

# Teoremas de tipo Bernstein-Doetsch para multifunciones convexas y cóncavas.

Autor: Carlos González.

Tutor: Dr. Nelson Merentes.

Co-Tutor: Dr. Zsolt Páles.

Universidad Central de Venezuela.

Presentación para optar al título de Magister Scientiarum en  
Matemática.



# Contenido

- 1 **Introducción.**
  - Funciones a valores reales.
  - Multifunciones.
- 2 **Antecedentes.**
  - El Teorema de Bernstein–Doetsch.
  - Convexidad aproximada.
  - Convexidad fuerte.
- 3 **Un problema general.**
  - Planteamiento.
  - Definiciones y resultados auxiliares.
  - Transformación de Takagi de una multifunción.
- 4 **Resultados principales.**
  - Teoremas.
  - Corolarios.
- 5 **Referencias**



# Funciones a valores reales.

Sea  $X$  un espacio normado real,  $D \subseteq X$  un conjunto abierto y convexo y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función.

## Definición

La función  $f$  es **convexa** en  $D$  si para todo  $x, y \in D$ :

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y), \quad t \in (0, 1). \quad (1.1)$$

## Definición

La función  $f$  es **cóncava** en  $D$  si para todo  $x, y \in D$ :

$$tf(x) + (1 - t)f(y) \leq f(tx + (1 - t)y), \quad t \in (0, 1). \quad (1.2)$$

## Observación.

Como consecuencia directa se tiene que  $f$  es cóncava si y sólo si,  $-f$  es convexa.



# Funciones a valores reales.

## Definición

La función  $f$  es **midconvexa** en  $D$  si para todo  $x, y \in D$ :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

## Teorema ([Kuc85], Theorem 5.3.5.)

Sea  $D \subseteq X$  un conjunto convexo y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función midconvexa. Entonces,  $f$  satisface la siguiente desigualdad para todo  $x, y \in D$  y para todo  $t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ :

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y). \quad (1.3)$$



# Multifunciones.

Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos lineales y sea  $D \subseteq X$  un subconjunto abierto y convexo. Denotemos por  $\mathcal{P}_0(Y)$  a la clase de subconjuntos no-vacíos de  $Y$ .

## Definición

Una multifunción  $F : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  es midconvexa en  $D$ , si para todo  $x, y \in D$  se satisface

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} \subseteq F\left(\frac{x + y}{2}\right).$$

## Definición

Una multifunción  $F : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  es midcóncava en  $D$ , si para todo  $x, y \in D$  se satisface

$$F\left(\frac{x + y}{2}\right) \subseteq \frac{F(x) + F(y)}{2}.$$



# Multifunciones.

## Ejemplo

Sea  $H$  un subconjunto no-vacío de  $Y$ . Definamos a la multifunción  $F$  mediante la fórmula  $F(t) = tH$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Para  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$  tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} F\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) &= \frac{t_1 + t_2}{2}H = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)H \\ &\subseteq \frac{1}{2}(t_1H + t_2H) = \frac{t_1H + t_2H}{2} = \frac{F(t_1) + F(t_2)}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $F$  es una multifunción cóncava. Sin embargo, la multifunción,  $G(t) := -F(t) = t(-H)$  no es midconvexa.

## Observación

$F$  es midconvexa ~~no~~  $-F$  es midcóncava.



# Multifunciones.

## Definición

Sea  $F : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  una multifunción. Se dice que  $F$  es continua con respecto a la topología de Hausdorff si para todo abierto  $V \in \mathcal{U}(Y)$ , existe un abierto  $U \in \mathcal{U}(X)$  tal que

$$F(x) \subseteq F(x_0) + V \quad \text{y} \quad F(x_0) \subseteq F(x) + V, \quad (1.4)$$

para todo  $x \in x_0 + U$ .

## Teorema ([Nik87b])

*Si  $F : D \rightarrow B(Y)$  es midconvexa y continua con respecto a la topología de Hausdorff, entonces,  $F$  es convexa.*

## Teorema ([Nik87a])

*Si  $F : D \rightarrow B(Y)$  es midcóncava y continua con respecto a la topología de Hausdorff, entonces,  $F$  es cóncava.*



# El Teorema de Bernstein–Doetsch.

## Teorema ([BD15])

*Sea  $D$  un subconjunto abierto y convexo de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función midconvexa. Si  $f$  es acotada superiormente en un subconjunto abierto y no vacío de  $D$  entonces  $f$  es continua.*





# El Teorema de Bernstein–Doetsch.

## Teorema ([Nik87b])

*Si  $F : D \rightarrow B(Y)$  es midconvexa y acotada en un subconjunto  $A \subseteq D$  con interior no-vacío entonces,  $F$  es continua con respecto a la topología de Hausdorff.*

## Teorema ([Nik87a])

*Si  $F : D \rightarrow B(Y)$  es midcóncava y acotada en un subconjunto  $A \subseteq D$  con interior no-vacío entonces,  $F$  es continua con respecto a la topología de Hausdorff.*

# Convexidad Aproximada.

A menos que se especifique otra cosa,  $X$  denotará un espacio normado real y  $D \subseteq X$  es un conjunto abierto y convexo.

