Processamento digital de sinais

06 - Projeto de filtros FIR

Prof. Carlos Speranza
DAELN/IFSC

Conteúdo

1. Etapas (genéricas) para projeto de filtros
2. Especificações
3. Projeto de Filtro FIR: método das janelas
4. Tipos de janelas e suas características
5. Exemplos python

Etapas para projeto de filtros

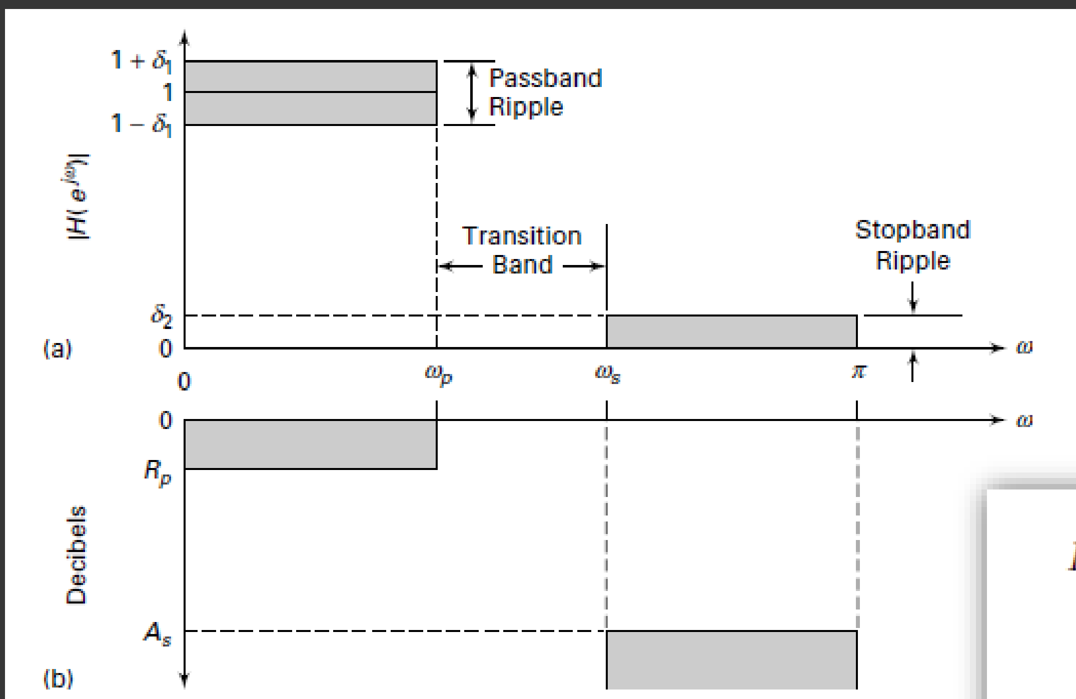
1. **Especificações**: determinada pela aplicação (norma, por exemplo)

2. **Aproximação**: conceitos e métodos matemáticos para obtenção de filtro a partir das especificações. É importante:
   - FIR ou IIR ?
   - Ordem do filtro e cálculo dos coeficientes

3. **Implementação**: em software e hardware específicos. Escolha da estrutura, estudo de erros de quantização (simulação) e testes finais.

Especificações

- Especificações do filtro passa-baixa (FPB) (pode ser transformado em outros filtros): absolutas e relativas (dB)



$$R_p = -20\log_{10}\frac{1-\delta_1}{1+\delta_1} > 0\ (\approx 0)$$

$$A_s = -20\log_{10}\frac{\delta_2}{1+\delta_1} > 0\ (\gg 1)$$

Características dos filtros FIR

- FIR: **Finite Impulse Response**
- <u>Exclusivo</u>: a resposta de fase **pode** ser <u>exatamente</u> linear
- Facilidade no projeto: sempre sistemas estáveis, mesmo quando implementados em precisão finita
- Resultam em filtros maiores, ou seja, com mais coeficientes, quando comparados com os filtros IIR

Projeto pelo método das janelas

- Filtro PB ideal:

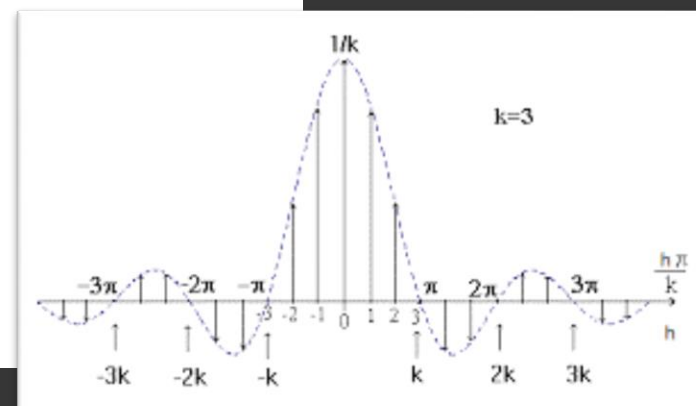
$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\alpha\omega}, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

- Resposta ao impulso:

$$h_d(n) = \mathcal{F}^{-1}\left[H_d(e^{j\omega})\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 \cdot e^{-j\alpha\omega}e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{\sin\left[\omega_c(n-\alpha)\right]}{\pi(n-\alpha)}$$



