SEL0620 - Controle Digital

Tarefa 3 - Modelagem e Discretização da Planta (atividade em dupla ou individual, peso 1)

Importante: Os valores numéricos a serem utilizados estão disponibilizado no Moodle no arquivo "tabela_parametros.pdf". Se a atividade for feita em dupla, escolher os parâmetros de um dos membros da dupla. Continuar com estes parâmetros ao longo das demais atividades da disciplina.

O sistema que será utilizado é um sistema de segunda ordem composto por dois circuitos RC em série separados por um isolador, de acordo com a Figura 1. Nesse sistema, a entrada é um sinal de tensão limitado entre $-15V \leq u(t) \leq +15V$. A saída do sistema é a tensão medida no segundo capacitor $y(t)$. O sistema possui dois estados dados pela tensão $x_1(t)$ e $x_2(t)$ medida nos pontos indicados na figura.

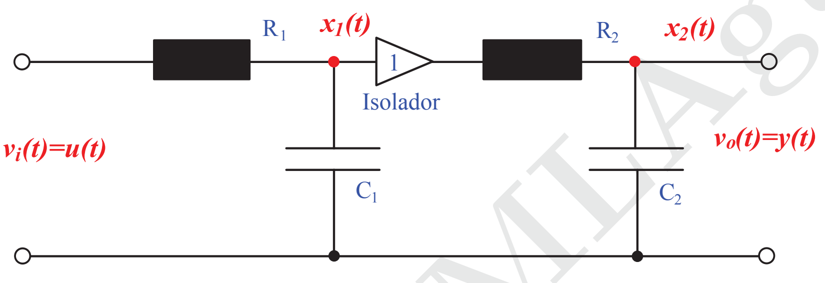

Figura 1: Sistema Dinâmico

Este é um sistema de uso didático, que pode ser construído com facilidade em bancada, e que vai permitir que se teste o projeto de controladores ao longo do curso.

Observação: É importante lembrar que vários sistemas reais podem ser modelados como sistemas de segunda-ordem. Portanto, o projeto desenvolvido nesta disciplina com essa planta didática, poderá servir de exemplo para projetos de controle com plantas reais que o aluno possa ter contato.

Modelagem do Sistema

O isolador faz com que a corrente que passa pelo resistor R_1 seja a mesma que passa pelo capacitor C_1, e a corrente que passa em R_2 é a mesma que passa em C_2:

$$i_{R_1} = i_{C_1}$$
$$i_{R_2} = i_{C_2}$$

Aplicando a Lei de Kirchhoff das correntes no nó indicado por $x_1(t)$:

$$\frac{u - x_1}{R_1} = C_1 \frac{dx_1}{dt}$$
$$\frac{x_1 - x_2}{R_2} = C_2 \frac{dx_2}{dt}$$

Considerando as variáveis de estado como sendo $\mathbf{x} = [x_1 \;\; x_2]^T$:

$$\dot{x}_1 = \frac{-x_1}{R_1C_1} + \frac{u}{R_1C_1}$$
$$\dot{x}_2 = \frac{x_1}{R_2C_2} - \frac{x_2}{R_2C_2}$$

A saída do sistema foi escolhida como sendo $y = x_2$.

Portanto, a **representação em espaço de estados** do sistema é dada por:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{R_1C_1} & 0\\ \frac{1}{R_2C_2} & \frac{-1}{R_2C_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{R_1C_1}\\ 0\end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + 0u$$

Aplicando a Transformada de Laplace nas equações de espaço de estado, obtém-se:

$$sX_1(s) = \frac{-X_1(s)}{R_1C_1} + \frac{U(s)}{R_1C_1}$$
$$sX_2(s) = \frac{X_1(s)}{R_2C_2} - \frac{X_2(s)}{R_2C_2}$$

Reorganizando os termos e substituindo $X_2(s) = Y(s)$:

$$(R_1C_1s + 1)X_1(s) = U(s)$$
$$(R_2C_2s + 1)Y(s) = X_1(s)$$

Portanto, a **função de transferência** do sistema é dada por:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)} = \frac{1}{(R_1C_1R_2C_2)s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2)s + 1}$$

Pode-se escrever a função de transferência do sistema de segunda ordem na forma:

$$G_p(s) = K\frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$$

onde para este sistema:

$$K = 1$$
$$w_n = \sqrt{\frac{1}{(R_1C_1R_2C_2)}}$$
$$\zeta = \frac{(R_1C_1 + R_2C_2)}{2\sqrt{R_1C_1R_2C_2}}$$

Na tabela fornecida, foram dados os valores de ζ e w_n. Não é preciso calcular os valores de R_1, C_1, R_2 e C_2.

Responda as seguintes questões e apresente as respostas no relatório:

1. Qual a função de transferência contínua do sistema para os valores numéricos do seu grupo? Quais os pólos do sistema de segunda ordem contínuo? Qual a classificação do sistema de segunda ordem (sobreamortecido, criticamente amortecido ou subamortecido)? Para obter os polos da função de transferência, o seguinte comando de Matlab pode ser utilizado considerando que a função de transferência G já foi definida:

   ```
   p = pole(G)
   ```

2. Mostre no relatório qual o período de amostragem escolhido baseado na largura de banda do sistema. Como você chegou no valor para o período de amostragem? Mostre no relatório a largura de banda em [rad/s] e em [Hz], e também a frequência de amostragem em [rad/s] e em [Hz]. Observação: o valor mínimo escolhido para T_0 deve ser $0,2$ segundos.

