Teoremas de tipo Bernstein-Doetsch para multifunciones convexas y cóncavas.

Autor: Carlos González.

Tutor: Dr. Nelson Merentes.
Co-Tutor: Dr. Zsolt Páles.

Universidad Central de Venezuela.

Presentación para optar al título de Magister Scientiarium en Matemática.

Contenido

Funciones a valores reales.

Sea X un espacio normado real, $D \subseteq X$ un conjunto abierto y convexo y $f : D \to \mathbb{R}$ una función.

Definición

La función f es **convexa** en D si para todo $x, y \in D$:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad t \in (0,1). \tag{1.1}$$

Definición

La función f es **cóncava** en D si para todo $x, y \in D$:

$$tf(x) + (1-t)f(y) \leq f(tx + (1-t)y), \quad t \in (0,1). \tag{1.2}$$

Observación.

Como consecuencia directa se tiene que f is cóncava si y sólo si, $-f$ es convexa.

Funciones a valores reales.

Definición

La función f es **midconvexa** en D si para todo $x, y \in D$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Teorema ([Kuc85], Theorem 5.3.5.)

Sea $D \subseteq X$ un conjunto convexo y $f : D \to \mathbb{R}$ una función midconvexa. Entonces, f satisface la siguiente desigualdad para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y). \tag{1.3}$$

Multifunciones.

Sean X y Y espacios topológicos lineales y sea $D \subseteq X$ un subconjunto abierto y convexo. Denotemos por $\mathcal{P}_0(Y)$ a la clase de subconjuntos no-vacíos de Y.

Definición

Una multifunción $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ es midconvexa en D, si para todo $x, y \in D$ se satisface

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} \subseteq F\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Definición

Una multifunción $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ es midcóncava en D, si para todo $x, y \in D$ se satisface

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \subseteq \frac{F(x) + F(y)}{2}.$$

Multifunciones.

Ejemplo

Sea H un subconjunto no-vacío de Y. Definamos a la multifunción F mediante la fórmula $F(t) = tH$, $t \in \mathbb{R}_+$. Para $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ tenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
F\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) &= \frac{t_1 + t_2}{2} H = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)H \\
&\subseteq \frac{1}{2}(t_1 H + t_2 H) = \frac{t_1 H + t_2 H}{2} = \frac{F(t_1) + F(t_2)}{2}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, F es una multifunción cóncava. Sin embargo, la multifunción, $G(t) := -F(t) = t(-H)$ no es midconvexa.

Observación

F es midconvexa $\not\Longleftrightarrow$ $-F$ es midcóncava.

Multifunciones.

Definición

Sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción. Se dice que F es continua con respecto a la topología de Hausdorff si para todo abierto $V \in \mathcal{U}(Y)$, existe un abierto $U \in \mathcal{U}(X)$ tal que

$$F(x) \subseteq F(x_0) + V \quad \text{y} \quad F(x_0) \subseteq F(x) + V, \tag{1.4}$$

para todo $x \in x_0 + U$.

Teorema ([Nik87b])

Si $F : D \to B(Y)$ es midconvexa y continua con respecto a la topología de Hausdorff, entonces, F es convexa.

Teorema ([Nik87a])

Si $F : D \to B(Y)$ es midcóncava y continua con respecto a la topología de Hausdorff, entonces, F es cóncava.

El Teorema de Bernstein–Doetsch.

Teorema ([BD15])

Sea D un subconjunto abierto y convexo de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función midconvexa. Si f es acotada superiormente en un subconjunto abierto y no vacío de D entonces f es continua.

El Teorema de Bernstein–Doetsch.

Teorema ([Nik87b])

Si $F : D \to B(Y)$ es midconvexa y acotada en un subconjunto $A \subseteq D$ con interior no-vacío entonces, F es continua con respecto a la topología de Hausdorff.

Teorema ([Nik87a])

Si $F : D \to B(Y)$ es midcóncava y acotada en un subconjunto $A \subseteq D$ con interior no-vacío entonces, F es continua con respecto a la topología de Hausdorff.

Convexidad Aproximada.

A menos que se especifique otra cosa, X denotará un espacio normado real y $D \subseteq X$ es un conjunto abierto y convexo.

Definición ([HU52])

Sea ε una constante positiva. Se dice que la función $f : D \to \mathbb{R}$ es ε-midconvexa si para todo $x, y \in X$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \varepsilon.$$

Teorema ([NN93, Lac99])

Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función localmente acotada superior en un punto de D, y ε-midconvexa entonces, f es 2ε-convexa, i.e, para todo $x, y \in X$ y para todo $t \in [0,1]$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + 2\varepsilon.$$

Función de Takagi

Definición

La función $T : \mathbb{R} \to [0,1]$ definida mediante la fórmula

$$T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{dist}(2^n t, \mathbb{Z}), \qquad (t \in \mathbb{R}), \tag{2.5}$$

se conoce como la función de Takagi.

Observación

$$T(t) = \lim_{n\to\infty} T_n(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

donde

$$T_n(t) = T_{n-1}(t) + \frac{1}{2^n} \operatorname{dist}(2^n t, \mathbb{Z}), \quad n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R},$$

y además $T_0(t) = \operatorname{dist}(t, \mathbb{Z})$.

Gráfico de la función de Takagi.

