Modelado de curvas y superficies

Francisco Velasco Anguita

Dpto. Lenguajes y Sistemas Informáticos
Universidad de Granada

Sistemas Gráficos

Grado en Ingeniería Informática

Curso 2021-2022

Contenidos

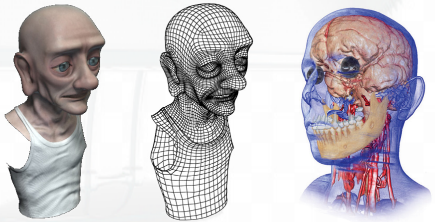
Objetivos

- Conocer las bases matemáticas que fundamentan el modelado de curvas y superficies en el campo de la informática gráfica
- Conocer diferentes técnicas para modelar curvas (o superficies) y conocer las diferentes características de cada técnica
- Saber elegir la técnica adecuada según el tipo de curva (o superficie) a modelar
- Conocer técnicas para visualizar curvas y superficies

Introducción

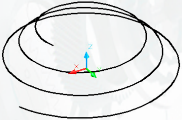
Modelos geométricos vs. volumétricos

- **Modelo**
  - Representación de lo más relevante de una entidad
- **Modelos geométricos**
  - Representan la geometría de un objeto, la *forma* de su frontera
  - Si la frontera encierra un espacio, éste no es relevante
- **Modelos volumétricos**
  - Representan propiedades espacialmente localizadas
  - El interior es heterogéneo en cuanto a su material o propiedades

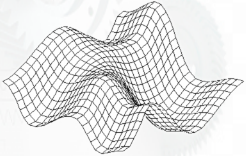


Modelos Geométricos

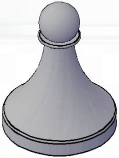
- Consideraremos elementos con coordenadas 3D
- Aún así, se puede hablar de elementos:
  - Unidimensionales



  - Bidimensionales



  - Tridimensionales



Elementos 3D Unidimensionales: Curvas

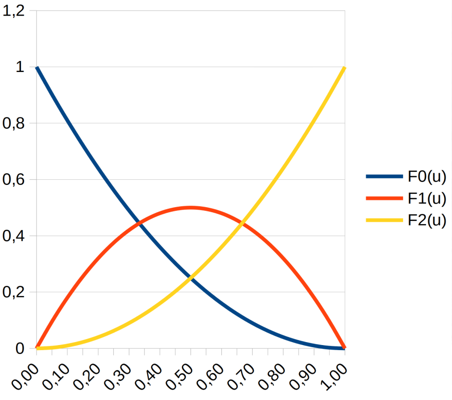
- **Curva:** Geometría continua de una dimensión que varía de dirección paulatinamente
- Definición Paramétrica
  - $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ siendo $C(u)$ continua
- Definición paramétrica mediante puntos de control
  - Dado un conjunto de puntos $\{P_i : 0 \leq i \leq n, i \in \mathbb{N}\}$

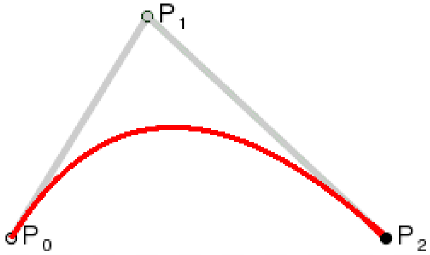
$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} F_i(u) P_i \quad \text{cumpliendo} \quad \sum_{i=0}^{n} F_i(u) = 1$$

  - Cada punto de la curva es una media ponderada de los puntos de control
  - Las funciones que definen la ponderación se denominan Funciones de Forma

Curvas

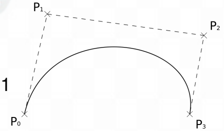
Ejemplo





Curvas Bezier

- Ideadas por el ingeniero Pierre Bézier, muy usadas por él mismo en el diseño de automóviles Renault
- Características:
  - Máxima continuidad
    Una curva de $n + 1$ puntos tiene continuidad C^{n-1}
  - Tiene carácter global
    La modificación de un punto afecta a toda la curva
  - La curva siempre toca los puntos P_0 y P_n
  - La tangente en P_0 viene determinada por la dirección $\overrightarrow{P_0 P_1}$
  - La tangente en P_n viene determinada por la dirección $\overrightarrow{P_{n-1} P_n}$
  - Toda la curva se encuentra en la envolvente convexa de los puntos



