# Teoremas de tipo Bernstein-Doetsch para multifunciones convexas y cóncavas.

Autor: Carlos González.

Tutor: Dr. Nelson Merentes.
Co-Tutor: Dr. Zsolt Páles.

Universidad Central de Venezuela.

Presentación para optar al título de Magister Scientiarium en Matemática.

# Contenido

# Funciones a valores reales.

Sea $X$ un espacio normado real, $D \subseteq X$ un conjunto abierto y convexo y $f : D \to \mathbb{R}$ una función.

## Definición

La función $f$ es **convexa** en $D$ si para todo $x, y \in D$:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad t \in (0,1). \tag{1.1}$$

## Definición

La función $f$ es **cóncava** en $D$ si para todo $x, y \in D$:

$$tf(x) + (1-t)f(y) \leq f(tx + (1-t)y), \quad t \in (0,1). \tag{1.2}$$

## Observación.

Como consecuencia directa se tiene que $f$ is cóncava si y sólo si, $-f$ es convexa.

# Funciones a valores reales.

## Definición

La función $f$ es **midconvexa** en $D$ si para todo $x, y \in D$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

## Teorema ([Kuc85], Theorem 5.3.5.)

*Sea $D \subseteq X$ un conjunto convexo y $f : D \to \mathbb{R}$ una función midconvexa. Entonces, $f$ satisface la siguiente desigualdad para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$:*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y). \tag{1.3}$$

# Multifunciones.

Sean $X$ y $Y$ espacios topológicos lineales y sea $D \subseteq X$ un subconjunto abierto y convexo. Denotemos por $\mathcal{P}_0(Y)$ a la clase de subconjuntos no-vacíos de $Y$.

## Definición

Una multifunción $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ es midconvexa en $D$, si para todo $x, y \in D$ se satisface

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} \subseteq F\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

## Definición

Una multifunción $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ es midcóncava en $D$, si para todo $x, y \in D$ se satisface

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \subseteq \frac{F(x) + F(y)}{2}.$$

# Multifunciones.

## Ejemplo

Sea $H$ un subconjunto no-vacío de $Y$. Definamos a la multifunción $F$ mediante la fórmula $F(t) = tH$, $t \in \mathbb{R}_+$. Para $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} F\Big(\frac{t_1 + t_2}{2}\Big) &= \frac{t_1 + t_2}{2} H = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)H \\ &\subseteq \frac{1}{2}(t_1 H + t_2 H) = \frac{t_1 H + t_2 H}{2} = \frac{F(t_1) + F(t_2)}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $F$ es una multifunción cóncava. Sin embargo, la multifunción, $G(t) := -F(t) = t(-H)$ no es midconvexa.

## Observación

$F$ es midconvexa $\not\Longleftrightarrow -F$ es midcóncava.

# Multifunciones.

## Definición

Sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción. Se dice que $F$ es continua con respecto a la topología de Hausdorff si para todo abierto $V \in \mathcal{U}(Y)$, existe un abierto $U \in \mathcal{U}(X)$ tal que

$$F(x) \subseteq F(x_0) + V \quad \text{y} \quad F(x_0) \subseteq F(x) + V, \tag{1.4}$$

para todo $x \in x_0 + U$.

## Teorema ([Nik87b])

*Si $F : D \to B(Y)$ es midconvexa y continua con respecto a la topología de Hausdorff, entonces, $F$ es convexa.*

## Teorema ([Nik87a])

*Si $F : D \to B(Y)$ es midcóncava y continua con respecto a la topología de Hausdorff, entonces, $F$ es cóncava.*

# El Teorema de Bernstein–Doetsch.

**Teorema ([BD15])**

*Sea $D$ un subconjunto abierto y convexo de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función midconvexa. Si $f$ es acotada superiormente en un subconjunto abierto y no vacío de $D$ entonces $f$ es continua.*

# El Teorema de Bernstein–Doetsch.

**Teorema ([Nik87b])**

*Si $F : D \to B(Y)$ es midconvexa y acotada en un subconjunto $A \subseteq D$ con interior no-vacío entonces, $F$ es continua con respecto a la topología de Hausdorff.*

**Teorema ([Nik87a])**

*Si $F : D \to B(Y)$ es midcóncava y acotada en un subconjunto $A \subseteq D$ con interior no-vacío entonces, $F$ es continua con respecto a la topología de Hausdorff.*

# Convexidad Aproximada.

A menos que se especifique otra cosa, $X$ denotará un espacio normado real y $D \subseteq X$ es un conjunto abierto y convexo.

**Definición ([HU52])**

Sea $\varepsilon$ una constante positiva. Se dice que la función $f : D \to \mathbb{R}$ es $\varepsilon$-midconvexa si para todo $x, y \in X$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \varepsilon.$$

**Teorema ([NN93, Lac99])**

*Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función localmente acotada superior en un punto de $D$, y $\varepsilon$-midconvexa entonces, $f$ es $2\varepsilon$-convexa, i.e, para todo $x, y \in X$ y para todo $t \in [0,1]$*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + 2\varepsilon.$$

# Función de Takagi

## Definición

La función $T : \mathbb{R} \to [0,1]$ definida mediante la fórmula

$$T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{dist}(2^n t, \mathbb{Z}), \qquad (t \in \mathbb{R}), \tag{2.5}$$

se conoce como la función de Takagi.