- Como $h_d(n)$ é <u>infinita</u> e <u>não-causal</u>, devemos trunca-la em ambos os lados:

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n), & 0 \le n \le M-1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad \text{and} \quad \alpha = \frac{M-1}{2}$$

Projeto pelo método das janelas

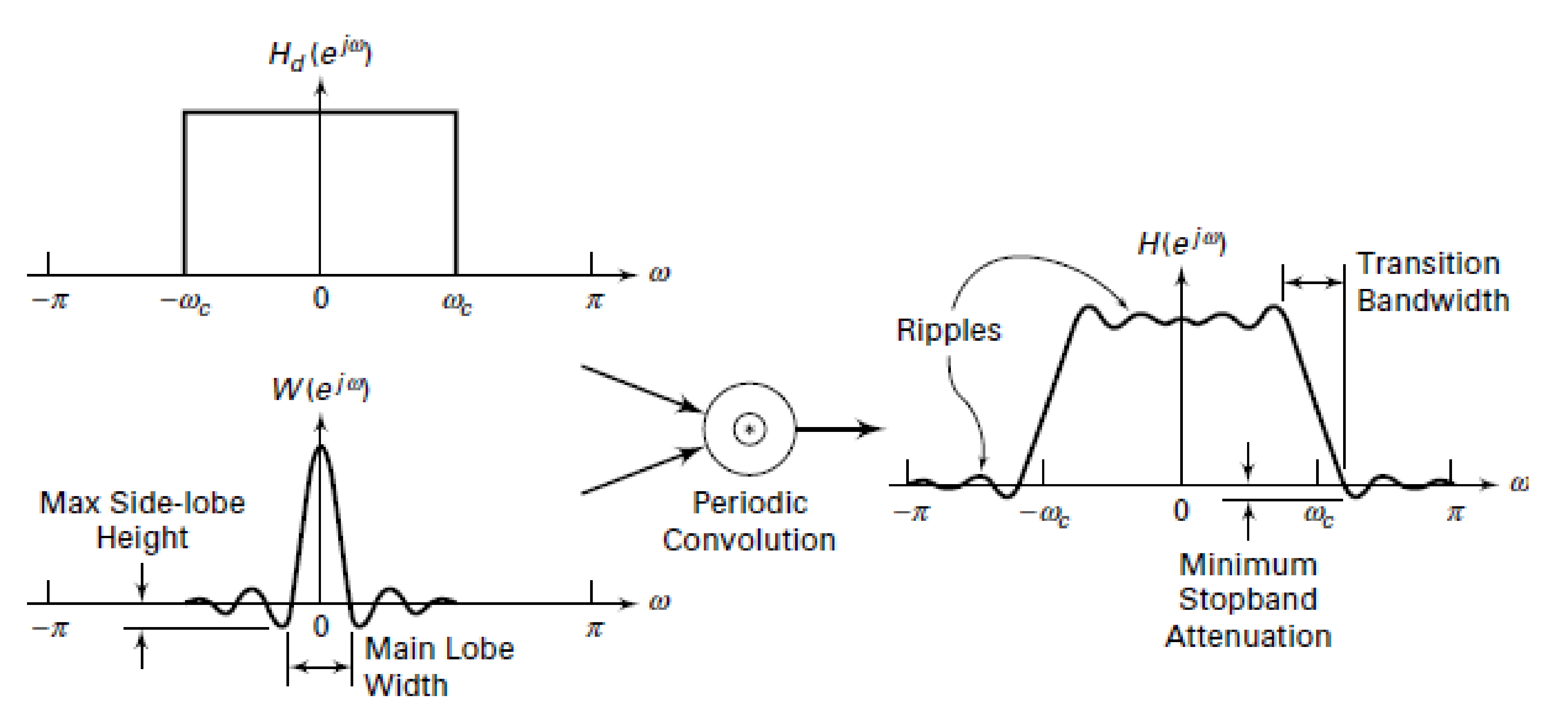
- Isso pode ser obtido através da multiplicação por uma função janela $\omega(n)$ não-nula de 0 a *M*-1:

$$h(n) = h_d(n)\omega(n)$$

- Essa multiplicação no domínio do tempo se transforma numa convolução periódica na frequência :

$$H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) \circledast W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W\left(e^{j\lambda}\right) H_d\left(e^{j(\omega-\lambda)}\right) d\lambda$$

Projeto pelo método das janelas



Janela retangular

- Domínios do tempo e da frequência:

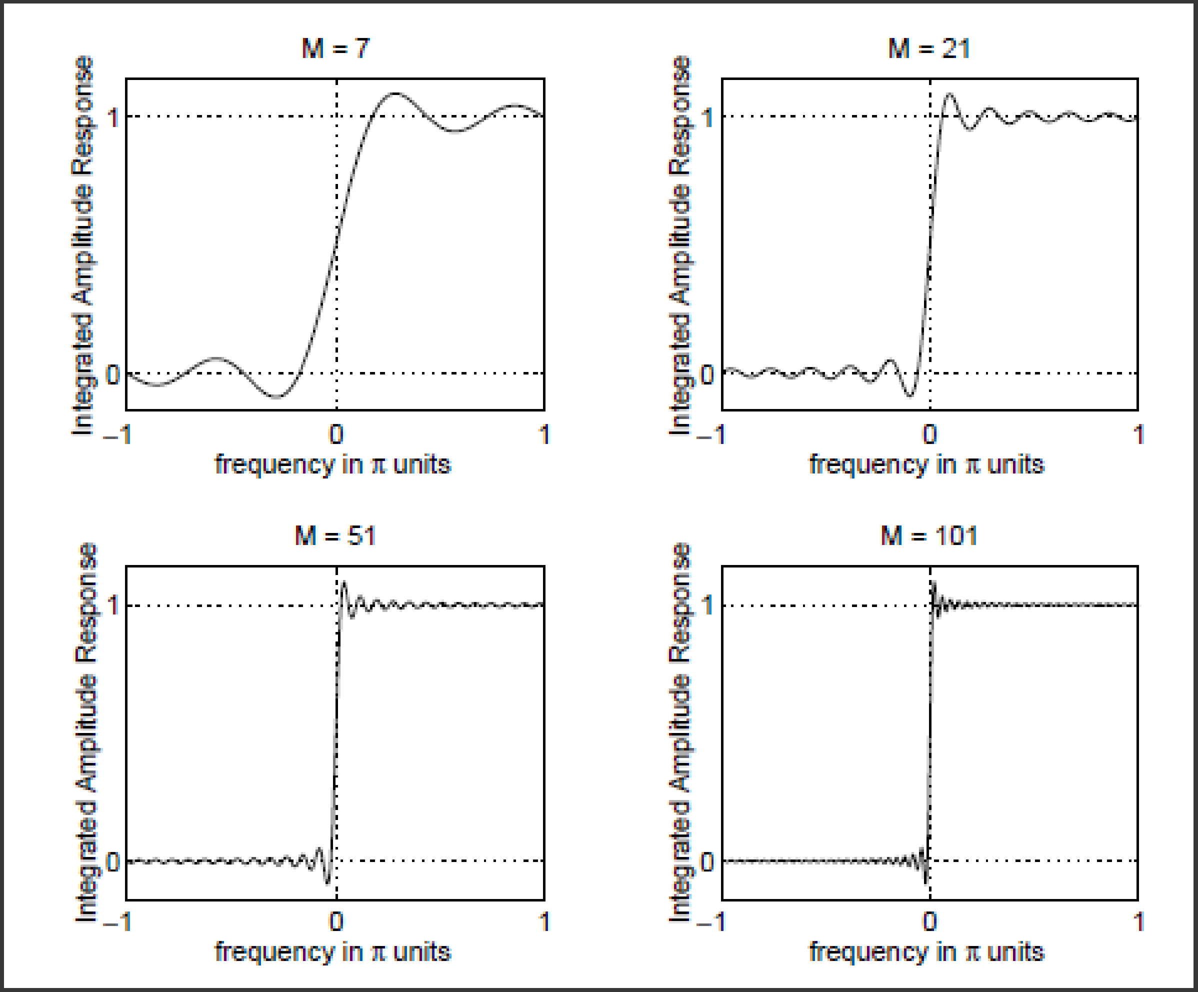
$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$W(e^{j\omega}) = \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega M}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right] e^{-j\omega\frac{M-1}{2}} \Rightarrow W_r(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{\omega M}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

- Largura da banda de transição: $1.8\pi/M$

- Janela mais simples, no entanto fornece a pior resposta em termos de atenuação da banda de rejeição: 21 dB **independente de *M*** (insuficiente para maioria das aplicações)

Fenômeno de *Gibbs*



- Além disso, essa janela afeta completamente a resposta em amplitude do filtro
- As amplitudes das oscilações não diminuem com aumento da janela *M*

Uso de outras janelas

- A resposta de amplitude pode ser melhorada pela utilização de outros tipos de janelas $\omega(n)$ para reduzir:
  - lóbulos laterais (banda de rejeição)
  - amplitude da oscilação (banda de passagem)

- Essas janelas recebem os nomes dos seus desenvolvedores e possuem transições temporais mais suaves do que a retangular

- A melhoria da resposta de amplitude tem um custo, que é o alargamento da banda de transição. Mas isso pode ser compensado utilizando filtros de maior ordem (maior M).

Janelas: equações

Bartlett (triangular)

$$w[n] = \begin{cases} 2n/M, & 0 \le n \le M/2, \ M \text{ even} \\ 2 - 2n/M, & M/2 < n \le M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Hann

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5\cos(2\pi n/M), & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

