Teoremas de tipo Bernstein-Doetsch para multifunciones convexas y cóncavas.

Carlos González.

Universidad Central de Venezuela.

Presentación para optar al título de Magister Scientiarium en Matemática.

Contenido

Funciones a valores reales.

Sean $\mathfrak{X}$ un espacio normado real, $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{X}$ un subconjunto abierto y convexo y $\mathfrak{f} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{R}$ una función.

Definición

Se dice que la función $\mathfrak{f}$ es **convexa** en $\mathfrak{D}$, si para todo $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{t}\mathfrak{x} + (1 - \mathfrak{t})\mathfrak{y}) \leq \mathfrak{t}\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) + (1 - \mathfrak{t})\mathfrak{f}(\mathfrak{y}), \quad \mathfrak{t} \in [0, 1]. \tag{1.1}$$

Definición

Se dice que la función $\mathfrak{f}$ es **cóncava** en $\mathfrak{D}$, si para todo $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{t}\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) + (1 - \mathfrak{t})\mathfrak{f}(\mathfrak{y}) \leq \mathfrak{f}(\mathfrak{t}\mathfrak{x} + (1 - \mathfrak{t})\mathfrak{y}), \quad \mathfrak{t} \in [0, 1]. \tag{1.2}$$

Obervación.

Es evidente que $\mathfrak{f}$ es cóncava si y sólo si $-\mathfrak{f}$ es convexa.

Funciones Jensen-convexas a valores reales.

Definición

Se dice que la función $\mathfrak{f}$ es **Jensen-convexa** en $\mathfrak{D}$, si para todo $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{f}\left(\frac{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}}{2}\right) \leq \frac{\mathfrak{f}(\mathfrak{x})+\mathfrak{f}(\mathfrak{y})}{2}. \tag{1.3}$$

Teorema ([Kuc85], Teorema 5.3.5.)

Sea $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{X}$ un subconjunto abierto y convexo, y sea $\mathfrak{f} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{R}$ una función Jensen-convexa. Entonces $\mathfrak{f}$ satisface la siguiente desigualdad para todo $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{D}$ y para todo $\mathfrak{q} \in [0,1] \cap \mathfrak{Q}$:

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{q}\mathfrak{x} + (1-\mathfrak{q})\mathfrak{y}) \leq \mathfrak{q}\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) + (1-\mathfrak{q})\mathfrak{f}(\mathfrak{y}). \tag{1.4}$$

El Teorema de Bernstein–Doetsch.

Teorema ([Kuc85], Teorema 6.4.2)

Toda función Jensen-convexa $\mathfrak{f} : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{R}$ en $\mathfrak{D}$, localmente acotada superior en un punto $\mathfrak{x}_0 \in \mathfrak{D}$ is continua y por lo tanto convexa en $\mathfrak{D}$.

Este teorema teorema fue formulado por F. Bernstein and G. Doetsch en 1915 [BD15], y desde entonces ha sido muy importante en la teoría de convexidad, razón por la cual ha sido generalizado de muchas maneras diferentes y por varios autores. Como consecuencia directa se tiene el siguiente

Corolario ([Kuc85], Teorema 7.1.1)

Una función $\mathfrak{f} : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{R}$ es convexa si y sólo si es continua y Jensen-convexa.

Funciones aproximadamente convexas.

Sean ϵ y δ números reales, no negativos.

Definición

Se dice que la función, $\mathfrak{f} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{R}$ es (ϵ, δ)**-convexa** en $\mathfrak{D}$, si para todo $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{D}$ y para todo $\mathfrak{t} \in [0, 1]$:

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{t}\mathfrak{x} + (1-\mathfrak{t})\mathfrak{y}) \leq \mathfrak{t}\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) + (1-\mathfrak{t})\mathfrak{f}(\mathfrak{y}) + \epsilon\mathfrak{t}(1-\mathfrak{t})||\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|| + \delta. \tag{1.5}$$

Definición

Se dice que la función $\mathfrak{f} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{R}$, es (ϵ, δ)**-Jensen-convex** en $\mathfrak{D}$, si para todo $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{f}\left(\frac{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}}{2}\right) \leq \frac{\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{f}(\mathfrak{y})}{2} + \epsilon||\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|| + \delta. \tag{1.6}$$

Resultados de tipo B–D.