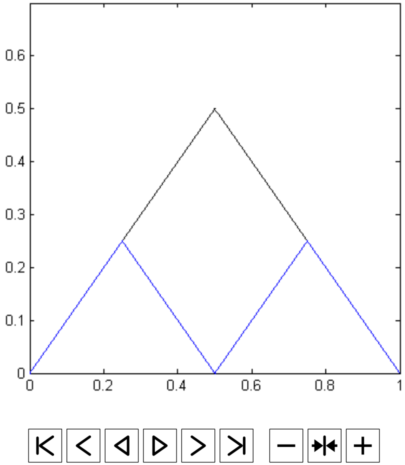


Figure : Función de Takagi.

Definición ([HP04])

Una función f definida en un subconjunto abierto y convexo D de un espacio normado real X, es (δ, ε)-midconvexa si satisface

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \delta\|x-y\| + \varepsilon$$

para todo $x, y \in D$.

Teorema ([HP04], Teorema 4)

Sean δ y ε dos números no negativos. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función (δ, ε)-midconvexa acotada superiormente en un punto de D entonces, para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in (0, 1)$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + 2\delta T(t)\|x-y\| + 2\varepsilon \tag{2.6}$$

donde T es la función de Takagi definida en (2.5).

Teorema ([Bor08])

La función de Takagi es $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$*-midconvexa, i.e.,*

$$T\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{T(x)+T(y)}{2} + \left|\frac{x-y}{2}\right|,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Observación

Supongamos que el teorema anterior sigue siendo válido si se reemplaza T por una función ϕ arbitraria. Aplicando el teorema anterior a la función de Takagi, obtenemos que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y todo $\lambda \in [0, 1]$

$$T(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda T(x) + (1-\lambda)T(y) + \phi(\lambda)|x-y|.$$

En particular, para $x = 1$ y $y = 0$ la ecuación anterior se convierte en

$$T(\lambda) \leq \phi(\lambda).$$

Definición ([TT09])

Dada una función $\alpha : [0, \infty) \to [0, \infty)$ no decreciente, se dice que una función $f : D \to \mathbb{R}$ es $\alpha(\cdot)$-midconvexa si

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \alpha(\|x-y\|)$$

para todo $x, y \in D$.

Teorema ([TT09])

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función $\alpha(\cdot)$-midconvexa y localmente acotada superior en un punto. Entonces f es localmente acotada en cada punto de $\operatorname{int} D$. Si además, $\lim_{r\to 0^+} \alpha(r) = 0$, entonces f es continua en D.

Teorema ([TT09, MP12])

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función $\alpha(\cdot)$-midconvexa. Entonces,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \alpha\Big(\operatorname{dist}(2^n t, \mathbb{Z}) \|x - y\| \Big) \tag{2.7}$$

para todo $x, y \in D$, $t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Más aún, si f es localmente acotada superior en un punto de D, entonces, la desigualdad (2.7) es válida para todo $t \in [0,1]$.

Teorema ([TT09])

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ *una función* $\alpha(\cdot)$*-midconvexa. Entonces,*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{dist}(2^n t, \mathbb{Z})\alpha\left(\frac{\|x-y\|}{2^n}\right) \tag{2.8}$$

para todo $x, y \in D$, $t \in [0,1] \cap \mathbb{D}$, *donde* $\mathbb{D}$ *es el conjunto de los racionales diádicos. Más aún, si* f *es localmente acotada superior en un punto de* D *y*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(1/2^n) < \infty$$

entonces, f *es continua en* $[0,1]$ *y la desigualdad* (2.8) *es válida para todo* $t \in [0,1]$.

Convexidad fuerte.

Definición ([Pol66])

Sea $c > 0$. Se dice que una función $f : D \to \mathbb{R}$ es fuertemente midconvexa con módulo c, si para todo $x, y \in D$ y $t \in [0, 1]$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2, \tag{2.9}$$

Teorema ([AGNS11])

Sea $c > 0$. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función fuertemente midconvexa con módulo c y acotada superiormente en un subconjunto de D con interior no vacío, entonces, f es una función continua y además fuertemente convexa con módulo c, i.e.,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)\|x-y\|^2, \tag{2.10}$$

para todo $x, y \in D$, $t \in [0, 1]$.

K-convexidad

Sean X, Y espacios topológicos lineales, $D \subseteq X$ un subconjunto abierto y convexo y sea $K \subseteq Y$ un cono convexo. Denotemos por $\mathcal{U}(X)$ y $\mathcal{U}(Y)$ a las bases locales de X y Y respectivamente.

Definición

Se dice que la multifunción F es K-convexa en D si para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0, 1]$ se tiene que

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq F(tx + (1-t)y) + K \tag{2.11}$$

Definición

Se dice que la multifunción F es K-cóncava en D si para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0, 1]$ se tiene que

$$F(tx + (1-t)y) \subseteq tF(x) + (1-t)F(y) + K \tag{2.12}$$

K-convexidad.

Observación

Dado un cono convexo $K \subseteq Y$, definamos la relación $\leq_K$ en Y de la siguiente manera

$$x \leq_K y \iff y - x \in K.$$

Si $F(x) = \{f(x)\}$, donde $f : X \to Y$ es una función cualquiera, entonces las inclusiones (2.11) y (2.12) equivalen a

$$f(tx + (1-t)y) \leq_K tf(x) + (1-t)f(y) \quad \text{y}$$
$$tf(x) + (1-t)f(y) \leq_K f(tx + (1-t)y)$$

respectivamente. De hecho si $Y = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{R}_+$, entonces estas definiciones coinciden con las definiciones de convexidad y concavidad de funciones respectivamente introducidas previamente.

