UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA.
POSTGRADO EN MATEMATICA.
FACULTAD DE CIENCIAS.

Teoremas de tipo Bernstein-Doetsch para multifunciones midconvexas y midcóncavas.

Autor: Lic. Carlos González.

Tutor: Dr. Nelson Merentes.

Trabajo de Grado de Maestría presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Magister Scientiarium, Mención Matemática.

Caracas, Venezuela
Abril, 2015

Índice general

Introducción

El Teorema de Bernstein y Doetsch [3] publicado en 1915, es uno de los teoremas más importantes en la teoría de convexidad. Este teorema asegura que si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función Jensen convexa (donde D es un intervalo de la recta real), i.e.,

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad (x, y \in D) \tag{1}$$

y también es localmente acotada superior, entonces f debe ser convexa sobre D. Si $-f$ es Jensen convexa, entonces se dice que f es Jensen cóncava y los resultados obtenidos para esta clase de funciones son análogos bajo la hipótesis de que f debe ser localmente acotada inferior. Este teorema es muy importante y ha sido aplicado y generalizado de muchas maneras las cuales describiremos brevemente a continuación.

Quien es Y?

Cuando el co-dominio de f es un espacio vectorial ordenado, i.e, el conjunto K de elementos no-negativos de Y forma un cono convexo, entonces se puede definir la convexidad de tipo Jensen con respecto al cono K (frecuentemente conocida como Jensen K-convexidad) de la función $f : D \to Y$ por

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \in f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + K \qquad (x, y \in D). \tag{2}$$

En particular, si $Y = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{R}_+$, entonces (2) es equivalente a (1). Las extensiones del teorema de Bernstein–Doetsch a esta clase de funciones fueron formuladas por Trudzik [33]. Las funciones $f : D \to Y$ que satisfacen la inclusión

No explica ni menciona ninguna de esas generaliz. Cm

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \in \frac{f(x)+f(y)}{2} + K \qquad (x, y \in D) \tag{3}$$

se denominan K-Jensen cóncavas. Evidentemente, esta última relación es válida si y sólo si $(-f)$ es K-Jensen convexa (ó si f es $(-K)$-Jensen convexa). Por lo tanto, los resultados relacionados con funciones K-Jensen cóncavas siempre pueden ser obtenidos directamente de los resultados establecidos para funciones K-Jensen convexas.

Generalizado un poco más, podemos considerar el caso de las multifunciones. Se dice que una multifunción $F : D \to 2^Y$ es K-Jensen convexa si para todo $x, y \in D$ se

No hay mención a ninguno de esos resultados específicamente.

cumple lo siguiente

$$\frac{F(x)+F(y)}{2} \subseteq F\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + K. \tag{4}$$

Observe que si F es de la forma $F(x) = \{f(x)\}$ para alguna función $f : D \to Y$, entonces (4) es equivalente a (2), y así se evidencia como la inclusión (4) generaliza (2). Los resultados de tipo Bernstein–Doetsch para este tipo de multifunciones han sido obtenidos durante las últimas cinco décadas por los profesores Averna, Cardinali, Nikodem, Papalini [1, 6, 22, 23, 24, 25, 26] y Borwein [5]. La noción de K-Jensen concavidad para una multifunción $F : D \to 2^Y$, análoga a la inclusión (3), se define por

$$F\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \subseteq \frac{F(x)+F(y)}{2} + K \qquad (x, y \in D). \tag{5}$$

Sería ideal dar un ejemplo, que de hecho existe, de este caso

Observe que, en general, la K-Jensen concavidad de F *no es* equivalente a la K-Jensen convexidad de $(-F)$. Esto trae como consecuencia, que al hablar de multifunciones, los resultados relacionados a convexidad y concavidad necesitan ser tratados por separado.

Otra cadena de generalizaciones del teorema de Bernstein–Doetsch emerge del artículo del profesor K. Nikodem junto con el prof. Ng [21] en el contexto de convexidad aproximada. Allí, ellos demuestran que si $f : D \to \mathbb{R}$ es ε-Jensen convexa para algún $\varepsilon \geq 0$, i.e.,

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \varepsilon \qquad (x, y \in D), \tag{6}$$

y si además f es localmente acotada superior, entonces f es 2ε-convexa, i.e.,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + 2\varepsilon \qquad (x, y \in D,\, t \in [0,1]). \tag{7}$$

La versión correspondiente del resultado anterior para el caso de multifunciones, será formulado como una consecuencia de los resultados principales obtenidos en nuestra investigación.

Considerando un término de error más general, Házy y Páles [10] investigaron la siguiente desigualdad de tipo Jensen aproximada

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \varepsilon\|x-y\| \qquad (x, y \in D), \tag{8}$$

asumiendo que D es un subconjunto de un espacio normado X y f es una función a valores reales. En dicho artículo, los autores demostraron que bajo la hipótesis usual de

Esto debe hacerse con un poco mas de detalle

que f es localmente acotada superior, la desigualdad (8) implica

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + 2\varepsilon T(t)\|x - y\| \qquad (x, y \in D,\, t \in [0,1]), \quad (9)$$

donde la función $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es la conocida función de Takagi, y se define por

$$T(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{dist}(2^n t, \mathbb{Z}). \qquad (10)$$

Algunos resultados, que extienden este tipo de nociones a términos más generales de errores y también a conceptos de convexidad relacionados con sistemas de Chebyshev, han sido obtenidos recientemente por Házy, Makó and Páles [8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19] y por Mureńko, Ja. Tabor, Jó. Tabor, and Żoldak [20, 28, 29, 30, 31].

Para el caso de multifunciones de tipo K-Jensen convexas y K-Jensen cóncavas, haremos formulaciones más generales como consecuencia directa de los resultados principales de nuestra investigación.

Es este el tema principal o el único o uno de los que se atacan en este trabajo?

Finalmente, haremos mención a la noción de convexidad fuerte, la cual en cierto sentido, es lo contrario a convexidad aproximada. Siguiendo a Polyak [27], una función $f : D \to \mathbb{R}$ es fuertemente Jensen convexa con módulo $\varepsilon \geq 0$ if

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\|x-y\|^2 \qquad (x, y \in D). \qquad (11)$$

Asumiendo que f es localmente acotada superior, los profesores Azócar, Gimenez, Nikodem y Sanchez en [2] demostraron que si f es fuertemente Jensen convexa entonces f es fuertemente convexa con módulo ε, i.e.,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \varepsilon t(1-t)\|x-y\|^2 \qquad (x, y \in D,\, t \in [0,1]). \qquad (12)$$

La versión conjunto valuada de este resultado fue establecida por Leiva, Merentes, Nikodem, y Sanchez [15]. Resultados más abstractos y poderosos serán corolarios de los resultados principales obtenidos en nuestra investigación.

• No dice nada sobre los resultados específicos de la investigación que aquí se realiza. En esto debe ser preciso!

y si fueron publicados debe agregar a las referencias el paper de estos resultados como tal!

Capítulo 1

Deberían darse las correspondientes referencias de don tomados estos conceptos y resultados.

Espacios Topológicos Lineales.

En este capítulo se hará un breve desarrollo de algunos conceptos de topología que serán usados a lo largo de todo el trabajo.

1.1. Espacios topológicos.

Sea X un conjunto, denotemos por $\mathcal{P}(X)$ al conjunto potencia de X.

Definición 1.1.1. *Un **espacio topológico** consiste en una dupla $(X, \mathcal{T})$, donde X es un conjunto y $\mathcal{T}$ es un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ que cumple con las siguientes propiedades:*

I. $\emptyset \in \mathcal{T}$ *y* $X \in \mathcal{T}$.

II. *Si $\{U_\alpha\} \subseteq \mathcal{T}$ es una colección de elementos de $\mathcal{T}$, entonces:*

$$\bigcup_{\alpha} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

III. *Si $\{U_k\}_{k=1}^{n} \subseteq \mathcal{T}$ es una colección finita de elementos de $\mathcal{T}$, entonces:*

$$\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \mathcal{T}.$$

Cuando $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, los elementos de $\mathcal{T}$ se llaman **conjuntos abiertos**. En lo que sigue a continuación, el par $(X, \mathcal{T})$ denotará un espacio topológico. Cuando no haya lugar a confusión se omitirá la topología.

Definición 1.1.2. *Decimos que el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, es un espacio de Hausdorff, si para cada par de puntos diferentes, $x, y \in X$ existen abiertos disjuntos $U_x, U_y \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U_x$ y $y \in U_y$.*

Definición 1.1.3. *Dado un conjunto $A \subseteq X$ y un punto $p \in X$, se dice que p es un* ***punto de acumulación*** *del conjunto A, si para todo abierto $U \in \mathcal{T}$ que contiene a p, se tiene que*

$$A \bigcap (U \setminus \{p\}) \neq \emptyset \tag{1.1}$$

Definición 1.1.4. *Un conjunto $V \subseteq X$ es* ***cerrado****, si el conjunto $X \setminus V$ es abierto, ie, $X \setminus V \in \mathcal{T}$.*

Los conjuntos cerrados también se pueden caracterizar de la siguiente manera

Proposición 1.1.5. *Un subconjunto $V \subseteq X$ es cerrado, si y sólo si V contiene todos sus puntos de acumulación.*

Es posible definir una topología en términos de conjuntos cerrados:

Teorema 1.1.6. *Sea X un espacio topológico, la clase de conjuntos cerrados en X, posee las siguientes propiedades:*

I. *X y $\emptyset$ son conjuntos cerrados.*

II. *La intersección arbitraria de conjuntos cerrados, es cerrado.*

III. *La unión finita de conjuntos cerrados, es cerrado.*

Definición 1.1.7. *Sea $A \subseteq X$. La* ***clausura*** *de A, se denota por $\mathrm{cl}(A)$ y se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen al conjunto A. Esto es,*

$$\mathrm{cl}(A) := \bigcap_{V \subseteq X} \{V : A \subseteq V \quad y \quad V \quad \textit{es cerrado}\}.$$

Se puede ver que $\mathrm{cl}(A)$ es un conjunto cerrado ya que es la intersección de conjuntos cerrados. Además, $\mathrm{cl}(A)$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene al conjunto A. Es decir, si V es un conjunto cerrado que contiene al conjunto A, entonces:

$$A \subseteq \mathrm{cl}(A) \subseteq V.$$

Además, $V \subseteq X$ es un conjunto cerrado si y solo si $V = \mathrm{cl}(V)$. Todo esto se resume en la siguiente proposición:

Proposición 1.1.8. *Sea $A \subseteq X$. Entonces,*

I. $\mathrm{cl}(A)$ *es cerrado.*

II. *Si V es un conjunto cerrado que contiene al conjunto A, entonces $A \subseteq \mathrm{cl}(A) \subseteq V$.*

III. *A es cerrado si y solo si $A = \mathrm{cl}(A)$.*

Proposición 1.1.9. *Sea $A \subseteq X$. La clausura de A es la unión de A con su conjunto de puntos de acumulación A'. Esto es:*

$$\mathrm{cl}(A) = A \cup A'.$$

El operador clausura, que asigna a cada conjunto A su clausura $\mathrm{cl}(A)$, satisface los 4 axiomas de Kuratowski: (Referencias)

Proposición 1.1.10. *Sean $A, B \subseteq X$, el operador $\mathrm{cl}(\cdot)$ cumple las siguientes propiedades*

I. $\mathrm{cl}(\emptyset) = \emptyset$.

II. $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$.

III. $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B)$.

IV. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$.

