UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA.

FACULTAD DE CIENCIAS.

DIVERSOS TEOREMAS DE TIPO BERNSTEIN-DOETSCH PARA MULTIFUNCIONES.

Autor: Msc. Carlos González.

Trabajo de Ascenso presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al escalafon de asistente.

Caracas, Venezuela

Noviembre, 2017

Índice general

Resumen **4**

Introducción **6**

1. Espacios Topológicos Lineales. **11**

1.1. Espacios topológicos. 11

1.2. Espacios vectoriales. 15

1.3. Espacios topológicos lineales. 17

1.4. Conos convexos. 23

1.5. Conjuntos K-convexos. 26

2. El teorema de Bernstein–Doetsch **30**

2.1. Versión Original. 31

2.2. Cambio en la estructura del espacio subyacente. 33

2.3. Convexidad Aproximada. 34

2.3.1. $\alpha(\cdot)$-convexidad. 38

2.4. Convexidad fuerte. 39

3. Multifunciones. **41**

3.1. Definiciones Básicas. 41

3.2. K-convexidad y K-concavidad de multifunciones. 47

3.3. El teorema de Bernstein–Doetsch para multifunciones. 51

3.4. Convexidad fuerte. 55

3.5. Transformación de Takagi. 56

4. Término de error de tipo Takagi-Hazy-Páles. 62

4.1. Teorema de tipo Bernstein–Doetsch para multifunciones convexas 62

4.2. Teorema de tipo Bernstein–Doetsch para multifunciones cóncavas. 67

4.3. Consecuencias de los teoremas previos. 71

5. Término de error de tipo Takagi-Tabor. 75

5.1. Tranformación de Takagi-Tabor para una multifunción 75

5.2. Convexidad y concavidad sobre los racionales diádicos. 84

Conclusiones 95

Bibliografía 102

Resumen

En general, no toda función midconvexa es convexa. Sin embargo, en la clase de funciones continuas, es bien conocido que una función es midconvexa y continua si y sólo si ella es convexa [25]. El teorema de Bernstein-Doetsch publicado hace 100 años da una condición más débil que la continuidad, para que una función midconvexa definida en un subconjunto convexo de la recta real sea continua y por lo tanto convexa. Este teorema fue establecido en 1915, y es uno de los resultados clásicos más importantes obtenidos en la teoría de funciones convexas. Desde entonces, ha sido generalizado de varias maneras diferentes y por muchos autores.

Los teoremas principales en esta monografía generalizan algunos de los resultados obtenidos por Ng, Nikodem Averna, Cardinali, Papalini, y otros, relacionados con funciones fuertemente y aproximadamente convexas, puede revisar [28, 32, 39] y las referencias que allí los autores mencionan. Aquí, consideramos una multifunción $F(\cdot)$ definida en un subconjunto convexo D de un espacio topológico lineal X la cual toma valores en la clase de subconjuntos no-vacíos de otro espacio topológico lineal Y y que satisface la siguiente inclusión de tipo Jensen:

$$\frac{F(x)+F(y)}{2}+A(x-y)\subseteq\overline{\left(F\left(\frac{x+y}{2}\right)+B(x-y)\right)},\qquad (x,y\in D)$$

donde, $A(\cdot)$ y $B(\cdot)$ son multifunciones definidas en $D-D$ y que además satisfacen que para todo $x\in D-D$, $0\in A(x)\cap B(x)$. Ahora bien, asumiendo algunas condiciones de regularidad sobre la multifunción F se puede demostrar que la multifunción $F(\cdot)$ satisface

para $x, y \in D$ y $t \in [0,1]$ las siguientes inclusiones:

$$tF(x) + (1-t)F(y) + A^{\mathsf{T}}(t, x-y) \subseteq \overline{\left(F(tx + (1-t)y) + B^{\mathsf{T}}(t, x-y)\right)}.$$

y

$$tF(x) + (1-t)F(y) + A^{\perp}(t, x-y) \subseteq \overline{\left(F(tx + (1-t)y) + B^{\perp}(t, x-y)\right)}.$$

Aquí, A^{T} denota la transformación de Takagi-Hazy-Páles asociada a la multifunción A, mientras que $A^{\perp}$ denota la transformación de Takagi-Tabor asociada a la multifunción A. Estas transformaciones, estan definidas para $t \in [0,1]$ y $x \in D - D$ mediante las siguientes fórmulas:

$$A^{\mathsf{T}}(t, x) = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} A(2\mathrm{dist}(2^k t, \mathbb{Z})x)}$$

y

$$A^{\perp}(t, x) = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} 2\mathrm{dist}(2^k t, \mathbb{Z}) A\left(\frac{x}{2^k}\right)}$$

respectivamente

Palabras Claves: K-Jensen convexidad/concavidad, multifunción, Transformación de Takagi, convexidad aproximada, convexidad fuerte.

Introducción

El Teorema de Bernstein y Doetsch [4] publicado hace 100 años, ha sido uno de los resultados fundamentales en la teoría de convexidad [25]. Este teorema asegura que si la función $f : I \to \mathbb{R}$ es Jensen convexa (donde I es un intervalo de la recta real), i.e.,

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad (x, y \in I) \tag{0.1}$$

y también es localmente acotada superior, entonces f debe ser continua sobre I y por lo tanto convexa en I. Si $-f$ es Jensen convexa, entonces se dice que f es Jensen cóncava y los resultados obtenidos para esta clase de funciones son análogos bajo la hipótesis de que f debe ser localmente acotada inferior. Este teorema es muy importante y ha sido aplicado y generalizado de muchas maneras las cuales describiremos brevemente a continuación.

Cuando el co-dominio Y de la función f es un espacio vectorial ordenado, i.e, el conjunto K de elementos no-negativos de Y forma un cono convexo, entonces se puede definir la convexidad de tipo Jensen con respecto al cono K (frecuentemente conocida como Jensen K-convexidad) de la función $f : I \to Y$ por

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \in f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + K \qquad (x, y \in I). \tag{0.2}$$

En particular, si $Y = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{R}_+$, entonces (0.2) es equivalente a (0.1). Las extensiones del teorema de Bernstein–Doetsch a esta clase de funciones fueron formuladas por Trudzik [51]. Las funciones $f : I \to Y$ que satisfacen la inclusión

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \in \frac{f(x)+f(y)}{2} + K \qquad (x, y \in I) \tag{0.3}$$

se denominan K-Jensen cóncavas. Evidentemente, esta última relación es válida si y sólo si $(-f)$ es K-Jensen convexa (ó si f es $(-K)$-Jensen convexa). Por lo tanto, los resultados relacionados con funciones K-Jensen cóncavas siempre pueden ser obtenidos directamente de los resultados establecidos para funciones K-Jensen convexas.

Generalizado un poco más, podemos considerar el caso de las multifunciones. Una multifunción no es más que una función cuyas imágenes son subconjuntos de un conjunto Y cualquiera. Si X es un espacio normado, $D \subseteq X$ es un conjunto convexo y abierto y Y es un espacio vectorial ordenado, entonces se dice que una multifunción $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ es K-Jensen convexa si para todo $x, y \in D$ se cumple lo siguiente

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} \subseteq F\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + K. \tag{0.4}$$

Observe que si F es de la forma $F(x) = \{f(x)\}$ para alguna función $f : D \to Y$, entonces (0.4) es equivalente a (0.2), y así se evidencia como la inclusión (0.4) generaliza (0.2). Los resultados de tipo Bernstein–Doetsch para este tipo de multifunciones han sido obtenidos durante las últimas cinco décadas por los profesores Averna, Cardinali, Nikodem, Papalini [2, 8, 36, 37, 38, 39, 40] y Borwein [7]. La noción de K-Jensen concavidad para una multifunción $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$, análoga a la inclusión (0.3), se define por

$$F\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \subseteq \frac{F(x) + F(y)}{2} + K \qquad (x, y \in D). \tag{0.5}$$

En el desarrollo de este trabajo, veremos que, en general, la K-Jensen concavidad de F *no es* equivalente a la K-Jensen convexidad de $-F$. Esto trae como consecuencia, que al hablar de multifunciones, los resultados relacionados a convexidad y concavidad necesitan ser tratados por separado.

Otra cadena de generalizaciones del teorema de Bernstein–Doetsch emerge del artículo del profesor K. Nikodem junto con el prof. Ng [35] en el contexto de convexidad aproximada. Allí, ellos demuestran que si $f : D \to \mathbb{R}$ es ε-Jensen convexa para algún $\varepsilon \geq 0$, i.e.,

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} + \varepsilon \qquad (x, y \in D), \tag{0.6}$$

y si además f es localmente acotada superior, entonces f es 2ε-convexa, i.e.,

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)+2\varepsilon \qquad (x,y\in D,\ t\in[0,1]). \tag{0.7}$$

Considerando un término de error más general, Házy y Páles [16] investigaron la siguiente desigualdad de tipo Jensen aproximada

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}+\varepsilon\|x-y\| \qquad (x,y\in D), \tag{0.8}$$

asumiendo que D es un subconjunto de un espacio normado X y f es una función a valores reales. En dicho artículo, los autores demostraron que bajo la hipótesis usual de que f es localmente acotada superior, la desigualdad (0.8) implica

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)+2\varepsilon T(t)\|x-y\| \qquad (x,y\in D,\ t\in[0,1]), \tag{0.9}$$

donde la función $T:\mathbb{R}\to[0,1]$, es la conocida función de Takagi, y se define por

$$T(t) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,\mathrm{dist}(2^n t,\mathbb{Z}).$$

Algunos resultados, que extienden este tipo de nociones a términos más generales de errores y también a conceptos de convexidad relacionados con sistemas de Chebyshev, han sido obtenidos recientemente por Házy, Makó and Páles [14, 15, 17, 18, 28, 29, 30, 32] y por Mureńko, Ja. Tabor, Jó. Tabor, and Żoldak [34, 46, 47, 48, 49].

Finalmente, haremos mención a la noción de convexidad fuerte, la cual en cierto sentido, es lo contrario a convexidad aproximada. Siguiendo a Polyak [41], una función $f:D\to\mathbb{R}$ es fuertemente Jensen convexa con módulo $\varepsilon\geq 0$ si

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\|x-y\|^2 \qquad (x,y\in D). \tag{0.10}$$

Asumiendo que f es localmente acotada superior, los profesores Azócar, Gimenez, Nikodem y Sánchez en [3] demostraron que si f es fuertemente Jensen convexa entonces f es fuertemente convexa con módulo ε, i.e.,

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)-\varepsilon t(1-t)\|x-y\|^2 \qquad (x,y\in D,\ t\in[0,1]). \tag{0.11}$$

La versión conjunto valuada de este resultado fue establecida por Leiva, Merentes, Nikodem, y Sánchez en [27].

En este trabajo, mostraremos una generalización del teorema de Bernstein–Doetsch para multifunciones que satisfacen una inclusión general de tipo Jensen de la forma

$$\frac{F(x)+F(y)}{2}+A(x-y)\subseteq F\left(\frac{x+y}{2}\right)+B(x-y) \qquad (x,y\in D), \tag{0.12}$$

donde A y B son multifunciones definidas en $D-D$. Bajo ciertas condiciones de regularidad sobre la multifunción F demostraremos que ella satisface la inclusión

$$tF(x)+(1-t)F(y)+S_A(t,x-y)\subseteq F(tx+(1-t)y)+S_B(t,x-y) \tag{0.13}$$

para todo $t\in[0,1]$ y para todo $x,y\in D$. Donde S_A y S_B son ciertas multifunciones definidas en $[0,1]\times D-D$ que surgen de forma natural como una generalización conjunto-valuada de la función de Takagui cuya importancia se ve reflejada en los artículos de Z. Páles, J. Makó, A. Hazy, Jo. Tabor, Ja. Tabor [28, 31, 46, 47] como veremos en el Capítulo 2 de esta monografía. Los resultados que presentaremos aquí generalizan a la mayoría de los resultados obtenidos en esta línea de investigación desde el año 1915 y además proporcionan nuevos Teoremas de tipo Bernstein–Doetsch para multifunciones aproximadamente midconvexas y midcóncavas.

Note que la inclusión (0.12) es una combinación de midconvexidad aproximada y midconvexidad fuerte para la multifunción F, mientras que la inclusión (0.13) combina convexidad fuerte y aproximada. De hecho, si $A=\{0\}$, entonces (0.12) corresponde a un tipo de midconvexidad aproximada mientras que por el contrario si $B=\{0\}$ entonces la misma inclusión corresponde a un tipo de midconvexidad fuerte. Por otra parte, podemos decir que en este trabajo no se demuestra que la inclusión (0.13) es óptima y por lo tanto queda como problema abierto.

Debido a la observación hecha previamente con respecto a la naturaleza de las multifunciones convexas y cóncavas, estableceremos también, un Teorema de tipo Bernstein–Doetsch para multifunciones midcóncavas. Los resultados principales de esta investigación que serán presentados en el Capítulo 4 de esta monografía, se pueden encontrar en [11].

Capítulo 1

Espacios Topológicos Lineales.

En este capítulo se hará un breve desarrollo de algunos conceptos de topología que serán usados a lo largo de todo el trabajo. Los resultados que mencionaremos en este capítulo se encuentran desarrollados en el libro del profesor W. Rudin[45].

1.1. Espacios topológicos.

Sea X un conjunto, se denota por $\mathcal{P}(X)$ al conjunto potencia de X.

Definición 1.1.1. *Un* ***espacio topológico*** *consiste en una dupla* $(X, \mathcal{T})$*, donde* X *es un conjunto y* $\mathcal{T}$ *es un subconjunto de* $\mathcal{P}(X)$ *que cumple con las siguientes propiedades:*

I. $\emptyset \in \mathcal{T}$ *y* $X \in \mathcal{T}$.

II. *Si* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \subseteq \mathcal{T}$ *es una colección de elementos de* $\mathcal{T}$*, entonces:*

$$\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

III. *Si* $\{U_k\}_{k=1}^{n} \subseteq \mathcal{T}$ *es una colección finita de elementos de* $\mathcal{T}$*, entonces:*

$$\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \mathcal{T}.$$

Cuando $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, los elementos de $\mathcal{T}$ se llaman **conjuntos abiertos**. En lo que sigue a continuación, el par $(X, \mathcal{T})$ denotará un espacio topológico. Cuando no haya lugar a confusión se omitirá la topología.

Definición 1.1.2. *Decimos que el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, es un espacio de Hausdorff, si para cada par de puntos diferentes, $x, y \in X$ existen abiertos disjuntos $U_x, U_y \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U_x$ y $y \in U_y$.*

Definición 1.1.3. *Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, y un subconjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, se dice que $\mathcal{B}$ es una base para la topología $\mathcal{T}$ si todo conjunto abierto $U \in \mathcal{T}$ es la unión de elementos de $\mathcal{B}$. De manera equivalente, $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{T}$ si y sólo si, para todo punto p perteneciente a cualquier abierto $O \in \mathcal{T}$ existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $p \in B \subseteq O$.*

Definición 1.1.4. *Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y un punto $p \in X$. Una base local en p, consiste en una colección de abiertos $\mathcal{B}_p$, tal que, cualquier entorno abierto $U \subseteq X$ de p, contiene al menos un miembro de $\mathcal{B}_p$.*

Definición 1.1.5. *Dado un conjunto $A \subseteq X$ y un punto $p \in X$, se dice que p es un **punto de acumulación** del conjunto A, si para todo abierto $U \in \mathcal{T}$ que contiene a p, se tiene que*

$$A \cap (U \setminus \{p\}) \neq \emptyset \tag{1.1}$$

Definición 1.1.6. *Un conjunto $V \subseteq X$ es **cerrado**, si el conjunto $X \setminus V$ es abierto.*

Los conjuntos cerrados también se pueden caracterizar de la siguiente manera:

Proposición 1.1.7. *Un subconjunto $V \subseteq X$ es cerrado, si y sólo si V contiene todos sus puntos de acumulación.*

Demostración. Sea $V \subseteq X$ un conjunto cerrado y sea $p \in X$ un punto de acumulación de V. Supongamos que $p \notin V$. Como V es cerrado, entonces por definición su complemento $U = X \setminus V$ es abierto y como $p \in U$, existe un elemento básico $B \in \mathcal{B}$, tal que $p \in B \subseteq U$. En consecuencia, $B \cap V = \emptyset$, pero esto contradice el hecho de que p es un punto de acumulación de V. Luego, es falso suponer que $p \notin V$ y así, queda establecido que el conjunto V posee a todos sus puntos de acumulación.

Supongamos ahora que el conjunto V posee a todos sus puntos de acumulación y sea $U = X \setminus V$. Veamos que U es abierto. Sea $p \in U$, por definición se tiene que p no es punto de acumulación de V, en consecuencia, existe un entorno abierto $B \subseteq X$ de p tal que $V \cap (B \setminus \{p\}) = \emptyset$. Por lo tanto, $p \in B \subseteq U$ y así, U es abierto. $\square$

Es posible definir una topología en términos de conjuntos cerrados.

Teorema 1.1.8. *Sea X un espacio topológico, la clase de conjuntos cerrados en X, posee las siguientes propiedades:*

I. *X y $\emptyset$ son conjuntos cerrados.*

II. *La intersección arbitraria de conjuntos cerrados, es cerrado.*

III. *La unión finita de conjuntos cerrados, es cerrado.*

Definición 1.1.9. *Sea $A \subseteq X$. La* ***clausura*** *de A, se denota por $\mathrm{cl}(A)$ y se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen al conjunto A. Esto es,*

$$\mathrm{cl}(A) := \bigcap \{V \subseteq X : A \subseteq V \quad \textit{y} \quad V \quad \textit{es cerrado}\}.$$

Se puede ver que $\mathrm{cl}(A)$ es un conjunto cerrado ya que es la intersección de conjuntos cerrados. Además, $\mathrm{cl}(A)$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene al conjunto A. Es decir, si V es un conjunto cerrado que contiene al conjunto A, entonces:

$$A \subseteq \mathrm{cl}(A) \subseteq V.$$

Además, $V \subseteq X$ es un conjunto cerrado si y sólo si $V = \mathrm{cl}(V)$. Todo esto se resume en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.10. *Sea* $A \subseteq X$. *Entonces,*

I. $\mathrm{cl}(A)$ *es cerrado y* $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$.

II. *Si* V *es un conjunto cerrado que contiene al conjunto* A*, entonces* $\mathrm{cl}(A) \subseteq V$.

III. A *es cerrado si y sólo si* $A = \mathrm{cl}(A)$.

Demostración. Sea $A \subseteq X$.

I. Por definición, el conjunto $\mathrm{cl}(A)$ es la intersección arbitraria de conjuntos cerrados y por el Teorema 1.1.8 se tiene que es un conjunto cerrado. Además, por definición $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$.

II. Es consecuencia directa de la definición de clausura.

III. Supongamos que A es cerrado. Entonces, por el item II se tiene que $\mathrm{cl}(A) \subseteq A$ y en consecuencia $\mathrm{cl}(A) = A$. Recíprocamente, si $A = \mathrm{cl}(A)$, entonces, evidentemente A es cerrado, lo que completa la demostración.

□

Proposición 1.1.11. *Sea* $A \subseteq X$. *La clausura de* A *es la unión de* A *con su conjunto de puntos de acumulación* A'. *Esto es,* $\mathrm{cl}(A) = A \cup A'$.

Demostración. Veamos que $\mathrm{cl}(A) \subseteq A \cup A'$. Sea $p \in \mathrm{cl}(A)$, y supongamos que $p \notin A \cup A'$, esto es $p \notin A$ y $p \notin A'$. Como $p \notin A'$, por definición existe un entorno abierto $B \subseteq X$ de p, tal que $A \cap (B \setminus \{p\}) = \emptyset$, por lo tanto $B \setminus \{p\} \subseteq X \setminus A$ y en consecuencia $B \subseteq X \setminus A$. Pero esto último equivale a $A \subseteq X \setminus B$, y siendo B un conjunto abierto, se tiene que $X \setminus B$ es cerrado. Como además, este conjunto contiene al conjunto A, entonces por la definición de clausura se tiene que $\mathrm{cl}(A) \subseteq X \setminus B$ y por lo tanto $B \subseteq X \setminus \mathrm{cl}(A)$. Como $p \in B$, debe ocurrir entonces que $p \notin \mathrm{cl}(A)$, pero esto es una contradicción. Luego, es falso suponer que $p \notin A \cup A'$ y así $\mathrm{cl}(A) \subseteq A \cup A'$.

Veamos ahora que $A \cup A' \subseteq \mathrm{cl}(A)$. Sea $p \in A \cup A'$. Si $p \in A$, entonces $p \in \mathrm{cl}(A)$ y en este caso la demostración es directa. Si por el contrario, $p \in A'$, entonces supongamos que $p \notin \mathrm{cl}(A)$. Como $\mathrm{cl}(A)$ es un conjunto cerrado entonces su complemento es abierto y por lo tanto existe un entorno abierto B de p tal que $p \in B \subseteq X \setminus \mathrm{cl}(A)$. En consecuencia, $B \cap \mathrm{cl}(A) = \emptyset$ y como $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$ entonces $B \cap A = \emptyset$, pero esto es una contradicción ya que p es punto de acumulación del conjunto A. Luego, es falso suponer que $p \notin \mathrm{cl}(A)$ y finalmente se tiene que $A \cup A' \subseteq \mathrm{cl}(A)$. Esto completa la demostración. □

Proposición 1.1.12. *Sean $A, B \subseteq X$, el operador $\mathrm{cl}(\cdot)$ cumple las siguientes propiedades*

I. $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B)$.

II. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$.

Demostración. La demostración de esta proposición es consecuencia directa de la Proposición 1.1.10 y de la Proposición 1.1.11. □

1.2. Espacios vectoriales.

Denótese por $\mathbb{R}$ al cuerpo de los números reales y por $\mathbb{C}$ al cuerpo de los números complejos. Por ahora, se usará Φ para denotar tanto a $\mathbb{R}$ como a $\mathbb{C}$. Un escalar, es un elemento del cuerpo Φ.

Definición 1.2.1. *Un espacio vectorial sobre Φ es un conjunto X, junto con dos operaciones, suma y producto por un escalar las cuales satisfacen las siguientes propiedades:*

I. *A cada par de vectores $x, y \in X$ les corresponde un vector $x + y \in X$, de manera que*

$$x + y = y + x \qquad y \qquad x + (y + z) = (x + y) + z.$$

II. *X contiene un único vector 0 el cual se llamará con frecuencia el origen de X, tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in X$. Además a cada vector $x \in X$ le corresponde un vector $-x \in X$ tal que $x + (-x) = 0$.*

III. *A cada par* (α, x) *con* $\alpha \in \Phi$*, y* $x \in X$ *le corresponde un vector* $\alpha x \in X$*, de manera que*

$$1x = x, \qquad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,$$

y además se cumplen las siguientes leyes distributivas

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \qquad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

Observación 1.2.2. *Un espacio vectorial real, es un espacio vectorial donde* $\Phi = \mathbb{R}$*, y un espacio vectorial complejo, es un espacio vectorial donde* $\Phi = \mathbb{C}$*. Cualquier afirmación sobre un espacio vectorial, donde no se especifique explícitamente el cuerpo, será válida para ambos casos.*

Definición 1.2.3. *Sea* X *un espacio vectorial y sean* $A, B \subseteq X$*,* $x \in X$ *y* $\lambda \in \Phi$*, entonces*

$$\begin{aligned} x + A &= \{x + a : a \in A\}, \\ A + B &= \{a + b : a \in A, b \in B\}, \\ \lambda A &= \{\lambda a : a \in A\} \\ x - A &= \{x - a : a \in A\}. \end{aligned}$$

Observación 1.2.4. *Con estas operaciones así definidas, puede ocurrir que* $A + A \neq 2A$.