Curvas Bézier

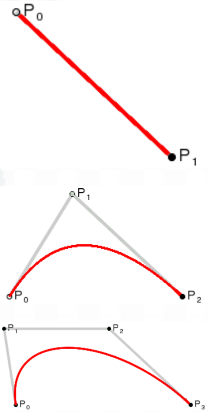
Construcción: Algoritmo de De Casteljau

- Puede verse como *una interpolación lineal de interpolaciones lineales*
- Si la curva tiene 2 puntos de control
  - $C(u) = (1-u)P_0 + uP_1$
- Si la curva tiene 3 puntos de control
  - Se calcula la interpolación lineal en cada tramo T_i

    $$T_0(u) = (1-u)P_0 + uP_1 \quad \text{y}$$
    $$T_1(u) = (1-u)P_1 + uP_2$$

  - Se calcula la interpolación lineal de las ecuaciones anteriores

    $$C(u) = (1-u)T_0(u) + uT_1(u)$$



Curvas Bézier

Formulación

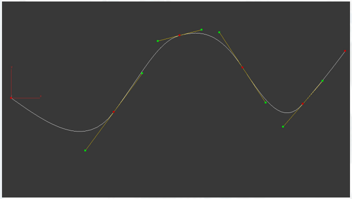
- Desarrollemos la ecuación para una curva de 3 puntos
  - Se tiene que $C(u) = (1-u)T_0(u) + uT_1(u)$
    con $T_0(u) = (1-u)P_0 + uP_1$ y $T_1(u) = (1-u)P_1 + uP_2$
  - Sustituyendo $T_i(u)$ queda
    $C(u) = (1-u)((1-u)P_0 + uP_1) + u((1-u)P_1 + uP_2)$
  - Simplificando ...
    $C(u) = (1-u)^2 P_0 + 2(1-u)uP_1 + u^2 P_2$
- Entonces, la ecuación general para $n+1$ puntos sería:

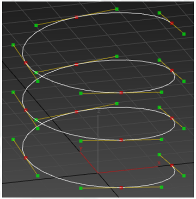
$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} BEZ_{i,n}(u)P_i \quad \text{donde} \quad BEZ_{i,n}(u) = \binom{n}{i}(1-u)^{n-i}u^i$$

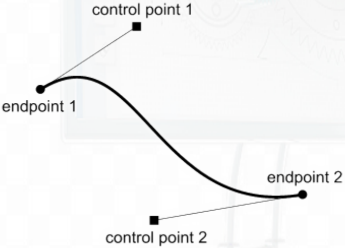
- Por ejemplo, para 5 puntos sería:
  $C(u) = (1-u)^4 P_0 + 4(1-u)^3 uP_1 + 6(1-u)^2 u^2 P_2 + 4(1-u)u^3 P_3 + u^4 P_4$

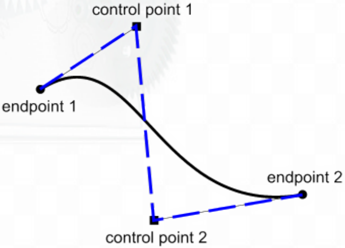
Curvas Bezier

Uso en programas







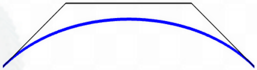


Curvas B-Spline

- También se define la curva como una suma ponderada de los puntos de control: $C(u) = \sum_{i=0}^{n} b_{i,k}(u) P_i$
- Incorporan 2 parámetros para controlar la forma de la curva
  - k: El grado de la curva.
    Se *independiza* del número de puntos

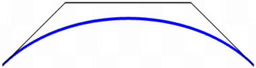
k = 1

k = 2



k = 3

  - Vector de nudos:
    Controla si la curva se acerca a la polilínea de control (k=3)



[0 0 0 0 1 1 1 1]

[0 1 2 3 4 5 6 7]

[0 0 0 0 1 2 3 4]

Curvas B-Spline

Definición de las funciones de forma

- Dados $n+1$ puntos de control y dado un grado k $(2 \leq k \leq n)$
- Se tiene un vector de nudos $[u_0 \; u_1 \; \cdots \; u_{n+k+1}]$
  - Con $u_i \leq u_j \quad \forall i < j$
- Se definen las funciones de forma como:

$$b_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & si \quad u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & resto \end{cases}$$

$$b_{i,j} = \frac{u - u_i}{u_{i+j} - u_i} b_{i,j-1}(u) + \frac{u_{i+j+1} - u}{u_{i+j+1} - u_{i+1}} b_{i+1,j-1}(u)$$