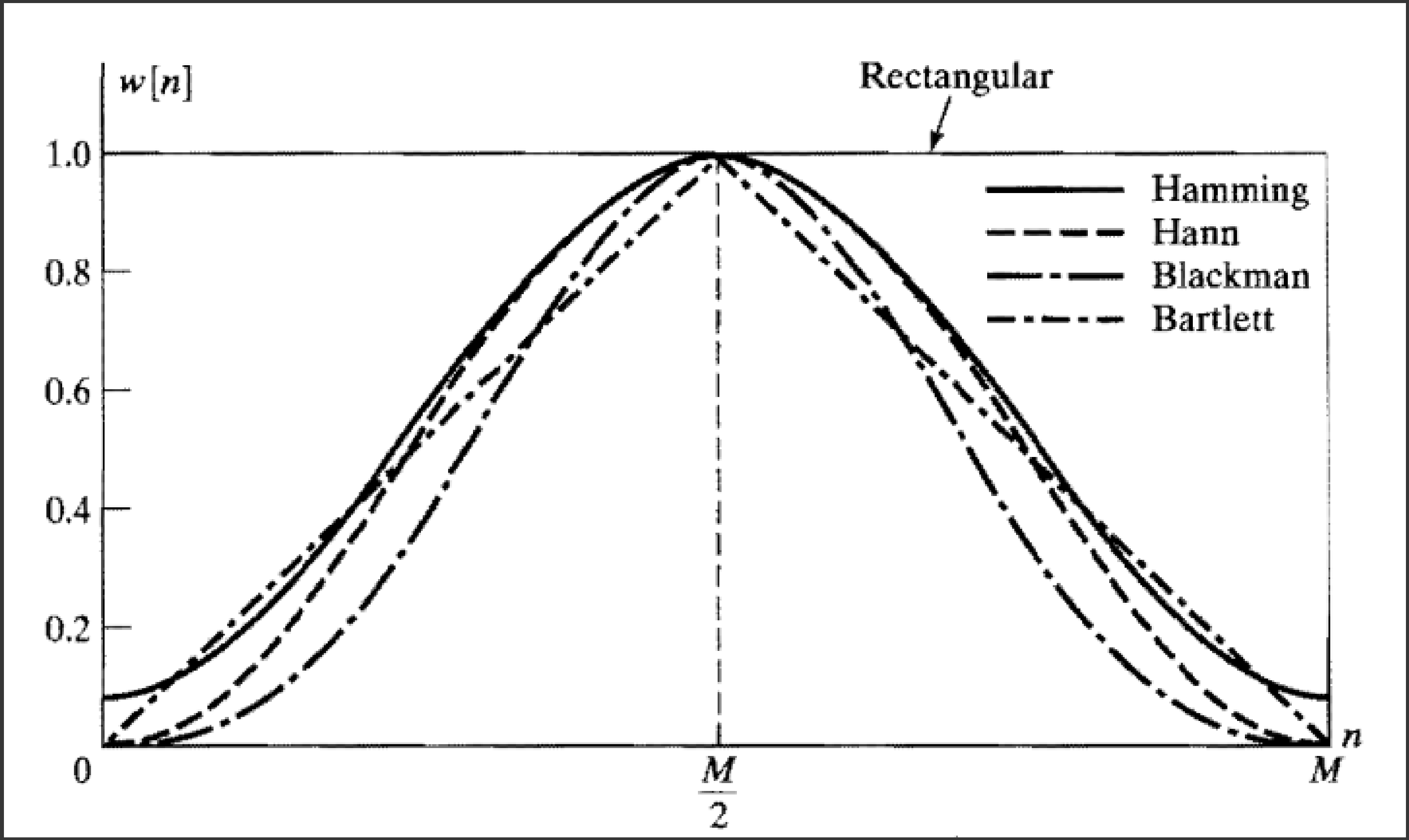
Hamming

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos(2\pi n/M), & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Blackman

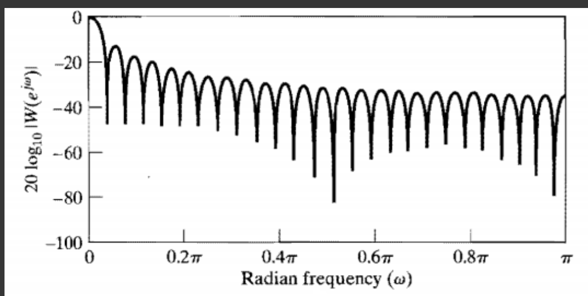
$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5\cos(2\pi n/M) + 0.08\cos(4\pi n/M), & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

