FILTRO DE KALMAN
RESUMO

Carlos Henrique Hannas de Carvalho

Sumário

Lista de Figuras

1 Introdção

Neste documento estuda-se os algoritmos de estimativas de dados de um sistema estático ou dinâmico, que pode estar sujeito à incertezas e/ou ruídos. De uma maneira geral, o algoritmo prevê duas partes: predição (estimativa) dos dados e atualização da predição.

O algoritmo enfoque é o Filtro de Kalman, comumente utilizado em sistemas de navegação e controle. O Filtro de Kalman é dividido em três partes, que serão estudadas futuramente: unidimensional, multidimensional e tratamentos não-lineares.

Inicialmente, estuda-se os algoritmos de estimativas, que servirão como introdução para os Filtros de Kalman no tópico 2.

1.1 Estimativas

Considera-se dois tipos de sistemas para estudo: estáticos e dinâmicos.

1.1.1 Sistema Estático

Sistemas estáticos, como o nome propõe, são sistemas que não variam, significativamente, com o tempo. Por exemplo: a altura de um prédio ou a massa de um objeto rígido.

Dada uma estimativa qualquer e medições, ao longo do tempo, o algoritmo tende a convergir para o valor real ao passar do tempo. A equação 1 mostra a estimativa para sistemas estáticos:

$$\hat{x}_{n,n} = \hat{x}_{n,n-1} + \alpha(z_n - \hat{x}_{n,n-1}) \tag{1}$$

em que:

$$\begin{cases} \hat{x}_{n,n-1}: & \text{predição do estado} \\ \hat{x}_{n,n}: & \text{estado atual} \\ z_n: & \text{medição} \\ \alpha: & \text{ganho} \end{cases}$$

1.1.2 Sistema Dinâmico

Sistemas dinâmicos, como o nome propões, são sistemas que variam com o tempo. Por exemplo: um carro em movimento na estrada ou a altitude de um foguete em movimento.

Dada uma estimativa qualquer, o algoritmo faz predições e atualizações de dados, baseado nas medições ao longo do tempo.

As equações de predição para o sistema dinâmico:

$$\begin{cases} \hat{x}_{n+1,n} = & \hat{x}_{n,n} + \Delta t\hat{\dot{x}}_{n,n} + \frac{\Delta t^2}{2}\hat{\ddot{x}}_{n,n} \\ \hat{\dot{x}}_{n+1,n} = & \hat{\dot{x}}_{n,n} + \Delta t\hat{\ddot{x}}_{n,n} \end{cases} \tag{2}$$

As equações de atualização para o sistema dinâmico:

$$\begin{cases} \hat{x}_{n,n} = & \hat{x}_{n,n-1} + \alpha(z_n - \hat{x}_{n,n-1}) \\ \hat{\dot{x}}_{n,n} = & \hat{\dot{x}}_{n,n-1} + \beta(\frac{z_n - \hat{x}_{n,n-1}}{\Delta t}) \\ \hat{\ddot{x}}_{n,n} = & \hat{\ddot{x}}_{n,n-1} + \gamma(\frac{z_n - \hat{x}_{n,n-1}}{0{,}5\Delta t^2}) \end{cases} \tag{3}$$

em que:

$$\begin{cases} \hat{x}_{n+1,n}: & \text{predição da posição} \\ \hat{\dot{x}}_{n+1,n}: & \text{predição da velocidade} \\ \hat{\dot{x}}_{n,n}: & \text{velocidade atual} \\ \hat{\dot{x}}_{n,n-1}: & \text{velocidade predita} \\ \hat{\ddot{x}}_{n,n}: & \text{aceleração atual} \\ \hat{\ddot{x}}_{n,n-1}: & \text{aceleração predita} \\ \Delta t: & \text{variação do tempo} \\ \beta: & \text{ganho} \\ \gamma: & \text{ganho} \end{cases}$$

2 Filtros de Kalman

O algoritmo de Kalman é baseado em predições e atualizações, ao longo do tempo, como já foi mencionado. Abaixo há um esquemático:

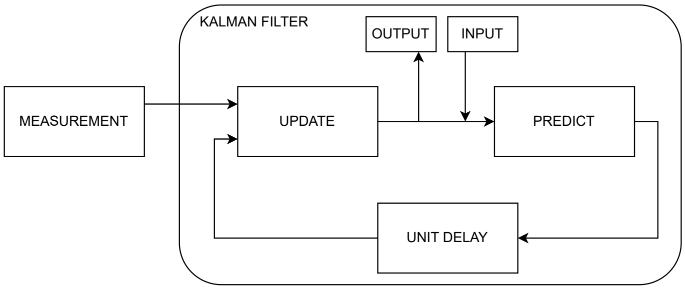

Figura 1: Esquematização do Algortimo de Kalman

A figura 1 é um macro sobre o que acontece no algoritmo de Kalman. Quais passos seguir?

1. INPUT: inserção de estados iniciais do sistema;
2. MEASUREMENT: medição dos estados atuais do sistema;
3. UPDATE: atualização de ganho e estado do sistema;
4. PREDICT: previsão do próximo estado e ganho do sistema;
5. OUTPUT: resultados dos estados do sistema.

2.1 Unidimensional

Trata-se nesta seção, sistemas lineares, geralmente dinâmicos, em apenas uma dimensão. Por exemplo: temperatura de um líquido em um tanque.

As equações de predição para o Filtro de Kalman unidimensional:

$$\begin{cases} \hat{x}_{n+1,n} = & \hat{x}_{n,n} \\ P_{n+1,n} = & P_{n,n} + Q \end{cases} \tag{4}$$

As equações de atualização para o Filtro de Kalman unidimensional:

$$\begin{cases} K_n = & \frac{P_{n,n-1}}{P_{n,n-1}+R_n} \\ \hat{x}_{n,n} = & \hat{x}_{n,n-1} + K_n(z_n - \hat{x}_{n,n-1}) \\ P_{n,n} = & (1-K_n)P_{n,n-1} \end{cases} \tag{5}$$

em que:

$$\begin{cases} P_{n+1,n}: & \text{predição da covariância de estimativa} \\ P_{n,n}: & \text{covariância de estimativa atual} \\ P_{n,n-1}: & \text{covariância de estimativa predita} \\ Q: & \text{constante de ruído} \\ R_n: & \text{covariância de ruído da medição atual} \\ K_n: & \text{ganho de Kalman} \end{cases}$$

A covariância de estimativa $p_{n,n}$ é a diferença entre o valor estimado e real. Atualiza-se essa variável, ao longo do tempo, para minimizar os erros de predição. A covariância r_n é a diferença entre o valor medido e valor real.

2.2 Multidimensional

Procura-se estender o caso particular unidimensional para uma situação que envolva mais de uma dimensão. Agora, as matrizes serão o escopo de estudo para o Filtro de Kalman Multidimensional. Por exemplo, um estado **S** que descreve a posição, velocidade e aceleração de um avião possui matriz de dimensão 9.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$$

OBS: as variáveis são as mesmas dos tópicos anteriores, mas agora em forma matricial.

As equações de predição para o Filtro de Kalman multidimensional:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{n+1,n} = & \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{n,n} + \mathbf{G}\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n \\ \mathbf{P}_{n+1,n} = & \mathbf{F}\mathbf{P}_{n,n}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} \end{cases} \tag{6}$$

As equações de atualização para o Filtro de Kalman multidimensional:

$$\begin{cases} \mathbf{z}_n = \mathbf{H}\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n \\ \mathbf{K}_n = \mathbf{P}_{n,n-1}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_{n,n-1}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_n)^{-1} \\ \mathbf{x}_{n,n} = \mathbf{x}_{n,n-1} + \mathbf{K}_n(\mathbf{z}_n - \mathbf{H}\mathbf{x}_{n,n-1}) \\ \mathbf{P}_{n,n} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n\mathbf{H})\mathbf{P}_{n,n-1}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_n\mathbf{H})^T + \mathbf{K}_n\mathbf{R}_n\mathbf{K}_n^T \end{cases} \tag{7}$$

em que:

$$\begin{cases} \mathbf{F}: & \text{matriz de transição de estados} \\ \mathbf{G}: & \text{matriz de entrada de controle} \\ \mathbf{H}: & \text{matriz de observação} \\ \mathbf{I}: & \text{matriz identidade} \\ \mathbf{u}_n: & \text{variável de controle} \\ \mathbf{w}_n: & \text{variável de ruído} \\ \mathbf{v}_n: & \text{vetor de ruído randômico} \end{cases}$$