## Definición ([HU52])

Sea  $\varepsilon$  una constante positiva. Se dice que la función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\varepsilon$ -midconvexa si para todo  $x, y \in X$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} + \varepsilon.$$

## Teorema ([NN93, Lac99])

Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función localmente acotada superior en un punto de  $D$ , y  $\varepsilon$ -midconvexa entonces,  $f$  es  $2\varepsilon$ -convexa, i.e., para todo  $x, y \in X$  y para todo  $t \in [0, 1]$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + 2\varepsilon.$$



# Función de Takagi

## Definición

La función  $T : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definida mediante la fórmula

$$T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{dist}(2^n t, \mathbb{Z}), \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (2.5)$$

se conoce como la función de Takagi.

## Observación

$$T(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

donde

$$T_n(t) = T_{n-1}(t) + \frac{1}{2^n} \operatorname{dist}(2^n t, \mathbb{Z}), \quad n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R},$$

y además  $T_0(t) = \operatorname{dist}(t, \mathbb{Z})$ .



# Gráfico de la función de Takagi.

Figure : Función de Takagi.



## Definición ([HP04])

Una función  $f$  definida en un subconjunto abierto y convexo  $D$  de un espacio normado real  $X$ , es  $(\delta, \varepsilon)$ -midconvexa si satisface

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \delta\|x-y\| + \varepsilon$$

para todo  $x, y \in D$ .

## Teorema ([HP04], Teorema 4)

Sean  $\delta$  y  $\varepsilon$  dos números no negativos. Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $(\delta, \varepsilon)$ -midconvexa acotada superiormente en un punto de  $D$  entonces, para todo  $x, y \in D$  y para todo  $t \in (0, 1)$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + 2\delta T(t)\|x-y\| + 2\varepsilon \quad (2.6)$$

donde  $T$  es la función de Takagi definida en (2.5).



## Teorema ([Bor08])

La función de Takagi es  $(\frac{1}{2}, 0)$ -midconvexa, i.e.,

$$T\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{T(x) + T(y)}{2} + \left|\frac{x-y}{2}\right|,$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .

## Observación

Supongamos que el teorema anterior sigue siendo válido si se reemplaza  $T$  por una función  $\phi$  arbitraria. Aplicando el teorema anterior a la función de Takagi, obtenemos que para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  y todo  $\lambda \in [0, 1]$

$$T(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y) + \phi(\lambda)|x - y|.$$

En particular, para  $x = 1$  y  $y = 0$  la ecuación anterior se convierte en

$$T(\lambda) \leq \phi(\lambda).$$



## Definición ([TT09a])

Dada una función  $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  no decreciente, se dice que una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\alpha(\cdot)$ -midconvexa si

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \alpha(\|x-y\|)$$

para todo  $x, y \in D$ .

## Teorema ([TT09a])

Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $\alpha(\cdot)$ -midconvexa y localmente acotada superior en un punto. Entonces  $f$  es localmente acotada en cada punto de  $\text{int}D$ . Si además,  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \alpha(r) = 0$ , entonces  $f$  es continua en  $D$ .



## Teorema ([TT09a, MP12])

Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $\alpha(\cdot)$ -midconvexa. Entonces,

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \alpha(\text{dist}(2^n t, \mathbb{Z}) \|x - y\|) \quad (2.7)$$

para todo  $x, y \in D, t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ . Más aún, si  $f$  es localmente acotada superior en un punto de  $D$ , entonces, la desigualdad (2.7) es válida para todo  $t \in [0, 1]$ .



## Teorema ([TT09a])

Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $\alpha(\cdot)$ -midconvexa. Entonces,

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) + \sum_{n=0}^{\infty} \text{dist}(2^n t, \mathbb{Z}) \alpha\left(\frac{\|x - y\|}{2^n}\right) \quad (2.8)$$

para todo  $x, y \in D$ ,  $t \in [0, 1] \cap \mathbb{D}$ , donde  $\mathbb{D}$  es el conjunto de los racionales diádicos. Más aún, si  $f$  es localmente acotada superior en un punto de  $D$  y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(1/2^n) < \infty$$

entonces,  $f$  es continua en  $[0, 1]$  y la desigualdad (2.8) es válida para todo  $t \in [0, 1]$ .



## Convexidad fuerte.

### Definición ([Pol66])

Sea  $c > 0$ . Se dice que una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es fuertemente midconvexa con módulo  $c$ , si para todo  $x, y \in D$  y  $t \in [0, 1]$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2, \quad (2.9)$$

## Teorema ([AGNS11])

Sea  $c > 0$ . Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función fuertemente midconvexa con módulo  $c$  y acotada superiormente en un subconjunto de  $D$  con interior no vacío, entonces,  $f$  es una función continua y además fuertemente convexa con módulo  $c$ , i.e.,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)\|x - y\|^2, \quad (2.10)$$

para todo  $x, y \in D, t \in [0, 1]$ .



# $K$ -convexidad

Sean  $X, Y$  espacios topológicos lineales,  $D \subseteq X$  un subconjunto abierto y convexo y sea  $K \subseteq Y$  un cono convexo. Denotemos por  $\mathcal{U}(X)$  y  $\mathcal{U}(Y)$  a las bases locales de  $X$  y  $Y$  respectivamente.