## Observación

$$T(t) = \lim_{n\to\infty} T_n(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

donde

$$T_n(t) = T_{n-1}(t) + \frac{1}{2^n} \operatorname{dist}(2^n t, \mathbb{Z}), \quad n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R},$$

y además $T_0(t) = \operatorname{dist}(t, \mathbb{Z})$.

# Gráfico de la función de Takagi.

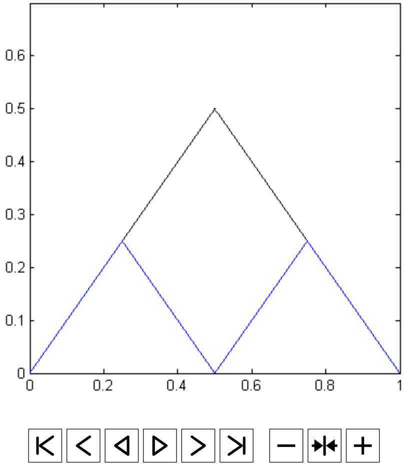



Figure : Función de Takagi.

## Definición ([HP04])

Una función $f$ definida en un subconjunto abierto y convexo $D$ de un espacio normado real $X$, es $(\delta, \varepsilon)$-midconvexa si satisface

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \delta\|x-y\| + \varepsilon$$

para todo $x, y \in D$.

## Teorema ([HP04], Teorema 4)

*Sean $\delta$ y $\varepsilon$ dos números no negativos. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función $(\delta, \varepsilon)$-midconvexa acotada superiormente en un punto de $D$ entonces, para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in (0,1)$*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + 2\delta T(t)\|x-y\| + 2\varepsilon \tag{2.6}$$

*donde $T$ es la función de Takagi definida en* (2.5).

## Teorema ([Bor08])

*La función de Takagi es $\left(\frac{1}{2},0\right)$-midconvexa, i.e.,*

$$T\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{T(x)+T(y)}{2} + \left|\frac{x-y}{2}\right|,$$

*para todo $x, y \in \mathbb{R}$.*

## Observación

Supongamos que el teorema anterior sigue siendo válido si se reemplaza $T$ por una función $\phi$ arbitraria. Aplicando el teorema anterior a la función de Takagi, obtenemos que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y todo $\lambda \in [0,1]$

$$T(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda T(x) + (1-\lambda)T(y) + \phi(\lambda)|x-y|.$$

En particular, para $x = 1$ y $y = 0$ la ecuación anterior se convierte en

$$T(\lambda) \leq \phi(\lambda).$$

## Definición ([TT09a])

Dada una función $\alpha : [0, \infty) \to [0, \infty)$ no decreciente, se dice que una función $f : D \to \mathbb{R}$ es $\alpha(\cdot)$-midconvexa si

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} + \alpha(\|x - y\|)$$

para todo $x, y \in D$.

## Teorema ([TT09a])

*Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función $\alpha(\cdot)$-midconvexa y localmente acotada superior en un punto. Entonces $f$ es localmente acotada en cada punto de int$D$. Si además, $\lim_{r \to 0^+} \alpha(r) = 0$, entonces $f$ es continua en $D$.*

**Teorema ([TT09a, MP12])**

*Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función $\alpha(\cdot)$-midconvexa. Entonces,*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \alpha\Big( \operatorname{dist}(2^n t, \mathbb{Z}) \|x - y\| \Big) \tag{2.7}$$

*para todo $x, y \in D$, $t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Más aún, si $f$ es localmente acotada superior en un punto de $D$, entonces, la desigualdad (2.7) es válida para todo $t \in [0,1]$.*

### Teorema ([TT09a])

*Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función $\alpha(\cdot)$-midconvexa. Entonces,*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{dist}(2^n t, \mathbb{Z})\alpha\left(\frac{\|x-y\|}{2^n}\right) \tag{2.8}$$

*para todo $x, y \in D$, $t \in [0,1] \cap \mathbb{D}$, donde $\mathbb{D}$ es el conjunto de los racionales diádicos. Más aún, si $f$ es localmente acotada superior en un punto de $D$ y*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(1/2^n) < \infty$$

*entonces, $f$ es continua en $[0,1]$ y la desigualdad (2.8) es válida para todo $t \in [0,1]$.*

# Convexidad fuerte.

## Definición ([Pol66])

Sea $c > 0$. Se dice que una función $f : D \to \mathbb{R}$ es fuertemente midconvexa con módulo $c$, si para todo $x, y \in D$ y $t \in [0, 1]$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2, \tag{2.9}$$

## Teorema ([AGNS11])

*Sea $c > 0$. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función fuertemente midconvexa con módulo $c$ y acotada superiormente en un subconjunto de $D$ con interior no vacío, entonces, $f$ es una función continua y además fuertemente convexa con módulo $c$, i.e.,*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)\|x-y\|^2, \tag{2.10}$$

*para todo $x, y \in D$, $t \in [0, 1]$.*

# $K$-convexidad

Sean $X, Y$ espacios topológicos lineales, $D \subseteq X$ un subconjunto abierto y convexo y sea $K \subseteq Y$ un cono convexo. Denotemos por $\mathcal{U}(X)$ y $\mathcal{U}(Y)$ a las bases locales de $X$ y $Y$ respectivamente.

