Teoremas de tipo Bernstein-Doetsch con errores de tipo Tabor para multifunciones aproximadamente y fuertemente midconvexas.

Attila Gilányi[1] Carlos González[2] Kazimierz Nikodem[3]
Zsolt Páles[1]

[1]Universidad de Debrecen, Hungria. [2]Universidad Central de Venezuela. [3]Universidad de Bielsko-Biala, Polonia.

XXVIII Jornadas Venezolanas de Matemática, 2015

Contenido

1. Introducción
   - Funciones convexas y cóncavas a valores reales.
   - El Teorema de Bernstein–Doetsch.
   - Convexidad aproximada
2. Multifunciones.
   - Terminología básica.
   - Transformación de Takagi-Tabor.
3. Resultados principales
   - Teoremas.

Funciones a valores reales.

Sean X un espacio normado real, $D \subseteq X$ un subconjunto abierto y convexo y $f : D \to \mathbb{R}$ una función.

Definición

Se dice que la función f es **convexa** en D, si para todo $x, y \in D$:

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y), \quad t \in [0,1]. \tag{1.1}$$

Definición

Se dice que la función f es **cóncava** en D, si para todo $x, y \in D$:

$$tf(x) + (1-t)f(y) \leqslant f(tx + (1-t)y), \quad t \in [0,1]. \tag{1.2}$$

Observación.

Es evidente que f es cóncava si y sólo si $-f$ es convexa.

Funciones Jensen-convexas a valores reales.

Definición

Se dice que la función f es **Jensen-convexa** en D, si para todo $x, y \in D$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{1.3}$$

Teorema ([Kuc85], Teorema 5.3.5.)

Sea $D \subseteq X$ un subconjunto abierto y convexo, y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función Jensen-convexa. Entonces f satisface la siguiente desigualdad para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$:

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y). \tag{1.4}$$

El Teorema de Bernstein–Doetsch.

Teorema ([Kuc85], Teorema 6.4.2)

Toda función Jensen-convexa $f : D \to \mathbb{R}$ en D, localmente acotada superior en un punto $x_0 \in D$ is continua y por lo tanto convexa en D.

Este teorema teorema fue formulado por F. Bernstein and G. Doetsch en 1915 [BD15], y desde entonces ha sido muy importante en la teoría de convexidad, razón por la cual ha sido generalizado de muchas maneras diferentes y por varios autores. Como consecuencia directa se tiene el siguiente

Corolario ([Kuc85], Teorema 7.1.1)

Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si es continua y Jensen-convexa.

Funciones aproximadamente convexas.

Sea $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, una función no-decreciente.

Definición

Se dice que la función, $f : D \to \mathbb{R}$ es α**-Jensen-convexa** en D, si para todo $x, y \in D$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} + \alpha(|x-y|). \tag{1.5}$$

Observación

Cuando $\alpha(x) = \epsilon > 0$, entonces, α-Jensen convexidad es simplemente, ϵ-Jensen convexidad [HU52]. Resultados de tipo B-D para este tipo de convexidad fueron obtenidos por Ng y Nikodem en 1993 [NN93].

Teorema ([HP04, MP10])

Sea $D \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto abierto y convexo de la recta real. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función localmente acotada superior en un punto y α-Jensen-convexa en D, entonces, para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0,1]$

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) + \mathcal{T}_\alpha(t, |x-y|),$$

donde

$$\mathcal{T}_\alpha(t,u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \alpha(2 \operatorname{dist}_{\mathbb{Z}}(2^n t) u), \quad t \in [0,1], u \in D - D.$$

Observación

Si $\alpha(u) = \epsilon |u|^p + \delta$, con $\epsilon, \delta, p > 0$ y $u \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\mathcal{T}_\alpha(t,u) = \epsilon \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{p-n} \operatorname{dist}_{\mathbb{Z}}^p(2^n t) \right) |u|^p + 2\delta = \epsilon T_p(t) |u|^p + 2\delta.$$

Teorema ([TT09])

Sea $D \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto abierto y convexo de la recta real. Si $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(2^{-n}) < \infty$ y $f : D \to \mathbb{R}$ es una función localmente acotada superior en un punto y α-Jensen-convexa en D, entonces, para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0, 1]$

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) + \mathcal{S}_\alpha(t, \|x - y\|),$$

donde

$$\mathcal{S}_\alpha(t, u) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\,\mathrm{dist}_{\mathbb{Z}}(2^n t)\alpha\left(\frac{u}{2^{n+1}}\right), \quad t \in [0, 1], u \in D - D.$$

Observación

Si $\alpha(u) = \epsilon|u|^p$, con $\epsilon, p > 0$ y $u \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\mathcal{S}_\alpha(t, u) = \epsilon\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{dist}_{\mathbb{Z}}(2^n t)}{2^{np+p+1}}\right)|u|^p = \epsilon S_p(t)|u|^p.$$

Funciones fuertemente convexas.