K-continuidad de multifunciones.

Definición

Sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción. Se dice que F es K-semicontinua superior si para todo abierto $V \in \mathcal{U}(Y)$, existe un abierto $U \in \mathcal{U}(X)$ tal que

$$F(x) \subseteq F(x_0) + V + K \qquad (x \in x_0 + U) \tag{2.13}$$

Definición

Sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción. Se dice que F es K-semicontinua inferior si para todo abierto $V \in \mathcal{U}(Y)$, existe un abierto $U \in \mathcal{U}(X)$ tal que

$$F(x_0) \subseteq F(x) + V + K \qquad (x \in x_0 + U) \tag{2.14}$$

Definición

Sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción. Se dice que F es K-continua si F es K-semicontinua superior e inferior al mismo tiempo.

Teorema ([Nik86])

Supongamos que $0 \in K$ y sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción tal que para todo $x \in D$ el conjunto $F(x) \subseteq Y$ es acotado. Si F es K-midconvexa y K-acotada superior en un subconjunto $H \subseteq D$ con interior no vacío, entonces, F es K-continua y K-convexa en D.

Teorema ([Nik86])

Supongamos que $0 \in K$ y sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción tal que para todo $x \in D$ el conjunto $F(x) \subseteq Y$ es cerrado y acotado. Si F es K-midcóncava y K-acotada inferior en un subconjunto $H \subseteq D$ con interior no vacío, entonces, F es K-continua y K-cóncava en D.

Convexidad Fuerte.

Cuando $(X, \|\cdot\|)$ y $(Y, \|\cdot\|)$ son espacios vectoriales normados y $B_Y \subseteq Y$ es el interior de la bola unitaria en Y.

Definición ([Hua10])

Sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción y sea $c > 0$. Se dice que F es fuertemente convexa con módulo c si

$$tF(x) + (1-t)F(y) + ct(1-t)\|x-y\|^2\overline{B_Y} \subseteq F(tx + (1-t)y) \tag{2.15}$$

para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0,1]$.

Definición

Sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción y sea $c > 0$. Se dice que F es fuertemente midconvexa con módulo c si

$$\frac{F(x)+F(y)}{2} + \frac{c}{4}\|x-y\|^2\overline{B_Y} \subseteq F\left(\frac{x+y}{2}\right). \tag{2.16}$$

Convexidad Fuerte.

Teorema ([LMNS13])

Sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción fuertemente midconvexa con módulo c tal que para todo $x \in D$ el conjunto $F(x)$ es cerrado y acotado. Si F acotada en un subconjunto de D con interior no-vacío, entonces F es fuertemente convexa con módulo c.

Sean X, Y espacios topológicos lineales, $D \subseteq X$ un subconjunto abierto y convexo. Sean $A, B : D - D \to \mathcal{P}_0(Y)$ y $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$.

Problema 1

Hallar condiciones de regularidad sobre las multifunciones A, B y F para que la siguiente inclusión

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} + A(x - y) \subseteq F\left(\frac{x + y}{2}\right) + B(x - y), \quad (x, y \in D), \tag{3.17}$$

implique una inclusión de tipo

$$tF(x) + (1 - t)F(y) + \Phi_A(t, x - y) \subseteq F\big(tx + (1 - t)y\big) + \Phi_B(t, x - y), \\ (x, y \in D, \quad t \in [0, 1]), \tag{3.18}$$

donde Φ_A y Φ_B son multifunciones definidas en $[0, 1] \times (D - D)$ obtenidas a partir de A y B respectivamente mediante alguna transformación especial.

Sean X, Y espacios topológicos lineales, $D \subseteq X$ un subconjunto abierto y convexo. Sean $A, B : D - D \to \mathcal{P}_0(Y)$ y $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$.

Problema 2

Hallar condiciones de regularidad sobre las multifunciones A, B y F para que la siguiente inclusión

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) + A(x-y) \subseteq \frac{F(x)+F(y)}{2} + B(x-y), \quad (x, y \in D), \tag{3.19}$$

implique una inclusión de tipo

$$F\big(tx + (1-t)y\big) + \Phi_A(t, x-y) \subseteq tF(x) + (1-t)F(y) + \Phi_B(t, x-y),$$
$$(x, y \in D, \quad t \in [0,1]), \tag{3.20}$$

donde Φ_A y Φ_B son multifunciones definidas en $[0,1] \times (D-D)$ obtenidas a partir de A y B respectivamente mediante alguna transformación especial.

Condiciones de regularidad.

Definición

Sea $S : D \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunción. Decimos que S es **localmente semi K-acotada inferior** si, para todo $x \in D$ existe un entorno abierto U de x y un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que

$$S(u) \subseteq \mathrm{cl}(H + K), \qquad (u \in U \cap D).$$

Definición

Sea $S : D \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunción. Decimos que S es **localmente débil semi K-acotada superior** si, para todo $x \in D$ existe un entorno abierto U de x y un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que

$$0 \in \mathrm{cl}(S(u) + H + K), \qquad (u \in U \cap D).$$

Condiciones de regularidad.