## Definición

Se dice que la multifunción  $F$  es  $K$ -convexa en  $D$  si para todo  $x, y \in D$  y para todo  $t \in [0, 1]$  se tiene que

$$tF(x) + (1 - t)F(y) \subseteq F(tx + (1 - t)y) + K \quad (2.11)$$

## Definición

Se dice que la multifunción  $F$  es  $K$ -cóncava en  $D$  si para todo  $x, y \in D$  y para todo  $t \in [0, 1]$  se tiene que

$$F(tx + (1 - t)y) \subseteq tF(x) + (1 - t)F(y) + K \quad (2.12)$$



# $K$ -convexidad.

## Observación

Dado un cono convexo  $K \subseteq Y$ , definamos la relación  $\leq_K$  en  $Y$  de la siguiente manera

$$x \leq_K y \iff y - x \in K.$$

Si  $F(x) = \{f(x)\}$ , donde  $f : X \rightarrow Y$  es una función cualquiera, entonces las inclusiones (2.11) y (2.12) equivalen a

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq_K tf(x) + (1-t)f(y) \quad y \\ tf(x) + (1-t)f(y) &\leq_K f(tx + (1-t)y) \end{aligned}$$

respectivamente. De hecho si  $Y = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{R}_+$ , entonces estas definiciones coinciden con las definiciones de convexidad y concavidad de funciones respectivamente introducidas previamente.



## K-continuidad de multifunciones.

## Definición

Sea  $F : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  una multifunción. Se dice que  $F$  es  $K$ -semicontinua superior si para todo abierto  $V \in \mathcal{U}(Y)$ , existe un abierto  $U \in \mathcal{U}(X)$  tal que

$$F(x) \subseteq F(x_0) + V + K \quad (x \in x_0 + U) \quad (2.13)$$

## Definición

Sea  $F : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  una multifunción. Se dice que  $F$  es  $K$ -semicontinua inferior si para todo abierto  $V \in \mathcal{U}(Y)$ , existe un abierto  $U \in \mathcal{U}(X)$  tal que

$$F(x_0) \subseteq F(x) + V + K \quad (x \in x_0 + U) \quad (2.14)$$

## Definición

Sea  $F : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  una multifunción. Se dice que  $F$  es  $K$ -continua si  $F$  es  $K$ -semicontinua superior e inferior al mismo tiempo.



### Teorema ([Nik86])

*Supongamos que  $0 \in K$  y sea  $F : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  una multifunción tal que para todo  $x \in D$  el conjunto  $F(x) \subseteq Y$  es acotado. Si  $F$  es  $K$ -midconvexa y  $K$ -acotada superior en un subconjunto  $H \subseteq D$  con interior no vacío, entonces,  $F$  es  $K$ -continua y  $K$ -convexa en  $D$ .*

### Teorema ([Nik86])

*Supongamos que  $0 \in K$  y sea  $F : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  una multifunción tal que para todo  $x \in D$  el conjunto  $F(x) \subseteq Y$  es cerrado y acotado. Si  $F$  es  $K$ -midcóncava y  $K$ -acotada inferior en un subconjunto  $H \subseteq D$  con interior no vacío, entonces,  $F$  es  $K$ -continua y  $K$ -cóncava en  $D$ .*



# Convexidad Fuerte.

Cuando  $(X, \|\cdot\|)$  y  $(Y, \|\cdot\|)$  son espacios vectoriales normados y  $B_Y \subseteq Y$  es el interior de la bola unitaria en  $Y$ .

## Definición ([Hua10])

Sea  $F : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  una multifunción y sea  $c > 0$ . Se dice que  $F$  es fuertemente convexa con módulo  $c$  si

$$tF(x) + (1-t)F(y) + ct(1-t)\|x-y\|^2\overline{B_Y} \subseteq F(tx + (1-t)y) \quad (2.15)$$

para todo  $x, y \in D$  y para todo  $t \in [0, 1]$ .

## Definición

Sea  $F : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  una multifunción y sea  $c > 0$ . Se dice que  $F$  es fuertemente midconvexa con módulo  $c$  si

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} + \frac{c}{4}\|x-y\|^2\overline{B_Y} \subseteq F\left(\frac{x+y}{2}\right). \quad (2.16)$$

# Convexidad Fuerte.

## Teorema ([LMNS13])

*Sea  $F : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  una multifunción fuertemente midconvexa con módulo  $c$  tal que para todo  $x \in D$  el conjunto  $F(x)$  es cerrado y acotado. Si  $F$  acotada en un subconjunto de  $D$  con interior no-vacío, entonces  $F$  es fuertemente convexa con módulo  $c$ .*





Sean  $X, Y$  espacios topológicos lineales,  $D \subseteq X$  un subconjunto abierto y convexo. Sean  $A, B : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  y  $F : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$ .

