

# Unidad 4.A. Controladores PID avanzados

Dr. Ing. Hernán Garrido

Control y sistemas  
Universidad Nacional de Cuyo, Facultad de Ingeniería

*carloshernangarrido@gmail.com*

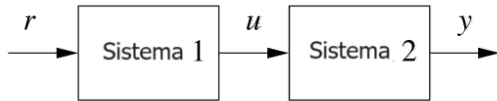
Diciembre de 2023



- 1 Introducción
- 2 Determinación experimental de la función de transferencia
- 3 Reglas de Ziegler–Nichols para el ajuste de controladores PID
- 4 Diseño de controladores PID por asignación de polos
- 5 Control con 2 grados de libertad (2DoF)
  - Controladores PI-D
  - Controladores I-PD
- 6 Ubicación de ceros para mejorar la respuesta del sistema
- 7 Diseño de controlador PID en tiempo discreto

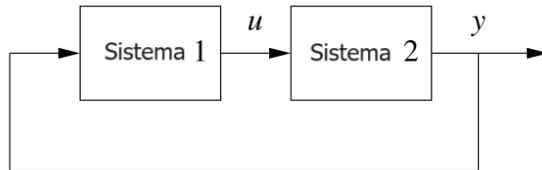
- 1 Introducción
- 2 Determinación experimental de la función de transferencia
- 3 Reglas de Ziegler–Nichols para el ajuste de controladores PID
- 4 Diseño de controladores PID por asignación de polos
- 5 Control con 2 grados de libertad (2DoF)
  - Controladores PI-D
  - Controladores I-PD
- 6 Ubicación de ceros para mejorar la respuesta del sistema
- 7 Diseño de controlador PID en tiempo discreto

# Introducción: Lazo abierto y lazo cerrado



Sistema

(a) Lazo abierto



(b) Lazo cerrado

## Control

La palabra “control” tiene muchos significados y a menudo varía entre las comunidades. Aquí, definimos el control como el uso de algoritmos y retroalimentación en sistemas diseñados. (Astrom y Murray, 2008)

# Introducción: Propiedades de los sistemas realimentados

## Realimentación

Basar acciones correctivas en las diferencias entre el desempeño observado y el desempeño deseado.

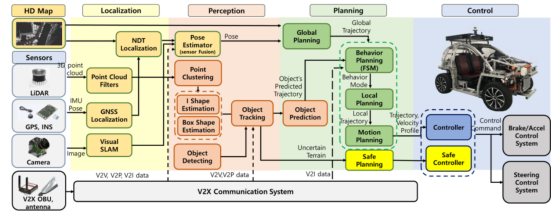
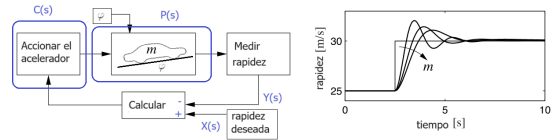
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} \approx 1$$

### • Ventajas

- Posibilidad de diseñar dinámicas
- Robustez ante
  - incertidumbres
  - perturbaciones
- Mayores niveles de automatización

### • Desventajas

- Riesgo de desestabilización por realimentación (+)
- Inyección de ruido de medición en la actuación
- Mayor complejidad



- 1 Introducción
- 2 Determinación experimental de la función de transferencia
- 3 Reglas de Ziegler–Nichols para el ajuste de controladores PID
- 4 Diseño de controladores PID por asignación de polos
- 5 Control con 2 grados de libertad (2DoF)
  - Controladores PI-D
  - Controladores I-PD
- 6 Ubicación de ceros para mejorar la respuesta del sistema
- 7 Diseño de controlador PID en tiempo discreto

# Determinación experimental de la función de transferencia

En sistemas LTI SISO: Resulta simple

- En el dominio de la frecuencia

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow P(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{U(j\Omega)} \dots$$

