Processamento digital de sinais

1 - Sinais e sistemas digitais (C)

Prof. Carlos Speranza
DAELN/IFSC

Conteúdo

1. Classificação de Sinais
2. Sequências básicas
3. Operações sobre sequências
4. Sistemas discretos
5. Sistemas lineares e invariantes no tempo
6. Equação de diferenças
7. **Resposta de frequência de sistemas discretos**
8. **Transformada de Fourier em Tempo Discreto (DTFT – *Discrete-Time Fourier Transform*) de sequências**

7. Resposta em frequência de **sistemas** discretos

- Seja

$$x[n] = e^{j\omega n}$$

a entrada de um sistema LTI, cuja resposta ao impulso é $h[n]$.

A saída deste sistema é dada por:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)}$$

$$= e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} = H\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n}$$

7. Resposta em frequência de **sistemas** discretos

- Ou seja, a saída é a entrada modificada (magnitude e fase) por $H(e^{j\omega})$ **(resposta em frequência do sistema)**:

$$
\begin{aligned}
H\left(e^{j\omega}\right) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \\
&= H_R\left(e^{j\omega}\right) + j.H_I\left(e^{j\omega}\right) \\
&= \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j \arg\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}}
\end{aligned}
$$

- Notar que $H(e^{j\omega})$ é uma função **<u>contínua</u>**, não podendo ser representada exatamente em sistemas computacionais (discretos).

Exemplo 1: resposta em frequência do sistema atraso

Como $y[n] = x[n - n_d]$ e $x[n] = e^{j\omega n}$

Temos $y[n] = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{j\omega n} e^{-j\omega n_d}$

E, portanto,

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} = cos(\omega n_d) - jsen(\omega n_d) = 1\angle - \omega n_d$$

Também podemos obter $H(e^{j\omega})$ através da definição:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_d] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_d}$$

Pois $h[n] = \delta[n - n_d]$

Exemplo 2: resposta em frequência do sistema média móvel

- Dado o sistema causal: $h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$

- Obtemos $H(e^{j\omega})$ através da definição:

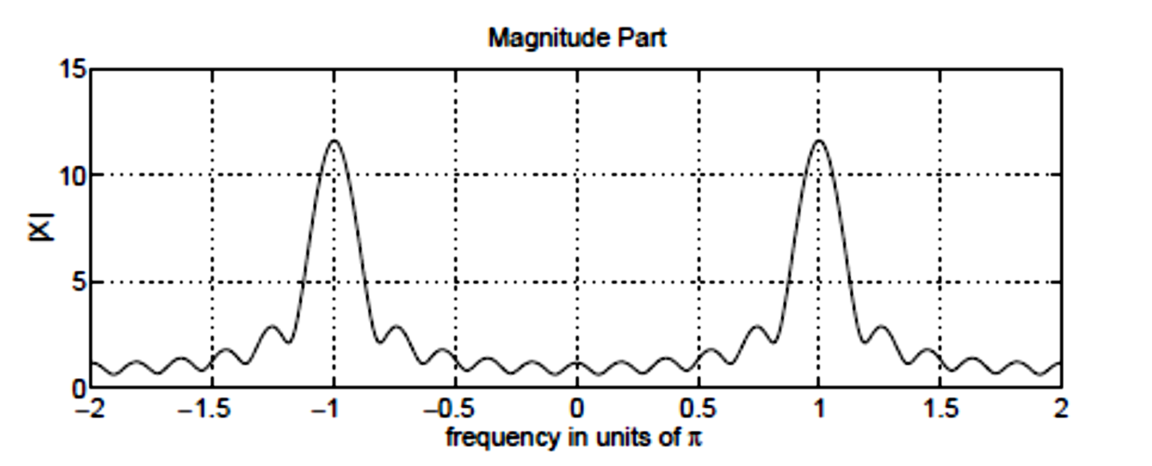
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-j\omega}\right) = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(\omega)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}.e^{-j\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

Periodicidade da resposta em frequência

- Diferente dos sistemas contínuos, em sistemas discretos, a resposta em frequência é sempre periódica em 2π :

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-j(\omega+2\pi)n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-j\omega n}=H\left(e^{j\omega}\right) \text{ pois } e^{-j2\pi n}=1$$

- Então basta representar **a resposta em frequência** para ω de 0 a 2π (ou $-\pi$ a π) para termos uma descrição completa de um sistema discreto.