## Problema 1

Hallar condiciones de regularidad sobre las multifunciones  $A, B$  y  $F$  para que la siguiente inclusión

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} + A(x - y) \subseteq F\left(\frac{x + y}{2}\right) + B(x - y), \quad (x, y \in D), \quad (3.17)$$

implique una inclusión de tipo

$$\begin{aligned} tF(x) + (1-t)F(y) + \Phi_A(t, x-y) &\subseteq F(tx + (1-t)y) + \Phi_B(t, x-y), \\ (x, y \in D, \quad t \in [0, 1]), \end{aligned} \tag{3.18}$$

donde  $\Phi_A$  y  $\Phi_B$  son multifunciones definidas en  $[0, 1] \times (D - D)$  obtenidas a partir de  $A$  y  $B$  respectivamente mediante alguna transformación especial.



Sean  $X, Y$  espacios topológicos lineales,  $D \subseteq X$  un subconjunto abierto y convexo. Sean  $A, B : D - D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  y  $F : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$ .

## Problema 2

Hallar condiciones de regularidad sobre las multifunciones  $A, B$  y  $F$  para que la siguiente inclusión

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) + A(x-y) \subseteq \frac{F(x) + F(y)}{2} + B(x-y), \quad (x, y \in D), \quad (3.19)$$

implique una inclusión de tipo

$$\begin{aligned} F(tx + (1-t)y) + \Phi_A(t, x-y) &\subseteq tF(x) + (1-t)F(y) + \Phi_B(t, x-y), \\ (x, y \in D, \quad t \in [0, 1]), \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde  $\Phi_A$  y  $\Phi_B$  son multifunciones definidas en  $[0, 1] \times (D - D)$  obtenidas a partir de  $A$  y  $B$  respectivamente mediante alguna transformación especial.



# Condiciones de regularidad.

## Definición

Sea  $S : D \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  una multifunción. Decimos que  $S$  es **localmente semi  $K$ -acotada inferior** si, para todo  $x \in D$  existe un entorno abierto  $U$  de  $x$  y un conjunto acotado  $H \subseteq Y$  tal que

$$S(u) \subseteq \text{cl}(H + K), \quad (u \in U \cap D).$$

## Definición

Sea  $S : D \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  una multifunción. Decimos que  $S$  es **localmente débil semi  $K$ -acotada superior** si, para todo  $x \in D$  existe un entorno abierto  $U$  de  $x$  y un conjunto acotado  $H \subseteq Y$  tal que

$$0 \in \text{cl}(S(u) + H + K), \quad (u \in U \cap D).$$



# Condiciones de regularidad.

## Teorema

*Supongamos que  $F : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  es una multifunción localmente semi-K-acotada inferior. Entonces, para cada subconjunto compacto  $C \subseteq D$ , existe un conjunto acotado  $H \subseteq Y$  tal que,  $F(x) \subseteq \text{cl}(H + K)$ , para todo  $x \in C$ .*

## Teorema

*Supongamos que  $F : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  es una multifunción localmente débil-semi-K-acotada superior. Entonces, para cada subconjunto compacto  $C \subseteq D$ , existe un conjunto acotado  $H \subseteq Y$  tal que,  $0 \in \text{cl}(F(x) + H + K)$ , para todo  $x \in C$ .*



# Cono Recesión.

## Definición

Sea  $H \subseteq X$  un subconjunto no-vacío. El **cono recesión** de  $H$  denotado por  $\text{rec}(H)$  es el conjunto:

$$\text{rec}(H) := \{x \in X \mid tx + H \subseteq H, \text{ para todo } t \geq 0\}. \quad (3.21)$$

## Propiedades.

- ①  $\text{rec}(H)$  es un cono convexo que posee al origen;
- ②  $K = \text{rec}(H)$  cono más grande tal que  $K + H \subseteq H$ .
- ③  $\overline{\text{rec}}(H) \subseteq \text{rec}(\overline{H})$ ;
- ④ para todo  $x \in X, t > 0, \text{rec}(tx + H) = \text{rec}(H)$ ;
- ⑤ para cualesquiera conjuntos no-vacíos  $H_1, H_2 \subseteq X$ ,  
 $\text{rec}(H_1) + \text{rec}(H_2) \subseteq \text{rec}(H_1 + H_2)$ .



# Cono recesión de una multifunción.

## Definición

Dada la multifunción  $S : D \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ , el **cono recesión** de  $S$ , denotado por  $\text{rec}(S)$ , es el conjunto:

$$\text{rec}(S) = \bigcap_{x \in D} \text{rec}(S(x)). \quad (3.22)$$

## Propiedades.

- ❶  $\text{rec}(S) \neq \emptyset$ .
- ❷ Si  $S(x)$  es acotada para algún  $x \in D$ , entonces  $\text{rec}(S) = \{0\}$ .
- ❸  $\text{rec}(S) + S(x) \subseteq S(x)$  para todo  $x \in D$ .



# Transformación de Takagi de una multifunción.

Supongamos que  $D \subseteq X$  es un conjunto estrellado.

