ARTÍCULO 1

Probabilidad y juegos

Análisis probabilístico de un juego de conteo con cartas españolas

Carlos Fernando Juárez Pacheco

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México

[1]Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México

Correo
Email: juarezp.carlosf@ciencias.unam.mx

En este trabajo se analiza un juego con cartas españolas de 48 naipes en el que las cartas se van revelando una a una mientras se recita una secuencia cíclica de números. El jugador pierde si el número dicho coincide con el valor de la carta revelada, y gana si logra completar toda la baraja sin coincidencias. Se estudia cómo la longitud de la secuencia numérica influye en la probabilidad de ganar, comparando estrategias que utilizan secuencias cortas y largas. A partir de un análisis probabilístico y simulaciones implementadas en Python, se observa que contar hasta números más altos aumenta la probabilidad de éxito. También se comentan variantes del juego con varios jugadores y posibles extensiones del modelo.

KEYWORDS
Cartas españolas, Estrategia de conteo, Simulación en Python

1 | INTRODUCCIÓN

Los juegos de cartas han sido utilizados con frecuencia como ejemplos sencillos para estudiar problemas de probabilidad. A partir de reglas simples, es posible plantear preguntas claras sobre azar, dependencia entre eventos y estrategias de juego. En particular, los juegos en los que las cartas se revelan de forma secuencial permiten analizar cómo las decisiones o reglas del conteo influyen en la probabilidad de éxito o fracaso.

En este artículo se estudia un juego basado en la baraja española de 48 cartas, compuesto por cuatro palos y valores del 1 al 12. El juego consiste en ir revelando cartas de la baraja, una por una y boca abajo, mientras el jugador recita una secuencia cíclica de números. El jugador pierde inmediatamente si, al revelar una carta, el número pronunciado coincide con el valor de la carta. El objetivo es, por tanto, completar la baraja sin que ocurra ninguna coincidencia.

Una característica notable del juego es la libertad en la elección de la secuencia numérica. El jugador puede, por ejemplo, alternar únicamente entre los números 1 y 2, o bien contar hasta valores más altos como 5, 10 o incluso 12 antes de reiniciar la secuencia. Esta flexibilidad da lugar a preguntas naturales desde el punto de vista probabilístico: ¿cómo influye la longitud de la secuencia en la probabilidad de ganar?, ¿existe una estrategia óptima?, ¿es preferible contar hasta números pequeños o grandes?, y ¿cómo cambian los resultados cuando el juego se extiende a varios jugadores?

El objetivo de este trabajo es responder a estas preguntas mediante un análisis probabilístico del juego y el apoyo de simulaciones en Python. Se mostrará que, de manera contraintuitiva, contar hasta números más altos incrementa la probabilidad de éxito, y se discutirán las razones matemáticas detrás de este fenómeno. Finalmente, se presentarán algunas variantes del juego, incluyendo versiones multijugador, que permiten ampliar el análisis y conectar este problema con modelos probabilísticos más generales.

2 | EL JUEGO BASE: CONTAR HASTA TRES

Consideremos una baraja española de 48 cartas, formada por cuatro palos y valores del 1 al 12, con cuatro cartas de cada valor. Las cartas se barajan de manera uniforme y se colocan en una pila boca abajo.

El juego procede de la siguiente forma: las cartas se van revelando una a una, mientras el jugador recita de forma cíclica la secuencia de números

$$1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$$

En cada paso, si el número pronunciado coincide con el valor de la carta revelada, el juego termina inmediatamente y el jugador pierde. El jugador gana si logra revelar las 48 cartas sin que ocurra ninguna coincidencia.

Nuestro objetivo es calcular la probabilidad de ganar este juego base.

2.1 | Planteamiento probabilístico

Para analizar este juego resulta conveniente reformularlo de manera no secuencial. Observemos que, al contar cíclicamente hasta tres, las posiciones en las que se revela una carta pueden dividirse en tres subconjuntos disjuntos según el número pronunciado:

$$L_1 = \{\text{posiciones donde se dice } 1\}, \quad L_2 = \{\text{posiciones donde se dice } 2\}, \quad L_3 = \{\text{posiciones donde se dice } 3\}.$$

Como el total de cartas es 48, cada uno de estos conjuntos contiene exactamente 16 posiciones.

Desde este punto de vista, barajar la baraja y revelar las cartas equivale a asignar aleatoriamente las cartas a estas 48 posiciones. El jugador pierde si alguna carta con valor 1 cae en una posición de L_1, o alguna carta con valor 2 cae en L_2, o alguna carta con valor 3 cae en L_3. Por el contrario, el jugador gana si todas las cartas con valor 1 se ubican en $L_2 \cup L_3$, todas las cartas con valor 2 en $L_1 \cup L_3$, y todas las cartas con valor 3 en $L_1 \cup L_2$.