Definición 1.2.5. *Un subconjunto* $W \subseteq X$ *es llamado subespacio de* X *si el mismo es un espacio vectorial (con respecto a las mismas operaciones).*

Proposición 1.2.6. *Sea* X *un espacio vectorial y* $W \subseteq X$*.* W *es un subespacio de* X *si y sólo si,* $0 \in W$ *y además, para* $\alpha, \beta \in \Phi$ *se tiene que*

$$\alpha W + \beta W \subseteq W.$$

Definición 1.2.7. *Un conjunto* $D \subseteq X$ *es convexo, si para todo* $t \in [0, 1]$ *se tiene que*

$$tD + (1 - t)D \subseteq D.$$

En otras palabras, el conjunto D *es convexo si para cualesquiera par de puntos* $x, y \in D$ *se tiene que*

$$[x, y] := \{ty + (1-t)x : t \in [0, 1]\} \subseteq D.$$

Definición 1.2.8. *Sea* $H \subseteq X$ *y sea* $p \in H$*. Se dice que el conjunto* H *es estrellado con respecto al punto* p *si para todo* $h \in H$ *se tiene que el segmento* $[h, p] \subseteq H$*.*

Existe una conexión entre los conjuntos estrellados y los conjuntos convexos. La siguiente proposición muestra este hecho

Proposición 1.2.9. *El conjunto* $H \subseteq X$ *es convexo si y sólo si* H *es estrellado con respecto a cada uno de sus puntos.*

Proposición 1.2.10. *Sea* $H \subseteq X$ *un conjunto convexo no-vacío. Entonces, el conjunto* $H - H$ *es estrellado con respecto al origen.*

Demostración. Sea $p \in H - H$. Por definición existen $h_1, h_2 \in H$ tales que $p = h_1 - h_2$. Luego, si $t \in [0, 1]$, y $h \in H$ es un elemento cualquiera de H entonces

$$tp = th_1 - th_2 = th_1 - th_2 + (1-t)(h-h) = th_1 + (1-t)h - (th_2 + (1-t)h).$$

Como H es un conjunto convexo, se tiene que $tp \in H - H$ para todo $t \in [0, 1]$. Por lo tanto el conjunto $H - H$ es estrellado con respecto al origen. $\square$

Definición 1.2.11. *Un conjunto* $D \subseteq X$ *se dice que es balanceado, si para todo* $\alpha \in \Phi$*, con* $|\alpha| \leq 1$*, se tiene que* $\alpha D \subseteq D$*,*

1.3. Espacios topológicos lineales.

Supongamos que $\mathcal{T}$ es una topología para un espacio vectorial X que cumple con lo siguiente:

I. Todo punto de X es un conjunto cerrado.

II. Las operaciones del espacio vectorial, son continuas con respecto a $\mathcal{T}$.

Bajo estas condiciones, se dice que $\mathcal{T}$ es una topología vectorial en X y X es un *espacio topológico lineal*.

Definición 1.3.1. *Sea X un espacio topológico lineal. Para cada $a \in X$ y para cada $\lambda \neq 0$, se definen los operadores de traslación y multiplicación, $T_a(x)$ y $M_\lambda(x)$ respectivamente, de la siguiente manera*

$$T_a(x) = x + a \qquad y \qquad M_\lambda(x) = \lambda x, \quad (x \in X). \tag{1.2}$$

Proposición 1.3.2. *T_a y M_λ son homeomorfismos de X en X.*

Demostración. Los axiomas de espacio vectorial, implican que estos operadores son biyectivos, y además que sus inversas son T_{-a} y $M_{1/\lambda}$, respectivamente. El hecho de que las operaciones, suma y producto por un escalar sean continuas, implica que tanto T_a como M_λ, así como sus inversas sean continuas. $\square$

Como consecuencia de esta proposición, se tiene que toda topología vectorial $\mathcal{T}$ es invariante. Es decir, un conjunto $E \subseteq X$ es abierto, si y sólo si, para todo $a \in X$, el conjunto $a + E$ es abierto. Así, $\mathcal{T}$ está completamente determinada por cualquier base local.

En este contexto, el término base local, se refiere a la base local en $0 \in X$. Se denotará por $\mathcal{U}(X)$ a dicha base.

Definición 1.3.3. *Un subconjunto $H \subseteq X$ es acotado, si para todo entorno abierto U de $0 \in X$, existe un número $s > 0$ tal que $H \subseteq tU$ para todo $t > s$.*

Proposición 1.3.4. *Sea $H \subseteq X$ un conjunto acotado. Para cada $\alpha \in [0, 1]$ el conjunto αH es acotado y además $\bigcap_{\alpha \in [0,1]} \alpha H$ es acotado.*

Demostración. Sea $U \subseteq X$ un conjunto abierto tal que $0 \in U$ y sea $\alpha \in [0,1]$. Como H es acotado, existe $s_\alpha > 0$ tal que si $t > s_\alpha$, entonces $H \subseteq t\left(\frac{1}{\alpha}U\right)$. En consecuencia, $\alpha H \subseteq \alpha t\left(\frac{1}{\alpha}U\right) = tU$ siempre y cuando $t > s_\alpha$. Como U es arbitrario se tiene que el conjunto αH es acotado.

Para ver que la intersección de los conjuntos de la forma αH con $\alpha \in [0,1]$ es un conjunto acotado, consideremos un abierto balanceado arbitrario $U \subseteq X$ tal que $0 \in U$. Como el conjunto H es acotado, existe $s > 0$ tal que si $t > s$ entonces, $H \subseteq tU$. Ahora bien, para $\alpha \in [0,1]$ se tiene que $\alpha H \subseteq \alpha t U$ y como U es balanceado entonces tU también lo es, luego, como $\alpha \leq 1$, entonces $\alpha t U \subseteq tU$. Por lo tanto, para $t > s$ se tiene lo siguiente

$$\bigcap_{\alpha\in[0,1]} \alpha H \subseteq \bigcap_{\alpha\in[0,1]} \alpha t U \subseteq \bigcap_{\alpha\in[0,1]} tU = tU.$$

Como el abierto U es arbitrario, entonces queda demostrado que el conjunto $\bigcap_{\alpha\in[0,1]} \alpha H$ es acotado.

$\square$

Definición 1.3.5. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico lineal. Se dice que el abierto* $U \subseteq X$*, es simétrico si y sólo si* $U = -U$.

Proposición 1.3.6. *Si* $W \subseteq X$ *es un entorno abierto de* $0 \in X$*, entonces, existe un entorno abierto y simétrico* $U \subseteq X$*, de* 0 *tal que* $U + U \subseteq W$.

Demostración. Sea $W \subseteq X$ un entorno abierto de 0. Como la operación suma es continua y $0 = 0 + 0$, entonces, existen entornos abiertos V_1, V_2 de 0, tales que $V_1 + V_2 \subseteq W$. Definamos $U := V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$. Es claro que U es un abierto simétrico, y que además $U + U \subseteq W$. $\square$

Proposición 1.3.7. *La familia de subconjuntos acotados es cerrada bajo la suma y el producto por escalares positivos.*

Demostración. Sean $H_1, H_2 \subseteq X$ conjuntos acotados. Veamos que la suma $H := H_1 + H_2$ es un conjunto acotado. Sea $V \subseteq X$ un entorno abierto de $0 \in X$ y escojamos $U \in \mathcal{T}$ tal que $0 \in U$ y $U + U \subseteq V$. Como H_1 y H_2 son acotados, existen escalares positivos t_1 y t_2 tales que

$$H_1 \subseteq s_1 U \qquad \text{si} \quad s_1 > t_1,$$

$$H_2 \subseteq s_2 U \qquad \text{si} \quad s_2 > t_2.$$

Ahora bien, si $s > \text{máx}(t_1, t_2)$ entonces,

$$H = H_1 + H_2 \subseteq sU + sU = s(U + U) \subseteq sV.$$

Por lo tanto, el conjunto H es acotado. De manera similar se demuestra que tH_1 es acotado para cualquier escalar positivo t. □

Teorema 1.3.8. *Suponga que* K *y* C *son subconjuntos de un espacio topológico lineal* X*,* K *es compacto,* C *es cerrado y que* $K \cap C = \emptyset$*. Entonces, existe un entorno* V *de* $0 \in X$ *tal que*

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset.$$

Demostración. Si $K = \emptyset$, entonces $K + V = \emptyset$ y la conclusión del teorema es directa. Por lo tanto, asuma que $K \neq \emptyset$. Sea $x \in K$. Como K y C son disjuntos, se tiene que x no está en C, por la Proposición 1.3.6, existe un abierto simétrico $V_x \subseteq X$ tal que

$$(x + V_x + V_x + V_x) \cap C = \emptyset.$$

Como V_x es simétrico, la condición anterior equivale a

$$(x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \emptyset. \tag{1.3}$$

Por otra parte, K es compacto, es decir que admite un cubrimiento finito

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i}).$$

Ahora bien, al considerar $V := V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$, se tiene que

$$K + V \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(x_i + V_{x_i} + V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(x_i + V_{x_i} + V_{x_i}),$$

y por (1.3), ningún término en esta última unión intersecta a $C + V$. Finalmente,

$$(K + V) \bigcap (C + V) = \emptyset.$$

$\square$

Como consecuencia del resultado anterior, se tienen los siguientes teoremas

Teorema 1.3.9. *Para todo elemento* $B_1 \in \mathcal{U}(X)$*, existe otro elemento* $B_2 \in \mathcal{U}(X)$*, tal que*

$$\mathrm{cl}(B_2) \subseteq B_1.$$

Demostración. Sea $B_1 \in \mathcal{U}(X)$, definamos los conjuntos $C := X \setminus B_1$ y $K := \{0\}$. Es claro que C es cerrado, pues, es el complemento de un elemento en $\mathcal{U}(X)$, y que además, K es compacto. Por otra parte, $0 \notin C$, es decir, $K \cap C = \emptyset$. Por el Teorema 1.3.8, existe un abierto $W \in \mathcal{U}(X)$, tal que $W \cap (W + C) = \emptyset$. Ahora bien, esta última condición implica que $W \cap C = \emptyset$, lo que se reduce a $W \subseteq B_1$.

Aplicando la Proposición 1.3.6 al abierto W, se tiene que existe un abierto simétrico, $B_2 \in \mathcal{U}(X)$, tal que $B_2 + B_2 \subseteq W$, por lo tanto, se tiene la siguiente cadena de inclusiones

$$\mathrm{cl}(B_2) \subseteq B_2 + B_2 \subseteq W \subseteq B_1,$$

la cual, finaliza la demostración. $\square$

Teorema 1.3.10. *Todo espacio topológico lineal, es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Basta considerar el hecho de que los conjuntos unipuntuales en un espacio topológico lineal, son cerrados y aplicar el Teorema 1.3.8. $\square$

Teorema 1.3.11. *Sea* X *un espacio topológico lineal.*

I. *Si* $A \subseteq X$ *entonces,* $\mathrm{cl}(A) = \bigcap_{V \in \mathcal{U}(X)} (A + V)$,

II. *Si* $A \subseteq X$ *y* $B \subseteq X$*, entonces,* $\mathrm{cl}(A) + \mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A + B) = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A) + \mathrm{cl}(B))$.

III. *Si* $A \subseteq X$ *es un conjunto acotado, entonces* $\mathrm{cl}(A)$ *también lo será.*

Demostración. Consideremos el espacio topológico lineal X.

I. Sea $A \subseteq X$, veamos que $\mathrm{cl}(A) = \bigcap (A + V)$, donde V recorre todos los entornos abiertos de 0. Ahora bien, $x \in \mathrm{cl}(A)$ si y sólo si, $(x + V) \cap A \neq \emptyset$ para todo entorno abierto $V \in \mathcal{U}(X)$. Pero esta condición se cumple si y sólo si $x \in A + (-V)$, para todo abierto $V \in \mathcal{U}(X)$. Además, V es un entorno abierto de 0, si y sólo si, $-V$ lo es, por lo tanto,
$$\mathrm{cl}(A) = \bigcap_{V \in \mathcal{U}(X)} (A + V).$$

II. Sean $U, V \in \mathcal{U}(X)$ tales que $V + V \subseteq U$. Sean $a \in \mathrm{cl}(A)$ y $b \in \mathrm{cl}(B)$, evidentemente, $a + b \in \mathrm{cl}(A) + \mathrm{cl}(B)$, y además,
$$a + b \in \mathrm{cl}(A) + \mathrm{cl}(B) \subseteq A + V + B + V \subseteq A + B + U.$$
Como U es arbitrario, se tiene lo siguiente
$$a + b \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}(X)} (A + B + U) = \mathrm{cl}(A + B).$$
Esto es,
$$\mathrm{cl}(A) + \mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A + B).$$

III. Sea $A \subseteq X$ un conjunto acotado. Veamos que $\mathrm{cl}(A)$ también, es un conjunto acotado. Considere $U \in \mathcal{U}(X)$, por el Teorema 1.3.9 existe un abierto $W \in \mathcal{U}(X)$ tal que, $\mathrm{cl}(W) \subseteq U$. Como A es acotado, existe un número real $s > 0$, tal que $A \subseteq tW$, para todo número real $t > s$. Por lo tanto
$$\mathrm{cl}(A) \subseteq t\,\mathrm{cl}(W) \subseteq tU, \qquad (t > s),$$
es decir, que $\mathrm{cl}(A)$ es acotado.

□

Proposición 1.3.12. *Si* $\mathrm{cl}(A)$ *es un conjunto compacto entonces* $\mathrm{cl}(A+B) = \mathrm{cl}(A)+\mathrm{cl}(B)$. *Esto equivale a decir que la suma de un conjunto compacto con un conjunto cerrado resulta ser un conjunto cerrado.*

1.4. Conos convexos.

A menos que se especifique otra cosa, X denotará un espacio topológico lineal.

Definición 1.4.1. *El conjunto* $K \subseteq X$ *es un cono convexo, si* $K + K \subseteq K$, *y* $tK \subseteq K$, *para todo escalar* $t > 0$.

Definición 1.4.2. *Se dice que un conjunto* $S \subseteq X$ *es* K*-acotado inferiormente, si existe un conjunto acotado* H, *tal que,* $S \subseteq H + K$.

Proposición 1.4.3. *La unión finita de conjuntos* K*-acotados inferiormente, es de nuevo un conjunto* K*-acotado inferiormente.*

Demostración. Basta con probar que la unión de dos conjuntos K-acotados inferiormente es de nuevo un conjunto K-acotado inferiormente. Sean $S_1, S_2 \subseteq X$, dos conjuntos tales que existen conjuntos acotados $H_1, H_2 \subseteq X$ que satisfacen

$$S_1 \subseteq H_1 + K \qquad \text{y}$$
$$S_2 \subseteq H_2 + K.$$

Ahora bien, el resultado es consecuencia de la siguiente cadena de inclusiones

$$\begin{aligned} S_1 \cup S_2 \subseteq (H_1 + K) \cup (H_2 + K) &= \bigcup_{h \in H_1} (h + K) \cup \bigcup_{h \in H_2} (h + K) \\ &= \bigcup_{h \in H_1 \cup H_2} (h + K) = (H_1 \cup H_2) + K. \end{aligned}$$

□

Proposición 1.4.4. *La familia de subconjuntos* K*-acotados inferiormente es cerrada bajo la suma y el producto por escalares positivos.*

Demostración. Sean $S_1, S_2 \subseteq X$, dos conjuntos, K-acotados inferiormente. Por definición, existen conjuntos acotados $H_1, H_2 \subseteq X$ tales que

$$S_1 \subseteq H_1 + K \qquad \text{y} \qquad S_2 \subseteq H_2 + K. \tag{1.4}$$

Por lo tanto

$$S = S_1 + S_2 \subseteq H_1 + H_2 + K + K \subseteq H_1 + H_2 + K,$$

pero por la Proposición 1.3.7, el conjunto $H := H_1 + H_2$ es acotado. Luego, $S \subseteq H + K$, es decir, que el conjunto S es K-acotado inferiormente.

Para ver que tS_1 es K-acotado inferiormente, basta con multiplicar la primera inclusión en (1.4) por el escalar t y aplicar de nuevo la Proposición 1.3.7. □

Definición 1.4.5. *Se dice que un conjunto* $S \subseteq X$ *es semi-*K*-acotado inferiormente si existe un conjunto acotado* H, *tal que,* $S \subseteq \mathrm{cl}(H + K)$.

Observación 1.4.6. *De la definición se obtiene de inmediato que todo conjunto* S, K*-acotado inferiormente, automáticamente es semi-*K*-acotado inferiormente.*

Proposición 1.4.7. *La familia de conjuntos semi-*K*-acotados inferiormente es cerrada bajo la suma y el producto por escalares positivos.*

Demostración. Sean $S_1, S_2 \subseteq X$ conjuntos semi-K-acotados inferiormente. Consideremos un abierto arbitrario $V \in \mathcal{U}(X)$. En vista de la Proposición 1.3.6 existe un abierto $U \in \mathcal{U}(X)$ tal que $U + U \subseteq V$ y por definición, existen conjuntos acotados $H_1, H_2 \subseteq X$ tales que

$$\begin{aligned} S_1 &\subseteq \mathrm{cl}(H_1 + K) \subseteq H_1 + K + U, \qquad \text{y} \\ S_2 &\subseteq \mathrm{cl}(H_2 + K) \subseteq H_2 + K + U. \end{aligned}$$

Luego, usando la convexidad del cono K, y el hecho de que $U + U \subseteq V$, se tiene que para todo abierto $V \in \mathcal{U}(X)$

$$S_1 + S_2 \subseteq H_1 + H_2 + K + K + U + U \subseteq H_1 + H_2 + K + V = H + K + V,$$

donde $H := H_1 + H_2$. Como V es arbitrario, entonces

$$S_1 + S_2 \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{U}(X)} (H + K + V) = \mathrm{cl}(H + K).$$

Finalmente, concluimos que $S_1 + S_2$ es semi-K-acotado inferiormente.

Veamos ahora que tS_1 también es semi-K-acotado inferiormente, para cualquier escalar $t > 0$. Sea $V \in \mathcal{U}(X)$ un abierto arbitrario. Por continuidad, existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $tU \subset V$. Ahora bien, por definición $S_1 \subseteq \mathrm{cl}(H_1 + K)$, y por lo tanto

$$tS_1 \subseteq t\,\mathrm{cl}(H_1 + K) \subseteq tH_1 + tK + tU \subseteq tH_1 + K + V,$$

pero $H := tH_1$ es acotado y V es arbitrario, en consecuencia

$$tS_1 \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{U}(X)} (H + K + V) = \mathrm{cl}(H + K).$$

Es decir, tS_1 es semi-K-acotado inferiormente. □

Proposición 1.4.8. *Si el espacio X es localmente acotado, es decir, si existe un abierto U que es acotado, entonces la familia de conjuntos K-acotados inferiormente y semi-K-acotados inferiormente coinciden.*

Demostración. Basta probar que si X es localmente acotado, entonces todo subconjunto S de X semi-K-acotado inferiormente es K-acotado inferiormente. Sea $S \subseteq X$ un conjunto semi-K-acotado inferiormente y sea $U \in \mathcal{U}(X)$ un conjunto abierto y acotado. Por definición existe un conjunto acotado $H_1 \subseteq X$ tal que $S \subseteq \mathrm{cl}(H_1 + K)$. Sea $H := H_1 + U$. Es claro que el conjunto H es acotado y además,

$$S \subseteq \mathrm{cl}(H_1 + K) \subseteq H_1 + K + U = H + K,$$

en conclusión, el conjunto S es K-acotado inferiormente. □

1.5. Conjuntos K-convexos.

Definición 1.5.1. *Sea* $D \subseteq X$. *Se dice que* D *es* K*-convexo si para todo* $x, y \in X$ *se tiene que* $[x, y] \subseteq D + K$.

Observación 1.5.2. *Si* $K = \{0\}$ *la definición anterior se reduce a la definición estandar de convexidad.*

Observación 1.5.3. *Si* $0 \in K$*, entonces* $D \subseteq D + K$ *para cualquier subconjunto* $D \subseteq X$.

Como consecuencia inmediata de la observación anterior, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 1.5.4. *Sea* $K \subseteq X$ *un cono convexo tal que* $0 \in K$. *Si el conjunto* $D \subseteq X$ *es convexo, entonces, también es* K*-convexo.*

En general, un conjunto K-convexo, no necesariamente tiene que ser convexo.

Ejemplo 1.5.5. Consideremos $X = \mathbb{R}^2$, $K = [0, \infty) \times \{0\}$ y al subconjunto de X dado en coordenadas polares por $D := \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1 \quad \text{y} \quad \pi/4 \leq \theta \leq 7\pi/4\}$. El conjunto D es K-convexo, pero sin embargo, no es convexo.

Ejemplo 1.5.6. Si $0 \notin K$ y D es un conjunto convexo, entonces no necesariamente, D es K-convexo. Para ver esto, consideremos $X = \mathbb{R}^2$, $K = (0, \infty) \times \{0\}$ y sea $D = \{p\}$ con $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Es obvio que el conjunto D es convexo, pero $D + K = (x_0, \infty) \times \{y_0\}$ y por lo tanto $D \nsubseteq D + K$, en consecuencia el conjunto D no es K-convexo.

Proposición 1.5.7. *Supongamos que* $0 \in K$. *Un conjunto* $D \subseteq X$ *es* K*-convexo si y sólo si el conjunto* $D + K \subseteq X$ *es convexo.*

Demostración. Sea $t \in [0, 1]$. Supongamos que $D \subseteq X$ es K-convexo, entonces

$$t(D + K) + (1 - t)(D + K) \subseteq tD + (1 - t)D + K \subseteq (D + K) + K \subseteq D + K,$$

es decir, que el conjunto $D + K$ es convexo. Supongamos ahora que el conjunto $D + K$ es convexo, por lo tanto,

$$tD + (1 - t)D \subseteq tD + (1 - t)D + K = t(D + K) + (1 - t)(D + K) \subseteq D + K.$$

Es decir, el conjunto D es K-convexo. □

No necesariamente un cono convexo K ha de tener al cero como uno de sus elementos, sin embargo,

Proposición 1.5.8. $0 \in \mathrm{cl}(K)$, *para cualquier cono convexo* K.

Demostración. Si $0 \in K$ la demostración es trivial. Supongamos que $0 \notin K$ y sean $V \in \mathcal{U}(X)$ un abierto simétrico y $k \in K$. Consideremos la sucesión de números reales $(1/2^n)$, cuyo límite es cero. Por lo tanto, existe un número natural N, tal que si $n \geq N$ entonces $k/2^n \in V$. Lo cual es equivalente a

$$0 \in \frac{k}{2^n} + V \subseteq K + V.$$

Como V es arbitrario, se tiene que $0 \in \bigcap_{V \in \mathcal{U}(X)}(K + V) = \mathrm{cl}(K)$, lo que completa la prueba. □

Definición 1.5.9. *Dado un subconjunto no vacío* $H \subseteq X$*, se define el cono recesión de* H*,* $(\mathrm{rec}(H))$ *de la siguiente manera*

$$\mathrm{rec}(H) = \{x \in X : tx + H \subseteq H, \text{ para todo } t \geq 0\} \tag{1.5}$$

La siguiente proposición ilustra algunas propiedades del cono recesión asociado al conjunto H

Proposición 1.5.10. *Sea* $H \subseteq X$ *un conjunto no vacío. Entonces*

I. $0 \in \mathrm{rec}(H)$ *y* $\mathrm{rec}(H)$ *es un cono convexo.*

II. $K = \mathrm{rec}(H)$ *es el cono convexo más grande tal que* $K + H \subseteq H$.

III. $\mathrm{cl}(\mathrm{rec}(H)) \subseteq \mathrm{rec}(\mathrm{cl}(H))$.

IV. *Para todo* $x \in X$, $t > 0$, $\mathrm{rec}(x + tH) = \mathrm{rec}(H)$.

V. *Para cualesquiera conjuntos no vacíos* $H_1, H_2 \subseteq X$,

$$\mathrm{rec}(H_1) + \mathrm{rec}(H_2) \subseteq \mathrm{rec}(H_1 + H_2).$$

Demostración.

I. En primer lugar, es evidente que $0 \in \mathrm{rec}(H)$ pues, $0t + H = H$. Para ver que $\mathrm{rec}(H)$ es convexo, sean $x, y \in \mathrm{rec}(H)$ y sea $s \in [0, 1]$. Ahora bien, como x e y están en $\mathrm{rec}(H)$, entonces $t(1-s)y + H \subseteq H$ y $tsx + H \subseteq H$, para cualquier número no-negativo t. Por lo tanto,

$$t(sx + (1-s)y) + H = tsx + t(1-s)y + H \subseteq tsx + H \subseteq H.$$

Es decir, que el segmento $[x, y]$ está contenido en $\mathrm{rec}(H)$ para cualesquiera $x, y \in H$. De esta manera, se ha demostrado que en efecto, $\mathrm{rec}(H)$ es un conjunto convexo.

II. Supongamos que $K \subseteq X$ es un cono convexo, con la propiedad $K + H \subseteq H$, por lo tanto, para cualquier $t \geq 0$ se tiene que

$$tK + H \subseteq K + H \subseteq H,$$

lo cual equivale a $K \subseteq \mathrm{rec}(H)$.