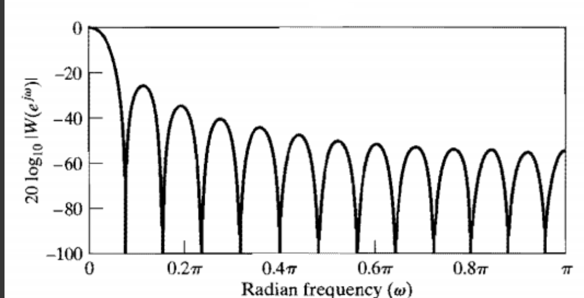
Janelas: curvas



Janelas: DTFT

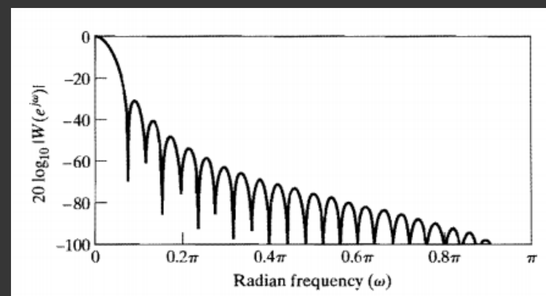
Retangular

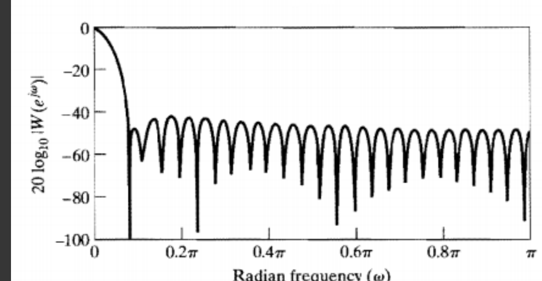




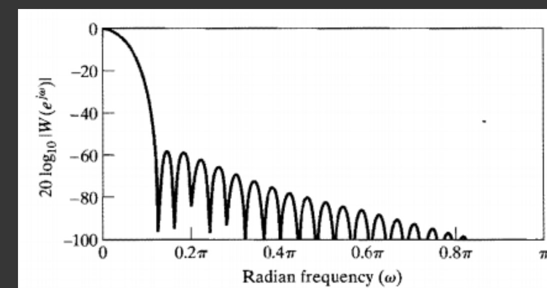
Bartlett

Hann





Hamming



Blackman

Janelas: características

Window Name	*Transition Width $\Delta\omega$* *Approximate*	*Exact Values*	*Min. Stopband Attenuation*
Rectangular	$\frac{4\pi}{M}$	$\frac{1.8\pi}{M}$	21 dB
Bartlett	$\frac{8\pi}{M}$	$\frac{6.1\pi}{M}$	25 dB
Hann	$\frac{8\pi}{M}$	$\frac{6.2\pi}{M}$	44 dB
Hamming	$\frac{8\pi}{M}$	$\frac{6.6\pi}{M}$	53 dB
Blackman	$\frac{12\pi}{M}$	$\frac{11\pi}{M}$	74 dB

Fase Linear

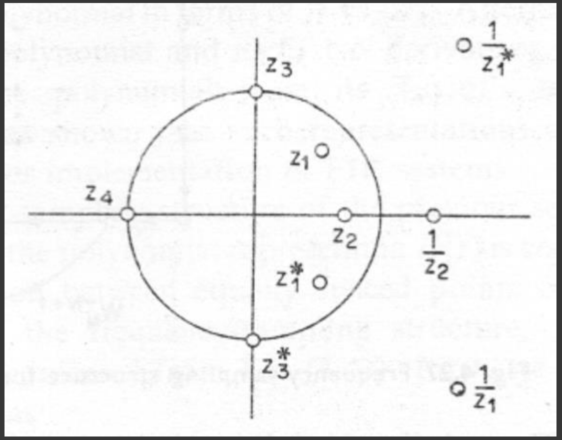
- Importante **subclasse** dos filtros FIR, apresentando atraso de grupo (τ_g) constante (resposta ao impulso simétricas ou antissimétricas.

- Para ser fase linear, as singularidades devem estar:
  - Polos: todos na origem (FIR)
  - Zeros: podem estar em

    $z = 1$ ou $z = -1$

    $z = a$ e $z = 1/a$

    $z = z_1, z = 1/z_1, z = z_1^*$ e $z = 1/z_1^*$

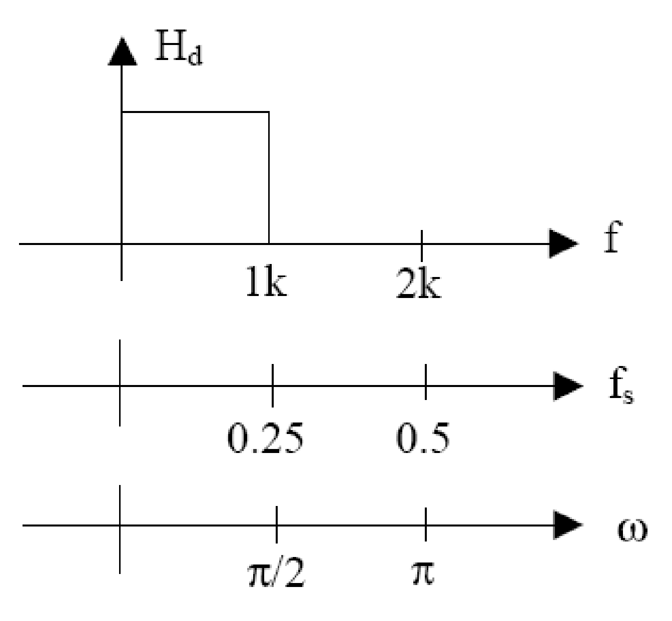


- O método das janelas sempre FIR com fase linear.

Exemplo 1: passa-baixa, M dado

- Projetar FPB (FIR) com janela retangular (*M*=5 e *M*=7), com $f_c = 1\ kHz$ e $f_s = 4\ kHz$