Teorema ([NN93], Teorema 1.)

Si $\mathfrak{f} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{R}$ *es* $(0, \delta)$*-Jensen-convexa y localmente acotada superior en algún punto de* $\mathfrak{D}$*, entonces* $\mathfrak{f}$ *es* $(0, 2\delta)$*-convexa.*

Teorema ([HP04], Teorema 4.)

Si $\mathfrak{f}$ *es* $(\epsilon, 0)$*-Jensen convexa y localmente acotada superior en algún punto de* $\mathfrak{D}$*, entonces,* $\mathfrak{f}$ *satisface la siguiente desigualdad*

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{t}\mathfrak{x} + (1-\mathfrak{t})\mathfrak{y}) \leq \mathfrak{t}\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) + (1-\mathfrak{t})\mathfrak{f}(\mathfrak{y}) + 2\epsilon\mathfrak{T}(\mathfrak{t})\|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}\|, \tag{1.7}$$

donde $\mathfrak{T}(\cdot) : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ *es la función de Takagi, que se define mediante la fórmula*

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{t}) = \sum_{\mathfrak{k}=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\mathfrak{k}}} \operatorname{dist}(2^{\mathfrak{k}}\mathfrak{t}, \mathfrak{Z}) \tag{1.8}$$

Funciones fuertemente convexas.

Sea $\mathfrak{c}$ un número real positivo. Siguiendo a Polyak, [Pol66]

Definición

Una función $\mathfrak{f} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{R}$ es **fuertemente convexa** con módulo $\mathfrak{c}$ si para todo $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{D}$ y para todo $\mathfrak{t} \in [0, 1]$

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{t}\mathfrak{x} + (1 - \mathfrak{t})\mathfrak{y}) \leq \mathfrak{t}\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) + (1 - \mathfrak{t})\mathfrak{f}(\mathfrak{y}) - \mathfrak{c}\mathfrak{t}(1 - \mathfrak{t})||\mathfrak{x} - \mathfrak{y}||^2 \tag{1.9}$$

Teorema ([AGNS11], Teorema 2.3)

Si $\mathfrak{f} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{R}$ es fuertemente Jensen-convexa con módulo $\mathfrak{c}$, y localmente acotada superior en un punto de $\mathfrak{D}$ entonces $\mathfrak{f}$ es continua y fuertemente convexa con módulo $\mathfrak{c}$.

Multifunciones $\mathfrak{K}$-Convexas.

Sean $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ espacios topológicos lineales, $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{Y}$ un cono convexo cerrado y $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{X}$ un conjunto convexo y abierto. Denote por $\mathfrak{P}(\mathfrak{Y})$ a la clase de subconjuntos no-vacios de $\mathfrak{Y}$.

Definición

Una multifunción $\mathfrak{F} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{P}(\mathfrak{Y})$ es **$\mathfrak{K}$-convexa** en $\mathfrak{D}$, si para todo $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{D}$ y todo $\mathfrak{t} \in [0, 1]$

$$\mathfrak{t}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) + (1 - \mathfrak{t})\mathfrak{F}(\mathfrak{y}) \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{t}\mathfrak{x} + (1 - \mathfrak{t})\mathfrak{y}) + \mathfrak{K}. \tag{2.10}$$

Cono Recesión.

Definición

Sea $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$ un conjunto no vacío. El **cono recesión** de $\mathfrak{H}$ denotado por $\operatorname{rec}(\mathfrak{H})$ es el conjunto

$$\mathfrak{rec}(\mathfrak{H}) := \{\mathfrak{x} \in \mathfrak{X} \mid \mathfrak{t}\mathfrak{x} + \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}, \text{ for all } t \geq 0\}. \tag{2.11}$$

Propiedades.

1. $\operatorname{rec}(\mathfrak{H})$ es un cono convexo que contiene al origen;
2. $\mathfrak{K} = \operatorname{rec}(\mathfrak{H})$ es el cono más grande con la propiedad $\mathfrak{K} + \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}$;
3. $\overline{\operatorname{rec}}(\mathfrak{H}) \subseteq \operatorname{rec}(\overline{\mathfrak{H}})$;
4. para todo $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$, $t > 0$, $\operatorname{rec}(\mathfrak{t}\mathfrak{x} + \mathfrak{H}) = \operatorname{rec}(\mathfrak{H})$;
5. $\operatorname{rec}(\mathfrak{H}_1) + \operatorname{rec}(\mathfrak{H}_2) \subseteq \operatorname{rec}(\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2)$, para todo $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{X}$.