**Definición**

Se dice que la multifunción $F$ es $K$-convexa en $D$ si para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0,1]$ se tiene que

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq F(tx + (1-t)y) + K \tag{2.11}$$

**Definición**

Se dice que la multifunción $F$ es $K$-cóncava en $D$ si para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0,1]$ se tiene que

$$F(tx + (1-t)y) \subseteq tF(x) + (1-t)F(y) + K \tag{2.12}$$

# $K$-convexidad.

## Observación

Dado un cono convexo $K \subseteq Y$, definamos la relación $\leq_K$ en $Y$ de la siguiente manera

$$x \leq_K y \iff y - x \in K.$$

Si $F(x) = \{f(x)\}$, donde $f : X \to Y$ es una función cualquiera, entonces las inclusiones (2.11) y (2.12) equivalen a

$$f(tx + (1-t)y) \leq_K tf(x) + (1-t)f(y) \quad \text{y}$$
$$tf(x) + (1-t)f(y) \leq_K f(tx + (1-t)y)$$

respectivamente. De hecho si $Y = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{R}_+$, entonces estas definiciones coinciden con las definiciones de convexidad y concavidad de funciones respectivamente introducidas previamente.

# $K$-continuidad de multifunciones.

## Definición

Sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción. Se dice que $F$ es $K$-semicontinua superior si para todo abierto $V \in \mathcal{U}(Y)$, existe un abierto $U \in \mathcal{U}(X)$ tal que

$$F(x) \subseteq F(x_0) + V + K \qquad (x \in x_0 + U) \tag{2.13}$$

## Definición

Sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción. Se dice que $F$ es $K$-semicontinua inferior si para todo abierto $V \in \mathcal{U}(Y)$, existe un abierto $U \in \mathcal{U}(X)$ tal que

$$F(x_0) \subseteq F(x) + V + K \qquad (x \in x_0 + U) \tag{2.14}$$

## Definición

Sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción. Se dice que $F$ es $K$-continua si $F$ es $K$-semicontinua superior e inferior al mismo tiempo.

**Teorema ([Nik86])**

*Supongamos que $0 \in K$ y sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción tal que para todo $x \in D$ el conjunto $F(x) \subseteq Y$ es acotado. Si $F$ es $K$-midconvexa y $K$-acotada superior en un subconjunto $H \subseteq D$ con interior no vacío, entonces, $F$ es $K$-continua y $K$-convexa en $D$.*

**Teorema ([Nik86])**

*Supongamos que $0 \in K$ y sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción tal que para todo $x \in D$ el conjunto $F(x) \subseteq Y$ es cerrado y acotado. Si $F$ es $K$-midcóncava y $K$-acotada inferior en un subconjunto $H \subseteq D$ con interior no vacío, entonces, $F$ es $K$-continua y $K$-cóncava en $D$.*

# Convexidad Fuerte.

Cuando $(X, \|\cdot\|)$ y $(Y, \|\cdot\|)$ son espacios vectoriales normados y $B_Y \subseteq Y$ es el interior de la bola unitaria en $Y$.

## Definición ([Hua10])

Sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción y sea $c > 0$. Se dice que $F$ es fuertemente convexa con módulo $c$ si

$$tF(x) + (1-t)F(y) + ct(1-t)\|x-y\|^2\overline{B_Y} \subseteq F(tx + (1-t)y) \tag{2.15}$$

para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0, 1]$.

## Definición

Sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción y sea $c > 0$. Se dice que $F$ es fuertemente midconvexa con módulo $c$ si

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} + \frac{c}{4}\|x-y\|^2\overline{B_Y} \subseteq F\left(\frac{x+y}{2}\right). \tag{2.16}$$

# Convexidad Fuerte.

**Teorema ([LMNS13])**

*Sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción fuertemente midconvexa con módulo $c$ tal que para todo $x \in D$ el conjunto $F(x)$ es cerrado y acotado. Si $F$ acotada en un subconjunto de $D$ con interior no-vacío, entonces $F$ es fuertemente convexa con módulo $c$.*

Sean $X, Y$ espacios topológicos lineales, $D \subseteq X$ un subconjunto abierto y convexo. Sean $A, B : D - D \to \mathcal{P}_0(Y)$ y $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$.

## Problema 1

Hallar condiciones de regularidad sobre las multifunciones $A, B$ y $F$ para que la siguiente inclusión

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} + A(x - y) \subseteq F\left(\frac{x+y}{2}\right) + B(x - y), \quad (x, y \in D), \tag{3.17}$$

implique una inclusión de tipo

$$\begin{gathered} tF(x) + (1 - t)F(y) + \Phi_A(t, x - y) \subseteq F\big(tx + (1 - t)y\big) + \Phi_B(t, x - y), \\ (x, y \in D, \quad t \in [0, 1]), \end{gathered} \tag{3.18}$$

donde $\Phi_A$ y $\Phi_B$ son multifunciones definidas en $[0, 1] \times (D - D)$ obtenidas a partir de $A$ y $B$ respectivamente mediante alguna transformación especial.