Definición 1.1.11. *Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, y un subconjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, se dice que $\mathcal{B}$ es una base para la topología $\mathcal{T}$ si todo conjunto abierto $U \in \mathcal{T}$ es la unión de elementos de $\mathcal{B}$. De manera equivalente, $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{T}$ si y solo si, para todo punto p perteneciente a cualquier abierto $O \in \mathcal{T}$ existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $p \in B \subseteq O$.*

Definición 1.1.12. *Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y un punto $p \in X$. Una base local en p, consiste en una colección de abiertos $\mathcal{B}_p$, tal que, cualquier entorno abierto $U \subseteq X$ de p, contiene al menos un miembro de $\mathcal{B}_p$.*

1.2. Espacios vectoriales.

Denotese por $\mathbb{R}$ al cuerpo de los números reales y por $\mathbb{C}$ al cuerpo de los numeros complejos. Por ahora, se usará Φ para denotar tanto a $\mathbb{R}$ como a $\mathbb{C}$. Un escalar, es un elemento del cuerpo Φ.

Definición 1.2.1. *Un espacio vectorial sobre Φ es un conjunto X, junto con dos operaciones, suma y producto por un escalar las cuales satisfacen las siguientes propiedades*

I. *A cada par de vectores $x, y \in X$ les corresponde un vector $x + y \in X$, de manera que*

$$x + y = y + x \qquad y \qquad x + (y + z) = (x + y) + z.$$

II. *X contiene un único vector 0 el cual se llamará con frecuencia el origen de X, tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in X$. Además a cada vector $x \in X$ le corresponde un vector $-x \in X$ tal que $x + (-x) = 0$.*

III. *A cada par (α, x) con $\alpha \in \Phi$, y $x \in X$ le corresponde un vector $\alpha x \in X$, de manera que*

$$1x = x, \qquad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,$$

y ademas se cumplen las siguientes leyes distributivas

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \qquad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

Observación 1.2.2. *Un espacio vectorial real, es un espacio vectorial donde $\Phi = \mathbb{R}$, y un espacio vectorial complejo, es un espacio vectorial donde $\Phi = \mathbb{C}$. Cualquier afirmación sobre un espacio vectorial, donde no se especifique explicitamente el cuerpo, será válida para ambos casos.*

Definición 1.2.3. *Sea X un espacio vectorial y sean $A, B \subseteq X$, $x \in X$ y $\lambda \in \Phi$, entonces*

$$x + A = \{x + a : a \in A\},$$
$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\},$$
$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$$
$$x - A = \{x - a : a \in A\}.$$

Observación 1.2.4. *Con estas operaciones asi definidas, puede ocurrir que* $A+A \neq 2A$.

Definición 1.2.5. *Un subconjunto* $W \subseteq X$ *es llamado subespacio de* X *si el mismo es un espacio vectorial (con respecto a las mismas operaciones).*

Proposición 1.2.6. *Sea* X *un espacio vectorial y* $W \subseteq X$. W *es un subespacio de* X *si y solo si,* $0 \in W$ *y además, para* $\alpha, \beta \in \Phi$ *se tiene que*

$$\alpha W + \beta W \subseteq W.$$

Definición 1.2.7. *Un conjunto* $D \subseteq X$ *es convexo, si para todo* $t \in [0,1]$ *se tiene que*

$$tD + (1-t)D \subseteq D.$$

En otras palabras, el conjunto D *es convexo si para cualesquiera par de puntos* $x, y \in D$ *se tiene que*

$$[x,y] := \{ty + (1-t)x : t \in [0,1]\} \subseteq D.$$

Definición 1.2.8. *Un conjunto* $D \subseteq X$ *se dice que es balanceado, si para todo* $\alpha \in \Phi$, *con* $|\alpha| \leq 1$, *se tiene que* $\alpha D \subseteq D$,

Definición 1.2.9. *El espacio vectorial* X, *tiene dimensión* n $(\dim X = n)$, *si* X *posee una base* $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$, *de* n *vectores linealmente independientes. Esto quiere decir que todo* $x \in X$, *tiene una representación única de la forma*

$$x = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n, \quad \alpha_i \in \Phi, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Observación 1.2.10. *Si* $\dim X = n$ *para algún número natural* n, *se dice que* X *es de dimensión finita. Si* $X = \{0\}$, *entonces* $\dim X = 0$.

1.3. Espacios topológicos lineales.

Supongamos que $\mathcal{T}$ es una topología para un espacio vectorial X que cumple con lo siguiente:

I. Todo punto de X es un conjunto cerrado.

II. Las operaciones del espacio vectorial, son continuas con respecto a $\mathcal{T}$.

Bajo estas condiciones, se dice que $\mathcal{T}$ es una topología vectorial en X y X es un *espacio topológico lineal.*

Definición 1.3.1. *Un subconjunto $H \subseteq X$ es acotado, si para todo entorno abierto U de $0 \in X$, existe un número $s > 0$ tal que $H \subseteq tU$ para todo $t > s$.*

Definición 1.3.2. *Sea X un espacio topológico lineal. Para cada $a \in X$ y para cada $\lambda \neq 0$, se definen los operadores de traslación y multiplicación, $T_a(x)$ y $M_\lambda(x)$ respectivamente, de la siguiente manera*

$$T_a(x) = x + a \qquad y \qquad M_\lambda(x) = \lambda x, \quad (x \in X). \tag{1.2}$$

Proposición 1.3.3. *T_a y M_λ son homeomorfismos de X en X.*

Demostración. Los axiomas de espacio vectorial, implican que estos operadores son biyectivos, y además que sus inversas son T_{-a} y $M_{1/\lambda}$, respectivamente. El hecho de que las operaciones, suma y producto por un escalar sean continuas, implica que tanto T_a como M_λ, así como sus inversas sean continuas. $\square$

Como consecuencia de esta proposición, se tiene que toda topología vectorial $\mathcal{T}$ es invariante. Es decir, un conjunto $E \subseteq X$ es abierto, si y sólo si, para todo $a \in X$, el conjunto $a + E$ es abierto. Así, $\mathcal{T}$ está completamente determinada por cualquier base local.

En este contexto, el término base local, se refiere a la base local en $0 \in X$. Denotemos por $\mathcal{U}(X)$ a dicha base.

Definición 1.3.4. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico lineal. Se dice que el abierto* $U \subseteq X$*, es simétrico si y sólo si* $U = -U$.

Proposición 1.3.5. *Si* $W \subseteq X$ *es un entorno abierto de* $0 \in X$*, entonces, existe un entorno abierto y simétrico* $U \subseteq X$*, de* 0 *tal que* $U + U \subseteq W$.

Demostración. Sea $W \subseteq X$ un entorno abierto de 0. Como la operación suma es continua y $0 = 0 + 0$, entonces, existen entornos abiertos V_1, V_2 de 0, tales que

$$V_1 + V_2 \subseteq W.$$

Definamos $U := V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$. Es claro que U es un abierto simétrico, y que además

$$U + U \subseteq W.$$

□

Proposición 1.3.6. *La familia de subconjuntos acotados es cerrada bajo la suma y el producto por escalares positivos.*

Demostración. Sean $H_1, H_2 \subseteq X$ conjuntos acotados. Veamos que la suma $H := H_1 + H_2$ es un conjunto acotado. Sea $V \subseteq X$ un entorno abierto de $0 \in X$ y escojamos $U \in \mathcal{T}$ tal que $0 \in U$ y $U + U \subseteq V$. Como H_1 y H_2 son acotados, existen escalares positivos t_1 y t_2 tales que

$$H_1 \subseteq s_1 U \qquad \text{si} \quad s_1 > t_1,$$

$$H_2 \subseteq s_2 U \qquad \text{si} \quad s_2 > t_2.$$

Ahora bien, si $s > \text{máx}(t_1, t_2)$ entonces,

$$H = H_1 + H_2 \subseteq sU + sU = s(U + U) \subseteq sV.$$

Por lo tanto, el conjunto H es acotado. De manera similar se demuestra que tH_1 es acotado para cualquier escalar positivo t. □

Teorema 1.3.7. *Suponga que* K *y* C *son subconjuntos de un espacio topológico lineal* X*,* K *es compacto,* C *es cerrado y que* $K \cap C = \emptyset$*. Entonces, existe un entorno* V *de* $0 \in X$ *tal que*

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset.$$

Demostración. Si $K = \emptyset$, entonces $K + V = \emptyset$ y la conclusión del teorema es directa. Por lo tanto, asuma que $K \neq \emptyset$. Sea $x \in K$. Como K y C son disjuntos, se tiene que x no está en C, por la Proposición 1.3.5, existe un abierto simétrico $V_x \subseteq X$ tal que

$$(x + V_x + V_x + V_x) \cap C = \emptyset.$$

Como V_x es simétrico, la condición anterior equivale a

$$(x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \emptyset. \tag{1.3}$$

Por otra parte, K es compacto, es decir que admite un cubrimiento finito

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i}).$$

Ahora bien, al considerar $V := V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$, se tiene que

$$K + V \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V_{x_i}),$$

y por (1.3), ningún término en está última unión intersecta a $C + V$. Finalmente,

$$(K + V) \bigcap (C + V) = \emptyset.$$

$\square$

Como consecuencia del resultado anterior, se tienen los siguientes teoremas

Teorema 1.3.8. *Para todo elemento $B_1 \in \mathfrak{U}(X)$, existe otro elemento $B_2 \in \mathfrak{U}(X)$, tal que*

$$\mathrm{cl}(B_2) \subseteq B_1.$$

Demostración. Sea $B_1 \in \mathfrak{U}(X)$, definamos los conjuntos $C := X \setminus B_1$ y $K := \{0\}$. Es claro que C es cerrado, pues, es el complemento de un elemento en $\mathfrak{U}(X)$, y que además, K es compacto. Por otra parte, $0 \notin C$, es decir, $K \cap C = \emptyset$. Por el Teorema 1.3.7, existe un abierto $W \in \mathfrak{U}(X)$, tal que $W \cap (W + C) = \emptyset$. Ahora bien, está última condición implica que $W \cap C = \emptyset$, lo que se reduce a $W \subseteq B_1$.

Aplicando la Proposición 1.3.5 al abierto W, se tiene que existe un abierto simétrico, $B_2 \in \mathfrak{U}(X)$, tal que $B_2+B_2 \subseteq W$, por lo tanto, se tiene la siguiente cadena de inclusiones

$$\mathrm{cl}(B_2) \subseteq B_2 + B_2 \subseteq W \subseteq B_1,$$

la cual, finaliza la demostración. □

Teorema 1.3.9. *Todo espacio topológico lineal, es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Basta considerar el hecho de que los conjuntos unipuntuales en un espacio topológico lineal, son cerrados y aplicar el Teorema 1.3.7. □

Teorema 1.3.10. *Sea X un espacio topológico lineal.*

1. *Si $A \subseteq X$ entonces,* $\mathrm{cl}(A) = \bigcap_{V \in \mathfrak{U}(X)} (A + V)$,

2. *Si $A \subseteq X$ y $B \subseteq X$, entonces,* $\mathrm{cl}(A) + \mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A + B) = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A) + \mathrm{cl}(B))$.

3. *Si $A \subseteq X$ es un conjunto acotado, entonces* $\mathrm{cl}(A)$ *también lo será.*

Demostración. Consideremos el espacio topológico lineal X.