III. En vista del Teorema 1.3.11, se tiene que $\mathrm{cl}(\mathrm{rec}(H)) + \mathrm{cl}(H) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{rec}(H) + H)$. Además, de la definición se sigue el hecho de que $\mathrm{rec}(H) + H \subseteq H$. Por lo tanto,

$$\mathrm{cl}(\mathrm{rec}(H)) + \mathrm{cl}(H) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{rec}(H) + H) \subseteq \mathrm{cl}(H).$$

Como $\mathrm{cl}(\mathrm{rec}(H))$ es un cono convexo, pues $\mathrm{rec}(H)$ lo es, entonces usando el numeral 2 de esta proposición, se tiene que

$$\mathrm{cl}(\mathrm{rec}(H)) \subseteq \mathrm{rec}(\mathrm{cl}(H)).$$

IV. La demostración es directa de la definición.

V. Es consecuencia directa del numeral 2.

$\square$

Proposición 1.5.11. *Sean* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones no-decrecientes de subconjuntos de* X*, sea* $H \subseteq X$ *un conjunto acotado, sea* $K \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}(\mathrm{rec}(B_n))$ *y sea* $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales que converge a cero. Asumamos que, para todo* $n \geq 0$*,*

$$A_n \subseteq \mathrm{cl}(\epsilon_n H + K + B_n). \tag{1.6}$$

Entonces,

$$\mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) \tag{1.7}$$

Demostración. Sean $U \in \mathcal{U}(X)$ arbirario y sea $V \in \mathcal{U}(X)$ un abierto balanceado tal que $V+V+V \subseteq U$. Como H es acotado y (ϵ_n) converge a cero, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces, $\epsilon_n H \subseteq V$. Además, como $K \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}(\mathrm{rec}(B_n))$, se tiene que $K \subseteq \mathrm{rec}(B_n) + V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, para $n \geq N$

$$\begin{aligned} A_n &\subseteq \mathrm{cl}(\epsilon_n H + K + B_n) \subseteq \epsilon_n H + K + B_n + V \\ &\subseteq \mathrm{rec}(B_n) + B_n + V + V + V \subseteq B_n + U \subseteq U + \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\bigcup_{n\geq N} A_n \subseteq U + \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n.$$

Como U es arbitrario, y (A_n) es no-decreciente entonces

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \bigcap_{U\in\mathcal{U}(X)} \left(U + \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right).$$

El resultado se sigue de inmediato ya que el lado derecho de esta última inclusión es un conjunto cerrado. $\square$

Capítulo 2

El teorema de Bernstein–Doetsch

En este capítulo se presentarán las diferentes versiones del teorema de Bernstein–Doetsch que serán englobadas más adelante como consecuencia directa de los resultados principales que obtuvimos al realizar este trabajo. Esta línea de investigación comienza formalmente en el año 1905, con el artículo del matemático Danés, Johan Jensen [19], luego en el año 1915, Bernstein y Doetsch publican un artículo donde demuestran el teorema que hoy en día lleva su nombre y que ha sido uno de los teoremas más importantes en la teoría de convexidad [25].

Modificaciones

Comenzaremos este capítulo dando dos definiciones que serán fundamentales a lo largo del resto del trabajo.

Definición 2.0.1. *Sea* X *un espacio normado y sea* D *un subconjunto convexo de* X*. Una función* $f : D \to \mathbb{R}$ *es convexa si para todo* $x, y \in D$ *y para todo* $t \in [0, 1]$ *se tiene que*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y). \tag{2.1}$$

Definición 2.0.2. *Sea* X *un espacio normado y sea* D *un subconjunto convexo de* X*. Una función* $f : D \to \mathbb{R}$ *es midconvexa si para todo* $x, y \in D$ *se tiene que*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{2.2}$$

Es elemental demostrar que si f es una función midconvexa, entonces f satisface la desigualdad (2.1) para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ (ver [25]). Por lo tanto, en la clase de las funciones continuas, las nociones de convexidad y midconvexidad son equivalentes entre sí.

Antes de ir al teorema de Bernstein–Doetsch, no podemos dejar a un lado un resultado que se puede decir, sin dudas que dió comienzo a esta linea de investigación. El matemático Johan Jensen en 1905, publica un artículo en el cual demuestra el siguiente teorema.

Teorema 2.0.3 ([19], pg. 188)**.** *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Toda función* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *acotada superiormente en* (a, b) *que satisface la desigualdad*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

para todo $x, y \in (a, b)$ *necesariamente tiene que ser continua y por lo tanto convexa.*

2.1. Versión Original.

No es sino, diez años más tarde que Felix Bernstein y Gustav Doetsch publican, en el año 1915, lo que será una generalización del resultado obtenido por Jensen en 1905 y lo que hoy en día se conoce como el teorema de Bernstein–Doetsch. En dicho teorema, los autores debilitan la condición de que la función en cuestión sea acotada en su dominio y la cambian por una condición más débil, a saber, la condición de estar localmente acotada superior en solo un punto. Debido a la importancia del teorema de Bernstein–Doetsch para el desarrollo de esta investigación, haremos una demostración de dicho resultado. Para ello, necesitaremos el siguiente lema auxiliar.

Lema 2.1.4 ([25], Teoremas 6.2.1, 6.2.2 y 6.2.3)**.** *Sean* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y convexo. Sea* $f : D \to \mathbb{R}$ *una función midconvexa. Si* f *es localmente acotada superior en un punto* $x_0 \in D$, *entonces* f *es localmente acotada en cada punto de* D.

Vale la pena destacar que la demostración del lema anterior es la combinación de tres teoremas, cada uno de los cuales amerita una demostración detallada. Con esta herramamienta, estaremos en la capacidad de demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.1.5 (Teorema de Bernstein–Doetsch,[4]). *Sea* $N \in \mathbb{N}$ *y sea* $f : D \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *una función midconvexa. Si* f *es localmente acotada superior en un punto de* D *entonces* f *es continua en* D.

Demostración. El hecho de que la función midconvexa f sea localmente acotada superior en un punto, implica, según el Lema 2.1.4 que la función f tiene que ser localmente acotada en cada punto de D. Por lo tanto, a partir de f podemos definir los siguientes números

$$m_f(x_0) = \lim_{h\to 0} \inf_{B(x_0,h)} f(x) \qquad \text{y} \qquad M_f(x_0) = \lim_{h\to 0} \sup_{B(x_0,h)} f(x).$$

Note que tanto m_f como M_f son finitos y además, se tiene que para todo $x \in D$

$$m_f(x) \leq f(x) \leq M_f(x), \tag{2.3}$$

Ahora bien, sea $x \in D$ arbitrario. Podemos construir un par de sucesiones $(x_n) \subseteq D$ y $(z_n) \subseteq D$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = m_f(x), \tag{2.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = M_f(x). \tag{2.5}$$

Para $n \in \mathbb{N}$, sea $y_n = 2z_n - x_n$. Es claro que $\lim y_n = x$, más aún $z_n = (x_n + y_n)/2$ y por la midconvexidad de f se tiene lo siguiente

$$f(z_n) \leq \frac{f(x_n) + f(y_n)}{2},$$

o equivalentemente

$$f(y_n) \geq 2f(z_n) - f(x_n).$$

Si ahora tomamos el limite inferior en ambos lados de la desigualdad anterior, se obtiene lo siguiente

$$\liminf_{n\to\infty} f(y_n) \geq 2M_f(x) - m_f(x),$$

pero también,

$$\liminf_{n\to\infty} f(y_n) \leq M_f(x).$$

En consecuencia, se tiene que $M_f(x) \leq m_f(x)$. Al combinar esto con la desigualdad (2.3) se tiene que $M_f(x) = m_f(x)$ y por lo tanto, la función f es continua en x. Como x fue escogido de manera arbitraria se tiene que la función f es continua en D, y esto finaliza la demostración del teorema. □

2.2. Cambio en la estructura del espacio subyacente.

Casi 50 años más tarde en 1964, el matemático, M.R. Mehdi [33] obtiene el siguiente resultado, que generaliza el Teorema 2.1.5, al cambiar la estructura del espacio subyacente.

Teorema 2.2.6. *Sean X un espacio topológico lineal, $D \subseteq X$ un conjunto abierto y convexo y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función midconvexa. Si f es acotada superiormente en un subconjunto abierto no vacío de D, entonces f es una función continua.*

Ahora el teorema de Bernstein–Doetsch es válido, para funciones cuyo dominio esté sumergido en un espacio lineal topológico. Por otra parte, los matemáticos Z. Kominek y M. Kuczma, aseguran en su artículo [24] que los resultados obtenidos en [22] y [23] implican el siguiente teorema y además de eso, ofrecen una generalización inmediata de éste y del Teorema 2.2.6.

Teorema 2.2.7 ([24], Teorema C)**.** *Sean X un espacio lineal, $D \subseteq X$ un conjunto convexo algebraicamente abierto, y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función midconvexa. Si f es acotada superiormente, en un subconjunto no vacío y algebraicamente abierto de D, entonces f es continua en D con respecto a la topología de los conjuntos algebraicamente abiertos.*

Teorema 2.2.8 ([24], Teorema 1). *Sea X un espacio lineal, dotado con una topología semi-lineal, sea $D \subseteq X$ un conjunto abierto y convexo. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función midconvexa. Si f es acotada superiormente en un subconjunto abierto y no-vacío de D, entonces, f es continua.*

2.3. Convexidad Aproximada.

En el contexto de convexidad aproximada, D. H. Hyers y S. M. Ulam, en 1952 introducen la definición de ε-convexidad [13], donde ε es un número real positivo. Allí los autores establecen que dados $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, y una función f a valores reales definida en un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que f es ε-convexa si y sólo si, para todo $x, y \in D$ se tiene que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon \tag{2.6}$$

para todo $t \in (0, 1)$. En su artículo, demostraron que toda solución de la desigualdad (2.6) está en correspondencia con una función convexa g, tal que $|f - g| \leq \varepsilon$, este resultado es mejor conocido como el teorema de estabilidad de Hyers y Ulam.

Siguiendo esta dirección, K. Nikodem junto con Ng. en [35] demostraron la siguiente versión del teorema de Bernstein–Doetsch para funciones ε-convexas que generaliza el Teorema 2.1.5. Este resultado también fue establecido independientemente por Lacskovich en [26].

Teorema 2.3.9 ([35], Teorema 1). *Sea $D \subseteq X$ un conjunto abierto y convexo de un espacio lineal topológico X. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función localmente acotada superior en un punto de D, y ε-midconvexa, i.e, para todo $x, y \in D$ se tiene que*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} + \varepsilon,$$

entonces, f es 2ε-convexa.

Diez años más tarde, Zolt Páles en [43] formula la siguiente definición: Una función f definida en un subconjunto abierto y convexo D de un espacio normado real X, es (δ, ε)-convexa si satisface

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \delta t(1-t)\|x-y\| + \varepsilon \tag{2.7}$$

para todo $x, y \in D$ y $t \in (0,1)$. En su artículo, Z. Páles, obtiene propiedades de estabilidad de tipo Hyers–Ulam asociadas con la desigualdad (2.7) y estudia las propiedades que caracterizan este tipo de funciones. Un año depués, en 2004, buscando más generalizaciones del Teorema 2.1.5, A. Házy y Z. Páles, en [16] se plantean la siguiente interrogante: ¿Qué propiedades tendrán las funciones (δ, ε)-midconvexas, localmente acotadas? La respuesta a esta interrogante, la encontramos en los siguientes teoremas.

Teorema 2.3.10 ([16], Teorema 3)**.** *Sea δ un número no negativo. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es $(\delta, 0)$-midconvexa, i.e, f satisface la desigualdad*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \delta\|x-y\|$$

para todo $x, y \in D$, y si además f es localmente acotada superior en un punto de D. Entonces, f es continua.

Además, llegan a la conclusión de que si ε es un número positivo, no se puede garantizar que toda función (δ, ε)-convexa localmente acotada superior en un punto sea continua. Sin embargo, plantean el siguiente teorema que generaliza el Teorema 2.1.5 y el Teorema 2.3.9

Teorema 2.3.11 ([16], Teorema 4)**.** *Sean δ y ε dos números no negativos. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función (δ, ε)-midconvexa acotada superiormente en un punto de D entonces, para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in (0,1)$*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + 2\delta\varphi(t)\|x-y\| + 2\varepsilon \tag{2.8}$$

donde φ *es un punto fijo del operador* $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{[0,1]} \to \mathbb{R}^{[0,1]}$ *definido por*

$$(\mathcal{H}\varphi)(t) := \begin{cases} \dfrac{\varphi(2t)}{2} + t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \dfrac{\varphi(2t-1)}{2} + (1-t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{2.9}$$

Observación 2.3.12. *Note que la función de Takagi,* $T : \mathbb{R} \to [0,1]$ *definida en la introducción mediante la fórmula*

$$T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{dist}(2^n t, \mathbb{Z}), \qquad (t \in \mathbb{R}), \tag{2.10}$$

satisface la siguiente cadena de igualdades

$$T(2t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{dist}(2^{n+1} t, \mathbb{Z}) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{dist}(2^n t, \mathbb{Z}) = 2(T(t) - \operatorname{dist}(t, \mathbb{Z})).$$

Despejando $T(t)$ *en la expresión anterior llegamos a la siguiene relación*

$$T(t) = \frac{1}{2} T(2t) + \operatorname{dist}(t, \mathbb{Z}). \tag{2.11}$$

Ahora bien, si $t \in [0, 1/2]$ *entonces,* $\operatorname{dist}(t, \mathbb{Z}) = t$*, por lo tanto* (2.11) *se convierte en*

$$T(t) = \frac{1}{2} T(2t) + t, \qquad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

por otra parte, si $t \in (1/2, 1]$ *entonces,* $\operatorname{dist}(t, \mathbb{Z}) = 1 - t$*, y en este caso* (2.11) *se convierte en*

$$T(t) = \frac{1}{2} T(2t) + 1 - t,$$

además, como consecuencia de las propiedades elementales del ínfimo de un conjunto se tiene que

$$\operatorname{dist}(2t, \mathbb{Z}) = \inf_{\alpha \in \mathbb{Z}} |2t - \alpha| = \inf_{\alpha \in \mathbb{Z}} |2t - 1 - (\alpha - 1)| = \inf_{\beta \in \mathbb{Z}} |2t - 1 - \beta| = \operatorname{dist}(2t - 1, \mathbb{Z})$$

lo que demuestra que la función de Takagi es 1-periódica y por lo tanto, si $t \in (1/2, 1]$*, entonces*

$$T(t) = \frac{1}{2} T(2t - 1) + 1 - t.$$

Esto significa que la función T *es solución de la ecuación funcional* $\mathcal{H}\varphi = \varphi$ *y por lo tanto, ésta puede ser usada en la conclusión del Teorema 2.3.11.*

Usualmente T *es conocida como función de "Vander Waerden" [52], sin embargo Knoop [21] ya había descubierto que dicha función ya había sido construida casi 30 años antes por T. Takagi [50]. Para más detalles históricos, se pueden consultar los artículos de Billingsley [5], Cater [9] y Kairies [20].*

Una pregunta que surge de manera natural luego de ver la conclusión del Teorema 2.3.11 es la siguiente, ¿Cúal será la mejor función que puede ser colocada en el lugar de φ en la desigualdad (2.8)? En respuesta a este planteamiento, A. Házy y Z. Páles en [16] conjeturan que la función óptima está dada por el límite de la sucesión de funciones $\varphi_{n+1} = \mathcal{H}(\varphi_n)$ $n \in \mathbb{N}$ con $\varphi_1(t) = 1$ para todo $t \in (0,1)$, sin embargo, no logran dar una demostración formal de ello para entonces.

En 2008, Z. Boros logra resolver satisfactoriamente en su artículo [6], el problema planteado por Z. Páles en [42] sobre la $(1/2, 0)$-midconvexidad de la función de Takagi. En el referido artículo Boros demuestra que

$$T\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{T(x)+T(y)}{2} + \frac{1}{2}|x-y|, \qquad (x, y \in [0,1])$$

y que por lo tanto, la función óptima que puede ser utilizada en la conclusión del Teorema 2.3.11 es la función de Takagi.

Con base en lo que acabamos de desarrollar, el Teorema 2.3.11 puede ser reformulado de una manera un poco más simple

Teorema 2.3.13 ([16], Teorema 4)**.** *Sean* δ *y* ε *dos números no negativos. Si* $f : D \to \mathbb{R}$ *es una función* (δ, ε)*-midconvexa acotada superiormente en un punto de* D *entonces, para todo* $x, y \in D$ *y para todo* $t \in (0,1)$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + 2\delta T(t)\|x-y\| + 2\varepsilon \tag{2.12}$$

donde T *es la función de Takagi definida en* (2.10).

2.3.1. $\alpha(\cdot)$-convexidad.

A menos que se especifique otra cosa, a lo largo de esta sección D denotará un subconjunto abierto y convexo de un espacio normado real X.

En el año 2005, A. Házy [14] introduce el concepto de (δ, ε, p)-convexidad. Allí, el autor establece que una función $f : D \to \mathbb{R}$ es (δ, ε, p)-convexa, si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \delta\|x-y\|^p + \varepsilon$$

para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0, 1]$. En su artículo, Házy obtiene resultados análogos a los obtenidos por él y Z. Páles en [16] y que corresponden al Teorema 2.3.10 y al Teorema 2.3.13 de esta sección.

Abriendo el abanico de posibilidades, Jacek Tabor y Józef Tabor en [46], generalizan las definiciones establecidas por Z. Páles y A. Házy anteriormente. En su artículo ellos introducen la siguiente definición.

Definición 2.3.14. *Dada una función* $\alpha : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *no decreciente, se dice que una función* $f : D \to \mathbb{R}$ *es* $\alpha(\cdot)$*-midconvexa si*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \alpha(\|x-y\|)$$

para todo $x, y \in D$.

Note que si $\alpha(u) = \varepsilon + \delta\|u\|^p$, la definición anterior se reduce a la establecida por A. Házy en [14], mientras que para $p = 1$ se reduce a la definición establecida por Z. Páles en [43]. De inmediato, Ja. Tabor y Jó. Tabor, obtienen una adaptación del teorema de Bernstein–Doetsch para esta nueva clase de funciones.

Teorema 2.3.15 ([46], Teorema 2.1). *Sea* $f : D \to \mathbb{R}$ *una función* $\alpha(\cdot)$*-midconvexa y localmente acotada superior en un punto. Entonces* f *es localmente acotada en cada punto de int*D. *Si además,* $\lim_{r\to 0^+} \alpha(r) = 0$, *entonces* f *es continua en* D.

Motivado en los resultados obtenidos por Házy y Páles en [16], Ja. Tabor y Jó. Tabor, establecieron los siguientes resultados.

Teorema 2.3.16 ([46], Teorema 2.2)**.** *Sea* $f : D \to \mathbb{R}$ *una función* $\alpha(\cdot)$*-midconvexa. Entonces,*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\,\alpha\big(\,\mathrm{dist}(2^n t, \mathbb{Z})\|x-y\|\big) \tag{2.13}$$

para todo $x, y \in D$*,* $t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$*. Más aún, si* f *es localmente acotada superior en un punto de* D*, entonces, la desigualdad* (2.13) *es válida para todo* $t \in [0,1]$.

Teorema 2.3.17 ([46], Teorema 3.1)**.** *Sea* $f : D \to \mathbb{R}$ *una función* $\alpha(\cdot)$*-midconvexa. Entonces,*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{dist}(2^n t, \mathbb{Z})\alpha\left(\frac{\|x-y\|}{2^k}\right) \tag{2.14}$$

para todo $x, y \in D$*,* $t \in [0,1] \cap \mathbb{D}$*, donde* $\mathbb{D}$ *es el conjunto de los racionales diádicos. Más aún, si* f *es localmente acotada superior en un punto de* D *y*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(1/2^n) < \infty$$

entonces, f *es continua en* $[0,1]$ *y la desigualdad* (2.14) *es válida para todo* $t \in [0,1]$.

Note que el Teorema 2.3.16 generaliza el Teorema 2.3.11, mientras que el Teorema 2.3.17 introduce un nuevo término de error para la convexidad aproximada de la función f. Cabe destacar que J. Mako y Z. Páles en [31, Teorema 26] establecen un teorema análogo al Teorema 2.3.16 pero la demostración es completamente diferente a la hecha por J. Tabor et. al. en [46].

2.4. Convexidad fuerte.

En el año 1966, Boris Polyak en [41] establece la siguiente definición.

Definición 2.4.18. *Sea* c *una constante positiva. Se dice que una función* $f : D \to \mathbb{R}$ *es fuertemente convexa con módulo* c*, si satisface*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)\|x-y\|^2 \tag{2.15}$$

para todo $x, y \in D$, $t \in [0,1]$.

Como consecuencia de la definición anterior, se tiene la siguiente

Definición 2.4.19. *Sea* c *una constante positiva. Se dice que una función* $f : D \to \mathbb{R}$ *es fuertemente midconvexa con módulo* c*, si satisface*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2 \tag{2.16}$$

para todo $x, y \in D$, $t \in [0,1]$.

En el año 2011, A. Azócar et. al. en [3] demuestran que en la clase de funciones continuas, midconvexidad fuerte y convexidad fuerte son equivalentes entre sí. Un resultado de tipo Bernstein–Doetsch para esta nueva clase de funciones fue establecido por A. Azócar et. al. en [3], allí los autores demostraron el siguiente teorema.

Teorema 2.4.20 ([3], Teorema 2.3)**.** *Sea* $c > 0$*. Si* $f : D \to \mathbb{R}$ *es una función fuertemente midconvexa con módulo* c *y acotada superiormente en un subconjunto de* D *con interior no vacío, entonces,* f *es una función continua y además fuertemente convexa con módulo* c.

Hasta ahora solo se han presentado resultados de tipo Bernstein–Doetsch cuando el conjunto de llegada es $\mathbb{R}$. En el Capítulo 3 mostraremos algunos resultados importantes de este tipo cuando el codominio tiene una estructura más general.

Capítulo 3

Multifunciones.

En el siguiente capítulo, se establece el concepto de multifunción o función conjunto-valuada junto con algunas propiedades importantes. Las definiciones aquí establecidas han sido tomadas del libro de análisis conjunto-valuado de Aubin et. al. [1].

3.1. Definiciones Básicas.

A menos que se especifique otra cosa, X y Y denotarán espacios topológicos lineales.

Definición 3.1.1. *Si a cada* $x \in X$ *le corresponde un subconjunto* $F(x) \in \mathcal{P}(Y)$*, se dice que* F *es una multifunción de* X *en* Y *y simplemente la denotaremos como* $F : X \to \mathcal{P}(Y)$.

Definición 3.1.2. *El dominio de la multifunción* $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ *es el conjunto*

$$\mathrm{Dom}(F) := \{x \in X \quad | \quad F(x) \neq \emptyset\}.$$

Ejemplo 3.1.3. El primer ejemplo de una multifunción, surge naturalmente a partir de una función dada $f : X \to Y$. Defínase $F : Y \to \mathcal{P}(X)$, tal que

$$F(y) = f^{-1}(y) = \{x \in X \quad | \quad y = f(x)\}.$$

Note que $F(y) \neq \emptyset$ si y sólo si, $y \in f(X)$, por lo tanto, $\mathrm{Dom}(F) = f(X)$.

A menos que se especifique otra cosa, F denotará a una multifunción de X en Y y al dominio de F lo denotaremos por D.

Definición 3.1.4. *El gráfico de una multifunción lo denotaremos por* $\mathrm{Gr}(F)$ *y se define como*

$$\mathrm{Gr}(F) := \{(x,y) \in X \times Y \quad | \quad y \in F(x)\}.$$

El concepto de convexidad para una multifunción F está relacionado con su gráfico, en este sentido, se tiene la siguiente definición.

Definición 3.1.5. *Se dice que la multifunción* F *es convexa, si* $\mathrm{Gr}(F)$ *es un subconjunto convexo de* $X \times Y$.