Sean $X, Y$ espacios topológicos lineales, $D \subseteq X$ un subconjunto abierto y convexo. Sean $A, B : D - D \to \mathcal{P}_0(Y)$ y $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$.

## Problema 2

Hallar condiciones de regularidad sobre las multifunciones $A, B$ y $F$ para que la siguiente inclusión

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) + A(x-y) \subseteq \frac{F(x)+F(y)}{2} + B(x-y), \quad (x, y \in D), \tag{3.19}$$

implique una inclusión de tipo

$$F\big(tx + (1-t)y\big) + \Phi_A(t, x-y) \subseteq tF(x) + (1-t)F(y) + \Phi_B(t, x-y),$$
$$(x, y \in D, \quad t \in [0,1]), \tag{3.20}$$

donde $\Phi_A$ y $\Phi_B$ son multifunciones definidas en $[0,1] \times (D - D)$ obtenidas a partir de $A$ y $B$ respectivamente mediante alguna transformación especial.

# Condiciones de regularidad.

## Definición

Sea $S : D \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunción. Decimos que $S$ es **localmente semi $K$-acotada inferior** si, para todo $x \in D$ existe un entorno abierto $U$ de $x$ y un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que

$$S(u) \subseteq \mathrm{cl}(H + K), \qquad (u \in U \cap D).$$

## Definición

Sea $S : D \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunción. Decimos que $S$ es **localmente débil semi $K$-acotada superior** si, para todo $x \in D$ existe un entorno abierto $U$ de $x$ y un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que

$$0 \in \mathrm{cl}(S(u) + H + K), \qquad (u \in U \cap D).$$

# Condiciones de regularidad.

**Teorema**

*Supongamos que $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ es una multifunción localmente semi-K-acotada inferior. Entonces, para cada subconjunto compacto $C \subseteq D$, existe un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que, $F(x) \subseteq \mathrm{cl}(H + K)$, para todo $x \in C$.*

**Teorema**

*Supongamos que $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ es una multifunción localmente débil-semi-K-acotada superior. Entonces, para cada subconjunto compacto $C \subseteq D$, existe un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que, $0 \in \mathrm{cl}(F(x) + H + K)$, para todo $x \in C$.*

# Cono Recesión.

## Definición

Sea $H \subseteq X$ un subconjunto no-vacío. El **cono recesión** de $H$ denotado por $\mathrm{rec}(H)$ es el conjunto:

$$rec(H) := \{x \in X \,|\, tx + H \subseteq H, \text{ para todo } t \geq 0\}. \tag{3.21}$$

## Propiedades.

1. $\mathrm{rec}(H)$ es un cono convexo que posee al origen;
2. $K = \mathrm{rec}(H)$ cono más grande tal que $K + H \subseteq H$.
3. $\overline{\mathrm{rec}}(H) \subseteq \mathrm{rec}(\overline{H})$;
4. para todo $x \in X$, $t > 0$, $\mathrm{rec}(tx + H) = \mathrm{rec}(H)$;
5. para cualesquiera conjuntos no-vacíos $H_1, H_2 \subseteq X$, $\mathrm{rec}(H_1) + \mathrm{rec}(H_2) \subseteq \mathrm{rec}(H_1 + H_2)$.

# Cono recesión de una multifunción.

## Definición

Dada la multifunción $S : D \to \mathcal{P}(Y)$, **el cono recesión** de $S$, denotado por $\text{rec}(S)$, es el conjunto:

$$\text{rec}(S) = \bigcap_{x \in D} \text{rec}(S(x)). \tag{3.22}$$

## Propiedades.

1. $\text{rec}(S) \neq \emptyset$.
2. Si $S(x)$ es acotada para algún $x \in D$, entonces $\text{rec}(S) = \{0\}$.
3. $\text{rec}(S) + S(x) \subseteq S(x)$ para todo $x \in D$.

# Transformación de Takagi de una multifunción.

Supongamos que $D \subseteq X$ es un conjunto estrellado.

## Definición

Para una multifunción $S : D \to \mathcal{P}(Y)$, tal que $0 \in S(x)$ para todo $x \in D$, definimos la **transformación de Takagi** de $S$, como la multifunción $S^T : \mathbb{R} \times D \to \mathcal{P}(Y)$ tal que:

$$S^T(t,x) := \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} S\big(2\,\mathrm{dist}(2^k t, \mathbb{Z})x\big)\right). \tag{3.23}$$

## Relación entre $S$ y $S^T$.

Sea $S : D \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunción tal que $0 \in S(x)$ para todo $x \in D$. Entonces,

$$\mathrm{cl}(S(x)) \subseteq S^T\left(\tfrac{1}{2}, x\right) \qquad (x \in D). \tag{3.24}$$

Además si $S(0) \subseteq \overline{\mathrm{rec}}(S)$ entonces la inclusión (3.24), se convierte en una igualdad.