Esta reformulación permite evitar el análisis paso a paso del juego, en el cual las probabilidades dependen del historial, y reduce el problema a un conteo combinatorio sobre asignaciones aleatorias de cartas a posiciones fijas.

2.2 | Probabilidad de ganar

En esta subsección calculamos $\mathbb{P}(\text{ganar})$ para el juego base (conteo cíclico $1, 2, 3$) mediante un conteo combinatorio. La idea central es sustituir el análisis secuencial por un problema de asignación aleatoria de cartas a posiciones fijas.

0) Partición de posiciones. Como se revelan 48 cartas y el conteo es $1, 2, 3$ repetido, las posiciones se dividen en tres conjuntos disjuntos:

$$L_1 = \{\text{posiciones donde se dice } 1\}, \quad L_2 = \{\text{posiciones donde se dice } 2\}, \quad L_3 = \{\text{posiciones donde se dice } 3\},$$

con $|L_1| = |L_2| = |L_3| = 16$. Se gana si ninguna carta con valor 1 cae en L_1, ninguna carta con valor 2 cae en L_2 y ninguna carta con valor 3 cae en L_3.

1) Número total de asignaciones. Consideremos primero únicamente las cartas con valores $1, 2, 3$ (cuatro copias de cada valor). El número total de formas de elegir posiciones para estas cartas, sin restricciones, es:

$$N_{\text{tot}} = \binom{48}{4}\binom{44}{4}\binom{40}{4}.$$

En efecto, se eligen las posiciones de los cuatro "1" entre 48, luego las posiciones de los cuatro "2" entre las 44 restantes, y finalmente las posiciones de los cuatro "3" entre las 40 restantes. Las demás cartas (valores 4 a 12) ocupan automáticamente los lugares sobrantes y no afectan el evento de ganar.

2) Conteo de asignaciones favorables por etapas. Contaremos ahora las asignaciones que cumplen las restricciones del juego, colocando sucesivamente los "1", luego los "2" y finalmente los "3", y contabilizando las opciones en cada etapa.

(A) Colocación de los "1" (evitando L_1). Los cuatro "1" solo pueden caer en $L_2 \cup L_3$. Sea

$$a = \#\{\text{unos colocados en } L_2\},$$

de modo que $4 - a$ unos quedan en L_3. El número de formas de hacerlo es

$$\binom{16}{a}\binom{16}{4-a}.$$

Tras esta colocación, en L_3 quedan libres

$$16 - (4 - a) = 12 + a$$

posiciones.

(B) Colocación de los "2" (evitando L_2). Los cuatro "2" solo pueden caer en $L_1 \cup L_3$. Sea

$$b = \#\{\text{doses colocados en } L_1\},$$

de modo que $4-b$ doses quedan en L_3. En L_1 hay 16 posiciones disponibles, mientras que en L_3 solo quedan $12+a$ posiciones libres (por los unos ya colocados). Por tanto, el número de formas es

$$\binom{16}{b}\binom{12+a}{4-b}.$$

Además, después de colocar esos b doses en L_1, quedan $16-b$ posiciones libres en L_1.

(C) Colocación de los "3" (evitando L_3). Los cuatro "3" solo pueden caer en $L_1 \cup L_2$. Sea

$$c = \#\{\text{treses colocados en } L_1\},$$

de modo que $4-c$ treses quedan en L_2. En L_1 quedan $16-b$ posiciones libres (porque ahí ya colocamos b doses) y en L_2 quedan $16-a$ posiciones libres (porque ahí colocamos a unos). Por tanto, el número de formas es

$$\binom{16-b}{c}\binom{16-a}{4-c}.$$

3) Suma total y probabilidad. Para cada triple (a,b,c) con $a,b,c \in \{0,1,2,3,4\}$, el producto de los tres factores anteriores cuenta las asignaciones favorables con esa distribución particular de cartas entre bloques. Sumando sobre todas las posibilidades obtenemos:

$$N_{\text{fav}} = \sum_{a=0}^{4}\sum_{b=0}^{4}\sum_{c=0}^{4}\binom{16}{a}\binom{16}{4-a}\binom{16}{b}\binom{12+a}{4-b}\binom{16-b}{c}\binom{16-a}{4-c}.$$

Finalmente,

$$\mathbb{P}(\text{ganar}) = \frac{N_{\text{fav}}}{N_{\text{tot}}} = \frac{1}{\binom{48}{4}\binom{44}{4}\binom{40}{4}}\sum_{a=0}^{4}\sum_{b=0}^{4}\sum_{c=0}^{4}\binom{16}{a}\binom{16}{4-a}\binom{16}{b}\binom{12+a}{4-b}\binom{16-b}{c}\binom{16-a}{4-c}.$$

Esta expresión proporciona un valor exacto de la probabilidad de éxito y servirá como referencia para comparar con otras variantes del juego en las que se modifica la longitud del conteo.