Sea c un número real positivo. Siguiendo a Polyak, [Pol66]

Definición

Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es **fuertemente convexa** con módulo c si para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0, 1]$

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)|x-y|^2 \tag{1.6}$$

Teorema ([AGNS11], Teorema 2.3)

Si $f : D \to \mathbb{R}$ es fuertemente Jensen-convexa con módulo c, y localmente acotada superior en un punto de D entonces f es continua y fuertemente convexa con módulo c.

Multifunciones K-Convexas.

Sean X, Y espacios topológicos lineales, $K \subseteq Y$ un cono convexo cerrado y $D \subseteq X$ un conjunto convexo y abierto. Denote por $\mathscr{P}(Y)$ a la clase de subconjuntos no-vacios de Y.

Definición

Una multifunción $F : D \to \mathscr{P}(Y)$ es K-**convexa** en D, si para todo $x, y \in D$ y todo $t \in [0, 1]$

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq F(tx + (1-t)y) + K. \tag{2.7}$$

Cono Recesión.

Definición

Sea $H \subseteq X$ un conjunto no vacío. El **cono recesión** de H denotado por $\operatorname{rec}(H)$ es el conjunto

$$rec(H) := \{x \in X \,|\, tx + H \subseteq H, \text{ for all } t \geqslant 0\}. \tag{2.8}$$

Propiedades.

1. $\operatorname{rec}(H)$ es un cono convexo que contiene al origen;
2. $K = \operatorname{rec}(H)$ es el cono más grande con la propiedad $K + H \subseteq H$;
3. $\overline{\operatorname{rec}}(H) \subseteq \operatorname{rec}(\overline{H})$;
4. para todo $x \in X$, $t > 0$, $\operatorname{rec}(tx + H) = \operatorname{rec}(H)$;
5. $\operatorname{rec}(H_1) + \operatorname{rec}(H_2) \subseteq \operatorname{rec}(H_1 + H_2)$, para todo $H_1, H_2 \subseteq X$.

Multifunciones acotadas.

Definición

Sea $S : D \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunción. Se dice que S es **localmente semi-K-acotada inferior** si para todo $x \in D$ existe un entorno abierto $U \subseteq X$ de x y un conjunto acotado $H \subseteq X$, tal que

$$S(u) \subseteq \mathrm{cl}(H + K), \qquad (u \in U \cap D).$$

Definición

Sea $S : D \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunción. Se dice que S es **localmente débil-semi-K-acotada superior** si para todo $x \in D$ existe un entorno abierto $U \subseteq X$ de x y un conjunto acotado $H \subseteq X$, tal que

$$0 \in \mathrm{cl}(S(u) + H + K), \qquad (u \in U \cap D).$$

K-continuidad direccional.

Definición

Decimos que F es direccionalmente K-semicontinua superior en un punto $p \in D$, si para toda dirección $h \in X$ y para todo entorno abierto U de $0 \in Y$, existe un nùmero positivo δ tal que

$$F(p + th) \subseteq F(p) + U + K,$$

para todo $t \in (0, \delta)$ tal que $p + th \in D$.

Definición

Decimos que F es direccionalmente K-semicontinua inferior en un punto $p \in D$, si para toda dirección $h \in X$ y para todo entorno abierto U de $0 \in Y$, existe un nùmero positivo δ tal que

$$F(p) \subseteq F(p + th) + U + K,$$

para todo $t \in (0, \delta)$ tal que $p + th \in D$.

Asumamos que $D \subseteq X$ es un conjunto estrellado.

Definición

Para una multifunción $S : D \to \mathscr{P}(Y)$, tal que $0 \in S(x)$ para todo $x \in D$, definimos la **transformación de Takagi-Tabor** de S, como la multifunción $S^{\perp} : \mathbb{R} \times D \to \mathscr{P}(Y)$ tal que

$$S^{\perp}(t,x) := \operatorname{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} 2 \operatorname{dist}(2^k t, \mathbb{Z}) S\left(\frac{x}{2^{n+1}} \right) \right). \tag{2.9}$$

Relación entre S y $S^{\perp}$.

Sea $S : D \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunción tal que $0 \in S(x)$ para todo $x \in D$. Entonces

$$S^{\perp}\left(\tfrac{1}{2}, x\right) = \operatorname{cl}(S(x)) \qquad (x \in D). \tag{2.10}$$

Teorema

Sean $D \subseteq X$ un subconjunto convexo no-vacío, y $A, B : (D - D) \to \mathscr{P}_0(Y)$ tales que los valores de la multifunción B son semi-K-convexos, donde $K := \overline{\mathrm{rec}}(B)$. Sea $F : D \to \mathscr{P}_0(Y)$ una multifunción que satisface la siguiente inclusión de tipo Jensen para $x, y \in D$

$$\frac{F(x)+F(y)}{2} + A(x-y) \subseteq \mathrm{cl}\left(F\left(\frac{x+y}{2}\right) + B(x-y)\right). \tag{3.11}$$

Entonces, F satisface

$$\begin{aligned} tF(x) + (1-t)F(y) + \sum_{k=0}^{\infty} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t) A\left(\frac{x-y}{2^k}\right) \\ \subseteq \mathrm{cl}\left(F(tx+(1-t)y) + \sum_{k=0}^{\infty} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t) B\left(\frac{x-y}{2^k}\right)\right), \end{aligned} \tag{3.12}$$

para todo $x, y \in D$ y $t \in \mathbb{D} \cap [0,1]$.