1. Sea $A \subseteq X$, veamos que $\mathrm{cl}(A) = \bigcap (A + V)$, donde V recorre todos los entornos abiertos de 0. Ahora bien, $x \in \mathrm{cl}(A)$ si y sólo si, $(x+V) \cap A \neq \emptyset$ para todo entorno abierto $V \in \mathfrak{U}(X)$. Pero está condición se cumple si y solo si $x \in A + (-V)$, para todo abierto $V \in \mathfrak{U}(X)$. Además, V es un entorno abierto de 0, si y sólo si, $-V$ lo es, por lo tanto,
$$\mathrm{cl}(A) = \bigcap_{V \in \mathfrak{U}(X)} (A + V).$$

2. Sean $U, V \in \mathfrak{U}(X)$ tales que $V + V \subseteq U$. Sean $a \in \mathrm{cl}(A)$ y $b \in \mathrm{cl}(B)$, evidentemente, $a + b \in \mathrm{cl}(A) + \mathrm{cl}(B)$, y además,
$$a + b \in \mathrm{cl}(A) + \mathrm{cl}(B) \subseteq A + V + B + V \subseteq A + B + U.$$
Como U es arbitrario, se tiene lo siguiente
$$a + b \in \bigcap_{U \in \mathfrak{U}(X)} (A + B + U) = \mathrm{cl}(A + B).$$

Esto es,

$$\mathrm{cl}(A) + \mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A + B).$$

3. Sea $A \subseteq X$ un conjunto acotado. Veamos que $\mathrm{cl}(A)$ también, es un conjunto acotado. Considere $U \in \mathfrak{U}(X)$, por el Teorema 1.3.8 existe un abierto $W \in \mathfrak{U}(X)$ tal que, $\mathrm{cl}(W) \subseteq U$. Como A es acotado, existe un número real $s > 0$, tal que $A \subseteq tW$, para todo número real $t > s$. Por lo tanto

$$\mathrm{cl}(A) \subseteq t\,\mathrm{cl}(W) \subseteq tU, \qquad (t > s),$$

es decir, que $\mathrm{cl}(A)$ es acotado.

$\square$

1.4. Conos convexos.

A menos que se especifique otra cosa, X denotará un espacio topológico lineal.

Definición 1.4.1. *El conjunto $K \subseteq X$ es un cono convexo, si $K + K \subseteq K$, y $tK \subseteq K$, para todo escalar $t > 0$.*

Definición 1.4.2. *Se dice que un conjunto $S \subseteq X$ es K-acotado inferiormente, si existe un conjunto acotado H, tal que, $S \subseteq H + K$.*

Proposición 1.4.3. *La unión finita de conjuntos K-acotados inferiormente, es de nuevo un conjunto K-acotado inferiormente.*

Demostración. Basta con probar que la unión de dos conjuntos K-acotados inferiormente es de nuevo un conjunto K-acotado inferiormente. Sean $S_1, S_2 \subseteq X$, dos conjuntos tales que existen conjuntos acotados $H_1, H_2 \subseteq X$ que satisfacen

$$S_1 \subseteq H_1 + K \qquad \text{y}$$
$$S_2 \subseteq H_2 + K.$$

Ahora bien, el resultado es consecuencia de la siguiente cadena de inclusiones

$$\begin{aligned} S_1 \cup S_2 &\subseteq (H_1 + K) \cup (H_2 + K) = \bigcup_{h \in H_1} (h + K) \cup \bigcup_{h \in H_2} (h + K) \\ &= \bigcup_{h \in H_1 \cup H_2} (h + K) = (H_1 \cup H_2) + K. \end{aligned}$$

□

Proposición 1.4.4. *La familia de subconjuntos K-acotados inferiormente es cerrada bajo la suma y el producto por escalares positivos.*

Demostración. Sean $S_1, S_2 \subseteq X$, dos conjuntos, K-acotados inferiormente. Por definición, existen conjuntos acotados $H_1, H_2 \subseteq X$ tales que

$$S_1 \subseteq H_1 + K \qquad \text{y} \qquad S_2 \subseteq H_2 + K. \tag{1.4}$$

Por lo tanto

$$S = S_1 + S_2 \subseteq H_1 + H_2 + K + K \subseteq H_1 + H_2 + K,$$

pero por la Proposición 1.3.6, el conjunto $H := H_1 + H_2$ es acotado. Luego, $S \subseteq H + K$, es decir que el conjunto S es K-acotado inferiormente.

Para ver que tS_1 es K-acotado inferiormente, basta con multiplicar la primera inclusión en (1.4) por el escalar t y aplicar de nuevo la Proposición 1.3.6. □

Definición 1.4.5. *Se dice que un conjunto $S \subseteq X$ es semi-K-acotado inferiormente si existe un conjunto acotado H, tal que, $S \subseteq \mathrm{cl}(H + K)$.*

Observación 1.4.6. *De la definición se obtiene de inmediato que todo conjunto S, K-acotado inferiormente automáticamente es, semi-K-acotado inferiormente.*

Proposición 1.4.7. *La familia de conjuntos semi-K-acotados inferiormente es cerrada bajo la suma y el producto por escalares positivos.*

Demostración. Sean $S_1, S_2 \subseteq X$ conjuntos semi-K-acotados inferiormente. Consideremos un abierto arbitrario $V \in \mathcal{U}(X)$. En vista de la Proposición 1.3.5 existe un abierto

$U \in \mathcal{U}(X)$ tal que $U + U \subseteq V$ y por definición, existen conjuntos acotados $H_1, H_2 \subseteq X$ tales que

$$S_1 \subseteq \mathrm{cl}(H_1 + K) \subseteq H_1 + K + U, \qquad \text{y}$$
$$S_2 \subseteq \mathrm{cl}(H_2 + K) \subseteq H_2 + K + U.$$

Luego, usando la convexidad del cono K, y el hecho de que $U + U \subseteq V$, se tiene que para todo abierto $V \in \mathcal{U}(X)$

$$S_1 + S_2 \subseteq H_1 + H_2 + K + K + U + U \subseteq H_1 + H_2 + K + V = H + K + V,$$

donde $H := H_1 + H_2$. Como V es arbitrario, entonces

$$S_1 + S_2 \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{U}(X)} (H + K + V) = \mathrm{cl}(H + K).$$

Finalmente, concluimos que $S_1 + S_2$ es semi-K-acotado inferiormente.

Veamos ahora que tS_1 también es semi-K-acotado inferiormente, para cualquier escalar $t > 0$. Sea $V \in \mathcal{U}(X)$ un abierto arbitrario. Por continuidad, existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $tU \subset V$. Ahora bien, por definición $S_1 \subseteq \mathrm{cl}(H_1 + K)$, y por lo tanto

$$tS_1 \subseteq t\,\mathrm{cl}(H_1 + K) \subseteq tH_1 + tK + tU \subseteq tH_1 + K + V,$$

pero $H := tH_1$ es acotado y V es arbitrario, en consecuencia

$$tS_1 \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{U}(X)} (H + K + V) = \mathrm{cl}(H + K).$$

Es decir, tS_1 es semi-K-acotado inferiormente. □

Proposición 1.4.8. *Si el espacio X es localmente acotado, es decir, si existe un abierto $U \in \mathcal{U}(X)$ que es acotado, entonces la familia de conjuntos K-acotados inferiormente y semi-K-acotados inferiormente coinciden.*

Demostración. Basta probar que si X es localmente acotado, entonces todo subconjunto $S \subseteq X$ semi-K-acotado inferiormente es K-acotado inferiormente. Sea $S \subseteq X$ un conjunto semi-K-acotado inferiormente y sea $U \in \mathcal{U}(X)$ un conjunto abierto y acotado. Por definición existe un conjunto acotado $H_1 \subseteq X$ tal que $S \subseteq \mathrm{cl}(H_1 + K)$. Sea $H := H_1 + U$. Es claro que el conjunto H es acotado y además

$$S \subseteq \mathrm{cl}(H_1 + K) \subseteq H_1 + K + U = H + K,$$

en conclusión, el conjunto S es K-acotado inferiormente. □

Importante y necesario dar las referencias y sobre todo comentarios del uso de estos conceptos y resultados en el trabajo

1.5. Conjuntos K-convexos.

Definición 1.5.1. *Sea $D \subseteq X$. Se dice que D es K-convexo si para todo $x, y \in X$ se tiene que $[x, y] \subseteq D + K$.*

Observación 1.5.2. *En el caso cuando $K = \{0\}$ la definición anterior se reduce a la def inición estandar de convexidad.*

Observación 1.5.3. *Si $0 \in K$, entonces $D \subseteq D + K$ para cualquier subconjunto $D \subseteq X$.*

Como consecuencia inmediata de la observación anterior, tenemos la siguiente

Proposición 1.5.4. *Sea $K \subseteq X$ un cono convexo tal que $0 \in K$. Si el conjunto $D \subseteq X$ es convexo, entonces, también es K-convexo.*

En general, un conjunto K-convexo, no necesariamente tiene que ser convexo.

Ejemplo 1.5.5. Consideremos $X = \mathbb{R}^2$, $K = [0, \infty) \times \{0\}$ y al subconjunto de X dado en coordenadas polares por $D := \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1 \quad \text{y} \quad \pi/4 \leq \theta \leq 7\pi/4\}$. El conjunto D, es K-convexo pero sin embargo no es convexo.

Ejemplo 1.5.6. Si $0 \notin K$ y D es un conjunto convexo, entonces no necesariamente, D es K-convexo.

Proposición 1.5.7. *Supongamos que $0 \in K$. Un conjunto $D \subseteq X$ es K-convexo si y sólo si el conjunto $D + K \subseteq X$ es convexo.*

Demostración. Sea $t \in [0, 1]$. Supongamos que $D \subseteq X$ es K-convexo, entonces

$$t(D + K) + (1 - t)(D + K) \subseteq tD + (1 - t)D + K \subseteq (D + K) + K \subseteq D + K,$$

es decir que, el conjunto $D + K$ es convexo. Supongamos ahora que el conjunto $D + K$ es convexo, por lo tanto

$$tD + (1 - t)D \subseteq tD + (1 - t)D + K = t(D + K) + (1 - t)(D + K) \subseteq D + K.$$

Es decir, el conjunto D es K-convexo. $\square$

No necesariamente un cono convexo K ha de tener al cero como uno de sus elementos, sin embargo,

Proposición 1.5.8. $0 \in \mathrm{cl}(K)$, *para cualquier cono convexo* K.

