



Universidad Nacional  
Autónoma de México



Facultad de Ciencias

# Una introducción a la teoría de gráficas fuertemente regulares

Carlos Fernando Juárez Pacheco

## **Resumen.**

Este proyecto presenta una introducción accesible pero rigurosa a la teoría de gráficas fuertemente regulares desde una perspectiva espectral. Comenzamos revisando conceptos fundamentales de gráficas regulares y herramientas de álgebra lineal, como el teorema de Perron - Frobenius, el interlazado y las particiones equitativas. Posteriormente estudiamos los valores propios de una gráfica y su relación con propiedades estructurales claves. Con estos fundamentos, desarrollamos la teoría de gráficas fuertemente regulares, analizando sus parámetros, sus restricciones algebraicas y combinatorias, así como ejemplos representativos como las gráficas de Paley. Además, se presentan varias propiedades de estos objetos, como primitividad y condiciones de racionalidad.

## **Palabras clave.**

Gráficas fuertemente regulares Gráficas de Paley Matriz de adyacencia Conexidad  
Teorema de Perron - Frobenius Condiciones de racionalidad Mayor valor propio

# Índice

<b>1</b>	<b>Gráficas regulares</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Álgebra Lineal</b>	<b>5</b>
2.2	Teoría de Perron - Frobenius . . . . .	5
2.3	Particiones equitativas . . . . .	7
2.5	Interlazado . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Valores propios y vectores propios de gráficas</b>	<b>8</b>
3.1	El mayor valor propio . . . . .	8
3.2	Interlazado . . . . .	12
3.3	Gráficas regulares . . . . .	12
<b>9</b>	<b>Gráficas fuertemente regulares</b>	<b>17</b>
9.1	Gráficas fuertemente regulares . . . . .	17
9.1.1	Ejemplos simples . . . . .	17
9.1.2	Las gráficas de Paley . . . . .	23
9.1.3	Matriz de adyacencia . . . . .	27
9.1.4	Gráficas imprimitivas . . . . .	30
9.1.5	Parámetros . . . . .	33
9.1.6	Gráficas fuertemente regulares sin triángulos . . . . .	38
	<b>Lista de resultados</b>	<b>44</b>
	<b>Referencias</b>	<b>44</b>

# 1 Gráficas regulares

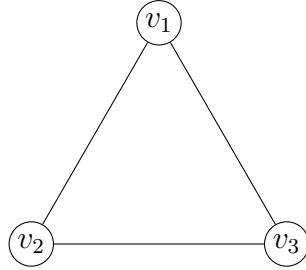
Una gráfica  $\Gamma$  se llama **regular** de grado (o valencia)  $k$  cuando cada uno de sus vértices tiene exactamente  $k$  vecinos. En términos matriciales, si  $A$  es la matriz de adyacencia de  $\Gamma$ , entonces la condición de que cada vértice tenga  $k$  vecinos se traduce en que la suma de cada renglón de  $A$  es  $k$ . Esto se puede escribir como:

$$A\mathbf{1} = k\mathbf{1}$$

o equivalentemente  $AJ = kJ$  cuando  $J = \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ .

**Ejemplo.** Consideremos la gráfica triángulo  $C_3$  (también llamada ciclo de longitud 3), cuyos vértices son  $V = \{v_1, v_2, v_3\}$  y cuyas aristas son  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_2, v_3)$  y  $(v_3, v_1)$ . Su matriz de adyacencia, en el orden de vértices  $(v_1, v_2, v_3)$ , es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Y el vector de puros unos es:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$A\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \mathbf{1}.$$

Como cada entrada de  $A\mathbf{1}$  es 2, concluimos que cada vértice tiene exactamente dos vecinos y por lo tanto el triángulo es una gráfica 2 - regular, es decir, se cumple  $A\mathbf{1} = k\mathbf{1}$  con  $k = 2$ .

Si denotamos por  $J$  la matriz de puros unos:

$$J = \mathbf{1}\mathbf{1}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces:

$$AJ = A(\mathbf{1}\mathbf{1}^T) = (A\mathbf{1})\mathbf{1}^T = (2 \cdot \mathbf{1})\mathbf{1}^T = 2J.$$

Por lo tanto también se cumple  $AJ = kJ$  con  $k = 2$ .

Si  $\Gamma$  es una gráfica regular de grado  $k$ , entonces todos los valores propios  $\theta$  de su matriz de adyacencia  $A$  satisfacen la desigualdad  $|\theta| \leq k$ . Esta propiedad se deduce de manera sencilla a partir de la estructura uniforme de la gráfica. Como  $\Gamma$  es  $k$  - regular, cada renglón de  $A$  tiene suma igual a  $k$ , de modo que el vector de puros unos  $\mathbf{1}$  es un vector propio de  $A$  con valor

propio  $k$ , y por lo tanto  $k$  es el mayor valor propio en módulo que podemos esperar.

Para ver que ningún otro valor propio puede tener módulo mayor que  $k$ , consideremos un número real  $t$  tal que  $|t| > k$ . Entonces, en la matriz  $tI - A$ , cada renglón tiene entrada diagonal  $t$  y las demás entradas dadas por los elementos correspondientes de  $-A$ . Como la suma de los valores absolutos de las entradas no diagonales en cada renglón de  $A$  es exactamente  $k$ , se cumple:

$$|t| > k = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

para todo renglón  $i$ . De este modo,  $tI - A$  es estrictamente diagonalmente dominante y, por el criterio de dominancia diagonal, resulta ser no singular.

Sin embargo, si  $t$  fuera un valor propio de  $A$ , existiría un vector no nulo  $x$  tal que  $(tI - A)x = 0$ , lo que implicaría que  $tI - A$  es singular. Estos nos lleva a una contradicción que nos muestra que ningún número real  $t$  con  $|t| > k$  puede ser un valor propio de  $A$ , y en consecuencia, todos los valores propios de la matriz de adyacencia de una gráfica regular de grado  $k$  están acotados en módulo por  $k$ .

**Ejemplo.** Podemos ver esta propiedad con un caso simple como el triángulo  $C_3$ . Ya vimos que esta gráfica es 2 - regular. El resultado anterior nos dice que todos los valores propios de  $A$ , su matriz de adyacencia, deben satisfacer  $|\theta| \leq 2$ . Para ilustrar esto, tomemos un número real más grande que  $k$ , por ejemplo  $t = 3$ , y veamos como se comporta la matriz  $3I - A$ :

$$3I - A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Notemos que en el primer renglón, el coeficiente de la variable principal es  $|3| = 3$  y la suma de los valores absolutos de los otros dos coeficientes es  $|-1| + |-1| = 2$ , por lo que  $3 > 2$ , lo cual sucede en los otros dos renglones. Es decir, en cada renglón la entrada diagonal “pesa” más que la suma de las entradas no diagonales. Dicho de otra forma,  $3I - A$  es estrictamente diagonalmente dominante.

Por el criterio de dominancia diagonal, esto implica que el único vector  $x$  que satisface la igualdad  $(3I - A)x = 0$  es el vector nulo, de modo que  $3I - A$  es no singular. Pero si 3 fuera un valor propio de  $A$ , debería existir un vector no nulo  $x$ , tal que,  $Ax = 3x$  si y solo si  $(3I - A)x = 0$ , lo cual contradice la no singularidad de  $3I - A$ , por lo que podemos concluir que 3 no puede ser valor propio de  $A$ .

Este razonamiento no depende de que hayamos elegido el número 3 en particular, sino que, para cualquier  $t$  con  $|t| > 2$ , la matriz  $tI - A$  seguirá siendo estrictamente diagonalmente dominante y, por tanto, invertible.

Si  $\Gamma$  es regular de grado  $k$ , entonces su matriz de Laplace se define como  $L = D - A$ , donde  $D$  es la matriz diagonal de grados y  $A$  la matriz de adyacencia. En el caso regular, todos los grados son iguales a  $k$ , de modo que  $D = kI$ , y por lo tanto,  $L = D - A = kI - A$ .

Esta identidad permite relacionar directamente el espectro de  $A$  con el espectro de  $L$ . Supongamos que  $\Gamma$  tiene valores propios (ordinarios) de la matriz de adyacencia:

$$k = \theta_1 \geq \theta_2 \geq \cdots \geq \theta_n$$

y valores propios de Laplace:

$$0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n.$$

Si  $x$  es un vector propio de  $L$  con valor propio  $\mu_i$ , entonces:

$$Lx = \mu_i x \iff (kI - A)x = \mu_i x \iff Ax = (k - \mu_i)x.$$

Es decir,  $x$  también es un vector propio de  $A$  con valor propio  $\theta_i = k - \mu_i$ . De este modo, los valores propios de  $A$  y de  $L$  están relacionados por:

$$\theta_i = k - \mu_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

En particular el mayor valor propio de  $A$  es  $k$  (correspondiente a  $\mu_1 = 0$ ).

Un razonamiento análogo se aplica a la matriz  $Q = kI + A$ . Si  $Ax = \theta_i x$ , entonces:

$$Qx = (kI + A)x = (k + \theta_i)x,$$

de modo que los valores propios de  $Q$  son simplemente los de  $A$  desplazados en  $k$ .

En particular, como  $\theta_1 = k$ , el espectro de  $Q$  está dado por:

$$2k, k + \theta_2, \dots, k + \theta_n.$$

**Ejemplo.** Consideremos de nuevo el triángulo  $C_3$ . Para calcular los **valores propios** de  $A$  podemos hacerlo a través del polinomio característico y llegar a que estos son  $\theta_1 = 2$ ,  $\theta_2 = -1$  y  $\theta_3 = -1$ . El valor propio dominante es precisamente  $k = 2$ , asociado al vector de puros unos.

Por otro lado, como la gráfica es 2 - regular, entonces, la **matriz de Laplace** es:

$$L = kI - A = 2I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

y los valores propios de  $L$  resultan ser  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = 3$  y  $\mu_3 = 3$ .

Y podemos ver claramente la relación  $\theta_i = k - \mu_i, i = 1, 2, 3$ , pues:

$$2 = 2 - 0, \quad -1 = 2 - 3, \quad -1 = 2 - 3.$$

Por último, consideremos la matriz  $Q$  dada por  $Q = kI + A$ :

$$Q = 2I + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como cada valor propio de  $Q$  es  $k + \theta_i$ , obtenemos:

$$k + \theta_1 = 2 + 2 = 4, \quad k + \theta_2 = 2 + (-1) = 1, \quad k + \theta_3 = 2 + (-1) = 1.$$

Es decir, los valores propios de  $Q$  son 4, 1, 1, que coinciden con la descripción de que el primero es  $2k = 4$ , y los restantes son  $k + \theta_2$  y  $k + \theta_3$ .

## 2 Álgebra Lineal

### 2.2 Teoría de Perron - Frobenius

Sea  $T$  una matriz real  $n \times n$  con entradas no negativas. Decimos que  $T$  es **primitiva** si existe algún entero  $k \geq 1$  tal que  $T^k > 0$ , es decir, que todas las entradas de la matriz  $T^k$  son estrictamente positivas.

Por otra parte, decimos que  $T$  es **irreducible** si para todos los índices  $i, j$  existe un entero  $k \geq 1$  tal que  $(T^k)_{ij} > 0$ . Esto equivale a decir que, si asociamos a  $T$  una gráfica dirigida cuyos vértices son  $\{1, \dots, n\}$  y donde dibujamos una flecha  $i \rightarrow j$  siempre que  $t_{ij} > 0$ , entonces **desde cualquier vértice se puede llegar a cualquier otro** siguiendo alguna ruta dirigida.

En esta notación, para una matriz (o vector)  $A$ , escribir  $A > 0$  (resp.  $A \geq 0$ ) significa que todas sus entradas son positivas (resp. no negativas).

**Ejemplo.** Consideremos la matriz:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Todas sus entradas son no negativas, por lo que  $T \geq 0$ . Si calculamos el cuadrado de  $T$  obtenemos

$$T^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

y ahora todas las entradas son estrictamente positivas, es decir,  $T^2 > 0$ , de modo que  $T$  es una matriz **primitiva** con  $k = 2$ .

Aquí escogimos  $T$  como la matriz de adyacencia del triángulo no dirigido  $C_3$ : hay aristas entre 1 y 2, entre 2 y 3, y entre 3 y 1. Las entradas de  $T^2$  cuentan el número de caminos de longitud 2 entre pares de vértices, y el hecho de que  $T^2 > 0$  refleja que, a lo más después de dos pasos, se puede ir de cualquier vértice a cualquier otro. Esto muestra a la vez que  $T$  es **irreducible** y **primitiva**.

**Contraejemplo. (Matriz irreducible pero no primitiva).** Consideremos ahora la matriz:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Todas sus entradas son no negativas, así que  $T \geq 0$ . Vemos que desde cualquier vértice se puede llegar al otro, por tanto,  $T$  es **irreducible**.

Sin embargo, si calculamos potencias de  $T$  obtenemos:

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \quad T^3 = T^2 T = T, \quad T^4 = T^2 T^2 = I,$$

y en general:

$$T^{2m} = I, \quad T^{2m+1} = T, \quad m \geq 0.$$

En las potencias pares aparece siempre un cero fuera de la diagonal, y en las potencias impares aparece siempre un cero en la diagonal. Por lo tanto, **ninguna** potencia  $T^k$  tiene todas sus entradas estrictamente positivas, es decir, no existe  $k$  tal que  $T^k > 0$ .

Concluimos que esta matriz  $T$  es **irreducible** pero **no primitiva**. La gráfica dirigida correspondiente es un ciclo dirigido de longitud 2, y la razón por la que no es primitiva es que la longitud de todos los ciclos es múltiplo de 2, de modo que nunca se mezclan paridades al contar caminos.

La matriz  $T = (t_{ij})$  es **irreducible** si y sólo si la gráfica dirigida  $\Gamma_T$  con vértices  $\{1, \dots, n\}$  y aristas  $(i, j)$  siempre que  $t_{ij} > 0$ , es fuertemente conexa, es decir,  $T$  es irreducible exactamente cuando, a partir de cualquier vértice de la gráfica dirigida asociada, es posible alcanzar cualquier otro vértice siguiendo una secuencia de aristas dirigidas.

Recordemos que una gráfica dirigida  $(X, E)$  es **fuertemente conexa** si para cualesquiera vértices  $x, y \in X$  existe un camino dirigido de  $x$  a  $y$ , es decir, una sucesión de vértices  $x_0 = x, x_1, \dots, x_m = y$  tales que  $(x_{i-1}, x_i) \in E$  para todo  $1 \leq i \leq m$ . En este contexto, la conectividad fuerte asegura que ninguna parte de la gráfica está aislada de lo demás.

Notemos que, si  $T$  es irreducible, entonces  $I + T$  es primitiva. Esto pasa porque al añadir la identidad incorporamos bucles en todos los vértices de  $\Gamma_T$ , lo que provoca que todos los ciclos de la gráfica dirigida asociada a  $I + T$  tengan longitud arbitraria a partir de un cierto punto. Esto elimina posibles restricciones de paridad y garantiza que existe un entero  $k$  para el cual  $(I + T)^k > 0$ , es decir, que todas las entradas de  $(I + T)^k$  son estrictamente positivas. Esta observación es útil porque permite construir matricialmente un ejemplo primitivo a partir de cualquier matriz irreducible, sin necesidad de analizar directamente las potencias de  $T$ .

El **periodo**  $d$  de una matriz irreducible  $T$  se define como el máximo común divisor de los enteros  $k \geq 1$  tales que  $(T^k)_{ii} > 0$ . Dicho de otro modo, el periodo registra las posibles longitudes de ciclos de la gráfica dirigida asociada que pasan por un mismo vértice. Este número no depende de la elección del índice  $i$ , pues, para una matriz irreducible, todos los vértices comparten el mismo conjunto aritmético de longitudes posibles de ciclos, y por lo tanto el mismo periodo.

**Ejemplo.** Para ilustrar la afirmación de que, si  $T$  es irreducible, entonces  $I + T$  es primitiva consideremos ahora la matriz:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que corresponde al ciclo de longitud 2. La gráfica asociada es fuertemente conexa, pues desde cualquier vértice se puede llegar al otro, por tanto,  $S$  es irreducible.

Sin embargo, las potencias de  $S$  están dadas por:

$$S^{2m} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{2m+1} = S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que:

$$(S^{2m})_{11} > 0, \quad (S^{2m})_{22} > 0, \quad (S^{2m+1})_{11} = 0, \quad (S^{2m+1})_{22} = 0.$$

Es decir, sólo existen ciclos de longitud par, y nunca aparece una potencia donde todas las entradas sean estrictamente positivas. El máximo común divisor de los  $k$  tales que  $(S^k)_{ii} > 0$  es  $d = \text{MCD}\{2, 4, 6, \dots\} = 2$ . Por lo tanto, el periodo de  $S$  es 2 y  $S$  es **no primitiva**.