Acotación de multifunciones.

Definición

Sea $\mathfrak{S} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{P}(\mathfrak{Y})$ una multifunción. Se dice que $\mathfrak{S}$ es **localmente semi-$\mathfrak{K}$-acotada inferior** si para todo $\mathfrak{x} \in \mathfrak{D}$ existe un entorno abierto $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{X}$ de $\mathfrak{x}$ y un conjunto acotado $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$, tal que

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{u}) \subseteq \mathrm{cl}(\mathfrak{H} + \mathfrak{K}), \qquad (\mathfrak{u} \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{D}).$$

Definición

Sea $\mathfrak{S} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{P}(\mathfrak{Y})$ una multifunción. Se dice que $\mathfrak{S}$ es **localmente débil-semi-$\mathfrak{K}$-acotada superior** si para todo $\mathfrak{x} \in \mathfrak{D}$ existe un entorno abierto $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{X}$ de $\mathfrak{x}$ y un conjunto acotado $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$, tal que

$$0 \in \mathrm{cl}(\mathfrak{S}(\mathfrak{u}) + \mathfrak{H} + \mathfrak{K}), \qquad (\mathfrak{u} \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{D}).$$

Asumamos que $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{X}$ es un conjunto estrellado.

Definición

Para una multifunción $\mathfrak{S} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{P}(\mathfrak{Y})$, tal que $0 \in \mathfrak{S}(\mathfrak{x})$ para todo $\mathfrak{x} \in \mathfrak{D}$, definimos la **transformación de Takagi** de $\mathfrak{S}$, como la multifunción $\mathfrak{S}^{\mathfrak{T}} : \mathfrak{R} \times \mathfrak{D} \to \mathfrak{P}(\mathfrak{Y})$ tal que

$$\mathfrak{S}^{\mathfrak{T}}(\mathfrak{t}, \mathfrak{x}) := \mathrm{cl}\left(\bigcup_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} \sum_{\mathfrak{k}=0}^{\mathfrak{n}} \frac{1}{2^{\mathfrak{n}}} \mathfrak{S}\big(2\,\mathrm{dist}(2^{\mathfrak{k}}\mathfrak{t}, \mathfrak{Z})\mathfrak{x}\big)\right). \tag{2.12}$$

Relación entre $\mathfrak{S}$ y $\mathfrak{S}^{\mathfrak{T}}$.

Sea $\mathfrak{S} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{P}(\mathfrak{Y})$ una multifunción tal que $0 \in \mathfrak{S}(\mathfrak{x})$ para todo $\mathfrak{x} \in \mathfrak{D}$. Entonces

$$\mathrm{cl}(\mathfrak{S}(\mathfrak{x})) \subseteq \mathfrak{S}^{\mathfrak{T}}\left(\tfrac{1}{2}, \mathfrak{x}\right) \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{D}). \tag{2.13}$$

Además si $\mathfrak{S}(0) \subseteq \overline{\mathrm{rec}}(\mathfrak{S})$ entonces la inclusión (2.13), se convierte en una igualdad.

Algunas transformaciones de Takagi

Sea $\mathfrak{S}_0 \subseteq \mathfrak{Y}$ un conjunto convexo que contiene a 0 y sea φ una función no negativa localmente acotada superior.

1. $\mathfrak{S}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{K} + \varphi(\mathfrak{x})\mathfrak{S}_0 \overset{\mathfrak{T}.\mathfrak{T}}{\to} \mathfrak{S}^{\mathfrak{T}}(t, \mathfrak{x}) = \mathrm{cl}\Big(\mathfrak{K} + \varphi^{\mathfrak{T}}(t, \mathfrak{x})\mathfrak{S}_0\Big)$, donde
$$\varphi^{\mathfrak{T}}(t, \mathfrak{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi(2\,\mathrm{dist}(2^n t, \mathfrak{Z})\mathfrak{x}).$$
2. Cuando, $\varphi(\mathfrak{x}) = ||\mathfrak{x}||^{\alpha}$, entonces: $\varphi^{\mathfrak{T}}(t, \mathfrak{x}) = \mathfrak{T}_{\alpha}(t)||\mathfrak{x}||^{\alpha}$,donde la función $\mathfrak{T}_{\alpha}(\cdot) : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ es la función de takagi de orden α, definida por
$$\mathfrak{T}_{\alpha}(t) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\alpha-n}(\mathrm{dist}(2^n t, \mathfrak{Z}))^{\alpha} \qquad (2.14)$$