2.3 | Evaluación exacta de la probabilidad

La expresión obtenida para la probabilidad de ganar en el juego base es una suma finita de productos de coeficientes binomiales. En particular, se trata de un conteo exacto del número de asignaciones favorables de cartas a posiciones, dividido entre el número total de asignaciones posibles. Por esta razón, la probabilidad puede calcularse de manera exacta mediante aritmética combinatoria, sin recurrir a aproximaciones asintóticas ni simulaciones.

Al evaluar la suma, se obtiene el valor exacto

$$\mathbb{P}(\text{ganar}) = \frac{1089671476}{132638171391} \approx 0.008215368657.$$

Aunque esta expresión proporciona un resultado exacto, no se simplifica de forma natural a una fórmula cerrada más compacta, como un producto simple o una expresión elemental. Esto se debe a que el problema involucra restricciones dependientes entre las posiciones ocupadas por las cartas, lo cual conduce de manera natural a sumas combinatorias de este tipo.

En la práctica, el valor exacto puede calcularse de forma eficiente utilizando software de cálculo simbólico o lenguajes de programación que trabajen con enteros de precisión arbitraria. En la siguiente sección se compara este resultado con estimaciones obtenidas mediante simulaciones Monte Carlo, observándose un excelente acuerdo entre ambos enfoques.

2.4 | Comparación con simulación Monte Carlo

Con el fin de contrastar el valor exacto obtenido en la subsección anterior, se realizó una simulación Monte Carlo del juego base. En cada iteración se barajó una baraja española de 48 cartas y se revelaron las cartas una a una siguiendo el conteo cíclico $1, 2, 3$. Una simulación se consideró exitosa si no ocurrió ninguna coincidencia entre el número pronunciado y el valor de la carta revelada.

Se ejecutaron $100\,000$ simulaciones independientes, obteniéndose 803 victorias. La proporción muestral resultante fue

$$\hat{p} = 0.00803,$$

con un intervalo de confianza aproximado al 95%

$$(0.0074768243,\ 0.0085831757).$$

Este intervalo contiene al valor exacto

$$\mathbb{P}(\text{ganar}) = \frac{1089671476}{132638171391} \approx 0.00821537,$$

lo que indica un buen acuerdo entre el cálculo combinatorio y la estimación obtenida mediante simulación.

3 | GENERALIZACIÓN DEL JUEGO Y ELECCIÓN DEL CONTEO

Hasta ahora hemos analizado el juego base correspondiente al conteo cíclico $1, 2, 3$. Sin embargo, las reglas del juego permiten una libertad mayor: el jugador puede elegir contar hasta cualquier entero $m \geq 1$, repitiendo cíclicamente la secuencia

$$1, 2, \ldots, m, 1, 2, \ldots, m, \ldots$$

antes de revelar cada carta.

Esto plantea una pregunta natural desde el punto de vista probabilístico y estratégico:

¿Conviene contar hasta números pequeños o hasta números grandes para maximizar la probabilidad de ganar el juego?

A primera vista, podría parecer que contar hasta valores grandes aumenta el riesgo de coincidencias, ya que se introducen más números potencialmente peligrosos. No obstante, como se verá a continuación, el efecto dominante es otro: al aumentar m, las posiciones asociadas a cada número se reparten de forma más dispersa, lo que reduce la probabilidad de coincidencias y aumenta la probabilidad de ganar.

3.1 | Planteamiento general: conteo hasta m

Consideremos nuevamente una baraja española de 48 cartas, con valores del 1 al 12, cuatro copias de cada valor. Fijemos un entero $m \geq 1$ y supongamos que el jugador recita de forma cíclica la secuencia

$$1, 2, \ldots, m.$$

Las 48 posiciones del juego pueden dividirse en m subconjuntos disjuntos

$$L_1, L_2, \ldots, L_m,$$

donde L_j representa el conjunto de posiciones en las que se pronuncia el número j. Si 48 no es múltiplo de m, estos conjuntos no tienen exactamente el mismo tamaño, pero difieren a lo más en una unidad.

El jugador pierde si existe algún valor $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que una carta con valor j cae en una posición perteneciente a L_j. En consecuencia, el jugador gana si, para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$, las cuatro cartas con valor j se ubican en posiciones fuera de L_j.

3.2 | Interpretación probabilística

Desde esta perspectiva, el juego con conteo hasta m puede entenderse como un problema de asignación aleatoria con restricciones: se asignan aleatoriamente las cartas de la baraja a las 48 posiciones, y se requiere que, para cada $j \leq m$, las cartas con valor j eviten un subconjunto específico de posiciones.