Proposición 3.1.6. *La multifunción* F *es convexa si y sólo si para todo* $x_1, x_2 \in X$ *y para todo* $t \in [0,1]$*, se tiene que*

$$tF(x_1) + (1-t)F(x_2) \subseteq F(tx_1 + (1-t)x_2). \tag{3.1}$$

Demostración. Supongamos que F es convexa, ie, $\mathrm{Gr}(F)$ es un conjunto convexo de $X \times Y$. Sean $x_1, x_2 \in X$ y consideremos $z \in tF(x_1) + (1-t)F(x_2)$. Por lo tanto, existen $y_1 \in F(x_1)$, $y_2 \in F(x_2)$ tales que, $z = ty_1 + (1-t)y_2$. Como $\mathrm{Gr}(F)$ es convexo, entonces, para todo $t \in [0,1]$

$$t(x_1, y_1) + (1-t)(x_2, y_2) = (tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) \in \mathrm{Gr}(F),$$

es decir, $z = ty_1 + (1-t)y_2 \in F(tx_1 + (1-t)x_2)$, para todo $t \in [0,1]$. Lo que demuestra que la inclusión (3.1) es válida. El recíproco, se demuestra de manera análoga. $\square$

Proposición 3.1.7. *Si* $H \subseteq X$ *es un subconjunto estrellado de* X *con respecto al origen, entonces, para* $0 < a < b$ *se tiene que* $aH \subseteq bH$.

Demostración. Como el conjunto H es estrellado con respecto a $0 \in H$, se tiene que para todo $\alpha \in [0,1]$ y para todo $h \in H$, $\alpha h + (1-\alpha)0 \in H$. Por lo tanto, para $\alpha \in [0,1]$ se tiene que $\alpha H \subseteq H$. Ahora bien, como $0 < a < b$ entonces $0 < \frac{a}{b} < 1$ y por lo tanto $aH = b\left(\frac{a}{b}H\right) \subseteq bH$, lo que completa la demostración. $\square$

Observación 3.1.8. *La proposición anterior es válida si* $a < b < 0$*, pero no necesariamente lo es cuando* $a < 0 < b$*. Note que si* $a < b < 0$ *entonces,* $0 < \frac{a}{b} < 1$ *y por lo tanto se puede aplicar el mismo método que se aplicó en la demostración anterior. Para el caso* $a < 0 < b$*, basta considerar* $X = \mathbb{R}$*,* $H = [0, 1]$*,* $a = -1$ *y* $b = 1$*.*

Ejemplo 3.1.9. Sea $H \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto convexo y no vacío que posee al origen de $\mathbb{R}^3$. Sea $G : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ la multifunción definida por $G(x) := -x^2 H$. Siendo $g(x) = -x^2$ una función cóncava, se tiene que para todo $t \in [0, 1]$ y para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$-(tx^2 + (1-t)y^2) \leq -(tx + (1-t)y)^2.$$

Como el conjunto H es convexo y posee al origen, podemos aplicar la Proposición 3.1.7 para llegar a la siguiente inclusión

$$-(tx^2 + (1-t)y^2)H \subseteq -(tx + (1-t)y)^2 H = G(tx + (1-t)y).$$

De nuevo, usando la convexidad del conjunto H se obtiene que

$$-(tx^2 + (1-t)y^2)H = -tx^2 H - (1-t)y^2 H = tG(x) + (1-t)G(y),$$

y por lo tanto

$$tG(x) + (1-t)G(y) \subseteq G(tx + (1-t)y).$$

Definición 3.1.10. *La multifunción* F *es midconvexa o Jensen-convexa si satisface la inclusión* (3.1) *para* $t = 1/2$*, es decir*

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} \subseteq F\left(\frac{x+y}{2}\right). \tag{3.2}$$

Ejemplo 3.1.11. Sean $f, g : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ y que además f y $-g$ son funciones convexas, es decir que para todo $x, y \in [a, b]$ y $t \in [0, 1]$ se satisface lo siguiente

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq tf(x) + (1-t)f(y) \\ tg(x) + (1-t)g(y) &\leq g(tx + (1-t)y). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Entonces, mediante un cálculo elemental, se puede ver que la multifunción $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula $F(x) := [f(x), g(x)]$, para $x \in [a, b]$ es convexa.

Así como en el caso de funciones a valores reales, también es posible generalizar el concepto de concavidad para una multifunción.

Definición 3.1.12. *Se dice que la multifuncion* F *es cóncava en* D *si para todo* $x, y \in D$ *y para todo* $t \in [0, 1]$ *se tiene que*

$$F(tx + (1 - t)y) \subseteq tF(x) + (1 - t)F(y) \tag{3.4}$$

Recordemos en el caso de las funciones, se tiene que una función f es cóncava si y sólo si, la función $-f$ es convexa y esta caracterización permite extender los resultados obtenidos para funciones convexas a funciones cóncavas sin mayores dificultades. Lamentablemente, para el caso de multifunciones esta caracterización no existe y el siguiente ejemplo lo ilustra de manera sencilla.

Ejemplo 3.1.13. Para $r > 0$, se denotará por $D(r)$ al disco cerrado de radio r centrado en el origen, esto es

$$D(r) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

Sea $F : [0, \infty) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ la multifunción definida por $F(r) := D(r)$ para $r \geq 0$. El gráfico de la multifunción F es el conjunto

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}(F) &= \{(r, (x, y)) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \quad | \quad (x, y) \in F(r)\} \\ &= \{(r, (x, y)) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \quad | \quad x^2 + y^2 \leq r^2\}. \end{aligned}$$

Es claro que al conjunto $\mathrm{Gr}(F)$ lo podemos representar como un cono en $\mathbb{R}^3$ con vértice en el origen. Además, la multifunción $G = -F$ por simetría posee el mismo gráfico de F y esto significa que sigue siendo una multifunción convexa.

Es decir que, si F es convexa no necesariamente se tiene que $-F$ es cóncava. Esto trae como consecuencia, que los resultados obtenidos para multifunciones convexas no puedan extenderse directamente a resultados para multifunciones cóncavas y por lo tanto, ambas direcciones deben tratarse por separado.

Ejemplo 3.1.14. Si las imagenes de una multifunción F son conjuntos convexos, no necesariamente ella es convexa. Si definimos $F(r) := D(|r|)$ para $r \in \mathbb{R}$, es claro que $F(r)$ es un conjunto convexo para todo $r \in \mathbb{R}$, sin embargo, el gráfico de dicha multifunción es un bicono en $\mathbb{R}^3$ con vértice en el origen el cual no es un conjunto convexo.

Observación 3.1.15. *Si* $f : D \to Y$ *es una función a valores en* Y *y* $F : D \to \mathcal{P}(Y)$ *se define como* $F(x) := \{f(x)\}$ *para* $x \in D$*, entonces, la inclusión* (3.1) *se transforma en*

$$t\{f(x)\} + (1-t)\{f(y)\} \subseteq \{f(tx + (1-t)y)\}.$$

Pero esto se cumple si y sólo si $f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y)$ *para todo* $t \in [0,1]$ *y para todo* $x, y \in D$*. Note que las funciones lineales, tienen dicha propiedad. Aquí se evidencia que la definición de convexidad dada por la inclusión* (3.1) *no generaliza la Definición 2.0.1.*

El siguiente Teorema es una generalización de un teorema clásico en la teoría de funciones convexas. Para su demostración vamos a necesitar el siguiente lema, también conocido como ley de cancelación de Rådstrom.

Lema 3.1.16 ([44], Lema 1.)**.** *Sean* A, B *y* C *conjuntos dados de un espacio lineal topológico. Suponga que* B *es cerrado y convexo,* C *es acotado y que además* $A + C \subseteq B + C$. *Entonces,* $A \subseteq B$.

Teorema 3.1.17. *Sea* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *una multifunción midconvexa tal que para todo* $x \in D$*, el conjunto* $F(x)$ *es cerrado, convexo y acotado. Entonces, para cualquier colección de puntos* $x_1, \ldots, x_n$ *en* D *con* $n \in \mathbb{N}$*, se tiene que*

$$\frac{1}{n}(F(x_1) + \cdots + F(x_n)) \subseteq F\left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right). \tag{3.5}$$

Demostración. Se puede demostrar fácilmente por inducción que para $p \in \mathbb{N}$, la multifunción F satisface la inclusión

$$\frac{1}{2^p}(F(x_1) + \cdots + F(x_{2^p})) \subseteq F\left(\frac{x_1 + \cdots x_{2^p}}{2^p}\right). \tag{3.6}$$

Ahora bien, para $n \in \mathbb{N}$ fijo, consideremos $p \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq 2^p$. Sean $x_1, \ldots, x_n$ puntos arbitrarios en D y definamos $x_k := \bar{x} := (x_1 + \cdots + x_n)/n$ para $k = n+1, \ldots, 2^p$.

Observe que con esta notación se tiene $\bar{x} = (x_1 + \cdots + x_{2^p})/2^p$ y por lo tanto la inclusión (3.6) se convierte en

$$\frac{1}{2^p}(F(x_1) + \cdots + F(x_n) + F(x_{n+1}) + \cdots + F(x_{2^p})) \subseteq F(\bar{x}). \tag{3.7}$$

Como $x_k := \bar{x}$ para $k = n+1, \ldots, 2^p$ entonces, $F(x_{n+1}) = \cdots = F(x_{2^p}) = F(\bar{x})$ por lo tanto, la convexidad de las imágenes de la multifunción F nos da la siguiente fórmula

$$F(x_{n+1}) + \cdots + F(x_{2^p}) = (2^p - n)F(\bar{x}).$$

Luego, la inclusión (3.7) equivale a

$$\frac{1}{2^p}\big(F(x_1) + \cdots + F(x_n) + (2^p - n)F(\bar{x})\big) \subseteq F(\bar{x}). \tag{3.8}$$

Multiplicando (3.8) por 2^p y usando de nuevo la convexidad de las imágenes de la multifunción F se tiene lo siguiente

$$F(x_1) + \cdots + F(x_n) + (2^p - n)F(\bar{x}) \subseteq (2^p - n)F(\bar{x}) + nF(\bar{x}).$$

Aplicando el Lema 3.1.16 a la inclusión anterior se obtiene (3.5) y esto completa la demostración. □

Corolario 3.1.18. *Bajo las hipótesis del Teorema 3.1.17 se cumple que para todo* $x, y \in D$ *y para todo* $t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq F(tx + (1-t)y).$$

3.2. K-convexidad y K-concavidad de multifunciones.

Sea $K \subseteq Y$ un cono convexo, las siguientes definiciones generalizan las definiciones de convexidad y concavidad dadas en la sección anterior.

Definición 3.2.19. *Se dice que la multifunción* F *es* K*-convexa en* D *si para todo* $x, y \in D$ *y para todo* $t \in [0, 1]$

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq F(tx + (1-t)y) + K \tag{3.9}$$

Definición 3.2.20. *Se dice que la multifunción* F *es* K*-cóncava en* D *si para todo* $x, y \in D$ *y para todo* $t \in [0, 1]$

$$F(tx + (1-t)y) \subseteq tF(x) + (1-t)F(y) + K \tag{3.10}$$

Proposición 3.2.21. *Si* $K \subseteq Y$ *es un cono que posee al origen, entonces, una multifunción* $F : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ *es* K*-convexa (resp.* K*-cóncava) si y sólo si la multifunción* $F+K : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ *definida por* $(F+K)(x) := F(x) + K$ *es convexa (resp. cóncava).*

Demostración. Supongamos que la multifunción F es K-convexa, es decir, que para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0, 1]$ se satisface la siguiente inclusión

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq F(tx + (1-t)y) + K.$$

Ahora bien, para $x, y \in D$ y para $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} t(F+K)(x) + (1-t)(F+K)(y) &= t(F(x)+K) + (1-t)(F(y)+K) \\ &= tF(x) + tK + (1-t)F(y) + (1-t)K \end{aligned}$$

pero como K es un cono convexo entonces, $tK + (1-t)K \subseteq K$ para todo $t \in [0, 1]$ por lo tanto,

$$t(F+K)(x) + (1-t)(F+K)(y) \subseteq tF(x) + (1-t)F(y) + K.$$

Finalmente, la K-convexidad de F implica que

$$\begin{aligned} tF(x) + (1-t)F(y) + K &\subseteq F(tx + (1-t)y) + K + K \\ &\subseteq F(tx + (1-t)y) + K = (F+K)(tx + (1-t)y), \end{aligned}$$

y así

$$t(F+K)(x) + (1-t)(F+K)(y) \subseteq (F+K)(tx + (1-t)y),$$

lo que demuestra que la multifunción $(F+K)$ es convexa.

Recíprocamente, supongamos que la multifunción $(F+K)$ es convexa. Como $0 \in K$, entonces, para $t \in [0,1]$ y para $x, y \in D$,

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq tF(x) + (1-t)F(y) + K.$$

Por otra parte, usando la convexidad del cono K, se sigue que $K = tK + (1-t)K$ y así

$$\begin{aligned} tF(x) + (1-t)F(y) + K &= t(F(x) + K) + (1-t)(F(y) + K) \\ &= t(F+K)(x) + (1-t)(F+K)(y). \end{aligned}$$

Ahora bien, como $(F+K)$ es convexa entonces

$$t(F+K)(x) + (1-t)(F+K)(y) \subseteq (F+K)(tx + (1-t)y).$$

Luego, para todo $t \in [0,1]$ y para todo $x, y \in D$

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq F(tx + (1-t)y) + K,$$

lo que finaliza la demostración. □

Definición 3.2.22. *Se dice que la multifunción* F *es* K*-midconvexa en* D *si para todo* $x, y \in D$ F *satisface la inclusión* (3.9) *para* $t = \frac{1}{2}$, *i.e,*

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} \subseteq F\left(\frac{x+y}{2}\right) + K. \tag{3.11}$$

Definición 3.2.23. *Se dice que la multifunción* F *es* K*-midcóncava en* D *si para todo* $x, y \in D$ F *satisface la inclusión* (3.10) *para* $t = \frac{1}{2}$*, i.e,*

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \subseteq \frac{F(x)+F(y)}{2} + K. \tag{3.12}$$

Observación 3.2.24. *Dado un cono convexo* $K \subseteq Y$*, definamos la relación* $\leq_K$ *en* Y *de la siguiente manera*

$$x \leq_K y \iff y - x \in K.$$

Si $F(x) = \{f(x)\}$*, donde* $f : X \to Y$ *es una función cualquiera, entonces las inclusiones* (3.9) *y* (3.10) *equivalen a*

$$f(tx + (1-t)y) \leq_K tf(x) + (1-t)f(y) \quad y \quad tf(x) + (1-t)f(y) \leq_K f(tx + (1-t)y)$$

respectivamente. De hecho si $Y = \mathbb{R}$ *y* $K = \mathbb{R}_+$*, entonces estas definiciones coinciden con las definiciones de convexidad y concavidad de funciones respectivamente introducidas en el Capítulo 2.*

Como es de esperarse, no toda multifunción K-midconvexa es convexa. Sin embargo, K. Nikodem en [36] demuestra el siguiente resultado

Teorema 3.2.25. *Sea* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *es una multifunción* K*-midconvexa, entonces* F *satisface la inclusión* (3.9) *para todo* $x, y \in D$ *y para todo* $t \in \mathbb{D} \cap [0, 1]$.

Definición 3.2.26. *Se dice que la multifunción* F *es localmente* K*-acotada inferior en* $x_0 \in D$*, si existe un abierto* $U \in \mathcal{U}(X)$ *y un conjunto acotado* $H \subseteq Y$ *tales que*

$$F(u) \subseteq H + K, \qquad \textit{para todo } u \in (x_0 + U) \cap D.$$

Definición 3.2.27. *Se dice que la multifunción* F *es localmente* K*-acotada superior en* $x_0 \in D$*, si* F *es localmente* $(-K)$*-acotada inferior en dicho punto.*

Ejemplo 3.2.28. Definamos $F(x) := (\sin(x), \infty)$, $x \in \mathbb{R}$. Evidentemente, para todo $x \in \mathbb{R}$ el conjunto $F(x)$ no es acotado. Sin embargo, al considerar $K := (0, \infty)$ se tiene que $F(x) \subseteq \{-1\} + K$ para todo $x \in \mathbb{R}$ por lo tanto, esta multifunción así definida es K-acotada inferiormente en todo $\mathbb{R}$.

Definición 3.2.29. *Se dice que la multifunción F es localmente semi-K-acotada inferior en $x_0 \in D$, si existe un abierto $U \in \mathcal{U}(X)$ y un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tales que*

$$F(u) \subseteq \mathrm{cl}(H + K), \qquad \textit{para todo } u \in (x_0 + U) \cap D.$$

Observación 3.2.30. *Si Y es un espacio localmente acotado, i.e., existe un abierto $V \in \mathcal{U}(Y)$ que es acotado, entonces la Definición 3.2.26 y la Definición 3.2.29 son equivalentes. Basta ver que si $F(u) \subseteq \mathrm{cl}(H + K)$ entonces, $F(u) \subseteq H + V + K$. Siendo $H + V$ un conjunto acotado, se tiene que F es localmente K-acotada inferior.*

Definición 3.2.31. *Se dice que la multifunción F es localmente débil-K-acotada superior en $x_0 \in D$, si existe un abierto $U \in \mathcal{U}(X)$ y un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tales que*

$$0 \in F(u) + H + K, \qquad \textit{para todo } u \in (x_0 + U) \cap D.$$

Definición 3.2.32. *Se dice que la multifunción F es localmente débil-semi-K-acotada superior en $x_0 \in D$, si existe un abierto $U \in \mathcal{U}(X)$ y un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tales que*

$$0 \in \mathrm{cl}(F(u) + H + K), \qquad \textit{para todo } u \in (x_0 + U) \cap D.$$

Proposición 3.2.33. *Supongamos que $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ es una multifunción localmente semi-K-acotada inferior. Entonces, para cada subconjunto compacto $C \subseteq D$, existe un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que, $F(x) \subseteq \mathrm{cl}(H + K)$, para todo $x \in C$.*

Demostración. Sea $C \subseteq D$ un conjunto compacto no-vacío. Como la multifunción F es localmente semi-K-acotada inferior, entonces, para cada $x \in C$ existe un abierto $U_x \in \mathcal{U}(X)$ y un conjunto acotado $H_x \subseteq Y$ tales que para todo $u \in (x + U_x) \cap D$, $F(u) \subseteq \mathrm{cl}(H_x + K)$.

Ahora bien, es claro que $C \subseteq \bigcup_{x \in C}(x + U_x)$, es decir que la familia $\{x + U_x : x \in C\}$ es un cubrimiento por abiertos del compacto C, por lo tanto, existen $x_1, \ldots, x_n \in C$ tales que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(x_i + U_{x_i})$. Sea $H := H_{x_1} \cup \cdots \cup H_{x_n}$, es claro que H es un conjunto acotado, pues es la unión finita de conjuntos acotados. Además, si $z \in C$ es un elemento arbitrario de C entonces $z \in x_i + U_{x_i}$ para algún $i = 0, \ldots, n$ y por lo tanto $F(z) \subseteq \mathrm{cl}(H_{x_i} + K) \subseteq \mathrm{cl}(H + K)$. Lo cual, finaliza la demostración. $\square$

Proposición 3.2.34. *Supongamos que* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *es una multifunción localmente débil-semi-*K*-acotada superior. Entonces, para cada subconjunto compacto* $C \subseteq D$*, existe un conjunto acotado* $H \subseteq Y$ *tal que,* $0 \in \mathrm{cl}(F(x) + H + K)$*, para todo* $x \in C$.

Demostración. Sea $C \subseteq D$ un conjunto compacto no-vacío. Como la multifunción F es localmente débil-semi-K-acotada superior, entonces para cada $x \in C$ existe un abierto $U_x \in \mathcal{U}(X)$ y un conjunto acotado $H_x \subseteq Y$ tales que para todo $u \in (x + U_x) \cap D$, $0 \in \mathrm{cl}(F(u) + H_x + K)$. Ahora bien, es claro que $C \subseteq \bigcup_{x \in C}(x + U_x)$, es decir que la familia $\{x + U_x : x \in C\}$ es un cubrimiento por abiertos del compacto C, por lo tanto, existen $x_1, \ldots, x_n \in C$ tales que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(x_i + U_{x_i})$. Sea $H := H_{x_1} \cup \cdots \cup H_{x_n}$, es claro que H es un conjunto acotado, pues es la unión finita de conjuntos acotados. Además, si $z \in C$ es un elemento arbitrario de C entonces $z \in x_i + U_{x_i}$ para algún $i = 0, \ldots, n$ y por lo tanto, $0 \in \mathrm{cl}(F(z) + H_{x_i} + K) \subseteq \mathrm{cl}(F(z) + H + K)$. Lo cual, finaliza la demostración. $\square$

3.3. El teorema de Bernstein–Doetsch para multifunciones.

Con el fin de establecer algunos resultados importantes relacionados con el Teorema de Bernstein–Doetsch en el contexto de multifunciones convexas, es necesario establecer las siguientes definiciones.

Definición 3.3.35. *Sea* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *una multifunción. Se dice que* F *es* K*-semicontinua* *superior si para todo abierto* $V \in \mathcal{U}(Y)$*, existe un abierto* $U \in \mathcal{U}(X)$ *tal que*

$$F(x) \subseteq F(x_0) + V + K \qquad (x \in x_0 + U). \tag{3.13}$$

Definición 3.3.36. *Sea* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *una multifunción. Se dice que* F *es* K*-semicontinua inferior si para todo abierto* $V \in \mathcal{U}(Y)$*, existe un abierto* $U \in \mathcal{U}(X)$ *tal que*

$$F(x_0) \subseteq F(x) + V + K \qquad (x \in x_0 + U). \tag{3.14}$$

Definición 3.3.37. *Sea* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *una multifunción. Se dice que* F *es* K*-continua si* F *es* K*-semicontinua superior e inferior al mismo tiempo.*

Observación 3.3.38. *Cuando* $K = \{0\}$*, la* K*-continuidad de una multifunción equivale a la continuidad con respecto a la topología de Hausdorff, ver [10].*

Por otra parte, si $F(x) = f(x)$*, para alguna función* $f : D \to \mathbb{R}$ *y* $K = [0, \infty)$*, entonces* K*-semicontinuidad superior e inferior equivalen a semicontinuidad superior e inferior respectivamente.*

Ejemplo 3.3.39. Si $A \subseteq Y$ es un conjunto acotado y $K \subseteq Y$ es un cono convexo. Entonces, la multifunción $F : \mathbb{R} \to \mathcal{P}_0(Y)$ definida mediante la fórmula $F(t) := tA + K$ es K-continua con respecto a la topología de Hausdorff.

Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ y sea $V \in \mathcal{U}(Y)$ un entorno abierto del origen en Y. Observemos lo siguiente

$$F(t_0) = t_0A + K = (t_0 - t + t)A + K \subseteq (t_0 - t)A + tA + K = (t_0 - t)A + F(t).$$

Ahora bien, como el conjunto A es acotado, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < s < \delta$ entonces $sA \subseteq V$. Luego, si $0 < t - t_0 < \delta$ entonces $(t - t_0)A \subseteq V$ y por lo tanto,

$$F(t_0) \subseteq F(t) + W.$$

Esto demuestra que la multifunción F así definida es semicontinua inferior con respecto a la topología de Hausdorff. Para demostrar la semicontinuidad superior de F se procede de manera similar.

Es bien conocido que toda función midconvexa y continua es convexa. A continuación, veremos un resultado análogo para la clase de multifunciones midconvexas. Para un conjunto A y $n \in \mathbb{N}$ se denotará

$$[n]A := \{x_1 + \cdots x_n | x_1, \ldots, x_n \in A\}.$$

Teorema 3.3.40. *Sean* X, Y *espacios topológicos lineales. Sea* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *una multifunción* K*-semicontinua superior tal que para todo* $x \in D$ *el conjunto* $F(x) \subseteq Y$ *es compacto. Si* F *es* K*-midconvexa y* K*-semicontinua superior en* D*, entonces,* F *es* K*-convexa.*

Demostración. Sean $x, y \in D$ y $t \in [0, 1]$ fijos. Sea $(q_n)_n \subseteq \mathbb{D}$ una sucesión de números diádicos racionales que converge a t. Sea $V \in \mathcal{U}(Y)$ un abierto arbitrario y consideremos $W \in \mathcal{U}(Y)$ tal que $[3]\,W \subseteq V$. Por el Teorema 3.2.25 se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$, la multifunción F satisface la inclusión

$$q_n F(x) + (1 - q_n)F(y) \subseteq F(q_n x + (1 - q_n)y) + K.$$

Como las imágenes de F son conjuntos acotados, entonces existen números naturales n_1, n_2 tales que para $n \geq n_1$,

$$tF(x) \subseteq q_n F(x) + W$$

y para $n \geq n_2$

$$(1 - t)F(y) \subseteq (1 - q_n)F(y) + W.$$

Por otra parte, la K-semicontinuidad superior de F en el punto $tx+(1-t)y$ da como resultado que para $n \geq n_3$, $n_3 \in \mathbb{N}$

$$F(q_n x + (1 - q_n)y) \subseteq F(tx + (1 - t)y) + W + K.$$

Ahora bien, si $n \geq \text{máx}\{n_1, n_2, n_3\}$ entonces

$$\begin{aligned} tF(x) + (1 - t)F(y) &\subseteq q_n F(x) + (1 - q_n)F(y) + [2]W \\ &\subseteq F(q_n x + (1 - q_n)y) + [2]W + K \subseteq F(tx + (1 - t)y) + [3]W + K \\ &\subseteq F(tx + (1 - t)y) + V + K. \end{aligned}$$

Como el abierto V es arbitrario, entonces

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{U}(Y)} (F(tx + (1-t)y) + K + V) = \mathrm{cl}(F(tx + (1-t)y) + K).$$

Como K es un cono cerrado y $F(tx + (1-t)y)$ es un conjunto compacto, entonces, por la Proposición 1.3.12 se tiene que la suma de ellos es un conjunto cerrado y por lo tanto $\mathrm{cl}(F(tx + (1-t)y) + K) = F(tx + (1-t)y) + K$, lo que completa la demostración. □

En este contexto, K. Nikodem en [36] establece el siguiente resultado, que generaliza el Teorema 2.1.5 y además engloba parte de los resultados obtenidos por Trudzik en [51].