Teorema ([GNPR14], Theorem 4.1)

Sea $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{X}$ *un subconjunto no-vacío y convexo. Sean* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} : (\mathfrak{D} - \mathfrak{D}) \to \mathfrak{P}(\mathfrak{Y})$, *multifunciones tales que* $0 \in \mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ *para todo* $\mathfrak{x} \in (\mathfrak{D} - \mathfrak{D})$, *y consideremos* $\mathfrak{K} = \overline{\text{rec}}(\mathfrak{B})$. *Sea* $\mathfrak{F} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{P}(\mathfrak{Y})$ *una multifunción que satisface la siguiente inclusión de convexidad tipo Jensen para todo* $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{D}$

$$\frac{\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{F}(\mathfrak{y})}{2} + \mathfrak{A}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) \subseteq \text{cl}\left(\mathfrak{F}\left(\frac{\mathfrak{x} + \mathfrak{y}}{2}\right) + \mathfrak{B}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})\right). \tag{3.15}$$

Supongamos además que $\mathfrak{F}$ *es puntualmente semi-*$\mathfrak{K}$*-acotada inferior y localmente semi-débil-*$\mathfrak{K}$*-acotada superior en* $\mathfrak{D}$. *Entonces* $\mathfrak{F}$ *satisface para* $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{D}$ *y* $\mathfrak{t} \in [0, 1]$, *la inclusión*

$$\begin{aligned} &\mathfrak{t}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) + (1 - \mathfrak{t})\mathfrak{F}(\mathfrak{y}) + \mathfrak{A}^{\mathfrak{T}}(\mathfrak{t}, \mathfrak{x} - \mathfrak{y}) \\ &\qquad \subseteq \text{cl}\Big(\mathfrak{F}(\mathfrak{t}\mathfrak{x} + (1 - \mathfrak{t})\mathfrak{y}) + \mathfrak{B}^{\mathfrak{T}}(\mathfrak{t}, \mathfrak{x} - \mathfrak{y})\Big). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Los siguientes corolarios generalizan algunos de los resultados obtenidos por Averna, Cardinali,Nikodem, Papalini and Borwein [AC90, Bor77, CNP93, Nik86, Nik87a, Nik87b, Nik89, Pap90] relacionados con multifunciones $\mathfrak{K}$-convexas. Tambien, los resultados de Azócar, Giménez, Nikodem and Sánchez para funciones fuertemente convexas se pueden obtener como consecuencia directa de los mismos, asi como también los resultados obtenidos por Leiva, Merentes, Nikodem and Sánchez [LMNS13] relacionados con multifunciones fuertemente convexas.

Sea $\varphi : \mathfrak{D} - \mathfrak{D} \to \mathfrak{R}_+$ una función no negativa, localmente acotada superior y sea $\mathfrak{S}_0 \subseteq \mathfrak{Y}$ un conjunto convexo que contiene a $0 \in \mathfrak{Y}$.

Corolario ([GNPR14], Corollary 4.4)

Supongamos que $\mathfrak{F} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{P}(\mathfrak{Y})$ es una multifunción puntualmente semi-$\mathfrak{K}$-acotada superior y localmente semi-débil-$\mathfrak{K}$-acotada superior que satisface

$$\frac{\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{F}(\mathfrak{y})}{2} \subseteq \mathrm{cl}\left(\mathfrak{F}\left(\frac{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}}{2}\right) + \mathfrak{K} + \varphi(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})\mathfrak{S}_0\right) \quad (\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{D}).$$

Entonces

$$t\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) + (1-t)\mathfrak{F}(\mathfrak{y}) \subseteq \mathrm{cl}\Big(\mathfrak{F}(t\mathfrak{x} + (1-t)\mathfrak{y}) + \mathfrak{K} + \varphi^{\mathfrak{T}}(t, \mathfrak{x}-\mathfrak{y})\mathfrak{S}_0\Big),$$

para todo $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{D}$ y para todo $t \in [0,1]$.

