{\text{cardinal de } S}{\text{cardinal de } \Omega} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{120}{9980} \cong 0{,}012.$$

□

Ejemplo 9. Dos niños escriben, cada uno por separado, un número de tres dígitos utilizando las cifras $\{4, 7, 8\}$, cada cifra una sola vez. Hallar la probabilidad de que los dos formen el mismo número.

Supongamos que un niño se llama Juan y otro Pepe. Juan ha escrito un número, por ejemplo el 784, da exactamente igual que sea este u otro de los seis posibles.

Experimento aleatorio: Pepe escribe un número de tres dígitos utilizando las cifras $\{4, 7, 8\}$.

El espacio muestral Ω estará formado por las variaciones (interviene el orden) de las cifras 4, 7, y 8, tomadas de 3 en 3. El cardinal de Ω es $V_3^3 = P_3 = 3! = 6$.

$$\Omega = \{478, 487, 748, 784, 847, 874\}.$$

Espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ donde

$$P(\omega) = \frac{1}{6}, \quad \omega \in \Omega.$$

Suceso $S =$ "que Pepe obtenga el número 784"$= \{784\}$. El cardinal de S es 1, solamente hay un caso favorable.

$$P(S) = \frac{\text{cardinal de } S}{\text{cardinal de } \Omega} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{1}{6}.$$

□

Ejercicio 3. Considérese el espacio muestral Ω formado por la 24 permutaciones de los números 1, 2, 3 y 4, todas equiprobables. Consideramos los sucesos

$$A_i = \{\omega \subset \Omega : \text{ en } \omega \text{ aparece el número i en el lugar i-ésimo}\}.$$

Calcular

1. $P(A_1 \cup A_3)$.
2. $P(A_1 \cup (A_3 \cap A_4))$.
3. $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$
4. $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$.
5. $P((A_1 \cup A_2) \cap (A_3 \cup A_4))$

Las permutaciones de los números 1, 2, 3 y 4 son $P_4 = 4! = 24$.
Experimento aleatorio: De las 24 permutaciones, tomar una al azar.

$$\Omega = \{1234, 1243, \cdots, 4321\}.$$

Espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ donde

$$P(\omega) = \frac{1}{24}, \quad \omega \in \Omega.$$

Vamos a determinar el suceso A_1. Las permutaciones que están en A_1 tienen que tener al 1 en primer lugar. 1342 está en A_1 mientras que 2413 no lo está.

$$1 \_\_ \_\_ \_\_$$

tenemos tres posiciones libres para los números 2, 3 y 4. Cardinal de $A_1 = P_3 = 6$, obsérvese que para calcular el cardinal de A_1 no es necesario determinar A_1, no obstante

$$A_1 = \{1234, 1324, 1324, 1342, 1423, 1432\}.$$

Análogamente

$$A_2 = \{1234, 1243, 3214, 3214, 4213, 4231\},$$
$$A_3 = \{1234, 1432, 2134, 2431, 4132, 4231\},$$
$$A_4 = \{1234, 1324, 2134, 2314, 3124, 3214\}.$$

1. $$P(A_1 \cup A_3) = \frac{\text{cardinal de } A_1 \cup A_3}{\text{cardinal de } \Omega} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}.$$

   Veamos otra forma de resolver este apartado, sin determinar específicamente los conjuntos A_1, A_3 y $A_1 \cup A_3$.

   $$A_1 \cap A_3 = \{1\ \omega_2\ 3\ \omega_4 :\ \omega_i \in \{2,4\},\ i \in \{2,4\}\},$$

   entonces

   $$\text{cardinal de } A_1 \cap A_3 = P_2 = 2! = 2.$$

   Si aplicamos las ecuaciones (1) y (2), referentes a las propiedades de los espacios probabilísticos,

   $$P(A_1 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_3)$$
   $$= \frac{\text{cardinal de } A_1}{\text{cardinal de } \omega} + \frac{\text{cardinal de } A_3}{\text{cardinal de } \omega} - \frac{\text{cardinal de } A_1 \cap A_3}{\text{cardinal de } \omega} = \frac{6}{24} + \frac{6}{24} - \frac{2}{24} = \frac{5}{12}.$$

2. $$P(A_1 \cup (A_3 \cap A_4)) = P(A_1) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{6}{24} + \frac{2}{24} - \frac{1}{24}.$$

3. $$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3 + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3 + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{6}{24} + \frac{6}{24} + \frac{6}{24} - \frac{2}{24} - \frac{2}{24} - \frac{2}{24} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24}. \end{aligned}$$

4. Se deja como ejercicio. Solución $\frac{5}{24}$.

5. Se deja como ejercicio. Solución $\frac{5}{8}$.

□

Ejercicio 4. Una caja contiene ocho bolas rojas, tres blancas y nueve azules. Si se sacan tres bolas al azar, determínese la probabilidad de que:

1. las tres sean rojas;
2. las tres sean blancas;
3. dos sean rojas y una blanca;
4. al menos una sea blanca;
5. sea una de cada color.

Asumiendo que las bolas se extraen de forma simultánea, consideremos el espacio muestral

$$\Omega = \{\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} : \ \omega_i \text{ es una bola roja, blanca o azul, } i \in \{1,2,3\}\}.$$

No parece razonable que todos los sucesos elementales sean equiprobables, el suceso $\{$azul , rojo , azul$\}$ es bastante más probable que el suceso $\{$rojo , blanca , blanca$\}$, ya que hay más bolas azules que blancas.

Si numeramos las bolas del 1 al 20, las rojas del 1 al 8, las blancas del 9 al 11 y las azules del 12 al 20 y definimos el espacio muestral

$$\Omega = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} : \ \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{1, 2, \cdots, 20\}\},$$

si es razonable ahora pensar que todos los sucesos elementales son equiprobables y podremos aplicar la **regla de Laplace**.

$$\text{Cardinal de } \Omega = C_{20}^3 = 1140.$$

1. Consideramos el suceso

   $$S_1 = \text{"obtener tres bolas rojas"}.$$

   Como tenemos 8 bolas rojas,

   $$\text{Cardinal de } S_1 = C_8^3,$$

   y

   $$P(S_1) = \frac{\text{Cardinal de } S_1}{\text{Cardinal de } \Omega} = \frac{C_8^3}{C_{20}^3}.$$

2. Consideramos el suceso

$$S_2 = \text{"obtener tres bolas blancas"}.$$

$$\text{Cardinal de } S_2 = 1,$$

y

$$P(S_2) = \frac{\text{Cardinal de } S_2}{\text{Cardinal de } \Omega} = \frac{1}{C_{20}^3}.$$

3. Consideramos el suceso

$$S_3 = \text{"obtener dos bolas rojas y una blanca"}.$$

$$\text{Cardinal de } S_3 = C_8^2 \cdot C_3^1,$$

y

$$P(S_3) = \frac{\text{Cardinal de } S_3}{\text{Cardinal de } \Omega} = \frac{C_8^2 \cdot C_3^1}{C_{20}^3}.$$

4. **Idea nueva**

Consideramos los sucesos

$$S_4 = \text{"obtener al menos una bola blanca"},$$

$$S_4^c = \text{"no obtener ninguna bola blanca"}.$$

$$P(S_4) = 1 - P(S_4^c) = 1 - \frac{\text{Cardinal de } S_4^c}{\text{Cardinal de } \Omega} = 1 - \frac{C_{17}^3}{C_{20}^3}.$$

5. Consideramos el suceso

$$S_5 = \text{"obtener tres bolas una de cada color"}.$$

$$\text{Cardinal de } S_5 = C_8^1 \cdot C_3^1 \cdot C_9^1,$$

y

$$P(S_5) = \frac{\text{Cardinal de } S_5}{\text{Cardinal de } \Omega} = \frac{C_8^2 \cdot C_3^1 \cdot C_9^1}{C_{20}^3}.$$

Consideremos el suceso

$$S_6 = \text{"obtener la primera bola roja, la segunda blanca y la tercera azul"}.$$

$$P(S_6) = \frac{8 \cdot 3 \cdot 9}{V_{20}^3}.$$

□

Ejemplo 10. Una urna tiene 6 bolas blancas y 8 negras.

1. ¿cuál es la probabilidad de que al extraer dos bolas al azar, sean las dos negras?
2. ¿y una blanca y otra negra?, (las bolas se extraen simultáneamente).

Experimento aleatorio: sacar dos bolas de la urna y ver su color.

Otra vez vamos a pensar que las bolas están numeradas. Con los números del 1 al 6 las blancas y con los números de 7 al 14 la negras.