Ahora, calculamos:

$$I + S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz ya es estrictamente positiva, es decir,  $(I + S) > 0$ , de modo que es **primitiva** con  $k = 1$ .

**Teorema 2.2.1.** Sea  $T \geq 0$  irreducible. Entonces existe un número real positivo (único)  $\theta_0$  con las siguientes propiedades:

- i. Existe un vector real  $x_0 > 0$  tal que  $Tx_0 = \theta_0 x_0$ .
- ii.  $\theta_0$  tiene multiplicidad geométrica y algebraica igual a 1.
- iii. Para cada valor propio  $\theta$  de  $T$ , se cumple  $|\theta| \leq \theta_0$ . Si  $T$  es primitiva, entonces  $|\theta| = \theta_0$  implica  $\theta = \theta_0$ . En general, si  $T$  tiene periodo  $d$ , entonces posee exactamente  $d$  valores propios con  $|\theta| = \theta_0$ , a saber  $\theta = \theta_0 e^{2\pi i j/d}$  para  $j = 0, 1, \dots, d-1$ . Todo el espectro de  $T$  es invariante bajo rotaciones del plano complejo por un ángulo  $2\pi/d$  alrededor del origen.
- iv. Todo vector propio izquierdo o derecho no negativo de  $T$  tiene valor propio  $\theta_0$ . Si  $t \in \mathbb{R}$  y  $x \geq 0$ ,  $x \neq 0$ , entonces:
  - Si  $Tx \leq tx$ , entonces  $x > 0$  y  $t \geq \theta_0$ , además,  $t = \theta_0$  si y sólo si  $Tx = tx$ .
  - Si  $Tx \geq tx$ , entonces  $t \leq \theta_0$ , además,  $t = \theta_0$  si y sólo si  $Tx = tx$ .
- v. Si  $0 \leq S \leq T$  o si  $S$  es un menor principal de  $T$ , y  $S$  tiene un valor propio  $\sigma$ , entonces  $|\sigma| \leq \theta_0$ . Si  $|\sigma| = \theta_0$ , entonces  $S = T$ .
- vi. Sea  $S$  una matriz compleja y  $|S|$  la matriz cuyas entradas son  $|S|_{ij} = |S_{ij}|$ . Si  $|S| \leq T$  y  $S$  posee un valor propio  $\sigma$ , entonces  $|\sigma| \leq \theta_0$ . Si además se da  $|\sigma| = \theta_0$ , entonces  $|S| = T$ , y existen una matriz diagonal  $E$  con entradas de valor absoluto 1 y una constante  $c$  con  $|c| = 1$  tales que  $S = cETE^{-1}$ .

## 2.3 Particiones equitativas

Supongamos que  $A$  es una matriz real simétrica cuyas filas y columnas están indexadas por  $X = \{1, \dots, n\}$ . Sea  $\{X_1, \dots, X_m\}$  una partición de  $X$ . La **matriz característica**  $S$  es la matriz  $n \times m$  cuya  $j$ -ésima columna es el vector característico de  $X_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ).

Definamos  $n_i = |X_i|$  y  $K = \text{diag}(n_1, \dots, n_m)$ . Sea  $A$  particionada conforme a  $\{X_1, \dots, X_m\}$ , es decir,

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,m} \end{bmatrix},$$

donde  $A_{i,j}$  denota la submatriz (bloque) de  $A$  formada por las filas en  $X_i$  y las columnas en  $X_j$ .

Sea  $b_{i,j}$  el promedio de las sumas por renglón de  $A_{i,j}$ . Entonces, la matriz  $B = (b_{i,j})$  se denomina la **matriz cociente** de  $A$  con respecto a la partición dada. Se tiene fácilmente que:

$$KB = S^\top AS, \quad S^\top S = K.$$

Si la suma por renglón de cada bloque  $A_{i,j}$  es constante entonces la partición se llama **equitativa** (o **regular**), y se cumple  $A_{i,j}\mathbf{1} = b_{i,j}\mathbf{1}$  para  $i, j = 0, \dots, d$ , por lo que  $AS = SB$ .

## 2.5 Interlazado

Consideremos dos sucesiones de números reales,  $\theta_1 \geq \dots \geq \theta_n$  y  $\eta_1 \geq \dots \geq \eta_m$ , con  $m < n$ . La segunda sucesión se dice que **interlaza** a la primera cuando:

$$\theta_i \geq \eta_i \geq \theta_{n-m+i} \quad \text{para } i = 1, \dots, m.$$

El interlazado es **estricto** si existe un entero  $k \in [0, m]$ , tal que:

$$\theta_i = \eta_i \text{ para } 1 \leq i \leq k, \quad \theta_{n-m+i} = \eta_i \text{ para } k+1 \leq i \leq m.$$

Si  $m = n - 1$ , las desigualdades de interlazado se vuelven:

$$\theta_1 \geq \eta_1 \geq \theta_2 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_m \geq \theta_n,$$

lo cual aclara el nombre.

**Corolario 2.5.2.** Si  $B$  es una submatriz principal de una matriz simétrica  $A$ , entonces los valores propios de  $B$  se interlanzan con los valores propios de  $A$ .

El teorema requiere que las columnas de  $S$  sean ortonormales. Si se tiene una situación con vectores ortogonales pero no necesariamente ortonormales, se requiere una cierta normalización.

**Corolario 2.5.4.** Sea  $C$  la **matriz cociente** de una matriz simétrica  $A$  cuyas filas y columnas están particionadas según una partición  $\{X_1, \dots, X_m\}$ .

- i. Los valores propios de  $C$  interlanzan los valores propios de  $A$ .
- ii. Si el interlazado es estricto, entonces la partición es equitativa.

## 3 Valores propios y vectores propios de gráficas

### 3.1 El mayor valor propio

El mayor valor propio de una gráfica también se conoce como su **radio espectral** o **índice**. La información básica sobre el mayor valor propio de una gráfica (posiblemente dirigida) es proporcionada por el teorema de Perron - Frobenius, es por ello que, durante la demostración del siguiente teorema estaremos citándolo.

**Proposición 3.1.1.** Cada gráfica  $\Gamma$  tiene un valor propio real  $\theta_0$  con vector propio real no negativo correspondiente tal que para cada valor propio  $\theta$  se cumple  $|\theta| \leq \theta_0$ . El valor  $\theta_0(\Gamma)$  no aumenta cuando se eliminan vértices o aristas de  $\Gamma$ . Supongamos que  $\Gamma$  es fuertemente conexa. Entonces:

- i.  $\theta_0$  tiene multiplicidad 1.
- ii. Si  $\Gamma$  es primitiva (fuertemente conexa, y tal que no todos sus ciclos tienen longitud múltiplo de un entero  $d > 1$ ), entonces  $|\theta| < \theta_0$  para todos los valores propios  $\theta$  distintos de  $\theta_0$ .
- iii. El valor  $\theta_0(\Gamma)$  disminuye cuando se eliminan vértices o aristas de  $\Gamma$ .

**Dem:** Sea  $A(\Gamma)$  la matriz de adyacencia de  $\Gamma$ . Todas sus entradas son 0 o 1, de modo que  $A \geq 0$ . Denotamos por  $\theta_0(A)$  al radio espectral de  $A$ .

Por el Teorema 2.2.1 (i) (aplicado a la matriz de adyacencia  $A(\Gamma)$ , que es no negativa y es irreducible cuando  $\Gamma$  es fuertemente conexa, existe un valor propio real positivo  $\theta_0(\Gamma)$  con un vector propio real no negativo correspondiente.

Además, por el Teorema 2.2.1 (iii), todo valor propio  $\theta$  de  $A(\Gamma)$  satisface  $|\theta| \leq \theta_0(\Gamma)$ .

Con estas propiedades establecidas, basta ahora demostrar las afirmaciones (i), (ii) y (iii) de este teorema 3.1.1.

**i)** Supongamos ahora que  $\Gamma$  es fuertemente conexa. Entonces la gráfica dirigida asociada a  $A$  es fuertemente conexa, y por el Teorema 2.2.1, esto equivale a que  $A$  sea **irreducible**.

El inciso (i) de dicho teorema nos da de nuevo la existencia de un vector propio  $x_0 > 0$  con  $Ax_0 = \theta_0 x_0$ , donde  $\theta_0 = \theta_0(\Gamma)$ . El inciso (ii) afirma que  $\theta_0$  tiene multiplicidad geométrica y algebraica 1. Por lo tanto, cuando  $\Gamma$  es fuertemente conexa,  $\theta_0(\Gamma)$  tiene multiplicidad 1.

**ii)** Si además  $\Gamma$  es primitiva, esto significa que  $A$  es una matriz primitiva (irreducible y de periodo  $d = 1$ ). El inciso (iii) del Teorema 2.2.1 dice entonces que para cualquier valor propio  $\theta$  de  $A$  se tiene  $|\theta| \leq \theta_0(\Gamma)$ , y que si  $A$  es primitiva la igualdad  $|\theta| = \theta_0(\Gamma)$  sólo es posible para  $\theta = \theta_0(\Gamma)$ . En consecuencia, para todo valor propio  $\theta \neq \theta_0(\Gamma)$  se cumple  $|\theta| < \theta_0(\Gamma)$ .

**iii)** Sea  $\Gamma'$  una subgráfica de  $\Gamma$  obtenida eliminando vértices o aristas y sea  $A' = A(\Gamma')$  su matriz de adyacencia. Notemos que se presentan dos casos:

**Eliminamos vértices.** Supongamos que  $\Gamma'$  es la subgráfica inducida por un subconjunto no vacío de vértices. Entonces  $A'$  se obtiene de  $A$  eliminando las filas y columnas correspondientes a los vértices suprimidos, es decir,  $A'$  es una **submatriz principal** de  $A$ . El inciso (v) del Teorema 2.2.1 aplicado a  $T = A$  y  $S = A'$  afirma que todo valor propio  $\sigma$  de  $A'$  satisface  $|\sigma| \leq \theta_0(\Gamma)$ , y que si existe alguno con  $|\sigma| = \theta_0(\Gamma)$  entonces necesariamente  $A' = A$ . Como aquí  $A' \neq A$ , el radio espectral de  $A'$  verifica  $\theta_0(A') < \theta_0(\Gamma)$ .

**Eliminamos solo aristas.** Si  $\Gamma'$  tiene los mismos vértices que  $\Gamma$  pero algunas aristas se han eliminado, entonces  $A'$  tiene el mismo tamaño que  $A$  y sus entradas satisfacen que  $0 \leq A' \leq A$  con  $A' \neq A$ , pues algunas entradas 1 de  $A$  se han reemplazado por 0 en  $A'$ . De nuevo por el inciso (v) del Teorema 2.2.1, cualquier valor propio  $\sigma$  de  $A'$  cumple  $|\sigma| \leq \theta_0(\Gamma)$ , y la igualdad  $|\sigma| = \theta_0(\Gamma)$  sólo puede ocurrir si  $A' = A$ , lo cual no es el caso. Por tanto, el radio espectral de  $A'$  es estrictamente menor que el de  $A$ :  $\theta_0(\Gamma') < \theta_0(\Gamma)$ .

De ambos casos se concluye que  $\theta_0(\Gamma') < \theta_0(\Gamma)$ , lo que demuestra (iii), y así, los tres incisos. ■

Ahora supongamos que  $\Gamma$  es no dirigida. Por el teorema de Perron - Frobenius y por interlazado, obtenemos cotas superior e inferior para el mayor valor propio de una gráfica conexa. ( Nótese que  $A$  es irreducible si y solo si  $\Gamma$  es conexa).

**Proposición 3.1.2.** Sea  $\Gamma$  una gráfica conexa con mayor valor propio  $\theta_1$ . Si  $\Gamma$  es regular de grado  $k$ , entonces  $\theta_1 = k$ . De lo contrario, se cumple que  $k_{\min} < \bar{k} < \theta_1 < k_{\max}$ , donde  $k_{\min}$ ,  $k_{\max}$  y  $\bar{k}$  son el grado mínimo, máximo y promedio, respectivamente.

**Dem:** Sea  $A$  la matriz de adyacencia de  $\Gamma$ , y denotemos por  $k_i$  el grado del vértice  $i$ . Escribimos

$$k_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} k_i, \quad k_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} k_i, \quad \bar{k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i,$$

y sea  $\theta_1$  el mayor valor propio de  $A$ .

Si  $\Gamma$  es regular de grado  $k$ , entonces  $A\mathbf{1} = k\mathbf{1}$ , de modo que  $k$  es un valor propio de  $A$  con vector propio  $\mathbf{1}$ . Como además todos los valores propios de  $A$  satisfacen  $|\theta| \leq k$  (visto en la sección 1), se sigue que el mayor valor propio cumple  $\theta_1 = k$ , y queda probado el primer caso.

Supongamos ahora que  $\Gamma$  no es regular.

**Cota superior**  $\theta_1 < k_{\max}$ . Sea  $\mathbf{1}$  el vector con todas sus entradas iguales a 1. La  $i$ -ésima coordenada de  $A\mathbf{1}$  es justamente el grado  $k_i$  del vértice  $i$ , de modo que:

$$(A\mathbf{1})_i = k_i \leq k_{\max} \text{ para todo } i$$

es decir,  $A\mathbf{1} \leq k_{\max}\mathbf{1}$  (coordenada a coordenada).

Como  $\Gamma$  es conexa,  $A$  es irreducible y no negativa. Aplicando el Teorema 2.2.1 (iv) con  $T = A$ ,  $x = \mathbf{1}$  y  $t = k_{\max}$ , obtenemos:

$$\theta_1 \leq k_{\max},$$

donde la igualdad se da si y sólo si  $A\mathbf{1} = k_{\max}\mathbf{1}$ . Esto último equivale a que  $k_i = k_{\max}$  para todo  $i$ , es decir, a que  $\Gamma$  sea regular de grado  $k_{\max} = \theta_1$ . Como suponemos que  $\Gamma$  no es regular, la desigualdad es estricta:

$$\theta_1 < k_{\max}.$$

**Cota inferior**  $\bar{k} < \theta_1$ . Consideremos la partición trivial del conjunto de vértices  $\{V(\Gamma)\}$ , formada por un solo bloque. La **matriz cociente** de  $A$  con respecto a esta partición es una matriz de tamaño  $1 \times 1$ , cuyo único coeficiente  $b_{1,1}$  es el promedio de las sumas por renglón del bloque  $A$ , esto es, el grado promedio  $\bar{k}$ . Por el Corolario 2.5.4 (i), el valor propio de  $C$  interlaza a los valores propios de  $A$ . Esto significa que:

$$\theta_1 \geq \bar{k} \geq \theta_n,$$

y en particular  $\bar{k} \leq \theta_1$ .

Además, por la parte (ii) del mismo Corolario, si el interlazado es **estricto**, entonces la partición es equitativa. En el caso de una partición con un solo bloque, esto ocurre precisamente cuando todas las sumas de renglón de  $A$  son iguales, es decir, cuando todos los vértices tienen el mismo grado. Por lo tanto,  $\bar{k} = \theta_1$  si y solo si  $\Gamma$  es regular.

Como estamos en el caso no regular, obtenemos:

$$\bar{k} < \theta_1.$$

**Relación con  $k_{\min}$ .** Por definición del mínimo y del promedio,

$$k_{\min} \leq \bar{k} \leq k_{\max}.$$

Si no todos los grados son iguales (es decir, si  $\Gamma$  no es regular), las desigualdades anteriores son estrictas:

$$k_{\min} < \bar{k} < k_{\max}.$$

Juntando todo lo anterior, en el caso no regular tenemos  $k_{\min} < \bar{k} < \theta_1 < k_{\max}$ . ■

Para gráficas no necesariamente conexas, tenemos  $\bar{k} \leq \theta_1 \leq k_{\max}$ , y  $\bar{k} = \theta_1$  si y solo si  $\Gamma$  es regular. Si  $\theta_1 = k_{\max}$ , entonces solo sabemos que  $\Gamma$  tiene un componente regular con ese grado, pero  $\Gamma$  no necesita ser regular en su totalidad.

Como ya se mencionó en la Proposición 3.1.1, el mayor valor propio de una gráfica conexa disminuye estrictamente cuando se elimina una arista.

**Ejemplo.** Consideremos la estrella  $K_{1,3}$ . Denotemos por  $v_0$  al vértice central y por  $v_1, v_2, v_3$  a las hojas. Entonces, el grado de  $v_0$  es 3 y el de las hojas es 1.

En consecuencia, el grado mínimo, máximo y promedio son:

$$k_{\min} = 1, \quad k_{\max} = 3, \quad \bar{k} = \frac{3+1+1+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Enumerando los vértices como  $v_0, v_1, v_2, v_3$ , la matriz de adyacencia es:

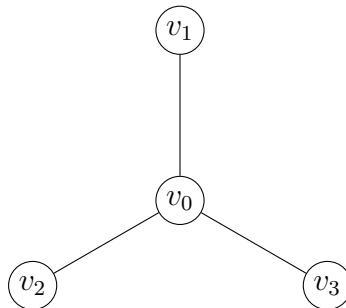
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que una estrella tiene valores propios  $K_{1,3}$  es  $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0, 0\}$ , o sea, el espectro es  $\{\sqrt{3}^1, -\sqrt{3}^1, 0^2\}$ , de modo que el mayor valor propio es  $\theta_1 = \sqrt{3} \approx 1.732$ .