Corolario ([GNPR14], Corollary 4.5)

Supongamos que $\mathfrak{F} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{P}(\mathfrak{Y})$ *es una multifunción puntualmente semi-*$\mathfrak{K}$*-acotada superior y localmente semi-débil-*$\mathfrak{K}$*-acotada superior que satisface*

$$\frac{\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{F}(\mathfrak{y})}{2} + \varphi(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})\mathfrak{S}_0 \subseteq \operatorname{cl}\left(\mathfrak{F}\left(\frac{\mathfrak{x} + \mathfrak{y}}{2}\right) + \mathfrak{K}\right) \quad (\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{D}).$$

Entonces

$$t\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) + (1 - t)\mathfrak{F}(\mathfrak{y}) + \varphi^{\mathfrak{T}}(t, \mathfrak{x} - \mathfrak{y})\mathfrak{S}_0 \subseteq \operatorname{cl}\Big(\mathfrak{F}(t\mathfrak{x} + (1 - t)\mathfrak{y}) + \mathfrak{K}\Big),$$

para todo $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{D}$ *y para todo* $t \in [0, 1]$.

References I

[AC90] A. Averna and T. Cardinali, *On the concepts of $\Re$-convexity [$\Re$-concavity] and $\Re$-convexity* [$\Re$-concavity*]*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **16** (1990), no. 1-2, 311–330. MR 1105752 (92h:26031)

[AGNS11] A. Azócar, J. Giménez, K. Nikodem, and J. L. Sánchez, *On strongly midconvex functions*, Opuscula Math. **31** (2011), no. 1, 15–26.

[BD15] F. Bernstein and G. Doetsch, *Zur theorie der konvexen funktionen*, Math. Ann. **76** (1915), no. 4, 514–526. MR 1511840

[Bor77] J.M. Borwein, *Multivalued convexity and optimization: a unified approach to inequality and equality constraints*, Math. Programming **13** (1977), no. 2, 183–199. MR 0451166 (56 #9453)

[CNP93] T. Cardinali, K. Nikodem, and F. Papalini, *Some results on stability and on characterization of $\Re$-convexity of set-valued functions*, Ann. Polon. Math. **58** (1993), no. 2, 185–192.

[GNPR14] Carlos González, Kazimierz Nikodem, Zsolt Páles, and Gari Roa, *Bernstein–doetsch type theorems for set-valued maps of strongly and approximately convex and concave type*, Pub. Math. Debrecen **84** (2014).

[HP04] A. Házy and Zs. Páles, *On approximately midconvex functions*, Bull. London Math. Soc. **36** (2004), no. 3, 339–350. MR 2004j:26020

[Kuc85] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, vol. 489, Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985. MR 86i:39008

[LMNS13] H. Leiva, N. Merentes, K. Nikodem, and J. L. Sánchez, *Strongly convex set-valued maps*, J. Global Optim. (2013).

References II

[Nik86] K. Nikodem, *Continuity of $\mathfrak{K}$-convex set-valued functions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **34** (1986), no. 7-8, 393–400.

[Nik87a] ______, *On concave and midpoint concave set-valued functions*, Glas. Mat. Ser. III **22(42)** (1987), no. 1, 69–76. MR 89g:39017

[Nik87b] ______, *On midpoint convex set-valued functions*, Aequationes Math. **33** (1987), no. 1, 46–56. MR 88h:90171

[Nik89] K Nikodem, *$\mathfrak{K}$-convex and $\mathfrak{K}$-concave set-valued functions*, Zeszyty Nauk. Politech. Łódz. Mat. (Łódz) **559** (1989), 1–75, (Rozprawy Nauk. 114).

[NN93] C. T. Ng and K. Nikodem, *On approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), no. 1, 103–108.

[Pap90] F. Papalini, *The $\mathfrak{K}$-midpoint * convexity [concavity] and lower [upper] $\mathfrak{K}$-semicontinuity of a multifunction*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **16** (1990), no. 1-2, 149–159 (1991). MR 1105736 (92h:26032)

[Pol66] B. T. Polyak, *Existence theorems and convergence of minimizing sequences for extremal problems with constraints*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **166** (1966), 287–290. MR 33 #6466