- Se define la curva B-Spline de grado k como

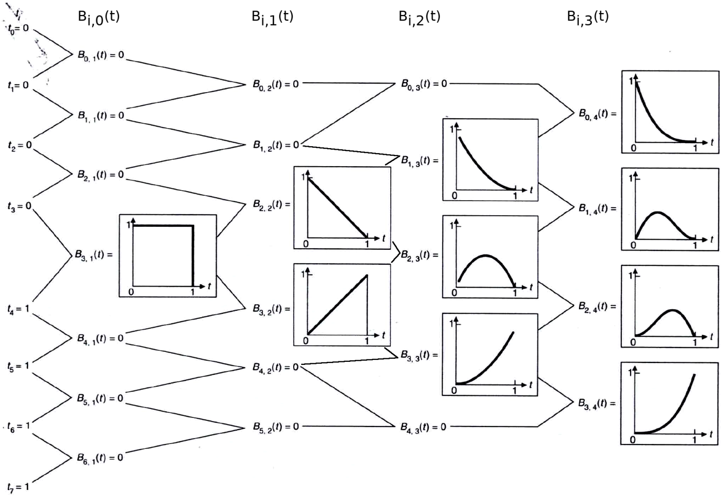
$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} b_{i,k}(u) P_i \;\; \text{donde} \;\; u \in [u_k, u_{n+1}]$$

Cuando $u \in [u_k, u_{n+1}]$ se cumple que $\sum_{i=0}^{n} b_{i,k}(u) = 1$

Curvas B-Spline

Ejemplo

- Consideremos el vector [0 0 0 0 1 1 1 1]

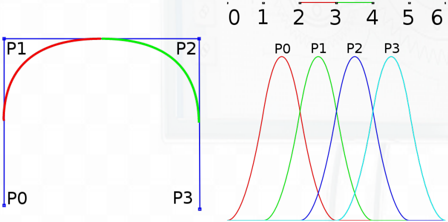


Curvas B-Spline

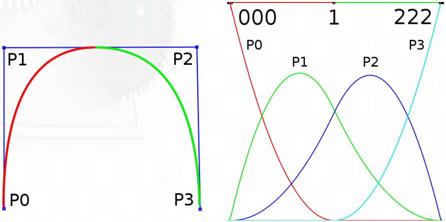
Consideraciones sobre las funciones de forma

- La definición del vector de nudos determina:
  - El aspecto de las funciones de forma
  - El aspecto de las curvas
- Ejemplos para 4 puntos y k=2

Vector [0 1 2 3 4 5 6]



Vector [0 0 0 1 2 2 2]



Url para prácticar cómo afecta el vector de nudos a las funciones de forma y a la curva:

`https://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/basis.html`

Curvas B-Spline

Tipos de curvas

- Dependiendo de *la forma* del vector de nudos:
  - B-Splines uniformes: Los valores del vector son equidistantes
    - Ejemplo: [0 1 2 3 4 5 6] (Fig. 1)
    - Se suelen usar para realizar curvas cerradas (repitiendo los k primeros puntos de control) (Fig. 2)
    - Un caso particular son los uniformes abiertos.

      Se repiten los $k+1$ primeros valores del vector y los $k+1$ últimos.
      La curva pasa por el primer y último punto de control
      Ejemplo con 4 puntos de control y $k=2$: [0 0 0 1 2 2 2] (Fig. 3)
  - B-Splines no uniformes: No cumplen los requisitos anteriores

Figura 1

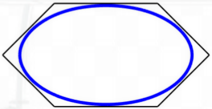


Figura 2

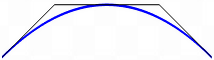


Figura 3

Curvas B-Spline

Características

- El grado de la curva (k) es independiente del número de puntos de control usados en la curva ($n + 1$)

  No obstante, debe cumplirse $k \leq n$

Aclaración: En la literatura se encontrará el concepto *Orden de una B-Spline*. Una B-Spline de grado k es de orden $k + 1$.