Teorema

Supongamos que $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *es una multifunción localmente semi-K-acotada inferior. Entonces, para cada subconjunto compacto* $C \subseteq D$*, existe un conjunto acotado* $H \subseteq Y$ *tal que,* $F(x) \subseteq \mathrm{cl}(H + K)$*, para todo* $x \in C$*.*

Teorema

Supongamos que $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *es una multifunción localmente débil-semi-K-acotada superior. Entonces, para cada subconjunto compacto* $C \subseteq D$*, existe un conjunto acotado* $H \subseteq Y$ *tal que,* $0 \in \mathrm{cl}(F(x) + H + K)$*, para todo* $x \in C$*.*

Cono Recesión.

Definición

Sea $H \subseteq X$ un subconjunto no-vacío. El **cono recesión** de H denotado por $\operatorname{rec}(H)$ es el conjunto:

$$rec(H) := \{x \in X \,|\, tx + H \subseteq H, \text{ para todo } t \geq 0\}. \tag{3.21}$$

Propiedades.

1. $\operatorname{rec}(H)$ es un cono convexo que posee al origen;
2. $K = \operatorname{rec}(H)$ cono más grande tal que $K + H \subseteq H$.
3. $\overline{\operatorname{rec}}(H) \subseteq \operatorname{rec}(\overline{H})$;
4. para todo $x \in X$, $t > 0$, $\operatorname{rec}(tx + H) = \operatorname{rec}(H)$;
5. para cualesquiera conjuntos no-vacíos $H_1, H_2 \subseteq X$, $\operatorname{rec}(H_1) + \operatorname{rec}(H_2) \subseteq \operatorname{rec}(H_1 + H_2)$.

Cono recesión de una multifunción.

Definición

Dada la multifunción $S : D \to \mathcal{P}(Y)$, **el cono recesión** de S, denotado por $\operatorname{rec}(S)$, es el conjunto:

$$\operatorname{rec}(S) = \bigcap_{x \in D} \operatorname{rec}(S(x)). \tag{3.22}$$

Propiedades.

1. $\operatorname{rec}(S) \neq \emptyset$.
2. Si $S(x)$ es acotada para algún $x \in D$, entonces $\operatorname{rec}(S) = \{0\}$.
3. $\operatorname{rec}(S) + S(x) \subseteq S(x)$ para todo $x \in D$.

Transformación de Takagi de una multifunción.

Supongamos que $D \subseteq X$ es un conjunto estrellado.

Definición

Para una multifunción $S : D \to \mathcal{P}(Y)$, tal que $0 \in S(x)$ para todo $x \in D$, definimos la **transformación de Takagi** de S, como la multifunción $S^T : \mathbb{R} \times D \to \mathcal{P}(Y)$ tal que:

$$S^T(t,x) := \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} S\Big(2\,\mathrm{dist}(2^k t, \mathbb{Z})x\Big)\right). \tag{3.23}$$

Relación entre S y S^T.

Sea $S : D \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunción tal que $0 \in S(x)$ para todo $x \in D$. Entonces,

$$\mathrm{cl}(S(x)) \subseteq S^T\left(\tfrac{1}{2}, x\right) \qquad (x \in D). \tag{3.24}$$

Además si $S(0) \subseteq \overline{\mathrm{rec}}(S)$ entonces la inclusión (5.44), se convierte en una igualdad.

Observe que $d_{\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ y $d_{\mathbb{Z}}\left(2^k \cdot \frac{1}{2}\right) = 0$ para $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$S^T\left(\tfrac{1}{2}, x\right) = \operatorname{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} S\left(2d_{\mathbb{Z}}\left(2^k \cdot \tfrac{1}{2}\right)x\right)\right) = \operatorname{cl}\left(S(x) + \bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} S(0)\right).$$

Como $0 \in S(0)$, entonces

$$S(x) \subseteq S(x) + \bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} S(0).$$

Luego si $S(0) \subseteq \overline{\operatorname{rec}}(S) \subseteq \operatorname{rec}(\overline{S(x)})$, entonces

$$S^T\left(\tfrac{1}{2}, x\right) \subseteq S(x) + \bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \overline{\operatorname{rec}}(S) \subseteq \operatorname{cl}\left(\overline{S(x)} + \operatorname{rec}\left(\overline{S(x)}\right)\right) \subseteq \operatorname{cl}\left(S(x)\right).$$

Un ejemplo.

Sea $S_0 \subseteq Y$ un conjunto convexo que posee al origen y φ una función localmente acotada superior y no-negativa.

1. $S(x) = K + \varphi(x)S_0 \xrightarrow{T.T} S^T(t,x) = \mathrm{cl}\left(K + \varphi^T(t,x)S_0\right)$, donde

$$\varphi^T(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\varphi(2\,\mathrm{dist}(2^n t, \mathbb{Z})x).$$

2. Si X es un espacio normado y $\varphi(x) = ||x||^\alpha$, entonces: $\varphi^T(t,x) = T_\alpha(t)||x||^\alpha$,donde la función $T_\alpha(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función de takagi de orden α y se define por

$$T_\alpha(t) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\alpha-n}(\mathrm{dist}(2^n t, \mathbb{Z}))^\alpha \tag{3.25}$$

Observemos lo siguiente

$$\begin{aligned} T_\alpha(t) :&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\alpha-n}(\operatorname{dist}(2^n t, \mathbb{Z}))^\alpha \\ &= 2^\alpha(\operatorname{dist}(t, \mathbb{Z}))^\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\alpha-n}(\operatorname{dist}(2^n t, \mathbb{Z}))^\alpha \\ &= 2^\alpha(\operatorname{dist}(t, \mathbb{Z}))^\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\alpha-(n+1)}(\operatorname{dist}(2^{n+1} t, \mathbb{Z}))^\alpha \\ &= 2^\alpha(\operatorname{dist}(t, \mathbb{Z}))^\alpha + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\alpha-n}(\operatorname{dist}(2^n (2t), \mathbb{Z}))^\alpha \end{aligned} \tag{3.26}$$