Con todo lo anterior, se verifica la cadena de desigualdades de la proposición 3.1.2:

$$k_{\min} < \bar{k} < \theta_1 < k_{\max} \iff 1 < \frac{3}{2} < \sqrt{3} < 3.$$

Nótese que  $K_{1,3}$  no es regular, pues no todos los grados coinciden, por lo que estamos en el caso no regular de la proposición.



## 3.2 Interlazado

Por el teorema 2.2.1, el mayor valor propio de una gráfica conexa disminuye cuando se elimina una arista o un vértice. El interlazado también proporciona información acerca de lo que sucede con los demás valores propios.

Las figuras para  $A$  y  $L$  difieren. Los valores propios de la matriz de adyacencia  $A$  muestran un buen comportamiento de interlazado cuando se elimina un vértice pero no cuando se elimina una arista. Los valores propios de Laplace se comportan bien en ambos casos. Para  $A$ , un valor propio puede tanto aumentar como disminuir cuando se elimina una arista. Para  $L$ , no puede aumentar.

**Proposición 3.2.1.** Sea  $\Gamma$  una gráfica y  $\Delta$  una subgráfica inducida. Entonces los valores propios de  $\Delta$  se interlanzan con los de  $\Gamma$ .

**Dem:** Denotemos por  $A$  la matriz de adyacencia de  $\Gamma$  y por  $B$  la matriz de adyacencia de  $\Delta$ .

Puesto que  $\Delta$  es una subgráfica inducida, sus vértices son un subconjunto de los vértices de  $\Gamma$  y, por definición, dos vértices de  $\Delta$  son adyacentes en  $\Delta$  si y solo si ya lo eran en  $\Gamma$ . Más precisamente, existe un subconjunto  $W \subseteq V(\Gamma)$  con  $|W| = m$  tal que  $V(\Delta) = W$  y  $\{u, v\} \in E(\Delta)$  si y solo si  $\{u, v\} \in E(\Gamma)$  con  $u, v \in W$ . Reordenemos, si es necesario, los vértices de  $\Gamma$  de modo que los vértices de  $\Delta$  ocupen las primeras  $m$  posiciones:

$$V(\Gamma) = \{1, \dots, m, m+1, \dots, n\}, \quad V(\Delta) = \{1, \dots, m\}.$$

Con este orden, la matriz de adyacencia  $A$  de  $\Gamma$  tiene la forma por bloques  $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix}$ .

El bloque superior izquierdo es exactamente la matriz de adyacencia  $B$  de la subgráfica inducida  $\Delta$ . En otras palabras,  $B$  se obtiene de  $A$  eliminando las últimas  $n-m$  filas y las últimas  $n-m$  columnas, es decir,  $B$  es una **submatriz principal** de  $A$ .

Sean ahora,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ , el conjunto de valores propios de  $A$ , y  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m$  el conjunto de valores propios de  $B$ , ambos ordenados en forma no creciente.  $A$  es una matriz real simétrica y  $B$  es una submatriz principal de  $A$  y por el Corolario 2.5.2, los valores propios de  $B$  se intercalan con los de  $A$ , es decir,

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{n-m+i}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Lo cual es precisamente la afirmación de interlazado que queríamos demostrar. ■

## 3.3 Gráficas regulares

Es posible determinar a partir del espectro si una gráfica es regular.

**Proposición 3.3.1.** Sea  $\Gamma$  una gráfica con valores propios  $k = \theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_n$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i.  $\Gamma$  es regular (de grado  $k$ ).

ii.  $AJ = kJ$ .

iii.  $\sum_{i=1}^n \theta_i^2 = kn$ .

**Dem:** Ya hemos visto en la sección 1 que (i) y (ii) son equivalentes, de modo que nos basta probar (i) implica (iii) y (iii) implica (i).

**i  $\Rightarrow$  iii)** Supongamos que  $\Gamma$  es regular de grado  $k$ , y sea  $A$  su matriz de adyacencia. Como  $A$  es simétrica real, se tiene:

$$\sum_{i=1}^n \theta_i^2 = \text{tr}(A^2),$$

pues  $A$  es diagonalizable ortogonalmente y  $\text{tr}(A^2)$  es la suma de los cuadrados de sus valores propios.

Por otra parte, el elemento  $(i, i)$  de  $A^2$  cuenta los caminos de longitud 2 que empiezan y terminan en el vértice  $i$ , y en particular:

$$(A^2)_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ji} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \sum_{j=1}^n a_{ij} = k_i,$$

donde  $k_i$  es el grado del vértice  $i$ .

Si  $\Gamma$  es regular de grado  $k$ , entonces  $k_i = k$  para todo  $i$ , y por lo tanto:

$$\text{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n (A^2)_{ii} = \sum_{i=1}^n k_i = \sum_{i=1}^n k = kn.$$

En consecuencia:

$$\sum_{i=1}^n \theta_i^2 = \text{tr}(A^2) = kn,$$

**iii  $\Rightarrow$  i)** Supongamos ahora que se cumple  $\sum_{i=1}^n \theta_i^2 = kn$ , donde, por notación,  $k = \theta_1$ .

Como antes, para cualquier gráfica se tiene:

$$\sum_{i=1}^n \theta_i^2 = \text{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n (A^2)_{ii} = \sum_{i=1}^n k_i,$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^n \theta_i^2 = \sum_{i=1}^n k_i = \frac{n}{n} \sum_{i=1}^n k_i = n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i = n\bar{k},$$

donde  $\bar{k}$  denota el grado promedio.

De la igualdad  $\sum_{i=1}^n \theta_i^2 = kn$  obtenemos que  $n\bar{k} = kn$ , por lo que,  $\bar{k} = k = \theta_1$ .

Por la Proposición 3.1.2, para una gráfica conexa con mayor valor propio  $\theta_1$  y grados mínimo, máximo y promedio  $k_{\min}$ ,  $k_{\max}$  y  $\bar{k}$ , se cumple que, si la gráfica no es regular, entonces:

$$k_{\min} < \bar{k} < \theta_1 < k_{\max}.$$

Sin embargo, acabamos de ver que  $\bar{k} = \theta_1$ .

Esto contradice las desigualdades estrictas del caso no regular, por lo que necesariamente  $\Gamma$  debe ser regular. Además, como  $\theta_1 = k$ , el grado es precisamente  $k$ , se cumple i.

Con esto quedan demostradas las equivalencias (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) y (i)  $\Leftrightarrow$  (iii), y por lo tanto las tres afirmaciones son equivalentes.  $\blacksquare$

**Ejemplo.** Consideremos nuevamente el ciclo  $C_3$ , una gráfica 2 - regular. En la sección (1) ya verificamos los primeros dos incisos de este teorema. Revisemos (iii):

**(iii) Suma de cuadrados de los valores propios.** El espectro de  $C_3$  es  $\theta_1 = 2, \theta_2 = -1$  y  $\theta_3 = -1$ . Entonces:

$$\sum_{i=1}^3 \theta_i^2 = 2^2 + (-1)^2 + (-1)^2 = 4 + 1 + 1 = 6 = kn = 2 \cdot 3.$$

Así, para la gráfica  $C_3$  se verifican las tres condiciones de la Proposición 3.3.1 de que es regular de grado  $k = 2$ , satisface  $AJ = kJ$  y su espectro cumple  $\sum_{i=1}^n \theta_i^2 = kn$ .

La siguiente caracterización de gráficas regulares conexos fue dada por HOFFMAN [4].

**Proposición 3.3.2.** La gráfica  $\Gamma$  es regular y conexa si y solo si existe un polinomio  $p$  tal que  $J = p(A)$ .

**Dem:** Sea  $A$  la matriz de adyacencia de  $\Gamma$  y  $J$  la matriz de todos unos.

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $\Gamma$  es regular y conexa. Sea  $k$  el grado común de todos los vértices. Sabemos que  $A\mathbf{1} = k\mathbf{1}$  por lo que  $k$  es el mayor valor propio de  $A$ , con vector propio  $\mathbf{1}$ . Denotemos los valores propios de  $A$  por  $k = \theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_n$ .

Como  $\Gamma$  es regular,  $A$  commuta con  $J$  y ambas matrices son simétricas reales. Por lo tanto, pueden diagonalizarse simultáneamente, es decir, que existe una base ortonormal en la cual:

$$A \sim \text{diag}(k, \theta_2, \dots, \theta_n), \quad J \sim \text{diag}(n, 0, \dots, 0).$$

Definamos el polinomio:

$$f(x) = \prod_{i=2}^n (x - \theta_i).$$

Entonces  $f(\theta_i) = 0$  para  $i = 2, \dots, n$ , mientras que  $f(k) \neq 0$  ya que  $k$  es distinto de los demás valores propios (por el teorema 2.2.1).

Por el teorema espectral, al aplicar  $f$  a  $A$  obtenemos:

Si  $A$  es simétrica y  $Av_i = \theta_i v_i$ , entonces para cualquier polinomio  $r$ ,  $r(A)v_i = r(\theta_i)v_i$ . En la base ortonormal que diagonaliza a  $A$  (y a  $J$ ), tenemos:

$$A \sim \text{diag}(k, \theta_2, \dots, \theta_n).$$

Al aplicar el polinomio  $f$  a esa matriz diagonal es simplemente aplicar  $f$  a cada entrada diagonal:

$$f(A) \sim \text{diag}(f(k), f(\theta_2), \dots, f(\theta_n)).$$

Pero por la construcción de  $f$  tenemos que  $f(\theta_i) = 0$  para  $i = 2, \dots, n$ , y que  $f(k) \neq 0$ .

Así que:

$$f(A) \sim \text{diag}(f(k), 0, \dots, 0).$$

Eso quiere decir  $f(A)$  tiene un único valor propio no nulo  $f(k)$  y que su espacio propio no nulo es el mismo que el del vector propio asociado a  $k$  (que es el mismo que el de  $J$ ).

Como  $f(A) \sim \text{diag}(f(k), 0, \dots, 0)$ , la matriz  $f(A)$  es de rango 1 y su espacio propio no nulo está generado por el vector  $\mathbf{1}$ . Del mismo modo,  $J$  es de rango 1 y su imagen también es el subespacio  $\langle \mathbf{1} \rangle$ . Por lo tanto, ambas matrices actúan como un múltiplo escalar sobre  $\mathbf{1}$ , lo cual implica que existe un escalar  $c$  tal que:

$$f(A) = cJ.$$

Para determinar  $c$ , aplicamos ambas matrices al vector  $\mathbf{1}$ :

$$f(A)\mathbf{1} = f(k)\mathbf{1}, \quad J\mathbf{1} = n\mathbf{1}.$$

De la igualdad  $f(A) = cJ$  obtenemos:

$$f(k)\mathbf{1} = f(A)\mathbf{1} = cJ\mathbf{1} = cn\mathbf{1},$$

lo que implica inmediatamente:

$$c = \frac{f(k)}{n}.$$

Por lo tanto:

$$f(A) = \frac{f(k)}{n}J.$$

Definiendo ahora:

$$p(x) = \frac{n}{f(k)}f(x),$$

tenemos que  $p$  es un polinomio y

$$p(A) = \frac{n}{f(k)}f(A) = \frac{n}{f(k)} \cancel{\frac{f(k)}{n}} J = J.$$

Esto muestra que existe un polinomio  $p$  tal que  $J = p(A)$ .

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $J = p(A)$ . Entonces  $J$  conmuta con  $A$ , pues cualquier polinomio en  $A$  conmuta con  $A$ :  $AJ = JA$ .

La entrada  $(i, j)$  de  $AJ$  es:

$$(AJ)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot 1 = \sum_{k=1}^n a_{ik} = k_i,$$

el grado del vértice  $i$ . Por lo tanto, todas las entradas de la fila  $i$  de  $AJ$  son iguales a  $k_i$ .

Análogamente, la entrada  $(i, j)$  de  $JA$  es:

$$(JA)_{ij} = \sum_{k=1}^n 1 \cdot a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{kj} = k_j,$$

el grado del vértice  $j$ , de modo que todas las entradas de la columna  $j$  de  $JA$  son iguales a  $k_j$ .

De la igualdad  $AJ = JA$  se sigue que, para todo  $i, j$ ,

$$k_i = (AJ)_{ij} = (JA)_{ij} = k_j,$$

es decir, todos los vértices tienen el mismo grado. Por ello, concluimos que  $\Gamma$  es regular.

Para ver que  $\Gamma$  es conexa, supongamos por contradicción que no lo es. Entonces, reordenando convenientemente los vértices, podemos escribir  $A$  en forma bloque diagonal

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_t \end{bmatrix},$$

donde cada bloque corresponde a un componente conexo de  $\Gamma$ . Cualquier polinomio  $p(A)$  tiene entonces la misma forma bloque diagonal. Sin embargo,  $J$  tiene todas sus entradas iguales a 1, en particular las entradas fuera de la diagonal de bloques son no nulas. Esto contradice  $J = p(A)$ , de modo que  $\Gamma$  debe ser conexa. ■

**Ejemplo.** Consideremos el cuadrángulo, es decir, el ciclo  $C_4$  con vértices  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  y aristas  $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1)$ . Esta gráfica es 2 - regular y conexa.

Tomando el orden de vértices  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ , su matriz de adyacencia es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Queremos exhibir un polinomio  $p$  tal que  $J = p(A)$ , donde  $J$  es la matriz de todos unos de tamaño  $4 \times 4$ .

Primero calculamos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Consideremos el polinomio:

$$p(x) = x + \frac{1}{2}x^2.$$

Entonces:

$$p(A) = A + \frac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = J.$$

Así, para el cuadrángulo  $C_4$  hemos encontrado explícitamente un polinomio  $p$  tal que  $J = p(A)$ , lo que ilustra la Proposición 3.3.2.

# 9 Gráficas fuertemente regulares

## 9.1 Gráficas fuertemente regulares

Una gráfica (simple, no dirigida y sin lazos) de orden  $v$  se denomina **fuertemente regular** con parámetros  $v, k, \lambda, \mu$  cuando no es completa ni vacía, y además se cumple que:

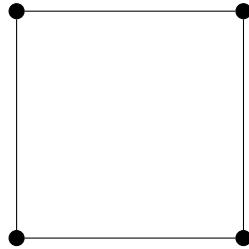
- i. cada vértice es adyacente a  $k$  vértices,
- ii. para cada par de vértices adyacentes existen  $\lambda$  vértices adyacentes a ambos,
- iii. para cada par de vértices no adyacentes existen  $\mu$  vértices adyacentes a ambos.

Requerimos que existan tanto aristas como pares no adyacentes, de modo que los parámetros estén bien definidos.

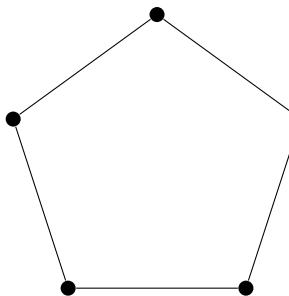
### 9.1.1 Ejemplos simples

Ejemplos simples de gráficas fuertemente regulares:

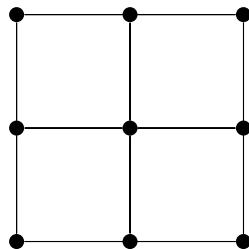
- i. Un cuadrágulo es fuertemente regular con parámetros  $(4, 2, 0, 2)$ .



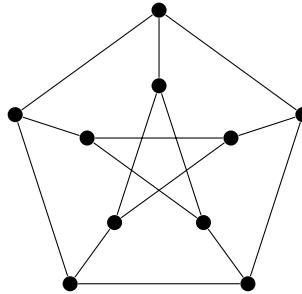
- ii. Un pentágono es fuertemente regular con parámetros  $(5, 2, 0, 1)$ .



- iii. La cuadrícula  $3 \times 3$ , producto cartesiano de dos triángulos, es fuertemente regular con parámetros  $(9, 4, 1, 2)$ .



iv. La gráfica de Petersen es fuertemente regular con parámetros  $(10, 3, 0, 1)$ .



(Cada una de estas gráficas está determinada de manera única por sus parámetros, por lo tanto, si no sabemos como se ve la cuadrícula o la gráfica de Petersen, esto las define.)

Cada uno de estos ejemplos puede generalizarse de diversas maneras. Por ejemplo:

v. Sea  $q = 4t + 1$  una potencia prima. La **gráfica de Paley**  $\text{Paley}(q)$  es la gráfica cuyo conjunto de vértices es el campo finito  $\mathbb{F}_q$ , donde dos vértices son adyacentes cuando difieren en un cuadrado (no nulo).