El espacio muestral Ω estará formado por todos los grupos de dos bolas entre estas 14 bolas. Cada suceso elemental es igualmente probable. Está claro que el grupo formado por las 6 bola y la 11 bola es el mismo que el grupo formado por la 11 bola y la 6 bola. **No interviene el orden**. El cardinal del espacio muestral es

$$\text{Cardinal de } \Omega = C_{14}^2 = \frac{V_{14}^2}{P_2} = \frac{14 \cdot 13}{2 \cdot 1} = 91,$$

Consideramos los sucesos

$S_1 =$ "que salgan las dos bolas negras"

$$\text{Cardinal de } S_1 = C_8^2 = \frac{V_8^2}{P_2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28.$$

$$P(S_1) = \frac{\text{Cardinal de } S_1}{\text{Cardinal de } \Omega} = \frac{28}{91}.$$

$S_2 =$ "que salga una blanca y otra negra"

$$\text{Cardinal de } S_2 = 6 \cdot 8 = 48.$$

$$P(S_2) = \frac{\text{Cardinal de } S_2}{\text{Cardinal de } \Omega} = \frac{48}{91}.$$

Nota

Consideramos el suceso

$S_3 =$ "que las dos bolas sean blancas"

$$\text{Cardinal de } S_3 = C_6^2 = \frac{V_6^2}{P_2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15.$$

$$P(S_3) = \frac{\text{Cardinal de } S_3}{\text{Cardinal de } \Omega} = \frac{15}{91}.$$

S_1 y S_3 son disjuntos y $S_2 = \Omega - (S_1 \cup S_3) = (S_1 \cup S_3)^c$, entonces

$$P(S_2) = 1 - P(S_1 \cup S_3) = 1 - P(S_1) - P(S_3) = 1 - \frac{28}{91} - \frac{15}{91} = \frac{48}{91}.$$

□

3. Probabilidad condicionada

A veces tenemos información parcial sobre el resultado de un experimento aleatorio. Esta información cambia nuestra certidumbre acerca de la posible ocurrencia de algunos sucesos del espacio muestral, modificando éste y, por ende, las probabilidades asignadas a cada suceso ahora posible. La incorporación de información adicional sobre los posibles resultados de un experimento determinado conduce a un nuevo tipo de sucesos, denominados condicionados, y de aquí a la **Probabilidad Condicionada**.

Ejemplo 11. Tenemos que acertar si al lanzar un dado perfecto ha salido un 2. En el primer lanzamiento no nos dan más información, pero, en el segundo, nos informan de que el resultado ha sido un número par.

En el primer caso, el espacio muestral es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y la probabilidad de obtener un 2 es $\frac{1}{6}$. En el segundo, los únicos sucesos elementales de Ω compatibles con la información adicional que nos dan son

$$\{2, 4, 6\} = \Omega \cap \{\text{resultado par}\},$$

y la probabilidad de sacar un 2 es entonces $\frac{1}{3}$. **Obsérvese que el efecto de la información se centra en el espacio muestral**.

Ejemplo 12.

Sabemos que el 99 % de las veces, no se tiene un accidente cuando se conduce habiendo bebido. Por tanto podríamos concluir que beber no importo mucho para conducir. **Pero esto bien sabemos que es falso**.

En el 90 % de los accidentes el alcohol está implicado. Parece ser que la mayoría de los conductores que beben no tienen accidentes, pero el pequeño porcentaje en el que ocurre un accidente, casi siempre el conductor ha bebido.

Es verdad que el 99 % de los conductores de los conductores que han bebido no tienen accidentes, pero cuando ocurre un accidente no estamos hablando de ese 99 % de los casos, ya que ha ocurrido el accidente. Estamos en ese 1 % de los casos, cualquier conclusión relacionada con el 99 % de los casos no es válida en esta situación.

Esta es la probabilidad condicionada, ya que existe la condición de que el accidente haya ocurrido.

Consideremos un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sea $S \in \mathcal{A}$ un suceso posible tal que $P(S) > 0$. La certidumbre en la ocurrencia de S da lugar a un nuevo espacio muestral $\Omega_S = \Omega \cap S$ que genera a su vez una nueva $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}_S = \mathcal{A} \cap S$. Podemos definir una probabilidad en esta nueva $\sigma-$álgebra a partir de la probabilidad P, que llamaremos **Probabilidad Condicionada al suceso** S.

Ejemplo 13. Tiramos dos dados de forma consecutiva y queremos calcular la probabilidad de obtener una suma de 7 puntos con los dos dados, sabiendo que con el primer dado hemos obtenido un número par.

Experimento aleatorio: tirar de manera consecutiva dos dados.

Un suceso elemental lo designaremos por $(3,2)$, lo que significa que con el primer dado hemos obtenido una puntuación de 3 puntos y con el segundo 2 puntos. Un posible espacio muestral asociado al experimento aleatorio es

$$\Omega = \{(i,j) : \ i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}.$$

Empíricamente todos los sucesos elementales son equiprobables, definimos la función de probabilidad P sobre estos por

$$P((i,j)) \equiv P(i,j) = \frac{1}{36}, \quad i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}.$$

Designamos por $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ el conjunto formado por todos los subconjuntos de Ω, (conjunto de todos los sucesos asociados al experimento aleatorio). Los sucesos

$$R_1 = \{(2,5),(1,4),(3,3)\},$$

$$R_2 = \text{suma de las puntuaciones igual a } 9 = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\},$$

$$\begin{aligned} R_3 &= \text{obtener un múltiplo de 3 con el segundo dado} \\ &= \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,3), & (2,3), & (3,3), & (4,3), & (5,3), & (6,3), \\ (1,6), & (2,6), & (3,6), & (4,6), & (5,6), & (6,6) \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

$\emptyset$ o Ω son elementos de $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Se puede demostrar que $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ es un álgebra de sucesos, ($\sigma-$álgebra, y $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es un espacio probabilístico donde

$$\begin{aligned} P : \mathcal{P}(\Omega) &\longmapsto [0,1] \\ S &\longrightarrow P(S) = \tfrac{\text{cardinal de } S}{\text{cardinal de } \Omega}. \end{aligned}$$

Por ejemplo

$$P(R_1) = \frac{3}{36}, \quad P(R_2) = \frac{4}{36}, \quad P(R_3) = \frac{12}{36}, \quad P(\emptyset) = \frac{0}{36}, \quad P(\Omega) = \frac{36}{36}.$$

Consideramos el suceso

$$\begin{aligned} S &= \text{obtener con el primer dado un número par} \\ &= \{(2,j), \ (4,j), \ (6,j), \ \ j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}. \end{aligned}$$

Se tiene que

$$P(S) = \frac{\text{cardinal de } S}{\text{cardinal de } \Omega} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} > 0.$$

Espacio muestral asociado a que ocurra el suceso S es

$$\Omega_S = \Omega \cap S = \left\{ \begin{array}{c} (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,6), \\ (4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6), \\ (6,1),\ (6,2),\ (6,3),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6) \end{array} \right\}.$$

Sea

$$\mathcal{A}_S = \mathcal{P}(\Omega_S) = \{\text{subconjuntos de } \Omega_S\}.$$

$\mathcal{A}_S$ es una $\sigma-$álgebra en Ω_S.

$$R_S \in \mathcal{A}_S \iff \exists R \in \mathcal{A} :\ R_S = R \cap S.$$

Definimos en $\mathcal{A}_S$ la función

$$P_S(R_S) = P_S(R \cap S) = \frac{\text{cardinal de } R \cap S}{\text{cardinal de } \Omega_S} = \frac{\text{cardinal de } R \cap S}{\text{cardinal de } S}. \tag{3}$$

$(\Omega_S, \mathcal{A}_S, P_S)$ es un espacio probabilístico. $P_S(R_S) = P_S(R \cap S)$ suele escribirse como $P(R|S)$ y lo leemos como la probabilidad de que ocurra el suceso $R \in \mathcal{A}$ sabiendo que se ha verificado el suceso $S \in \mathcal{A}$. Los suceso elementales en Ω_S son equiprobables y una definición equivalente a (3) es

$$P_S(R_S) = \frac{\text{cardinal de } R \cap S}{\text{cardinal de } S} = \frac{\frac{\text{cardinal de } R\cap S}{\text{cardinal de } \Omega}}{\frac{\text{cardinal de } S}{\text{cardinal de } \Omega}} = \frac{P(R \cap S)}{P(S)} = P(R|S).$$

La probabilidad de que ocurra el suceso R, sabiendo que ha ocurrido el suceso S, este con probabilidad no nula, es

$$P(R|S) = \frac{P(R \cap S)}{P(S)} = \frac{\text{cardinal de } R \cap S}{\text{cardinal de } S}$$

$$= \frac{\text{cardinal de } \{(2,5),(4,3),(6,1)\}}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}.$$

□

Definición 5. **Probabilidad condicionada**. La probabilidad de que ocurra el suceso R, sabiendo que ha ocurrido el suceso S, este con probabilidad no nula, es

$$\boxed{P(R|S) = \frac{P(R \cap S)}{P(S)}}$$

Ejemplo 14. Entre todas las familias que tienen dos hijos no gemelos,

1. ¿cuál es la probabilidad de que una familia tenga dos hijos varones?,
2. ¿cuál es la probabilidad de que una familia tenga dos hijos varones si se sabe que uno de ellos es varón?