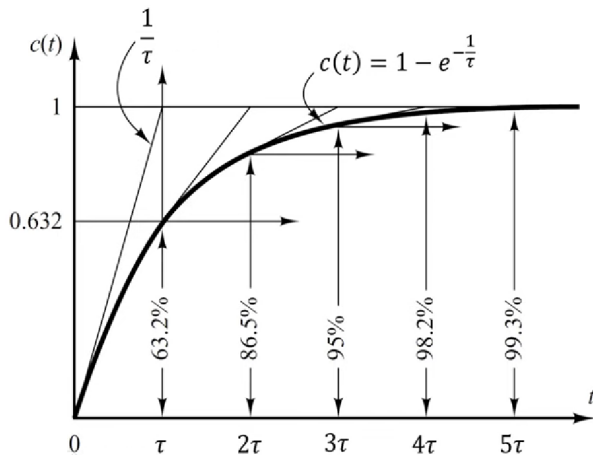
- En el dominio del tiempo, mediante la respuesta al escalón unitario:
  - Sistemas predominantemente de primer orden: Determinamos la constante de tiempo  $\tau = 1/\lambda$  y la ganancia  $K$ .

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \Rightarrow y(t) = K (1 - e^{-\lambda t}) u(t)$$

- Sistemas predominantemente de segundo orden (sub-amortiguados): Determinamos la frecuencia natural  $\Omega_n = \Omega_d / \sqrt{1 - \zeta^2}$ , la relación de amortiguamiento  $\zeta \approx \lambda / \Omega_n$  y ganancia  $K$ :

$$G(s) = K \frac{\Omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\Omega_n s + \Omega_n^2} \Rightarrow y(t) = K (1 - e^{-\lambda t} \sin(\Omega_d t + \phi)) u(t)$$

# Sistemas de primer orden





# Sistemas de segundo orden sub-amortiguados

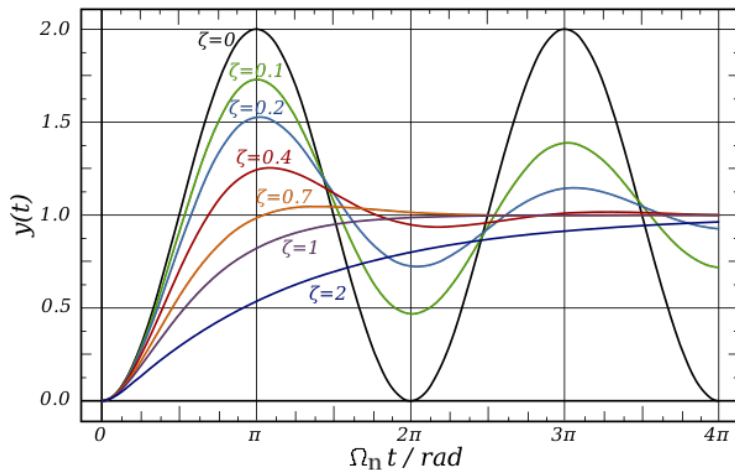
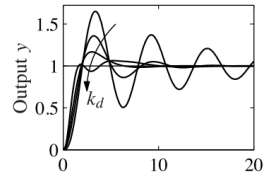
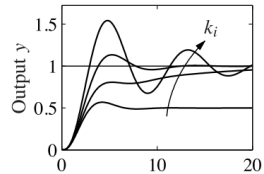
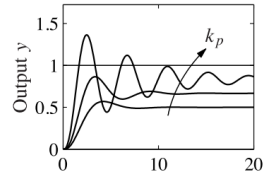
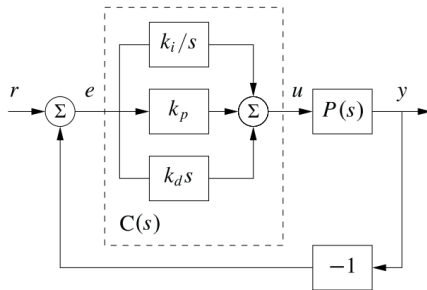