Demostración. Si $0 \in K$ la demostración es trivial. Supongamos que $0 \notin K$ y sean $V \in \mathfrak{U}(X)$ un abierto simétrico y $k \in K$. Consideremos la sucesión de números reales $(1/2^n)$, cuyo límite es cero. Por lo tanto, existe un número natural N, tal que si $n \geq N$ entonces $k/2^n \in V$. Lo cual es equivalente a

$$0 \in \frac{k}{2^n} + V \subseteq K + V.$$

Como V es arbitrario, se tiene que $0 \in \bigcap_{V \in \mathfrak{U}(X)}(K + V) = \mathrm{cl}(K)$, lo que completa la prueba. $\square$

Definición 1.5.9. *Dado un subconjunto no vacío* $H \subseteq X$, *se define el cono recesión de* H, $(\mathrm{rec}(H))$ *de la siguiente manera*

$$\mathrm{rec}(H) = \{x \in X : tx + H \subseteq H, \text{ para todo } t \geq 0\} \tag{1.5}$$

La siguiente proposición ilustra algunas propiedades del cono recesión asociado al conjunto H

Proposición 1.5.10. *Sea* $H \subseteq X$ *un conjunto no vacío. Entonces*

I. $0 \in \mathrm{rec}(H)$ *y* $\mathrm{rec}(H)$ *es un cono convexo.*

II. $K = \mathrm{rec}(H)$ *es el cono convexo más grande tal que* $K + H \subseteq H$.

III. $\mathrm{cl}(\mathrm{rec}(H)) \subseteq \mathrm{rec}(\mathrm{cl}(H))$.

IV. *Para todo* $x \in X$, $t > 0$, $\mathrm{rec}(x + tH) = \mathrm{rec}(H)$.

V. *Para cualesquiera conjuntos no vacíos* $H_1, H_2 \subseteq X$,

$$\mathrm{rec}(H_1) + \mathrm{rec}(H_2) \subseteq \mathrm{rec}(H_1 + H_2).$$

Demostración.

I. En primer lugar es evidente que $0 \in \text{rec}(H)$ pues, $0t + H = H$. Para ver que $\text{rec}(H)$ es convexo, sean $x, y \in \text{rec}(H)$ y sea $s \in [0,1]$. Ahora bien, como x e y están en $\text{rec}(H)$, entonces $t(1-s)y + H \subseteq H$ y $tsx + H \subseteq H$, para cualquier número no-negativo t. Por lo tanto,

$$t(sx + (1-s)y) + H = tsx + t(1-s)y + H \subseteq tsx + H \subseteq H.$$

Es decir, que el segmento $[x, y]$ esta contenido en $\text{rec}(H)$ para cualesquiera $x, y \in H$. De esta manera, se ha demostrado que en efecto, $\text{rec}(H)$ es un conjunto convexo.

II. Supongamos que $K \subseteq X$ es un cono convexo, con la propiedad $K + H \subseteq H$, por lo tanto, para cualquier $t \geq 0$ se tiene que

$$tK + H \subseteq K + H \subseteq H,$$

lo cual equivale a $K \subseteq \text{rec}(H)$.

III. En vista del Teorema 1.3.10, se tiene que $\text{cl}(\text{rec}(H)) + \text{cl}(H) \subseteq \text{cl}(\text{rec}(H) + H)$. Además, de la definición se sigue el hecho de que $\text{rec}(H) + H \subseteq H$. Por lo tanto

$$\text{cl}(\text{rec}(H)) + \text{cl}(H) \subseteq \text{cl}(\text{rec}(H) + H) \subseteq \text{cl}(H).$$

Como $\text{cl}(\text{rec}(H))$ es un cono convexo, pues $\text{rec}(H)$ lo és, entonces usando el numeral 2 de esta proposición, se tiene que

$$\text{cl}(\text{rec}(H)) \subseteq \text{rec}(\text{cl}(H)).$$

IV. La demostración es directa de la definición.

V. Es consecuencia directa del numeral 2.

$\square$

Proposición 1.5.11. *Sean $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones no-decrecientes de subconjuntos de X, sea $H \subseteq X$ un conjunto acotado, sea $K \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}(\mathrm{rec}(B_n))$ y sea $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales que converge a cero. Asumamos que, para todo $n \geq 0$,*

$$A_n \subseteq \mathrm{cl}(\epsilon_n H + K + B_n). \tag{1.6}$$

Entonces,

$$\mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) \tag{1.7}$$

Demostración. Sean $U \in \mathfrak{U}(X)$ arbirario y sea $V \in \mathfrak{U}(X)$ un abierto balanceado tal que $V + V + V \subseteq U$. Como H es acotado y (ϵ_n) converge a cero, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces, $\epsilon_n H \subseteq V$. Además, como $K \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}(\mathrm{rec}(B_n))$, se tiene que $K \subseteq \mathrm{rec}(B_n) + V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, para $n \geq N$

$$\begin{aligned} A_n &\subseteq \mathrm{cl}(\epsilon_n H + K + B_n) \subseteq \epsilon_n H + K + B_n + V \\ &\subseteq \mathrm{rec}(B_n) + B_n + V + V + V \subseteq B_n + U \subseteq U + \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\bigcup_{n\geq N} A_n \subseteq U + \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n.$$

Como U es arbitrario, y (A_n) es no-decreciente entonces

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \bigcap_{U\in\mathfrak{U}(X)} \left(U + \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right).$$

El resultado se sigue de inmediato ya que el lado derecho de esta última inclusión es un conjunto cerrado. □

Capítulo 2

Multifunciones.

En el siguiente capítulo, se pretende dar el concepto de multifunción o función conjunto-valuada junto con algunas propiedades importantes. Además, se definirán los conceptos de convexidad y concavidad de multifunciones que serán de mucha importancia en el desarrollo del trabajo.

Hasta acá no se sabe con precisión de lo que trata específicamente el trabajo

2.1. Definiciones Básicas.

Consideremos ahora, otro espacio topológico lineal Y,

Definición 2.1.1. *Si a cada $x \in X$ le corresponde un subconjunto $F(x) \in \mathcal{P}(Y)$, se dice que F es una multifunción de X en Y y simplemente la denotaremos como $F : X \to \mathcal{P}(Y)$.*

Definición 2.1.2. *El dominio de la multifunción $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ es el conjunto*

$$\mathrm{Dom}(F) := \{x \in X | F(x) \neq \emptyset\}.$$

Ejemplo 2.1.3. El primer ejemplo de una multifunción, surge naturalmente a partir de una función dada $f : X \to Y$. Defínase $F : Y \to \mathcal{P}(X)$, tal que $F(y) = f^{-1}(y) = \{x \in X | y = f(x)\}$. Note que $F(y) \neq \emptyset$ si y sólo si, $y \in f(X)$, por lo tanto, $\mathrm{Dom}(F) = f(X)$.

A menos que se especifique otra cosa, F denotará a una multifunción de $D \subseteq X$ en Y.

Debemos dar las correspondientes referencias para definiciones y resultados contando con que es una herramienta fundamental del trabajo

Definición 2.1.4. *El gráfico de una multifunción lo denotaremos por* $\mathrm{Gr}(F)$ *y se define como*

$$\mathrm{Gr}(F) := \{(x, y) \in X \times Y | y \in F(x)\}.$$

En base a esta definición, obtenemos las siguiente

Definición 2.1.5. *Se dice que la multifunción* F *es convexa, si* $\mathrm{Gr}(F)$ *es un subconjunto convexo de* $X \times Y$.

Proposición 2.1.6. *La multifunción* F *es convexa si y sólo si para todo* $x_1, x_2 \in X$ *y para todo* $t \in [0, 1]$, *se tiene que*

$$tF(x_1) + (1 - t)F(x_2) \subseteq F(tx_1 + (1 - t)x_2). \tag{2.1}$$

Demostración. Supongamos que F es convexa, ie, $\mathrm{Gr}(F)$ es un conjunto convexo de $X \times Y$. Sean $x_1, x_2 \in X$ y consideremos $z \in tF(x_1) + (1-t)F(x_2)$. Por lo tanto, existen $y_1 \in F(x_1)$, $y_2 \in F(x_2)$ tales que, $z = ty_1 + (1-t)y_2$. Como $\mathrm{Gr}(F)$ es convexo, entonces, para todo $t \in [0, 1]$

$$t(x_1, y_1) + (1 - t)(x_2, y_2) = (tx_1 + (1 - t)x_2, ty_1 + (1 - t)y_2) \in \mathrm{Gr}(F),$$

es decir $z = ty_1 + (1 - t)y_2 \in F(tx_1 + (1 - t)x_2)$, para todo $t \in [0, 1]$. Lo que demuestra que la inclusión (2.1) es válida. El recíproco, se demuestra de manera análoga. □

Ejemplo 2.1.7. Sea $H \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto convexo y no vacío. Sea $G : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ la multifunción definida por $G(x) := -x^2H$. Como la función $g(x) = -x^2$, es concava se tiene que

De donde es

$$-(tx^2 + (1 - t)y^2) \leq -(tx + (1 - t)y)^2,$$

este ejemplo? . De qué referencia?

por lo tanto

$$tG(x)+(1-t)G(y) = -tx^2H-(1-t)y^2H \subseteq -(tx^2+(1-t)y^2)H \subseteq -(tx+(1-t)y)^2H = G(tx+(1-t)y)$$

Definición 2.1.8. *La multifunción* F *es midconvexa o Jensen-convexa si* F *satisface la inclusión* (2.1) *para* $t = 1/2$, *es decir*

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} \subseteq F\left(\frac{x + y}{2}\right). \tag{2.2}$$

¿ Y algún de interés por este tópico debe saber dónde buscar la información allí dada más cualquiera que motivo ser de interés para el lector.

Ejemplo 2.1.9. Sean $f, g : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ y que además f y $-g$ son funciones convexas, es decir que para todo $x, y \in [a,b]$ y $t \in [0,1]$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq tf(x) + (1-t)f(y) \\ tg(x) + (1-t)g(y) &\leq g(tx + (1-t)y). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Entonces, la multifunción $F : D \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) := [f(x), g(x)]$, es convexa.

Así como en el caso de funciones a valores reales, también es posible generalizar el concepto de concavidad para una multifunción.

Definición 2.1.10. *Se dice que la multifuncion F es cóncava en D si para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0,1]$ se tiene que*

$$F(tx + (1-t)y) \subseteq tF(x) + (1-t)F(y) \tag{2.4}$$

Dar ejemplo. (Hay ejemplos disponibles en la literatura)

A diferencia de las funciones, no hay una correspondencia directa entre multifunciones convexas y multifunciones cóncavas. Es decir que, si F es convexa no necesariamente se tiene que $-F$ es cóncava. De hecho, por definición se tiene que F es convexa si el conjunto $\mathrm{Gr}(F)$ es un conjunto convexo. Ahora bien, si dicho conjunto es convexo entonces, $\mathrm{Gr}(-F)$ tambien es convexo. Como se comentó en la introducción, esto trae como consecuencia que los resultados obtenidos para multifunciones convexas no puedan extenderse directamente a resultados para multifunciones cóncavas y por lo tanto ambas direcciones deben tratarse por separado.

2.2. K-convexidad y K-concavidad de multifunciones.

Sea $K \subseteq Y$ un cono convexo, las siguientes definiciones generalizan las definiciones de convexidad y concavidad dadas en la sección anterior.

Definición 2.2.11. *Se dice que la multifunción F es K-convexa en D si para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0,1]$ se tiene que*

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq F(tx + (1-t)y) + K \tag{2.5}$$

Definición 2.2.12. *Se dice que la multifunción F es K-cóncava en D si para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0,1]$ se tiene que*

$$F(tx + (1-t)y) \subseteq tF(x) + (1-t)F(y) + K \tag{2.6}$$

Observación 2.2.13. *Dado un cono convexo $K \subseteq Y$, definamos la relación $\leq_K$ en Y de la siguiente manera*

$$x \leq_K y \iff y - x \in K.$$

Si $F(x) = \{f(x)\}$, donde $f : X \to Y$ es una función cualquiera, entonces las inclusiones (2.5) *y* (2.6) *equivalen a*

$$f(tx + (1-t)y) \leq_K tf(x) + (1-t)f(y) \quad y \quad tf(x) + (1-t)f(y) \leq_K f(tx + (1-t)y)$$

respectivamente.