Observe que $d_{\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ y $d_{\mathbb{Z}}\left(2^k \cdot \frac{1}{2}\right) = 0$ para $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$S^T\left(\tfrac{1}{2}, x\right) = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}S\left(2d_{\mathbb{Z}}\left(2^k \cdot \tfrac{1}{2}\right)x\right)\right) = \mathrm{cl}\left(S(x) + \bigcup_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}S(0)\right).$$

Como $0 \in S(0)$, entonces

$$S(x) \subseteq S(x) + \bigcup_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}S(0).$$

Luego si $S(0) \subseteq \overline{\mathrm{rec}}(S) \subseteq \mathrm{rec}(\overline{S(x)})$, entonces

$$S^T\left(\tfrac{1}{2}, x\right) \subseteq S(x) + \bigcup_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\overline{\mathrm{rec}}(S) \subseteq \mathrm{cl}\left(\overline{S(x)} + \mathrm{rec}\left(\overline{S(x)}\right)\right) \subseteq \mathrm{cl}\left(S(x)\right).$$

## Un ejemplo.

Sea $S_0 \subseteq Y$ un conjunto convexo que posee al origen y $\varphi$ una función localmente acotada superior y no-negativa.

1. $S(x) = K + \varphi(x)S_0 \xrightarrow{T.T} S^T(t,x) = \mathrm{cl}\left(K + \varphi^T(t,x)S_0\right)$, donde

$$\varphi^T(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\varphi(2\,\mathrm{dist}(2^n t, \mathbb{Z})x).$$

2. Si $X$ es un espacio normado y $\varphi(x) = ||x||^\alpha$, entonces: $\varphi^T(t,x) = T_\alpha(t)||x||^\alpha$,donde la función $T_\alpha(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función de takagi de orden $\alpha$ y se define por

$$T_\alpha(t) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\alpha-n}(\mathrm{dist}(2^n t, \mathbb{Z}))^\alpha \qquad (3.25)$$

Observemos lo siguiente

$$\begin{aligned} T_\alpha(t) :&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\alpha-n}(\mathrm{dist}(2^n t, \mathbb{Z}))^\alpha \\ &= 2^\alpha(\mathrm{dist}(t, \mathbb{Z}))^\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\alpha-n}(\mathrm{dist}(2^n t, \mathbb{Z}))^\alpha \\ &= 2^\alpha(\mathrm{dist}(t, \mathbb{Z}))^\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\alpha-(n+1)}(\mathrm{dist}(2^{n+1} t, \mathbb{Z}))^\alpha \\ &= 2^\alpha(\mathrm{dist}(t, \mathbb{Z}))^\alpha + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\alpha-n}(\mathrm{dist}(2^n (2t), \mathbb{Z}))^\alpha \end{aligned} \tag{3.26}$$

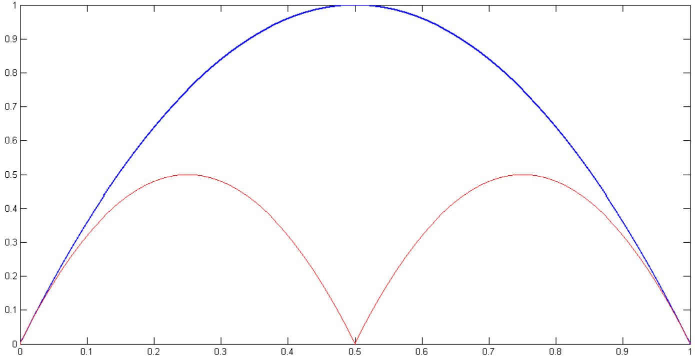
Por lo tanto $T_\alpha$ es la **única** solución de la ecuación funcional

$$\phi(t) = 2^\alpha(\mathrm{dist}(t, \mathbb{Z}))^\alpha + \frac{1}{2}\phi(2t).$$

# Caso $\alpha = 2$.

$$f(t) = 4(t - \lfloor t \rfloor)(1 - (t - \lfloor t \rfloor)), \quad g(t) = 4(\mathrm{dist}(t, \mathbb{Z}))^2, \quad h(t) = \frac{1}{2} f(2t).$$

$$f(t) = 4(\mathrm{dist}(t, \mathbb{Z}))^2 + \frac{1}{2} f(2t).$$



## Observación

Luego, si $S(x) = K + \frac{c}{4}\|x\|^2 S_0$, entonces,

$$S^T(t,x) = \mathrm{cl}\left(K + ct(1-t)\|x\|^2 \, S_0\right)$$

## Lema auxiliar

Sean $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones no-decrecientes de subconjuntos de $X$, sea $H \subseteq X$ un conjunto acotado, sea $K \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}(\mathrm{rec}(B_n))$ y sea $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales que converge a cero.
Asumamos que, para todo $n \geq 0$,

$$A_n \subseteq \mathrm{cl}(\epsilon_n H + K + B_n).$$

Entonces,

$$\mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right)$$

**Teorema ([GNPR14], Theorem 4.1)**

*Sea $D \subseteq X$ un conjunto convexo no-vacío y $A, B : (D - D) \to \mathcal{P}(Y)$, tales que $0 \in A(x) \cap B(x)$ para todo $x \in (D - D)$. Consideremos $K = \overline{\operatorname{rec}}(B)$ y sea $F : D \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunción que satisface para $x, y \in D$ la inclusión de tipo Jensen*