(Se supone que la probabilidad de que un hijo sea varón es $1/2$).

Experimento aleatorio: tomar una familia que tenga dos hijos no gemelos, y ver el sexo de los hijos.

Espacio muestral

$$\Omega = \{(\text{varón}, \text{varón}), (\text{varón}, \text{hembra}), (\text{hembra}, \text{varón}), (\text{hembra}, \text{hembra})\}.$$

$(\text{varón}, \text{hembra})$ quiere decir que la familia tuvo primero un varón y luego una hembra.

El espacio muestral está formado por cuatro sucesos elementales igualmente probables.

1. $P((\text{varón}, \text{varón})) = \frac{1}{4}$.
2. Consideramos los sucesos

   A: ser varón alguno de los hijos,

   B: ser varón los dos hijos.

   El enunciado nos pide que calculemos la probabilidad de tener dos varones sabiendo que por lo menos uno de ellos lo es, es decir, $P(B|A)$.

   El suceso $A \cap B$ es "que los dos hijos sean varones". Ya que

   $$A = \{(\text{varón}, \text{varón}), (\text{varón}, \text{hembra}), (\text{hembra}, \text{varón})\}, \quad \text{y} \quad A \cap B = \{(\text{varón}, \text{varón})\},$$

   $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

□

4. Sucesos independientes

Supongamos que estamos realizando un experimento aleatorio. Sea Ω el espacio muestral asociado y $A, B \subset \Omega$ dos sucesos. Si la realización del suceso A no varía la probabilidad de realización del suceso B, decimos que los sucesos A y B son **independientes**.

Ejemplo 15. Se lanza un dado y después una moneda. ¿Cual es la probabilidad de que:

1. ¿salga 3?
2. ¿salga cara?
3. ¿salga 3 y cara?

Experimento aleatorio: lanzar un dado, luego una moneda y ver los resultado obtenidos.

Espacio muestral

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (1,+),(2,+),(3,+),(4,+),(5,+),(6,+), \\ (1,-),(2,-),(3,-),(4,-),(5,-),(6,-) \end{array} \right\}.$$

Todos los sucesos elementales son igualmente probables.

Consideramos los sucesos

$A =$ “que salga cara”$=\{(1,+),(2,+),(3,+),(4,+),(5,+),(6,+)\}$,

$B =$ “que salga 3”$=\{(3,+),(3,-)\}$,

$A \cap B =$ “que salga cara y 3” $=\{(3,+)\}$.

Los sucesos A y B son independientes, pues el hecho de que salga 3 o no al lanzar el dado no interviene para nada en la probabilidad de que salga cara al lanzar la moneda.

$$P(A) = \frac{\text{cardinal de } A}{\text{cardinal de } \Omega} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

$$P(B) = \frac{\text{cardinal de } B}{\text{cardinal de } \Omega} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{cardinal de } A \cap B}{\text{cardinal de } \Omega} = \frac{1}{12}.$$

Observamos que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

y como consecuencia

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A),$$

y

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B).$$

□

Definición 6. **Sucesos independientes**. Consideramos un experimento aleatorio, sea Ω el espacio muestral asociado y P una función de probabilidad asociada al experimento aleatorio. Diremos que los sucesos $A, B \subset \Omega$ son independientes si se verifica

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{4}$$

Proposición 1. Consideramos un experimento aleatorio, sea Ω el espacio muestral asociado y P una función de probabilidad asociada al experimento aleatorio. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$,
2. $P(A|B) = P(A)$,
3. $P(B|A) = P(B)$.

No siempre el concepto de sucesos independientes es intuitivo, como demuestra el siguiente ejemplo.

Ejercicio 5. Supongamos que tiramos dos dados, uno rojo y otro azul. Consideramos los sucesos:

$$A = \{\text{suma de las puntuaciones de los dos dados es 7}\},$$

$$B = \{\text{dado azul sale 3}\},$$

$$C = \{\text{suma de las puntuaciones de los dos dados es 9}\}.$$

1. ¿Son A y B independientes?
2. ¿Son B y C independientes?

Solución 1. Sí; 2. no.

Ejercicio 6. En un grupo de 1000 personas hay 400 que saben inglés, 100 que saben alemán y 30 ambos idiomas. Con estos datos averigüe si son independientes los sucesos "saber inglés" y "saber alemán".

Experimento aleatorio: tomar una persona de este grupo y ver si sabe inglés o alemán.

Espacio muestral:

$$\Omega = \text{"grupo de las 1000 personas"}.$$

Consideramos los sucesos

$$I = \text{"personas del grupo que saben inglés"},$$

$$A = \text{"personas del grupo que saben alemán"}.$$

Si los sucesos A y B fuesen independientes, se tendría que verificar que

$$P(I \cap A) = P(I) \cdot P(A),$$

pero esto es falso,

$$P(I \cap A) = \frac{30}{1000} \neq \frac{400}{1000} \cdot \frac{100}{1000} = P(I) \cdot P(A).$$

□

Ejercicio 7. El 3 % y el 5 %, respectivamente, de las piezas producidas por una máquina X; que está en Sevilla, y otra e Y, que está en Madrid, son defectuosas. Se elige al azar una pieza de las producidas por X y otra de las producidas por Y.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean defectuosas?
2. ¿Y de que al menos una lo sea?

Experimento aleatorio: tomar una pieza x producida por la máquina X y otra y producida por la máquina Y y ver si son o no defectuosas.

Espacio muestral

$$\Omega = \{(x, y) : \ x \text{ fabricada por } X \text{ e } y \text{ fabricada por } Y\}.$$

Consideramos los sucesos

$$X_d = \text{"}(x, y) : \ x \text{ defectuosa y fabricada por } X \text{ e } y \text{ fabricada por } Y\},$$

$$Y_d = \text{"}(x, y) : \ x \text{ fabricada por } X \text{ e } y \text{ defectuosa y fabricada por } Y\}.$$

Los sucesos X_d e Y_d claramente son independientes.

El enunciado nos dice que

$$P(X_d) = \frac{3}{100}, \qquad P(Y_d) = \frac{5}{100}.$$

1. Nos están pidiendo la probabilidad del suceso $X_d \cap Y_d$. Al ser independientes:

$$P(X_d \cap Y_d) = P(X_d) \cdot P(Y_d) = 0{,}0015.$$

2. Nos están pidiendo la probabilidad del suceso $X_d \cup Y_d$.

$$P(X_d \cup Y_d) = P(X_d) + P(Y_d) - P(X_d \cap Y_d) = 0,03 + 0,05 - 0,0015 = 0,0785.$$

□

Ejemplo 16. Sacamos dos cartas de la baraja española utilizando la forma:

1. Después de sacar la primera carta de la baraja, vemos la carta, la introducimos a la baraja, y sacamos la segunda carta.
2. Después de sacar la primera carta de la baraja, vemos la carta, **no** la introducimos a la baraja, y sacamos la segunda carta.

Consideramos las siguientes sucesos:
A = "sacar un as de oros con la primera carta",
B = "sacar un 3 de bastos con la segunda carta".
Según utilicemos el procedimiento 1 o 2,

1. calcular $P(A)$ y $P(B)$,
2. calcular $P(A \cap B)$, $P(A|B)$ y $P(B|A)$,
3. ¿son independientes los sucesos A y B?

Utilizamos el primer procedimiento Experimento aleatorio: sacar dos cartas de la baraja española de la siguiente forma: sacamos primeramente una carta, vemos qué carta es y una vez vista, la introducimos otra vez en la baraja y a continuación sacamos la segunda carta.

El par $(2 \text{ de copas}, 5 \text{ de bastos})$ indicará que como primera carta hemos sacado el 2 de copas y como segunda carta el 5 de bastos.