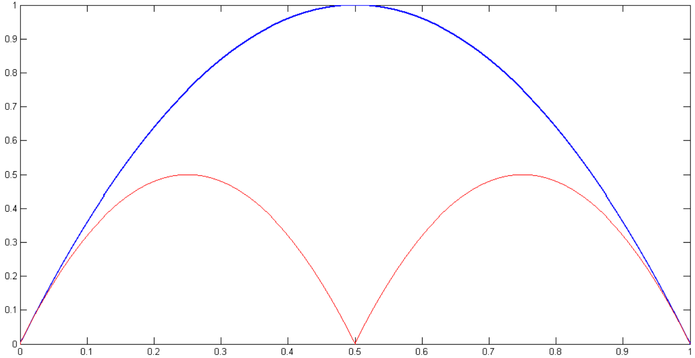
Por lo tanto T_α es la **única** solución de la ecuación funcional

$$\phi(t) = 2^\alpha(\operatorname{dist}(t, \mathbb{Z}))^\alpha + \frac{1}{2}\phi(2t).$$

Caso $\alpha = 2$.

$$f(t) = 4(t - \lfloor t \rfloor)(1 - (t - \lfloor t \rfloor)), \quad g(t) = 4(\mathrm{dist}(t, \mathbb{Z}))^2, \quad h(t) = \frac{1}{2} f(2t).$$

$$f(t) = 4(\mathrm{dist}(t, \mathbb{Z}))^2 + \frac{1}{2} f(2t).$$



Observación

Luego, si $S(x) = K + \frac{c}{4}\|x\|^2 S_0$, entonces,

$$S^T(t,x) = \mathrm{cl}\left(K + ct(1-t)\|x\|^2\, S_0\right)$$

Lema auxiliar

Sean $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones no-decrecientes de subconjuntos de X, sea $H \subseteq X$ un conjunto acotado, sea $K \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}(\mathrm{rec}(B_n))$ y sea $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales que converge a cero. Asumamos que, para todo $n \geq 0$,

$$A_n \subseteq \mathrm{cl}(\epsilon_n H + K + B_n).$$

Entonces,

$$\mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right)$$

Teorema ([GNPR14], Theorem 4.1)

Sea $D \subseteq X$ un conjunto convexo no-vacío y $A, B : (D - D) \to \mathcal{P}(Y)$, tales que $0 \in A(x) \cap B(x)$ para todo $x \in (D - D)$. Consideremos $K = \overline{\mathrm{rec}}(B)$ y sea $F : D \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunción que satisface para $x, y \in D$ la inclusión de tipo Jensen

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} + A(x - y) \subseteq \mathrm{cl}\left(F\Big(\frac{x + y}{2}\Big) + B(x - y)\right). \tag{4.27}$$

Supongamos que además F es puntualmente semi K-acotada inferior y localmente débil semi-K-acotada superior en D. Entonces, F satisface para $x, y \in D$ y $t \in [0, 1]$, la siguiente inclusión:

$$\begin{aligned} &tF(x) + (1 - t)F(y) + A^T(t, x - y) \\ &\qquad \subseteq \mathrm{cl}\left(F(tx + (1 - t)y) + B^T(t, x - y)\right). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Resumen de la demostración.

Vamos a demostrar por inducción que para todo $x, y \in D$ existe un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que, para todo $n \geq 0$, $t \in [0,1]$,

$$tF(x) + (1-t)F(y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} A\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\Big)$$
$$\subseteq \operatorname{cl}\left(F(tx + (1-t)y) + \frac{1}{2^n} H + K + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} B\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\Big)\right).$$

Fijemos $x, y \in D$ arbitrarios. Para $n = 0$ basta encontrar un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que para todo $t \in [0,1]$,

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq \operatorname{cl}\Big(F(tx + (1-t)y) + H + K\Big).$$

Resumen de la demostración.

Sea $U \in \mathcal{U}(Y)$ y escojamos un abierto balanceado $V \in \mathcal{U}(Y)$ tal que $V + V + V \subseteq U$. Como F es puntualmente semi-K-acotada inferior, existen conjuntos acotados $H_x, H_y \subseteq Y$ tales que

$$F(x) \subseteq \mathrm{cl}(H_x + K) \subseteq V + H_x + K$$

y

$$F(y) \subseteq \mathrm{cl}(H_y + K) \subseteq V + H_y + K.$$

Por lo tanto

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq V + V + H_1 + H_2 + K.$$

donde $H_1 := \bigcup_{t\in[0,1]} tH_x$ y $H_2 := \bigcup_{t\in[0,1]}(1-t)H_y$. Por otra parte, existe un conjunto acotado $H_0 \subseteq Y$ tal que para todo $t \in [0,1]$

$$0 \in \mathrm{cl}(F(tx + (1-t)y) + H_0 + K) \subseteq V + F(tx + (1-t)y) + H_0 + K.$$

Resumen de la demostración.

Luego, para todo t en $[0,1]$,

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq U + F(tx + (1-t)y) + H_0 + H_1 + H_2 + K.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} tF(x) + (1-t)F(y) &\subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}(Y)} \Big(U + F(tx + (1-t)y) + H_0 + H_1 + H_2 + K \Big) \\ &= \mathrm{cl} \Big(F(tx + (1-t)y) + H + K \Big), \end{aligned}$$

donde $H := H_0 + H_1 + H_2$.
Supongamos ahora que la hipotesis inductiva es cierta para n y demostraremos que también lo es para $n+1$.