Esta gráfica es fuertemente regular con parámetros  $(4t + 1, 2t, t - 1, t)$ .

**Ejemplo.** Consideremos el campo finito  $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , con suma y producto tomados módulo 5.

Primero calculamos todos los cuadrados en  $\mathbb{F}_5$ :

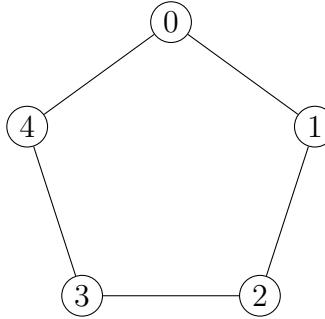
$$\begin{aligned} 0^2 &\equiv 0 \pmod{5}, \\ 1^2 &\equiv 1 \pmod{5}, \\ 2^2 &\equiv 4 \pmod{5}, \\ 3^2 &= 9 \equiv 4 \pmod{5}, \\ 4^2 &= 16 \equiv 1 \pmod{5}. \end{aligned}$$

Por lo que, el conjunto de **cuadrados no nulos** es  $Q = \{1, 4\} \subset \mathbb{F}_5$ .

La gráfica de **Paley(5)** tiene como conjunto de vértices a  $\mathbb{F}_5$ , y dos vértices  $a, b \in \mathbb{F}_5$  son adyacentes si y sólo si la diferencia  $b - a$  es un cuadrado no nulo, es decir,  $a \sim b$  si y solo si  $b - a \in Q = \{1, 4\}$ .

Podemos determinar los vecinos de cada vértice haciendo las cuentas módulo 5:

- Para  $a = 0$ :  $1 - 0 = 1 \in Q$ ,  $4 - 0 = 4 \in Q \Rightarrow N(0) = \{1, 4\}$ .
- Para  $a = 1$ :  $0 - 1 = -1 \equiv 4 \in Q$ ,  $2 - 1 = 1 \in Q \Rightarrow N(1) = \{0, 2\}$ .
- Para  $a = 2$ :  $1 - 2 = -1 \equiv 4 \in Q$ ,  $3 - 2 = 1 \in Q \Rightarrow N(2) = \{1, 3\}$ .
- Para  $a = 3$ :  $2 - 3 = -1 \equiv 4 \in Q$ ,  $4 - 3 = 1 \in Q \Rightarrow N(3) = \{2, 4\}$ .
- Para  $a = 4$ :  $0 - 4 = -4 \equiv 1 \in Q$ ,  $3 - 4 = -1 \equiv 4 \in Q \Rightarrow N(4) = \{0, 3\}$ .



Partiendo de que  $q = 4t + 1$ , entonces,  $t = \frac{q-1}{4}$ . Consideremos varios valores para  $q$ :

**Caso**  $q = 5$ , entonces,  $t = \frac{5-1}{4} = 1$ , por lo que:

$$(v, k, \lambda, \mu) = (4t + 1, 2t, t - 1, t) = (4 \cdot 1 + 1, 2 \cdot 1, 1 - 1, 1) = (5, 2, 0, 1).$$

En este caso **Paley(5)** nos devuelve el pentágono del incisco (ii).

**Caso**  $q = 9$ , entonces,  $t = \frac{9-1}{4} = 2$ , por lo que:

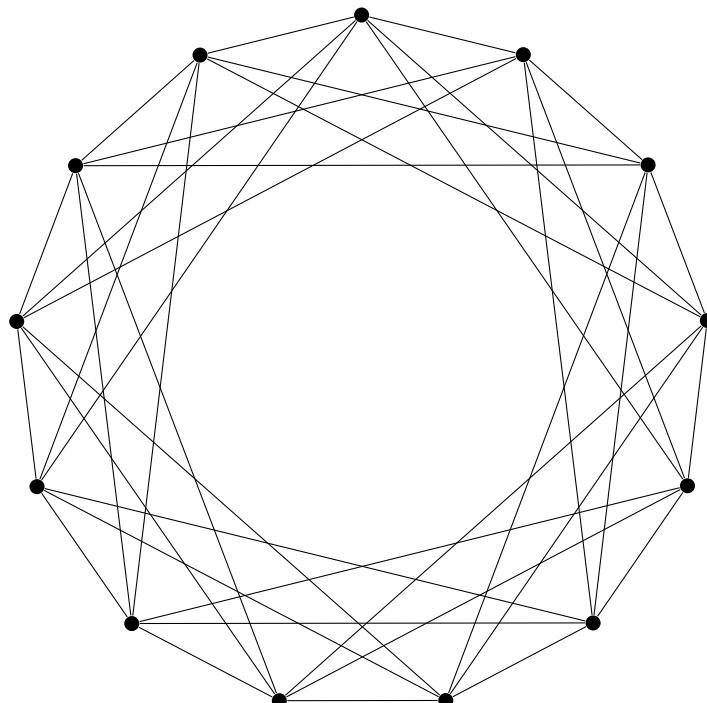
$$(v, k, \lambda, \mu) = (4t + 1, 2t, t - 1, t) = (4 \cdot 2 + 1, 2 \cdot 2, 2 - 1, 2) = (9, 4, 1, 2).$$

Aquí **Paley(9)** nos devuelve la cuadrícula  $3 \times 3$  del inciso (iii).

**Caso**  $q = 13$ , entonces,  $t = \frac{13-1}{4} = 3$ , de modo que:

$$(v, k, \lambda, \mu) = (4t + 1, 2t, t - 1, t) = (4 \cdot 3 + 1, 2 \cdot 3, 3 - 1, 3) = (13, 6, 2, 3).$$

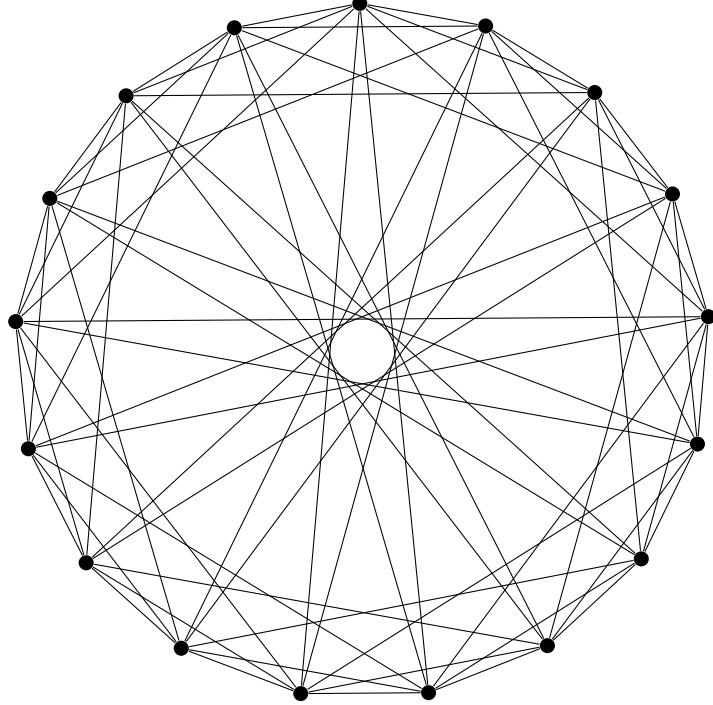
Para  $q = 13$  obtenemos una gráfica fuertemente regular con parámetros  $(13, 6, 2, 3)$ , que es localmente hexagonal (la gráfica inducida por los vecinos de cada vértice es un hexágono).



**Caso**  $q = 17$ , entonces,  $t = \frac{17-1}{4} = 4$ , por lo que:

$$(v, k, \lambda, \mu) = (4t + 1, 2t, t - 1, t) = (4 \cdot 4 + 1, 2 \cdot 4, 4 - 1, 4) = (17, 8, 3, 4).$$

Obtenemos una gráfica fuertemente regular que es localmente un octógono con diagonales.



- vi. La cuadrícula  $m \times m$ , producto cartesiano de dos gráficas completas con  $m$  vértices, es fuertemente regular con parámetros  $(m^2, 2(m-1), m-2, 2)$  (para  $m > 1$ ).

Con  $m = 2$ ,  $(2^2, 2(2-1), 2-2, 2) = (4, 2, 0, 2)$ , recuperamos la gráfica del inciso (i).

Con  $m = 3$ ,  $(3^2, 2(3-1), 3-2, 2) = (9, 4, 1, 2)$ , recuperamos la gráfica del inciso (iii).

- vii. La gráfica multipartita completa  $K_{m \times a}$ , con conjunto de vértices dividido en  $m$  grupos de tamaño  $a$ , donde dos puntos son adyacentes si pertenecen a grupos distintos, es fuertemente regular con parámetros  $(ma, (m-1)a, (m-2)a, (m-1)a)$  (para  $m > 1$  y  $a > 1$ ).

Si consideramos  $m = a = 2$ :  $(v, k, \lambda, \mu) = (2 \cdot 2, (2-1)2, (2-2)2, (2-1)2) = (4, 2, 0, 2)$ , obtenemos nuevamente el ejemplo del inciso (i).

El **complemento** de una gráfica  $\Gamma$  es la gráfica  $\bar{\Gamma}$  con el mismo conjunto de vértices que  $\Gamma$ , donde dos vértices son adyacentes si y solo si no lo son en  $\Gamma$ . Tenemos que el complemento de una gráfica fuertemente regular con parámetros  $(v, k, \lambda, \mu)$  también es fuertemente regular. Veamos como se ven sus parámetros:

- **Grado.** Cada vértice de  $\Gamma$  tiene grado  $k$ , es decir, es adyacente a  $k$  de los otros  $v-1$  vértices. En el complemento, estará adyacente justo a los que no lo son en  $\Gamma$ , por lo que el grado en  $\bar{\Gamma}$  es  $k' = (v-1) - k = v - k - 1$ .

- $\lambda'$  (**adyacentes en  $\bar{\Gamma}$** ). En  $\bar{\Gamma}$ , dos vértices  $x, y$  son adyacentes si y solo si **no** lo son en  $\Gamma$ . Tomemos entonces dos vértices  $x, y$  no adyacentes en  $\Gamma$ . Queremos contar cuántos vértices son adyacentes a ambos en  $\bar{\Gamma}$ , es decir, cuántos vértices no son adyacentes ni a  $x$  ni a  $y$  en  $\Gamma$ .

Consideremos los  $v - 2$  vértices distintos de  $x$  e  $y$  en  $\Gamma$  y clasifiquémoslos según su relación con  $x$  e  $y$ :

- Vértices adyacentes a  $x$  e  $y$ : hay  $\mu$  de ellos (por ser fuertemente regular).
- Vértices adyacentes a  $x$ : de los  $k$  vecinos de  $x$ ,  $\mu$  son comunes con  $y$ , por lo que nos quedan  $k - \mu$ .
- Vértices adyacentes a  $y$ : análogamente,  $k - \mu$ .
- Vértices no adyacentes ni a  $x$  ni a  $y$ : denotémoslo por  $X$ .

Entonces:

$$(v - 2) = \mu + (k - \mu) + (k - \mu) + X = 2k - \mu + X,$$

por lo que:

$$X = v - 2 - (2k - \mu) = v - 2k + \mu - 2 = \lambda'.$$

Estos  $X$  vértices no son adyacentes a  $x$  ni a  $y$  en  $\Gamma$ , así que son adyacentes a ambos en  $\bar{\Gamma}$ .

- $\mu'$  (**no adyacentes en  $\bar{\Gamma}$** ). En  $\bar{\Gamma}$ , dos vértices  $x, y$  no son adyacentes si y solo si sí lo son en  $\Gamma$ . Tomemos ahora  $x, y$  adyacentes en  $\Gamma$ . Buscamos contar los vértices que son adyacentes a ambos en  $\bar{\Gamma}$ , es decir, los que no son adyacentes ni a  $x$  ni a  $y$  en  $\Gamma$ .

De nuevo, consideremos los  $v - 2$  vértices distintos de  $x$  e  $y$  en  $\Gamma$ :

- Vértices adyacentes a  $x$  e  $y$ : hay  $\lambda$  de ellos.
- Vértices adyacentes a  $x$ : de los  $k$  vecinos de  $x$ , uno es  $y$  y  $\lambda$  son comunes, así que hay  $k - 1 - \lambda$ .
- Vértices adyacentes a  $y$ : análogamente,  $k - 1 - \lambda$ .
- Vértices no adyacentes ni a  $x$  ni a  $y$ : denotémoslo por  $Y$ .

Entonces:

$$(v - 2) = \lambda + (k - 1 - \lambda) + (k - 1 - \lambda) + Y = (2k - 2 - \lambda) + Y,$$

y por tanto:

$$Y = v - 2 - (2k - 2 - \lambda) = v - 2k + \lambda = \mu'.$$

Estos  $Y$  vértices no son adyacentes a  $x$  ni a  $y$  en  $\Gamma$ , así que son adyacentes a ambos en  $\bar{\Gamma}$ .

Con esto, llegamos a que el complemento  $\bar{\Gamma}$  es una gráfica fuertemente regular con parámetros:

$$(v, k', \lambda', \mu') = (v, v - k - 1, v - 2k + \mu - 2, v - 2k + \lambda) \quad (\text{Parámetros } \bar{\Gamma})$$

- La **gráfica de Paley, Paley( $q$ )**, es isomorfa a su complemento. De hecho, un isomorfismo se obtiene mediante la multiplicación por un elemento no cuadrado. En particular, el pentágono y la cuadrícula  $3 \times 3$  son isomorfos a sus propios complementos.
- La unión disjunta  $mK_a$  de  $m$  gráficas completas de tamaño  $a$  es fuertemente regular con parámetros  $(ma, a - 1, a - 2, 0)$  (para  $m > 1$  y  $a > 1$ ). Estas gráficas son los complementos de las del Ejemplo vii).

- x. La **gráfica triangular** sobre los pares de un conjunto de  $m$  elementos, denotada por  $T(m)$ , o por  $\binom{m}{2}$ , tiene como vértices dichos pares, y dos pares son adyacentes cuando comparten un elemento. Estas gráficas son fuertemente regulares, con parámetros:  $\left(\binom{m}{2}, 2(m-2), m-2, 4\right)$  si  $m \geq 4$ .

Para  $m = 4$  obtenemos  $K_{3 \times 2}$ , y para  $m = 5$  encontramos el complemento de la gráfica de Petersen.

**Los cuatro parámetros no son independientes.** Sea  $\Gamma$  una gráfica fuertemente regular con parámetros  $(v, k, \lambda, \mu)$  y supongamos que  $\mu \neq 0$ , podemos obtener una relación entre  $k, \lambda$  y  $\mu$  para reescribir  $v$ , simplemente contando vértices a distancia 0, 1 y 2 desde un vértice dado.

Entonces, si dos vértices  $u, w$  no son adyacentes, por ser fuertemente regular tienen exactamente  $\mu$  vecinos comunes, en particular, existe al menos uno, y por lo tanto  $d(u, w) = 2$ . De este modo, cualquier par de vértices está a distancia 1 o 2, y el diámetro de  $\Gamma$  es 2.

Si ahora fijamos un vértice  $x$ . Como el diámetro es 2, todos los vértices están a distancia 0, 1 o 2 de  $x$ . Denotemos por:

$$\Gamma_2(x) = \{z \in V(\Gamma) : d(x, z) = 2\}, \quad |\Gamma_2(x)| = s.$$

Entonces:

$$v = 1 + k + s,$$

pues hay 1 vértice a distancia 0 (el propio  $x$ ),  $k$  vecinos de  $x$ , y  $s$  vértices a distancia 2.

Para obtener  $s$  realizamos un conteo doble. Consideramos los pares  $(y, z)$  tales que  $y \sim x$ ,  $z \in \Gamma_2(x)$  y  $y \sim z$ .

**Primera forma:** Fijamos  $y \sim x$ . El vértice  $y$  tiene grado  $k$ . Entre sus vecinos, uno es  $x$  y  $\lambda$  son vecinos comunes de  $x$  e  $y$ . Por lo tanto, sus otros  $k-1-\lambda$  vecinos no son adyacentes a  $x$ , es decir, pertenecen a  $\Gamma_2(x)$ . Como hay  $k$  posibles elecciones de  $y$ , el número total de pares  $(y, z)$  es  $k(k-1-\lambda)$ .

**Segunda forma:** Fijamos  $z \in \Gamma_2(x)$ . Entonces  $z$  no es adyacente a  $x$ , y por ser  $\Gamma$  fuertemente regular, el par  $(x, z)$  tiene exactamente  $\mu$  vecinos comunes. Esos  $\mu$  vértices son precisamente los vecinos  $y$  de  $x$  que además son adyacentes a  $z$ . Así, para cada  $z$  hay  $\mu$  vértices  $y$  que forman un par  $(y, z)$ , y el número total de pares es  $\mu s$ .