Figura: Tomado de <https://en.wikipedia.org/wiki/Damping>

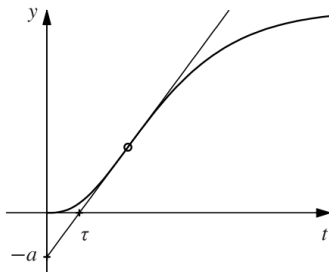
- 1 Introducción
- 2 Determinación experimental de la función de transferencia
- 3 Reglas de Ziegler–Nichols para el ajuste de controladores PID
- 4 Diseño de controladores PID por asignación de polos
- 5 Control con 2 grados de libertad (2DoF)
  - Controladores PI-D
  - Controladores I-PD
- 6 Ubicación de ceros para mejorar la respuesta del sistema
- 7 Diseño de controlador PID en tiempo discreto

# Controladores PID



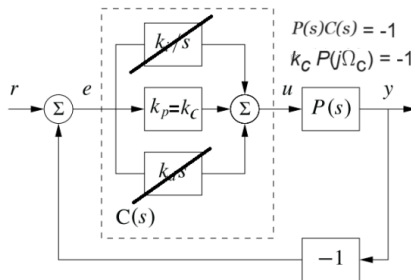
# Reglas de Ziegler–Nichols para el ajuste de controladores PID

Método de la respuesta al escalón



Tipo	$k_p$	$T_i$	$T_d$
P	$1/a$		
PI	$0.9/a$	$3\tau$	
PID	$1.2/a$	$2\tau$	$0.5\tau$

Método de la respuesta en frecuencia



Tipo	$k_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5k_c$		
PI	$0.4k_c$	$0.8T_c$	
PID	$0.6k_c$	$0.5T_c$	$0.125T_c$

# Aspectos prácticos de los controladores PID

- Problema: Amplificación del ruido de alta frecuencia por  $k_d$ .

- Filtrado del error antes de derivar

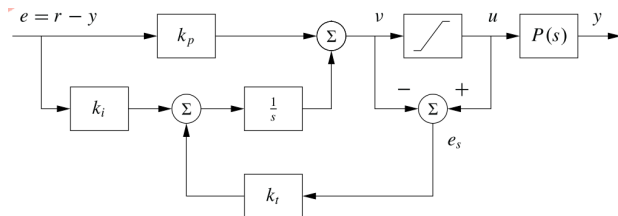
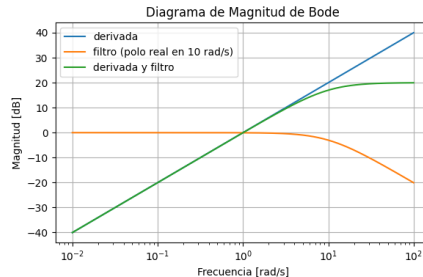
$$\mathcal{L}\{k_d \dot{e}(t)\} = k_d s \approx k_d s \frac{\Omega_f}{s + \Omega_f} = k_d \frac{s \Omega_f}{s + \Omega_f}$$

- Filtrar la salida antes de ingresar al controlador

- ...

- Problema: Devanado (windup) del integrador por saturación del actuador.

- Anti-windup por cálculo hacia atrás
- Anti-windup por clamping



- 1 Introducción
- 2 Determinación experimental de la función de transferencia
- 3 Reglas de Ziegler–Nichols para el ajuste de controladores PID
- 4 Diseño de controladores PID por asignación de polos**
- 5 Control con 2 grados de libertad (2DoF)
  - Controladores PI-D
  - Controladores I-PD
- 6 Ubicación de ceros para mejorar la respuesta del sistema
- 7 Diseño de controlador PID en tiempo discreto

# Diseño de controladores PID por asignación de polos

Se pueden ajustar los parámetros de un controlador PID para obtener un dinámica deseada.

- 1 Especificar desempeño en el dominio del tiempo.
- 2 Traducir a especificaciones en el dominio de la frecuencia de un sistema de 2do orden equivalente, considerando desigualdades.

Property	Value	$\zeta = 0.5$	$\zeta = 1/\sqrt{2}$	$\zeta = 1$
Steady-state value	$k$	$k$	$k$	$k$
Rise time	$T_r = 1/\omega_0 \cdot e^{\varphi/\tan\varphi}$	$1.8/\omega_0$	$2.2/\omega_0$	$2.7/\omega_0$
Overshoot	$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$	16%	4%	0%
Settling time (2%)	$T_s \approx 4/\zeta\omega_0$	$8.0/\omega_0$	$5.9/\omega_0$	$5.8/\omega_0$

Figura: Tomado de Astrom y Murray (2008).