Tal y como realizamos el experimento aleatorio, puede ocurrir que la primera carta coincida con la segunda, ya que la primera carta ha sido introducida de nuevo en la baraja.

Espacio muestral

$$\Omega = \{(i, j) : \ i, j \text{ son dos cartas cualquiera de la baraja}\}.$$

El cardinal de Ω es $40 \cdot 40 = 1600$.

Todos los sucesos elementales son equiprobables.

$A = \{(\text{as de oros}, \text{cualquier carta})\}$, cardinal de $A = 40$.

$B = \{(\text{cualquier carta}, 3 \text{ de bastos})\}$, cardinal de $B = 40$.

$A \cap B = \{(\text{as de oros}, 3 \text{ de bastos})\}$, cardinal de $A \cap B = 1$.

$$P(A) = \frac{40}{1600} = \frac{1}{40}, \quad P(B) = \frac{40}{1600} = \frac{1}{40}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{1600}.$$

Se verifica que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

luego los sucesos son independientes y

$$P(A|B) = P(A) = \frac{40}{1600} = \frac{1}{40}, \quad P(B|A) = P(B) = \frac{40}{1600} = \frac{1}{40}.$$

Utilizamos el segundo procedimiento Experimento aleatorio: sacar dos cartas de la baraja española de la siguiente forma: sacamos primeramente una carta, vemos qué carta es y una vez vista, **no** la introducimos otra vez en la baraja y a continuación sacamos la segunda carta.

Tal y como realizamos el experimento aleatorio, **no** puede ocurrir que la primera carta coincida con la segunda, ya que la primera carta **no** ha sido introducida de nuevo en la baraja.

Espacio muestral

$$\Omega = \{(i, j) : \ i, j \text{ son dos cartas diferentes de la baraja}\}.$$

El cardinal de Ω es $40 \cdot 39$.

Todos los sucesos elementales son equiprobables.

$A = \{(\text{as de oros}, \text{cualquier carta menos el as de oros})\}$, cardinal de $A = 39$.

$B = \{(\text{cualquier carta menos el tres de bastos}, 3 \text{ de bastos})\}$, cardinal de $B = 39$.

$A \cap B = \{(\text{as de oros}, 3 \text{ de bastos})\}$, cardinal de $A \cap B = 1$.

$$P(A) = \frac{39}{40 \cdot 39} = \frac{1}{40}, \quad P(B) = \frac{39}{40 \cdot 39} = \frac{1}{40}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{40 \cdot 39}.$$

Se verifica

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B),$$

luego los sucesos **no** son independientes.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{40 \cdot 39}}{\frac{39}{40 \cdot 39}} = \frac{1}{39},$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{40 \cdot 39}}{\frac{39}{40 \cdot 39}} = \frac{1}{39}.$$

□

Ejemplo 17. Una urna contiene 10 bolas de las que tres son rojas. Escogemos consecutivamente dos bolas al azar. Calcular la probabilidad de que ninguna de las dos sea roja si

1. Una vez sacada la primera bola y visto el color, reemplazamos la bola a la urna.
2. Una vez sacada la primera bola y visto el color, no reemplazamos la bola a la urna.

1. Experimento aleatorio: Sacar dos bolas de una urna que contiene 10 bolas de las que tres son rojas de tal manera que, una vez sacada la primera bola y visto su color, es reemplazada a la urna.

   El par $(\text{bola}, \text{roja})$ indicará que la primera extracción ha sido una bola cualquiera, (puede ser roja), y la segunda extracción una bola roja.

   Si en la primera extracción hemos sacado una bola, esta misma puede salir en la segunda extracción, pues hay reemplazamiento de la bola. El espacio muestral Ω estará compuesto de $10 \cdot 10 = 100$ sucesos elementales.

   Consideramos los sucesos

   A= que la primera bola extraída no sea roja.

   B= que la segunda bola extraída no sea roja.

   A∩B= ninguna de las dos bolas son rojas

   Supuesto que hay reemplazamiento, la realización del suceso A no varía la probabilidad de realización del suceso B. Los sucesos son independientes.

   A=$\{($ bola no roja, bola $\}$. (las bolas extraídas pueden ser iguales) Cardinal de A es $7 \cdot 10 = 70$.

   B=$\{($ bola , bola no roja$\}$. (las bolas extraídas pueden ser iguales) Cardinal de B es $10 \cdot 7 = 70$.

   Cardinal de A∩B es $7 \cdot 7 = 49$.

$$P(A \cap B) = \frac{\text{cardinal de } A \cap B}{\text{cardinal de } \Omega} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{49}{100}.$$

   Como

$$P(A) = \frac{\text{cardinal de } A}{\text{cardinal de } \Omega} = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} = \frac{\text{cardinal de } B}{\text{cardinal de } \Omega} = P(B),$$

   efectivamente se tiene que

$$P(A \cap B) = \frac{49}{100} = \frac{7}{10}\frac{7}{10} = P(A) \cdot P(B).$$

2. Experimento aleatorio: Sacar dos bolas de una urna que contiene 10 bolas de las que tres son rojas de tal manera que, una vez sacada la primera bola y visto su color, no es reemplazada a la urna.

   El par $(\text{bola}, \text{roja})$ indicará que la primera extracción ha sido una bola cualquiera y la segunda extracción una bola roja, que no puede coincidir con la primera..

   Si en la primera extracción hemos sacado una bola, esta misma no puede salir en la segunda extracción, pues no hay reemplazamiento de la bola. El espacio muestral Ω estará compuesto de $10 \cdot 9 = 90$ sucesos elementales.

   Consideramos los sucesos

   A= que la primera bola extraída no sea roja.

   B= que la segunda bola extraída no sea roja.

   A∩B= ninguna de las dos bolas son rojas

   Supuesto que no hay reemplazamiento, la realización del suceso A si varía la probabilidad de realización del suceso B. Los sucesos no son independientes.

   A=$\{($ bola no roja, bola $\}$. (las bolas extraídas no pueden ser iguales) Cardinal de A es $7 \cdot 9 = 63$.

   B=$\{($ bola , bola no roja$\}$. (las bolas extraídas pueden ser iguales) Cardinal de B es $7 \cdot 9 + 3 \cdot 2 = 63$.

   Cardinal de A∩B es $7 \cdot 6 = 42$ y

   $$P(A \cap B) = \frac{\text{cardinal de } A \cap B}{\text{cardinal de } \Omega} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}.$$

   Como

   $$P(A) = \frac{\text{cardinal de } A}{\text{cardinal de } \Omega} = \frac{63}{90} = \frac{\text{cardinal de } B}{\text{cardinal de } \Omega} = P(B),$$

   efectivamente se tiene que

   $$P(A \cap B) = \frac{42}{90} \neq \frac{63}{90} \cdot \frac{63}{90} = P(A) \cdot P(B).$$

□

Ejercicio 8. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico y $S_1, S_2 \in \mathcal{A}$ sucesos independientes. Demuéstrese que S_1^c y S_2^c son independientes.

Solución Que S_1 y S_2 son independientes significa que

$$P(S_1 \cap S_2) = P(S_1) \cdot P(S_2).$$

Veamos que S_1^c y S_2^c son independientes. Vamos a utilizar las propiedades de los sucesos:

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad A, B \in \mathcal{A}.$
- $P(A^c) = 1 - P(A), \quad A \in \mathcal{A}.$
- $P(a \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad A, B \in \mathcal{A}.$
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), A, B \in \mathcal{A},$ A y B independientes.

$$P(S_1^c \cap S_2^c) = P((S_1 \cup S_2)^c) = 1 - P(S_1 \cup S_2)$$
$$= 1 - P(S_1) - P(S_2) + P(S_1 \cap S_2) = 1 - P(S_1) - P(S_2) + P(S_1) \cdot P(S_2)$$
$$= (1 - P(S_1)) \cdot (1 - P(S_2)) = P(S_1^c) \cdot P(S_2^c),$$

y esto demuestra que S_1^c y S_2^c son independientes. □

Ejercicio 9. Sea Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico, A, $B \in \mathcal{A}$ con $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(B|A) = \frac{1}{3}$. Determínese si se cumple

1. A y B son independientes.
2. $A \cap B = \emptyset$.
3. $A \subseteq B$.
4. $P(A^c|B^c) = \frac{2}{3}$.

1. Consideremos el experimento aleatorio de extraer una bola de una urna que contiene nueve bolas numeradas del 1 al 9. El espacio muestral es

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Consideramos los sucesos

$$A = \text{"número extraído es menor que } 4 = \{1, 2, 3\},$$

$$B = \text{"número extraído es mayor que } 2 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

$$P(A) = \frac{1}{3}, \;\; P(B) = \frac{7}{9}, \;\; P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

Como $P(B) \neq P(B|A)$, los sucesos A y B no son independientes.