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} + A(x - y) \subseteq \operatorname{cl}\left(F\left(\frac{x+y}{2}\right) + B(x - y)\right). \tag{4.27}$$

*Supongamos que además $F$ es puntualmente semi $K$-acotada inferior y localmente débil semi-$K$-acotada superior en $D$. Entonces, $F$ satisface para $x, y \in D$ y $t \in [0, 1]$, la siguiente inclusión:*

$$\begin{aligned} &tF(x) + (1 - t)F(y) + A^T(t, x - y) \\ &\qquad \subseteq \operatorname{cl}\left(F(tx + (1 - t)y) + B^T(t, x - y)\right). \end{aligned} \tag{4.28}$$

# Resumen de la demostración.

Vamos a demostrar por inducción que para todo $x, y \in D$ existe un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que, para todo $n \geq 0$, $t \in [0,1]$,

$$tF(x) + (1-t)F(y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} A\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\Big)$$
$$\subseteq \mathrm{cl}\left(F(tx + (1-t)y) + \frac{1}{2^n} H + K + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} B\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\Big)\right).$$

Fijemos $x, y \in D$ arbitrarios. Para $n = 0$ basta encontrar un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que para todo $t \in [0,1]$,

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq \mathrm{cl}\Big(F(tx + (1-t)y) + H + K\Big).$$

# Resumen de la demostración.

Sea $U \in \mathcal{U}(Y)$ y escojamos un abierto balanceado $V \in \mathcal{U}(Y)$ tal que $V + V + V \subseteq U$. Como $F$ es puntualmente semi-$K$-acotada inferior, existen conjuntos acotados $H_x, H_y \subseteq Y$ tales que

$$F(x) \subseteq \mathrm{cl}(H_x + K) \subseteq V + H_x + K$$

y

$$F(y) \subseteq \mathrm{cl}(H_y + K) \subseteq V + H_y + K.$$

Por lo tanto

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq V + V + H_1 + H_2 + K.$$

donde $H_1 := \bigcup_{t\in[0,1]} tH_x$ y $H_2 := \bigcup_{t\in[0,1]}(1-t)H_y$. Por otra parte, existe un conjunto acotado $H_0 \subseteq Y$ tal que para todo $t \in [0,1]$

$$0 \in \mathrm{cl}(F(tx + (1-t)y) + H_0 + K) \subseteq V + F(tx + (1-t)y) + H_0 + K.$$

# Resumen de la demostración.

Luego, para todo $t$ en $[0,1]$,

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq U + F(tx + (1-t)y) + H_0 + H_1 + H_2 + K.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} tF(x) + (1-t)F(y) &\subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}(Y)} \Big( U + F(tx + (1-t)y) + H_0 + H_1 + H_2 + K \Big) \\ &= \mathrm{cl}\Big( F(tx + (1-t)y) + H + K \Big), \end{aligned}$$

donde $H := H_0 + H_1 + H_2$.
Supongamos ahora que la hipotesis inductiva es cierta para $n$ y demostraremos que también lo es para $n+1$.

# Resumen de la demostración.

Veamos que para $t \in [0, 1/2]$ se tiene lo siguiente

$$tF(x) + (1-t)F(y) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} A\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\Big)$$

$$\subseteq \operatorname{cl}\left(F(tx + (1-t)y) + \frac{1}{2^{n+1}} H + K + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} B\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\Big)\right).$$

$$tF(x) + \frac{2-2t}{2} F(y) + A\Big(2t(x-y)\Big) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} A\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\Big)$$

$$\subseteq \frac{1}{2}\left(2tF(x) + (1-2t)F(y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} A\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\Big)\right)$$

$$+ \frac{1}{2} F(y) + A\Big(2t(x-y)\Big).$$

# Resumen de la demostración.

$$
\begin{aligned}
&tF(x) + (1-t)F(y) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} A\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\Big) \\
&\subseteq \frac{1}{2}\,\mathrm{cl}\left(F(2tx + (1-2t)y) + \frac{1}{2^n}H + K + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} B\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\Big)\right) \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{2}F(y) + A\Big(2t(x-y)\Big) \\
&\subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{F(2tx + (1-2t)y) + F(y)}{2} + A\Big(2t(x-y)\Big) + \frac{1}{2^{n+1}}H + K \right.\\
&\qquad\qquad\qquad \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} B\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\Big)\right) \\
&\subseteq \mathrm{cl}\left(F\Big(tx + (1-t)y\Big) + \frac{1}{2^{n+1}}H + K + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} B\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\Big)\right).
\end{aligned}
$$

# Resumen de la demostración.

Aplicando el lema auxiliar obtenemos lo siguiente

$$\operatorname{cl}\left(tF(x) + (1-t)F(y) + \operatorname{cl}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}A(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y))\right)\right)$$
$$\subseteq \operatorname{cl}\left(F\big(tx + (1-t)y\big) + \operatorname{cl}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\right)\right).$$