Muchos resultados importantes relacionados con multifunciones K-convexas y K-cóncavas pueden ser encontrados en la tesis doctoral del profesor Kazimierz Nikodem [25]. y referencias más recientes. Las tesis doctorales las que están disponibles al público en general.

En los resultados principales las siguientes definiciones serán importantes

Definición 2.2.14. *Se dice que la multifunción F es localmente K-acotada inferior en $x_0 \in D$, si existe un abierto $U \in \mathfrak{U}(X)$ y un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tales que*

$$F(u) \subseteq H + K, \qquad \textit{para todo } u \in (x_0 + U) \cap D$$

Ejemplo 2.2.15. Definamos $F(x) := (\sin(x), \infty)$, $x \in \mathbb{R}$. Evidentemente, para todo $x \in \mathbb{R}$ el conjunto $F(x)$ no es acotado. Sin embargo, al considerar $K := (0, \infty)$ se tiene que $F(x) \subseteq \{-1\} + K$ para todo $x \in \mathbb{R}$ por lo tanto esta multifunción asi definida es K-acotada inferiormente en todo $\mathbb{R}$. ← Decir de donde es este ejemplo!

Definición 2.2.16. *Se dice que la multifunción F es localmente semi-K-acotada inferior en $x_0 \in D$, si existe un abierto $U \in \mathfrak{U}(X)$ y un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tales que*

$$F(u) \subseteq \mathrm{cl}(H + K), \qquad \textit{para todo } u \in (x_0 + U) \cap D$$

Observación 2.2.17. *Si Y es un espacio localmente acotado, ie, existe un abierto $V \in \mathcal{U}(Y)$ que es acotado, entonces la Definición 2.2.14 y la Definición 2.2.16 son equivalentes.*

Definición 2.2.18. *Se dice que la multifunción F es localmente débil-K-acotada superior en $x_0 \in D$, si existe un abierto $U \in \mathcal{U}(X)$ y un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tales que*

$$0 \in F(u) + H + K, \qquad \textit{para todo } u \in (x_0 + U) \cap D$$

Definición 2.2.19. *Se dice que la multifunción F es localmente débil-semi-K-acotada superior en $x_0 \in D$, si existe un abierto $U \in \mathcal{U}(X)$ y un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tales que*

$$0 \in \mathrm{cl}(F(u) + H + K), \qquad \textit{para todo } u \in (x_0 + U) \cap D$$

Proposición 2.2.20. *Supongamos que $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ es una multifunción localmente semi-K-acotada inferior. Entonces, para cada subconjunto compacto $C \subseteq D$, existe un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que, $F(x) \subseteq \mathrm{cl}(H + K)$, para todo $x \in C$.*

Demostración. Sea $C \subseteq D$ un conjunto compacto no-vacío. Como la multifunción F es localmente semi-K-acotada inferior, se tiene que para cada $x \in C$ existe un abierto $U_x \in \mathcal{U}(X)$ y un conjunto acotado $H_x \subseteq Y$ tales que para todo $u \in (x + U_x) \cap D$, $F(u) \subseteq \mathrm{cl}(H_x + K)$. Ahora bien, es claro que $C \subseteq \bigcup_{x \in C}(x + U_x)$, es decir que la familia $\{x + U_x : x \in C\}$ es un cubrimiento por abiertos del compacto C, por lo tanto, existen $x_1, \ldots, x_n \in C$ tales que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(x_i + U_{x_i})$. Sea $H := H_{x_1} \cup \cdots \cup H_{x_n}$, es claro que H es un conjunto acotado, pues es la unión finita de conjuntos acotados. Además, si $z \in C$ es un elemento arbitrario de C entonces $z \in x_i + U_{x_i}$ para algún $i = 0, \ldots, n$ y por lo tanto $F(z) \subseteq \mathrm{cl}(H_{x_i} + K) \subseteq \mathrm{cl}(H + K)$. Lo cual, finaliza la demostración. □

Proposición 2.2.21. *Supongamos que $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ es una multifunción localmente débil-semi-K-acotada superior. Entonces, para cada subconjunto compacto $C \subseteq D$, existe un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que, $0 \in \mathrm{cl}(F(x) + H + K)$, para todo $x \in C$.*

Demostración. Sea $C \subseteq D$ un conjunto compacto no-vacío. Como la multifunción F es localmente débil-semi-K-acotada superior, se tiene que para cada $x \in C$ existe un abierto $U_x \in \mathfrak{U}(X)$ y un conjunto acotado $H_x \subseteq Y$ tales que para todo $u \in (x+U_x)\cap D$, $0 \in \text{cl}(F(u) + H_x + K)$. Ahora bien, es claro que $C \subseteq \bigcup_{x\in C}(x + U_x)$, es decir que la familia $\{x + U_x : x \in C\}$ es un cubrimiento por abiertos del compacto C, por lo tanto, existen $x_1, \ldots, x_n \in C$ tales que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(x_i + U_{x_i})$. Sea $H := H_{x_1} \cup \cdots \cup H_{x_n}$, es claro que H es un conjunto acotado, pues es la unión finita de conjuntos acotados. Además, si $z \in C$ es un elemento arbitrario de C entonces $z \in x_i + U_{x_i}$ para algún $i = 0, \ldots, n$ y por lo tanto $0 \in \text{cl}(F(z)+H_{x_i}+K) \subseteq \text{cl}(F(z)+H+K)$. Lo cual, finaliza la demostración. □

2.3. Transformación de Takagi de una multifunción.

como lo sabes?

Definamos para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$T(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{\mathbb{Z}}(2^k t)}{2^k}, \tag{2.7}$$

donde $d_{\mathbb{Z}}(x) = \text{dist}(\mathbb{Z}, x) := \text{ínf}\{|z - x| : z \in \mathbb{Z}\}$, $x \in \mathbb{R}$.

Observe que la función T es 1-periódica, continua y se anula en $\mathbb{Z}$. Además, T es un ejemplo de una función que es continua pero no es diferenciable en ninguna parte. Usualmente T es conocida como función de "Vander Waerden" [34], sin embargo Knoop [14] ya había descubierto que dicha función ya había sido construida casi 30 años antes por T. Takagi [32]. Para más detalles históricos, se pueden consultar los artículos de Billingsley [4], Cater [7] y Kairies [13].

La importancia de la función de Takagi en la teoría de convexidad aproximada fue descubierta por Házy y Páles en [10] donde obtuvieron el siguiente resultado

Teorema A. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente acotada superior y sea $\epsilon \geq 0$. Entonces F satisface la siguiente desigualdad de tipo Jensen aproximada*

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \epsilon\Big|\frac{x-y}{2}\Big| \quad (x, y \in I),$$

si y sólo si, para todo $x, y \in I$ y para todo $t \in [0, 1]$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \epsilon T(t)|x - y|.$$

Supongamos ahora que D es un conjunto estrellado con respecto al origen, y consideremos una multifunción $S : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ con la propiedad de que $0 \in S(x)$ para todo $x \in D$. Para dicha multifunción, se define $S^T : \mathbb{R} \times D \to Y$ de la siguiente manera

$$S^T(t,x) := \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} S\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big) \right) \qquad (t \in \mathbb{R},\, x \in D). \tag{2.8}$$

Observación 2.3.22. *El hecho de que $0 \in S(x)$ para todo $x \in D$ es crucial, ya que esto trae como consecuencia que la sucesión de conjuntos*

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} S\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big) \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

sea creciente. Por lo tanto, S^T no es más que el límite inferior de dicha sucesión.

La multifunción S^T será llamada transformación de Takagi de S a lo largo del trabajo.

Definición 2.3.23. *El cono recesión de la multifunción $S : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ es el conjunto*

$$\mathrm{rec}(S) := \bigcap_{x\in D} \mathrm{rec}\, S(x)$$

De la definición se puede observar que para todo $x \in D$ se tiene que $\mathrm{rec}(S) + S(x) \subseteq S(x)$. A continuación, se establecerá la relación entre una multifunción y su transformación de Takagi.

Proposición 2.3.24. *Sea $D \subseteq X$ un conjunto estrellado y sea $S : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción tal que $0 \in S(x)$ para todo $x \in D$. Entonces*

$$\mathrm{cl}(S(x)) \subseteq S^T\big(\tfrac{1}{2}, x\big) \qquad (x \in D). \tag{2.9}$$

Si además, $S(0) \subseteq \overline{\mathrm{rec}}(S)$, entonces

$$\mathrm{cl}(S(x)) = S^T\big(\tfrac{1}{2}, x\big) \qquad (x \in D). \tag{2.10}$$

Demostración. Observe que $d_{\mathbb{Z}}\big(\frac{1}{2}\big) = \frac{1}{2}$ y $d_{\mathbb{Z}}\big(2^k \cdot \frac{1}{2}\big) = 0$ para $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$S^T\big(\tfrac{1}{2}, x\big) = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} S\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k \cdot \tfrac{1}{2})x\big) \right) = \mathrm{cl}\left(S(x) + \bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} S(0) \right).$$

Como $0 \in S(0)$, entonces la inclusión (2.9) se sigue inmediatamente. Para demostrar (2.10), asuma que $S(0) \subseteq \overline{\mathrm{rec}}(S)$. Entonces, $S(0) \subseteq \overline{\mathrm{rec}}(S(x)) \subseteq \mathrm{rec}(\overline{S(x)})$. Como $\mathrm{rec}(\overline{S(x)})$ es un cono convexo, se tiene que este conjunto es cerrado bajo la suma y bajo la multiplicación por escalares positivos. Así, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} S(0) \subseteq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \mathrm{rec}(\overline{S(x)}) \subseteq \mathrm{rec}(\overline{S(x)}).$$

En consecuencia,

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} S(0) \subseteq \mathrm{rec}(\overline{S(x)}).$$

Luego,

$$S^T\big(\tfrac{1}{2}, x\big) = \mathrm{cl}\left(S(x) + \bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} S(0)\right) \subseteq \mathrm{cl}\left(\overline{S(x)} + \mathrm{rec}(\overline{S(x)})\right) \subseteq \mathrm{cl}(S(x)),$$

lo cual completa la demostración de (2.10). □

Proposición 2.3.25. *Sea $D \subseteq X$ un conjunto estrellado, $S_0 \subseteq Y$ un conjunto convexo que contiene a $0 \in Y$ y $K \subseteq Y$ un cono convexo. Sea $\varphi : D \to \mathbb{R}_+$ una función localmente acotada superior y no negativa. Definamos $S : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ por $S(x) := K + \varphi(x) S_0$. Entonces*

$$S^T(t, x) = \mathrm{cl}\big(K + \varphi^T(t, x) S_0\big) \qquad (t \in \mathbb{R},\, x \in D), \tag{2.11}$$

donde

$$\varphi^T(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi\big(2 d_{\mathbb{Z}}(2^n t) x\big) \qquad (t \in \mathbb{R},\, x \in D). \tag{2.12}$$

Si además, $\varphi(0) = 0$, entonces

$$\varphi^T\big(\tfrac{1}{2}, x\big) = \varphi(x) \qquad y \qquad S^T\big(\tfrac{1}{2}, x\big) = \mathrm{cl}(K + \varphi(x) S_0) = \mathrm{cl}(S(x)) \qquad (x \in D). \tag{2.13}$$

Demostración. Para $t \in \mathbb{R}$ y $n \geq 0$, se tiene que $0 \leq 2 d_{\mathbb{Z}}(2^n t) \leq 1$, por lo tanto $2 d_{\mathbb{Z}}(2^n t) x \in [0, x]$. Como la función φ es localmente acotada superior en D, entonces es acotada superior en el segmento $[0, x]$ por alguna constante $M(x)$. Luego

$$\varphi^T(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi\big(2 d_{\mathbb{Z}}(2^n t) x\big) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} M(x) = 2M(x) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Para probar (2.11), fijemos $(t,x) \in \mathbb{R} \times D$.