## Definición

Para una multifunción  $S : D \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ , tal que  $0 \in S(x)$  para todo  $x \in D$ , definimos la **transformación de Takagi** de  $S$ , como la multifunción  $S^T : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  tal que:

$$S^T(t, x) := \text{cl} \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^n} S(2^k t, \mathbb{Z}x) \right). \quad (3.23)$$

## Relación entre $S$ y $S^T$ .

Sea  $S : D \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  una multifunción tal que  $0 \in S(x)$  para todo  $x \in D$ . Entonces,

$$\text{cl}(S(x)) \subseteq S^T\left(\frac{1}{2}, x\right) \quad (x \in D). \quad (3.24)$$

Además si  $S(0) \subseteq \overline{\text{rec}}(S)$  entonces la inclusión (3.24), se convierte en una igualdad.



Observe que  $d_{\mathbb{Z}}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$  y  $d_{\mathbb{Z}}(2^k \cdot \frac{1}{2}) = 0$  para  $k \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto,

$$S^T(\frac{1}{2}, x) = \text{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} S(2d_{\mathbb{Z}}(2^k \cdot \frac{1}{2})x)\right) = \text{cl}\left(S(x) + \bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} S(0)\right).$$

Como  $0 \in S(0)$ , entonces

$$S(x) \subseteq S(x) + \bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} S(0).$$

Luego si  $S(0) \subseteq \overline{\text{rec}}(S) \subseteq \text{rec}(\overline{S(x)})$ , entonces

$$S^T(\frac{1}{2}, x) \subseteq S(x) + \bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \overline{\text{rec}}(S) \subseteq \text{cl}\left(\overline{S(x)} + \text{rec}(\overline{S(x)})\right) \subseteq \text{cl}\left(S(x)\right).$$





## Un ejemplo.

Sea  $S_0 \subseteq Y$  un conjunto convexo que posee al origen y  $\varphi$  una función localmente acotada superior y no-negativa.

- ①  $S(x) = K + \varphi(x)S_0 \xrightarrow{T.T} S^T(t, x) = \text{cl} \left( K + \varphi^T(t, x)S_0 \right)$ , donde

$$\varphi^T(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi(2 \text{ dist}(2^n t, \mathbb{Z})x).$$

- ② Si  $X$  es un espacio normado y  $\varphi(x) = \|x\|^\alpha$ , entonces:  
 $\varphi^T(t, x) = T_\alpha(t)\|x\|^\alpha$ , donde la función  $T_\alpha(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función de takagi de orden  $\alpha$  y se define por

$$T_\alpha(t) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\alpha-n} (\text{dist}(2^n t, \mathbb{Z}))^\alpha \quad (3.25)$$



Observemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
 T_\alpha(t) &:= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\alpha-n} (\text{dist}(2^n t, \mathbb{Z}))^\alpha \\
 &= 2^\alpha (\text{dist}(t, \mathbb{Z}))^\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\alpha-n} (\text{dist}(2^n t, \mathbb{Z}))^\alpha \\
 &= 2^\alpha (\text{dist}(t, \mathbb{Z}))^\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\alpha-(n+1)} (\text{dist}(2^{n+1} t, \mathbb{Z}))^\alpha \\
 &= 2^\alpha (\text{dist}(t, \mathbb{Z}))^\alpha + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\alpha-n} (\text{dist}(2^n(2t), \mathbb{Z}))^\alpha
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Por lo tanto  $T_\alpha$  es la **única** solución de la ecuación funcional

$$\phi(t) = 2^\alpha (\text{dist}(t, \mathbb{Z}))^\alpha + \frac{1}{2} \phi(2t).$$



Caso  $\alpha = 2$ .

$$f(t) = 4(t - \lfloor t \rfloor)(1 - (t - \lfloor t \rfloor)), \quad g(t) = 4(\text{dist}(t, \mathbb{Z}))^2, \quad h(t) = \frac{1}{2}f(2t).$$

$$f(t) = 4(\text{dist}(t, \mathbb{Z}))^2 + \frac{1}{2}f(2t).$$



## Observación

Luego, si  $S(x) = K + \frac{c}{4}\|x\|^2 S_0$ , entonces,

$$S^T(t, x) = \text{cl} \left( K + ct(1 - t)\|x\|^2 S_0 \right)$$

## Lema auxiliar

Sean  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}, (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dos sucesiones no-decrecientes de subconjuntos de  $X$ , sea  $H \subseteq X$  un conjunto acotado, sea  $K \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{cl}(\text{rec}(B_n))$  y sea  $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales que converge a cero.

Asumamos que, para todo  $n \geq 0$ ,

$$A_n \subseteq \text{cl}(\epsilon_n H + K + B_n).$$

Entonces,

$$\text{cl} \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) \subseteq \text{cl} \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \right)$$



**Teorema ([GNPR14], Theorem 4.1)**

Sea  $D \subseteq X$  un conjunto convexo no-vacío y  $A, B : (D - D) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ , tales que  $0 \in A(x) \cap B(x)$  para todo  $x \in (D - D)$ . Consideremos  $K = \overline{\text{rec}}(B)$  y sea  $F : D \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  una multifunción que satisface para  $x, y \in D$  la inclusión de tipo Jensen

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} + A(x - y) \subseteq \text{cl} \left( F\left(\frac{x + y}{2}\right) + B(x - y) \right). \quad (4.27)$$