Igualando ambos conteos obtenemos:

$$k(k-1-\lambda) = \mu s \iff s = \frac{k(k-1-\lambda)}{\mu}.$$

Sustituyendo en la expresión de  $v$  se llega a la siguiente relación:

$$v = 1 + k + s = 1 + k + \frac{k(k-1-\lambda)}{\mu}. \quad (\text{relación parámetros})$$

**Ejemplo.** Verifiquemos la relación anterior en la gráfica de Petersen, la cual tiene parámetros  $(v, k, \lambda, \mu) = (10, 3, 0, 1)$ . Sustituyendo en la fórmula obtenemos:

$$v = 1 + k + \frac{k(k-1-\lambda)}{\mu} = 1 + 3 + \frac{3(3-1-0)}{1} = 4 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10.$$

Esto coincide exactamente con el número de vértices de la gráfica de Petersen.

Además, la fórmula intermedia para el número de vértices a distancia 2 desde un vértice fijo da en este caso:

$$s = \frac{k(k-1-\lambda)}{\mu} = \frac{3(3-1-0)}{1} = 6,$$

lo cual concuerda con el hecho de que, en la gráfica de Petersen, todo vértice tiene 3 vecinos (distancia 1) y los 6 vértices restantes están a distancia 2 de él.

### 9.1.2 Las gráficas de Paley

Afirmábamos anteriormente que los gráficos de Paley (con el conjunto de vértices  $\mathbb{F}_q$ , donde  $q$  es una potencia prima congruente con 1 módulo 4, y donde dos vértices son adyacentes cuando su diferencia es un cuadrado no nulo) son fuertemente regulares. Vamos a verificar esto.

**Proposición 9.1.1. Gráficas de Paley.** Sea  $q = 4t + 1$  una potencia prima y sea **Paley(q)** la gráfica con conjunto de vértices  $\mathbb{F}_q$ , donde  $a, b \in \mathbb{F}_q$  son adyacentes si y sólo si  $b - a$  es un cuadrado no nulo. Entonces **Paley(q)** es fuertemente regular con parámetros:

$$(v, k, \lambda, \mu) = (4t + 1, 2t, t - 1, t),$$

y sus valores propios son:

$$k, \quad \frac{-1 + \sqrt{q}}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{q}}{2},$$

con multiplicidades 1,  $2t$ ,  $2t$ , respectivamente.

**Dem:** Notemos que  $q$  es impar, de modo que el conjunto de elementos no nulos  $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$  tiene tamaño  $q - 1$ . Para cada  $x \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$  se cumple  $(-x)^2 = x^2$ , y como la característica es impar, ningún elemento no nulo satisface  $x = -x$ .

Es por ello que, los elementos no nulos se agrupan en pares disjuntos de la forma  $\{x, -x\}$ , y hay exactamente  $\frac{q-1}{2}$  de estos pares. Cada par  $\{x, -x\}$  produce el mismo cuadrado  $x^2$ , y distintos pares dan cuadrados distintos. En consecuencia, el número de cuadrados no nulos en  $\mathbb{F}_q$  es  $\frac{q-1}{2}$ .

Como el número de vértices es  $v = q = 4t + 1$ , tenemos que cada vértice tiene grado:

$$k = \frac{q-1}{2} = \frac{(4t+1)-1}{2} = 2t.$$

Por otro lado, sea  $\chi : \mathbb{F}_q \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  el carácter cuadrático dado por:

$$\chi(0) = 0, \quad \chi(x) = 1 \text{ si } x \text{ es un cuadrado no nulo,} \quad \chi(x) = -1 \text{ en otro caso.}$$

Entonces  $a \sim b$  si y sólo si  $\chi(b-a) = 1$ .

Luego, como existen exactamente  $\frac{q-1}{2}$  pares  $\{x, -x\}$ , cada uno de los cuales produce un cuadrado distinto. Así, el número de cuadrados no nulos en  $\mathbb{F}_q$  es  $\frac{q-1}{2}$ , y el número de no-cuadrados también es  $\frac{q-1}{2}$ . En particular, para el carácter cuadrático  $\chi$  se tiene:

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_q} \chi(x) = \frac{q-1}{2} - \frac{q-1}{2} = 0.$$

Sea ahora  $a \neq 0$ . Para  $z \neq 0$  escribimos:

$$z^2 - az = z^2 \left(1 - \frac{a}{z}\right),$$

y por la multiplicidad de  $\chi$  y el hecho de que  $\chi(z)^2 = 1$  para  $z \neq 0$ , obtenemos:

$$\chi(z^2 - az) = \chi\left(z^2 \left(1 - \frac{a}{z}\right)\right) = \chi(z^2) \cdot \chi\left(1 - \frac{a}{z}\right) = \chi\left(1 - \frac{a}{z}\right).$$

Como el término  $z = 0$  aporta  $\chi(0) = 0$ , tenemos:

$$\sum_{z \in \mathbb{F}_q} \chi(z^2 - az) = \sum_{z \neq 0} \chi(z^2 - az) = \sum_{z \neq 0} \chi\left(1 - \frac{a}{z}\right).$$

Observemos ahora que, al variar  $z$  en  $\mathbb{F}_q$ , el elemento  $w = 1 - \frac{a}{z}$  recorre exactamente todos los elementos de  $\mathbb{F}_q$  salvo 1, pues, si  $1 - \frac{a}{z_1} = 1 - \frac{a}{z_2}$  entonces  $\frac{a}{z_1} = \frac{a}{z_2}$  y, como  $a \neq 0$ , se sigue que  $z_1 = z_2$ , por tanto la aplicación  $\mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q \setminus \{1\}$  con  $z \mapsto 1 - \frac{a}{z}$ , es biyectiva. Haciendo el cambio de variable  $w = 1 - \frac{a}{z}$  obtenemos:

$$\sum_{z \neq 0} \chi\left(1 - \frac{a}{z}\right) = \sum_{w \in \mathbb{F}_q \setminus \{1\}} \chi(w) = \sum_{w \in \mathbb{F}_q} \chi(w) - \chi(1).$$

Pero ya sabemos que  $\sum_{w \in \mathbb{F}_q} \chi(w) = 0$  y  $\chi(1) = 1$ , de modo que:

$$\sum_{z \in \mathbb{F}_q} \chi(z^2 - az) = 0 - 1 = -1 \dots (\clubsuit).$$

Sea ahora  $x \neq y$  en  $\mathbb{F}_q$ . Los vecinos comunes de  $x$  e  $y$  son los vértices  $z$  tales que  $z \sim x$  y  $z \sim y$ .

Notemos que si  $z \sim x$  y  $z \sim y$ , entonces  $\chi(z - x) = \chi(z - y) = 1$ , de modo que:

$$(\chi(z - x) + 1)(\chi(z - y) + 1) = 4.$$

En caso contrario, este producto no es 4. De aquí se obtiene:

$$\begin{aligned} 4 \sum_{z, x \sim z \sim y} 1 &= \sum_{z \neq x, y} (\chi(z - x) + 1)(\chi(z - y) + 1) \\ &= \sum_{z \neq x, y} \chi(z - x)\chi(z - y) + \sum_{z \neq x, y} \chi(z - x) + \sum_{z \neq x, y} \chi(z - y) + \sum_{z \neq x, y} 1 \dots (\spadesuit). \end{aligned}$$

Ahora, vamos a calcular cada uno de estos sumandos:

- Sumando sobre  $z \neq x, y$  se tiene:

$$\sum_{z \neq x, y} 1 = q - 2,$$

pues en  $\mathbb{F}_q$  hay  $q$  elementos y excluimos  $x$  e  $y$ .

- Para la suma con el carácter cuadrático, hacemos el cambio de variable  $u = z - x$ , como la traslación  $z \mapsto z - x$  es biyectiva, al recorrer  $z \neq x, y$ , el nuevo índice  $u$  recorre todos los elementos de  $\mathbb{F}_q$  excepto 0 y  $x - y$ . Por lo tanto:

$$\sum_{z \neq x, y} \chi(z - x) = \sum_{u \neq 0, x - y} \chi(u).$$

Usando que  $\sum_{u \in \mathbb{F}_q} \chi(u) = 0$  y  $\chi(0) = 0$ , obtenemos:

$$0 = \sum_{u \in \mathbb{F}_q} \chi(u) = \chi(0) + \chi(x - y) + \sum_{u \neq 0, x - y} \chi(u) = \chi(x - y) + \sum_{u \neq 0, x - y} \chi(u),$$

de donde:

$$\sum_{u \neq 0, x - y} \chi(u) = -\chi(x - y),$$

y, en consecuencia,

$$\sum_{z \neq x, y} \chi(z - x) = -\chi(x - y).$$

- De manera análoga, con el cambio  $u = z - y$  se obtiene:

$$\sum_{z \neq x, y} \chi(z - y) = -\chi(y - x).$$

- Como  $q \equiv 1 \pmod{4}$ , el número  $-1$  es un cuadrado,  $\chi(-1) = 1$  y  $y - x = -(x - y)$ , por lo que:

$$\chi(y - x) = \chi(-(x - y)) = \chi(-1)\chi(x - y) = \chi(x - y),$$

y así:

$$-\chi(y - x) = -\chi(x - y).$$

Consideremos el término

$$\sum_{z \neq x, y} \chi(z - x)\chi(z - y).$$

Hacemos el cambio de variable  $w = z - x$ , entonces,  $z = w + x$ . Cuando  $z$  recorre  $\mathbb{F}_q \setminus \{x, y\}$ , el nuevo índice  $w$  recorre exactamente  $\mathbb{F}_q \setminus \{0, x - y\}$ . Por tanto:

$$\sum_{z \neq x, y} \chi(z - x)\chi(z - y) = \sum_{w \neq 0, x - y} \chi(w)\chi((w + x) - y) = \sum_{w \neq 0, x - y} \chi(w)\chi(w + (x - y)).$$

Usando la multiplicatividad de  $\chi$ ,

$$\chi(w)\chi(w + (x - y)) = \chi(w(w + (x - y))),$$

y obtenemos:

$$\sum_{z \neq x, y} \chi(z - x)\chi(z - y) = \sum_{w \neq 0, x - y} \chi(w(w + (x - y))).$$

Ahora fijamos  $a = x - y \neq 0$  y hacemos un segundo cambio de variable,  $u = w + a$ , entonces,  $w = u - a$ . Cuando  $w$  recorre  $\mathbb{F}_q \setminus \{0, a\}$ , el nuevo índice  $u$  también recorre  $\mathbb{F}_q \setminus \{0, a\}$  (es una traslación). Además,

$$w(w + a) = (u - a)u = u(u - a).$$

Así:

$$\sum_{w \neq 0, a} \chi(w(w + a)) = \sum_{u \neq 0, a} \chi(u(u - a)).$$

Por la identidad (♣), para todo  $a \neq 0$  se cumple  $\sum_{z \in \mathbb{F}_q} \chi(z(z - a)) = -1$ .

Los términos  $z = 0$  y  $z = a$  aportan  $\chi(0) = 0$ , de modo que

$$\sum_{z \neq 0, a} \chi(z(z - a)) = -1.$$

Tomando  $a = x - y$  concluimos que:

$$\sum_{z \neq x, y} \chi(z - x)\chi(z - y) = -1.$$

Llegamos a que:

$$\sum_{z \neq x, y} \chi(z - x)\chi(z - y) = -1, \quad \sum_{z \neq x, y} \chi(z - x) = -\chi(x - y), \quad \sum_{z \neq x, y} \chi(z - y) = -\chi(x - y),$$

y además:

$$\sum_{z \neq x, y} 1 = q - 2.$$

Sustituyendo todo esto en (♠) obtenemos:

$$4 \sum_{z, x \sim z \sim y} 1 = -1 - \chi(x - y) - \chi(x - y) + (q - 2) = -1 - 2\chi(x - y) + q - 2 = q - 3 - 2\chi(x - y),$$

Si  $x \sim y$ , entonces  $x - y$  es un cuadrado no nulo y por tanto  $\chi(x - y) = 1$ . El número de vecinos comunes de dos vértices adyacentes es  $\lambda$ , por lo que:

$$4\lambda = q - 3 - 2 \cdot 1 = q - 5 \implies \lambda = \frac{q - 5}{4} = \frac{(4t + 1) - 5}{4} = \frac{4t - 4}{4} = t - 1.$$

Si  $x \not\sim y$ , entonces  $x - y$  no es cuadrado, de modo que  $\chi(x - y) = -1$  y el número de vecinos comunes es  $\mu$ . Se tiene:

$$4\mu = q - 3 - 2(-1) = q - 1 \implies \mu = \frac{q - 1}{4} = \frac{(4t + 1) - 1}{4} = t.$$

Concluimos que **Paley(q)** es fuertemente regular con parámetros:

$$(v, k, \lambda, \mu) = (4t + 1, 2t, t - 1, t).$$

Para determinar el espectro, aplicamos ahora el Teorema 9.1.3. Los otros dos valores propios  $r > s$  de la matriz de adyacencia satisfacen:

$$rs = \mu - k, \quad r + s = \lambda - \mu.$$

En nuestro caso:

$$v = 4t + 1, \quad k = 2t, \quad \lambda = t - 1, \quad \mu = t,$$

de donde:

$$rs = t - 2t = -t, \quad r + s = (t - 1) - t = -1.$$

Como  $r$  y  $s$  son raíces entonces tenemos que  $(x - r)(x - s) = 0$ , por lo que  $x^2 - (r + s)x + rs = 0$ , sustituyendo llegamos a que  $r$  y  $s$  son las raíces de  $x^2 + x - t = 0$ :

$$r, s = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4t}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4t + 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{q}}{2},$$

Las multiplicidades  $f, g$  de  $r$  y  $s$  vienen dadas por:

$$f, g = \frac{1}{2} \left( (v - 1) \mp \frac{(r + s)(v - 1) + 2k}{r - s} \right).$$

Notamos que:

$$v - 1 = 4t, \quad r + s = -1, \quad 2k = 4t \implies (r + s)(v - 1) + 2k = (-1) \cdot 4t + 4t = 0,$$

de donde llegamos a que el factor con el signo  $\mp$  es cero, por lo que:

$$f = g = \frac{1}{2}(v - 1) = \frac{1}{2} \cdot 4t = 2t.$$

Así obtenemos que los valores propios de **Paley(q)** son:

$$k, \quad \frac{-1 + \sqrt{q}}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{q}}{2},$$

con multiplicidades  $1, 2t, 2t$ , respectivamente. ■

### 9.1.3 Matriz de adyacencia

Llamaremos **valor propio restringido** a aquel cuyo vector propio es ortogonal al vector **1**.

**Teorema 9.1.2.** Para una gráfica simple  $\Gamma$  de orden  $v$ , no completa ni vacía, con matriz de adyacencia  $A$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i.  $\Gamma$  es fuertemente regular con parámetros  $(v, k, \lambda, \mu)$  para algunos números enteros  $k, \lambda, \mu$ .
- ii.  $A^2 = (\lambda - \mu)A + (k - \mu)I + \mu J$  para algunos números reales  $k, \lambda, \mu$ .
- iii.  $A$  tiene exactamente dos valores propios restringidos distintos.

**Dem:**

**(i)  $\Rightarrow$  (ii)** Recordemos que la entrada  $(i, j)$  de  $A^2$  es el número de caminos de longitud 2 de  $i$  a  $j$ , es decir, el número de vecinos comunes entre  $i$  y  $j$ . Además, como  $\Gamma$  es fuertemente regular se cumple lo siguiente:

$$(A^2)_{ij} = \begin{cases} k, & i = j, \\ \lambda, & i \neq j \text{ y } A_{ij} = 1, \\ \mu, & i \neq j \text{ y } A_{ij} = 0. \end{cases}$$

Entonces, tenemos que revisar que el lado derecho de (ii) produce estos valores.

La entrada  $(i, j)$  del lado derecho de (ii) es:

$$(\lambda - \mu)A_{ij} + (k - \mu)I_{ij} + \mu.$$

- Si  $i = j$ , entonces  $A_{ii} = 0$  y  $I_{ii} = 1$ , por lo que:

$$(k - \mu) + \mu = k = (A^2)_{ii}.$$

- Si  $i \neq j$ :

$$(\lambda - \mu)A_{ij} + \mu = \begin{cases} \lambda, & A_{ij} = 1, \\ \mu, & A_{ij} = 0, \end{cases}$$

lo cual coincide con la definición de gráfica fuertemente regular.

**(ii)  $\Rightarrow$  (i).** Para el regreso basta leer las igualdades en sentido contrario. Supongamos ahora que se cumple:

$$A^2 = (\lambda - \mu)A + (k - \mu)I + \mu J$$

para algunos números reales  $k, \lambda, \mu$ . Entonces, entrada a entrada,

$$(A^2)_{ij} = (\lambda - \mu)A_{ij} + (k - \mu)I_{ij} + \mu,$$

Si  $i = j$ , se tiene  $A_{ii} = 0$  y  $I_{ii} = 1$ , de modo que:

$$(A^2)_{ii} = (k - \mu) + \mu = k.$$

$(A^2)_{ii}$  es el número de caminos de longitud 2 que empiezan y terminan en el vértice  $i$ , esto coincide con el número de vecinos de  $i$ . Por lo tanto, cada vértice tiene exactamente  $k$  vecinos y la gráfica es  $k$  - regular.