- La curva tiene continuidad C^{k-1}

  La curva es continua y sus $k - 1$ derivadas también lo son

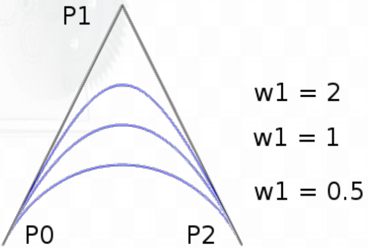
- La curva tiene caracter local
  - La modificación del punto P_i afecta solo a un tramo de la curva

    El correspondiente a cuando el parámetro u toma valores en el intervalo $[u_i, u_{i+k+1}]$ del vector de nudos
  - La modificación del vector de nudos modifica la forma de la curva

Curvas NURBS

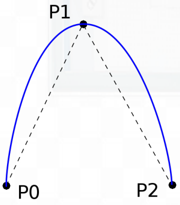
- NURBS = **N**on **U**niform **R**ational **B**-**S**pline
- Todo lo dicho para B-Splines es válido para NURBS, además
  - Cada punto de control P_i tiene un peso w_i
    - Si $w_i < 1$ la curva se aleja del punto de control
    - Si $w_i = 1$ la curva se comporta como una B-Spline
    - Si $w_i > 1$ la curva se acerca al punto de control
  - La curva NURBS se define como

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} b_{i,k}(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^{n} b_{i,k}(u) w_i}$$

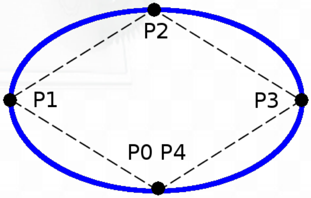


Spline cúbico

- Es una curva de **puntos de paso**
- Entre cada 2 puntos de control,
  la curva se define mediante un polinomio cúbico
- Se fuerza la continuidad C^2 en los puntos intermedios
  - Continuidad C^0: La curva es continua en dichos puntos
  - Continuidad C^1: La pendiente coincide a ambos lados del punto
  - Continuidad C^2: La curvatura también coincide
- Permite hacer curvas tanto abiertas como cerradas



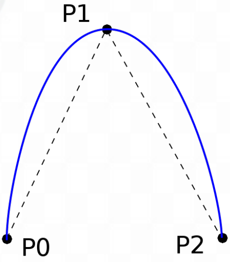
Spline Cúbico Natural

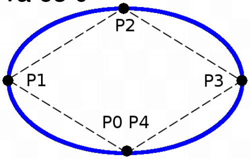


Spline Cúbico Periódico

Spline cúbico

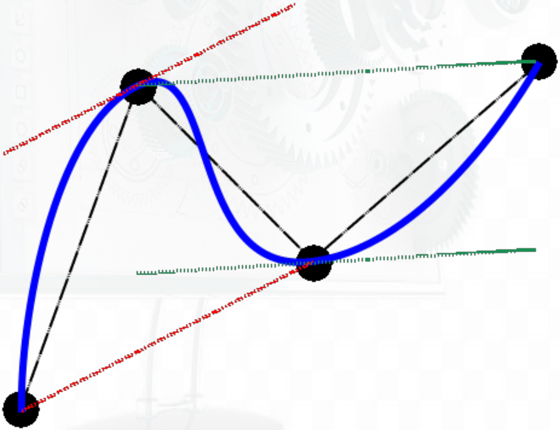
- Dados $n+1$ puntos, desde P_0 hasta P_n, se define cada uno de sus n tramos con polinomios cúbicos $T_i(u) = (x, y, z)$ donde
  $x = a_{xi}u^3 + b_{xi}u^2 + c_{xi}u + d_{xi}$ $\quad y = a_{yi}u^3 + b_{yi}u^2 + c_{yi}u + d_{yi}$ $\quad z = similar$
  Con las siguientes condiciones:
  - Continuidad C^0
    $\forall i \in [0, n-1] : \quad T_i(0) = P_i, \quad T_i(1) = P_{i+1}$
  - Continuidad C^1 en cada punto de control interior
    $\forall i \in [0, n-2], \quad T_i'(1) = T_{i+1}'(0)$
  - Continuidad C^2 en cada punto de control interior
    $\forall i \in [0, n-2], \quad T_i''(1) = T_{i+1}''(0)$
  - Spline cúbico natural:
    La segunda derivada en los extremos de la curva es 0
    $T_0''(0) = 0, \quad T_{n-1}''(1) = 0$
  - Spline cúbico periódico:
    Se fuerza C^1 y C^2 en los extremos
    $T_0'(0) = T_{n-1}'(1), \quad T_0''(0) = T_{n-1}''(1)$