- Especificação e normalização:



$$\omega_s = \Omega_s T_s = 2\pi f_s T_s = 2\pi 4000 \frac{1}{4000} = 2\pi$$

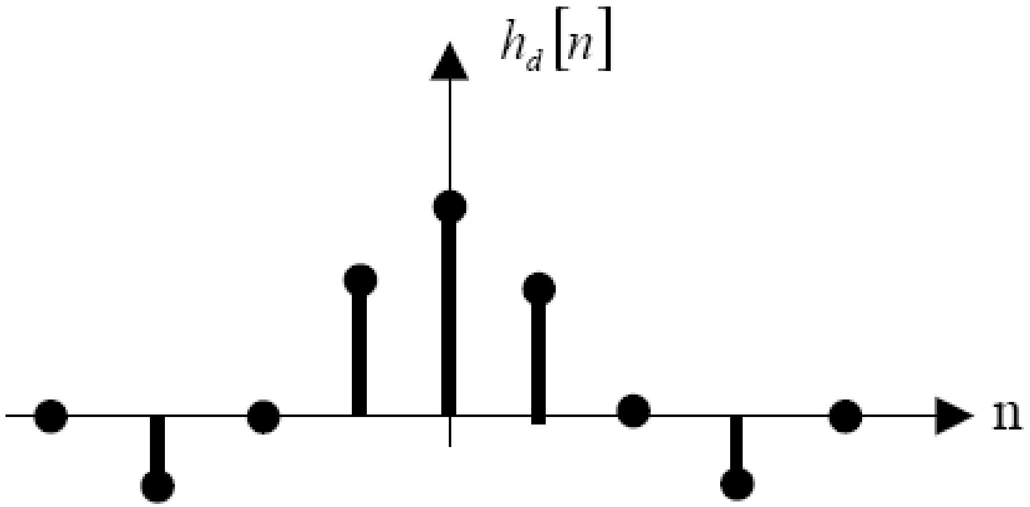
$$\omega_c = \Omega_c T_s = 2\pi f_c T_s = 2\pi 1000 \frac{1}{4000} = \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 1

- Resposta ao impulso:

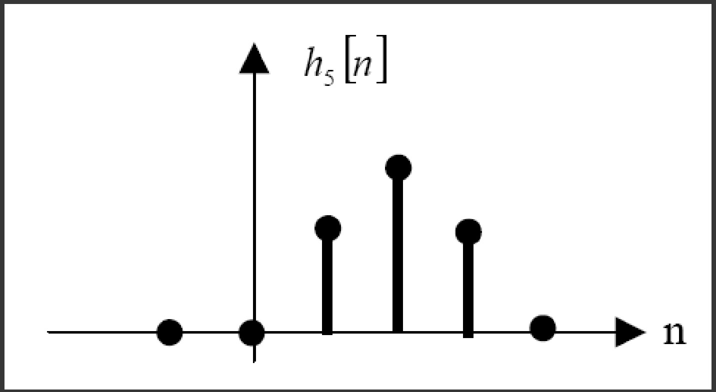
$$h_d[n] = \frac{\operatorname{sen}(\omega_c n)}{\pi n} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n}$$

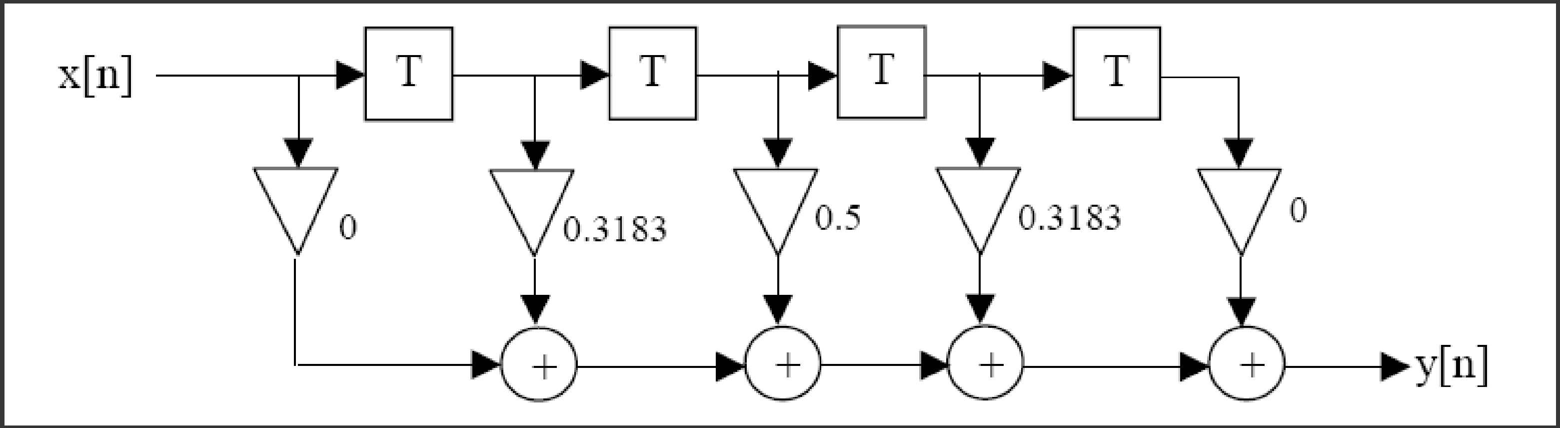
h_d	n
0.5	0
0.3183	1,-1
0	2,-2
-0.1061	3,-3
0	4,-4