2. El enunciado nos dice que

$$\frac{1}{3} = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{3}} \Longrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{9},$$

entonces $A \cap B \neq \emptyset$, pues si lo fuese, se tendría que $P(A \cap B) = 0$.

3. En el contraejemplo dado en 1, se observa que $A \not\subseteq B$.

4. En el contraejemplo dado en 1, $A^c \cap B^c = \emptyset$, por lo tanto $P(A^c|B^c) = 0$.

□

5. Teorema de la Probabilidad Total y de Bayes

Ejemplo 18. Una planta industrial tiene tres máquinas. La máquina A produce 200 piezas al día con un 4 % de defectuosas, la máquina B produce 300 con un 5 % de defectuosas y la C fabrica 400 con un 2 % de defectuosas. Al final del día, una pieza es tomada al azar.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

2. ¿Si es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la máquina A?

Experimento aleatorio: Al final del día, tomar una pieza y ver si es defectuosa.

Si utilizamos la notación: Ab=pieza fabricada por la máquina A que no es defectuosa; Ad= pieza fabricada por la máquina A pero que es defectuosa.

Espacio muestral

$$\Omega = \{Ab, Ad, Bb, Bd, Cb, Cd\}.$$

El número de sucesos elementales es 6, pero no son todos igualmente probables.

Consideramos los sucesos:

$S_a =$ "que la pieza haya sido fabricada por la máquina A". $S_a = \{Ab, Ad\}$.
$S_b =$ "que la pieza haya sido fabricada por la máquina B". $S_b = \{Bb, Bd\}$.
$S_c =$ "que la pieza haya sido fabricada por la máquina C". $S_c = \{Cb, Cd\}$.
$S =$ "que la pieza esté defectuosa".

Los sucesos S_a, S_b y S_c son disjuntos dos a dos, es decir, se verifica

$$\left\{ \begin{array}{l} S_a \cap S_b = \emptyset \\ S_a \cap S_c = \emptyset \\ S_b \cap S_c = \emptyset \end{array} \right. , \quad \text{y} \quad \Omega = S_a \cup S_b \cup S_c.$$

Como el total de piezas fabricadas son 900, sabemos que

$$P(S_a) = \frac{200}{900} = \frac{2}{9}, \qquad P(S_b) = \frac{300}{900} = \frac{1}{3}, \qquad P(S_c) = \frac{400}{900} = \frac{4}{9}.$$

El enunciado nos dice:

$$P(S|S_a) = \frac{4}{100}, \qquad P(S|S_b) = \frac{5}{100}, \qquad P(S|S_c) = \frac{2}{100}.$$

1. **Teorema de la Probabilidad Total**.

$$
\begin{aligned}
P(S) = P(S \cap \Omega) = P(S \cap (S_a \cup S_b \cup S_c)) &= P((S \cap S_a) \cup (S \cap S_b) \cup (S \cap S_c)) \\
&= P(S \cap S_a) + P(S \cap S_b) + P(S \cap S_c) \\
&= P((S_a) \cdot P(S|S_a) + P((S_b) \cdot P(S|S_b) + P((S_c) \cdot P(S|S_c) \\
&= \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{100} + \frac{3}{9} \cdot \frac{5}{100} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{100} = \frac{31}{900}.
\end{aligned}
$$

2. **Teorema de Bayes**

$$
\begin{aligned}
P(S_a|S) &= \frac{P(S_a \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S|S_a) \cdot P(S_a)}{P(S)} \\
&= \frac{P(S|S_a) \cdot P(S_a)}{P((S_a) \cdot P(S|S_a) + P((S_b) \cdot P(S|S_b) + P((S_c) \cdot P(S|S_c)} \\
&= \frac{\frac{2}{9} \cdot \frac{4}{100}}{\frac{31}{900}} = \frac{8}{31}.
\end{aligned}
$$

□

Teorema 1 Teorema de la Probabilidad Total
Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio probabilístico. Sea* $S_1, S_2, \cdots, S_n \in \Omega$ *con* $P(S_i) > 0, \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *una partición de* Ω*, esto es*

- $S_i \cap S_j = \emptyset, \quad i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}, \quad i \neq j.$
- $\bigcup_{i=1}^{n} S_i = \Omega.$

Si $S \in \mathcal{A}$ *se tiene*

$$
\boxed{P(S) = \sum_{i=1}^{n} P(S|S_i) P(S_i)}
$$

Teorema 2 Teorema de Bayes
Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio probabilístico. Sea* $S_1, S_2, \cdots, S_n \in \Omega$ *con* $P(S_i) > 0, \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *una partición de* Ω*, esto es*

- $S_i \cap S_j = \emptyset, \quad i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}, \quad i \neq j.$
- $\bigcup_{i=1}^{n} S_i = \Omega.$

Si $S \in \mathcal{A}$ *con* $P(S) > 0$ *y* $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *, se tiene*

$$
\boxed{P(S_j|S) = \frac{P(S|S_j) P(S_j)}{P(S)} = \frac{P(S|S_j) P(S_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(S|S_i) P(S_i)}}
$$

Ejemplo 19. En una caja A, hay 10 bombillas, de las que 3 no funcionan; en otra caja B hay 8 con 2 fundidas; y en una última caja C hay 12 bombillas de las que tres son defectuosas. Escogida una caja al azar, de la que se extrae, sin mirar, una bombilla:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que no funciones?

2. Si salió una bombilla fundida, ¿cuál es la probabilidad de que fuese de la caja A?

Experimento aleatorio: extraer una bombilla de una de las tres cajas y ver si está fundida.

Designamos por b_i^A, $i = 1, 2, \cdots, 10$ las bombillas de la caja A y suponemos que las últimas, b_8^A, b_9^A y b_{10}^A, son las defectuosas. Designación análoga haríamos para las bombillas de las cajas B y C.

Espacio muestral

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{ll} b_i^A, & i = 1, 2, \cdots, 10, \\ b_i^B, & i = 1, 2, \cdots, 8, \\ b_i^C, & i = 1, 2, \cdots, 12. \end{array} \right\}$$

Consideramos los sucesos

$$A = \text{"la bombilla escogida es de la caja } A\text{"},$$
$$B = \text{"la bombilla escogida es de la caja } B\text{"},$$
$$C = \text{"la bombilla escogida es de la caja "},$$
$$D = \text{"la bombilla escogida es defectuosa }.$$

Suponemos que los sucesos A, B y C son equiprobables, esto es

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}.$$

Los sucesos A, B y C forman una partición de Ω. Son disjuntos dos a dos y

$$\Omega = A \cup B \cup C.$$

El enunciado nos dice que

$$P(D|A) = \frac{3}{10}, \qquad P(D|B) = \frac{2}{8}, \qquad P(D|C) = \frac{3}{12}.$$

1. Vamos a utilizar el Teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) \\ &= P(P(D|A) \cdot P(A) + P(P(D|A) \cdot P(A) + P(P(D|A) \cdot P(A) \\ &= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{3} \end{aligned}$$

.

2. Vamos a aplicar el Teorema de Bayes y el apartado anterior.

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A) \cdot P(A)}{P(D)} = \frac{3}{8}.$$

□

Ejercicio 10. De las piezas que se producen en una fábrica, el 80 % son producidas por una máquina A y el resto por una máquina B. Suponiendo que el 10 % de las piezas producidas por A son defectuosas, y el 6 % de las producidas por B son defectuosas,

1. elegida una pieza producida en esa fábrica al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?;
2. se elige al azar una pieza y resulta ser defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por la máquina A?

Solución: 1. $0,092$; 2. $0,87$.

Ejercicio 11. Un sistema de comunicación consiste en un transmisor que envía uno de estos dos símbolos: 0 ó 1. En el canal a veces hay errores de modo que un 0 se recibe como un 1 y viceversa. La probabilidad de la transmisión de un 1 sea correcta es 0.9, y de que incorrecta es 0.15. Si la probabilidad de enviar un 1 es 0.4, cuál es la probabilidad de recibir un 1?