Finalmente,

$$tF(x) + (1-t)F(y) + A^T(t, x-y)$$
$$\subseteq \operatorname{cl}\Big(F(tx + (1-t)y) + B^T(t, x-y)\Big).$$

**Teorema ([GNPR14], Theorem 4.2)**

*Sea $D \subseteq X$ un conjunto convexo no-vacío y $A, B : (D - D) \to \mathcal{P}_0(Y)$ multifunciones tales que $0 \in A(x) \cap B(x)$ para todo $x \in (D - D)$. Sea $K = \overline{\mathrm{rec}}(B)$, y sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción que satisface para $x, y \in D$ la inclusión de tipo Jensen*

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) + A(x-y) \subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{F(x)+F(y)}{2} + B(x-y)\right). \tag{4.29}$$

*Supongamos además, que $F$ es puntualmente semi-K-convexa y que $F$ es localmente semi-K-acotada inferior. Entonces, $F$ satisface para $x, y \in D$ y $t \in [0,1]$, la siguiente inclusión*

$$\begin{aligned} &F(tx + (1-t)y) + A^T(t, x-y) \\ &\qquad \subseteq \mathrm{cl}\left(tF(x) + (1-t)F(y) + B^T(t, x-y)\right) \end{aligned} \tag{4.30}$$

Sea $\varphi : D - D \to \mathbb{R}_+$ una función no-negativa localmente acotada superior, $S_0 \subseteq Y$ un conjunto convexo que contiene al origen $0 \in Y$ y $K \subseteq Y$ un cono convexo y cerrado.

**Corolario ([GNPR14], Corollary 4.4)**

*Supongamos que $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ es una multifunción puntualmente semi-K-acotada inferior y localmente débil-semi-K-acotada superior que satisface*

$$\frac{F(x)+F(y)}{2} \subseteq \operatorname{cl}\left(F\left(\frac{x+y}{2}\right) + K + \varphi(x-y)S_0\right) \tag{4.31}$$

*para todo $x, y \in D$. Entonces*

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq \operatorname{cl}\left(F(tx+(1-t)y) + K + \varphi^T(t, x-y)S_0\right) \tag{4.32}$$

*para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0,1]$.*

## Corolario ([GNPR14], Corollary 4.5)

*Supongamos que* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *es una multifunción puntualmente semi-K-acotada inferior y localmente débil-semi-K-acotada superior que satisface*

$$\frac{F(x)+F(y)}{2} + \varphi(x-y)S_0 \subseteq \operatorname{cl}\left(F\left(\frac{x+y}{2}\right)+K\right) \tag{4.33}$$

*para todo* $x, y \in D$. *Entonces*

$$tF(x) + (1-t)F(y) + \varphi^T(t, x-y)S_0 \subseteq \operatorname{cl}\Big(F(tx+(1-t)y)+K\Big) \tag{4.34}$$

*para todo* $x, y \in D$ *y para todo* $t \in [0, 1]$.

## Corolario ([GNPR14], Corollary 4.6)

*Supongamos que* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *es una multifunción puntualmente semi-K-convexa y localmente semi-K-acotada inferior que satisface*

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{F(x)+F(y)}{2} + K + \varphi(x-y)S_0\right) \tag{4.35}$$

*para todo* $x, y \in D$*. Entonces*

$$F(tx+(1-t)y) \subseteq \mathrm{cl}\left(tF(x)+(1-t)F(y)+K+\varphi^T(t,x-y)S_0\right) \tag{4.36}$$

*para todo* $x, y \in D$ *y para todo* $t \in [0,1]$*.*

## Corolario ([GNPR14], Corollary 4.7)

*Supongamos que* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *es una multifunción puntualmente semi-K-convexa y localmente semi-K-acotada inferior que satisface*

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) + \varphi(x-y)S_0 \subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{F(x)+F(y)}{2} + K\right) \tag{4.37}$$

*para todo* $x, y \in D$*. Entonces*

$$F(tx + (1-t)y) + \varphi^T(t, x-y)S_0 \subseteq \mathrm{cl}\left(tF(x) + (1-t)F(y) + K\right) \tag{4.38}$$

*para todo* $x, y \in D$ *y para todo* $t \in [0,1]$.

# References


[AGNS11] A. Azócar, J. Giménez, K. Nikodem, and J. L. Sánchez, *On strongly midconvex functions*, Opuscula Math. **31** (2011), no. 1, 15–26.

[BD15] F. Bernstein and G. Doetsch, *Zur theorie der konvexen funktionen*, Math. Ann. **76** (1915), no. 4, 514–526. MR 1511840

[BHJ09] P. Burai, A. Házy, and T. Juhász, *Bernstein–Doetsch type results for s-convex functions*, Publ. Math. Debrecen **75** (2009), no. 1-2, 23–31.

[Bor08] Z. Boros, *An inequality for the Takagi function*, Math. Inequal. Appl. **11** (2008), no. 4, 757–765. MR 2009f:39047

[CM99] A Chademan and F Mirzapour, *Midconvex functions in locally compact groups*, Proceedings of the American Mathematical Society (1999), 2961–2968.