A medida que m aumenta, el tamaño de cada bloque L_j disminuye. En particular, cuando m es grande, cada número aparece en relativamente pocas posiciones, lo que reduce la probabilidad de que las cuatro cartas de un valor coincidan con su bloque prohibido. Este efecto explica por qué, de manera contraintuitiva, contar hasta valores más grandes tiende a aumentar la probabilidad de ganar.

En las secciones siguientes se cuantificará este fenómeno mediante simulaciones y se compararán los valores de la probabilidad de ganar para distintos valores de m, lo que permitirá identificar tendencias generales y discutir posibles estrategias óptimas.

3.3 | Generalización combinatoria parcial: inclusión–exclusión

Fijemos un entero $m \geq 1$ y consideremos el conteo cíclico $1, 2, \ldots, m, 1, 2, \ldots, m, \ldots$ durante las 48 revelaciones. Como en el caso base, dividimos las posiciones en m bloques disjuntos

$$L_1, L_2, \ldots, L_m, \qquad L_j = \{\text{posiciones en las que se pronuncia } j\}.$$

Si escribimos $48 = qm + r$ con $0 \leq r < m$, entonces r de estos bloques tienen tamaño $q + 1$ y los $m - r$ restantes tienen tamaño q. En particular, los tamaños de los bloques difieren a lo más en una unidad.

Notemos además que la baraja española usada tiene valores $1, 2, \ldots, 12$ (cuatro copias de cada valor). Por lo tanto, los únicos números que pueden generar coincidencias son los de 1 a 12. Si $m > 12$, los números $13, 14, \ldots, m$ jamás coinciden con una carta, por lo que no afectan el evento de ganar. En consecuencia, basta considerar

$$s = \min(m, 12).$$

Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ definimos el evento

$$A_j = \{\text{al menos una de las cuatro cartas con valor } j \text{ cae en } L_j\}.$$

Entonces el evento de perder es $\bigcup_{j=1}^{s} A_j$, mientras que el evento de ganar es su complemento:

$$\{\text{ganar}\} = \bigcap_{j=1}^{s} A_j^c.$$

Por el principio de inclusión–exclusión,

$$\mathbb{P}(\text{ganar}) = \sum_{S \subseteq \{1,\ldots,s\}} (-1)^{|S|}\, \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in S} A_j\right).$$

Esta expresión es exacta y válida para cualquier m, pero su evaluación requiere contar (o calcular) las probabilidades de intersecciones $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in S} A_j\right)$, las cuales reflejan la dependencia introducida por el hecho de que distintas cartas compiten por las mismas posiciones.

3.4 | Evaluación exacta computable: conteo por etapas

Para evaluar de forma exacta los términos de inclusión–exclusión (y, en particular, para recuperar el caso $m = 3$), resulta útil expresar el problema como un conteo de asignaciones de cartas a posiciones con restricciones.

Número total de asignaciones. El número total de formas de colocar las cartas de valores $1, 2, \ldots, s$ (cuatro copias de cada valor) en las 48 posiciones, sin ninguna restricción, es

$$N_{\text{tot}}(s) = \prod_{k=0}^{s-1} \binom{48 - 4k}{4},$$

pues elegimos las posiciones de las cuatro cartas "1" entre 48, luego las posiciones de las cuatro cartas "2" entre las 44 restantes, y así sucesivamente hasta el valor s.

Idea del conteo por etapas. Para contar asignaciones favorables (o, más generalmente, para contar las asignaciones que satisfacen condiciones del tipo "las cartas j evitan L_j" o "al menos una carta j cae en L_j"), puede procederse *por etapas*: se colocan los valores uno por uno, registrando en cada paso cuántas posiciones permanecen disponibles en cada bloque conforme se van ocupando lugares.

Por ejemplo, en el caso base $m = 3$ se fijan los bloques L_1, L_2, L_3 y se colocan primero los cuatro "1" evitando L_1, luego los cuatro "2" evitando L_2 y finalmente los cuatro "3" evitando L_3. El conteo exacto conduce a una suma finita de productos de coeficientes binomiales, donde los índices (que en el caso $m = 3$ llamamos a, b, c) representan cuántas cartas de cada valor caen en cada bloque permitido.

Resultado (forma general por sumas finitas). En general, para cada m (y por tanto para cada partición de tamaños

$|L_1|, \dots, |L_s|$), la probabilidad de ganar puede escribirse como

$$\mathbb{P}(\text{ganar}) = \frac{N_{\text{fav}}(m)}{N_{\text{tot}}(s)}, \qquad N_{\text{tot}}(s) = \prod_{k=0}^{s-1} \binom{48-4k}{4},$$

donde $N_{\text{fav}}(m)$ se obtiene como una suma finita de productos de coeficientes binomiales que contabiliza, paso a paso, las colocaciones permitidas de las cartas $1, 2, \dots, s$ evitando sus respectivos bloques.