- 3 Comparar polinomios característicos de lazo cerrado y del sistema de segundo orden deseado.

$$H(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} \Rightarrow 1 + \left(k_p + sk_d + \frac{k_i}{s}\right)P(s) = 0 \Leftrightarrow s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2 = 0$$

- 4 Determinar  $k_p, k_i, k_d$  igualando coeficientes correspondientes.
- 5 Verificar desempeño en contraste con el polinomio característico deseado

# Ejemplo de diseño de PID por asignación de polos 1/3

Planta: Sistema térmico

$$P(s) = \frac{K}{s + s_0}$$

Especificación en el tiempo

$$M_p = 16\% \Rightarrow \zeta = 0.5$$

$$T_{s2\%} = 4 \text{ s} \approx 8/\omega_0 \Rightarrow \omega_0 = 2 \text{ rad/s}$$

Polinomio característico deseado

$$s^2 + 2s + 4 = 0$$

Controlador PID

$$C(s) = k_p + k_i/s + k_d s$$

Polinomio característico a lazo cerrado

$$1 + P(s)C(s) = \frac{K(k_i + s(k_d s + k_p)) + s(s + s_0)}{s(s + s_0)} = 0$$

$$K(k_i + s(k_d s + k_p)) + s(s + s_0) = 0$$

$$(Kk_d + 1)s^2 + (Kk_p + s_0)s + Kk_i = 0$$



## Ejemplo de diseño de PID por asignación de polos 2/3

Comparación de polinomios característicos

$$s^2 + 2s + 4 = (Kk_d + 1)s^2 + (Kk_p + s_0)s + Kk_i$$

$$1 = Kk_d + 1 \Rightarrow k_d = 0$$

$$2 = Kk_p + s_0 \Rightarrow k_p = \frac{2 - s_0}{K}$$

$$4 = Kk_i \Rightarrow k_i = 4/K$$

Construcción de la función de transferencia del sistema a lazo cerrado

$$H(s) = \frac{K \left( k_d s + \frac{k_i}{s} + k_p \right)}{(s + s_0) \left( \frac{K \left( k_d s + \frac{k_i}{s} + k_p \right)}{s + s_0} + 1 \right)} = \frac{2.0 \cdot \left( 0.9 + \frac{2.0}{s} \right)}{(s + 0.2) \left( \frac{2.0 \cdot \left( 0.9 + \frac{2.0}{s} \right)}{s + 0.2} + 1 \right)} = \frac{1.0 \cdot (0.45s + 1.0)}{0.25s^2 + 0.5s + 1.0}$$