Para demostrar la inclusión $\subseteq$ en (2.11), primero se demostrará que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} S\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big) \subseteq K + \varphi^T(t,x) S_0. \tag{2.14}$$

Usando la definición de S, la convexidad del conjunto S_0 y el hecho de que la función φ es nonegativa, se tiene que para $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} S\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big) &= \sum_{k=0}^{n} \left(K + \frac{1}{2^k}\varphi\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big) S_0\right) = K + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\varphi\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big)\right) S_0 \\
&\subseteq K + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\varphi\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big)\right) S_0 = K + \varphi^T(t,x) S_0.
\end{aligned}$$

Así, queda demostrada la inclusión (2.14). Tomando la clausura en ambos lados la inclusión $\subseteq$ en (2.11) se sigue de inmediato.

Para la prueba de la inclusión $\supseteq$ en (2.11), es suficiente mostrar que

$$K + \varphi^T(t,x) S_0 \subseteq S^T(t,x).$$

Observe que para $n \geq 0$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
K + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\varphi\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big)\right) S_0 &\subseteq \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\varphi\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big)\right)(S_0 + K) \\
&\subseteq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\varphi\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big)(S_0 + K) \subseteq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\big(\varphi\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big) S_0 + K\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} S(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x) \subseteq \bigcup_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{2^k} S\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
K + \varphi^T(t,x) S_0 &= K + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\varphi\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big)\right) S_0 \\
&\subseteq \operatorname{cl}\left(\bigcup_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{2^k} S\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)x\big)\right) = S^T(t,x).
\end{aligned}$$

Con lo cual se termina la demostración.

En el caso de que $\varphi(0) = 0$, la primera igualdad en (2.13) es inmediata, la segunda igualdad es consecuencia de (2.11). $\square$

Corolario 2.3.26. *Sea X un espacio normado, $D \subseteq X$ un conjunto estrellado, $S_0 \subseteq Y$ un conjunto convexo que contiene a $0 \in Y$, $K \subseteq Y$ un cono convexo, y $\alpha > 0$. Definamos $S : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ por $S(x) := K + \|x\|^\alpha S_0$. Entonces*

$$S^T(t,x) = \mathrm{cl}\big(K + T_\alpha(t)\|x\|^\alpha S_0\big) \qquad (t \in \mathbb{R},\ x \in D), \tag{2.15}$$

donde $T_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función de Takagi de orden α y es definida por

$$T_\alpha(t) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\alpha-n}(d_{\mathbb{Z}}(2^n t))^\alpha \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{2.16}$$

Demostración. Aplicando la Proposición 2.3.25 con la función φ definida por $\varphi(x) := \|x\|^\alpha$, se observa que

$$\varphi^T(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\varphi\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^n t)x\big) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\alpha-n}\big(d_{\mathbb{Z}}(2^n t)\big)^\alpha \|x\|^\alpha = T_\alpha(t)\|x\|^\alpha \qquad (t \in \mathbb{R},\ x \in D).$$

Por lo tanto, (2.15) es consecuencia de (2.11). □

Observación 2.3.27. *Un caso particular importante es cuando $\alpha = 1$, entonces $T_1 = 2T$, donde T es la función de Takagi definida por (2.7) al comienzo de la sección. En el caso $\alpha = 2$ un argumento interesante nos dá una forma cerrada para T_2. Observe que T_α (para cualquier $\alpha > 0$) satisface la ecuación funcional*

$$T_\alpha(t) = 2^\alpha\big(d_{\mathbb{Z}}(t)\big)^\alpha + \frac{1}{2}T_\alpha(2t) \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{2.17}$$

Por el teorema de punto fijo de Banach, esta ecuación funcional tiene solución única en el espacio de Banach de las funciones reales, acotadas sobre la recta real (equipado con la norma del supremo). Asi T_α es la única solución a (2.17). Por otro lado, para $\alpha = 2$ se puede verificar que la función periódica T_2^* definida en $[0,1]$ por $T_2^*(t) = 4t(1-t)$ también es solución de (2.17), así, debe ocurrir que $T_2(t) = 4t(1-t)$ para $t \in [0,1]$. ~~*Para mayores detalles, puede revisar*~~ *[19].*

Mas detalles pueden ser vistos en

Corolario 2.3.28. *Sea X un espacio normado, $D \subseteq X$ un conjunto estrellado, $S_0 \subseteq Y$ un conjunto convexo que contiene a $0 \in Y$, $K \subseteq Y$ un cono convexo. Definamos $S : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ por $S(x) := K + S_0$. Entonces*

$$S^T(t,x) = \mathrm{cl}\big(K + 2S_0\big) \qquad (t \in \mathbb{R},\ x \in D). \tag{2.18}$$

Demostración. Aplicaremos la Proposición 2.3.25 a la función constante $\varphi \equiv 1$. Por lo tanto (2.12) nos dá $\varphi^T \equiv 2$, luego (2.11) es equivalente a lo que queremos demostrar. $\square$

Capítulo 3

Resultados Principales

No dice de donde vienen los resultados; si fueron publicados tiene que dar la correspondiente referencia

Los resultados principales de esta investigación están concentrados en los siguientes dos teoremas. A lo largo de este capítulo, se asume que X y Y son espacios topológicos lineales.

El siguiente teorema teorema dá condiciones suficientes sobre una multifunción que satisface una inclusión de convexidad tipo Jensen, para que esta satisfaga una inclusión de tipo convexidad más general.

Teorema 3.0.1. *Sea $D \subseteq X$ un conjunto convexo no-vacío y $A, B : (D - D) \to \mathcal{P}_0(Y)$ multifunciones tales que $0 \in A(x) \cap B(x)$ para todo $x \in (D - D)$. Sea $K = \overline{\text{rec}}(B)$, la clausura del cono recesión de B. Sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción que satisface la inclusión de convexidad tipo Jensen*

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} + A(x - y) \subseteq \text{cl}\left(F\left(\frac{x + y}{2}\right) + B(x - y)\right) \qquad (x, y \in D). \tag{3.1}$$

Supongamos además, que F tiene las siguientes propiedades

(I) F es puntualmente semi-K-acotada inferior.

(II) F es localmente debil-semi-K-acotada superior en D.

Entonces F satisface la siguiente inclusión

$$tF(x) + (1 - t)F(y) + A^T(t, x - y) \subseteq \text{cl}\left(F(tx + (1 - t)y) + B^T(t, x - y)\right) \tag{3.2}$$

para todo $x, y \in D$ y $t \in [0, 1]$.

Esto hay que demostrarlo! Para el nivel del trabj., (maestría) hay que hacerlo!

y la profundidad de lo resultado. Eso detalla

Demostración. El primer paso en la demostración de (3.2), será mostrar que, para todo $x, y \in D$ existe un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tall que, para todo $n \geq 0$, $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} tF(x) + (1-t)F(y) &+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big) \\ &\subseteq \mathrm{cl}\left(F(tx+(1-t)y) + \frac{1}{2^n}H + K + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Fijemos $x, y \in D$ arbitrarios. Para verificar que (3.3) se cumple, vamos a proceder aplicando inducción sobre n. Para el caso $n = 0$, debemos demostrar que existe un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que para todo $t \in [0,1]$,

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq \mathrm{cl}\big(F(tx+(1-t)y) + H + K\big). \tag{3.4}$$

Sea $U \in \mathfrak{U}(Y)$ y escojamos un abierto balanceado $V \in \mathfrak{U}(Y)$ tal que $V + V + V \subseteq U$. Como F es puntualmente semi-K-acotada inferior, existen conjuntos acotados $H_x, H_y \subseteq Y$ tales que

$$F(x) \subseteq \mathrm{cl}(H_x + K) \subseteq V + H_x + K$$

y

$$F(y) \subseteq \mathrm{cl}(H_y + K) \subseteq V + H_y + K.$$

Multiplicando estas inclusiones por t y $1-t$, respectivamente, sumándolas, usando la convexidad del cono K y el hecho de que V es balanceado, obtenemos

$$\begin{aligned} tF(x) + (1-t)F(y) &\subseteq tV + tH_x + tK + (1-t)V + (1-t)H_y + (1-t)K \\ &\subseteq V + V + tH_x + (1-t)H_y + K. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Se puede demostrar que los conjuntos $H_1 := \bigcup_{t\in[0,1]} tH_x$ y $H_2 := \bigcup_{t\in[0,1]}(1-t)H_y$ son acotados. Así, la inclusión (3.5) nos dá que para todo $t \in [0,1]$,

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq V + V + H_1 + H_2 + K. \tag{3.6}$$

Por otra parte, como F es localmente débil-semi-K-acotada superior y el segmento $[x, y]$ es compacto, entonces por la Proposición 2.2.21, existe un conjunto acotado H_0 tal que para todo $t \in [0,1]$,

$$0 \in \mathrm{cl}(F(tx+(1-t)y) + H_0 + K) \subseteq V + F(tx+(1-t)y) + H_0 + K. \tag{3.7}$$

Ahora bien, sumando las inclusiones (3.6) y (3.7) lado a lado, se tiene que para todo $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} tF(x) + (1-t)F(y) &\subseteq V + V + V + F(tx + (1-t)y) + H_0 + H_1 + H_2 + K \\ &\subseteq U + F(tx + (1-t)y) + H_0 + H_1 + H_2 + K. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} tF(x) + (1-t)F(y) &\subseteq \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} \big(U + F(tx + (1-t)y) + H_0 + H_1 + H_2 + K\big) \\ &= \mathrm{cl}\,\big(F(tx + (1-t)y) + H_0 + H_1 + H_2 + K\big). \end{aligned}$$

Así, la inclusión (3.4) se obtiene con $H := H_0 + H_1 + H_2$.

Supongamos ahora que la ecuación (3.3) es válida para n y demostraremos que también es válida para $n+1$. Supongamos que $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ (el caso cuando $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ es análogo). Entonces, $d_{\mathbb{Z}}(t) = t$ y podemos reescribir el lado izquierdo de la inclusión que queremos demostrar como

$$\begin{aligned} &tF(x) + (1-t)F(y) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big) \\ &\quad = tF(x) + (1-t)F(y) + A\big(2t(x-y)\big) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Observe lo siguiente

$$(1-t)F(y) = \frac{1-2t+1}{2} F(y) \subseteq \frac{1-2t}{2} F(y) + \frac{1}{2} F(y) \tag{3.9}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} &tF(x) + (1-t)F(y) + A\big(2t(x-y)\big) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big) \\ &\subseteq \frac{1}{2}\left(2tF(x) + (1-2t)F(y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big)\right) \\ &\qquad + \frac{1}{2}F(y) + A\big(2d_{\mathbb{Z}}(t)(x-y)\big). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Al usar la hipótesis inductiva con $2t$ en vez de t, se sigue que

$$\begin{aligned} &2tF(x) + (1-2t)F(y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big) \\ &\subseteq \mathrm{cl}\left(F(2tx + (1-2t)y) + \frac{1}{2^n} H + K + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big)\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

¿Como los combinas?