Solución 0.45

Ejercicio 12. En un examen teórico para obtener el carnet de conducir se puede hacer el ejercicio correspondiente a cada uno de los tipos de carnet A, B y C. Aprueban el examen el 65 % de A, el 40 % de B y el 25 % de C. Se sabe que el 20 % se presentan al ejercicio A, el 50 % se presentan al ejercicio B y el 30 % al C. Eligiendo un alumno al azar, determine

1. probabilidad de que presentándose al examen A haya aprobado;
2. si se sabe que ha aprobado, probabilidad de que se haya presentado al examen A

Experimento aleatorio: tomar una persona, ver a qué tipo de examen se ha presentado y si ha aprobado o no.

Espacio muestral

$$\Omega = \text{'' conjunto formado por las personas que se han presentado a alguno de los tipos de exámenes''}.$$

Consideramos los sucesos

$$A = \text{''personas que se han presentado al examen tipo } A\text{''},$$

$$B = \text{''personas que se han presentado al examen tipo } B\text{''},$$

$$C = \text{''personas que se han presentado al examen tipo } C\text{''},$$

$$Ap = \text{''personas que han presentado el examen al que se han presentado''}.$$

Los sucesos A, B y C forman una partición de Ω.

El enunciado nos dice

$$P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}, \qquad P(B) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}, \qquad P(C) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10},$$

$$P(Ap|A) = \frac{65}{100}, \qquad P(Ap|B) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}, \qquad P(Ap|C) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

1. Nos piden la probabilidad del suceso $A \cap A_p$.

$$P(A \cap A_p) = P(A_p|A) \cdot P(A) = \frac{65}{100} \cdot \frac{1}{5} = 0,13.$$

2. Aquí vamos a aplicar el Teorema de Bayes.

$$P(A|A_p) = \frac{P(A \cap A_p)}{P(A_p)}$$

$$= \frac{0,13}{P(A_p|A) \cdot P(A) + P(A_p|B) \cdot P(B) + P(A_p|C) \cdot P(C)}.$$

□

Ejercicio 13. Un producto está formado por tres piezas: A, B y C. El proceso de fabricación es tal que la probabilidad de que la pieza A sea defectuosa es $0,03$; de que la pieza B sea defectuosa es $=,02$; y de que la pieza C sea defectuosa es de $,01$. El producto no funciona si alguna de las piezas es defectuosa.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto no funcione?

2. Otro producto consta de dos piezas de A y una de B, ¿cuál es la probabilidad de que no funcione?

Solución: 1. $0,059$; 2. $0,078$.

Ejercicio 14. Se dispone de tres tipos de urnas: las del tipo A contienen 5 bolas blancas y 5 negras; las del tipo B contienen ocho bolas blancas y 2 negras; las del tipo C contienen una bola blanca y 4 negras. Se dispone de 5 urnas del tipo A, 3 del tipo B y 2 del tipo C. Se saca una bola de una urna elegida al azar y resultó ser blanca. Calcular la probabilidad de que la urna elegida sea del tipo B.

Experimento aleatorio: tomar una bola de una urna elegida al azar y ver su color. Espacio muestral

$$\Omega = \text{"conjunto formado por las bolas que estás en las 10 urnas"}.$$

Consideramos los sucesos

$$A = \text{"elegir una urna del tipo } A\text{"},$$
$$B = \text{"elegir una urna del tipo } B\text{"},$$
$$C = \text{"elegir una urna del tipo } C\text{"},$$
$$Bl = \text{"elegir una bola blanca"}.$$

Los sucesos A, B y C forman una partición de Ω.

El enunciado nos dice que

$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{3}{10}, \qquad P(C) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5},$$
$$P(Bl|A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \qquad P(Bl|B) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \qquad P(Bl|C) = \frac{1}{5}.$$

Vamos a utilizar el Teorema de Bayes.

$$P(B|Bl) = \frac{P(B \cap Bl}{P(Bl)}$$
$$= \frac{P(Bl|B) \cdot P(B)}{P(Bl|A) \cdot P(A) + P(Bl|B) \cdot P(B) + P(Bl|C) \cdot P(C)} = \frac{24}{53}.$$

□

Ejemplo 20. Atendiendo al nivel de contaminación, una ciudad está dividida en tres zonas A, B y C. El 50 % de la población vive en la zona A, el 40 % en B y el resto en C. El nivel de contaminación influye en la incidencia de una determinada enfermedad pulmonar; dicha enfermedad afecta a 10 de cada 100 personas que viven en A, mientras que sólo afecta a 1 de cada 100 personas que viven en B y a 5 de cada 1000 en C. Calcular

1. Probabilidad de que una persona elegida al azar en esta población sufra la enfermedad y que viva en A.
2. Probabilidad de que una persona una persona elegida al azar viva en la zona B, sabiendo que está afectada por esa enfermedad.

Experimento aleatorio: elegir un una persona al azar y ver en qué zona vive y si padece o no la enfermedad.

Consideramos los sucesos:

A: la persona vive en la zona A.

B: la persona vive en la zona B.

C: la persona vive en la zona C.

E: la persona está enferma.

NE: la persona no está enferma.

Espacio muestral

$$\Omega = \{A \cap E,\ A \cap NE,\ B \cap E,\ B \cap NE,\ C \cap E,\ C \cap NE,\}.$$

Los sucesos elementales no son igualmente probables.

El enunciado nos dice:

$$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{2}{5},\ P(C) = \frac{1}{10},\ P(E|A) = \frac{1}{10},\ P(E|B) = \frac{1}{100},\ P(E|C) = \frac{1}{2}.$$

Observamos que los sucesos A, B y C son disjuntos dos a dos y que $\Omega = A \cup B \cup C$, por lo tanto

$$P(E) = P(E \cap \Omega) = P(E \cap (A \cup B \cup C)) = P((E \cap A) \cup (E \cap B) \cup (E \cap C))$$
$$= P(E \cap A) + P(E \cap B) + P(E \cap C).$$

1. $P(E \cap A) = P(E|A) \cdot P(A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$.

2.
$$P((B|S) = \frac{P(B \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E|B) \cdot P(B)}{P(E)} = \frac{P(E|B) \cdot P(B)}{P(E \cap A) + P(E \cap B) + P(E \cap C)}$$
$$= \frac{P(E|B) \cdot P(B)}{P(E|A) \cdot P(A) + P(E|B) \cdot P(B) + P(E|C) \cdot P(C)}$$
$$= \frac{\frac{1}{100} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{100} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{1000} \cdot \frac{1}{10}} \cong 0,0734.$$

□

Ejercicio 15. (Examen 2010-11) El despertador de Javier no funciona bien , pues el 20 % de las veces no funciona. Cuando suena, Javier llega tarde a clase con probabilidad $\frac{1}{5}$, si no suena, la probabilidad de que llegue tarde es $\frac{9}{10}$:. Se pide:

1. Calcular la probabilidad de que llegue tarde a clase y haya sonado el despertador,
2. Probabilidad de que llegue a tiempo a clase.
3. Si Javier ha llegado tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador?

Solución

Experimento aleatorio: Preguntarle a Javier si le ha sonado el despertador y si ha llegado tarde a clase.

Espacio muestral $\Omega = \{sa, st, na, nt\}$, donde *sa* significa que ha sonados y no ha llegado tarde a clase, *st* ha sonado pero ha llegado tarde, *na* no ha sonado y no ha llegado tarde y *nt* no ha sonado y ha llegado tarde.

$$\text{Consideramos los sucesos} \begin{cases} S = \{\text{suena el despertador}\} \\ F = \{\text{no suena el despertador}\} \\ T = \{\text{llega tarde a clase}\} \\ H = \{\text{no llega tarde a clase}\} \end{cases}$$

Si $(\omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ es el espacio probabilístico, el enunciado me dice

$$P(S) = \frac{4}{5}, \quad P(F) = \frac{1}{5}, \quad P(T|S) = \frac{1}{5}, \quad P(H|S) = \frac{4}{5}, \quad P(T|F) = \frac{9}{10}, \quad P(H|F) = \frac{1}{10}.$$

1. $P(T \cap S) = P(T|S) \cdot P(S) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{25}$.
2. Aplicamos el <Teorema de la probabilidad total:
$$P(H) = P(H|S) \cdot P(S) + P(H|F) \cdot P(F) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{33}{50}.$$
3. Aplicamos el Teorema de Bayes:
$$P(S|T) = \frac{P(T|S) \cdot P(S)}{P(T)} = \frac{P(T|S) \cdot P(S)}{1 - P(H)} = \frac{8}{17}.$$

□

Ejercicio 16. Un banco ha comprobado que la probabilidad de que un cliente con fondos extienda un cheque con fecha equivocada es de $0,001$; en cambio todo cliente sin fondos pone una fecha equivocada en sus cheques. El 90 % de los clientes del banco tiene fondos. Se recibe ala fecha de hoy en caja un cheque con fecha equivocada. ¿Qué probabilidad hay de que sea de un cliente sin fondos?