Supongamos que además  $F$  es puntualmente semi  $K$ -acotada inferior y localmente débil semi- $K$ -acotada superior en  $D$ . Entonces,  $F$  satisface para  $x, y \in D$  y  $t \in [0, 1]$ , la siguiente inclusión:

$$\begin{aligned} tF(x) + (1 - t)F(y) + A^T(t, x - y) \\ \subseteq \text{cl} \left( F(tx + (1 - t)y) + B^T(t, x - y) \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$



# Resumen de la demostración.

Vamos a demostrar por inducción que para todo  $x, y \in D$  existe un conjunto acotado  $H \subseteq Y$  tal que, para todo  $n \geq 0, t \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} tF(x) + (1-t)F(y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} A(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)) \\ \subseteq \text{cl} \left( F(tx + (1-t)y) + \frac{1}{2^n} H + K + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} B(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)) \right). \end{aligned}$$

Fijemos  $x, y \in D$  arbitrarios. Para  $n = 0$  basta encontrar un conjunto acotado  $H \subseteq Y$  tal que para todo  $t \in [0, 1]$ ,

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq \text{cl} \left( F(tx + (1-t)y) + H + K \right).$$



# Resumen de la demostración.

Sea  $U \in \mathcal{U}(Y)$  y escojamos un abierto balanceado  $V \in \mathcal{U}(Y)$  tal que  $V + V + V \subseteq U$ . Como  $F$  es puntualmente semi- $K$ -acotada inferior, existen conjuntos acotados  $H_x, H_y \subseteq Y$  tales que

$$F(x) \subseteq \text{cl}(H_x + K) \subseteq V + H_x + K$$

y

$$F(y) \subseteq \text{cl}(H_y + K) \subseteq V + H_y + K.$$

Por lo tanto

$$tF(x) + (1 - t)F(y) \subseteq V + V + H_1 + H_2 + K.$$

donde  $H_1 := \bigcup_{t \in [0,1]} tH_x$  y  $H_2 := \bigcup_{t \in [0,1]} (1 - t)H_y$ . Por otra parte, existe un conjunto acotado  $H_0 \subseteq Y$  tal que para todo  $t \in [0, 1]$

$$0 \in \text{cl}(F(tx + (1 - t)y) + H_0 + K) \subseteq V + F(tx + (1 - t)y) + H_0 + K.$$



# Resumen de la demostración.

Luego, para todo  $t$  en  $[0, 1]$ ,

$$tF(x) + (1 - t)F(y) \subseteq U + F(tx + (1 - t)y) + H_0 + H_1 + H_2 + K.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} tF(x) + (1 - t)F(y) &\subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}(Y)} \left( U + F(tx + (1 - t)y) + H_0 + H_1 + H_2 + K \right) \\ &= \text{cl} \left( F(tx + (1 - t)y) + H + K \right), \end{aligned}$$

donde  $H := H_0 + H_1 + H_2$ .

Supongamos ahora que la hipótesis inductiva es cierta para  $n$  y demostraremos que también lo es para  $n + 1$ .





# Resumen de la demostración.

Veamos que para  $t \in [0, 1/2]$  se tiene lo siguiente

$$tF(x) + (1-t)F(y) + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} A(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y))$$

$$\subseteq \text{cl} \left( F(tx + (1-t)y) + \frac{1}{2^{n+1}} H + K + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} B(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)) \right).$$

$$tF(x) + \frac{2-2t}{2} F(y) + A(2t(x-y)) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} A(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y))$$

$$\subseteq \frac{1}{2} \left( 2tF(x) + (1-2t)F(y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} A(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)) \right)$$

$$+ \frac{1}{2} F(y) + A(2t(x-y)).$$



## Resumen de la demostración.

$$\begin{aligned}
& tF(x) + (1-t)F(y) + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} A\left(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\right) \\
& \subseteq \frac{1}{2} \operatorname{cl}\left(F(2tx + (1-2t)y) + \frac{1}{2^n} H + K + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} B\left(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\right)\right) \\
& \quad + \frac{1}{2} F(y) + A\left(2t(x-y)\right) \\
& \subseteq \operatorname{cl}\left(\frac{F(2tx + (1-2t)y) + F(y)}{2} + A\left(2t(x-y)\right) + \frac{1}{2^{n+1}} H + K \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} B\left(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\right)\right) \\
& \subseteq \operatorname{cl}\left(F(tx + (1-t)y) + \frac{1}{2^{n+1}} H + K + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} B\left(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\right)\right).
\end{aligned}$$



# Resumen de la demostración.

Aplicando el lema auxiliar obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} & \text{cl} \left( tF(x) + (1-t)F(y) + \text{cl} \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} A(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)) \right) \right) \\ & \subseteq \text{cl} \left( F(tx + (1-t)y) + \text{cl} \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} B(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)) \right) \right). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} & tF(x) + (1-t)F(y) + A^T(t, x-y) \\ & \subseteq \text{cl} \left( F(tx + (1-t)y) + B^T(t, x-y) \right). \end{aligned}$$

**Teorema ([GNPR14], Theorem 4.2)**

Sea  $D \subseteq X$  un conjunto convexo no-vacío y  $A, B : (D - D) \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  multifunciones tales que  $0 \in A(x) \cap B(x)$  para todo  $x \in (D - D)$ . Sea  $K = \overline{\text{rec}}(B)$ , y sea  $F : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  una multifunción que satisface para  $x, y \in D$  la inclusión de tipo Jensen