Más precisamente, el término general en $N_{\text{fav}}(m)$ se construye a partir de una elección de cuántas cartas de cada valor j se colocan en cada bloque permitido, y de cómo esas elecciones reducen el número de posiciones disponibles en las etapas siguientes. El resultado final es una suma finita del tipo

$$N_{\text{fav}}(m) = \sum_{\text{configuraciones compatibles}} \prod_{j=1}^{s} \binom{|L_j|}{v_j} \binom{48 - |L_j| - w_j}{4 - v_j},$$

donde:

- $v_j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ representa cuántas cartas con valor j caen en el bloque L_j (o, en la versión "ganar", se fuerza $v_j = 0$ para todo j);
- w_j representa el número de posiciones ya ocupadas fuera de L_j por los valores colocados en etapas anteriores (lo cual depende de la configuración);
- "configuraciones compatibles" significa que las selecciones de posiciones no se traslapan entre valores distintos.

Esta forma resume que, aunque la expresión exacta crece en complejidad al aumentar m, su evaluación es completamente finita y puede realizarse de forma exacta por computadora usando aritmética entera o racional.

En particular, para $m = 3$ se recupera la suma triple mostrada en la Sección 2, que corresponde a la elección explícita de configuraciones compatibles entre L_1, L_2, L_3.

En particular, aunque la expresión exacta para m general crece en complejidad, su evaluación es completamente finita y puede realizarse de manera exacta por computadora, lo que permite comparar valores de $\mathbb{P}(\text{ganar})$ para distintos m y estudiar qué elección del conteo maximiza la probabilidad de éxito.

3.5 | Resultados numéricos y efecto del conteo

Utilizando el procedimiento combinatorio exacto descrito en la sección anterior, se calculó la probabilidad de ganar el juego para distintos valores del conteo máximo m, considerando $m = 2, 3, \dots, 12$. En todos los casos se empleó aritmética exacta, evitando errores de aproximación numérica.

La Tabla 1 muestra los valores obtenidos.

Los resultados muestran de forma consistente que la probabilidad de ganar aumenta conforme se incrementa el valor de m. Este comportamiento puede parecer contraintuitivo en un primer momento, ya que al contar hasta números más altos se introducen más valores potencialmente peligrosos. Sin embargo, el efecto dominante es otro: al aumentar m, las posiciones asociadas a cada número se distribuyen entre un mayor número de bloques, reduciendo la frecuencia con la que cada valor aparece durante el juego.

En particular, para valores pequeños de m, cada número se repite en muchas posiciones, lo que incrementa la probabilidad de que alguna de las cuatro cartas correspondientes coincida con su bloque prohibido. En contraste,

Conteo máximo m	$\mathbb{P}$(ganar)
2	0.00427
3	0.00822
4	0.01060
5	0.01218
6	0.01322
7	0.01400
8	0.01462
9	0.01506
10	0.01545
11	0.01575
12	0.01606

TABLE 1 Probabilidad exacta de ganar el juego para distintos valores del conteo máximo m.

cuando m es grande, cada bloque L_j contiene menos posiciones, lo que disminuye la probabilidad de coincidencia y, por tanto, aumenta la probabilidad total de éxito.

Estos resultados confirman que, dentro de este modelo, resulta siempre ventajoso contar hasta valores más altos, siendo el caso $m = 12$ el que maximiza la probabilidad de ganar entre las opciones consideradas.

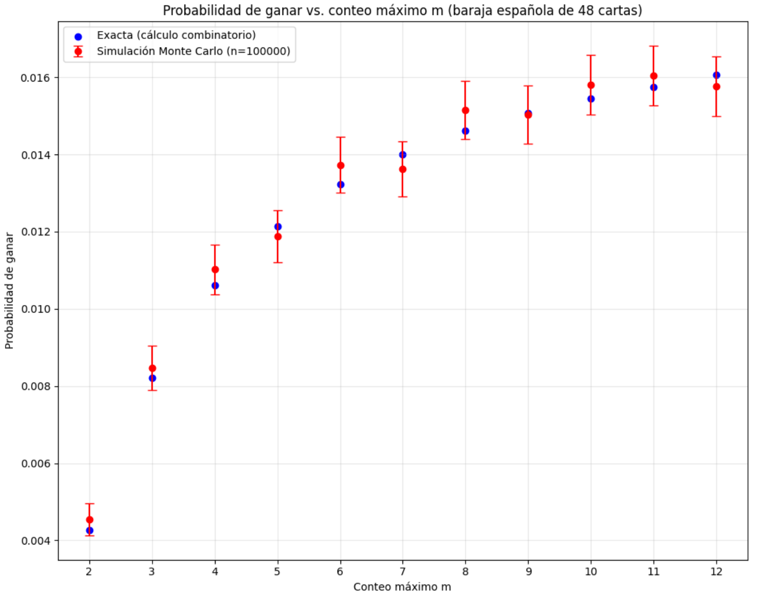

FIGURE 1 Probabilidad de ganar en función del conteo máximo m para $m = 2, \ldots, 12$. Los puntos corresponden al valor exacto (cálculo combinatorio) y a estimaciones por simulación Monte Carlo con $n = 100\,000$ iteraciones.