[GNP04] A. Gilányi, K. Nikodem, and Zs. Páles, *Bernstein–Doetsch type results for quasiconvex functions*, Math. Inequal. Appl. **7** (2004), no. 2, 169–175. MR 2004m:26011

[GNPR14] Carlos González, Kazimierz Nikodem, Zsolt Páles, and Gari Roa, *Bernstein–doetsch type theorems for set-valued maps of strongly and approximately convex and concave type*, Pub. Math. Debrecen **84** (2014).

[GTP11] A. Gilányi and K. Troczka-Pawelec, *Regularity of weakly subquadratic functions*, J. Math. Anal. Appl. **382** (2011), 814–821.

[Há09] A. Házy, *Bernstein–Doetsch type results for Breckner s-convex functions*, Proc. MicroCAD 2009 Int. Sci. Conf., vol. G, 2009, p. 17–22.

# References


[Há10] ______, *Bernstein–Doetsch type results for generalized approximately convex functions*, Proc. MicroCAD 2010 Int. Sci. Conf., vol. H, 2010, p. 27–32.

[Há11] ______, *Bernstein–Doetsch type results for h-convex functions*, Math. Inequal. Appl. **14** (2011), no. 3, 499–508.

[HB10] A. Házy and P. Burai, *Bernstein–Doetsch type results for generalized convex function*, Proc. 12th Symp. Math. Appl. (November 5-7, 2009) (University of Timişoara), Editura Politechnica, 2010, p. 118–123.

[HP04] A. Házy and Zs. Páles, *On approximately midconvex functions*, Bull. London Math. Soc. **36** (2004), no. 3, 339–350. MR 2004j:26020

[HP05] ______, *On approximately t-convex functions*, Publ. Math. Debrecen **66** (2005), 489–501. MR 2006c:26023

[HU52] D. H. Hyers and S. M. Ulam, *Approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 821–828. MR 14,254b

[Hua10] Hui Huang, *Global error bounds with exponents for multifunctions with set constraints*, Communications in Contemporary Mathematics **12** (2010), no. 03, 417–435.

[KK89] Z. Kominek and M. Kuczma, *Theorems of Bernstein-Doetsch, Piccard and Mehdi and semilinear topology*, Arch. Math. (Basel) **52** (1989), no. 6, 595–602. MR 90i:46017

[KK91] ______, *Theorem of Bernstein-Doetsch in Baire spaces*, Ann. Math. Sil. (1991), no. 5, 10–17. MR 93j:26008

# References


[Kuc85] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, vol. 489, Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985. MR 86i:39008

[Lac99] M. Laczkovich, *The local stability of convexity, affinity and of the Jensen equation*, Aequationes Math. **58** (1999), 135–142.

[LMNS13] H. Leiva, N. Merentes, K. Nikodem, and J. L. Sánchez, *Strongly convex set-valued maps*, J. Global Optim. (2013).

[MP12] J. Makó and Zs. Páles, *On $\varphi$-convexity*, Publ. Math. Debrecen **80** (2012), no. 1-2, 107–126.

[Mur12] Anna Mureńko, *A generalization of bernstein-doetsch theorem*, DEMONSTRATIO MATHEMATICA **45** (2012), no. 1.

[Nik86] K. Nikodem, *Continuity of K-convex set-valued functions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **34** (1986), no. 7-8, 393–400.

[Nik87a] ______, *On concave and midpoint concave set-valued functions*, Glas. Mat. Ser. III **22(42)** (1987), no. 1, 69–76. MR 89g:39017

[Nik87b] ______, *On midpoint convex set-valued functions*, Aequationes Math. **33** (1987), no. 1, 46–56. MR 88h:90171

[Nik89] K Nikodem, *K-convex and K-concave set-valued functions*, Zeszyty Nauk. Politech. Łódz. Mat. (Łódz) **559** (1989), 1–75, (Rozprawy Nauk. 114).

[Nik01] K. Nikodem, *Continuity properties of midconvex set-valued maps*, Aequationes Math. **62** (2001), no. 1-2, 175–183. MR 2002f:54014

[Nik03] ______, *Continuity properties of convex-type set-valued maps*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **4** (2003), no. 3, Article 52, 6 pp. (electronic). MR 2005h:47092

[NN93] C. T. Ng and K. Nikodem, *On approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), no. 1, 103–108.

[NP01] K. Nikodem and Zs. Páles, *On approximately Jensen-convex and Wright-convex functions*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **23** (2001), no. 4, 141–147. MR 2003a:39037

# References


[Pá00] Zs. Páles, *Bernstein–Doetsch-type results for general functional inequalities*, Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat. **17** (2000), 197–206. MR 2001k:26015

[Pol66] B. T. Polyak, *Existence theorems and convergence of minimizing sequences for extremal problems with constraints*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **166** (1966), 287–290. MR 33 #6466

[Tru84] L. I. Trudzik, *Continuity properties of vector-valued convex functions*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **36** (1984), no. 3, 404–415. MR 733912 (85d:46062)

[TT09a] Ja. Tabor and Jó. Tabor, *Generalized approximate midconvexity*, Control Cybernet. **38** (2009), no. 3, 655–669.

[TT09b] ———, *Takagi functions and approximate midconvexity*, J. Math. Anal. Appl. **356** (2009), no. 2, 729–737.