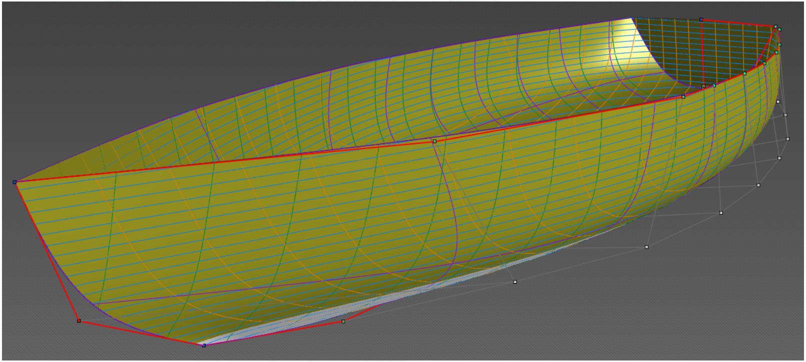
Spline cúbico

- La pendiente en los puntos intermedios P_i viene determinada por la dirección $\overrightarrow{P_{i-1}P_{i+1}}$



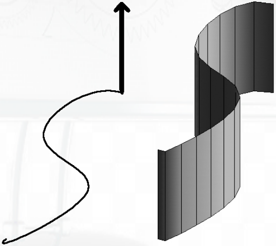
Elementos 3D Bidimensionales: Superficies

- **Superficie:** Geometría continua de dos dimensiones que varía de inclinación paulatinamente
- Definición Paramétrica
  - $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ siendo $S(u, v)$ continua



Superficies a partir de curvas

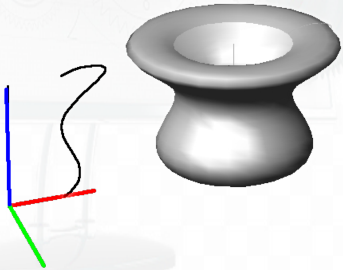
- A partir de un elemento unidimensional, una curva, se crea una superficie, bidimensional, añadiéndo una dimensión
- **Superficie tabulada**
  - La 2ª dimensión se añade con un vector $\vec{d}$
  - Sea $C(u)$ una curva y $\vec{d}$ el vector directriz, entonces
  - $S(u, v) = C(u) + v\,\vec{d}$ es una superficie



Superficie de revolución

- Se parte de una curva $C(u)$ definida en el plano $Z = 0$ a una cierta distancia del eje Y
- Se nota $C_x(u)$ a la coordenada x de la curva en función del parámetro u, y $C_y(u)$ a la coordenada y de dicha curva
- La superficie de revolución se define como

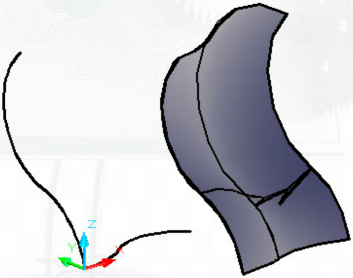
$$S(u, v) = (cos(v)C_x(u), C_y(u), -sin(v)C_x(u)) \text{ con } v \in [0, 2\pi]$$



Superficies por barrido

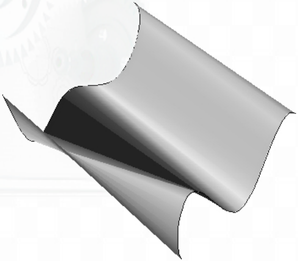
- Es una generalización de los casos anteriores
- A partir de una curva generatriz $C(u)$ y una curva directriz $D(v)$
  - Ambas con su primer punto en el origen de coordenadas
- La superficie por barrido se define como

$$S(u,v) = C(u) + D(v)$$



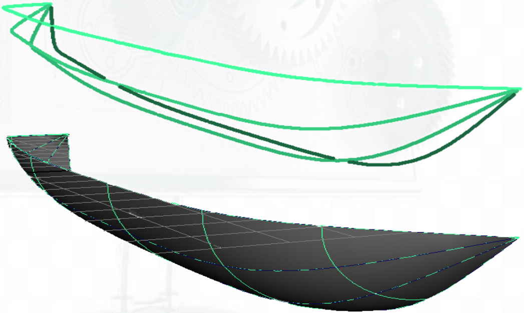
Superficies regladas

- Se parte de dos curvas generatrices, $C_1(u)$ y $C_2(u)$
- Se crea la superficie mediante la interpolación lineal de ambas
- $S(u, v) = (1 - v)\ C_1(u) + v\ C_2(u)$