Consideramos los sucesos

$$ClF = \text{"Clientes con fondos"},$$

$$ClSF = \text{"Clientes sin fondos"},$$

$$ChC = \text{"Extiende un cheque correcto"},$$

$$ChF = \text{"Extiende un cheque equivocado"}.$$

El espacio muestral está formado por los sucesos:

$$\Omega = \{CLF \cap ChC,\ CLF \cap ChF,\ CLSF \cap ChC,\ CLSF \cap ChF\}.$$

Los sucesos ClF y $ClSF$ forman una partición dele espacio muestral.

El enunciado nos dice que

$$P(ClF) = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}, \qquad P(ClSF) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10},$$

$$P(ChE|ClF) = 0{,}001, \quad P(ChC|ClF) = 0{,}999, \quad P(ChE|ClSF) = 1, \quad P(ChC|ClSF) = 0.$$

Vamos a aplicar el Teorema de Bayes

$$P(ClSF|ChE) = \frac{P(ClSF \cap ChE)}{P(ChE)}$$

$$= \frac{P(ChE|ClSF) \cdot P(ClSF)}{P(ChE|ClSF) \cdot P(ClSF) + P(ChE|ClF) \cdot P(ClF)} = \frac{1 \cdot 0,1}{1 \cdot 0,1 + 0,001 \cdot 0,9}.$$

□

Ejercicio 17. Una urna contiene 5 dados con sus caras de color blanco o rojo. El dado número $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$tiene i de sus caras blancas y el resto rojas. Se selecciona al azar un dado de la urna, se lanza y sale cara roja. ¿Cuál es la probabilidad de que el dado seleccionado sea el 2?

No resolvemos el ejercicio de una forma muy explícita.
Consideramos los sucesos:

$$A_i = \text{"Seleccionar el dado } A_i\text{"}, \qquad i \in \{1,2,3,4,5\},$$

$$R = \text{"Salga cara roja al lanzar el dado"}.$$

Vamos a suponer que son equiprobables la elección de los dados, esto es

$$P(A_1) = \frac{1}{5}, \qquad i \in \{1,2,3,4,5\}.$$

El enunciado nos dice que

$$P(R|A_1) = \frac{4}{5}, \ \ P(R|A_2) = \frac{3}{5}, \ \ P(R|A_3) = \frac{2}{5}, \ \ P(R|A_4) = \frac{1}{5}, \ \ P(R|A_5) = \frac{0}{5} = 0.$$

$$P(A_2|R) = \frac{P(A_2 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|A_2) \cdot P(A_2)}{\sum_{i=1}^{5} P(R|A_i) \cdot P(A_i)}.$$

□

6. Ejercicios

Ejercicio 18. Consideramos el experimento aleatorio: sacar una carta de la baraja española.

¿Quién es el espacio muestral asociado a este experimento aleatorio?
Consideramos los sucesos:
$S_1 = \{$ que la carta sea una copa $\}$,
$S_2 = \{$ que la carta sea una jota, caballo o rey $\}$,
$S_3 = \{$ que la carta sea un as $\}$,
$S_4 = \{$ que la carta sea un rey $\}$.
Determínense los sucesos

1. $S_1 \cap S_4, \ S_3 \cap S_4, \ S_1 \cap S_2 \cap S_4,$
2. $S_1 \cup S_3, \ S_2 \cup S_3 \cup S_4,$
3. $S_1 - S_4, \ S_4 - S_3, \ S_2 - (S_1 \cap S_4), \ S_3 - (S_1 \cup S_2),$
4. $S_1^c, \ (S_2 \cap S_3)^c, \ (S_2 \cup S_3)^c.$

Ejercicio 19. Consideremos un experimento aleatorio con espacio muestral asociado Ω. Sean S_1, S_2 y S_3 tres sucesos tales que

- $\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3$,
- $S_1 \cap S_2 = S_1 \cap S_3 = S_2 \cap S_3$ y
- $P(S_1) = \frac{1}{4}$, $P(S_2) = \frac{1}{2}$ y $P(S_1 \cap S_2) = \frac{1}{8}$.

Calcule $P(S_3)$.

Solución $P(S_3) = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 20. Justifíquese si las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. Dados dos sucesos A y B, la probabilidad de que solo uno de ellos ocurra es
$$P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
2. Dados dos sucesos A y B, se verifica
$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B).$$

Ejercicio 21. Si 10 personas se sientan alrededor de una mesa, ¿cuál es la probabilidad de que dos de ellas queden juntas?

Solución: 2/9.

Ejercicio 22. Si tres niños escriben al azar una de las cifras 1, 2, 3, ¿cuál es al probabilidad de que los tres escriban la misma?

Solución: 1/9.

Ejercicio 23. Se extrae una carta de una baraja española y se consideran los sucesos siguientes:
A = "La carta extraída sea el rey de oros",
B = "la carta extraída es un oro",
C = "la carta extraída es el as de espadas o un oro".
Calcular

1. $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$.
2. $P(A \cap B)$ y $P(A \cap C)$.
3. $P(A \cup B)$ y $P(A \cup C)$.

Solución: 1. $P(A) = \frac{1}{40}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ y $P(C) = \frac{11}{40}$; 2. $P(A \cap B) = \frac{1}{40}$ y $P(A \cap C) = \frac{1}{40}$; 3. $P(A \cup B) = \frac{1}{4}$ y $P(A \cup C) = \frac{1}{4}$.

Ejercicio 24. Calcular $P(A \cap B^c)$ sabiendo que $P(A) = a$, $P(B) = b$, y $P(A \cup B) = c$.

Solución: $c - b$.

Ejercicio 25. Un aparato tiene dos componentes A Y B. Los fallos en el aparato vienen motivados por fallos en alguna de las componentes. Al cabo de 5 años la componente A ha fallado en el 6 % de los aparatos, la componente B en el 8 % y las dos componentes en el 4 %.

1. Los fallos de A y B, ¿son independientes?
2. Si B ha fallado, ¿cuál es la probabilidad de que A haya fallado también?

Solución: (a) No, (b) 1/2.

Ejercicio 26. Un examen consta de 14 temas. Se eligen 2 al azar y el alumno deberá escoger uno para contestarlo. Calcular la probabilidad de que a un alumno que ha preparado 5 temas le toque al menos uno que sabe.

Solución: 55/91

Ejercicio 27. De cada dote de 10 ordenadores, se toma una muestra de 4 y se inspeccionan, rechazándose el lote si uno o mas de un ordenador son defectuosos. Si en un lote hay 5 defectuosos, cuál es la probabilidad de que se rechace?

Ejercicio 28. Una aseguradora tiene clientes de riesgo alto, medio y bajo. Estos clientes tienen probabilidades 0.02, 0.01 y 0.0025 de rellenar un impreso de reclamación. Si la proporción de clientes de alto riesgo es 0.1, de riesgo medio 0.2 y de bajo riesgo es 0.7. ¿Cuál es la probabilidad de que un impreso rellenado se de un cliente de alto riesgo?

Ejercicio 29. En un restaurante, en el 60 % de las mesas se ha pedido vino, en el 30 % cerveza y en el 20 % ambas bebidas. Elegimos una mesa al azar:

1. Si han pedido vino, ¿cuál es la probabilidad de que hayan pedido también cerveza?
2. Si han pedido cerveza, ¿cuál es la probabilidad de que no hayan pedido vino?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que no hayan pedido ni vino ni cerveza?

Solución: (a) 1/3; (b) 2/3; (c) 3/10.

Ejercicio 30. Se tienen tres cajas de bombillas. La primera tiene 10 de las que 4 son defectuosas. La segunda tiene 6 y sólo una defectuosa y la tercera tiene 8 de las que 3 son defectuosas. Escogiendo una bombilla al azar de entre todas ellas, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?, ¿y de que no sea defectuosa?

Solución: defectuosa 113/360, no defectuosa 247/360.

Ejercicio 31. Un detector de mentiras se administra con regularidad a los miembros del servicio secreto. Se sabe que la probabilidad de que el detector de positivo si el sujeto está mintiendo es 0.88 y la probabilidad de que de negativo si está diciendo la verdad es 0.86. Se sabe que el 99 % de las veces los miembros del servicio secreto dicen la verdad. Un individuo da positivo en el test, ¿cuál es la la probabilidad de que esa persona haya dicho la verdad?

