DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

Permutaciones y el Juego del 15

José Heber Nieto

Resumen

En este trabajo se utilizan conceptos elementales sobre permutaciones para analizar el *juego del 15* de Sam Loyd.

1. Introducción

En 1878 Sam Loyd (1841–1911), uno de los más grandes creadores de acertijos que han existido, propuso un rompecabezas que causó verdadero furor en su época y ha mantenido su popularidad hasta nuestros días. La versión original consistía en una caja cuadrada que contenía quince piezas cuadradas, numeradas del 1 al 15, dispuestas como se ve en el siguiente diagrama.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Figura 1.

Observe que la casilla inferior derecha está vacía, y si los números se leen de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo entonces están ordenados en forma creciente, excepto por el 15 y el 14 que aparecen transpuestos.

Un *movimiento válido* consiste en deslizar uno de los números horizontal o verticalmente adyacentes a la casilla vacía hasta ocuparla, dejando vacante la casilla ocupada originalmente por la pieza movida. En la posición inicial hay sólo dos movimientos válidos, que consisten en mover el 12 o el 14 hasta ocupar la casilla inferior derecha.

Pues bien, Sam Loyd ofreció pagar mil dólares a quien lograra, mediante alguna secuencia de movimientos válidos, intercambiar el 14 y el 15 dejando a los demás números en su posición inicial. En otras palabras, si llamamos posición *normal* a la que tiene los quince números ordenados en forma creciente y con la casilla inferior derecha vacía, la propuesta de Sam Loyd fue hallar una secuencia de movimientos válidos que transforme la posición de la Figura 1 en la posición normal.

El premio ofrecido desató un verdadero frenesí por hallar la solución. En su obra póstuma [2, p. 235] el propio Sam Loyd narra, de manera humorística, cómo volvió "loco al mundo entero con una pequeña caja con piezas movibles".

El lector que quiera intentarlo puede fácilmente construir un juego del 15 con cartulina, o bien jugar por internet, en la página del autor `http://mipagina.cantv.net/jhnieto/15-1.htm`

2. Permutaciones

Si no consiguió la solución al problema anterior no se desanime: ¡en realidad no existe, y nadie pudo cobrar el premio ofrecido por Sam Loyd!

Los matemáticos no tardaron mucho en darse cuenta de esto, como lo prueban dos artículos [3, 5] aparecidos en 1879 en el *American Journal of Mathematics*.

Para comprender lo que ocurre, recordemos que una *permutación* de los números del 1 al n es una reordenación cualquiera $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de la secuencia $1, 2, \ldots, n$. Si $i < j$ y $a_i > a_j$ entonces se dice que el par (a_i, a_j) es una *inversión*, de lo contrario se dice que es una *sucesión*. Si el número total de inversiones de una permutación es par, entonces se dice que la permutación es *par*; en caso contrario se dice que la permutación es *impar*.

El número total de permutaciones de los números del 1 al n es $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Si $n > 1$ es fácil ver que la mitad de las permutaciones son pares y la otra mitad son impares (en efecto, la transposición de los dos primeros elementos de una permutación establece una biyección entre las permutaciones pares y las impares).

Es claro que a cada posición del juego del 15 le podemos asociar una permutación de los números del 1 al 15, leyendo los números de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, sin tomar en cuenta la casilla vacía. Por ejemplo a la posición inicial del problema propuesto por Sam Loyd le corresponde la permutación 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14. Esta permutación tiene una sola inversión, a saber el par (15, 14), por lo tanto es *impar*. La permutación que había que obtener para ganar el premio era simplemente la sucesión ordenada de los 15 primeros números naturales, la cual no tiene inversiones y por lo tanto es *par*. Ahora veamos qué ocurre cuando hacemos un movimiento válido. Es claro que los movimientos horizontales no modifican en nada la permutación y tan sólo desplazan la casilla vacía dentro de la misma fila. En cambio si movemos un número hacia abajo el efecto será que este número adelanta a los tres que le siguen, y además la casilla vacía pasará de una fila impar a una fila par, o viceversa.

5	3	1	4
10	8	7	11
6	15		2
9	13	14	12

Figura 2.