Si  $i \neq j$  y  $A_{ij} = 1$  y  $I_{ij} = 0$ , se obtiene:

$$(A^2)_{ij} = (\lambda - \mu) \cdot 1 + 0 + \mu = \lambda,$$

mientras que si  $i \neq j$  y  $A_{ij} = 0$  y  $I_{ij} = o$ , tenemos:

$$(A^2)_{ij} = 0 + 0 + \mu = \mu.$$

Pero  $(A^2)_{ij}$  cuenta el número de caminos de longitud 2 de  $i$  a  $j$ , es decir, el número de vecinos comunes de  $i$  y  $j$ . Así, dos vértices adyacentes tienen exactamente  $\lambda$  vecinos comunes y dos vértices no adyacentes tienen exactamente  $\mu$  vecinos comunes.

Como las entradas de  $A^2$  son enteras, de las igualdades anteriores se sigue que  $k, \lambda, \mu$  son números enteros. Por lo que  $\Gamma$  debe ser fuertemente regular con parámetros  $(v, k, \lambda, \mu)$ .

Así obtenemos (i)  $\Leftrightarrow$  (ii).

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Sea  $\rho$  un valor propio restringido de  $A$  con vector propio  $u$  (entonces se cumple que  $Au = \rho u$  y  $\langle u, \mathbf{1} \rangle = 0$ ).

Como  $J = \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ , al multiplicar por  $u$  y usando la ortogonalidad:

$$Ju = (\mathbf{1}\mathbf{1}^T)u = (\mathbf{1}^T u) \mathbf{1} = 0,$$

Multiplicamos ahora la identidad (ii) por  $u$ :

$$A^2u = (\lambda - \mu)Au + (k - \mu)u + \mu Ju.$$

Sustituyendo  $Au = \rho u$  y  $Ju = 0$ :

$$A^2u = (\lambda - \mu)\rho u + (k - \mu)u + 0 = ((\lambda - \mu)\rho + (k - \mu))u.$$

Pero también  $A^2u = A(Au) = A(\rho u) = \rho(Au) = \rho^2u$ , de donde se obtiene:

$$\rho^2u = ((\lambda - \mu)\rho + (k - \mu))u \iff \rho^2 = (\lambda - \mu)\rho + (k - \mu) \iff \rho^2 - (\lambda - \mu)\rho - (k - \mu) = 0.$$

Esta es una ecuación cuadrática cuyas raíces potenciales (valores propios restringidos) son:

$$\rho = \frac{(\lambda - \mu) \pm \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}}{2}.$$

El discriminante es:

$$\Delta = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu).$$

Primero, notemos que dado  $x$  un vértice arbitrario se cumplen las siguientes desigualdades:

- $\lambda$  es el número de vecinos comunes de dos vértices adyacentes. Si  $x \sim y$ , entonces los vecinos comunes de  $x$  e  $y$  deben estar entre los vecinos de  $x$ , excluyendo a  $y$ . Como  $x$  tiene  $k$  vecinos y uno de ellos es  $y$ , se obtiene  $\lambda \leq k - 1$ .
- $\mu$  es el número de vecinos comunes de dos vértices no adyacentes. Todo vecino común de  $x$  y  $y$  es, en particular, un vecino de  $x$ , y  $x$  tiene exactamente  $k$  vecinos, entonces,  $\mu \leq k$ .

Del discriminante, tenemos que el término  $(\lambda - \mu)^2$  es siempre mayor o igual a cero y de  $\mu \leq k$  se deduce que  $k - \mu \geq 0$ , por lo que  $4(k - \mu) \geq 0$ .

Para ver que  $\Delta > 0$ , distinguimos dos casos:

- Si  $\mu < k$ , entonces  $k - \mu > 0$ , y por tanto,  $\Delta = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) > 0$ .
- Si  $\mu = k$ , entonces  $\Delta = (\lambda - k)^2$ . Pero como  $\lambda \leq k - 1$ , se tiene  $\lambda - k \leq -1$ , y por lo tanto  $(\lambda - k)^2 \geq 1 > 0$ .

De estos casos, concluimos que  $\Delta > 0$  y por consiguiente, la ecuación cuadrática tiene **dos soluciones reales distintas**, y por lo tanto  $A$  posee exactamente dos valores propios restringidos diferentes.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) Supongamos que los valores propios restringidos de  $A$  son exactamente  $r$  y  $s$ . Consideremos la matriz:

$$B := (A - rI)(A - sI) = A^2 - (r + s)A + rsI.$$

Sea  $x$  un vector ortogonal a  $\mathbf{1}$ . Como en el subespacio  $\mathbf{1}^\perp$  todos los valores propios son  $r$  o  $s$ , podemos escribir  $x = x_r + x_s$ , donde  $Ax_r = rx_r$  y  $Ax_s = sx_s$ . Entonces:

$$Bx_r = (A - rI)(A - sI)x_r = (A - rI)((r - s)x_r) = (r - s)(Ax_r - rx_r) = 0,$$

y de igual modo  $Bx_s = 0$ . Por lo tanto,  $Bx = 0$  para todo  $x \perp \mathbf{1}$ , lo cual implica que  $\text{Im } B \subseteq \langle \mathbf{1} \rangle$ .

Además,  $B$  es simétrica (es un polinomio en  $A$ ), de modo que, o bien  $B = 0$ , o bien su espacio propio no nulo es precisamente  $\langle \mathbf{1} \rangle$  y el rango de  $B$  es 1. En este último caso, existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que,  $B = \alpha \mathbf{1}\mathbf{1}^T = \alpha J$ .

En consecuencia:

$$A^2 - (r + s)A + rsI = \alpha J,$$

y por lo tanto:

$$A^2 = (r + s)A - rsI + \alpha J.$$

Definiendo

$$\lambda - \mu = r + s, \quad k - \mu = -rs, \quad \mu = \alpha,$$

obtenemos:

$$A^2 = (\lambda - \mu)A + (k - \mu)I + \mu J,$$

que es exactamente la afirmación ii, y con ello, las tres afirmaciones son equivalentes. ■

#### 9.1.4 Gráficas imprimitivas

Una gráfica fuertemente regular se llama **imprimitiva** si ella o su complemento no es conexa, o sea que la gráfica está formada por más de un componente conectado, y **primitiva** si tanto ella como su complemento sí son conexas.

El interés detrás de esta definición es estructural, pues, si una gráfica fuertemente regular no es conexa, dicha estructura fuerza a que los parámetros tomen formas extremadamente restringidas, lo que convierte a las gráficas imprimitivas en casos “degenerados” y poco interesantes.

**Proposición 9.1.3.** Sea  $\Gamma$  una gráfica fuertemente regular con parámetros  $(v, k, \lambda, \mu)$ , entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i.  $\Gamma$  no es conexa.
- ii.  $\mu = 0$  y  $k = \lambda + 1$ .
- iii.  $\Gamma$  es la unión disjunta de  $a$  copias de un grafo completo  $K_m$ , es decir,

$$\Gamma = aK_m, \quad v = am, \quad k = m - 1, \quad \lambda = m - 2, \quad \mu = 0.$$

**Dem:**

**(i)  $\Rightarrow$  (ii)** Supongamos que  $\Gamma$  es imprimitiva, es decir, no conexa. Sean  $x, y$  vértices que pertenecen a componentes distintos. Entonces no existe ningún camino entre  $x$  y  $y$ , de modo que no pueden tener ningún vecino común, pero, por ser una gráfica fuertemente regular, para vértices no adyacentes se exige que el número de vecinos comunes sea exactamente  $\mu$ . Por lo que  $\mu = 0$ .

Consideremos ahora un componente  $C$  de  $\Gamma$  con al menos dos vértices. Sean  $u, v \in C$ . Tenemos que  $u$  y  $v$  deben ser adyacentes, pues si no lo fueran y como están en el mismo componente existiría un camino entre ellos. En particular, tendrían algún vecino común, es decir, el número de vecinos comunes sería al menos 1. Sin embargo, como  $u$  y  $v$  no son adyacentes, al ser fuertemente regular se exige que el número de vecinos comunes sea  $\mu = 0$ , lo cual es imposible. Por tanto, todo par de vértices en un mismo componente es adyacente. Esto implica que cada componente es una gráfica completa.

**(i)  $\Rightarrow$  (iii)** Sea entonces un componente  $K_m$ . En  $K_m$ , cada vértice tiene grado  $m - 1$ , de modo que  $k = m - 1$ . Además, para dos vértices adyacentes, el número de vecinos comunes es  $m - 2$ , de modo que  $\lambda = m - 2$ .

De estas dos igualdades obtenemos:

$$k = (m - 1) = (m - 2) + 1 = \lambda + 1.$$

Así, si  $\Gamma$  no es conexa, necesariamente  $\mu = 0$  y  $k = \lambda + 1$ , y cada componente es isomorfo a  $K_m$ . Si  $v$  es el número total de vértices podemos escribir  $v = am$ , de modo que la gráfica completa es la unión disjunta de  $a$  copias de  $K_m$ , es decir,  $\Gamma = aK_m$ .

**(ii)  $\Rightarrow$  (i)** Supongamos ahora que la gráfica fuertemente regular satisface  $\mu = 0$  y  $k = \lambda + 1$ .

Sea  $x, y$  un par de vértices no adyacentes. Como  $\mu = 0$ , por ser fuertemente regular implica que  $x$  y  $y$  no tienen ningún vecino común. En particular, si existiera un camino entre ellos, el primer paso del camino obligaría a que compartieran al menos un vecino, lo cual contradice  $\mu = 0$ . Por tanto,  $x \not\sim y$ , entonces,  $x, y$  están en componentes distintos.

Así, todos los vértices no adyacentes están en componentes diferentes, lo cual implica que cada componente es un gráfica completa.

**(ii)  $\Rightarrow$  (iii)** Sea  $C$  un componente y sea  $m$  el número de vértices en  $C$ . Como cada vértice del componente es adyacente a todos los demás, tenemos que  $k = m - 1$ , es decir,  $m = k + 1$ .

Además, para dos vértices adyacentes el número de vecinos comunes es  $m - 2$ , pero  $k = \lambda + 1$  implica que  $\lambda = k - 1 = (m - 1) - 1 = m - 2$ , lo cual coincide exactamente con la estructura de  $K_m$ .

Así, cada componente es isomorfa a  $K_m$  con  $m = k + 1$ , y si  $v$  es el número total de vértices podemos escribir  $v = am$ , de modo que la gráfica completa es la unión disjunta de  $a$  copias de  $K_m$ , así,  $\Gamma = aK_m$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Finalmente, si  $\Gamma = aK_m$  con  $a > 1$ , entonces  $\Gamma$  es una unión disjunta de componentes completos, y por tanto no es conexa.

Además, sabemos que el espectro para  $K_m$  es  $\{m - 1, (-1)^{(m-1)}\}$ . Si  $\Gamma = aK_m$  es la unión disjunta de  $a$  copias de  $K_m$ , la matriz de adyacencia  $A(\Gamma)$  esta formada por  $a$  bloques  $A(K_m)$  en la diagonal. El espectro de una matriz bloque diagonal es la unión (con multiplicidades) de los espectros de sus bloques, por lo que cada bloque aporta un valor propio  $m - 1$  y  $m - 1$  copias de  $-1$ . En consecuencia, el espectro debe ser  $(m - 1)^a, (-1)^{a(m-1)}$ .

Así quedan demostradas las equivalencias entre (i), (ii) y (iii). ■

**Proposición 9.1.4.** Sea  $\Gamma$  una gráfica fuertemente regular con parámetros  $(v, k, \lambda, \mu)$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i. El complemento  $\bar{\Gamma}$  no es conexo.
- ii.  $k = \mu$ .
- iii.  $\Gamma$  es el grafo multipartito completo  $K_{a \times m}$  para ciertos enteros  $a, m$ . En este caso:

$$v = am, \quad k = \mu = (a - 1)m, \quad \lambda = (a - 2)m.$$

**Dem:** Anteriormente habíamos calculado la relación general para los parámetros del complemento de una gráfica (Parámetros  $\bar{\Gamma}$ ), los cuales son:

$$(v, k', \lambda', \mu') = (v, v - k - 1, v - 2k + \mu - 2, v - 2k + \lambda).$$

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Supongamos que el complemento  $\bar{\Gamma}$  no es conexa. Por la caracterización de la proposición anterior 9.1.3, toda gráfica fuertemente regular no conexa satisface  $\mu' = 0$  y  $k' = \lambda' + 1$ .

Sustituyendo los parámetros del complemento, obtenemos:

1. De  $\mu' = 0$ :

$$\mu' = 0 = v - 2k + \lambda \iff v = 2k - \lambda.$$

2. De  $k' = \lambda' + 1$ :

$$k' = v - k - 1 = (v - 2k + \mu - 2) + 1 = \lambda' + 1.$$

Simplificando:

$$v - k - 1 = v - 2k + \mu - 1 \iff -k = -2k + \mu \iff k = \mu.$$

Por lo tanto, si  $\bar{\Gamma}$  no es conexa, necesariamente,  $k = \mu$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Supongamos ahora que  $\Gamma$  satisface  $k = \mu > 0$ . Utilizamos la relación fundamental entre los parámetros de una gráfica fuertemente regular con  $\mu \neq 0$ , (relación parámetros):

$$v = 1 + k + \frac{k(k - 1 - \lambda)}{\mu}.$$

Sustituyendo  $\mu = k$ , se obtiene:

$$v = 1 + k + (k - 1 - \lambda) = 2k - \lambda \dots (\clubsuit).$$

Volvemos a los parámetros del complemento. Usando (♣) y  $\mu = k$ , obtenemos:

1. Para  $\mu'$ :

$$\mu' = v - 2k + \lambda = (2k - \lambda) - 2k + \lambda = 0.$$

2. Para  $k' - (\lambda' + 1)$ :

$$k' - (\lambda' + 1) = (v - k - 1) - (v - 2k + \mu - 1) = (v - k - 1) - (v - 2k + k - 1) = 0.$$

Es decir,  $k' - (\lambda' + 1) = 0$ , por lo que,  $k' = \lambda' + 1$ .

Por 9.1.3, esto implica que  $\bar{\Gamma}$  es la unión disjunta de  $a$  copias de una gráfica completa  $\bar{\Gamma} = aK_m$ , con  $v = am$ ,  $k' = m - 1$ ,  $\lambda' = m - 2$  y  $\mu' = 0$ .

Aplicando nuevamente la relación de los parámetros del complemento (Parámetros  $\bar{\Gamma}$ ), tenemos que los parámetros de  $\Gamma$  son:

$$k = \mu = v - k' - 1 = am - (m - 1) - 1 = (a - 1)m,$$

$$\lambda = v - 2k' + \mu' - 2 = am - 2(m - 1) - 2 = (a - 2)m,$$

$$\mu = v - 2k' + \lambda' = am - 2(m - 1) + (m - 2) = (a - 1)m.$$

Por lo tanto, llegamos a que  $\Gamma$  es de la forma  $K_{a \times m}$ , la gráfica multipartita completa con  $a$  clases de tamaño  $m$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Si  $\Gamma = K_{a \times m}$ , entonces su complemento es  $\bar{\Gamma} = aK_m$ , que por construcción no es conexa. Por lo tanto, iii implica i. ■

Para la gráfica multipartita completa  $K_{a \times m}$  (con  $a$  clases de tamaño  $m$ ) su espectro de  $K_{a \times m}$  es  $(a - 1)m^1, 0^{a(m-1)}, (-m)^{a-1}$ . ■

### 9.1.5 Parámetros

**Teorema 9.1.5.** Sea  $\Gamma$  una gráfica fuertemente regular con matriz de adyacencia  $A$  y parámetros  $(v, k, \lambda, \mu)$ . Sean  $r$  y  $s$  ( $r > s$ ) los valores propios restringidos de  $A$ , y  $f, g$  sus respectivas multiplicidades. Entonces:

i.  $k(k - 1 - \lambda) = \mu(v - k - 1)$ .

ii.  $rs = \mu - k$ ,  $r + s = \lambda - \mu$ .

iii.  $f, g = \frac{1}{2} \left( v - 1 \mp \frac{(r + s)(v - 1) + 2k}{r - s} \right)$ .

iv. Si  $r$  y  $s$  no son enteros, entonces  $f = g$  y  $(v, k, \lambda, \mu) = (4t + 1, 2t, t - 1, t)$  para algún entero  $t$ .

**Dem:**

**i)** Fijemos un vértice  $x \in V(\Gamma)$ . Denotemos por  $\Gamma(x)$  al conjunto de vértices adyacentes a  $x$  y por  $\Delta(x)$  al conjunto de vértices no adyacentes a  $x$ . Entonces  $|\Gamma(x)| = k$  y  $|\Delta(x)| = v - k - 1$ .