Como se aprecia en la Figura 1, la probabilidad de ganar aumenta con m y las estimaciones por simulación concuerdan con los valores exactos.

En conjunto, los resultados obtenidos indican que la posición inicial sí puede influir en la probabilidad de ganar en la modalidad multijugador considerada. Las simulaciones sugieren que las posiciones intermedias-altas, en particular alrededor de 7 y 8, ofrecen una ligera ventaja sobre los extremos. Este comportamiento parece explicarse por un equilibrio entre la exposición temprana al riesgo de eliminación y la posibilidad de que una ronda termine antes de que todos los jugadores deban actuar. Si bien las diferencias observadas no son drásticas, sí son consistentes y reproducibles bajo el modelo analizado.

4 | EXTENSIÓN MULTIJUGADOR Y ELECCIÓN DE POSICIÓN INICIAL

En esta sección consideramos una variante multijugador del juego, diseñada para 12 participantes. El objetivo ya no es *terminar la baraja*, sino *sobrevivir* a una secuencia de rondas hasta que quede una sola persona en juego. En cada ronda se utiliza una baraja española de 48 cartas (valores 1 a 12 con cuatro copias de cada valor), y en cada nueva ronda la baraja se vuelve a barajar.

4.1 | Reglas del juego multijugador

Sean 12 jugadores sentados en un orden fijo alrededor de una mesa. Al inicio de la partida se asigna una numeración $1, 2, \ldots, 12$ a los jugadores según su posición en el sentido de las manecillas del reloj.

Cada *ronda* consiste en revelar cartas una a una en el orden de los jugadores. El jugador con número 1 revela una carta y pronuncia "1"; luego el jugador con número 2 revela una carta y pronuncia "2", y así sucesivamente hasta el jugador con número 12, quien revela una carta y pronuncia "12". Si aún quedan cartas, el proceso se repite desde el jugador con número 1 (es decir, el conteo es cíclico).

Un jugador queda *eliminado* en el instante en que el número que pronuncia coincide con el valor de la carta que revela. En ese caso, la ronda termina inmediatamente.

Al finalizar una ronda (ya sea porque alguien fue eliminado, o porque no hubo eliminados), se recoge la baraja, se vuelve a barajar y se inicia una nueva ronda con un cambio de orientación: se invierte el sentido de numeración. En particular, si en una ronda el jugador etiquetado como 12 fue el último en actuar, entonces en la ronda siguiente dicho jugador pasa a ser el jugador etiquetado como 1 (y pronuncia "1"), el jugador etiquetado como 11 pasa a ser el 2, y así sucesivamente. En cada ronda, por tanto, el rol de "decir un número dado" rota sistemáticamente entre los participantes.

El juego continúa ronda tras ronda hasta que queda un único jugador no eliminado, quien se declara ganador.

4.2 | Pregunta estratégica

Esta modalidad plantea una pregunta natural de estrategia:

¿En qué posición conviene sentarse (o con qué número conviene iniciar) para maximizar la probabilidad de ser el último jugador en pie?

A primera vista, podría pensarse que ciertas posiciones iniciales son ventajosas o desventajosas, debido a que el jugador que actúa primero (o el que actúa con mayor frecuencia al inicio del ciclo) podría estar más expuesto a ser eliminado. Sin embargo, la regla de invertir el sentido en cada ronda y reasignar los números provoca que los roles se roten entre los jugadores, lo cual sugiere que la ventaja (si existe) puede ser más sutil y depender de la dinámica de eliminaciones y del mecanismo de rotación.

En las subsecciones siguientes se formaliza el modelo probabilístico de esta variante y se exploran, mediante simulaciones, posibles asimetrías entre posiciones iniciales.

4.3 | Discusión cualitativa: ¿importa la posición?

Antes de formalizar el modelo, conviene hacer algunas observaciones cualitativas que ayudan a entender por qué la posición inicial podría influir en la probabilidad de ganar.

En cada ronda, el jugador etiquetado como 1 es quien revela la primera carta. Si interpretamos la ronda como un "riesgo inmediato" de eliminación, resulta claro que comenzar en la posición 1 es poco atractivo: en la primera jugada de la ronda, ese jugador enfrenta la posibilidad de que la carta revelada sea un 1. Bajo una heurística simple, esto puede pensarse como una probabilidad del orden de $1/12$ de que ocurra una coincidencia (pues hay 12 valores posibles en la baraja), por lo que la primera posición concentra exposición desde el inicio.