Combinando las inclusiones (3.8), (3.10) y (3.11), se obtiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
&tF(x)+(1-t)F(y)+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\\
&\subseteq \frac{1}{2}\,\mathrm{cl}\left(F(2tx+(1-2t)y)+\frac{1}{2^n}H+K+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big)\right)\\
&\qquad\qquad +\frac{1}{2}F(y)+A\big(2d_{\mathbb{Z}}(t)(x-y)\big)\\
&\subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{F(2tx+(1-2t)y)+F(y)}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}H+K+A\big(2t(x-y)\big)\right.\\
&\qquad\qquad \left.+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big)\right)
\end{aligned}
$$

Como F satisface la inclusión de tipo Jensen (3.1), entonces

$$
\begin{aligned}
&\frac{F(2tx+(1-2t)y)+F(y)}{2}+A\big(2t(x-y)\big)\\
&\qquad\qquad\subseteq \mathrm{cl}\left(F\left(\frac{2tx+(1-2t)y+y}{2}\right)+B\big(2t(x-y)\big)\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&tF(x)+(1-t)F(y)+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\\
&\subseteq \mathrm{cl}\left(\mathrm{cl}\left(F\left(\frac{2tx+(1-2t)y+y}{2}\right)+B\big(2t(x-y)\big)\right)+\frac{1}{2^{n+1}}H+K\right.\\
&\qquad\qquad \left.+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big)\right)\\
&= \mathrm{cl}\left(F\big(tx+(1-t)y\big)+\frac{1}{2^{n+1}}H+K+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\right).
\end{aligned}
$$

Ahora podemos concluir que la inclusion (3.3) es válida para todo $n \geq 0$.

Para completar la demostración del teorema, sea $t \in [0,1]$ fijo y apliquemos la Proposición 1.5.11 a las sucesiones de conjuntos y números definidas para $n \geq 0$ de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
A_n &:= tF(x)+(1-t)F(y)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}A(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y))\\
B_n &:= F\big(tx+(1-t)y\big)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\\
\varepsilon_n &:= \frac{1}{2^n}
\end{aligned}
$$

Con esta notación, la inclusión (3.3) es equivalente a (1.7). Por otra parte, como $0 \in A(u) \cap B(u)$ para todo $u \in (D - D)$, entonces las sucesiones (A_n) y (B_n) son sucesiones no-decrecientes en Y. Aplicando la Proposición 1.5.11, se tiene detalles!

$$\operatorname{cl}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(tF(x) + (1-t)F(y) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}A(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y))\right)\right)$$
$$\subseteq \operatorname{cl}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(F\big(tx + (1-t)y\big) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\right)\right).$$

Ahora, aplicamos el numeral 2 del Teorema 1.3.10 en ambos lados de la inclusión anterior y obtenemos

$$\operatorname{cl}\left(tF(x) + (1-t)F(y) + \operatorname{cl}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}A(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y))\right)\right)$$
$$\subseteq \operatorname{cl}\left(F\big(tx + (1-t)y\big) + \operatorname{cl}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\right)\right),$$

lo cual es equivalente a la inclusión (3.2) que queríamos demostrar. □

Teorema 3.0.2. *Sea $D \subseteq X$ un conjunto convexo no-vacío y $A, B : (D - D) \to \mathcal{P}_0(Y)$ multifunciones tales que $0 \in A(x) \cap B(x)$ para todo $x \in (D - D)$. Sea $K = \overline{\operatorname{rec}}(B)$, la clausura del cono recesión de B. Sea $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ una multifunción que satisface la inclusión de concavidad tipo Jensen*

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) + A(x-y) \subseteq \operatorname{cl}\left(\frac{F(x)+F(y)}{2} + B(x-y)\right) \qquad (x, y \in D). \tag{3.12}$$

Supongamos además, que F tiene las siguientes propiedades

(I) F es puntualmente semi-K-convexa, i.e., $tF(x) + (1-t)F(x) \subseteq \operatorname{cl}(F(x) + K)$ para todo $x \in D$ y para todo $t \in [0, 1]$;

(II) F es localmente semi-K-acotada inferior

Entonces F satisface la siguiente inclusión

$$F(tx + (1-t)y) + A^T(t, x-y) \subseteq \operatorname{cl}\big(tF(x) + (1-t)F(y) + B^T(t, x-y)\big) \tag{3.13}$$

para todo $x, y \in D$ y $t \in [0, 1]$.

Demostración. Para demostrar la inclusión (3.13), primero vamos a demostrar que para todo $x, y \in D$, existe un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que, para todo $n \geq 0$ y $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} &F(tx + (1-t)y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big) \\ &\subseteq \mathrm{cl}\left(tF(x) + (1-t)F(y) + \frac{1}{2^n}H + K + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\right). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Sean $x, y \in D$ fijos. Para verificar que la inclusión (3.14) es válida, vamos a proceder por inducción sobre n. Para $n = 0$, se debe demostrar que existe un conjunto acotado $H \subseteq Y$ tal que, para todo $t \in [0, 1]$

$$F(tx + (1-t)y) \subseteq \mathrm{cl}\big(tF(x) + (1-t)F(y) + H + K\big). \tag{3.15}$$

Como F es semi-K-acotada inferior y el segmento $[x, y]$ es compacto, se tiene que por la proposición Proposición 2.2.20, existe un conjunto acotado $H_0 \subseteq Y$ tal que

$$F(tx + (1-t)y) \subseteq \mathrm{cl}(H_0 + K) \qquad (t \in [0, 1]). \tag{3.16}$$

Por otra parte, como $F(x)$ y $F(y)$ son no-vacíos, podemos escoger dos elementos $u \in F(x)$ y $v \in F(y)$, lo cual implica que

$$0 \in F(x) - u \qquad \text{y} \qquad 0 \in F(y) - v. \tag{3.17}$$

Multiplicando ambas inclusiones en (3.17) por t y $(1-t)$, respectivamente, y sumándolas junto con la inclusión (3.16), se tiene que para $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} F(tx + (1-t)y) &\subseteq tF(x) + (1-t)F(y) - tu - (1-t)v + \mathrm{cl}(H_0 + K) \\ &\subseteq \mathrm{cl}\big(tF(x) + (1-t)F(y) - [u, v] + H_0 + K\big). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la inclusión (3.15) es válida con $H := H_0 - [u, v]$, el cual es obviamente un conjunto acotado.

Ahora, supongamos que (3.14) es válida para n y veamos que también es válida para $n + 1$. Supongamos, al igual que en la demostración anterior que $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y observe que entonces $d_{\mathbb{Z}}(t) = t$. Reescribiendo el lado izquierdo de la inclusión que queremos demostrar obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
&F(tx+(1-t)y)+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^kt)(x-y)\big)\\
&=F(tx+(1-t)y)+A(2d_{\mathbb{Z}}(t)(x-y))+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^kt)(x-y)\big) \qquad (3.18)\\
&=F(tx+(1-t)y)+A\big(2t(x-y)\big)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big).
\end{aligned}$$

Además,

$$tx+(1-t)y=\frac{2tx+(1-2t)y+y}{2}$$

y como F satisface la inclusión de tipo Jensen dada en (3.12), entonces

$$\begin{aligned}
&F\left(\frac{2tx+(1-2t)y+y}{2}\right)+A\big(2t(x-y)\big)\\
&\subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{F(2tx+(1-2t)y)+F(y)}{2}+B\big(2t(x-y)\big)\right). \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Combinando (3.18) y (3.19), obtenemos

$$\begin{aligned}
&F(tx+(1-t)y)+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^kt)(x-y)\big)\\
&\subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{F(2tx+(1-2t)y)+F(y)}{2}+B\big(2t(x-y)\big)\right)\\
&\qquad +\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big) \qquad (3.20)\\
&\subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{1}{2}\left(F(2tx+(1-2t)y)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big)\right)\right.\\
&\qquad \left.+\frac{1}{2}F(y)+B\big(2d_{\mathbb{Z}}(t)(x-y)\big)\right).
\end{aligned}$$

Por la hipótesis inductiva, sabemos que

$$\begin{aligned}
&F(2tx+(1-2t)y)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big)\\
&\subseteq \mathrm{cl}\left(2tF(x)+(1-2t)F(y)+\frac{1}{2^n}H+K+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big)\right). \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Insertando (3.21) en (3.20) y usando el hecho de que

$$(1-2t)F(y)+F(y)\subseteq \mathrm{cl}\,\big((2-2t)F(y)+K\big)$$

lo cual es una consecuencia de que F es puntualmente semi-K-convexa, llegamos a la siguiente inclusión

$$\begin{aligned}
&F(tx+(1-t)y)+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\\
&\subseteq \operatorname{cl}\left(\frac{1}{2}\operatorname{cl}\left(2tF(x)+(1-2t)F(y)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k(2t))(x-y)\big)\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{1}{2^n}H+K+\frac{1}{2}F(y)+B\big(2d_{\mathbb{Z}}(t)(x-y)\big)\right)\\
&\subseteq \operatorname{cl}\left(\frac{1}{2}\big(2tF(x)+(1-2t)F(y)+F(y)+K\big)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{1}{2^{n+1}}H+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\right)\\
&\subseteq \operatorname{cl}\left(tF(x)+(1-t)F(y)+\frac{1}{2^{n+1}}H+K+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\right).
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración de la inducción y así la inclusión (3.14) es válida para todo $n \geq 0$.

Ahora, vamos a usar la Proposición 1.5.11. Para ello vamos a definir las sucesiones

$$\begin{aligned}
A_n &:= F(tx+(1-t)y)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big),\\
B_n &:= tF(x)+(1-t)F(y)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big),\\
\varepsilon_n &= \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

para $t \in [0,1]$ fijo.

Por lo tanto, la inclusión (3.14), con las sucesiones $(A_n), (B_n)$ y (ε_n) así definidas, es equivalente a la inclusión (1.7). Así, por la Proposición 1.5.11, se sigue lo siguiente

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}F(tx+(1-t)y)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}A\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\right)\\
&\qquad\subseteq \operatorname{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}tF(x)+(1-t)F(y)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}B\big(2d_{\mathbb{Z}}(2^k t)(x-y)\big)\right).
\end{aligned}$$

De manera similar a como se hizo en la prueba del Teorema 3.0.1, la relación anterior implica la inclusión que deseamos probar. □

Tomando multifunciones particulares A, B y usando la Proposición 2.3.25, vamos a establecer algunas consecuencias importantes de los dos teoremas que acabamos de demostar. Los siguientes corolarios resaltan la manera en que los resultados mencionados en la introducción están relacionados de manera directa con nuestros resultados.

En los siguientes cuatro corolarios supondremos que $D \subseteq X$ es un conjunto convexo y no-vacío, $K \subseteq Y$ es un cono convexo y cerrado, $S_0 \subseteq Y$ es un conjunto convexo que contiene a 0 y $\varphi : (D - D) \to \mathbb{R}_+$ es una función localmente acotada superior y no-negativa. Note que por la convexidad de D se tiene que el conjunto $(D - D)$ es estrellado, por lo tanto la Proposición 2.3.25 puede ser aplicada.

Los primeros dos corolarios tratan sobre multifunciones fuertemente y aproximadamente K-Jensen convexas respectivamente.