Exemplo 1

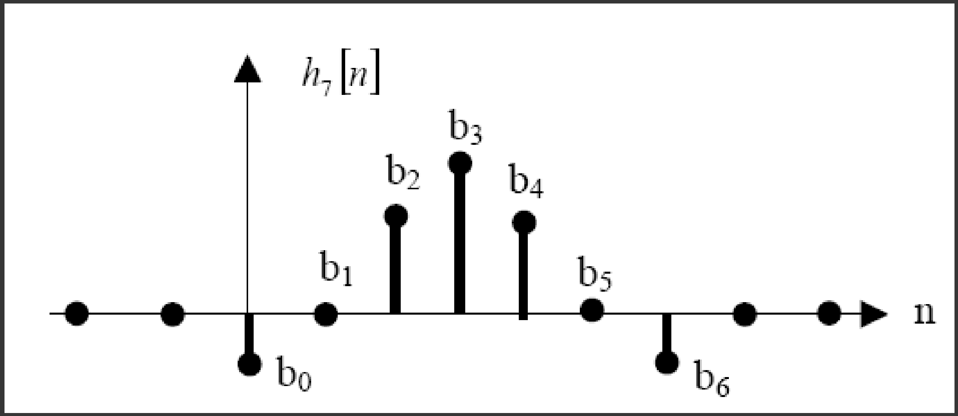
- O próximo passo é truncar e deslocar para M=5 e implementar:

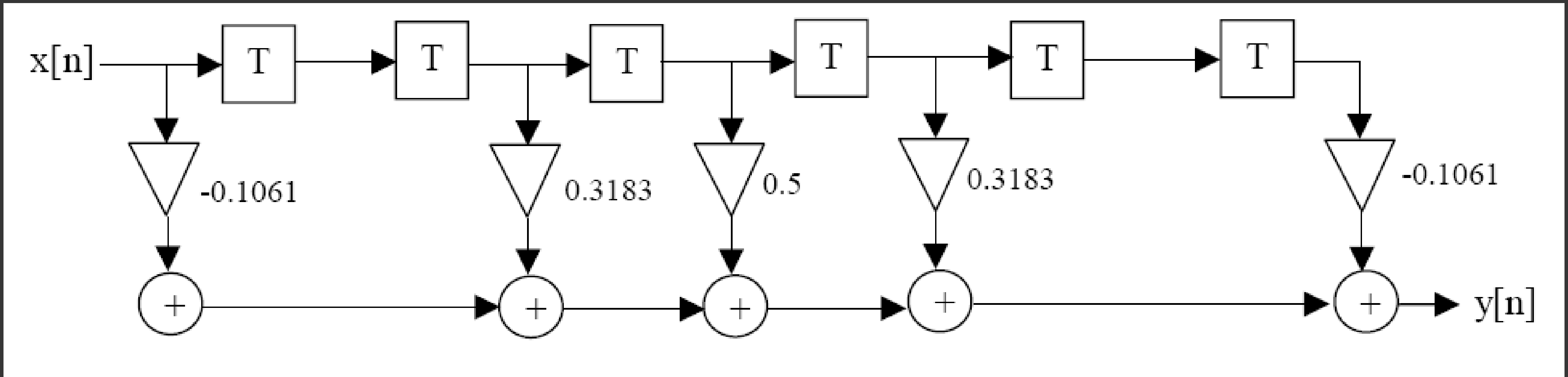




Exemplo 1

- Para M=7:





Exemplo 7.8: passa-baixa

- Projetar FPB (FIR) com as seguintes especificações:

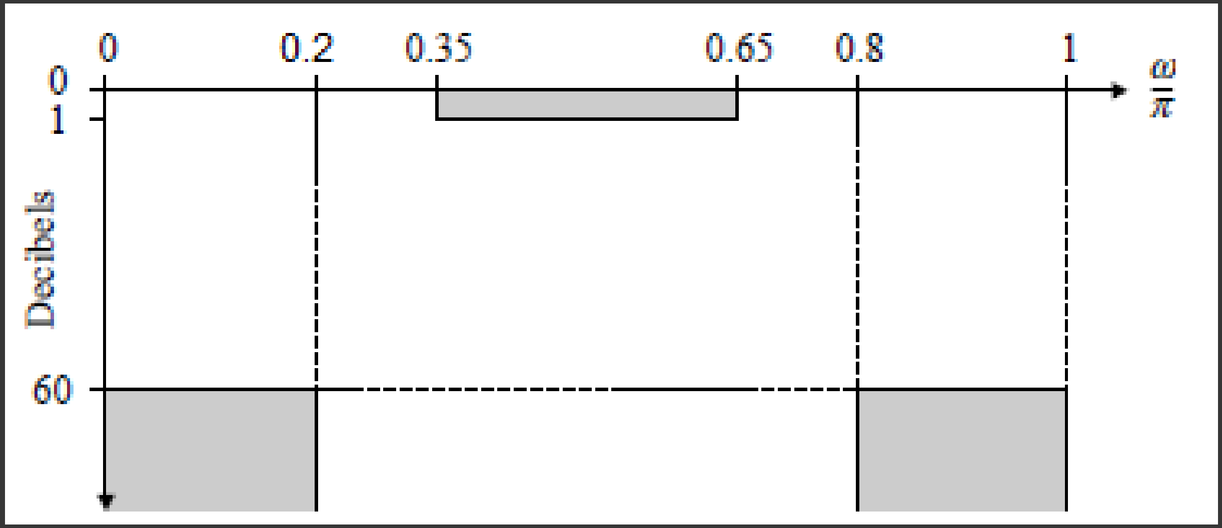
$$\omega_p = 0.2\pi, \quad R_p = 0.25 \text{ dB}$$
$$\omega_s = 0.3\pi, \quad A_s = 50 \text{ dB}$$

- <u>Solução</u>: tanto a janela de *Hamming* quanto a de *Blackman* fornecem atenuação maior que 50 db. Escolhe-se a primeira, para uma menor banda de transição e menor ordem.