Teorema 3.3.41 ([36], Teorema 1)**.** *Sean* X, Y *espacios topológicos lineales, y sea* $K \subseteq Y$ *un cono convexo tal que* $0 \in K$. *Sea* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *una multifunción tal que para todo* $x \in D$ *el conjunto* $F(x) \subseteq Y$ *es acotado. Si* F *es* K*-midconvexa y* K*-acotada superior en un subconjunto* $H \subseteq D$ *con interior no vacío, entonces,* F *es* K*-continua en* D.

Cuando $K = \{0\}$, entonces, K-convexidad es simplemente convexidad y K. Nikodem en 1987 obtuvo los siguientes resultados,

Teorema 3.3.42 ([38], Teorema 1)**.** *Sean* X, Y *espacios topológicos lineales. Sea* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *una multifunción tal que para todo* $x \in D$ *el conjunto* $F(x) \subseteq Y$ *es acotado. Si* F *es midconvexa y acotada superiormente en un subconjunto* $H \subseteq D$ *con interior no vacío, entonces,* F *es continua en* D *con respecto a la topología de Hausdorff.*

Teorema 3.3.43 ([37], Teorema 1)**.** *Sean* X, Y *espacios topológicos lineales. Sea* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *una multifunción tal que para todo* $x \in D$ *el conjunto* $F(x) \subseteq Y$ *es acotado y convexo. Si* F *es midcóncava y acotada en un subconjunto* $H \subseteq D$ *con interior no vacío, entonces,* F *es continua en* D *con respecto a la topología de Hausdorff.*

3.4. Convexidad fuerte.

Supongamos ahora que $(X, \|\cdot\|)$ y $(Y, \|\cdot\|)$ son espacios vectoriales normados y sea $B_Y \subseteq Y$ el interior de la bola unitaria en Y. Huang en su artículo del año 2010 [12], establece la siguiente definición, generalizando el concepto de convexidad fuerte para funciones, introducido por Polyak en [41].

Definición 3.4.44. *Sea* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *una multifunción y sea* $c > 0$. *Se dice que* F *es fuertemente convexa con módulo* c *si*

$$tF(x) + (1-t)F(y) + ct(1-t)\|x-y\|^2\overline{B_Y} \subseteq F(tx + (1-t)y) \tag{3.15}$$

para todo $x, y \in D$ *y para todo* $t \in [0, 1]$.

En base a esta definición surge de forma natural la definición de midconvexidad fuerte.

Definición 3.4.45. *Sea* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *una multifunción y sea* $c > 0$. *Se dice que* F *es fuertemente midconvexa con módulo* c *si*

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} + \frac{c}{4}\|x-y\|^2\overline{B_Y} \subseteq F\left(\frac{x+y}{2}\right). \tag{3.16}$$

El siguiente Teorema caracteriza a la familia de multifunciones fuertemente convexas con módulo c.

Teorema 3.4.46 ([27], Teorema 12)**.** *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio con producto interno,* t *un número fijo en* $(0, 1)$ *y* D *un subconjunto convexo de* X. *Una multifunción* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *tal que* $F(x)$ *es un conjunto convexo y cerrado para todo* $x \in D$, *es fuertemente convexa con módulo* c *si y sólo si la multifunción* G *definida por* $G(x) := F(x) + \|x\|^2\overline{B_Y}$ *para* $x \in D$ *es convexa.*

Es evidente que toda multifunción fuertemente convexa con módulo c es convexa. Ahora bien, para esta nueva clase de multifunciones, H. Leiva et. al. en [27] obtienen el siguiente resultado de tipo Bernstein–Doetsch.

Teorema 3.4.47 ([27], Teorema 4)**.** *Sea* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *una multifunción fuertemente mid-convexa con módulo* c *tal que para todo* $x \in D$ *el conjunto* $F(x)$ *es cerrado y acotado. Si* F *es semicontinua superior en* D*, entonces esta es fuertemente convexa con módulo* c*.*

Como consecuencia del teorema anterior surge el siguiente

Corolario 3.4.48. *Supongamos que* $D \subseteq X$ *es un conjunto abierto y convexo. Si una multifunción* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *es fuertemente convexa con módulo* c *y semicontinua inferior en un punto de* D *entonces,* F *es continua y fuertemente convexa con módulo* c*.*

Hasta ahora hemos presentado la mayoría de los resultados de tipo Bernstein–Doetsch que han sido obtenidos a lo largo del tiempo tanto para funciones como para multifunciones. En el capítulo 4 como se mencionó en la introducción presentaremos dos Teoremas que pretenden englobar a gran parte de los resultados de tipo Bernstein–Doetsch obtenidos hasta el momento.

3.5. Transformación de Takagi.

En el Capítulo 2 definimos la función de Takagi T para cada $x \in \mathbb{R}$, mediante la fórmula

$$T(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{\mathbb{Z}}(2^k t)}{2^k},$$

donde

$$d_{\mathbb{Z}}(x) := \mathrm{dist}(\mathbb{Z}, x) := \mathrm{ínf}\{|z - x| : z \in \mathbb{Z}\}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.17}$$

Supongamos ahora que D es un conjunto estrellado con respecto al origen, y consideremos una multifunción $S : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ con la propiedad de que $0 \in S(x)$ para todo $x \in D$. Para dicha multifunción, se define $S^T : \mathbb{R} \times D \to Y$ de la siguiente manera

$$S^T(t, x) := \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} S\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big)\right) \qquad (t \in \mathbb{R},\ x \in D). \tag{3.18}$$

Observación 3.5.49. *El hecho de que* $0 \in S(x)$ *para todo* $x \in D$ *es crucial, ya que esto trae como consecuencia que la sucesión de conjuntos*

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} S\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

sea creciente. Por lo tanto, S^T *no es más que el límite inferior de dicha sucesión.*

La multifunción S^T será llamada transformación de Takagi de S a lo largo del trabajo.

Definición 3.5.50. *El cono recesión de la multifunción* $S : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *es el conjunto*

$$\operatorname{rec}(S) := \bigcap_{x\in D} \operatorname{rec} S(x)$$

De la definición se puede observar que para todo $x \in D$ se tiene que

$$\operatorname{rec}(S) + S(x) \subseteq S(x).$$

A continuación, se establecerá la relación entre una multifunción y su transformación de Takagi.

Proposición 3.5.51. *Sea* $D \subseteq X$ *un conjunto estrellado y sea* $S : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *una multifunción tal que* $0 \in S(x)$ *para todo* $x \in D$*. Entonces*

$$\operatorname{cl}(S(x)) \subseteq S^T\big(\tfrac{1}{2}, x\big) \qquad (x \in D). \tag{3.19}$$

Si además, $S(0) \subseteq \overline{\operatorname{rec}}(S)$*, entonces*

$$\operatorname{cl}(S(x)) = S^T\big(\tfrac{1}{2}, x\big) \qquad (x \in D). \tag{3.20}$$

Demostración. Observe que $d_{\mathbb{Z}}\big(\frac{1}{2}\big) = \frac{1}{2}$ y $d_{\mathbb{Z}}\big(2^k \cdot \frac{1}{2}\big) = 0$ para $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$S^T\big(\tfrac{1}{2}, x\big) = \operatorname{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} S\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k \cdot \tfrac{1}{2})x\big)\right) = \operatorname{cl}\left(S(x) + \bigcup_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} S(0)\right).$$

Como $0 \in S(0)$, entonces la inclusión (5.2) se sigue inmediatamente. Para demostrar (5.3), asuma que $S(0) \subseteq \overline{\operatorname{rec}}(S)$. Entonces, $S(0) \subseteq \overline{\operatorname{rec}}(S(x)) \subseteq \operatorname{rec}(\overline{S(x)})$. Como $\operatorname{rec}(\overline{S(x)})$ es un cono convexo, se tiene que este conjunto es cerrado bajo la suma y bajo la multiplicación por escalares positivos. Así, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} S(0) \subseteq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \operatorname{rec}(\overline{S(x)}) \subseteq \operatorname{rec}(\overline{S(x)}).$$

En consecuencia,

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} S(0) \subseteq \operatorname{rec}(\overline{S(x)}).$$

Luego,

$$S^T\left(\tfrac{1}{2}, x\right) = \operatorname{cl}\left(S(x) + \bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} S(0)\right) \subseteq \operatorname{cl}\left(\overline{S(x)} + \operatorname{rec}(\overline{S(x)})\right) \subseteq \operatorname{cl}(S(x)),$$

lo cual completa la demostración de (5.3). □

Proposición 3.5.52. *Sea* $D \subseteq X$ *un conjunto estrellado,* $S_0 \subseteq Y$ *un conjunto convexo que contiene a* $0 \in Y$ *y* $K \subseteq Y$ *un cono convexo. Sea* $\varphi : D \to \mathbb{R}_+$ *una función localmente acotada superior y no negativa. Definamos* $S : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *por* $S(x) := K + \varphi(x) S_0$. *Entonces*

$$S^T(t, x) = \operatorname{cl}\left(K + \varphi^T(t, x) S_0\right) \qquad (t \in \mathbb{R},\ x \in D), \tag{3.21}$$

donde

$$\varphi^T(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi\left(2 d_{\mathbb{Z}}(2^n t) x\right) \qquad (t \in \mathbb{R},\ x \in D). \tag{3.22}$$

Si además, $\varphi(0) = 0$, *entonces*

$$\varphi^T\left(\tfrac{1}{2}, x\right) = \varphi(x) \qquad y \qquad S^T\left(\tfrac{1}{2}, x\right) = \operatorname{cl}(K + \varphi(x) S_0) = \operatorname{cl}(S(x)) \qquad (x \in D). \tag{3.23}$$

Demostración. Para $t \in \mathbb{R}$ y $n \geq 0$, se tiene que $0 \leq 2 d_{\mathbb{Z}}(2^n t) \leq 1$, por lo tanto $2 d_{\mathbb{Z}}(2^n t) x \in [0, x]$. Como la función φ es localmente acotada superior en D, entonces es acotada superior en el segmento $[0, x]$ por alguna constante $M(x)$. Luego

$$\varphi^T(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi\left(2 d_{\mathbb{Z}}(2^n t) x\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} M(x) = 2M(x) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Para probar (3.21), fijemos $(t, x) \in \mathbb{R} \times D$.

Para demostrar la inclusión $\subseteq$ en (3.21), primero se demostrará que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} S\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big) \subseteq K + \varphi^T(t, x) S_0. \tag{3.24}$$

Usando la definición de S, la convexidad del conjunto S_0 y el hecho de que la función φ es no-negativa, se tiene que para $n \geq 0$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} S\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big) &= \sum_{k=0}^{n} \left(K + \frac{1}{2^k}\varphi\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big)S_0\right) = K + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\varphi\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big)\right)S_0 \\ &\subseteq K + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\varphi\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big)\right)S_0 = K + \varphi^T(t, x)S_0.\end{aligned}$$

Así, queda demostrada la inclusión (3.24). Tomando la clausura en ambos lados, la inclusión $\subseteq$ en (3.21) se sigue de inmediato.

Para la prueba de la inclusión $\supseteq$ en (3.21), es suficiente mostrar que

$$K + \varphi^T(t, x)S_0 \subseteq S^T(t, x).$$

Observe que para $n \geq 0$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} K + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\varphi\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big)\right)S_0 &\subseteq \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\varphi\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big)\right)(S_0 + K) \\ &\subseteq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\varphi\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big)(S_0 + K) \subseteq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\Big(\varphi\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big)S_0 + K\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} S(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x) \subseteq \bigcup_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{2^k} S\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} K + \varphi^T(t, x)S_0 &= K + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\varphi\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big)\right)S_0 \\ &\subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{2^k} S\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big)\right) = S^T(t, x).\end{aligned}$$

Con lo cual se termina la demostración.

En el caso de que $\varphi(0) = 0$, la primera igualdad en (3.23) es inmediata, la segunda igualdad es consecuencia de (3.21). $\square$

Corolario 3.5.53. *Sea* X *un espacio normado,* $D \subseteq X$ *un conjunto estrellado,* $S_0 \subseteq Y$ *un conjunto convexo que contiene a* $0 \in Y$*,* $K \subseteq Y$ *un cono convexo, y* $\alpha > 0$*. Definamos* $S : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *por* $S(x) := K + \|x\|^\alpha S_0$*. Entonces*

$$S^T(t, x) = \mathrm{cl}\left(K + T_\alpha(t)\|x\|^\alpha S_0\right) \qquad (t \in \mathbb{R},\ x \in D), \tag{3.25}$$

donde $T_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es la función de Takagi de orden* α *y es definida por*

$$T_\alpha(t) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\alpha-n}(d_{\mathbb{Z}}(2^n t))^\alpha \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{3.26}$$

Demostración. Aplicando la Proposición 3.5.52 con la función φ definida mediante la fórmula $\varphi(x) := \|x\|^\alpha$, se observa que para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in D$

$$\varphi^T(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\varphi\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^n t)x\big) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\alpha-n}\big(d_{\mathbb{Z}}(2^n t)\big)^\alpha \|x\|^\alpha = T_\alpha(t)\|x\|^\alpha.$$

Por lo tanto, (3.25) es consecuencia de (3.21). $\square$

Observación 3.5.54. *Un caso particular importante es cuando* $\alpha = 1$*, entonces* $T_1 = 2T$*, donde* T *es la función de Takagi definida por* (2.10) *en el Capítulo 2. En el caso* $\alpha = 2$ *un argumento interesante nos da una forma cerrada para* T_2*. Observe que* T_α *(para cualquier* $\alpha > 0$*) satisface la ecuación funcional*

$$T_\alpha(t) = 2^\alpha\big(d_{\mathbb{Z}}(t)\big)^\alpha + \frac{1}{2}T_\alpha(2t) \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{3.27}$$

Por el teorema de punto fijo de Banach, esta ecuación funcional tiene solución única en el espacio de Banach de las funciones reales, acotadas sobre la recta real (equipado con la norma del supremo). Asi T_α *es la única solución a* (5.10)*. Por otro lado, para* $\alpha = 2$ *se puede verificar que la función periódica* T_2^* *definida en* $[0, 1]$ *por* $T_2^*(t) = 4t(1 - t)$ *también es solución de* (5.10)*, así, debe ocurrir que* $T_2(t) = 4t(1 - t)$ *para* $t \in [0, 1]$*. Para mayores detalles, puede revisar [32].*

Corolario 3.5.55. *Sea* X *un espacio normado,* $D \subseteq X$ *un conjunto estrellado,* $S_0 \subseteq Y$ *un conjunto convexo que contiene a* $0 \in Y$, $K \subseteq Y$ *un cono convexo. Definamos* $S : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *por* $S(x) := K + S_0$*. Entonces*

$$S^T(t,x) = \mathrm{cl}\left(K + 2S_0\right) \qquad (t \in \mathbb{R},\ x \in D). \tag{3.28}$$

Demostración. Aplicaremos la Proposición 3.5.52 a la función constante $\varphi \equiv 1$. Por lo tanto (3.22) nos dá $\varphi^T \equiv 2$, luego (3.21) es equivalente a lo que queremos demostrar. □

Capítulo 4

Término de error de tipo Takagi-Hazy-Páles.

A lo largo de este capítulo, se asume que X y Y son espacios topológicos lineales.

4.1. Teorema de tipo Bernstein–Doetsch con errores de tipo THP para multifunciones convexas.

Teorema 4.1.1. *Sea* $D \subseteq X$ *un conjunto convexo no-vacío y* $A, B : (D - D) \to \mathcal{P}_0(Y)$ *multifunciones tales que* $0 \in A(x) \cap B(x)$ *para todo* $x \in (D - D)$*. Sea* $K = \overline{\mathrm{rec}}(B)$*, la clausura del cono recesión de* B*. Sea* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *una multifunción que satisface la inclusión de convexidad tipo Jensen*

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} + A(x - y) \subseteq \mathrm{cl}\left(F\left(\frac{x + y}{2}\right) + B(x - y)\right) \qquad (x, y \in D). \tag{4.1}$$

Supongamos además, que F *tiene las siguientes propiedades:*

I. F *es puntualmente semi-*K*-acotada inferior.*

II. F *es localmente debíl-semi-*K*-acotada superior en* D.

Entonces F *satisface la siguiente inclusión*

$$tF(x) + (1 - t)F(y) + A^T(t, x - y) \subseteq \mathrm{cl}\left(F(tx + (1 - t)y) + B^T(t, x - y)\right) \tag{4.2}$$

para todo $x, y \in D$ *y* $t \in [0, 1]$.

Demostración. El primer paso en la demostración de (5.21), será mostrar que, para todo $x, y \in D$ existe un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que, para todo $n \geq 0$, $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} tF(x) + (1-t)F(y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big) \\ \subseteq \mathrm{cl}\left(F(tx + (1-t)y) + \frac{1}{2^n} H + K + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Fijemos $x, y \in D$ arbitrarios. Para verificar que (5.23) se cumple, vamos a proceder aplicando inducción sobre n. Para el caso $n = 0$, debemos demostrar que existe un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que para todo $t \in [0, 1]$,

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq \mathrm{cl}\left(F(tx + (1-t)y) + H + K\right). \tag{4.4}$$

Sea $U \in \mathcal{U}(Y)$ y escojamos un abierto balanceado $V \in \mathcal{U}(Y)$ tal que $V + V + V \subseteq U$. Como F es puntualmente semi-K-acotada inferior, existen conjuntos acotados $H_x, H_y \subseteq Y$ tales que

$$F(x) \subseteq \mathrm{cl}(H_x + K) \subseteq V + H_x + K$$

y

$$F(y) \subseteq \mathrm{cl}(H_y + K) \subseteq V + H_y + K.$$

Multiplicando estas inclusiones por t y $1-t$, respectivamente, sumándolas, usando la convexidad del cono K y el hecho de que V es balanceado,

$$\begin{aligned} tF(x) + (1-t)F(y) &\subseteq tV + tH_x + tK + (1-t)V + (1-t)H_y + (1-t)K \\ &\subseteq V + V + tH_x + (1-t)H_y + K. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Por la Proposición 1.3.4, se tiene que tanto el conjunto $H_1 := \bigcup_{t\in[0,1]} tH_x$ como el conjunto $H_2 := \bigcup_{t\in[0,1]} (1-t)H_y$ son acotados. Así, la inclusión (4.5) nos da que para todo $t \in [0, 1]$,

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq V + V + H_1 + H_2 + K. \tag{4.6}$$

Por otra parte, como F es localmente débil-semi-K-acotada superior y el segmento $[x,y]$ es compacto, entonces por la Proposición 3.2.34, existe un conjunto acotado H_0 tal que para todo $t \in [0,1]$,

$$0 \in \mathrm{cl}(F(tx+(1-t)y)+H_0+K) \subseteq V + F(tx+(1-t)y)+H_0+K. \tag{4.7}$$

Ahora bien, sumando las inclusiones (4.6) y (4.7) lado a lado, se tiene que para todo t en $[0,1]$,

$$\begin{aligned} tF(x)+(1-t)F(y) &\subseteq V+V+V+F(tx+(1-t)y)+H_0+H_1+H_2+K \\ &\subseteq U+F(tx+(1-t)y)+H_0+H_1+H_2+K. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} tF(x)+(1-t)F(y) &\subseteq \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \big(U+F(tx+(1-t)y)+H_0+H_1+H_2+K\big) \\ &= \mathrm{cl}\,\big(F(tx+(1-t)y)+H_0+H_1+H_2+K\big). \end{aligned}$$

Así, la inclusión (4.4) se obtiene con $H := H_0+H_1+H_2$.

Supongamos ahora que la ecuación (5.23) es válida para n y demostraremos que también es válida para $n+1$. Supongamos que $t \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ (el caso cuando $t \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ es análogo). Entonces, $d_{\mathbb{Z}}(t) = t$ y podemos reescribir el lado izquierdo de la inclusión que queremos demostrar como

$$\begin{aligned} &tF(x)+(1-t)F(y)+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^kt)(x-y)\big) \\ &\quad = tF(x)+(1-t)F(y)+A\big(2t(x-y)\big)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^kt)(x-y)\big). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Observemos que

$$(1-t)F(y) = \frac{1-2t+1}{2}F(y) \subseteq \frac{1-2t}{2}F(y)+\frac{1}{2}F(y), \tag{4.9}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&tF(x) + (1-t)F(y) + A\big(2t(x-y)\big) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big) \\
&\subseteq \frac{1}{2}\left(2tF(x) + (1-2t)F(y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big)\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{2}F(y) + A\big(2d_{\mathbb{Z}}(t)(x-y)\big).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Al usar la hipótesis inductiva con $2t$ en vez de t, se sigue que

$$\begin{aligned}
&2tF(x) + (1-2t)F(y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big) \\
&\quad \subseteq \operatorname{cl}\left(F(2tx + (1-2t)y) + \frac{1}{2^n}H + K + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big)\right).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Combinando las inclusiones (4.8), (4.10) y (4.11), llegamos a la siguiente inclusión

$$\begin{aligned}
&tF(x) + (1-t)F(y) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big) \\
&\subseteq \frac{1}{2}\operatorname{cl}\left(F(2tx + (1-2t)y) + \frac{1}{2^n}H + K + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big)\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{2}F(y) + A\big(2d_{\mathbb{Z}}(t)(x-y)\big) \\
&\subseteq \operatorname{cl}\left(\frac{F(2tx + (1-2t)y) + F(y)}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}H + K + A\big(2t(x-y)\big)\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big)\right)
\end{aligned}$$

Como F satisface la inclusión de tipo Jensen (5.20), entonces,

$$\begin{aligned}
&\frac{F(2tx + (1-2t)y) + F(y)}{2} + A\big(2t(x-y)\big) \\
&\qquad\qquad\qquad \subseteq \operatorname{cl}\left(F\left(\frac{2tx + (1-2t)y + y}{2}\right) + B\big(2t(x-y)\big)\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&tF(x)+(1-t)F(y)+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\\
&\subseteq \mathrm{cl}\left(\mathrm{cl}\left(F\left(\frac{2tx+(1-2t)y+y}{2}\right)+B\big(2t(x-y)\big)\right)+\frac{1}{2^{n+1}}H+K\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big)\right)\\
&=\mathrm{cl}\left(F\big(tx+(1-t)y\big)+\frac{1}{2^{n+1}}H+K+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\right).
\end{aligned}$$

Ahora podemos concluir que la inclusion (5.23) es válida para todo $n \geq 0$.