Costuma-se utilizar a matriz de observação de estados **H** para converter o estado do sistema em saídas, utilizando transformações lineares. As demais matrizes são modeladas de acordo com o caráter do sistema dinâmico que será estudado ou analisado.

2.3 Não-Linear

Algumas situações podem apresentar uma não-linearidade (relação estado-medição ou dinâmica) em seu sistema. Dessa forma, utiliza-se técnicas de aproximações lineares para solucionar esse tipo de problema. Há duas maneiras de se estudar filtros para problemas não-lineares: Extended Kalman Filter (EKF) ou Unscented Kalman Filter (UKF).

O EKF trata uma linearização analítica do sistema em um dado ponto e instante. Por outro lado, o UKF faz uma linearização estatística do sistema no dado ponto e instante. Em termos estatísticos, o UKF costuma se apresentar resultados melhores que o EKF, mas há um custo computacional maior. Então, por hora, neste documento trata-se apenas do Filtro de Kalman Estendido.

2.3.1 Extended Kalman Filter (EKF)

Como citado anteriormente, a ideia principal do EKF é a aproximação linear de um modelo dinâmico, em um dado ponto. Ou seja, parte da análise é feita em cima de derivadas. Então, algumas modificações são necessárias para isso, principalmente sobre as matrizes de observação **H** e transição **F**.

As matrizes **H** e **F** passam a depender do estado $\mathbf{x}_n$:

$$\begin{cases} \mathbf{H} = & \mathbf{h}(\mathbf{x}_n) \\ \mathbf{F} = & \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \end{cases} \tag{8}$$

Além disso, para as propagações de covariâncias e estados, deve-se linearizar $\mathbf{h}(\mathbf{x}_n)$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ pelo método das matrizes Jacobianas:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \\ \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \tag{9}$$

Através das equações 8 e 9 pode-se definir as equações de predição e atualização do EKF.

As equações de predição para o Filtro de Kalman estendido:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{n+1,n} = & \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{G}\mathbf{u}_n \\ \\ \mathbf{P}_{n+1,n} = & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{P}_{n,n} (\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}})^T + \mathbf{Q} \end{cases} \tag{10}$$

As equações de atualização para o Filtro de Kalman estendido:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_n = & \mathbf{P}_{n,n-1} (\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}})^T (\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{P}_{n,n-1} (\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}})^T + \mathbf{R}_n)^{-1} \\ \\ \mathbf{x}_{n,n} = & \mathbf{x}_{n,n-1} + \mathbf{K}_n(\mathbf{z}_n - \mathbf{h}(\mathbf{x}_{n,n-1})) \\ \\ \mathbf{P}_{n,n} = & (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}) \mathbf{P}_{n,n-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}})^T + \mathbf{K}_n \mathbf{R}_n \mathbf{K}_n^T \end{cases} \tag{11}$$

Como já foi discutido, o EKF trata de uma aproximação linear. Ou seja, o filtro possui uma boa performance quando o erro de linearização é suficientemente pequeno. Por outro lado, a performance cai quando o erro de linearização é grande.

3 Conclusões Finais

Os Filtros de Kalman lineares devem ser inicializados com estimativas quaisquer de estado e covariância. Geralmente as inicializações são altas, até que o filtro, por si só, reajuste os valores de cada variável.

Isso não vale para o Filtro de Kalman não-linear. Eles necessitam de boas inicializações, senão os resultados finais não serão satisfatórios.

A implementação dos algoritmos de Kalman: https://github.com/carloshenriquehannas/KalmanFilter