- Não se utiliza R_p, mas tem que ser atendida!

Exemplo 7.10: passa-faixa

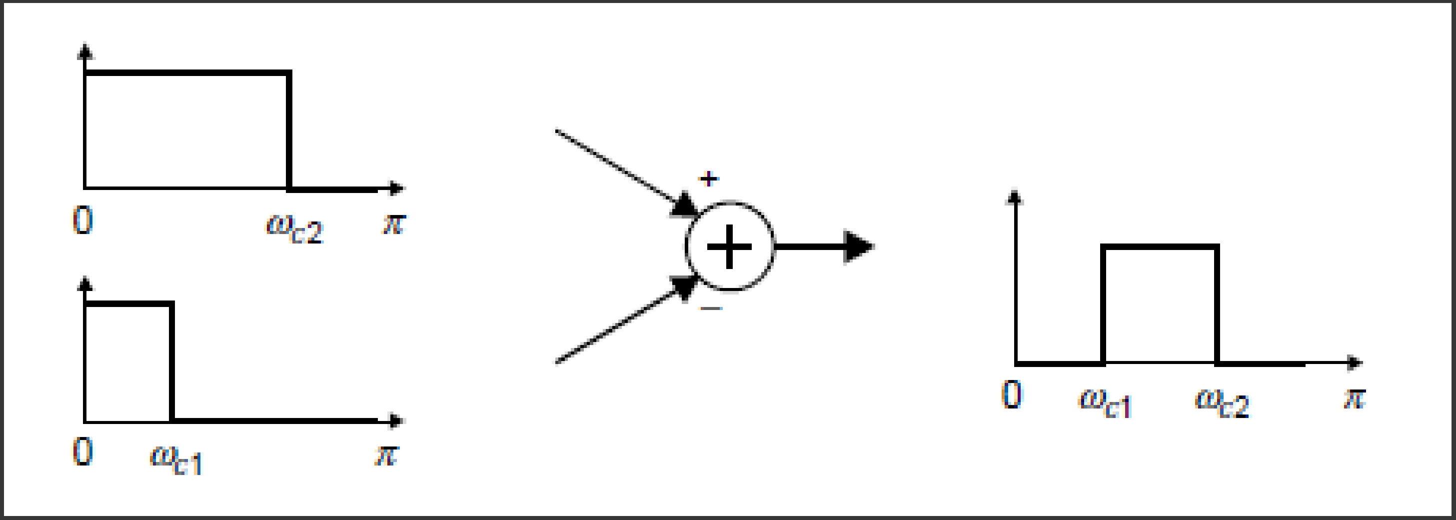
- Projetar um FPF (FIR) com as seguintes especificações:
  - Banda de rejeição inferior $\omega_{1s} = 0.2\pi$, $A_s = 60$ dB
  - Banda de passagem inferior $\omega_{1p} = 0.35\pi$, $R_p = 1$ dB
  - Banda de passagem superior $\omega_{2p} = 0.65\pi$, $R_p = 1$ dB
  - Banda de rejeição superior $\omega_{2s} = 0.8\pi$, $A_s = 60$ dB



Exemplo 7.10

- <u>Solução</u>: as bandas de transição $\Delta\omega = \omega_p - \omega_s$ são iguais. Usar a janela de *Blackman* (atenuação > 60 dB).

- Como obter um FPF a partir de dois FPB:



Janela de Kaiser

- A função janela é dada por:

$$w(n) = \frac{I_0\left[\beta\sqrt{1-(1-\frac{2n}{M-1})^2}\right]}{I_0\left[\beta\right]}, \quad 0 \leq n \leq M-1$$

onde $I_0(x)$ é a função Bessel de ordem zero modificada:

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(x/2)^k}{k!}\right]^2$$

- Difere-se das demais, pois seu cálculo é mais interativo e complexo.

Janela de Kaiser

- Desempenho comparável com janela de *Hamming*, mas fornece flexibilidade (parâmetro β) para largura da banda de transição e a atenuação mínima da banda de rejeição.

- Dados ω_p , ω_s ,R_p e A_s:

$$\text{transition width} = \Delta\omega = \omega_s - \omega_p$$

$$\text{Filter length } M \simeq \frac{A_s - 7.95}{2.285\Delta\omega} + 1$$

$$\text{Parameter } \beta = \begin{cases} 0.1102(A_s - 8.7), & A_s \geq 50 \\ 0.5842\,(A_s - 21)^{0.4} & \\ \quad + 0.07886(A_s - 21), & 21 < A_s < 50 \end{cases}$$

Exemplo 7.9: passa-baixa

- Usando especificações do exemplo 7.8, calcular filtro PB com janela de kaiser.

$$\omega_p = 0.2\pi, \quad R_p = 0.25 \text{ dB}$$
$$\omega_s = 0.3\pi, \quad A_s = 50 \text{ dB}$$

- <u>Solução</u>: cálculo de M, beta