Para completar la demostración del teorema, sea $t \in [0,1]$ fijo y apliquemos la Proposición 1.5.11 a las sucesiones de conjuntos y números definidas para $n \geq 0$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
A_n &:= tF(x)+(1-t)F(y)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}A(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y))\\
B_n &:= F\big(tx+(1-t)y\big)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\\
\varepsilon_n &:= \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

Con esta notación, la inclusión (5.23) es equivalente a (1.7). Por otra parte, como $0 \in A(u) \cap B(u)$ para todo $u \in (D-D)$, entonces las sucesiones (A_n) y (B_n) son sucesiones no-decrecientes en Y. Aplicando la Proposición 1.5.11,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(tF(x)+(1-t)F(y)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}A(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y))\right)\right)\\
&\qquad\subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(F\big(tx+(1-t)y\big)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\right)\right).
\end{aligned}$$

Ahora, aplicamos el numeral 2 del Teorema 1.3.11 en ambos lados de la inclusión anterior y se obtiene

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}\left(tF(x)+(1-t)F(y)+\mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}A(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y))\right)\right)&\\ \subseteq \mathrm{cl}\left(F\big(tx+(1-t)y\big)+\mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\right)\right),&\end{aligned}$$

lo cual es equivalente a la inclusión (5.21) que queríamos demostrar. □

4.2. Teorema de tipo Bernstein–Doetsch con errores de tipo Takagi-Hazy-Páles para multifunciones cóncavas.

Teorema 4.2.2. *Sea* $D \subseteq X$ *un conjunto convexo no-vacío y* $A, B : (D-D) \to \mathcal{P}_0(Y)$ *multifunciones tales que* $0 \in A(x) \cap B(x)$ *para todo* $x \in (D-D)$*. Sea* $K = \overline{\mathrm{rec}}(B)$*, la clausura del cono recesión de* B*. Sea* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *una multifunción que satisface la inclusión de concavidad tipo Jensen*

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right)+A(x-y)\subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{F(x)+F(y)}{2}+B(x-y)\right) \qquad (x,y\in D). \tag{4.12}$$

Supongamos además, que F *tiene las siguientes propiedades:*

I. F *es puntualmente semi-*K*-convexa, i.e.,* $tF(x)+(1-t)F(x)\subseteq \mathrm{cl}(F(x)+K)$ *para todo* $x\in D$ *y para todo* $t\in[0,1]$*;*

II. F *es localmente semi-*K*-acotada inferior.*

Entonces F *satisface la siguiente inclusión*

$$F(tx+(1-t)y)+A^{T}(t,x-y)\subseteq \mathrm{cl}\left(tF(x)+(1-t)F(y)+B^{T}(t,x-y)\right) \tag{4.13}$$

para todo $x,y\in D$ *y* $t\in[0,1]$.

Demostración. Para demostrar la inclusión (5.28), primero vamos a demostrar que para todo $x, y \in D$, existe un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que, para todo $n \geq 0$ y $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} &F(tx + (1-t)y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big) \\ &\quad \subseteq \mathrm{cl}\left(tF(x) + (1-t)F(y) + \frac{1}{2^n}H + K + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\right). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Sean $x, y \in D$ fijos. Para verificar que la inclusión (5.30) es válida, vamos a proceder por inducción sobre n. Para $n = 0$, se debe demostrar que existe un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que, para todo $t \in [0, 1]$

$$F(tx + (1-t)y) \subseteq \mathrm{cl}\big(tF(x) + (1-t)F(y) + H + K\big). \tag{4.15}$$

Como F es semi-K-acotada inferior y el segmento $[x, y]$ es compacto, se tiene que por la Proposición 3.2.33, existe un conjunto acotado $H_0 \subseteq Y$ tal que

$$F(tx + (1-t)y) \subseteq \mathrm{cl}(H_0 + K) \qquad (t \in [0, 1]). \tag{4.16}$$

Por otra parte, como $F(x)$ y $F(y)$ son no-vacíos, podemos escoger dos elementos $u \in F(x)$ y $v \in F(y)$, lo cual implica que

$$0 \in F(x) - u \qquad \text{y} \qquad 0 \in F(y) - v. \tag{4.17}$$

Multiplicando ambas inclusiones en (4.17) por t y $(1-t)$, respectivamente, y sumándolas junto con la inclusión (4.16), se tiene que para $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} F(tx + (1-t)y) &\subseteq tF(x) + (1-t)F(y) - tu - (1-t)v + \mathrm{cl}(H_0 + K) \\ &\subseteq \mathrm{cl}\big(tF(x) + (1-t)F(y) - [u, v] + H_0 + K\big). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la inclusión (4.15) es válida con $H := H_0 - [u, v]$, el cual es obviamente un conjunto acotado.

Ahora, supongamos que (5.30) es válida para n y veamos que también es válida para $n + 1$. Supongamos, al igual que en la demostración anterior que $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y observe que entonces $d_{\mathbb{Z}}(t) = t$. Reescribiendo el lado izquierdo de la inclusión que queremos demostrar se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} &F(tx+(1-t)y) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big) \\ &= F(tx+(1-t)y) + A(2d_{\mathbb{Z}}(t)(x-y)) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big) \\ &= F(tx+(1-t)y) + A\big(2t(x-y)\big) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Además,

$$tx+(1-t)y = \frac{2tx+(1-2t)y+y}{2}$$

y como F satisface la inclusión de tipo Jensen dada en (5.27),

$$\begin{aligned} &F\left(\frac{2tx+(1-2t)y+y}{2}\right) + A\big(2t(x-y)\big) \\ &\qquad \subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{F(2tx+(1-2t)y)+F(y)}{2} + B\big(2t(x-y)\big)\right). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Combinando (4.18) y (4.19), se obtiene

$$\begin{aligned} &F(tx+(1-t)y) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big) \\ &\subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{F(2tx+(1-2t)y)+F(y)}{2} + B\big(2t(x-y)\big)\right) \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big) \qquad (4.20) \\ &\subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{1}{2}\left(F(2tx+(1-2t)y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big)\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{1}{2}F(y) + B\big(2d_{\mathbb{Z}}(t)(x-y)\big)\right). \end{aligned}$$

Por la hipótesis inductiva, sabemos que

$$
\begin{aligned}
&F(2tx+(1-2t)y)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big)\\
&\quad\subseteq \mathrm{cl}\left(2tF(x)+(1-2t)F(y)+\frac{1}{2^n}H+K+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big)\right).
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Insertando (4.21) en (4.20) y usando el hecho de que

$$
(1-2t)F(y)+F(y)\subseteq \mathrm{cl}\big((2-2t)F(y)+K\big)
$$

lo cual es una consecuencia de que F es puntualmente semi-K-convexa, llegamos a la siguiente inclusión

$$
\begin{aligned}
&F(tx+(1-t)y)+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^kt)(x-y)\big)\\
&\subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{cl}\left(2tF(x)+(1-2t)F(y)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big)\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{1}{2^n}H+K+\frac{1}{2}F(y)+B\big(2d_{\mathbb{Z}}(t)(x-y)\big)\right)\\
&\subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{1}{2}\big(2tF(x)+(1-2t)F(y)+F(y)+K\big)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{1}{2^{n+1}}H+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^kt)(x-y)\big)\right)\\
&\subseteq \mathrm{cl}\left(tF(x)+(1-t)F(y)+\frac{1}{2^{n+1}}H+K+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^kt)(x-y)\big)\right).
\end{aligned}
$$

Esto completa la demostración de la inducción y así la inclusión (5.30) es válida para todo $n\geq 0$.

Ahora, vamos a usar la Proposición 1.5.11. Para ello vamos a definir las sucesiones

$$
\begin{aligned}
A_n &:= F(tx+(1-t)y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big),\\
B_n &:= tF(x)+(1-t)F(y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big),\\
\varepsilon_n &= \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}
$$

para $t \in [0,1]$ fijo.

Por lo tanto, la inclusión (5.30), con las sucesiones $(A_n), (B_n)$ y (ε_n) así definidas, es equivalente a la inclusión (1.7). Así, por la Proposición 1.5.11, se sigue lo siguiente

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} F(tx+(1-t)y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\right)\\
&\qquad\qquad \subseteq \operatorname{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} tF(x)+(1-t)F(y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\right).
\end{aligned}
$$

De manera similar a como se hizo en la prueba del Teorema 4.1.1, la relación anterior implica la inclusión que deseamos probar. □

4.3. Consecuencias de los teoremas previos.

Tomando multifunciones particulares A, B y usando la Proposición 3.5.52, vamos a establecer algunas consecuencias importantes de los dos teoremas que acabamos de demostrar. Los siguientes corolarios resaltan la manera en que los resultados mencionados en la introducción están relacionados de manera directa con nuestros resultados.

En los siguientes cuatro corolarios supondremos que $D \subseteq X$ es un conjunto convexo y no-vacío, $K \subseteq Y$ es un cono convexo y cerrado, $S_0 \subseteq Y$ es un conjunto convexo que contiene a 0 y $\varphi : (D-D) \to \mathbb{R}_+$ es una función localmente acotada superior y no-negativa. Note que por la convexidad de D se tiene que el conjunto $(D-D)$ es estrellado, por lo tanto la Proposición 3.5.52 puede ser aplicada.

Los primeros dos corolarios tratan sobre multifunciones fuertemente y aproximadamente K-Jensen convexas respectivamente.

Corolario 4.3.3. *Supongamos que* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *es una multifunción puntualmente semi-*K*-acotada inferior y localmente débil-semi-*K*-acotada superior que satisface*

$$\frac{F(x)+F(y)}{2} \subseteq \mathrm{cl}\left(F\left(\frac{x+y}{2}\right) + K + \varphi(x-y)S_0\right) \tag{4.22}$$

para todo $x, y \in D$. *Entonces*

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq \mathrm{cl}\left(F(tx+(1-t)y) + K + \varphi^T(t, x-y)S_0\right) \tag{4.23}$$

para todo $x, y \in D$ *y para todo* $t \in [0,1]$.

Demostración. Para cada $u \in D - D$, definamos las multifunciones $A(u) = 0$ y $B(u) = K + \varphi(u)S_0$. Ahora bien, por definición se tiene que para todo $u \in D - D$

$$\mathrm{rec}(B(u)) = \{y \in Y \,|\, ty + B(u) \subseteq B(u), \text{ para todo } t \geq 0\}$$

y por lo tanto, si $y \in K$, entonces

$$ty + B(u) = ty + K + \varphi(u)S_0 \subseteq K + \varphi(u)S_0 = B(u).$$

Esto significa que $K \subseteq \mathrm{rec}(B(u))$ para todo $u \in D - D$ y en consecuencia $K \subseteq \overline{\mathrm{rec}}(B)$. Luego, F es puntualmente semi-$\overline{\mathrm{rec}}(B)$-acotada inferior y localmente débil-semi-$\overline{\mathrm{rec}}(B)$-acotada inferior. Aplicando el Teorema 4.1.1, se tiene que para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0,1]$

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq \mathrm{cl}\left(F(tx+(1-t)y) + B^T(t, x-y)\right).$$

Además, por la Proposición 3.5.52 se obtiene que para $t \in [0,1]$ y $x, y \in D$

$$B^T(t, x-y) = \mathrm{cl}(K + \varphi^T(t, x-y)).$$

Esto completa la demostración. $\square$

Corolario 4.3.4. *Supongamos que* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *es una multifunción puntualmente semi-*K*-acotada inferior y localmente débil-semi-*K*-acotada superior que satisface*

$$\frac{F(x)+F(y)}{2} + \varphi(x-y)S_0 \subseteq \mathrm{cl}\left(F\left(\frac{x+y}{2}\right) + K\right) \tag{4.24}$$

para todo $x, y \in D$. *Entonces*

$$tF(x) + (1-t)F(y) + \varphi^T(t, x-y)S_0 \subseteq \mathrm{cl}\left(F(tx + (1-t)y) + K\right) \tag{4.25}$$

para todo $x, y \in D$ *y para todo* $t \in [0, 1]$.

Demostración. La demostración de este resultado es completamente análoga a la demostración anterior. Basta considerar $A(u) = \varphi(x-y)S_0$ y $B(u) = K$ para $u \in D - D$ y proceder de la misma manera que en la demostración anterior. □

Los siguientes dos corolarios tratan sobre multifunciones fuertemente y aproximadamente K-Jensen cóncavas respectivamente y sus demostraciones son similares a la demostración de los Corolarios 5.2.3 y 5.2.4 por lo cual serán omitidas.

Corolario 4.3.5. *Supongamos que* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *es una multifunción puntualmente semi-*K*-convexa y localmente semi-*K*-acotada inferior que satisface*

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{F(x)+F(y)}{2} + K + \varphi(x-y)S_0\right) \tag{4.26}$$

para todo $x, y \in D$. *Entonces*

$$F(tx + (1-t)y) \subseteq \mathrm{cl}\left(tF(x) + (1-t)F(y) + K + \varphi^T(t, x-y)S_0\right) \tag{4.27}$$

para todo $x, y \in D$ *y para todo* $t \in [0, 1]$.

Corolario 4.3.6. *Supongamos que* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *es una multifunción puntualmente semi-*K*-convexa y localmente semi-*K*-acotada inferior que satisface*

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) + \varphi(x-y)S_0 \subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{F(x)+F(y)}{2} + K\right) \tag{4.28}$$

para todo $x, y \in D$. *Entonces*

$$F(tx + (1-t)y) + \varphi^T(t, x-y)S_0 \subseteq \mathrm{cl}\left(tF(x) + (1-t)F(y) + K\right) \tag{4.29}$$

para todo $x, y \in D$ *y para todo* $t \in [0, 1]$.

Capítulo 5

Término de error de tipo Takagi-Tabor.

En el capítulo 2 de esta monografía, mencionamos algunos de los resultados obtenidos por distintos autores que están relacionados con la teoría de convexidad aproximada. En este capítulo, se pretende construir las bases para obtener un resultado análogo al Teorema 2.3.17 en el contexto de las multifunciones. En consecuencia, vamos a introducir una nueva transformación: La transformación de Takagi-Tabor para una multifunción.

5.1. Tranformación de Takagi-Tabor para una multifunción

Supongamos que $D \subseteq X$ es un conjunto estrellado y consideremos una multifunción S definida en D a valores en $\mathcal{P}_0(Y)$.

Definición 5.1.1. *La transformación de Takagi-Tabor de* S*, es la multifunción*

$$S^{\perp} : \mathbb{R} \times D \to \mathcal{P}_0(Y)$$

definida por

$$S^{\perp}(t, x) := \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t) S\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) \qquad ((t, x) \in \mathbb{R} \times D), \tag{5.1}$$

donde, $d_{\mathbb{Z}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es la función definida en* (3.17).

En vista de que la función $d_{\mathbb{Z}}$ se anula en $\mathbb{Z}$, es inmediato ver que $S^{\perp}(t,x) = \{0\}$ para todo $(t,x) \in \mathbb{Z} \times D$.

En el siguiente lemma, estableceremos la relación entre una multifunción y su tranformación de Takagi-Tabor, así como, la relación entre los conos recesión asociados.

Lema 5.1.2. *Sean* $D \subseteq X$ *un conjunto estrellado y* $S : D \to \mathcal{P}_0(Y)$. *Entonces,*

$$S^{\perp}\big(\tfrac{1}{2}, x)\big) = \mathrm{cl}(S(x)) \qquad (x \in D) \tag{5.2}$$

y

$$\overline{\mathrm{rec}}\, S \subseteq \mathrm{rec}\left(S^{\perp}(t,x)\right) \qquad ((t,x) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \times D). \tag{5.3}$$

Demostración. Observe que $d_{\mathbb{Z}}\big(\frac{1}{2}\big) = \frac{1}{2}$ y $d_{\mathbb{Z}}\big(2^k \cdot \frac{1}{2}\big) = 0$ para $k \in \mathbb{N}$. Así

$$S^{\perp}\big(\tfrac{1}{2}, x\big) = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}\Big(\frac{2^k}{2}\Big) S\Big(\frac{x}{2^k}\Big)\right) = \mathrm{cl}(S(x))$$

para todo $x \in D$.

Para la demostración de (5.3), denotemos por $K := \mathrm{rec}\, S$. Entonces, para todo $x \in D$, tenemos lo siguiente

$$S(x) + K \subseteq S(x).$$

Sea $(t,x) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \times D$ arbitrario. Usando la inclusión anterior y $d_{\mathbb{Z}}(t) > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t) S\Big(\frac{x}{2^k}\Big)\right) + K &= \sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)\Big(S\Big(\frac{x}{2^k}\Big) + K\Big) \\ &\subseteq \sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t) S\Big(\frac{x}{2^k}\Big) \subseteq S^{\perp}(t,x). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t) S\Big(\frac{x}{2^k}\Big)\right) + K \subseteq S^{\perp}(t,x),$$

lo cual implica que

$$S^{\perp}(t,x) + \mathrm{cl}(K) \subseteq S^{\perp}(t,x).$$

Esto completa la demostración de (5.3). $\square$

El siguiente resultado establece una fórmula para la transformación de Takagi-Tabor de una multifunción que se contruye como el producto de una función escalar no-negativa y un subconjunto de Y.

Proposición 5.1.3. *Sean* $D \subseteq X$ *un conjunto estrellado,* $K \subseteq Y$ *un cono convexo y* $S_0 \subseteq Y$ *un conjunto semi-*K*-convexo y semi-*K*-estrellado. Sea* $\varphi : D \to \mathbb{R}_+$ *una función no-negativa tal que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi\Big(\frac{x}{2^n}\Big) < \infty \qquad (x \in D). \tag{5.4}$$

Definamos $S : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *por* $S(x) := \varphi(x)S_0 + K$*. Entonces*

$$S^{\perp}(t,x) = \mathrm{cl}\left(\varphi^{\perp}(t,x)S_0 + K\right) \qquad ((t,x) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \times D), \tag{5.5}$$

donde

$$\varphi^{\perp}(t,x) := \sum_{n=0}^{\infty} 2d_{\mathbb{Z}}(2^n t)\varphi\Big(\frac{x}{2^n}\Big) \qquad ((t,x) \in \mathbb{R} \times D). \tag{5.6}$$

Demostración. Usando la condición de convergencia (5.4) y la estimación $0 \le 2d_{\mathbb{Z}} \le 1$, se sigue que la serie en (5.6) converge uniformemente en t y en consecuencia, para todo $x \in D$, la aplicación $t \mapsto \varphi^{\perp}(t,x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Para demostrar (5.5), fijemos $(t,x) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \times D$. Entonces, $d_{\mathbb{Z}}(t) > 0$. Si, para un elemento $x \in D$, tenemos $\varphi^{\perp}(t,x) = 0$, entonces, (como φ es no-negativa) se sigue que $d_{\mathbb{Z}}(2^n t)\varphi\big(\frac{x}{2^n}\big) = 0$ para todo $n \ge 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
S^{\perp}(t,x) &= \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)\Big(\varphi\Big(\frac{x}{2^k}\Big)S_0 + K\Big)\right) \\
&= \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \Big(\Big(\sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)\varphi\Big(\frac{x}{2^k}\Big)S_0\Big) + K\Big)\right) \\
&= \mathrm{cl}(K) = \mathrm{cl}\left(\varphi^{\perp}(t,x)S_0 + K\right),
\end{aligned}$$

lo que muestra la validez de (5.5) en este caso.

Por lo tanto, de aqui en adelante, también podemos asumir que $x \in D$ se elige de tal manera que $\varphi^{\perp}(t,x) \neq 0$.

Usando que S_0 es semi-K-convexo y semi-K-estrellado, tenemos, para todo $t_0, \dots, t_n \geq 0$ y $t_0 + \cdots + t_n \leq t$, que

$$t_0 S_0 + \cdots + t_n S_0 \subseteq \mathrm{cl}(tS_0 + K). \tag{5.7}$$

De hecho, si $t_1 = \cdots = t_n = t = 0$, entonces, (5.7) es equivalente a la inclusión trivial $0 \in \mathrm{cl}(K)$. Si $t_1 = \cdots = t_n = 0 < t$, entonces (5.7) se reduce a $0 \in t\,\mathrm{cl}(S_0 + K)$, la cual es una consecuencia de la propiedad de S_0 de ser semi-K-estrellado. Finalmente, si $t_0 + \cdots + t_n > 0$, entonces usando que S_0 is semi-K-convexo y semi-K-estrellado, obtenemos

$$\begin{aligned}
t_0 S_0 + \cdots + t_n S_0 &= (t_0 + \cdots + t_n)\Big(\frac{t_0}{t_0 + \cdots + t_n} S_0 + \cdots + \frac{t_n}{t_0 + \cdots + t_n} S_0\Big) \\
&\subseteq (t_0 + \cdots + t_n)\,\mathrm{cl}(S_0 + K) = \mathrm{cl}((t_0 + \cdots + t_n) S_0 + K) \\
&= \mathrm{cl}\left(t\frac{t_0 + \cdots + t_n}{t} S_0 + K\right) \subseteq \mathrm{cl}(t\,\mathrm{cl}(S_0 + K) + K) = \mathrm{cl}(tS_0 + K).
\end{aligned}$$

Para completar la demostración de (5.5) en el caso general, verificaremos primero la inclusión $\subseteq$. Aplicando (5.7), para todo $n \geq 0$ obtenemos

$$\sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)\varphi\Big(\frac{x}{2^k}\Big) S_0 \subseteq \mathrm{cl}\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)\varphi\Big(\frac{x}{2^k}\Big)\right) S_0 + K\right) = \mathrm{cl}\left(\varphi^{\perp}(t, x) S_0 + K\right).$$

Por lo tanto (usando también $d_{\mathbb{Z}}(t) > 0$),

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)\Big(\varphi\Big(\frac{x}{2^k}\Big) S_0 + K\Big) &\subseteq \left(\sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)\varphi\Big(\frac{x}{2^k}\Big) S_0\right) + K \\
&\subseteq \mathrm{cl}\left(\varphi^{\perp}(t, x) S_0 + K\right) + K = \mathrm{cl}\left(\varphi^{\perp}(t, x) S_0 + K\right).
\end{aligned}$$

Como esta última inclusión es válida para todo $n \geq 0$, la inclusión deseada se sigue de inmediato.

Para la inclusión opuesta, en vista de que $\varphi^{\perp}(t, x) \neq 0$, podemos escoger n_0 tal que

$d_{\mathbb{Z}}(2^{n_0}t)\varphi\left(\frac{x}{2^{n_0}}\right) > 0$. Ahora observemos que, para todo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)\varphi\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)S_0 + K &= \left(\sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)\varphi\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)(S_0 + K)\\ &\subseteq \sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)\left(\varphi\left(\frac{x}{2^k}\right)S_0 + \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right)K\right) \subseteq \sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)\left(\varphi\left(\frac{x}{2^k}\right)S_0 + \mathrm{cl}(K)\right)\\ &\subseteq \mathrm{cl}\left(\sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)\left(\varphi\left(\frac{x}{2^k}\right)S_0 + K\right)\right) \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\ell} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)S\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = S^{\perp}(t,x).\end{aligned}$$

Sea $u \in K$ y $v \in S_0$. Entonces, la inclusión anterior nos lleva a que para todo $n \geq n_0$,

$$y_n := \sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)\varphi\left(\frac{x}{2^k}\right)v + u \in S^{\perp}(t,x).$$

El lado derecho es un conjunto cerrado, y en consecuencia, el límite de la suceción (y_n) también estará en $S^{\perp}(t,x)$. Por lo tanto, para todo $u \in K$ y $v \in S_0$,

$$\varphi^{\perp}(t,x)v + u = \sum_{k=0}^{\infty} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)\varphi\left(\frac{x}{2^k}\right)v + u = \lim_{n\to\infty} y_n \in S^{\perp}(t,x).$$

lo que implica que

$$\varphi^{\perp}(t,x)S_0 + K \subseteq S^{\perp}(t,x).$$

Esto completa la demostración de la inclusión $\supseteq$ en (5.5). □

Corolario 5.1.4. *Sean* X *un espacio normado,* $D \subseteq X$ *un conjunto estrellado,* $K \subseteq Y$ *un cono convexo,* $S_0 \subseteq Y$ *un conjunto semi-*K*-convexo que contiene al* $0 \in Y$ *y* $\alpha > 0$. *Definamos,* $S : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *mediante* $S(x) := \|x\|^{\alpha}S_0 + K$. *Entonces,*

$$S^{\perp}(t,x) = \mathrm{cl}\left(\tau_{\alpha}(t)\|x\|^{\alpha}S_0 + K\right) \qquad ((t,x) \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}) \times D), \tag{5.8}$$

donde $\tau_{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *esta definida por*

$$\tau_{\alpha}(t) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{1-\alpha n}d_{\mathbb{Z}}(2^n t) \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{5.9}$$

Demostración. Para demostrar nuestra afirmación, podemos aplicar la Proposición 5.1.3 con la función φ definida por $\varphi(x) := \|x\|^\alpha$. Observe que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi\Big(\frac{x}{2^n}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x\|^\alpha}{2^{\alpha n}} = \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 1}\|x\|^\alpha < \infty \qquad (x \in D)$$

y

$$\begin{aligned}\varphi^{\perp}(t,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2d_{\mathbb{Z}}(2^n t)\varphi\Big(\frac{x}{2^n}\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2d_{\mathbb{Z}}(2^n t)\frac{\|x\|^\alpha}{2^{\alpha n}} = \tau_\alpha(t)\|x\|^\alpha \qquad ((t,x) \in \mathbb{R} \times D).\end{aligned}$$

Por lo tanto, (5.8) es una consecuencia de la fórmula (5.5) en la Proposición 5.1.3. □

Observación 5.1.5. *Un caso partícular importante es cuando* $\alpha = 1$*, ya que,* $\tau_1(t) = 2T$ *donde* T *es la función de Takagi que definimos en la introducción mediante la fórmula*

$$T(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{\mathbb{Z}}(2^n t)}{2^n} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Observe que τ_α *(para cualquier* $\alpha > 0$*) satisface la ecuación funcional*

$$\tau_\alpha(t) = 2d_{\mathbb{Z}}(t) + \frac{1}{2^\alpha}\tau_\alpha(2t) \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{5.10}$$

Aplicando el teorema del punto fijo de Banach, esta ecuación funcional tiene una única solución en el espacio de Banach de las funciones a valores reales y acotadas definidas sobre la recta real (equipado con la norma del supremo).