3. A partir da função de transferência contínua do sistema, encontre e mostre no relatório a função de transferência discreta do sistema considerando um retentor de ordem zero. Para isso, considerando que a função de transferência contínua já foi definida no Matlab como sendo G, e o período de amostragem foi definido como sendo T0, utilize o seguinte comando no Matlab:

   ```
   Gz = c2d(G,T0,'zoh')
   ```

4. Quais os pólos e zeros da função de transferência discreta? Para obter os zeros da função de transferência, o seguinte comando de Matlab pode ser utilizado considerando que a função de transferência Gz já foi definida:

   ```
   z = zero(Gz)
   ```

5. Plote a resposta do sistema contínuo à uma entrada degrau de amplitude r, que foi indicada na tabela de parâmetros fornecida. Sobreponha a resposta contínua à resposta discreta. Utilize a seguinte sequencia de comandos do Matlab considerando que a função de transferência contínua G, a função de transferência discreta Gz, e a amplitude do degrau r já foram definidas:

   ```
   figure
   step(r*G)
   hold on
   step(r*Gz)
   ```

   Acrescente título e legenda para completar a figura.

6. Qual o tempo de acomodação (t_s) da resposta do sistema discreto considerando o critério de $\pm 2\%$? Qual o tempo de subida (t_r) da resposta do sistema discreto?

   Para encontrar esse valor, clique com o botão direito do mouse no gráfico mostrado pelo Matlab como resposta ao comando step. Então selecione *Characteristics*, e depois *Setling Time* (t_s) e *Rise Time* (t_r).

7. Utilizando o Simulink, implemente o diagrama da Figura 2 que faz a simulação do sistema contínuo em malha aberta submetido a uma entrada degrau.

   Sequencia a ser utilizada para isso:
   (i) Abra o Simulink digitando *simulink* no prompt da janela de comando do Matlab, ou utilize o botão disponível na aba *Home*.
   (ii) Quando a janela do Simulink abrir, escolha a opção de criar um *Blank Model*
   (iii) Clique no botão *Library Browser*
   (iv) Arraste do *Library Browser* para a área em branco à direita os blocos que você vai utilizar para criar o diagrama (*Trasfer Fcn*, *Zero-Order Hold*, *Scope*, *To Workspace*, *Step*). Eles podem ser encontrados dentro da categoria *Simulink* nas sub-categorias: *Continuous*, *Discrete*, *Sinks*, *Sources*.
   (v) Conecte os blocos clicando na entrada de um bloco e arrastando para a saída de outro bloco ou ponto de conexão desejado.
   (vi) Configure o tempo de simulação para 12 segundos alterando o valor de *Stop Time* na barra superior da janela do Simulink;
   (vii) Configure as propriedades de cada bloco:

   Propriedades dos blocos a serem ajustadas:
   – *Step*: Ajustar o Step Time para 0, ajustar o Final Value para o valor da amplitude do degrau r;
   – *Transfer Function*: Insira os vetores com os valores dos coeficientes do polinômio do numerador e denominador da função de transferência (ordem decrescente de expoentes). Para recuperar os vetores que representam os polinômios do numerador e denominador da função de transferência:

   ```
   [num, den] = tfdata(G,'v')
   ```

   – *Zero-Order Holder*: Configure o Sample Time como sendo o valor do período de amostragem T_0 escolhido;
   – *To workspace*: Configure o Variable name para o nome da variável do workspace onde você quer armazenar os dados. Por exemplo, y_c para a saída contínua, e y_d para a saída discreta.

   (viii) Execute a simulação apertando o botão de play da barra superior da janela do Simulink.

8. Mostre no relatório uma figura com as saídas sobrepostas geradas pelo Simulink e exportadas pelos blocos *To workspace.* Para plotar os dados exportados pelos blocos *To Workspace* utilize a seguinte sequencia de comandos no Matlab:

   ```
   figure
   plot(out.y_c.Time, out.y_c.Data, 'b')
   hold on
   stairs(out.y_d.Time, out.y_d.Data, 'r')
   ```

   Acrescente título e legenda para completar a figura.

   Observe que a saída discreta obtida utilizando o retentor de ordem zero no Simulink é a mesma saída obtida pelo comando step aplicado na função de transferência discreta.

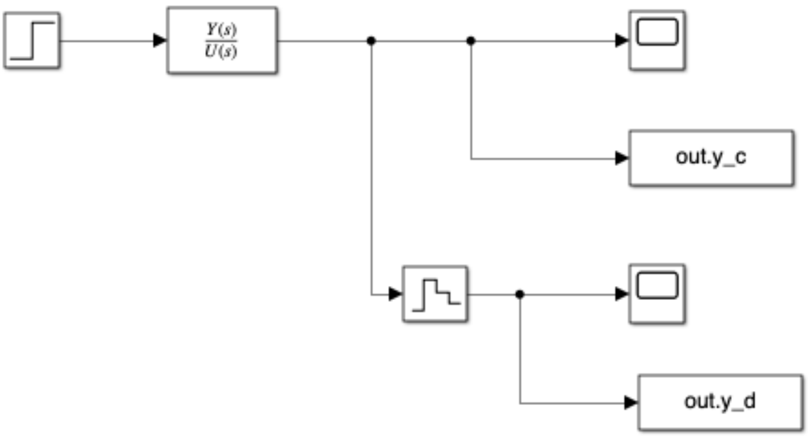

Figura 2: Diagrama de Simulink implementado