Superficies de unión

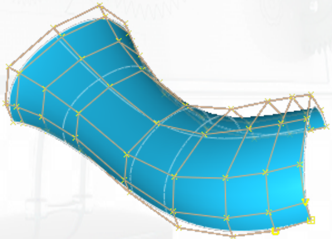
- Se parte de $n + 1$ curvas $C_i(u)$ *en una dimensión*
- Sus puntos actúan como puntos de control para trazar curvas *en la otra dimensión*
- $S(u, v) = \sum_{i=0}^{n} F_i(v)\ C_i(u)$



Superficies mediante mallas de puntos de control

- Se sigue el mismo esquema visto para las curvas Bezier, B-Spline o NURBS
- **Superficies Bezier**
  - Dada una malla de $(n+1)$ x $(m+1)$ puntos de control
  - La superficie de Bezier se define como

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} BEZ_{i,n}(u)\ BEZ_{j,m}(v)\ P_{i,j}$$

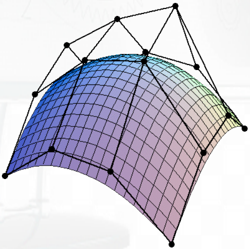


Superficies Bezier

Propiedades

Son equivalentes a las vistas para las curvas Bezier:

- La superficie toca los 4 puntos esquina de la malla de control
- Cada línea lateral de la superficie es exactamente igual a la curva Bezier que se obtendría con esa fila frontera de puntos de control
- Está contenida en la envolvente convexa de la malla de control
- La superficie tiene carácter global



Superficies B-Spline

- Se necesita definir:
  - Una malla de $(n+1) \times (m+1)$ puntos de control
  - Un grado para cada dimensión: $k \leq n, \quad l \leq m$
  - Un vector de nudos para cada dimensión
- Entonces:

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_{i,k}(u)\, b_{j,l}(v)\, P_{i,j}$$

- Todo lo dicho para las curvas B-Spline es válido para las superficies B-Spline
  - Tamaño de los vectores de nudos en cada dimensión
  - Tipos de vectores de nudos y como afecta a la forma de la superficie en esa dimensión
  - Rangos válidos de los parámetros en cada dimensión
  - Localidad de la superficie

Superficies NURBS

- Cada punto de la malla de control tiene un peso $w_{i,j}$
  Con el mismo significado que el comentado en las curvas NURBS

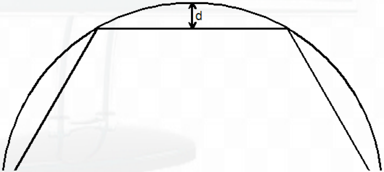
$$S(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_{i,k}(u)\, b_{j,l}(v)\, w_{i,j}\, P_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_{i,k}(u)\, b_{j,l}(v)\, w_{i,j}}$$

- Son las superficies por malla de puntos más usadas, ya que incluyen a las otras vistas
  - Si $w_{i,j} = 1 \;\; \forall i,j$ es como una B-Spline
  - Si además
    - $k = n, \;\; l = m$
    - Los vectores de nudos son de una B-Spline uniforme abierta
  - Entonces, la superficie es como una Bezier

Visualización de curvas y superficies

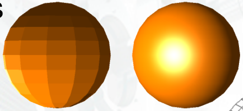
Visualización de curvas

- Se aproxima la curva mediante una polilínea
  - Se evalúa la curva en determinados valores del parámetro
  - Valores equidistantes del parámetro
    no implican puntos equidistantes en la curva
  - Existen métodos adaptativos que tienen en cuenta
    la curvatura de la curva o la distancia al último punto
  - En cualquier caso, lo que se aproxima es la visualización,
    no la representación de la curva
- Se dibuja la polilínea creada

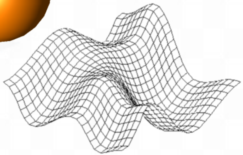


Visualización de superficies

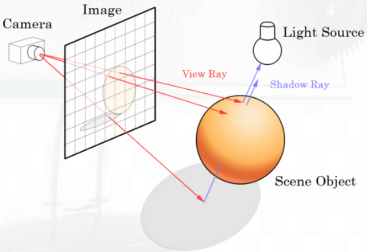
- Al igual que con las curvas, se puede aproximar la superficie mediante una malla de polígonos
  - Aplicando un sombreado, no se nota la aproximación



  - También se suele visualizar mediante curvas isoparamétricas



- Se puede realizar una visualización directa mediante Ray Casting



Modelado de curvas y superficies

Francisco Velasco Anguita

Dpto. Lenguajes y Sistemas Informáticos
Universidad de Granada

Sistemas Gráficos

Grado en Ingeniería Informática

Curso 2021-2022