Por ejemplo en la posición que se ilustra en la Figura 2, si bajamos el 7 entonces éste adelanta al 11, al 6 y al 15. ¿Qué ocurre con la paridad de las permutaciones antes y después del movimiento? En primer lugar observemos que al bajar un número la única alteración del orden que se produce es la de ese número con los tres que le siguen. Por lo tanto las únicas parejas que pueden cambiar su condición de inversión a sucesión, o viceversa, son (7,11), (7,6) y (7,15). De hecho, al bajar el 7 la inversión (7, 6) desaparece, pero en cambio aparecerán dos nuevas inversiones: (11, 7) y (15, 7). En general si el número a bajar está en inversión con k de los tres que le siguen (con k igual a 0, 1, 2 o 3), al efectuar el movimiento esas k inversiones desaparecerán, pero aparecerán $3-k$ nuevas. El cambio en el número total de inversiones será entonces $(3-k)-k = 3-2k$, que siempre es impar. Por lo tanto las permutaciones antes y después del movimiento serán de diferente paridad. De modo análogo, subir un número hace que éste retroceda tres puestos y la permutación resultante tendrá paridad diferente a la de partida.

Ahora bien, si partimos de la posición inicial propuesta por Sam Loyd y llegamos a otra con la casilla vacía en la misma posición, el número de movimientos verticales realizados debe haber sido par (ya que la casilla vacía debe haber subido tantas veces como bajó). Por lo tanto la paridad de la permutación cambió un número par de veces, lo cual equivale a decir que quedó igual que al principio (o sea *impar*). Esto demuestra que ni la permutación ordenada del 1 al 15, ni ninguna otra permutación *par* con la casilla vacía en la esquina inferior derecha puede ser obtenida a partir de la posición inicial de Sam Loyd, quien en ningún momento corrió el riesgo de tener que pagar el premio ofrecido.

3. Invariantes

Muchos problemas están relacionados con sistemas cuyo estado se puede cambiar aplicando ciertas transformaciones. Los juegos pertenecen a esta categoría, así como muchos otros problemas en los cuales se aplican en forma reiterada transformaciones geométricas o algebraicas.

Un *invariante* I es una función que a cada estado E del sistema le asocia un valor $I(E)$ de tal manera que, si de un estado E_1 se puede pasar a otro estado E_2 mediante una transformación válida, entonces $I(E_1) = I(E_2)$.

Los invariantes son muy útiles para demostrar la imposibilidad de pasar de un estado a otro. Si I es un invariante y a partir de un estado A se puede llegar a otro estado B mediante una secuencia de transformaciones válidas, entonces es claro que debe ser $I(A) = I(B)$. Por lo tanto si un invariante toma valores diferentes en dos estados, entonces es imposible pasar de uno al otro mediante una sucesión de transformaciones válidas.

Para construir un invariante para el juego del 15 comencemos por asignar un valor numérico a la paridad de una permutación σ. Más precisamente, definamos $p(\sigma) = 0$ si σ es par y $p(\sigma) = 1$ si σ es impar. Dada una posición P del juego del 15 sea σ la permutación asociada y f $(1 \leq f \leq 4)$ la fila en la cual se encuentra la casilla vacía. Definamos $I(P) = p(\sigma) + f \mod 2$.

Si se realiza un movimiento válido entonces o bien $p(\sigma)$ y f mantienen sus valores (caso de un movimiento horizontal) o bien tanto $p(\sigma)$ como f cambian en una unidad (caso de un movimiento vertical). En cualquier caso se ve claramente que el valor de I no cambia, y por lo tanto es un invariante.

Por ejemplo para la posición normal N se tiene $I(N) = 0 + 4 \mod 2 = 0$, mientras que para la posición S de la Figura 1 se tiene $I(S) = 1 + 4 \mod 2 = 1$. El hecho de que $I(N) \neq I(S)$ prueba la imposibilidad de pasar de una de estas posiciones a la otra.

4. Accesibilidad

El problema de *accesibilidad* consiste en averiguar, para un par de posiciones A y B, si es posible pasar de una a otra mediante una sucesión de movimientos válidos. Es claro que una condición necesaria para que B sea accesible desde A es que $I(A) = I(B)$, pero podría no ser suficiente (en general, los invariantes permiten dar demostraciones de la imposibilidad de pasar de un estado a otro, pero no de la posibilidad de hacerlo).