Resumen de la demostración.

Veamos que para $t \in [0, 1/2]$ se tiene lo siguiente

$$tF(x) + (1-t)F(y) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} A\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\Big)$$

$$\subseteq \operatorname{cl}\left(F(tx + (1-t)y) + \frac{1}{2^{n+1}} H + K + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} B\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\Big)\right).$$

$$tF(x) + \frac{2-2t}{2} F(y) + A\Big(2t(x-y)\Big) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} A\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\Big)$$

$$\subseteq \frac{1}{2}\left(2tF(x) + (1-2t)F(y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} A\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\Big)\right)$$

$$+ \frac{1}{2} F(y) + A\Big(2t(x-y)\Big).$$

Resumen de la demostración.

$$tF(x) + (1-t)F(y) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} A\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\Big)$$

$$\subseteq \frac{1}{2}\operatorname{cl}\Big(F(2tx + (1-2t)y) + \frac{1}{2^n}H + K + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} B\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\Big)\Big)$$

$$+ \frac{1}{2}F(y) + A\Big(2t(x-y)\Big)$$

$$\subseteq \operatorname{cl}\Big(\frac{F(2tx + (1-2t)y) + F(y)}{2} + A\Big(2t(x-y)\Big) + \frac{1}{2^{n+1}}H + K$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} B\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\Big)\Big)$$

$$\subseteq \operatorname{cl}\Big(F\Big(tx + (1-t)y\Big) + \frac{1}{2^{n+1}}H + K + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} B\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\Big)\Big).$$

Resumen de la demostración.

Aplicando el lema auxiliar obtenemos lo siguiente

$$\operatorname{cl}\left(tF(x)+(1-t)F(y)+\operatorname{cl}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}A(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y))\right)\right)$$
$$\subseteq \operatorname{cl}\left(F\Big(tx+(1-t)y\Big)+\operatorname{cl}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}B\Big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\Big)\right)\right).$$

Finalmente,

$$tF(x)+(1-t)F(y)+A^T(t,x-y)$$
$$\subseteq \operatorname{cl}\Big(F(tx+(1-t)y)+B^T(t,x-y)\Big).$$

Teorema ([GNPR14], Theorem 4.2)

Sea $D \subseteq X$ un conjunto convexo no-vacío y $A, B : (D - D) \to \mathcal{P}_0(Y)$ multifunciones tales que $0 \in A(x) \cap B(x)$ para todo $x \in (D - D)$. Sea $K = \overline{\mathrm{rec}}(B)$, y sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción que satisface para $x, y \in D$ la inclusión de tipo Jensen

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) + A(x-y) \subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{F(x)+F(y)}{2} + B(x-y)\right). \tag{4.29}$$

Supongamos además, que F es puntualmente semi-K-convexa y que F es localmente semi-K-acotada inferior. Entonces, F satisface para $x, y \in D$ y $t \in [0,1]$, la siguiente inclusión

$$\begin{aligned} &F(tx + (1-t)y) + A^T(t, x-y) \\ &\quad \subseteq \mathrm{cl}\left(tF(x) + (1-t)F(y) + B^T(t, x-y)\right) \end{aligned} \tag{4.30}$$

Sea $\varphi : D - D \to \mathbb{R}_+$ una función no-negativa localmente acotada superior, $S_0 \subseteq Y$ un conjunto convexo que contiene al origen $0 \in Y$ y $K \subseteq Y$ un cono convexo y cerrado.

Corolario ([GNPR14], Corollary 4.4)

Supongamos que $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ es una multifunción puntualmente semi-K-acotada inferior y localmente débil-semi-K-acotada superior que satisface

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} \subseteq \mathrm{cl}\left(F\left(\frac{x+y}{2}\right) + K + \varphi(x-y)S_0\right) \tag{4.31}$$

para todo $x, y \in D$. Entonces

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq \mathrm{cl}\left(F(tx + (1-t)y) + K + \varphi^T(t, x-y)S_0\right) \tag{4.32}$$

para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0,1]$.

Corolario ([GNPR14], Corollary 4.5)

Supongamos que $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *es una multifunción puntualmente semi-K-acotada inferior y localmente débil-semi-K-acotada superior que satisface*

$$\frac{F(x)+F(y)}{2} + \varphi(x-y)S_0 \subseteq \mathrm{cl}\left(F\left(\frac{x+y}{2}\right)+K\right) \tag{4.33}$$

para todo $x, y \in D$*. Entonces*

$$tF(x) + (1-t)F(y) + \varphi^T(t, x-y)S_0 \subseteq \mathrm{cl}\Big(F(tx+(1-t)y)+K\Big) \tag{4.34}$$

para todo $x, y \in D$ *y para todo* $t \in [0,1]$.

Corolario ([GNPR14], Corollary 4.6)

Supongamos que $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *es una multifunción puntualmente semi-K-convexa y localmente semi-K-acotada inferior que satisface*

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{F(x)+F(y)}{2} + K + \varphi(x-y)S_0\right) \tag{4.35}$$

para todo $x, y \in D$. *Entonces*

$$F(tx+(1-t)y) \subseteq \mathrm{cl}\left(tF(x)+(1-t)F(y) + K + \varphi^T(t, x-y)S_0\right) \tag{4.36}$$

para todo $x, y \in D$ *y para todo* $t \in [0, 1]$.