El siguiente lema sera útil para demostrar los resultados principales del próximo capítulo relacionados con inclusiones de tipo convexidad y concavidad.

Para su formulación, vamos a introducir una propiedad de convergencia para una sucesión de conjuntos en Y. Dado un cono convexo $K \subseteq Y$ y una sucesión $(S_k) \subseteq Y$, tenemos la siguiente

Definición 5.1.6. *La sucesión* $(S_k) \subseteq Y$, *es* K-*Cauchy en serie si, para todo* $U \in \mathcal{U}(Y)$, *existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que, para todo* $n \geq m$,

$$\sum_{k=m}^{n} S_k \subseteq U + K. \tag{5.11}$$

Lema 5.1.7. *Sea* $K \subseteq Y$ *un cono convexo y sea* (S_k) *una sucesión de subconjuntos no vacíos de* Y *tales que*

(I) *Para todo* $k \geq 0$, *el conjunto* S_k *es semi-*K*-estrellado, y semi-*K*-acotado inferiormente;*

(II) *La sucesión* (S_k) *es* K-*Cauchy en serie.*

Entonces, para todo $U \in \mathcal{U}(Y)$, *existe un número positivo* δ *tal que, para todo* $t, s \in \mathbb{R}$ *con* $|t - s| < \delta$,

$$\mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} d_{\mathbb{Z}}(2^k t)S_k\right) \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} d_{\mathbb{Z}}(2^k s)S_k\right) + U + K. \tag{5.12}$$

Demostración. Sea $U \in \mathcal{U}(Y)$. Entonces, existe $V \in \mathcal{U}(Y)$ tal que $[6]V \subseteq U$.

Primero, vamos a demostrar que existe un número positivo δ tal que, para todo $n \geq 0$ y para todo $t, s \in \mathbb{R}$ con $|t - s| < \delta$, tenemos

$$\sum_{k=0}^{n} d_{\mathbb{Z}}(2^k t)S_k \subseteq \sum_{k=0}^{n} d_{\mathbb{Z}}(2^k s)S_k + [5]V + K. \tag{5.13}$$

Por la hipótesis (ii) existe un entero positivo m tal que, para $n \geq m$, la ecuación (5.11) es válida. Los miembros de la suceción (S_k) son semi-K-acotados inferiormente, y la familia de conjuntos semi-K-acotados inferiormente es cerrada bajo uniones finitas, bajo sumas algebraicas y bajo multiplicación por escalares, por lo tanto, existe un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que

$$\bigcup_{\ell=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{\ell} 2^k S_k \subseteq \mathrm{cl}(H + K) \subseteq H + V + K.$$

Para el conjunto acotado H existe un número positivo $\delta \leq 1$ tal que $\delta H \subseteq V$. Así,

$$\delta\left(\bigcup_{\ell=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{\ell} 2^k S_k\right) \subseteq \delta(H + V + K) \subseteq [2]V + K. \tag{5.14}$$

En vista de la propiedad de Lipschitz que satisface la función $d_{\mathbb{Z}}$, y por la desigualdad $0 \leq d_Z \leq \frac{1}{2}$, para todo $p, q \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$d_{\mathbb{Z}}(p) \leq d_{\mathbb{Z}}(q) + |d_{\mathbb{Z}}(p) - d_{\mathbb{Z}}(q)| \leq d_{\mathbb{Z}}(q) + \text{mín}\left\{1, |p-q|\right\}. \tag{5.15}$$

Para un conjunto semi-K-estrellado S, para $0 \leq c \leq d$ y para todo $W \in \mathcal{U}(Y)$, tenemos

$$cS \subseteq dS + W + K.$$

De hecho, esta inclusión es evidente para $c = d$. Si $c < d$, entonces,

$$cS = d\Big(\frac{c}{d}S\Big) \subseteq d\,\text{cl}(S+K) \subseteq d\Big(S + \frac{1}{d}W + K\Big) = dS + W + K.$$

Sea $n \in N$ y $0 \leq k \leq n$. Escojamos $W \in \mathcal{U}(Y)$ tal que $[n+1]W \subseteq V$. Usando la desigualdad (5.15) y que el conjunto S_k es semi-K-estrellado, para todo $K \geq 0$ y para todo $s, t \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{Z}}(2^k t)S_k &\subseteq \big(d_{\mathbb{Z}}(2^k s) + \text{mín}\left\{1, 2^k|t-s|\right\}\big)S_k + W + K \\ &\subseteq d_{\mathbb{Z}}(2^k s)S_k + \text{mín}\left\{1, 2^k|t-s|\right\}S_k + W + K. \end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{k=0}^{n} d_{\mathbb{Z}}(2^k t)S_k \subseteq \sum_{k=0}^{n} d_{\mathbb{Z}}(2^k s)S_k + \sum_{k=0}^{n} \text{mín}\left\{1, 2^k|t-s|\right\}S_k + V + K. \tag{5.16}$$

Para completar la demostración de (5.13), es suficiente mostrar, para todo $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \text{mín}\left\{1, 2^k|t-s|\right\}S_k \subseteq [4]V + K \tag{5.17}$$

siempre y cuando $|t-s| < \delta$.

Sean $t, s \in \mathbb{R}$ tales que $|t-s| \leq \delta$. Tenemos que $\text{mín}\left\{1, 2^k|t-s|\right\} \leq 1$ y además $\text{mín}\left\{1, 2^k|t-s|\right\} \leq 2^k\delta$ para todo $k \geq 0$. De nuevo, usando que S_k es semi-K-estrellado y las estimaciones (5.11) y (5.14), obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \min\{1, 2^k|t-s|\}S_k &\subseteq \sum_{k=0}^{\min\{n,m-1\}} \left(2^k\delta S_k + W + K\right) + \sum_{k=\min(n+1,m)}^{n} \left(S_k + W + K\right) \\ &\subseteq \delta \sum_{k=0}^{\min\{n,m-1\}} 2^k S_k + [2]V + K \\ &\subseteq \delta\left(\bigcup_{\ell=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{\ell} 2^k S_k\right) + [2]V + K \subseteq [4]V + K.\end{aligned}$$

Esto completa la demostración de (5.17) y por lo tanto (5.13) es válida para todo $n \geq 0$. Aplicando (5.13), para todo $n \geq 0$, se sigue que

$$\sum_{k=0}^{n} d_{\mathbb{Z}}(2^k t)S_k \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\ell} d_{\mathbb{Z}}(2^k s)S_k\right) + [5]V + K.$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} d_{\mathbb{Z}}(2^k t)S_k\right) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} d_{\mathbb{Z}}(2^k t)S_k + V \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\ell} d_{\mathbb{Z}}(2^k s)S_k\right) + U + K.$$

Así, la demostración de la inclusión (5.12) esta completa. □

En el siguiente lema vamos a describir un caso importante en el que la propiedad de K-Cauchy en serie de usa sucesión puede ser establecida.

Lema 5.1.8. *Supongamos que* Y *es un espacio vectorial topológico localmente convexo. Sea* $K \subseteq Y$ *un cono convexo y* $S \subseteq Y$ *un conjunto semi-*K*-acotado inferiormente. Sea* (λ_n) *una sucesión de números no-negativos, tales que la serie* $\sum \lambda_n$ *es convergente. Definamos,* $S_n := \lambda_n S + K$ *para* $n \geq 0$. *Entonces, la sucesión* (S_n) *es* K*-Cauchy en serie.*

Demostración. Como S es semi-K-acotado inferiormente, existe un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que $S \subseteq \mathrm{cl}(H + K)$.

Para demostrar que (S_n) es una suceción de K-Cauchy en serie, vamos a fijar un entorno abierto $U \in \mathcal{U}(Y)$ arbitrario. Ahora, escojamos un abierto convexo $V \in \mathcal{U}(Y)$ tal que $[2]V \subseteq U$ y un número positivo $t > 0$ tal que $tH \subseteq V$.

Por la convergencia de la serie $\sum \lambda_n$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq m$,

$$t_n := \sum_{k=m}^{n} \lambda_k < t.$$

Entonces, para todo $n \geq m$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} S_k = \sum_{k=m}^{n} (\lambda_k S) + K \subseteq \sum_{k=m}^{n} (\lambda_k \, \mathrm{cl}(H+K)) + K \subseteq \mathrm{cl}\left(\sum_{k=m}^{n} (\lambda_k H) + K\right) \\ \subseteq \sum_{k=m}^{n} (\lambda_k H) + V + K \subseteq \sum_{k=m}^{n} \left(\frac{\lambda_k}{t} V\right) + \frac{t - t_n}{t}\{0\} + V + K \subseteq [2]V + K \subseteq U + K.\end{aligned}$$

Esto demuestra que (5.11) se cumple y en consecuencia (S_k) es una sucesión K-Cauchy en serie. □

5.2. Convexidad y concavidad sobre los racionales diádicos.

Los resultados principales de esta sección están contenidos en el siguiente par de teoremas. Denotaremos por $\mathbb{D}$ al conjunto de los números racionales diádicos, i.e., $\mathbb{D}$ consiste en los números de la forma $\frac{k}{2^n}$, donde, $k \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$.

Lema 5.2.1. *Sean $n, \ell \in \mathbb{N}$ dos números naturales arbitrarios. Entonces, para todo $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ se tiene que*

$$d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k \frac{2\ell+1}{2^{n+1}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k \frac{\ell+1}{2^n}\Big) + d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k \frac{\ell}{2^n}\Big)\Big) \tag{5.18}$$

Demostración. Observemos que la fracción $\frac{2\ell+1}{2^{n+1}}$ puede ser representada como

$$\frac{2\ell+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\ell+1}{2^n} + \frac{\ell}{2^n}\Big)$$

Es suficiente demostrar que $d_{\mathbb{Z}}$ es afín en el intervalo $\left[2^k \frac{\ell}{2^n}, 2^k \frac{\ell+1}{2^n}\right]$. Para esto, veremos que el interior de este intervalo no contiene un elemento de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Por el contrario, supongamos

que para algún $j \in \mathbb{Z}$
$$2^k \frac{\ell}{2^n} < \frac{j}{2} < 2^k \frac{\ell+1}{2^n}. \tag{5.19}$$
Por lo tanto $\ell < 2^{n-k-1} j < \ell + 1$, lo que es una contradicción ya que $n-1 \geq k$ y en consecuencia, es falso suponer (5.19).

□

Teorema 5.2.2. *Sea* $D \subseteq X$ *un subconjunto convexo no vacío, y consideremos las multifunciones* $A, B : (D-D) \to \mathcal{P}_0(Y)$ *tales que, los valores de* B *son semi-*K*-convexos, donde* K *representa la clausura del cono recesión asociado a* B. *Sea* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *una multifunción que satisface la siguiente inclusión de convexidad tipo Jensen*
$$\frac{F(x)+F(y)}{2} + A(x-y) \subseteq \mathrm{cl}\left(F\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + B(x-y)\right) \qquad (x, y \in D). \tag{5.20}$$
Entonces para $x, y \in D$ *y para todo* $t \in \mathbb{D} \cap [0,1]$ *se tiene que* F *satisface la siguiente inclusión*
$$\begin{aligned} tF(x) + (1-t)F(y) + \sum_{k=0}^{\infty} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t) A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big) \\ \subseteq \mathrm{cl}\left(F(tx+(1-t)y) + \sum_{k=0}^{\infty} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t) B\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\right) \end{aligned} \tag{5.21}$$
Si además, $0 \in \mathrm{cl}(A(u)+K)$ *para cada* $u \in D-D$*, entonces,*
$$tF(x) + (1-t)F(y) + A^{\perp}(t, x-y) \subseteq \mathrm{cl}\left(F(tx+(1-t)y) + B^{\perp}(t, x-y)\right) \tag{5.22}$$
para todo $x, y \in D$ *y para todo* $t \in \mathbb{D} \cap [0,1]$.

Demostración. Para la demostración de (5.21), primero vamos a demostrar que para todo $x, y \in D$, y para todo par de enteros n, m con $n \geq 1$, $0 \leq m \leq 2^n$, se cumple la siguiente igualdad
$$\begin{aligned} \frac{m}{2^n}F(x) + \Big(1-\frac{m}{2^n}\Big)F(y) + \sum_{k=0}^{n-1} 2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k \frac{m}{2^n}\Big) A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big) \\ \subseteq \mathrm{cl}\left(F\Big(\frac{m}{2^n}x + \Big(1-\frac{m}{2^n}\Big)y\Big) + \sum_{k=0}^{n-1} d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k \frac{m}{2^n}\Big) B\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\right). \end{aligned} \tag{5.23}$$

Fijemos $x, y \in D$ arbitrarios. Para verificar que (5.23) se cumple, vamos a proceder por inducción sobre n. Para $m = 0$ o para $m = 2^n$, la inclusión (5.23) se sigue de inmediato ya que la función $d_{\mathbb{Z}}$ se anula en $\mathbb{Z}$. Así, para $n = 1$, solo es necesario verificar (5.23) para $m = 1$. En ese caso, (5.23) es equivalente a la inclusión de convexidad tipo Jensen en la (5.20). Ahora, supongamos que la inclusión (5.23) se cumple para algún n y demostremos que también es válida para $n+1$. Sea $0 < m < 2^{n+1}$ arbitrario. Si m es par, i.e., $m = 2\ell$ para algún $0 < \ell < 2^n$, entonces, $\frac{m}{2^{n+1}} = \frac{\ell}{2^n}$ y así, el resultado es consecuencia inmediata de la hipótesis inductiva. En vista de esta observación, podemos asumir entonces que m es impar, i.e., $m = 2\ell + 1$ para algún $0 < \ell < 2^n$.

En vista del Lema 5.2.1, se tenemos que para todo $k \in \{0, \ldots, n-1\}$

$$d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k \frac{2\ell+1}{2^{n+1}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k \frac{\ell+1}{2^n}\Big) + d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k \frac{\ell}{2^n}\Big)\Big). \tag{5.24}$$

Ahora bien, usando (5.24) y (5.18) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
&\frac{m}{2^{n+1}}F(x) + \Big(1 - \frac{m}{2^{n+1}}\Big)F(y) + \sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k \frac{m}{2^{n+1}}\Big)A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\\
&\qquad = \frac{2\ell+1}{2^{n+1}}F(x) + \Big(1 - \frac{2\ell+1}{2^{n+1}}\Big)F(y) + \sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k \frac{2\ell+1}{2^{n+1}}\Big)A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\\
&\qquad \subseteq \frac{1}{2}\Big(\frac{\ell+1}{2^n}F(x) + \Big(1 - \frac{\ell+1}{2^n}\Big)F(y)\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{\ell}{2^n}F(x) + \Big(1 - \frac{\ell}{2^n}\Big)F(y)\Big)\\
&\qquad\qquad + \sum_{k=0}^{n-1}\Big(d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k \frac{\ell+1}{2^n}\Big) + d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k \frac{\ell}{2^n}\Big)\Big)A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big) + A\Big(\frac{x-y}{2^n}\Big)\\
&\qquad = \frac{1}{2}\Big(\frac{\ell+1}{2^n}F(x) + \Big(1 - \frac{\ell+1}{2^n}\Big)F(y) + \sum_{k=0}^{n-1} 2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k \frac{\ell+1}{2^n}\Big)A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\Big)\\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\Big(\frac{\ell}{2^n}F(x) + \Big(1 - \frac{\ell}{2^n}\Big)F(y) + \sum_{k=0}^{n-1} 2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k \frac{\ell}{2^n}\Big)A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\Big)\\
&\qquad\qquad + A\Big(\frac{x-y}{2^n}\Big).
\end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis inductiva (5.23) con $m = \ell + 1$ y $m = \ell$, obtenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
&\frac{m}{2^{n+1}}F(x) + \Big(1 - \frac{m}{2^{n+1}}\Big)F(y) + \sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k \frac{m}{2^{n+1}}\Big)A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big) \\
&\qquad \subseteq \frac{1}{2}\,\mathrm{cl}\left(F\Big(\frac{\ell+1}{2^n}x + \Big(1 - \frac{\ell+1}{2^n}\Big)y\Big) + \sum_{k=0}^{n-1} 2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell+1}{2^n}\Big)B\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\right) \\
&\qquad\quad + \frac{1}{2}\,\mathrm{cl}\left(F\Big(\frac{\ell}{2^n}x + \Big(1 - \frac{\ell}{2^n}\Big)y\Big) + \sum_{k=0}^{n-1} 2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell}{2^n}\Big)B\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\right) \\
&\qquad\quad + A\Big(\frac{x-y}{2^n}\Big) \\
&\qquad \subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{1}{2}\left(F\Big(\frac{\ell+1}{2^n}x + \Big(1 - \frac{\ell+1}{2^n}\Big)y\Big) + F\Big(\frac{\ell}{2^n}x + \Big(1 - \frac{\ell}{2^n}\Big)y\Big)\right)\right. \\
&\qquad\quad + \sum_{k=0}^{n-1}\left(d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell+1}{2^n}\Big)B\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big) + d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell}{2^n}\Big)B\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\right) \\
&\qquad\quad \left. + A\Big(\frac{x-y}{2^n}\Big)\right)
\end{aligned} \tag{5.25}
$$

Ahora bien, usando la desigualdad de tipo Jensen (5.20), se sigue que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(F\Big(\frac{\ell+1}{2^n}x + \Big(1 - \frac{\ell+1}{2^n}\Big)y\Big) + F\Big(\frac{\ell}{2^n}x + \Big(1 - \frac{\ell}{2^n}\Big)y\Big)\right) + A\Big(\frac{x-y}{2^n}\Big) \\
&\qquad\qquad \subseteq \mathrm{cl}\left(F\Big(\frac{2\ell+1}{2^{n+1}}x + \Big(1 - \frac{2\ell+1}{2^{n+1}}\Big)y\Big) + B\Big(\frac{x-y}{2^n}\Big)\right).
\end{aligned}
$$

Por otra parte, usando el hecho que los valores de la multifunción B son semi-K-convexos y la ecuación (5.18), obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}\left(d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell+1}{2^n}\Big)B\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big) + d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell}{2^n}\Big)B\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\right) \\
&\qquad \subseteq \mathrm{cl}\left(K + \sum_{k=0}^{n-1}\left(d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell+1}{2^n}\Big) + d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell}{2^n}\Big)\right)B\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\right) \\
&\qquad = \mathrm{cl}\left(K + \sum_{k=0}^{n-1} 2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{2\ell+1}{2^{n+1}}\Big)B\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\right).
\end{aligned}
$$

Combinando las inclusiones anteriores con (5.25) y reemplazando $2\ell+1$ por m, llegamos a

$$\begin{aligned}
&\frac{m}{2^{n+1}}F(x)+\Big(1-\frac{m}{2^{n+1}}\Big)F(y)+\sum_{k=0}^{n}2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{m}{2^{n+1}}\Big)A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\\
&\qquad\subseteq \mathrm{cl}\left(F\Big(\frac{m}{2^{n+1}}x+\Big(1-\frac{m}{2^{n+1}}\Big)y\Big)+B\Big(\frac{x-y}{2^n}\Big)+K\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\sum_{k=0}^{n-1}2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{m}{2^{n+1}}\Big)B\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\right)\\
&\qquad=\mathrm{cl}\left(F\Big(\frac{m}{2^{n+1}}x+\Big(1-\frac{m}{2^{n+1}}\Big)y\Big)+\sum_{k=0}^{n}2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{m}{2^{n+1}}\Big)B\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\right),
\end{aligned}$$

lo que muestra que la tesis también es valida para $n+1$. Esto completa la demostración de la inducción y la primera parte del teorema.

Supongamos ahora, que para todo $u\in D-D$, tenemos $0\in \mathrm{cl}(A(u)+K)$. Para demostrar (5.22), sean $x,y\in D$ y $t\in[0,1]\cap\mathbb{D}$ fijos. Si $t=0$ ó $t=1$, entonces (5.22) se obtiene de inmediato. En el resto de la demostración asumiremos que $t\in(0,1)\cap\mathbb{D}$. Luego,

$$\begin{aligned}
&tF(x)+(1-t)F(y)+A^{\perp}(t,x-y)\\
&\qquad\subseteq \mathrm{cl}\left(tF(x)+(1-t)F(y)+\bigcup_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}2d_{\mathbb{Z}}(2^kt)A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\right)\\
&\qquad\subseteq \mathrm{cl}\left(tF(x)+(1-t)F(y)+\bigcup_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}2d_{\mathbb{Z}}(2^kt)\,\mathrm{cl}\left(A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)+K\right)\right).
\end{aligned}$$

Ahora, como t es un número diádico, existe un número natural $n\in\mathbb{N}$ y un numero impar ℓ tal que $t=\frac{\ell}{2^m}$. Entonces, para $k\geq m$, $d_{\mathbb{Z}}(2^kt)=0$. Además, $0\in\mathrm{cl}\left(A\big(\frac{x-y)}{2^k}\big)+K\right)$ para todo $k\in\{0,\dots,m-1\}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}2d_{\mathbb{Z}}(2^kt)\,\mathrm{cl}\left(A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)+K\right)&=\sum_{k=0}^{m-1}2d_{\mathbb{Z}}(2^kt)\,\mathrm{cl}\left(A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)+K\right)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}2d_{\mathbb{Z}}(2^kt)\,\mathrm{cl}\left(A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)+K\right).
\end{aligned}$$

Usando esta fórmula, la inclusión previa, la primera parte del teorema y $d_{\mathbb{Z}}(t)>0$, obtenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
&tF(x) + (1-t)F(y) + A^{\perp}(t, x-y) \\
&\quad \subseteq \mathrm{cl}\left(tF(x) + (1-t)F(y) + \sum_{k=0}^{\infty} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)\,\mathrm{cl}\left(A\left(\frac{x-y}{2^k}\right) + K\right)\right) \\
&\quad = \mathrm{cl}\left(tF(x) + (1-t)F(y) + \sum_{k=0}^{\infty} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)\left(A\left(\frac{x-y}{2^k}\right) + K\right)\right) \\
&\quad = \mathrm{cl}\left(tF(x) + (1-t)F(y) + \sum_{k=0}^{\infty} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t) A\left(\frac{x-y}{2^k}\right) + \mathrm{rec}(B)\right) \\
&\quad \subseteq \mathrm{cl}\left(F(tx + (1-t)y) + \sum_{k=0}^{\infty} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t) B\left(\frac{x-y}{2^k}\right) + \mathrm{rec}(B)\right) \\
&\quad = \mathrm{cl}\left(F(tx + (1-t)y) + \sum_{k=0}^{\infty} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t) B\left(\frac{x-y}{2^k}\right)\right).
\end{aligned} \tag{5.26}
$$

Por otra parte, tenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t) B\left(\frac{x-y}{2^k}\right) &= \sum_{k=0}^{m-1} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t) B\left(\frac{x-y}{2^k}\right) \\
&\subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t) B\left(\frac{x-y}{2^k}\right)\right) = B^{\perp}(t, x-y),
\end{aligned}
$$

que en combinación con (5.26) implica (5.22) y esto completa la demostración del teorema. □

Para formular los corolarios del teorema previo, postularemos las siguiente hipótesis generales.

(H1) $D \subseteq X$ es un conjunto convexo no-vacío, $K \subseteq Y$ es un cono convexo, no-vacío;

(H2) $S_0 \subseteq Y$ es un conjunto semi-K-convexo y semi-K-estrellado;

(H3) $\varphi : (D - D) \to \mathbb{R}_+$ es una función no-negativa tal que (5.4) se cumple para todo $x \in D - D$.