Ejercicio 32. Supongamos que tenemos tres tarjetas, de las cuales una tiene ambas caras rojas, otra ambas caras blancas y la tercera una cara blanca y otra roja. Se extrae una, al azar, y se coloca sobre la mesa.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que la cara de arriba sea roja?

2. Si la cara de arriba es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la cara de abajo también lo sea?

Solución: 1. $\frac{1}{2}$; 2. $\frac{2}{3}$.

Ejercicio 33. En un sistema de alarma, la probabilidad de que se produzca un peligro es 0.1. Si éste se produce, la probabilidad de que la alarma funcione es 0.95. La probabilidad de que la alarma funcione sin haber existido peligro es 0.03. Calcule la probabilidad de que habiendo funcionado la alarma no haya existido peligro.

Ejercicio 34. Una empresa dedicada al transporte público explota tres lineas de una gran ciudad, de manera que el 60 % de los autobuses cubren el servicio de la linea 1, el 30 % cubren el servicio de la linea 2 y el 10 % cubren el servicio de la linea 3. Se sabe que la probabilidad de que , diariamente, un autobús se averíe es:

- 2 % en la línea 1,
- 4 % en la línea 2,
- 1 % en la línea 3.

Calcule

1. La probabilidad de que un autobús sufra un día una avería.
2. Sabiendo que el autobús ha sufrido una avería, cuál es la probabilidad de que preste servicio en la línea 1?

Ejercicio 35. En una confitería hay 6 urnas que contienen 14 caramelos de naranja y de limón; una tiene 8 de naranja y 6 de limón; dos urnas contienen 7 de naranja y 7 de limón y tres urnas contienen 6 de naranja y 8 de limón. Se elige una urna al azar y se extraen 3 caramelos sin reemplazamiento en dicha urna. Sabiendo que 2 son de naranja y 1 de limón, ¿cuan es la probabilidad de que la urna elegida contenga 7 caramelos de naranja y 7 de limón?

Solución: 49/137.

Ejercicio 36. Se aplica una prueba médica T para detectar la presencia de alergias en los trabajadoras de una fabrica. se admite, por los estudios realizados en este sector laboral, que la proporción de individuos con alergia en este tipo de trabajadores es del 14 %. En tales estudios se ha establecido que aproximadamente el 17 % de los individuos da positivo y el 5 % de las personas con alergia dan negativo. Calcule

1. La proporción de trabajadores que no tienen alergia y dan positivo.
2. La proporción de trabajadores que tienen alergia y dan negativo.

Ejercicio 37. Una urna contiene 5 bolas rojas y 7 amarillas. Una persona saca 3 bolas.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea ninguna roja?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una roja?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que sean dos rojas?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que sean tres rojas?
5. ¿Cuál es la probabilidad de que sea al menos una roja?

Solución: 1. $\frac{7}{44}$; 2. $\frac{21}{44}$; 3. $\frac{7}{22}$; 4. $\frac{1}{22}$; 5. $\frac{37}{44}$.

Ejercicio 38. En una ciudad se publican tres ‘periódicos A, B y C. El 30 % de la población lee el A, el 20 % de la población lee el B y el 15 % lee el C; el 12 % lee A y B, el 9 % lee A y C, el 6 % lee B y C y el 3 % lee A, B y C. Calcular:

1. Porcentaje de personas que leen al menos uno de los tres periódicos.
2. Porcentaje que solo lee A.
3. Porcentaje que lee B o C, pero no A.

Solución: (a) 41 %, (b) 12 %, (c) 11 %.

Ejercicio 39. En cierto país, la probabilidad de que un niño , de mayor, estudie una carrera universitaria es 1/6 y de que lo haga una niña es 1/10. Hallar la probabilidad de que

1. ambos estudien una carrera universitaria.
2. al menos uno estudie una carrera universitaria.
3. ninguno estudie una carrera universitaria.
4. solamente la niña estudie una carrera universitaria.

Solución: 1. $1/60$; 2. $1/4$; 3. $3/4$; 4. $1/12$.

Ejercicio 40. Una población está formada por tres grupos étnicos: A (30 %), B (10 %) y C (60 %). Los porcentajes del caracter “ojos claros” son, respectivamente, 20 %, 40 % y 5 %. Calcular

1. Probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga ojos claros.
2. Probabilidad de que un individuo de ojos oscuros sea de A.
3. Si un individuo elegido al azar tiene los ojos claros, ¿a qué grupo es más probable que pertenezca?

Solución: (a) $\cong 0,13$; (b) $\cong 0,276$; (c) es más probable que sea de A.

Ejercicio 41. La probabilidad de que un estudiante apruebe todas las asignaturas en junio es $0,4$. Hallar la probabilidad de que entre cuatro estudiantes escogidos al azar:

1. ninguno apruebe todas las asignaturas en junio;
2. no apruebe más e uno;
3. al menos uno apruebe;
4. todos aprueben.

Solución: 1. $0,1296$; 2. $0,4752$; 3. $0,8704$; 4. $0,0256$.

Ejercicio 42. El dado A tiene cuatro caras rojas y dos blancas. El dado B tiene dos caras blancas y cuatro rojas. Se lanza una moneda: si sale cara se juega con el dado A y si sale cruz, con el dado B.

1. Calcular la probabilidad de que salga rojo en un lanzamiento del dado.
2. Si en los dos primero lanzamientos del dado ha salido rojo, ¿cuál es la probabilidad de que en el tercer lanzamiento también salga rojo?

Solución: (a) $1/2$; (b) $3/5$.

Ejercicio 43. Cuatro máquinas A, B, C y D producen, respectivamente, el 40 %, 30 %, 20 % y 10 % del número total de productos de una Laboratorio Farmacéutico. Estas máquinas producen artículos defectuosos en el siguiente porcentaje: 5 %, 4 %, 2 % y 1 %, respectivamente. Seleccionamos al azar un producto. Se pide

1. Probabilidad de que sea defectuoso el producto.
2. Si el producto elegido al azar es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el producto fuera producido por la máquina B?

Solución: 1. 0,037; 2. 0,324.

Ejercicio 44. Un hombre va de pesca. En un bote lleva 3 carnadas de tipo A, 7 carnadas de tipo B y 10 carnadas de tipo C. La mejor carnada es la de A: la probabilidad de pescar un pez con ella es $3/5$. La probabilidad de pescar un pez con las otras carnadas es solo de $2/7$. Mete la mano en el bote y saca una carnada al azar.

1. Probabilidad de que pesque un pez.
2. Si el hombre tiene éxito en la pesca, ¿cual es la probabilidad de que utilizara una carnada tipo B?
3. Si hubiera sacado dos carnadas a la vez, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna fuera de tipo A?

Solución: (a) $\cong 0,3329$; (b) $\cong 0,3004$; (c) $\cong 0,7158$.

Ejercicio 45. Supongamos que los puestos de trabajo se clasifican (de acuerdo con la capacitación requerida) en altos (A), medios (M) y bajos (B). Denotemos las generaciones por subíndices, de tal forma que por ejemplo, A_1 representa el suceso "un padre tiene un puesto de trabajo de tipo A", B_2 representa el suceso "un hijo tiene un puesto de trabajo de tipo B'', etc. Glass y Hall (1954) en un estudio realizado en Inglaterra y Gales obtuvieron los siguientes datos:

	A_2	M_2	B_2
A_1	0.45	0.48	0.07
M_1	0.05	0.7	0.25
B_1	0.01	0.5	0.49

La tabla da probabilidades condicionadas. Por ejemplo, $P(A_2|A_1) = 0{,}45$ denota la probabilidad de que un hijo tenga una ocupación de nivel A, supuesto que el padre también tenía ese nivel. Supongamos que en la generación de los padres el 10 % está en A, el 40 % en M y el 50 % en B.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que un hijo esté en A?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que un padre esté en A, supuesto que su hijo también está?

Solución: 1. 0,07; 2. 0,64.

Ejercicio 46. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico y $S_1, S_2 \in \mathcal{A}$. ¿Son ciertas las igualdades

1. $P(S_1|S_2) = P(S_1^c|S_2^c)$;
2. $P(S_1|S_2) + P(S_1^c|S_2^c) = 1$;
3. $P(S_1|S_2) + P(S_1|S_2^c) = 1$?

Solución: Ninguna de las tres igualdades es cierta. Quizás el alumno puede construir un contraejemplo donde $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ y $S_1^c \cap S_2^c \neq \emptyset$.