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) + A(x-y) \subseteq \text{cl}\left(\frac{F(x) + F(y)}{2} + B(x-y)\right). \quad (4.29)$$

Supongamos además, que  $F$  es puntualmente semi-K-convexa y que  $F$  es localmente semi-K-acotada inferior. Entonces,  $F$  satisface para  $x, y \in D$  y  $t \in [0, 1]$ , la siguiente inclusión

$$\begin{aligned} F(tx + (1-t)y) + A^T(t, x-y) \\ \subseteq \text{cl}\left(tF(x) + (1-t)F(y) + B^T(t, x-y)\right) \end{aligned} \quad (4.30)$$



Sea  $\varphi : D - D \rightarrow \mathbb{R}_+$  una función no-negativa localmente acotada superior,  $S_0 \subseteq Y$  un conjunto convexo que contiene al origen  $0 \in Y$  y  $K \subseteq Y$  un cono convexo y cerrado.

### Corolario ([GNPR14], Corollary 4.4)

*Supongamos que  $F : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  es una multifunción puntualmente semi-K-acotada inferior y localmente débil-semi-K-acotada superior que satisface*

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} \subseteq \text{cl} \left( F \left( \frac{x+y}{2} \right) + K + \varphi(x-y)S_0 \right) \quad (4.31)$$

*para todo  $x, y \in D$ . Entonces*

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq \text{cl} \left( F(tx + (1-t)y) + K + \varphi^T(t, x-y)S_0 \right) \quad (4.32)$$

*para todo  $x, y \in D$  y para todo  $t \in [0, 1]$ .*

**Corolario ([GNPR14], Corollary 4.5)**

*Supongamos que  $F : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  es una multifunción puntualmente semi-K-acotada inferior y localmente débil-semi-K-acotada superior que satisface*

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} + \varphi(x - y)S_0 \subseteq \text{cl} \left( F \left( \frac{x + y}{2} \right) + K \right) \quad (4.33)$$

*para todo  $x, y \in D$ . Entonces*

$$tF(x) + (1 - t)F(y) + \varphi^T(t, x - y)S_0 \subseteq \text{cl} \left( F(tx + (1 - t)y) + K \right) \quad (4.34)$$

*para todo  $x, y \in D$  y para todo  $t \in [0, 1]$ .*



### Corolario ([GNPR14], Corollary 4.6)

*Supongamos que  $F : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  es una multifunción puntualmente semi-K-convexa y localmente semi-K-acotada inferior que satisface*

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \subseteq \text{cl}\left(\frac{F(x) + F(y)}{2} + K + \varphi(x-y)S_0\right) \quad (4.35)$$

*para todo  $x, y \in D$ . Entonces*

$$F(tx + (1-t)y) \subseteq \text{cl}\left(tF(x) + (1-t)F(y) + K + \varphi^T(t, x-y)S_0\right) \quad (4.36)$$

*para todo  $x, y \in D$  y para todo  $t \in [0, 1]$ .*



### Corolario ([GNPR14], Corollary 4.7)

*Supongamos que  $F : D \rightarrow \mathcal{P}_0(Y)$  es una multifunción puntualmente semi-K-convexa y localmente semi-K-acotada inferior que satisface*

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) + \varphi(x-y)S_0 \subseteq \text{cl}\left(\frac{F(x) + F(y)}{2} + K\right) \quad (4.37)$$

*para todo  $x, y \in D$ . Entonces*

$$F(tx + (1-t)y) + \varphi^T(t, x-y)S_0 \subseteq \text{cl}\left(tF(x) + (1-t)F(y) + K\right) \quad (4.38)$$

*para todo  $x, y \in D$  y para todo  $t \in [0, 1]$ .*





# References

- [AGNS11] A. Azócar, J. Giménez, K. Nikodem, and J. L. Sánchez, *On strongly midconvex functions*, *Opuscula Math.* **31** (2011), no. 1, 15–26.
- [BD15] F. Bernstein and G. Doetsch, *Zur theorie der konvexen funktionen*, *Math. Ann.* **76** (1915), no. 4, 514–526. MR 1511840
- [BHJ09] P. Burai, A. Háy, and T. Juhász, *Bernstein–Doetsch type results for  $s$ -convex functions*, *Publ. Math. Debrecen* **75** (2009), no. 1-2, 23–31.
- [Bor08] Z. Boros, *An inequality for the Takagi function*, *Math. Inequal. Appl.* **11** (2008), no. 4, 757–765. MR 2009f:39047
- [CM99] A Chademan and F Mirzapour, *Midconvex functions in locally compact groups*, *Proceedings of the American Mathematical Society* (1999), 2961–2968.
- [GNP04] A. Gilányi, K. Nikodem, and Zs. Páles, *Bernstein–Doetsch type results for quasiconvex functions*, *Math. Inequal. Appl.* **7** (2004), no. 2, 169–175. MR 2004m:26011
- [GNPR14] Carlos González, Kazimierz Nikodem, Zsolt Páles, and Gari Roa, *Bernstein–doetsch type theorems for set-valued maps of strongly and approximately convex and concave type*, *Pub. Math. Debrecen* **84** (2014).
- [GTP11] A. Gilányi and K. Troczka-Pawelec, *Regularity of weakly subquadratic functions*, *J. Math. Anal. Appl.* **382** (2011), 814–821.
- [Há09] A. Háy, *Bernstein–Doetsch type results for Breckner  $s$ -convex functions*, *Proc. MicroCAD 2009 Int. Sci. Conf.*, vol. G, 2009, p. 17–22.