Contaremos de dos maneras el número de aristas entre  $\Gamma(x)$  y  $\Delta(x)$ .

Por un lado, si tomamos  $y \in \Gamma(x)$ . El vértice  $y$  tiene grado  $k$ , y entre sus vecinos se encuentran: 1 vértice igual a  $x$  y  $\lambda$  vecinos de  $x$ , pues  $x$  y  $y$  son adyacentes y tienen exactamente  $\lambda$  vecinos comunes. De este modo, el número de vecinos de  $y$  que no son vecinos de  $x$  es  $k - 1 - \lambda$ , y todos ellos pertenecen a  $\Delta(x)$ . Así, el número de aristas entre  $\Gamma(x)$  y  $\Delta(x)$  visto desde  $\Gamma(x)$  es  $k(k - 1 - \lambda)$ .

Por otro lado, si tomamos  $z \in \Delta(x)$ . El vértice  $z$  no es adyacente a  $x$ , y como la gráfica es fuertemente regular,  $x$  y  $z$  tienen exactamente  $\mu$  vecinos comunes, todos en  $\Gamma(x)$ . Por lo tanto, cada  $z \in \Delta(x)$  es adyacente a exactamente  $\mu$  vértices de  $\Gamma(x)$ , y el número de aristas entre  $\Gamma(x)$  y  $\Delta(x)$  visto desde  $\Delta(x)$  es  $\mu(v - k - 1)$ .

Igualando ambos conteos se obtiene que  $k(k - 1 - \lambda) = \mu(v - k - 1)$ .

**(ii)** Por el Teorema 9.1.2 (ii) se tiene:

$$A^2 = (\lambda - \mu)A + (k - \mu)I + \mu J.$$

Sea  $u$  un vector propio restringido de  $A$ . Multiplicando la identidad anterior por  $u$  a la derecha, obtenemos:

$$A^2u = (\lambda - \mu)Au + (k - \mu)u + \mu Ju.$$

Sustituyendo  $Au = \rho u$  y  $Ju = 0$ ,

$$\rho^2u = (\lambda - \mu)\rho u + (k - \mu)u.$$

Obtenemos:

$$\rho^2 - (\lambda - \mu)\rho - (k - \mu) = 0.$$

Los valores propios restringidos  $r$  y  $s$  son las dos raíces de este polinomio, por lo que:

$$r + s = \lambda - \mu, \quad rs = \mu - k,$$

**(iii)** Los valores propios de  $A$  son  $k, r, s$  con multiplicidades  $1, f, g$ , respectivamente. Por un lado, la suma de multiplicidades es la dimensión del espacio:

$$1 + f + g = v \quad \Rightarrow \quad f + g = v - 1 \dots (\clubsuit).$$

Por otro lado, la traza de  $A$  es a la vez la suma de las entradas de la diagonal (que es 0, pues la gráfica no tiene lazos) y la suma de los valores propios contando multiplicidad:

$$0 = \text{tr}(A) = k + fr + gs \dots (\spadesuit).$$

Luego, notemos que:

$$\begin{aligned}
fr + gs &= \frac{2fr + 2gs}{2} \\
&= \frac{fr + gs + fr + gs}{2} \\
&= \frac{fr + gs + fr + gs + fs - fs + gr - gr}{2} \\
&= \frac{fr + fs + gr + gs + fr - fs - gr + gs}{2} \\
&= \frac{fr + fs}{2} + \frac{gr + gs}{2} + \frac{fr - fs}{2} + \frac{-gr + gs}{2} \\
&= \frac{r+s}{2}f + \frac{r+s}{2}g + \frac{r-s}{2}f - \frac{r-s}{2}g \\
&= \frac{r+s}{2}(f+g) + \frac{r-s}{2}(f-g).
\end{aligned}$$

Sustituyendo lo anterior en (♣) y utilizando (♣), obtenemos:

$$0 = k + \frac{r+s}{2}(v-1) + \frac{r-s}{2}(f-g).$$

De aquí despejamos  $f - g$ :

$$\begin{aligned}
\frac{r-s}{2}(f-g) &= -k - \frac{r+s}{2}(v-1), \\
f-g &= \frac{-2k - (r+s)(v-1)}{r-s} = -\frac{(r+s)(v-1) + 2k}{r-s} \dots (\spadesuit).
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$f = \frac{(f+g) + (f-g)}{2}, \quad g = \frac{(f+g) - (f-g)}{2}.$$

Usando (♣) y (♦) obtenemos:

$$f = \frac{1}{2} \left( v-1 - \frac{(r+s)(v-1) + 2k}{r-s} \right), \quad g = \frac{1}{2} \left( v-1 + \frac{(r+s)(v-1) + 2k}{r-s} \right),$$

que equivale a escribir:

$$f, g = \frac{1}{2} \left( v-1 \mp \frac{(r+s)(v-1) + 2k}{r-s} \right).$$

(iv) Consideremos de nuevo el polinomio cuadrático del inciso (ii):

$$\rho^2 - (\lambda - \mu)\rho - (k - \mu) = 0.$$

Su discriminante es:

$$\Delta = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu),$$

y por tanto:

$$r, s = \frac{1}{2}((\lambda - \mu) \pm \sqrt{\Delta}), \quad r - s = \sqrt{\Delta}.$$

Sustituyendo en la fórmula del inciso (iii) obtenemos:

$$f, g = \frac{1}{2} \left( v-1 \mp \frac{(\lambda - \mu)(v-1) + 2k}{\sqrt{\Delta}} \right) \dots (\star).$$

Si  $\sqrt{\Delta}$  es racional, entonces  $r$  y  $s$  son racionales. Pero son raíces de un polinomio mónico con coeficientes enteros, así que son enteros algebraicos; al ser además racionales, deben ser enteros. Este es el caso en que  $r$  y  $s$  son enteros.

Supongamos ahora que  $r$  y  $s$  no son enteros. Entonces  $\sqrt{\Delta}$  es irracional. En  $(\star)$  vemos que:

$$f = \frac{v-1}{2} - \frac{(\lambda-\mu)(v-1) + 2k}{2\sqrt{\Delta}}, \quad g = \frac{v-1}{2} + \frac{(\lambda-\mu)(v-1) + 2k}{2\sqrt{\Delta}}.$$

Como  $f$  y  $g$  son enteros, el término:

$$\frac{(\lambda-\mu)(v-1) + 2k}{2\sqrt{\Delta}}$$

debe ser cero (pues es un racional multiplicado por un irracional). Por tanto:

$$(\lambda-\mu)(v-1) + 2k = 0,$$

es decir,

$$(\mu-\lambda)(v-1) = 2k \dots (\heartsuit).$$

En particular, de  $(\heartsuit)$  obtenemos que:

$$\mu - \lambda = \frac{2k}{v-1}.$$

Como la gráfica es fuertemente regular no trivial, tenemos  $0 < k < v-1$ . De aquí se sigue que:

$$0 < \frac{2k}{v-1} < 2.$$

El lado izquierdo es precisamente  $\mu - \lambda$ , que es un entero. Luego  $\frac{2k}{v-1}$  es un entero contenido en el intervalo  $(0, 2)$ , por lo que necesariamente:

$$\frac{2k}{v-1} = 1.$$

Con esto concluimos que  $\mu - \lambda = 1$ , y que,  $k = \frac{v-1}{2}$ . En particular, sustituyendo en  $(\star)$  obtenemos:

$$f = g = \frac{v-1}{2}.$$

Sustituyendo  $\lambda = \mu - 1$  y  $k = \frac{v-1}{2}$  en la igualdad del inciso i:

$$k(k-1-\lambda) = \mu(v-k-1).$$

Ahora simplificamos ambos lados.

Primero calculamos:

$$k-1-\lambda = \frac{v-1}{2} - 1 - (\mu-1) = \frac{v-1}{2} - \mu.$$

Por lo tanto, el lado izquierdo es:

$$k(k-1-\lambda) = \frac{v-1}{2} \left( \frac{v-1}{2} - \mu \right).$$

Ahora calculamos el término  $v - k - 1$ :

$$\begin{aligned} v - k - 1 &= v - \frac{v - 1}{2} - 1 \\ &= \frac{2v}{2} - \frac{v - 1}{2} - \frac{2}{2} \\ &= \frac{2v - (v - 1) - 2}{2} \\ &= \frac{v - 1}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, el lado derecho es:

$$\mu(v - k - 1) = \mu \cdot \frac{v - 1}{2}.$$

Así, la ecuación del inciso (i) se convierte en:

$$\frac{v - 1}{2} \left( \frac{v - 1}{2} - \mu \right) = \mu \cdot \frac{v - 1}{2}.$$

Como  $\frac{v - 1}{2} \neq 0$ , podemos dividir ambos lados entre este factor y obtenemos:

$$\frac{v - 1}{2} - \mu = \mu \iff \mu = \frac{v - 1}{4}.$$

Luego, como  $\lambda = \mu - 1$ , se sigue que:

$$\lambda = \frac{v - 1}{4} - 1 = \frac{v - 1 - 4}{4} = \frac{v - 5}{4}.$$

En consecuencia:

$$\mu = \frac{v - 1}{4}, \quad \lambda = \frac{v - 5}{4}.$$

Para que  $\lambda$  y  $\mu$  sean enteros, se requiere  $v \equiv 1 \pmod{4}$ . Escribiendo  $v = 4t + 1$  con  $t \in \mathbb{Z}$ , resulta:

$$k = \frac{v - 1}{2} = \frac{4t + 1 - 1}{2} = 2t, \quad \mu = \frac{v - 1}{4} = \frac{4t + 1 - 1}{4} = t, \quad \lambda = t - 1.$$

Es así que, si  $r$  y  $s$  no son enteros, entonces necesariamente:

$$f = g = \frac{v - 1}{2} \quad y \quad (v, k, \lambda, \mu) = (4t + 1, 2t, t - 1, t)$$

para algún entero  $t$ . ■

Estas relaciones imponen restricciones a los valores posibles de los parámetros. Claramente, los términos del lado derecho en (iii) deben ser enteros positivos. Estas son las llamadas **condiciones de racionalidad**.

**Ejemplo.** Consideremos el ciclo  $C_5$ , gráfica fuertemente regular con parámetros  $(v, k, \lambda, \mu) = (5, 2, 0, 1)$ .

Los valores propios de la matriz de adyacencia de  $C_n$  son de la forma:  $2 \cos \left( \frac{2\pi j}{n} \right)$ , con  $j = 0, \dots, n - 1$ . Para  $n = 5$  obtenemos los valores:

$$2, \quad 2 \cos \left( \frac{2\pi}{5} \right), \quad 2 \cos \left( \frac{4\pi}{5} \right), \quad 2 \cos \left( \frac{6\pi}{5} \right), \quad 2 \cos \left( \frac{8\pi}{5} \right).$$

Como  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$  y  $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)$  podemos agrupar los valores propios como:

$$k = 2, \quad r = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad s = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

con multiplicidades 1,  $f = 2$  y  $g = 2$ .

(i) Se verifica:

$$k(k-1-\lambda) = 2(2-1-0) = 2, \quad \mu(v-k-1) = 1(5-2-1) = 2.$$

(ii) Con los valores anteriores,

$$r+s = \frac{\sqrt{5}-1-(\sqrt{5}+1)}{2} = -1 = \lambda - \mu = 0-1,$$

$$rs = \frac{(\sqrt{5}-1)(-\sqrt{5}-1)}{4} = -\frac{5-1}{4} = -1 = \mu - k = 1-2.$$

(iii) Usando la fórmula:

$$f, g = \frac{1}{2} \left( v-1 \mp \frac{(r+s)(v-1) + 2k}{r-s} \right),$$

tenemos  $v-1 = 4$ ,  $r+s = -1$ ,  $2k = 4$  y  $r-s = \sqrt{5}$ , por lo que:

$$(r+s)(v-1) + 2k = (-1) \cdot 4 + 4 = 0$$

En consecuencia:

$$f = g = \frac{1}{2} \left( 4 \mp \frac{0}{\sqrt{5}} \right) = 2.$$

(iv) Como  $r$  y  $s$  no son enteros, el inciso (iv) del Teorema 9.1.5 afirma que:

$$f = g = \frac{v-1}{2}, \quad (v, k, \lambda, \mu) = (4t+1, 2t, t-1, t)$$

para algún entero  $t$ . Aquí  $v = 5$  implica  $4t+1 = 5$ , de donde  $t = 1$ , y así:

$$(v, k, \lambda, \mu) = (4(1)+1, 2(1), (1)-1, (1)) = (5, 2, 0, 1), \quad f = g = \frac{5-1}{2} = 2,$$

lo cual coincide con los valores calculados.

### 9.1.6 Gráficas fuertemente regulares sin triángulos

Como ejemplo de aplicación de las **condiciones de racionalidad**, clasificamos las gráficas fuertemente regulares de circunferencia 5.

**Teorema 9.1.6.** [HOFFMAN & SINGLETON [5]] Supongamos que  $(v, k, 0, 1)$  es el conjunto de parámetros de una gráfica fuertemente regular. Entonces  $(v, k) = (5, 2), (10, 3), (50, 7)$  o  $(3250, 57)$ .

**Dem:** En nuestro caso  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 1$ . Por el teorema 9.1.3 (ii) tenemos que:

$$rs = \mu - k = 1 - k \dots (\spadesuit), \quad r + s = \lambda - \mu = 0 - 1 = -1 \dots (\diamondsuit).$$

De  $(\diamondsuit)$  tenemos que  $s = -1 - r$ . Sustituyendo  $s$  en  $(\spadesuit)$ :

$$rs = r(-1 - r) = 1 - k \iff -k = -r^2 - r - 1 \iff k = r^2 + r + 1 \dots (\clubsuit).$$

Ahora usamos el teorema 9.1.3 (i):

$$k(k - 1 - \lambda) = \mu(v - k - 1).$$

Sustituyendo  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 1$ , obtenemos:

$$k(k - 1) = v - k - 1 \iff k^2 - k = v - k - 1 \iff v = k^2 + 1 \dots (\spadesuit)$$

Sustituyendo  $(\clubsuit)$  en  $(\spadesuit)$ :

$$\begin{aligned} v &= (r^2 + r + 1)^2 + 1 \\ &= r^4 + r^3 + r^2 + r^3 + r^2 + r + r^2 + r + 1 + 1 \\ &= r^4 + 2r^3 + 3r^2 + 2r + 2. \end{aligned}$$

Cuando  $f \neq g$ , el Teorema 9.1.3 (iv) implica que  $r - s \in \mathbb{Z}$  y  $r - s \mid (r + s)(v - 1) + 2k \dots (\clubsuit)$

Ahora, queremos calcular  $(\clubsuit)$ . Por un lado,  $r + s$  ya lo tenemos por  $(\diamondsuit)$ ,  $k$  lo tenemos por  $(\clubsuit)$  y  $v - 1$  lo podemos calcular a partir de  $(\spadesuit)$ :

$$v - 1 = (r^4 + 2r^3 + 3r^2 + 2r + 2) - 1 = r^4 + 2r^3 + 3r^2 + 2r + 1$$

Además,  $r - s = r - (-1 - r) = 2r + 1$ .

Sustituyendo en  $(\clubsuit)$ :

$$\begin{aligned} (r + s)(v - 1) + 2k &= (-1)(r^4 + 2r^3 + 3r^2 + 2r + 1) + 2(r^2 + r + 1) \\ &= -r^4 - 2r^3 - 3r^2 - 2r - 1 + 2r^2 + 2r + 2 \\ &= -r^4 - 2r^3 - r^2 + 1. \end{aligned}$$

Entonces la condición  $(\clubsuit)$  queda como  $2r + 1 \mid -r^4 - 2r^3 - r^2 + 1$ .

Ahora, calculemos la división de estos polinomios:

$$\begin{array}{r} -r^4 - 2r^3 - r^2 \\ \hline r^4 + \frac{1}{2}r^3 \\ \hline -\frac{3}{2}r^3 - r^2 \\ \hline \frac{3}{2}r^3 + \frac{3}{4}r^2 \\ \hline -\frac{1}{4}r^2 \\ \hline \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{8}r \\ \hline \frac{1}{8}r + 1 \\ \hline -\frac{1}{8}r - \frac{1}{16} \\ \hline \frac{15}{16} \end{array} \quad \begin{array}{r} +1 \mid 2r + 1 \\ \hline -\frac{1}{2}r^3 - \frac{3}{4}r^2 - \frac{1}{8}r + \frac{1}{16} \end{array}$$

Entonces, tenemos que  $(2r+1) \left( -\frac{1}{2}r^3 - \frac{3}{4}r^2 - \frac{1}{8}r + \frac{1}{16} \right) + \frac{15}{16} = -r^4 - 2r^3 - r^2 + 1$

Multiplicando por 16 tenemos:

$$16(2r+1) \left( -\frac{1}{2}r^3 - \frac{3}{4}r^2 - \frac{1}{8}r + \frac{1}{16} \right) + 15 = -16r^4 - 32r^3 - 16r^2 + 16$$

$$(2r+1)(-8r^3 - 12r^2 - 2r + 1) + 15 = -16r^4 - 32r^3 - 16r^2 + 16$$

Así, si  $2r+1$  divide a  $-16r^4 - 32r^3 - 16r^2 + 16$  para un entero  $r$ , entonces también debe dividir a su resto 15.