Lema

Sean $K \subseteq Y$ un cono convexo y $S, T \subseteq Y$ subconjuntos no vacíos tales que

(i) *S y T son conjuntos semi-K-acotados inferiormente,*

(ii) *S y T son semi-K-estrellados con respecto a algún elemento de Y, i.e, existen $u, v \in Y$ tal que*

$$tu + (1-t)S \subseteq S \qquad (t \in [0,1]),$$
$$tv + (1-t)T \subseteq T \qquad (t \in [0,1]).$$

Entonces, la multifunción $t \mapsto tS + (1-t)T$ es direccionalmente K-continua en $[0,1]$.

Lema

Sea $K \subseteq Y$ un cono convexo y sea (S_k) una sucesión de subconjuntos no vacíos de Y tales que

(i) *Para todo $k \geqslant 0$, el conjunto S_k es semi-K-estrellado y semi-K-acotado inferior.*

(ii) *La sucesión (S_k) es K-Cauchy, i.e., para todo abierto $V \subseteq Y$, entorno de $0 \in Y$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geqslant m$,*

$$\sum_{k=m}^{n} S_k \subseteq V + K. \tag{3.13}$$

Entonces, para todo $U \in \mathcal{U}(Y)$, existe un número positivo δ tal que, para todo $t, s \in \mathbb{R}$ con $|t - s| < \delta$,

$$\mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} d_{\mathbb{Z}}(2^k t) S_k\right) \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} d_{\mathbb{Z}}(2^k s) S_k\right) + U + K. \tag{3.14}$$

Teorema

Sean $D \subseteq X$ un subconjunto convexo no-vacío, y $A, B : (D - D) \to \mathscr{P}_0(Y)$. Sea $K := \overline{\mathrm{rec}}(B)$ y sea $F : D \to \mathscr{P}_0(Y)$ una multifunción que satisface la inclusión de tipo Jensen (3.11). *Supongamos que además*

(i) *Para todo $x \in D$, $F(x)$ es semi-K-estrellado con respecto a algún elemento de Y y también semi-K-acotado inferior.*

(ii) *F es direccionalmente K-semicontinua en D.*

(iii) *Para todo $u \in D - D$, los conjuntos $A(u)$ y $B(u)$ son semi-K-acotados inferiores, además $A(u)$ es semi-K-estrellado y $B(u)$ es semi-K-convexo.*

(iv) *Para todo $u \in D - D$, las sucesiones $\left(A\left(\frac{u}{2^k}\right)\right)$ y $\left(B\left(\frac{u}{2^k}\right)\right)$ son K-Cauchy.*

Entonces, para todo $t \in [0, 1]$ y para todo $x, y \in D$, la multifunción F satisface la siguiente inclusión

$$\begin{aligned} tF(x) + (1-t)F(y) + A^{\perp}(t, x-y) \\ \subseteq \mathrm{cl}\left(F(tx + (1-t)y) + B^{\perp}(t, x-y) + K\right). \end{aligned}$$

References I

[AGNP15] Gilányi Attila, Carlos González, Kazimierz Nikodem, and Zsolt Páles, *Bernstein—doetsch type theorems with tabor type error terms for set-valued maps*, On Preparation (2015).

[AGNS11] A. Azócar, J. Giménez, K. Nikodem, and J. L. Sánchez, *On strongly midconvex functions*, Opuscula Math. **31** (2011), no. 1, 15–26.

[BD15] F. Bernstein and G. Doetsch, *Zur theorie der konvexen funktionen*, Math. Ann. **76** (1915), no. 4, 514–526. MR 1511840

[HP04] A. Házy and Zs. Páles, *On approximately midconvex functions*, Bull. London Math. Soc. **36** (2004), no. 3, 339–350. MR 2004j:26020

[HU52] D. H. Hyers and S. M. Ulam, *Approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 821–828. MR 14,254b

[Kuc85] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, vol. 489, Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985. MR 86i:39008

[MP10] J. Makó and Zs. Páles, *Approximate convexity of Takagi type functions*, J. Math. Anal. Appl. **369** (2010), 545–554.

[NN93] C. T. Ng and K. Nikodem, *On approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), no. 1, 103–108.

[Pol66] B. T. Polyak, *Existence theorems and convergence of minimizing sequences for extremal problems with constraints*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **166** (1966), 287–290. MR 33 #6466

[TT09] Ja. Tabor and Jó. Tabor, *Generalized approximate midconvexity*, Control Cybernet. **38** (2009), no. 3, 655–669.