Corolario 3.0.3. *Supongamos que $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ es una multifunción puntualmente semi-K-acotada inferior y localmente debíl-semi-K-acotada superior que satisface*

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} \subseteq \mathrm{cl}\left(F\left(\frac{x+y}{2}\right) + K + \varphi(x-y)S_0\right) \qquad (x, y \in D). \tag{3.22}$$

Entonces

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq \mathrm{cl}\left(F(tx + (1-t)y) + K + \varphi^T(t, x-y)S_0\right) \qquad (x, y \in D,\ t \in [0,1]). \tag{3.23}$$

Corolario 3.0.4. *Supongamos que $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ es una multifunción puntualmente semi-K-acotada inferior y localmente debíl-semi-K-acotada superior que satisface*

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} + \varphi(x-y)S_0 \subseteq \mathrm{cl}\left(F\left(\frac{x+y}{2}\right) + K\right) \qquad (x, y \in D). \tag{3.24}$$

Entonces

$$tF(x) + (1-t)F(y) + \varphi^T(t, x-y)S_0 \subseteq \mathrm{cl}\left(F(tx + (1-t)y) + K\right) \qquad (x, y \in D,\ t \in [0,1]). \tag{3.25}$$

Los siguientes dos corolarios tratan sobre multifunciones fuertemente y aproximadamente K-Jensen cóncavas respectivamente.

Corolario 3.0.5. *Supongamos que $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ es una multifunción puntualmente semi-K-convexa y localmente semi-K-acotada inferior que satisface*

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{F(x)+F(y)}{2} + K + \varphi(x-y)S_0\right) \qquad (x, y \in D). \tag{3.26}$$

Entonces

$$F(tx + (1-t)y) \subseteq \mathrm{cl}\left(tF(x) + (1-t)F(y) + K + \varphi^T(t, x-y)S_0\right) \qquad (x, y \in D,\, t \in [0,1]). \tag{3.27}$$

Corolario 3.0.6. *Supongamos que $F : D \to \mathcal{P}_0(Y)$ es una multifunción puntualmente semi-K-convexa y localmente semi-K-acotada inferior que satisface*

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) + \varphi(x-y)S_0 \subseteq \mathrm{cl}\left(\frac{F(x)+F(y)}{2} + K\right) \qquad (x, y \in D). \tag{3.28}$$

Entonces

$$F(tx + (1-t)y) + \varphi^T(t, x-y)S_0 \subseteq \mathrm{cl}\left(tF(x) + (1-t)F(y) + K\right) \qquad (x, y \in D,\, t \in [0,1]). \tag{3.29}$$

Demostraciones de los corolarios 3.0.3–3.0.6. Usando Teorema 3.0.1 con las multifunciones $A(u) = 0$ y $B(u) = K + \varphi(u)S_0$ (resp., $A(u) = \varphi(u)S_0$ y $B(u) = K$) y aplicando la Proposición 2.3.25, obtenemos el Corolario 3.0.3 (resp., el Corolario 3.0.4). Observe que, en ambos casos, tenemos que $K \subseteq \overline{\mathrm{rec}}(B)$, por lo tanto F será puntualmente semi-$\overline{\mathrm{rec}}(B)$-acotada inferior y localmente debíl-semi-$\overline{\mathrm{rec}}(B)$-acotada superior.

Analogamente, usando el Teorema 3.0.2 con las multifunciones $A(u) = 0$ y $B(u) = K + \varphi(u)S_0$ (resp., $A(u) = \varphi(u)S_0$ y $B(u) = K$) y aplicando la Proposición 2.3.25, obtenemos Corolario 3.0.5 (resp., Corolario 3.0.6). En ambos casos, tenemos que $K \subseteq \overline{\mathrm{rec}}(B)$, por lo tanto F es puntualmente semi-$\overline{\mathrm{rec}}(B)$-convexa y localmente semi-$\overline{\mathrm{rec}}(B)$-acotada inferior. □

Esto hay que hacerlo en detalle, todos los detalles. Un trabajo para defensa no debe tener este tipo de prueba resumida y concentrada.

Conclusiones

Los resultados mencionados en la introducción se pueden obtener como consecuencia directa de los corolarios obtenidos a partir de los teoremas 3.0.1 y 3.0.2. En el caso de funciones a valores reales, el teorema de Bernstein–Doetsch [3], los resultados de Ng–Nikodem [21] y Házy–Páles [10] pueden ser obtenidos a partir del Corolario 3.0.3 si consideramos $Y := \mathbb{R}$, $K := \mathbb{R}_+$, $S_0 := [-1, 0]$, $F(x) := \{f(x)\}$, y $\varphi(x) := 0$, $\varphi(x) := \varepsilon$, $\varphi(x) := \varepsilon\|x\|$, respectivamente. Observe que, en estos casos, la Proposición 2.3.25 nos lleva a lo siguiente $\varphi^T(t, x) := 0$, $\varphi^T(t, x) := 2\varepsilon$, $\varphi^T(t, x) := 2\varepsilon T(t)\|x\|$, respectivamente. Los resultados de Averna, Cardinali, Nikodem, Papalini [1, 6, 22, 23, 24, 25, 26] y por Borwein [5] que están relacionados a K-Jensen convexidad/concavidad para multifunciones y funciones vectoriales también pueden ser obtenidos directamente. Numerosos resultados obtenidos para Jensen convexidad aproximada por Makó and Páles [16, 19] y por Mureńko, Ja. Tabor, Jó. Tabor, y Żoldak [20, 28, 29, 30, 31] son generalizados por los Corolarios 3.0.3–3.0.6. De manera similar, usando la forma explícita de la función T_2 descrita en Observación 2.3.27 y el Corolario 3.0.4, se pueden obtener de manera simple los resultados de Azócar, Gimenez, Nikodem y Sanchez [2] y Leiva, Merentes, Nikodem, y Sanchez [15] que están relacionados con Jensen-convexidad fuerte.

Lo dicho acá pudiera ser explotado mejor si se hace en detalles. Como está escrito es un resultado tras el otro y no se ve de entrada la importancia que de verdad tiene lo dicho acá

Bibliografía

[1] A. Averna and T. Cardinali, *On the concepts of K-convexity [K-concavity] and K-convexity* [K-concavity*]*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **16** (1990), no. 1-2, 311–330. MR 1105752 (92h:26031)

[2] A. Azócar, J. Giménez, K. Nikodem, and J. L. Sánchez, *On strongly midconvex functions*, Opuscula Math. **31** (2011), no. 1, 15–26.

[3] F. Bernstein and G. Doetsch, *Zur Theorie der konvexen Funktionen*, Math. Ann. **76** (1915), no. 4, 514–526. MR 1511840

[4] P. Billingsley, *Notes: Van Der Waerden's Continuous Nowhere Differentiable Function*, Amer. Math. Monthly **89** (1982), no. 9, 691. MR 1540053

[5] J.M. Borwein, *Multivalued convexity and optimization: a unified approach to inequality and equality constraints*, Math. Programming **13** (1977), no. 2, 183–199. MR 0451166 (56 #9453)

[6] T. Cardinali, K. Nikodem, and F. Papalini, *Some results on stability and on characterization of K-convexity of set-valued functions*, Ann. Polon. Math. **58** (1993), no. 2, 185–192.

[7] F. S. Cater, *On van der Waerden's nowhere differentiable function*, Amer. Math. Monthly **91** (1984), no. 5, 307–308. MR 740246 (85j:26009)

[8] A. Házy, *On approximate t-convexity*, Math. Inequal. Appl. **8** (2005), no. 3, 389–402. MR 2006c:26019

[9] ———, *On the stability of t-convex functions*, Aequationes Math. **74** (2007), no. 3, 210–218. MR 2008j:26012

[10] A. Házy and Zs. Páles, *On approximately midconvex functions*, Bull. London Math. Soc. **36** (2004), no. 3, 339–350. MR 2004j:26020

[11] ———, *On approximately t-convex functions*, Publ. Math. Debrecen **66** (2005), 489–501. MR 2006c:26023

[12] ———, *On a certain stability of the Hermite–Hadamard inequality*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **465** (2009), 571–583. MR 2009k:39033

[13] H.-H. Kairies, *Takagi's function and its functional equations*, Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat. (1998), no. 15, 73–83. MR 2002b:39014

[14] K. Knopp, *Ein einfaches Verfahren zur Bildüng stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen*, Math. Z. **2** (1918), no. 1-2, 1–26. MR 1544308

[15] H. Leiva, N. Merentes, K. Nikodem, and J. L. Sánchez, *Strongly convex set-valued maps*, J. Global Optim. (2013).

[16] J. Makó and Zs. Páles, *Approximate convexity of Takagi type functions*, J. Math. Anal. Appl. **369** (2010), 545–554.

[17] ———, *Implications between approximate convexity properties and approximate Hermite–Hadamard inequalities*, Cent. Eur. J. Math. **10** (2012), no. 3, 1017–1041.

[18] ———, *Korovkin type theorems and approximate Hermite–Hadamard inequalities*, J. Approx. Theory **164** (2012), no. 8, 1111–1142.

[19] ———, *On approximately convex Takagi type functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), no. 6, 2069–2080.

[20] A. Mureńko, Ja. Tabor, and Jó. Tabor, *Applications of de Rham Theorem in approximate midconvexity*, J. Diff. Equat. Appl. **18** (2012), no. 3, 335–344.

[21] C. T. Ng and K. Nikodem, *On approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), no. 1, 103–108.

[22] K. Nikodem, *Continuity of K-convex set-valued functions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **34** (1986), no. 7-8, 393–400.

[23] ———, *On concave and midpoint concave set-valued functions*, Glas. Mat. Ser. III **22(42)** (1987), no. 1, 69–76. MR 89g:39017

[24] ———, *On midpoint convex set-valued functions*, Aequationes Math. **33** (1987), no. 1, 46–56. MR 88h:90171

[25] K Nikodem, *K-convex and K-concave set-valued functions*, Zeszyty Nauk. Politech. Łódz. Mat. (Łódz) **559** (1989), 1–75, (Rozprawy Nauk. 114).

[26] F. Papalini, *The K-midpoint * convexity [concavity] and lower [upper] K-semicontinuity of a multifunction*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **16** (1990), no. 1-2, 149–159 (1991). MR 1105736 (92h:26032)

[27] B. T. Polyak, *Existence theorems and convergence of minimizing sequences for extremal problems with constraints*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **166** (1966), 287–290. MR 33 #6466

[28] Ja. Tabor and Jó. Tabor, *Generalized approximate midconvexity*, Control Cybernet. **38** (2009), no. 3, 655–669.

[29] ———, *Takagi functions and approximate midconvexity*, J. Math. Anal. Appl. **356** (2009), no. 2, 729–737.

[30] Ja. Tabor, Jó. Tabor, and M. Żołdak, *Approximately convex functions on topological vector spaces*, Publ. Math. Debrecen **77** (2010), 115–123. MR 2675738

[31] ———, *Optimality estimations for approximately midconvex functions*, Aequationes Math. **80** (2010), 227–237. MR 2736954

[32] T. Takagi, *A simple example of the continuous function without derivative*, J. Phys. Math. Soc. Japan **1** (1903), 176–177.

[33] L. I. Trudzik, *Continuity properties of vector-valued convex functions*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **36** (1984), no. 3, 404–415. MR 733912 (85d:46062)

[34] B. L. van der Waerden, *Ein einfaches Beispiel einer nichtdifferenzierbaren stetigen Funktion*, Math. Z. **32** (1930), 474–475.