Podría parecer entonces que ocupar el extremo opuesto (la posición 12) es mejor, ya que permite *sobrevivir más tiempo dentro de la ronda* antes de tener que revelar una carta. Sin embargo, debido a la regla de inversión de sentido, esa ventaja no se mantiene: al finalizar la ronda, los roles se invierten y quien era 12 pasa a desempeñar el rol de 1 en la siguiente ronda. En otras palabras, ocupar el extremo 12 equivale a postergar el riesgo una ronda, pero no eliminarlo; cada dos rondas, dicho jugador vuelve a quedar expuesto a la primera posición.

De manera similar, ubicarse exactamente en el "centro" tampoco parece garantizar una ventaja: mientras que en los extremos existe la posibilidad de que una ronda termine antes de que llegue el turno de actuar (si alguien es eliminado pronto), en posiciones intermedias es más probable que el jugador alcance a revelar una carta en la mayoría de las rondas. Esto sugiere que la posición óptima podría ser un compromiso entre *no quedar expuesto siempre al inicio* y *no verse obligado a actuar en casi todas las rondas*.

En el video que motiva este trabajo se menciona, de manera empírica, que una de las mejores posiciones iniciales en este juego es la 8. La siguiente subsección propone un modelo probabilístico para estudiar esta afirmación y comparar, bajo reglas fijas, la probabilidad de que cada jugador sea el último en pie.

4.4 | Modelo probabilístico para la probabilidad de ganar por jugador

Modelamos la dinámica como un proceso por rondas. En cada ronda:

1. Se baraja una baraja española estándar de 48 cartas.
2. Los jugadores activos (no eliminados) actúan en el orden de sus roles actuales $1, 2, \ldots, 12$ (o el subconjunto correspondiente si ya hay eliminados), revelando cartas sucesivamente.
3. La ronda termina en el primer instante en que ocurre una coincidencia entre el número pronunciado por el jugador en turno y el valor de la carta revelada; dicho jugador queda eliminado.
4. Si no ocurre ninguna coincidencia durante las 48 revelaciones, entonces no se elimina a nadie en esa ronda.
5. Se invierte el sentido (reasignación de roles), se vuelve a barajar, y comienza la siguiente ronda.

Bajo este modelo, la *probabilidad de ganar* del jugador i (en la posición inicial $i \in \{1, \ldots, 12\}$) se define como la probabilidad de que sea el último jugador no eliminado cuando el proceso termine. En particular, esta probabilidad depende de:

- la regla de rotación/inversión de roles entre rondas;
- el hecho de que la ronda puede terminar antes de que todos jueguen (porque la eliminación ocurre en la primera coincidencia);
- la actualización del conjunto de jugadores activos conforme ocurren eliminaciones.

En general, obtener una expresión cerrada para estas probabilidades resulta difícil, ya que el proceso introduce dependencias entre rondas y estados posibles del conjunto de jugadores activos. Por ello, en lo que sigue se estiman las probabilidades de victoria de cada posición inicial mediante simulación Monte Carlo, comparando si efectivamente existen posiciones con ventaja sistemática (por ejemplo, la posición 8 reportada en el video).

4.5 | Resultados numéricos: probabilidad de ganar por posición inicial

Para estudiar si la posición inicial influye en la probabilidad de resultar ganador en la modalidad multijugador, se estimó por simulación Monte Carlo la probabilidad de victoria de cada jugador (posición inicial 1 a 12). En cada corrida se ejecutó el juego completo hasta que quedara un único jugador, barajando la baraja en cada ronda e invirtiendo el sentido de numeración (y reasignación de roles) al finalizar cada ronda, tal como se describió en la Sección 4.

En la Tabla 2 se muestran las probabilidades estimadas $\hat{p}$ junto con intervalos de confianza aproximados al 95%. Los resultados sugieren que la probabilidad de ganar *no es uniforme* a lo largo de las posiciones: se observa un aumento desde la posición 1 hasta un máximo alrededor de las posiciones centrales-altas. En particular, bajo esta implementación, la posición 7 presenta la estimación más alta, con la posición 8 muy cercana, lo cual concuerda cualitativamente con la afirmación mencionada en el video (que sugiere la posición 8 como una de las mejores).

Posición	$\hat{p}$	IC 95%
1	0.07695	(0.07530, 0.07860)
2	0.07909	(0.07742, 0.08076)
3	0.08062	(0.07893, 0.08231)
4	0.08241	(0.08071, 0.08411)
5	0.08345	(0.08174, 0.08516)
6	0.08610	(0.08436, 0.08784)
7	0.08778	(0.08603, 0.08953)
8	0.08628	(0.08454, 0.08802)
9	0.08491	(0.08318, 0.08664)
10	0.08546	(0.08373, 0.08719)
11	0.08466	(0.08293, 0.08639)
12	0.08229	(0.08059, 0.08399)

TABLE 2 Resultados de simulación para la modalidad multijugador: probabilidad estimada de ganar por posición inicial.