Sin embargo, en el juego del 15 la condición $I(A) = I(B)$ es necesaria y suficiente. Aquí no daremos una demostración completa de este hecho (el lector interesado puede ver una en [1]), pero haremos algunas consideraciones que, para los que tengan un poco de práctica en el juego, serán suficientes.

Definamos en primer lugar una relación $\sim$ en el conjunto de las posiciones diciendo que $A \sim B$ si existe una secuencia de movimientos válidos que nos lleve de A a B. Es fácil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia: es reflexiva pues de A se pasa a A mediante la secuencia vacía de movimientos; es simétrica pues si de A se pasa a B mediante la secuencia M_1, M_2,…,M_s, entonces se puede pasar de B a A efectuando los movimientos inversos en orden inverso, es decir M_s^{-1}, M_{s-1}^{-1},…,M_1^{-1}; y es transitiva pues si una secuencia de movimientos nos lleva de A a B y otra nos lleva de B a C entonces efectuando los movimientos de la primera secuencia y a continuación los de la segunda, se pasa de A a C.

Ahora bien, cualquiera que haya dedicado cierto tiempo al juego del 15 sabe por experiencia que, partiendo de cualquier posición inicial A, se pueden ir ordenando sucesivamente las filas hasta llegar, o bien a la posición normal N o bien a la posición S de Sam Loyd (Figura 1). Como $I(N) = 0$ y $I(S) = 1$ resulta que si $I(A) = 0$ entonces $A \sim N$, mientras que si $I(A) = 1$ entonces $A \sim S$. Dada otra posición B con $I(A) = I(B)$ se presentan dos posibilidades:

1. $I(A) = I(B) = 0$. En este caso $A \sim N$ y $B \sim N$, de donde $A \sim B$.

2. $I(A) = I(B) = 1$. En este caso $A \sim S$ y $B \sim S$, de donde $A \sim B$.

En cualquier caso se tiene $A \sim B$, como queríamos probar.

Vemos entonces que $\sim$ divide al conjunto de todas las posiciones en dos clases de equivalencia, tales que de una posición se puede pasar mediante movimientos válidos a cualquier otra de la misma clase, pero a ninguna de la otra clase. La clase de equivalencia de la posición normal está formada por las posiciones que tienen o bien la casilla vacía en la segunda o cuarta fila y permutación par, o bien la casilla vacía en la primera o tercera fila y permutación impar.

El número total de posiciones del juego del 15 es $16! = 20922789888000$, y en cada clase de equivalencia están la mitad, o sea 10461394944000 posiciones.

Como ejemplos finales consideremos las dos posiciones representadas en la Figura 3, ambas planteadas por Sam Loyd:

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

4	8	12	
3	7	11	15
2	6	10	14
1	5	9	13

Figura 3.

¿Es posible obtenerlas a partir de la posición S de la Figura 1? Para la posición de la izquierda no hay inversiones y la casilla vacía está en la primera fila, por lo tanto el invariante es 1 como para S y la respuesta es afirmativa. En la posición de la derecha hay 46 inversiones, con la casilla vacía en la primera fila, por lo tanto el invariante es también 1 y la respuesta es afirmativa.

Otro problema interesante es el de hallar la secuencia *más corta* de movimientos que lleva de una posición a otra de la misma clase de equivalencia. Este problema, para la generalización del juego del 15 a un tablero de $N \times N$ con números del 1 al N^2-1, se ha probado [4] que es computacionalmente intratable (en el lenguaje de la teoría de la complejidad, es *NP-hard*).

Referencias

[1] Archer, A. F. *A Modern Treatment of the 15 Puzzle*, Amer. Math. Monthly **106**(9) (1999), 793–799.

[2] Loyd, S. *Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conundrums - with Answers*, The Lamb Publishing Company, New York, 1914. Ahora en línea en `http://www.mathpuzzle.com/loyd/`

[3] Johnson, W. W. *Notes on the '15 Puzzle. I*, Amer. J. Math. **2**(1879), 397–399.

[4] Ratner, D., Warmuth, M. *Finding a shortest solution for the $N \times N$-extension of the 15-puzzle is intractable*, J. Symb. Comp. **10** (1990) 111–137.

[5] Story, W. E. *Notes on the '15 Puzzle. II*, Amer. J. Math. **2**(1879), 399–404.

José Heber Nieto
Universidad del Zulia
Maracaibo, Venezuela