# References

- [Há10] ———, *Bernstein–Doetsch type results for generalized approximately convex functions*, Proc. MicroCAD 2010 Int. Sci. Conf., vol. H, 2010, p. 27–32.
- [Há11] ———, *Bernstein–Doetsch type results for  $h$ -convex functions*, Math. Inequal. Appl. **14** (2011), no. 3, 499–508.
- [HB10] A. Háy and P. Burai, *Bernstein–Doetsch type results for generalized convex function*, Proc. 12th Symp. Math. Appl. (November 5-7, 2009) (University of Timișoara), Editura Politehnica, 2010, p. 118–123.
- [HP04] A. Háy and Zs. Páles, *On approximately midconvex functions*, Bull. London Math. Soc. **36** (2004), no. 3, 339–350. MR 2004j:26020
- [HP05] ———, *On approximately  $t$ -convex functions*, Publ. Math. Debrecen **66** (2005), 489–501. MR 2006c:26023
- [HU52] D. H. Hyers and S. M. Ulam, *Approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 821–828. MR 14,254b
- [Hua10] Hui Huang, *Global error bounds with exponents for multifunctions with set constraints*, Communications in Contemporary Mathematics **12** (2010), no. 03, 417–435.
- [KK89] Z. Kominek and M. Kuczma, *Theorems of Bernstein–Doetsch, Piccard and Mehdi and semilinear topology*, Arch. Math. (Basel) **52** (1989), no. 6, 595–602. MR 90i:46017
- [KK91] ———, *Theorem of Bernstein–Doetsch in Baire spaces*, Ann. Math. Sil. (1991), no. 5, 10–17. MR 93j:26008

# References

- [Kuc85] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, vol. 489, Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985. MR 86i:39008
- [Lac99] M. Laczovich, *The local stability of convexity, affinity and of the Jensen equation*, Aequationes Math. **58** (1999), 135–142.
- [LMNS13] H. Leiva, N. Merentes, K. Nikodem, and J. L. Sánchez, *Strongly convex set-valued maps*, J. Global Optim. (2013).
- [MP12] J. Makó and Zs. Páles, *On  $\varphi$ -convexity*, Publ. Math. Debrecen **80** (2012), no. 1-2, 107–126.
- [Mur12] Anna Mureńko, *A generalization of bernstein-doetsch theorem*, DEMONSTRATIO MATHEMATICA **45** (2012), no. 1.
- [Nik86] K. Nikodem, *Continuity of  $K$ -convex set-valued functions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **34** (1986), no. 7-8, 393–400.
- [Nik87a] ———, *On concave and midpoint concave set-valued functions*, Glas. Mat. Ser. III **22(42)** (1987), no. 1, 69–76. MR 89g:39017
- [Nik87b] ———, *On midpoint convex set-valued functions*, Aequationes Math. **33** (1987), no. 1, 46–56. MR 88h:90171
- [Nik89] K. Nikodem,  *$K$ -convex and  $K$ -concave set-valued functions*, Zeszyty Nauk. Politech. Łódz. Mat. (Łódź) **559** (1989), 1–75, (Rozprawy Nauk. 114).
- [Nik01] K. Nikodem, *Continuity properties of midconvex set-valued maps*, Aequationes Math. **62** (2001), no. 1-2, 175–183. MR 2002f:54014
- [Nik03] ———, *Continuity properties of convex-type set-valued maps*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **4** (2003), no. 3, Article 52, 6 pp. (electronic). MR 2005h:47092
- [NN93] C. T. Ng and K. Nikodem, *On approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), no. 1, 103–108.
- [NP01] K. Nikodem and Zs. Páles, *On approximately Jensen-convex and Wright-convex functions*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **23** (2001), no. 4, 141–147. MR 2003a:39037

# References

- [Pá00] Zs. Páles, *Bernstein–Doetsch-type results for general functional inequalities*, Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat. **17** (2000), 197–206. MR 2001k:26015
- [Pol66] B. T. Polyak, *Existence theorems and convergence of minimizing sequences for extremal problems with constraints*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **166** (1966), 287–290. MR 33 #6466
- [Tru84] L. I. Trudzik, *Continuity properties of vector-valued convex functions*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **36** (1984), no. 3, 404–415. MR 733912 (85d:46062)
- [TT09a] Ja. Tabor and J. Tabor, *Generalized approximate midconvexity*, Control Cybernet. **38** (2009), no. 3, 655–669.
- [TT09b] ———, *Takagi functions and approximate midconvexity*, J. Math. Anal. Appl. **356** (2009), no. 2, 729–737.