# Ejemplo de diseño de PID por asignación de polos 3/3

Planta a lazo abierto

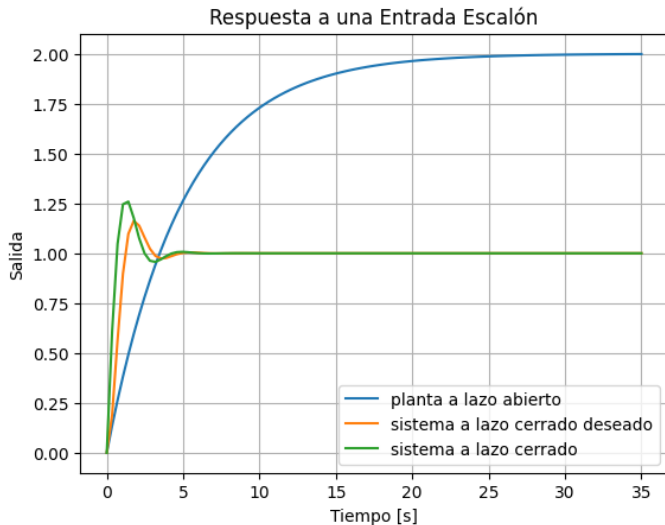
$$K = 2.0$$

$$s_0 = 1/\tau = \frac{1}{5 \text{ s}} = 0.2 \text{ rad/s}$$

Especificaciones deseadas a lazo cerrado

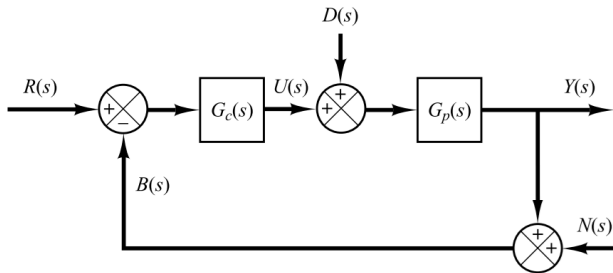
$$M_p = 16 \%$$

$$T_{s2\%} = 4 \text{ s}$$



- 1 Introducción
- 2 Determinación experimental de la función de transferencia
- 3 Reglas de Ziegler–Nichols para el ajuste de controladores PID
- 4 Diseño de controladores PID por asignación de polos
- 5 Control con 2 grados de libertad (2DoF)**
  - Controladores PI-D
  - Controladores I-PD
- 6 Ubicación de ceros para mejorar la respuesta del sistema
- 7 Diseño de controlador PID en tiempo discreto

# Control con 1 grado de libertad



$$G_{yr} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p}$$

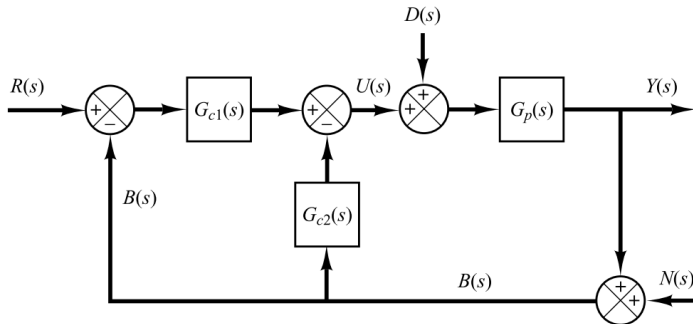
$$G_{yd} = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_c G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{Y(s)}{N(s)} = -\frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p}$$

$$G_{yr} = \frac{G_p - G_{yd}}{G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{G_{yd} - G_p}{G_p}$$

# Control con 2 grado de libertad



$$G_{yr} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{c1}G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2})G_p}$$

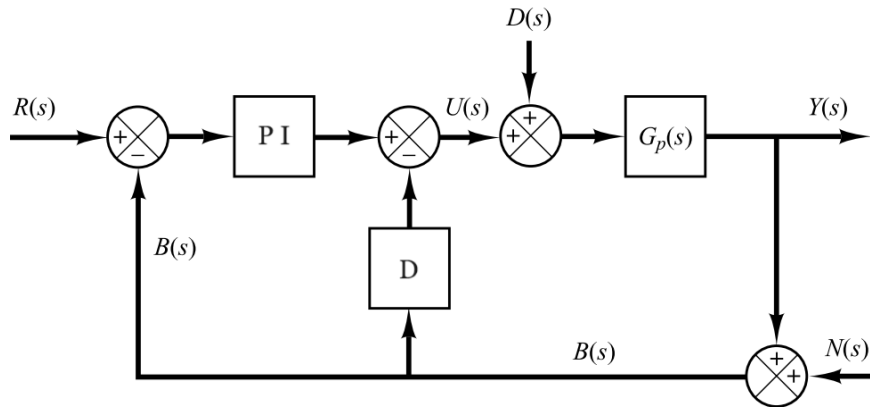
$$G_{yd} = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2})G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{Y(s)}{N(s)} = -\frac{(G_{c1} + G_{c2})G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2})G_p}$$