8. Transformada de Fourier em Tempo Discreto (DTFT)

- Transformada de Fourier para **sinais** discretos:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

DTFT

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega$$

IDTFT (transformada inversa)

Condição: *x*[*n*] seja absolutamente somável ($\sum_{-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$)

- A **resposta em frequência de um sistema** LTI equivale à DTFT da resposta ao impulso $h[n]$ deste sistema.

Exemplo de IDTFT

- Resposta em frequência do **filtro passa-baixa** ideal:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1, & |\omega|\le\omega_c\\ 0, & \omega_c<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

ω_c = freq. corte

- Aplicando IDTFT, para encontrar a resposta ao impulso:

$$h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{+\omega_c}e^{j\omega n}d\omega=\frac{\mathrm{sen}(\omega_c n)}{\pi . n}$$

para $-\infty < n < \infty$

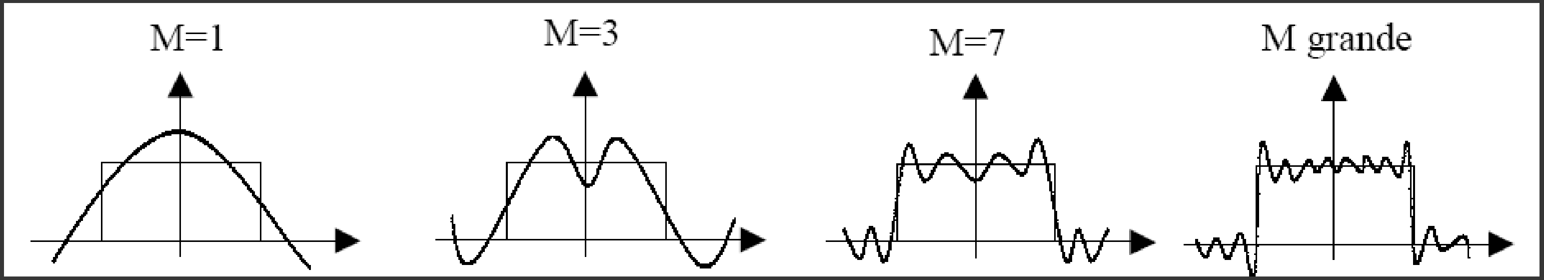
Resulta numa função *sinc*. No entanto, essa $h[n]$ é uma sequência infinita (IIR) e não-causal (não é nula para n<0).

Exemplo de IDTFT

- Se limitarmos (truncarmos) $h[n]$ teremos:

$$H_M\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-M}^{M} \frac{\operatorname{sen}(\omega_c n)}{\pi . n} e^{-j\omega n}$$

onde M indica o número finito de valores $h_M[n] \neq 0$



- Conclusão: o filtro ideal não é implementável, apenas o real (truncado e deslocado)...

Propriedades de Simetria da DTFT

- Seja x[n] uma sequência real, teremos:
  - $X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ — **Parte real**: simetria par
  - $X_I(e^{j\omega}) = - X_I(e^{-j\omega})$ — **Parte imaginária**: simetria impar
  - $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$ — **Magnitude**: simetria par
  - $\arg(X(e^{j\omega})) = - \arg(X(e^{-j\omega}))$ — **Fase**: simetria impar

- Ex: $x[n]=a^n u[n]$ → $X\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$ com $|a| < 1$