Corolario ([GNPR14], Corollary 4.7)

Supongamos que $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *es una multifunción puntualmente semi-K-convexa y localmente semi-K-acotada inferior que satisface*

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) + \varphi(x-y)S_0 \subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{F(x)+F(y)}{2} + K\right) \tag{4.37}$$

para todo $x, y \in D$. *Entonces*

$$F(tx + (1-t)y) + \varphi^T(t, x-y)S_0 \subseteq \mathrm{cl}\left(tF(x) + (1-t)F(y) + K\right) \tag{4.38}$$

para todo $x, y \in D$ *y para todo* $t \in [0, 1]$.

El Teorema de Bernstein–Doetsch.

Teorema ([Kuc85], Teorema 6.4.2)

Toda función Jensen-convexa $f : D \to \mathbb{R}$ en D, localmente acotada superior en un punto $x_0 \in D$ is continua y por lo tanto convexa en D.

Este teorema teorema fue formulado por F. Bernstein and G. Doetsch en 1915 [BD15], y desde entonces ha sido muy importante en la teoría de convexidad, razón por la cual ha sido generalizado de muchas maneras diferentes y por varios autores. Como consecuencia directa se tiene el siguiente

Corolario ([Kuc85], Teorema 7.1.1)

Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si es continua y Jensen-convexa.

Funciones aproximadamente convexas.

Sea $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, una función no-decreciente.

Definición

Se dice que la función, $f : D \to \mathbb{R}$ es α-**Jensen-convexa** en D, si para todo $x, y \in D$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \alpha(|x-y|). \tag{4.39}$$

Observación

Cuando $\alpha(x) = \epsilon > 0$, entonces, α-Jensen convexidad es simplemente, ϵ-Jensen convexidad [HU52]. Resultados de tipo B-D para este tipo de convexidad fueron obtenidos por Ng y Nikodem en 1993 [NN93].

Teorema ([HP04, MP10])

Sea $D \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto abierto y convexo de la recta real. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función localmente acotada superior en un punto y α-Jensen-convexa en D, entonces, para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0, 1]$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \mathcal{T}_\alpha(t, |x-y|),$$

donde

$$\mathcal{T}_\alpha(t, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \alpha(2 \operatorname{dist}_{\mathbb{Z}}(2^n t) u), \quad t \in [0, 1], u \in D - D.$$

Observación

Si $\alpha(u) = \epsilon |u|^p + \delta$, con $\epsilon, \delta, p > 0$ y $u \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\mathcal{T}_\alpha(t, u) = \epsilon \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{p-n} \operatorname{dist}_{\mathbb{Z}}^p(2^n t) \right) |u|^p + 2\delta = \epsilon T_p(t) |u|^p + 2\delta.$$

Teorema ([TT09])

Sea $D \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto abierto y convexo de la recta real. Si $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(2^{-n}) < \infty$ y $f : D \to \mathbb{R}$ es una función localmente acotada superior en un punto y α-Jensen-convexa en D, entonces, para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0,1]$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \mathcal{S}_\alpha(t, \|x-y\|),$$

donde

$$\mathcal{S}_\alpha(t,u) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\,\mathrm{dist}_{\mathbb{Z}}(2^n t)\alpha\Big(\frac{u}{2^{n+1}}\Big), \quad t \in [0,1], u \in D - D.$$

Observación

Si $\alpha(u) = \epsilon|u|^p$, con $\epsilon, p > 0$ y $u \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\mathcal{S}_\alpha(t,u) = \epsilon\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{dist}_{\mathbb{Z}}(2^n t)}{2^{np+p+1}}\right)|u|^p = \epsilon S_p(t)|u|^p.$$

Funciones fuertemente convexas.

Sea c un número real positivo. Siguiendo a Polyak, [Pol66]

Definición

Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es **fuertemente convexa** con módulo c si para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0, 1]$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)|x-y|^2 \qquad (4.40)$$

Teorema ([AGNS11], Teorema 2.3)

Si $f : D \to \mathbb{R}$ es fuertemente Jensen-convexa con módulo c, y localmente acotada superior en un punto de D entonces f es continua y fuertemente convexa con módulo c.

Multifunciones K-Convexas.

Sean X, Y espacios topológicos lineales, $K \subseteq Y$ un cono convexo cerrado y $D \subseteq X$ un conjunto convexo y abierto. Denote por $\mathcal{P}(Y)$ a la clase de subconjuntos no-vacios de Y.

Definición

Una multifunción $F : D \to \mathcal{P}(Y)$ es K**-convexa** en D, si para todo $x, y \in D$ y todo $t \in [0, 1]$

$$tF(x) + (1 - t)F(y) \subseteq F(tx + (1 - t)y) + K. \tag{5.41}$$

Cono Recesión.

Definición

Sea $H \subseteq X$ un conjunto no vacío. El **cono recesión** de H denotado por $\text{rec}(H)$ es el conjunto

$$rec(H) := \{x \in X \,|\, tx + H \subseteq H, \text{ for all } t \geq 0\}. \tag{5.42}$$

Propiedades.