Note que, por la convexidad de D, el conjunto $(D - D)$ es estrellado, así, podemos aplicar la Proposición 5.1.3.

Los siguientes corolarios son sobre multifunciones K-Jensen aproximadamente y fuertemente convexas respectivamente.

Corolario 5.2.3. *Asumamos que (H1), (H2) y (H3) se cumplen y* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *es una multifunción que satisface lo siguiente*

$$\frac{F(x)+F(y)}{2} \subseteq \mathrm{cl}\left(F\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + \varphi(x-y)S_0 + K\right) \qquad (x, y \in D).$$

Entonces, para todo $x, y \in D$, $t \in \mathbb{D} \cap [0,1]$*, se tiene que*

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq \mathrm{cl}\left(F(tx + (1-t)y) + \varphi^{\perp}(t, x-y)S_0 + K\right)$$

Corolario 5.2.4. *Asumamos que (H1), (H2) y (H3) se cumplen y* $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *es una multifunción que satisface lo siguiente*

$$\frac{F(x)+F(y)}{2} + \varphi(x-y)S_0 \subseteq \mathrm{cl}\left(F\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + K\right) \qquad (x, y \in D).$$

Entonces, para todo $x, y \in D$, $t \in \mathbb{D} \cap [0,1]$*, se tiene que*

$$tF(x) + (1-t)F(y) + \varphi^{\perp}(t, x-y)S_0 \subseteq \mathrm{cl}\left(F(tx + (1-t)y) + K\right)$$

Demostración de los corolarios 5.2.3 y 5.2.4. Usando la segunda parte del Teorema 5.2.2 con las multifunciones $A(u) = \{0\}$ y $B(u) = \varphi(u)S_0 + K$ (resp., $A(u) = \varphi(u)S_0$ y $B(u) = K$) y aplicando la Proposición 5.1.3, obtenemos Corolario 5.2.3 (resp., Corolario 5.2.4). Note que, en ambos casos, $0 \in \mathrm{cl}(A(u) + K)$ para todo $u \in D - D$. □

El siguiente resultado es concerniente al caso de inclusiones de tipo concavidad.

Teorema 5.2.5. *Sean* $D \subseteq X$ *un subconjunto no vacío y* $A, B : (D - D) \to \mathcal{P}_0(Y)$ *tales que los valores de la multifunción* B *son semi-*K*-convexos, donde* $K := \overline{\mathrm{rec}}(B)$*. Sea* F *una* *multifunción definida en* D *a valores en* $\mathcal{P}_0(Y)$ *que satisface la inclusión de tipo Jensen para concavidad*

$$F\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + A(x-y) \subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{F(x)+F(y)}{2} + B(x-y)\right) \qquad (x,y \in D), \tag{5.27}$$

y que tiene valores semi-K *convexos, i.e.,* $F(x)$ *es semi-*K*-convexo, para todo* $x \in D$*. Entonces,* F *satisface la inclusión de tipo convexidad, para todo* $x, y \in D$, $t \in \mathbb{D} \cap [0,1]$

$$\begin{aligned} &F(tx+(1-t)y) + \sum_{k=0}^{\infty} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t) A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big) \\ &\qquad \subseteq \mathrm{cl}\left(tF(x)+(1-t)F(y) + \sum_{k=0}^{\infty} 2d_{\mathbb{Z}}(2^k t) B\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\right) \end{aligned} \tag{5.28}$$

Si adicionalmente, $0 \in \mathrm{cl}(A(u)+K)$ *para todo* $u \in D-D$*, entonces para todo* $x, y \in D$, $t \in \mathbb{D} \cap [0,1]$

$$F(tx+(1-t)y) + A^{\perp}(t, x-y) \subseteq \mathrm{cl}\left(tF(x)+(1-t)F(y) + B^{\perp}(t, x-y)\right) \tag{5.29}$$

Demostración. Para la demostración de (5.28), vamos a demostrar que, para todo $x, y \in D$, y para todo par de enteros n, m con $n \geq 1$, $0 \leq m \leq 2^n$,

$$\begin{aligned} &F\Big(\frac{m}{2^n}x + \Big(1-\frac{m}{2^n}\Big)y\Big) + \sum_{k=0}^{n-1} 2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{m}{2^n}\Big) A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big) \\ &\qquad \subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{m}{2^n}F(x) + \Big(1-\frac{m}{2^n}\Big)F(y) + \sum_{k=0}^{n-1} 2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{m}{2^n}\Big) B\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\right). \end{aligned} \tag{5.30}$$

Fijemos $x, y \in D$ arbitrarios. Para verificar que (5.30) se cumple, vamos a proceder por inducción sobre n.

Para $n = 1$, tenemos que $0 \leq m \leq 2$, pero si $m = 0$ o $m = 2$ entonces, la ecuación (5.30) se sigue de inmediato. Así, solo debemos verificar que (5.30) es válida para $m = 1$, lo cual es sencillo ya que para $n = m = 1$, (5.30) es identica a (5.27).

Ahora, supongamos que (5.30) es válida para $n \geq 1$ y $0 \leq m \leq 2^n$, y demostremos que también es válida para $n+1$ y $0 \leq m \leq 2^{n+1}$. Al igual que procedimos en la demostración para la inclusión de tipo convexidad, será suficiente considerar el caso cuando m tiene la forma $m = 2\ell + 1$, para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Con estas definiciones, podemos comenzar nuestra demostración para $n+1$ usando las relaciones (5.24) y (5.18), para obtener

$$\begin{aligned}
&F\Big(\frac{2\ell+1}{2^{n+1}}x + \Big(1 - \frac{2\ell+1}{2^{n+1}}\Big)y\Big) + \sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{2\ell+1}{2^{n+1}}\Big)A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\\
&\quad = F\left(\frac{1}{2}\left(\Big(\frac{\ell}{2^n} + \frac{\ell+1}{2^n}\Big)x + \Big(2 - \frac{\ell+1}{2^n} - \frac{\ell}{2^n}\Big)y\right)\right)\\
&\qquad + \sum_{k=0}^{n} 2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{2\ell+1}{2^{n+1}}\Big)A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\\
&\quad = F\left(\frac{1}{2}\left[\frac{\ell}{2^n}x + \Big(1 - \frac{\ell}{2^n}\Big)y + \frac{\ell+1}{2^n}x + \Big(1 - \frac{\ell+1}{2^n}\Big)y\right]\right) + A\Big(\frac{x-y}{2^n}\Big)\\
&\qquad + \sum_{k=0}^{n-1}\left[d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell+1}{2^n}\Big) + d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell}{2^n}\Big)\right]A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\\
&\quad \subseteq F\left(\frac{1}{2}\left[\frac{\ell}{2^n}x + \Big(1 - \frac{\ell}{2^n}\Big)y + \frac{\ell+1}{2^n}x + \Big(1 - \frac{\ell+1}{2^n}\Big)y\right]\right) + A\Big(\frac{x-y}{2^n}\Big)\\
&\qquad + \sum_{k=0}^{n-1} d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell}{2^n}\Big)A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big) + \sum_{k=0}^{n-1} d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell+1}{2^n}\Big)A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big).
\end{aligned}$$

Por la Jensen concavidad de F, tenemos que

$$\begin{aligned}
&F\left(\frac{1}{2}\left[\frac{\ell}{2^n}x + \Big(1 - \frac{\ell}{2^n}\Big)y + \frac{\ell+1}{2^n}x + \Big(1 - \frac{\ell+1}{2^n}\Big)y\right]\right) + A\Big(\frac{x-y}{2^n}\Big)\\
&\quad \subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{1}{2}F\Big(\frac{\ell}{2^n}x + \Big(1 - \frac{\ell}{2^n}\Big)y\Big) + \frac{1}{2}F\Big(\frac{\ell+1}{2^n}x + \Big(1 - \frac{\ell+1}{2^n}\Big)y\Big) + B\Big(\frac{x-y}{2^n}\Big)\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la inclusión anterior, obtenemos las siguientes inclusiones

$$
\begin{aligned}
&F\Big(\frac{2\ell+1}{2^{n+1}}x+\Big(1-\frac{2\ell+1}{2^{n+1}}\Big)y\Big)+\sum_{k=0}^{n}2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{2\ell+1}{2^{n+1}}\Big)A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\\
&\quad\subseteq \operatorname{cl}\left(\frac{1}{2}F\Big(\frac{\ell}{2^n}x+\Big(1-\frac{\ell}{2^n}\Big)y\Big)+\frac{1}{2}F\Big(\frac{\ell+1}{2^n}x+\Big(1-\frac{\ell+1}{2^n}\Big)y\Big)+B\Big(\frac{x-y}{2^n}\Big)\right)\\
&\qquad+\sum_{k=0}^{n-1}d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell}{2^n}\Big)A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)+\sum_{k=0}^{n-1}d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell+1}{2^n}\Big)A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\\
&\quad\subseteq \operatorname{cl}\left(\frac{1}{2}\Big[F\Big(\frac{\ell}{2^n}x+\Big(1-\frac{\ell}{2^n}\Big)y\Big)+\sum_{k=0}^{n-1}2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell}{2^n}\Big)A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\right.\\
&\qquad\left.+F\Big(\frac{\ell+1}{2^n}x+\Big(1-\frac{\ell+1}{2^n}\Big)y\Big)+\sum_{k=0}^{n-1}2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell+1}{2^n}\Big)A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\Big]+B\Big(\frac{x-y}{2^n}\Big)\right).
\end{aligned}
$$

Nuestra hipótesis inductiva para $m=\ell$ y $m=\ell+1$ nos permiten escribir las siguientes relaciones

$$
\begin{aligned}
&F\Big(\frac{\ell}{2^n}x+\Big(1-\frac{\ell}{2^n}\Big)y\Big)+\sum_{k=0}^{n-1}2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell}{2^n}\Big)A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\\
&\qquad\subseteq \operatorname{cl}\left(\frac{\ell}{2^n}F(x)+\Big(1-\frac{\ell}{2^n}\Big)F(y)+\sum_{k=0}^{n-1}2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell}{2^n}\Big)B\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\right),
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

y

$$
\begin{aligned}
&F\Big(\frac{\ell+1}{2^n}x+\Big(1-\frac{\ell+1}{2^n}\Big)y\Big)+\sum_{k=0}^{n-1}2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell+1}{2^n}\Big)A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\\
&\qquad\subseteq \operatorname{cl}\left(\frac{\ell+1}{2^n}F(x)+\Big(1-\frac{\ell+1}{2^n}\Big)F(y)+\sum_{k=0}^{n-1}2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell+1}{2^n}\Big)B\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\right).
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

Así, por (5.18), y usando que F y B tienen valores semi-K-convexos y usando (5.31) y (5.32), llegamos a lo siguiente

$$
\begin{aligned}
&F\Big(\frac{2\ell+1}{2^{n+1}}x+\Big(1-\frac{2\ell+1}{2^{n+1}}\Big)y\Big)+\sum_{k=0}^{n}2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{2\ell+1}{2^{n+1}}\Big)A\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\\
&\subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{1}{2}\left[\frac{\ell}{2^n}F(x)+\Big(1-\frac{\ell}{2^n}\Big)F(y)+\sum_{k=0}^{n-1}2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell}{2^n}\Big)B\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac{\ell+1}{2^n}F(x)+\Big(1-\frac{\ell+1}{2^n}\Big)F(y)+\sum_{k=0}^{n-1}2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell+1}{2^n}\Big)B\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\right]+B\Big(\frac{x-y}{2^n}\Big)\right)\\
&\subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{1}{2}\left[\frac{2\ell+1}{2^n}F(x)+\Big(2-\frac{2\ell+1}{2^n}\Big)F(y)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\sum_{k=0}^{n-1}2\Big(d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell}{2^n}\Big)+d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{\ell+1}{2^n}\Big)\Big)B\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\right]+K+B\Big(\frac{x-y}{2^n}\Big)\right)\\
&=\mathrm{cl}\left(\frac{2\ell+1}{2^{n+1}}F(x)+\Big(1-\frac{2\ell+1}{2^{n+1}}\Big)F(y)+\sum_{k=0}^{n}2d_{\mathbb{Z}}\Big(2^k\frac{2\ell+1}{2^{n+1}}\Big)B\Big(\frac{x-y}{2^k}\Big)\right),
\end{aligned}
$$

Lo cual muestra que nuestra afirmación también es válida para $n+1$. Así la inducción, y en consecuencia, la demostración del teorema estan completas.

□

Los siguientes dos corolarios son acerca de K-Jensen concavidad. El primero, con respecto a concavidad aproximada y el segundo con respecto a concavidad fuerte.

Corolario 5.2.6. *Supongamos que (H1), (H2) y (H3) se cumplen y sea* $F: D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *una multifunción con valores semi-*K*-convexos que satisface*

$$F\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \subseteq \mathrm{cl}\Big(\frac{F(x)+F(y)}{2}+\varphi(x-y)S_0+K\Big) \qquad (x,y\in D).$$

Entonces, para todo $x,y\in D$, $t\in\mathbb{D}\cap[0,1]$, *se tiene que*

$$F(tx+(1-t)y)\subseteq \mathrm{cl}\big(tF(x)+(1-t)F(y)+\varphi^{\perp}(t,x-y)S_0+K\big)$$

Corolario 5.2.7. *Supongamos que (H1), (H2) y (H3) se cumplen y sea* $F: D \to \mathcal{P}_0(Y)$ *una multifunción con valores semi-*K*-convexos que satisface*

$$F\Big(\frac{x+y}{2}\Big)+\varphi(x-y)S_0 \subseteq \mathrm{cl}\Big(\frac{F(x)+F(y)}{2}+K\Big) \qquad (x,y\in D).$$

Entonces, para todo $x, y \in D$, $t \in \mathbb{D} \cap [0, 1]$, *se tiene que*

$$F(tx + (1-t)y) + \varphi^{\perp}(t, x-y)S_0 \subseteq \text{cl}\left(tF(x) + (1-t)F(y) + K\right)$$

Demostraciones de los corolarios 5.2.6 y 5.2.7. Usando el Teorema 5.2.5 con las multifunciones $A(u) = \{0\}$ y $B(u) = \varphi(u)S_0 + K$, (resp., $A(u) = \varphi(u)S_0$ y $B(u) = K$) y aplicando la Proposición 5.1.3, obtenemos Corolario 5.2.6 (resp., Corolario 5.2.7).

En ambos casos, tenemos que $K \subseteq \overline{\text{rec}}(B)$, y en consecuencia el hecho de que los valores de F son semi-K-convexos, implica que estos valores también son semi-$\overline{\text{rec}}(B)$-convexos. $\square$

Conclusiones.

Los resultados mencionados en los Capítulos 2 y 3 se pueden obtener como consecuencia directa de los corolarios obtenidos a partir de los Teoremas 4.1.1 y 4.2.2. En el caso de funciones a valores reales, el Teorema de Bernstein–Doetsch [4], puede ser obtenido a partir del Corolario 5.2.3 si consideramos $Y := \mathbb{R}$, $K := \mathbb{R}_+$, $S_0 := [-1, 0]$, $F(x) := \{f(x)\}$, y $\varphi(x) := 0$. En este caso, (4.22) es equivalente a (2.2) y (4.23) es equivalente a (2.1).

En general para una función positiva arbitraria φ se tiene la siguiente fórmula

$$\varphi^T(t, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^n t)u\big) \qquad (t \in \mathbb{R},\ x \in D),$$

la cual coincide con la expresión que aparece del lado derecho en la desigualdad (2.13) cuando $\varphi(u) = \alpha(\|u\|)$. Esto significa que el Corolario 5.2.3 generaliza al Teorema 2.3.16 y por lo tanto generaliza también a los Teoremas 2.3.13 y 2.3.9.

Los resultados de Averna, Cardinali, Nikodem, Papalini [2, 8, 36, 37, 38, 39, 40] y por Borwein [7] que están relacionados a K-Jensen convexidad/concavidad para multifunciones y funciones vectoriales también pueden ser obtenidos directamente. Numerosos resultados obtenidos para Jensen convexidad aproximada por Makó and Páles [28, 32] y por Mureńko, Ja. Tabor, Jó. Tabor, y Żoldak [34, 46, 47, 48, 49] son generalizados por los Corolarios 5.2.3–5.2.7. De manera similar, usando la forma explícita de la función T_2 descrita en Observación 5.1.5 y el Corolario 5.2.4, se pueden obtener de manera simple los resultados de Azócar et. al. [3] y Leiva et. al. [27] que están relacionados con midconvexidad fuerte.

Bibliografía

[1] Jean Pierre Aubin and Hâeláene Frankowska, *Set-valued analysis*, Springer, 2009.

[2] A. Averna and T. Cardinali, *On the concepts of* K*-convexity [*K*-concavity] and* K*-convexity* [*K*-concavity*]*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **16** (1990), no. 1-2, 311–330. MR 1105752 (92h:26031)

[3] A. Azócar, J. Giménez, K. Nikodem, and J. L. Sánchez, *On strongly midconvex functions*, Opuscula Math. **31** (2011), no. 1, 15–26.

[4] F. Bernstein and G. Doetsch, *Zur Theorie der konvexen Funktionen*, Math. Ann. **76** (1915), no. 4, 514–526. MR 1511840

[5] P. Billingsley, *Notes: Van Der Waerden's Continuous Nowhere Differentiable Function*, Amer. Math. Monthly **89** (1982), no. 9, 691. MR 1540053

[6] Z. Boros, *An inequality for the Takagi function*, Math. Inequal. Appl. **11** (2008), no. 4, 757–765. MR 2009f:39047

[7] J.M. Borwein, *Multivalued convexity and optimization: a unified approach to inequality and equality constraints*, Math. Programming **13** (1977), no. 2, 183–199. MR 0451166 (56 #9453)

[8] T. Cardinali, K. Nikodem, and F. Papalini, *Some results on stability and on characterization of* K*-convexity of set-valued functions*, Ann. Polon. Math. **58** (1993), no. 2, 185–192.

[9] F. S. Cater, *On van der Waerden's nowhere differentiable function*, Amer. Math. Monthly **91** (1984), no. 5, 307–308. MR 740246 (85j:26009)

[10] F.S. De Blasi and G. Pianigiani, *Remarks on hausdorff continuous multifunction and selections*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae **024** (1983), no. 3, 553–561 (eng).

[11] Carlos González, Kazimierz Nikodem, Zsolt Páles, and Gari Roa, *Bernstein–doetsch type theorems for set-valued maps of strongly and approximately convex and concave type*, Publicationes Mathematicae **84** (2014).

[12] Hui Huang, *Global error bounds with exponents for multifunctions with set constraints*, Communications in Contemporary Mathematics **12** (2010), no. 03, 417–435.

[13] D. H. Hyers and S. M. Ulam, *Approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 821–828. MR 14,254b

[14] A. Házy, *On approximate* t*-convexity*, Math. Inequal. Appl. **8** (2005), no. 3, 389–402. MR 2006c:26019

[15] ______, *On the stability of* t*-convex functions*, Aequationes Math. **74** (2007), no. 3, 210–218. MR 2008j:26012

[16] A. Házy and Zs. Páles, *On approximately midconvex functions*, Bull. London Math. Soc. **36** (2004), no. 3, 339–350. MR 2004j:26020

[17] ______, *On approximately* t*-convex functions*, Publ. Math. Debrecen **66** (2005), 489–501. MR 2006c:26023

[18] ______, *On a certain stability of the Hermite–Hadamard inequality*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **465** (2009), 571–583. MR 2009k:39033

[19] J. L. W. V. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégualités entre les valeurs moyennes*, Acta Math. **30** (1906), 175–193.

[20] H.-H. Kairies, *Takagi's function and its functional equations*, Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat. (1998), no. 15, 73–83. MR 2002b:39014

[21] K. Knopp, *Ein einfaches Verfahren zur Bildüng stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen*, Math. Z. **2** (1918), no. 1-2, 1–26. MR 1544308

[22] Z. Kominek, *On additive and convex functionals*, Rad. Mat. **3** (1987), no. 2, 267–279. MR 89e:26029

[23] Z. Kominek and M. Kuczma, *On the lower hull of convex functions*, Aequationes Math. **38** (1989), no. 2-3, 192–210. MR 90i:26012

[24] ______, *Theorems of Bernstein-Doetsch, Piccard and Mehdi and semilinear topology*, Arch. Math. (Basel) **52** (1989), no. 6, 595–602. MR 90i:46017

[25] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Cauchy's equation and Jensen's inequality*, 2nd ed., Birkhäuser Verlag, 2009 (English).

[26] M. Laczkovich, *The local stability of convexity, affinity and of the Jensen equation*, Aequationes Math. **58** (1999), 135–142.

[27] H. Leiva, N. Merentes, K. Nikodem, and J. L. Sánchez, *Strongly convex set-valued maps*, J. Global Optim. (2013).

[28] J. Makó and Zs. Páles, *Approximate convexity of Takagi type functions*, J. Math. Anal. Appl. **369** (2010), 545–554.

[29] ______, *Implications between approximate convexity properties and approximate Hermite–Hadamard inequalities*, Cent. Eur. J. Math. **10** (2012), no. 3, 1017–1041.

[30] ______, *Korovkin type theorems and approximate Hermite–Hadamard inequalities*, J. Approx. Theory **164** (2012), no. 8, 1111–1142.

[31] ______, *On φ-convexity*, Publ. Math. Debrecen **80** (2012), no. 1-2, 107–126.

[32] ______, *On approximately convex Takagi type functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), no. 6, 2069–2080.

[33] M. R. Mehdi, *On convex functions*, J. London Math. Soc. **39** (1964), 321–326. MR 28 #5153

[34] A. Mureńko, Ja. Tabor, and Jó. Tabor, *Applications of de Rham Theorem in approximate midconvexity*, J. Diff. Equat. Appl. **18** (2012), no. 3, 335–344.

[35] C. T. Ng and K. Nikodem, *On approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), no. 1, 103–108.

[36] K. Nikodem, *Continuity of* K*-convex set-valued functions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **34** (1986), no. 7-8, 393–400.

[37] ______, *On concave and midpoint concave set-valued functions*, Glas. Mat. Ser. III **22(42)** (1987), no. 1, 69–76. MR 89g:39017

[38] ______, *On midpoint convex set-valued functions*, Aequationes Math. **33** (1987), no. 1, 46–56. MR 88h:90171

[39] K Nikodem, K*-convex and* K*-concave set-valued functions*, Zeszyty Nauk. Politech. Łódz. Mat. (Łódz) **559** (1989), 1–75, (Rozprawy Nauk. 114).

[40] F. Papalini, *The* K*-midpoint * convexity [concavity] and lower [upper]* K*-semicontinuity of a multifunction*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **16** (1990), no. 1-2, 149–159 (1991). MR 1105736 (92h:26032)

[41] B. T. Polyak, *Existence theorems and convergence of minimizing sequences for extremal problems with constraints*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **166** (1966), 287–290. MR 33 #6466

[42] Z. Páles, *The Forty-First International Symposium on Functional Equations*, Aequationes Math. **68** (2004), no. 1-2, 307, 7. Problem in report of meeting. MR 2126193

[43] Zs. Páles, *On approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 1, 243–252. MR 2003h:26015

[44] Hans Rådström, *An embedding theorem for spaces of convex sets*, Proceedings of the American Mathematical Society **3** (1952), no. 1, 165–169.

[45] W. Rudin, *Functional Analysis*, second ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc., New York, 1991. MR 1157815 (92k:46001)

[46] Ja. Tabor and Jó. Tabor, *Generalized approximate midconvexity*, Control Cybernet. **38** (2009), no. 3, 655–669.

[47] ______, *Takagi functions and approximate midconvexity*, J. Math. Anal. Appl. **356** (2009), no. 2, 729–737.

[48] Ja. Tabor, Jó. Tabor, and M. Żołdak, *Approximately convex functions on topological vector spaces*, Publ. Math. Debrecen **77** (2010), 115–123. MR 2675738

[49] ______, *Optimality estimations for approximately midconvex functions*, Aequationes Math. **80** (2010), 227–237. MR 2736954

[50] T. Takagi, *A simple example of the continuous function without derivative*, J. Phys. Math. Soc. Japan **1** (1903), 176–177.

[51] L. I. Trudzik, *Continuity properties of vector-valued convex functions*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **36** (1984), no. 3, 404–415. MR 733912 (85d:46062)

[52] B. L. van der Waerden, *Ein einfaches Beispiel einer nichtdifferenzierbaren stetigen Funktion*, Math. Z. **32** (1930), 474–475.