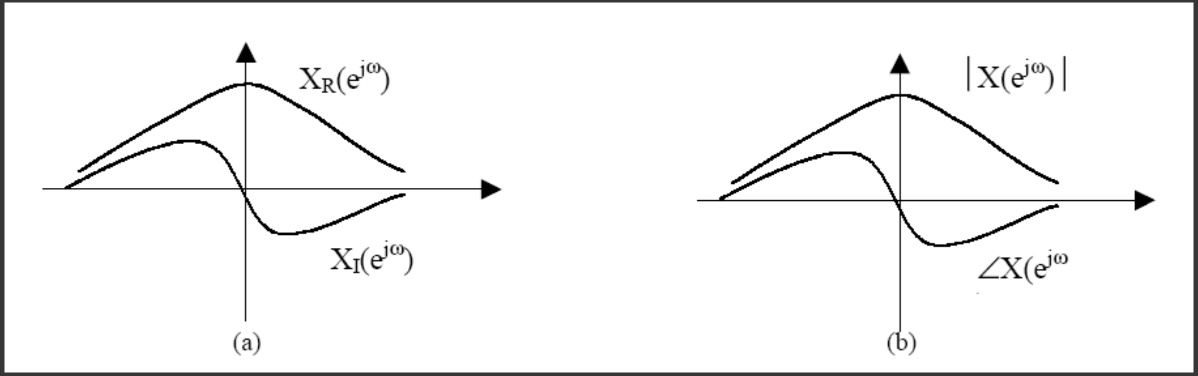


TABLE 2.3 FOURIER TRANSFORM PAIRS

Sequence	Fourier Transform
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. $1 \quad (-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
4. $a^n u[n] \quad (\lvert a\rvert < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
6. $(n+1)a^n u[n] \quad (\lvert a\rvert < 1)$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \sin\omega_p(n+1)}{\sin\omega_p} u[n] \quad (\lvert r\rvert < 1)$	$\frac{1}{1 - 2r\cos\omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < \lvert\omega\rvert \le \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi}\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\phi}\delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$

TABLE 2.2 FOURIER TRANSFORM THEOREMS

Sequence $x[n]$ $y[n]$	Fourier Transform $X(e^{j\omega})$ $Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
2. $x[n - n_d]$ (n_d an integer)	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ if $x[n]$ real.
5. $nx[n]$	$j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

Parseval's theorem:

8. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

9. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

Exemplo 3: uso das tabelas de DTFT

- Determinar a DTFT da sequência:

  $x[n]=a^n u[n-5]$

- Solução:

  Para aplicar a transformada 4 e o teorema 2, devemos transformar $x[n]$ para:

  $x[n]=a^5 a^{n-5} u[n-5]$

  E aplicando o teorema, achamos $X(e^{j\omega})$:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=a^5 e^{-j\omega 5}\mathcal{F}\left\{a^n u[n]\right\}=\frac{a^5 e^{-j\omega 5}}{1-ae^{-j\omega}}$$

Exemplo: DTFT da equação de diferenças

- Determinar a resposta ao impulso de um sistema LTI:

$$y[n] - a.y[n-1] = x[n] - b.x[n-1]$$

Fazendo: $x[n] = \delta[n]$

temos: $h[n] - a.h[n-1] = \delta[n] - b.\delta[n-1]$

aplicando DTFT: $H(e^{j\omega}) - a.e^{-j\omega} H(e^{j\omega}) = 1 - b.\ e^{-j\omega}$

$H(e^{j\omega})(1-a.e^{-j\omega}) = 1 - b.\ e^{-j\omega}$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1-be^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} - \frac{be^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$h[n] = \mathcal{F}^{-1}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\} = a^n u[n] - ba^{n-1}u[n-1]$$

Em geral:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m\ e^{-j\omega m}}{1 + \sum_{\ell=1}^{N} a_\ell\ e^{-j\omega \ell}}$$

Exemplo 3.15

An LTI system is specified by the difference equation

$$y(n) = 0.8y(n-1) + x(n)$$

a. Determine $H(e^{j\omega})$.
b. Calculate and plot the steady-state response $y_{ss}(n)$ to

$$x(n) = \cos(0.05\pi n)u(n)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0.8e^{-j\omega}}$$

$$H(e^{j0.05\pi}) = \frac{1}{1 - 0.8e^{-j0.05\pi}} = 4.0928e^{-j0.5377}$$

$$y_{ss}(n) = 4.0928\cos(0.05\pi n - 0.5377) = 4.0928\cos\left[0.05\pi(n - 3.42)\right]$$

Exemplos 3.1 / 3.3

- **Sequência infinita**: determinar analiticamente e avaliar computacionalmente a DTFT de

$$x[n]=(0.5)^n\ u[n]$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{0}^{\infty} (0.5)^n\, e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} (0.5e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-0.5e^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-0.5}$$

Exemplos 3.2 / 3.4

- **Sequência finita**: determinar analiticamente e avaliar computacionalmente a DTFT de

$$x(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 3, 4, 5\}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = e^{j\omega} + 2 + 3e^{-j\omega} + 4e^{-j2\omega} + 5e^{-j3\omega}$$