1. $\text{rec}(H)$ es un cono convexo que contiene al origen;
2. $K = \text{rec}(H)$ es el cono más grande con la propiedad $K + H \subseteq H$;
3. $\overline{\text{rec}}(H) \subseteq \text{rec}(\overline{H})$;
4. para todo $x \in X$, $t > 0$, $\text{rec}(tx + H) = \text{rec}(H)$;
5. $\text{rec}(H_1) + \text{rec}(H_2) \subseteq \text{rec}(H_1 + H_2)$, para todo $H_1, H_2 \subseteq X$.

Multifunciones acotadas.

Definición

Sea $S : D \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunción. Se dice que S es **localmente semi-K-acotada inferior** si para todo $x \in D$ existe un entorno abierto $U \subseteq X$ de x y un conjunto acotado $H \subseteq X$, tal que

$$S(u) \subseteq \mathrm{cl}(H + K), \qquad (u \in U \cap D).$$

Definición

Sea $S : D \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunción. Se dice que S es **localmente débil-semi-K-acotada superior** si para todo $x \in D$ existe un entorno abierto $U \subseteq X$ de x y un conjunto acotado $H \subseteq X$, tal que

$$0 \in \mathrm{cl}(S(u) + H + K), \qquad (u \in U \cap D).$$

K-continuidad direccional.

Definición

Decimos que F es direccionalmente K-semicontinua superior en un punto $p \in D$, si para toda dirección $h \in X$ y para todo entorno abierto U de $0 \in Y$, existe un nùmero positivo δ tal que

$$F(p + th) \subseteq F(p) + U + K,$$

para todo $t \in (0, \delta)$ tal que $p + th \in D$.

Definición

Decimos que F es direccionalmente K-semicontinua inferior en un punto $p \in D$, si para toda dirección $h \in X$ y para todo entorno abierto U de $0 \in Y$, existe un nùmero positivo δ tal que

$$F(p) \subseteq F(p + th) + U + K,$$

para todo $t \in (0, \delta)$ tal que $p + th \in D$.

Asumamos que $D \subseteq X$ es un conjunto estrellado.

Definición

Para una multifunción $S : D \to \mathcal{P}(Y)$, tal que $0 \in S(x)$ para todo $x \in D$, definimos la **transformación de Takagi-Tabor** de S, como la multifunción $S^{\perp} : \mathbb{R} \times D \to \mathcal{P}(Y)$ tal que

$$S^{\perp}(t,x) := \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} 2\,\mathrm{dist}(2^k t, \mathbb{Z}) S\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\right). \tag{5.43}$$

Relación entre S y $S^{\perp}$.

Sea $S : D \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunción tal que $0 \in S(x)$ para todo $x \in D$. Entonces

$$S^{\perp}\left(\tfrac{1}{2}, x\right) = \mathrm{cl}(S(x)) \qquad (x \in D). \tag{5.44}$$

References

[AGNS11] A. Azócar, J. Giménez, K. Nikodem, and J. L. Sánchez, *On strongly midconvex functions*, Opuscula Math. **31** (2011), no. 1, 15–26.

[BD15] F. Bernstein and G. Doetsch, *Zur theorie der konvexen funktionen*, Math. Ann. **76** (1915), no. 4, 514–526. MR 1511840

[Bor08] Z. Boros, *An inequality for the Takagi function*, Math. Inequal. Appl. **11** (2008), no. 4, 757–765. MR 2009f:39047

[GNPR14] Carlos González, Kazimierz Nikodem, Zsolt Páles, and Gari Roa, *Bernstein–doetsch type theorems for set-valued maps of strongly and approximately convex and concave type*, Pub. Math. Debrecen **84** (2014).

[HP04] A. Házy and Zs. Páles, *On approximately midconvex functions*, Bull. London Math. Soc. **36** (2004), no. 3, 339–350. MR 2004j:26020

[HU52] D. H. Hyers and S. M. Ulam, *Approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 821–828. MR 14,254b

[Hua10] Hui Huang, *Global error bounds with exponents for multifunctions with set constraints*, Communications in Contemporary Mathematics **12** (2010), no. 03, 417–435.

[Kuc85] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, vol. 489, Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985. MR 86i:39008

[Lac99] M. Laczkovich, *The local stability of convexity, affinity and of the Jensen equation*, Aequationes Math. **58** (1999), 135–142.

[LMNS13] H. Leiva, N. Merentes, K. Nikodem, and J. L. Sánchez, *Strongly convex set-valued maps*, J. Global Optim. (2013).

References

[MP10] J. Makó and Zs. Páles, *Approximate convexity of Takagi type functions*, J. Math. Anal. Appl. **369** (2010), 545–554.

[MP12] ______, *On φ-convexity*, Publ. Math. Debrecen **80** (2012), no. 1-2, 107–126.

[Nik86] K. Nikodem, *Continuity of K-convex set-valued functions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **34** (1986), no. 7-8, 393–400.

[Nik87a] ______, *On concave and midpoint concave set-valued functions*, Glas. Mat. Ser. III **22(42)** (1987), no. 1, 69–76. MR 89g:39017

[Nik87b] ______, *On midpoint convex set-valued functions*, Aequationes Math. **33** (1987), no. 1, 46–56. MR 88h:90171

[NN93] C. T. Ng and K. Nikodem, *On approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), no. 1, 103–108.

[Pol66] B. T. Polyak, *Existence theorems and convergence of minimizing sequences for extremal problems with constraints*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **166** (1966), 287–290. MR 33 #6466

[TT09] Ja. Tabor and Jó. Tabor, *Generalized approximate midconvexity*, Control Cybernet. **38** (2009), no. 3, 655–669.