La Figura 2 visualiza estos resultados. La tendencia creciente hasta posiciones cercanas a 7–8 puede interpretarse como un balance entre (i) el riesgo de estar demasiado expuesto al inicio de cada ronda (posiciones bajas, que con mayor frecuencia se enfrentan a los primeros turnos), y (ii) el hecho de que una ronda suele terminar tan pronto ocurre la primera coincidencia, lo cual puede impedir que los jugadores muy tardíos actúen en algunas rondas. Bajo la regla de inversión de sentido, estos efectos se redistribuyen entre rondas, pero no necesariamente de forma perfectamente simétrica cuando se consideran eliminaciones progresivas y terminación temprana de rondas.

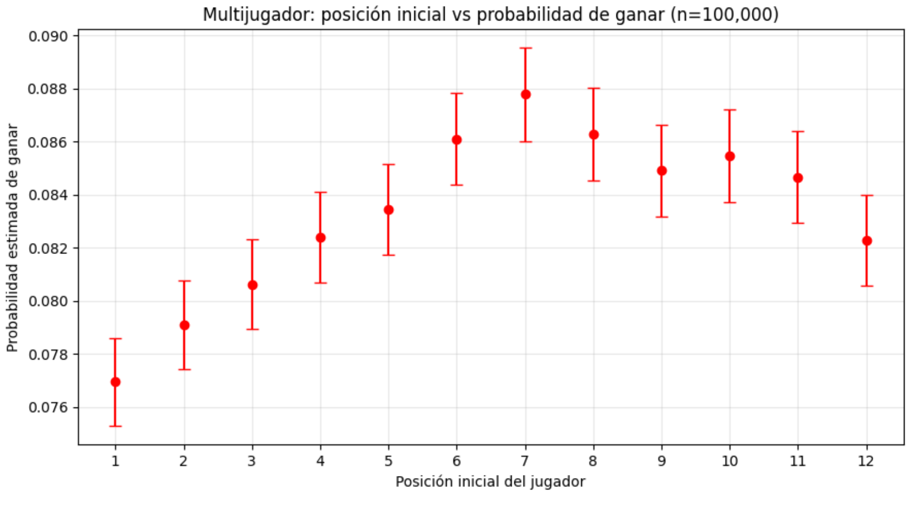

FIGURE 2 Probabilidad estimada de ganar en la modalidad multijugador en función de la posición inicial. Los puntos corresponden a $\hat{p}$ y las barras de error muestran intervalos de confianza aproximados al 95%.

5 | CONCLUSIONES

En este trabajo se analizó un juego de cartas basado en coincidencias entre valores revelados y un conteo cíclico, utilizando una baraja española de 48 cartas. En primer lugar, se estudió la versión de un solo jugador, para la cual se obtuvieron expresiones exactas de la probabilidad de ganar mediante técnicas combinatorias, así como estimaciones independientes por simulación Monte Carlo. Los resultados muestran de forma consistente que la probabilidad de éxito aumenta conforme se incrementa el conteo máximo m, alcanzando su valor más alto cuando $m = 12$.

Posteriormente, se consideró una extensión multijugador del juego, en la que los participantes son eliminados progresivamente y el sentido del conteo se invierte en cada ronda. Dado que el análisis exacto de esta dinámica resulta complejo, se recurrió a simulaciones para estimar la probabilidad de victoria asociada a cada posición inicial. Los resultados sugieren que ciertas posiciones intermedias pueden ofrecer una ligera ventaja, en concordancia con observaciones empíricas previas.

En conjunto, este estudio ilustra cómo problemas planteados en contextos lúdicos pueden abordarse de manera sistemática mediante herramientas de probabilidad, combinatoria y simulación computacional. Entre posibles extensiones se encuentran el análisis de otras reglas de eliminación, el uso de barajas de distinto tamaño o la incorporación de estrategias adaptativas por parte de los jugadores.

Agradecimientos

El autor del presente trabajo desea agradecer al creador del video en línea que motivó la exploración inicial del juego de cartas estudiado en este trabajo. Dicho video sirvió como punto de partida e inspiración para plantear las preguntas probabilísticas y estratégicas analizadas. Todo el desarrollo matemático, las simulaciones computacionales y los resultados presentados en este artículo son aportaciones originales del autor.

Referencias

[1] J. Bermejo. *Las matemáticas de las cartas españolas*. Video de YouTube, publicado el 12 de marzo de 2025. Disponible en: `https://www.youtube.com/watch?v=1KjSFPRnRs8`

A | IMPLEMENTACIÓN EN CÓDIGO

A continuación se incluye el link al repositorio del código usado para este artículo:

`https://colab.research.google.com/drive/1cKbkQubDVKTzFGbL2rLt2uYHezpL4Xgb?usp=sharing`