Los divisores positivos de 15 son  $d = \{1, 3, 5, 15\}$ . De  $2r+1 = d$  obtenemos las soluciones  $r = 0, 1, 2, 7$ .

En el caso  $r = 0$  obtenemos  $k = 0^2 + 0 + 1 = 1$ , (por  $\star$ ) y  $v = 1^2 + 1 = 2$  (por  $\spadesuit$ ), lo cual corresponde a la gráfica  $K_2$ , una configuración trivial. Por esta razón descartamos este valor y continuamos únicamente con  $r = 1, 2, 7$ .

Por último, usando  $(\star)$  y  $(\spadesuit)$  vamos a calcular  $k$  y  $v$  para cada  $r$ :

- $r = 1$ :  $k = 1^2 + 1 + 1 = 3$ ,  $v = 3^2 + 1 = 10$ .
- $r = 2$ :  $k = 2^2 + 2 + 1 = 7$ ,  $v = 7^2 + 1 = 50$ .
- $r = 7$ :  $k = 7^2 + 7 + 1 = 57$ ,  $v = 57^2 + 1 = 3250$ .

Por último veamos el caso  $f = g$ . Recordemos que las multiplicidades de los valores propios de una gráfica satisfacen  $v = 1 + f + g$  y  $k + fr + gs = 0$ . Además, por  $(\diamond)$  tenemos que  $r + s = -1$ .

Luego, suponiendo que  $f = g$ , la ecuación  $v = 1 + f + g$  se convierte en  $v = 1 + 2f$ .

Sustituyendo  $f = g$  en la relación  $k + fr + gs = 0$  se sigue que  $k + f(r + s) = 0$ .

Usando que  $r + s = -1$  esto implica que  $k - f = 0$ , es decir,  $f = k$ .

Por lo tanto,  $v = 1 + 2f = 1 + 2k$ .

Por otro lado, por  $(\spadesuit)$  se cumple que  $v = k^2 + 1$ .

Al combinar ambas expresiones para  $v$  se obtiene:

$$k^2 + 1 = 2k + 1 \iff k^2 - 2k = 0 \iff k(k - 2) = 0.$$

Dado que  $k \neq 0$ , concluimos que  $k = 2$ , y por consiguiente:

$$v = k^2 + 1 = 5.$$

Así, el caso  $f = g$  conduce necesariamente al par de parámetros:

$$(v, k) = (5, 2).$$

Con esto, obtenemos exactamente los cuatro pares del enunciado. ■

Las tres primeras posibilidades se realizan de manera única mediante el pentágono ii, la gráfica de Petersen iv y la gráfica de Hoffman - Singleton iv. Para el cuarto caso, correspondiente a la gráfica de Moore en 3250 vértices, la existencia sigue siendo desconocida.

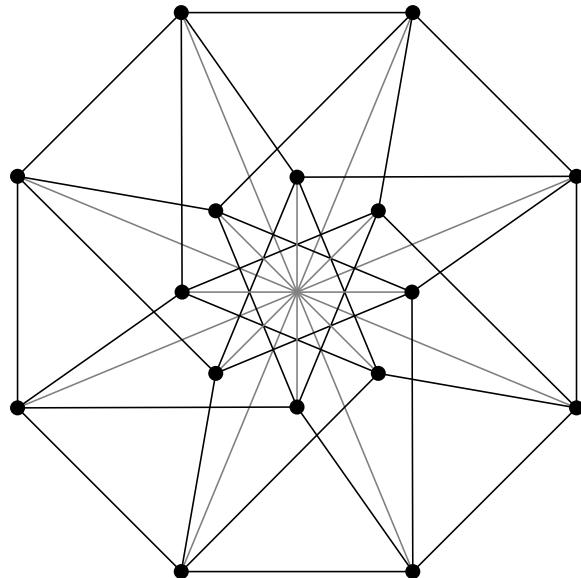
El conjunto de parámetros  $(v, k, \lambda, \mu) = (3250, 57, 0, 1)$ . Tal conjunto de parámetros describe precisamente una posible gráfica de Moore de diámetro 2, cuya construcción no se ha logrado y cuya existencia permanece abierta (véase el Teorema 9.1.6). Para dicha gráfica, la matriz de intersección sería:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1729 & 1520 \\ 1 & \frac{637}{3} & -\frac{640}{3} \\ 1 & -\frac{13}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix},$$

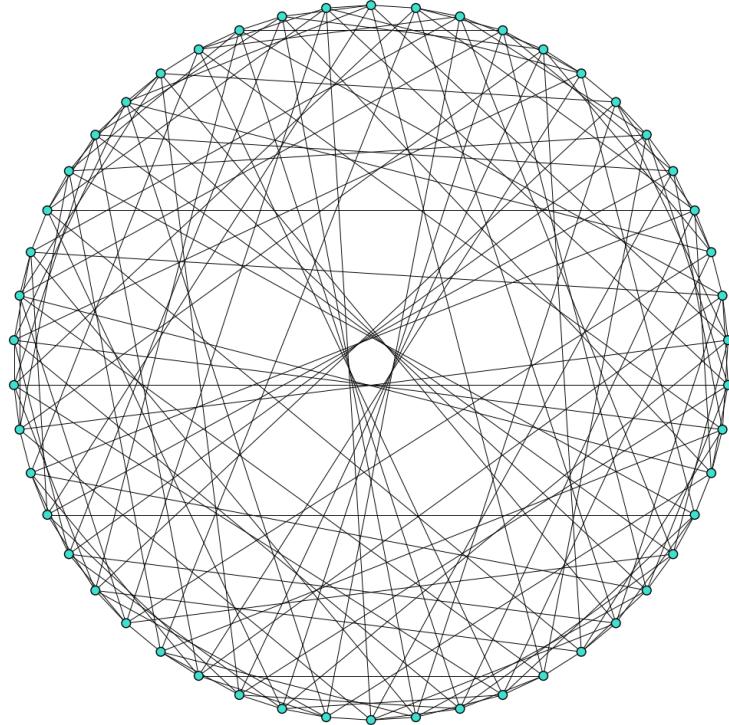
pero hasta ahora ningún método ha permitido producir una estructura combinatoria que satisfaga estas condiciones. Resultados parciales de Aschbacher y G. Higman descartan la existencia de esta gráfica bajo hipótesis adicionales sobre el grupo de automorfismos (rango 3 o transitividad), pero el caso general continúa siendo un problema abierto.

Más generalmente, podemos considerar gráficas fuertemente regulares de circunferencia al menos 4. Se conocen siete ejemplos:

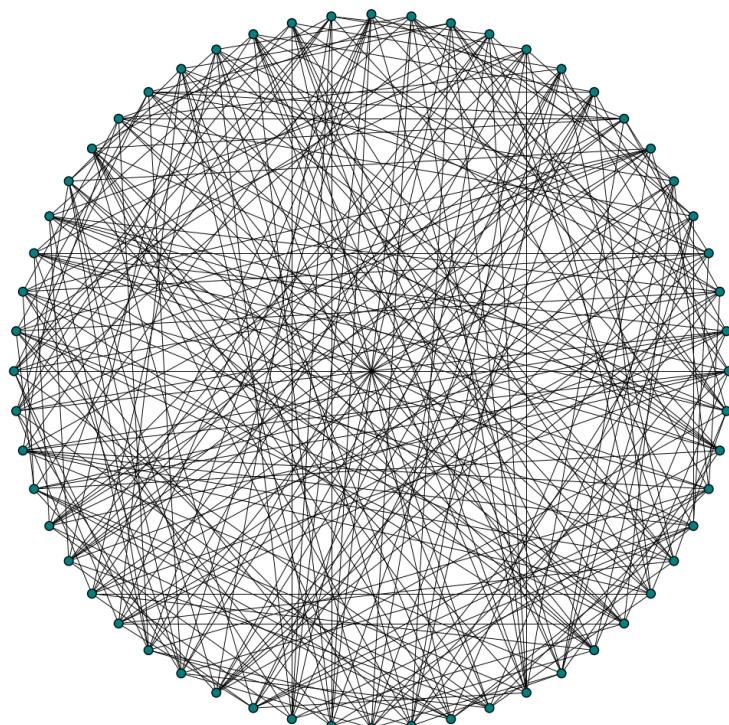
- i. **El pentágono ii**, con parámetros  $(5, 2, 0, 1)$ .
- ii. **La gráfica de Petersen iv**, con parámetros  $(10, 3, 0, 1)$ . Es el complemento de la gráfica triangular  $T(5)$ .
- iii. **El cubo 5 - plegado (gráfica de Clebsch)**, con parámetros  $(16, 5, 0, 2)$ . Esta gráfica se obtiene del cubo 5 - dimensional  $2^5$  sobre 32 vértices identificando los vértices antipodales.



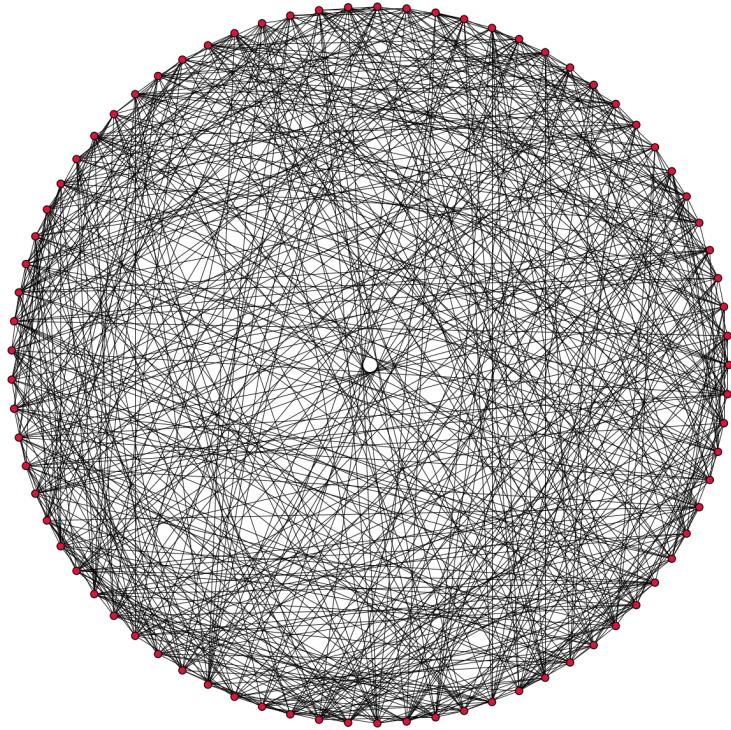
- iv. **La gráfica de Hoffman - Singleton**, con parámetros  $(50, 7, 0, 1)$ . Existen muchas construcciones de esta gráfica. Una breve, propuesta por N. Robertson, es la siguiente: Tomemos 25 vértices  $(i, j)$  y 25 vértices  $(i, j)'$  con  $i, j \in \mathbb{Z}_5$ , y unamos  $(i, j)$  con  $(i, j+1)$ ,  $(i, j)'$  con  $(i, j+2)'$ , y  $(i, k)$  con  $(j, ij+k)'$  para todos  $i, j, k \in \mathbb{Z}_5$ . Los subconjuntos  $(i, *)$  forman pentágonos, al igual que los  $(i, *)'$ , y cada una de las 25 uniones de  $(i, *)$  con  $(j, *)'$  induce una subgráfica de Petersen.



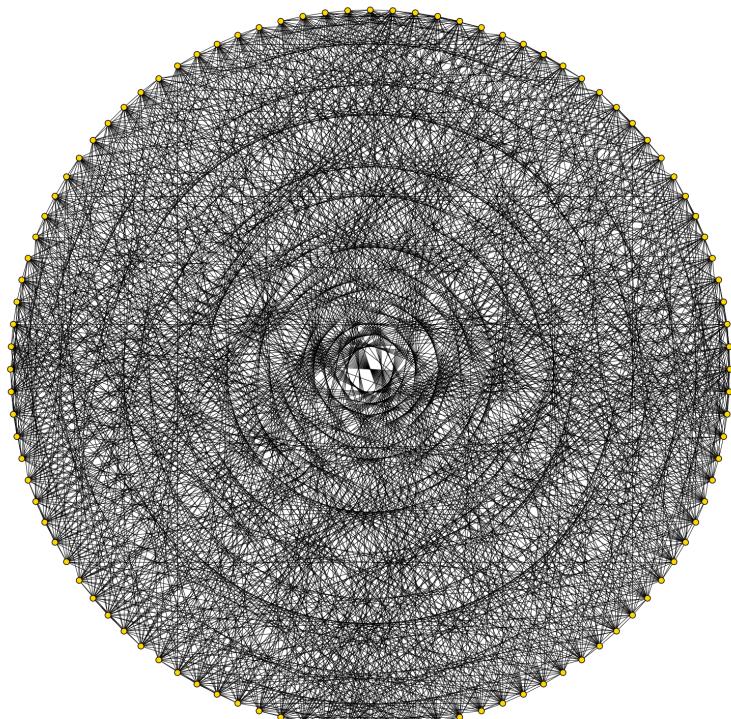
- v. **La gráfica de Gewirtz**, con parámetros  $(56, 10, 0, 2)$ . Tiene como vértices los  $77 - 21 = 56$  bloques del sistema de Steiner  $S(3, 6, 22)$  que no contienen un símbolo dado, donde dos bloques son adyacentes si son disjuntos. Es un subgráfica de la siguiente.



- vi. **La gráfica  $M_{22}$** , con parámetros  $(77, 16, 0, 4)$ . Sus vértices son los 77 bloques del sistema de Steiner  $S(3, 6, 22)$ , adyacentes cuando son disjuntos. Es una subgráfica de la siguiente.



- vii. **La gráfica de Higman - Sims**, con parámetros  $(100, 22, 0, 6)$ . Tiene  $1 + 22 + 77$  vértices: un elemento  $\infty$ , los 22 símbolos de  $S(3, 6, 22)$  y los 77 bloques de  $S(3, 6, 22)$ . El elemento  $\infty$  es adyacente a los 22 símbolos, cada símbolo es adyacente a los 21 bloques que lo contienen, y los bloques son adyacentes cuando son disjuntos. El grupo de automorfismos de rango 3 de esta gráfica es  $HS.2$ , donde  $HS$  es el grupo esporádico simple de Higman y Sims. Esta gráfica puede dividirse en dos mitades, cada una induciendo una subgráfica de Hoffman-Singleton.



Cada una de estas siete gráficas está determinada de manera única por sus parámetros. Se desconoce si existen más ejemplos. Hay infinitos conjuntos de parámetros posibles. Para los parámetros  $(324, 57, 0, 12)$ , la no existencia fue demostrada por GAVRILYUK & MAKHNEV [3] y por KASKI & ÖSTERGÅRD [6].

## Lista de resultados

2.2.1 Teorema . . . . .	7
2.5.2 Corolario . . . . .	8
2.5.4 Corolario . . . . .	8
3.1.1 Proposición . . . . .	8
3.1.2 Proposición . . . . .	10
3.2.1 Proposición . . . . .	12
3.3.1 Proposición . . . . .	12
3.3.2 Proposición . . . . .	14
9.1.1 Proposición . . . . .	23
9.1.2 Teorema . . . . .	27
9.1.3 Proposición . . . . .	30
9.1.4 Proposición . . . . .	32
9.1.5 Teorema . . . . .	33
9.1.6 Teorema . . . . .	38

## Referencias

- [1] Andries E. Brouwer and Willem H. Haemers. *Spectra of Graphs*. Springer, New York, 2012.
- [2] The Sage Developers. Sagemath, the sage mathematics software system (version 10.x). <https://www.sagemath.org>, 2025. Online SageCell Server: <https://sagecell.sagemath.org>.
- [3] A. L. Gavrilyuk and A. A. Makhnev. On krein graphs without triangles. *Doklady Akademii Nauk*, 403:727–730, 2005. Russian; English translation: *Doklady Mathematics* **72** (2005), 591–594.
- [4] A. J. Hoffman. On the polynomial of a graph. *American Mathematical Monthly*, 70:30–36, 1963.
- [5] A. J. Hoffman and R. R. Singleton. On moore graphs with diameters 2 and 3. *IBM Journal of Research and Development*, 4:497–504, 1960.
- [6] P. Kaski and P. R. J. Östergård. There are exactly five biplanes with  $k = 11$ . *Journal of Combinatorial Designs*, 16:117–127, 2008.