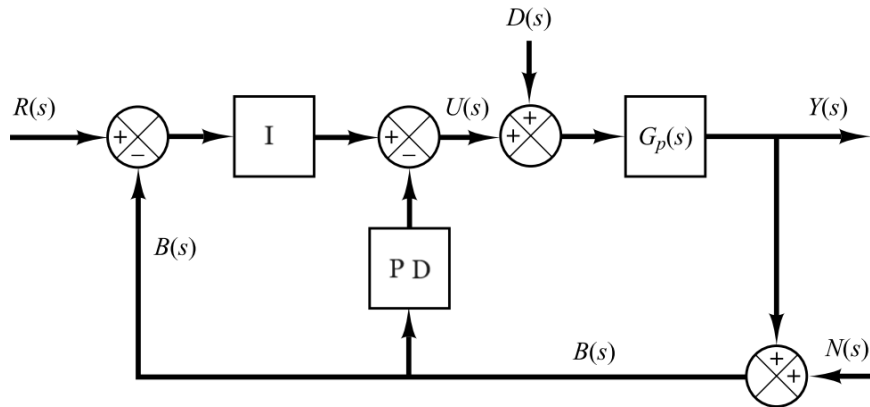
$$G_{yr} = G_{c1}G_{yd}$$

$$G_{yn} = \frac{G_{yd} - G_p}{G_p}$$

# Control con 2 grados de libertad: PI-D



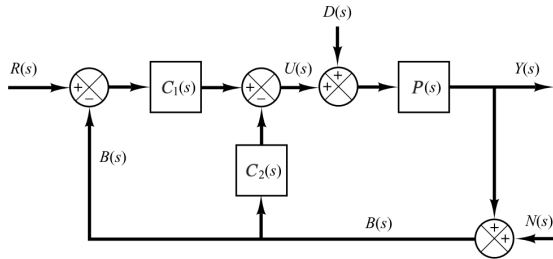
# Control con 2 grados de libertad: I-PD



- 1 Introducción
- 2 Determinación experimental de la función de transferencia
- 3 Reglas de Ziegler–Nichols para el ajuste de controladores PID
- 4 Diseño de controladores PID por asignación de polos
- 5 Control con 2 grados de libertad (2DoF)
  - Controladores PI-D
  - Controladores I-PD
- 6 Ubicación de ceros para mejorar la respuesta del sistema
- 7 Diseño de controlador PID en tiempo discreto



# Ubicación de ceros para mejorar la respuesta del sistema: Partiendo de un PID de dos grados de libertad



Arreglo algebraico de controladores

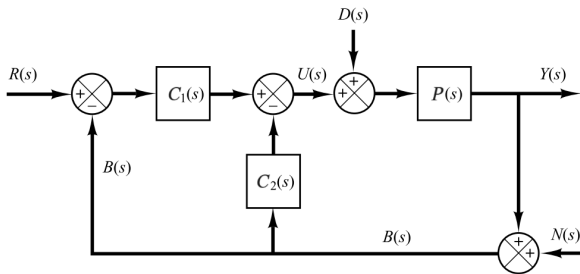
$$C_1(s) + C_2(s) = C(s)$$

Funciones de transferencia a lazo cerrado

$$G_{yr}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C_1(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

$$G_{yd}(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

# Ubicación de ceros para mejorar la respuesta del sistema: Objetivos



- 1 Diseñar  $C(s)$  para tener un polinomio característico deseado.
  - Ante cambios de referencia, o
  - perturbaciones.
- 2 Diseñar  $C_1(s)$  para ubicar los ceros de manera tal que el error en estado estacionario sea cero para  $R(s)$  del tipo:
  - escalón,
  - rampa, y
  - parábola cuadrática.

# Ubicación de ceros para mejorar la respuesta del sistema: Rechazo a las perturbaciones (1/2)

¿Cómo debo diseñar  $C(s)$  para que *la salida rechace a la perturbación cuando esta es un escalón?*

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - D(s)G_{yd}(s)$$

Suponiendo  $R(s) = 0$ :

$$E(s) = -D(s)G_{yd}(s) = -D(s)\frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

Expresando  $P(s)$  como  $KA(s)/B(s)$ , se pueden proponer controladores tales que:

$$C(s) = C_{PID}(s)C_{fil}(s) = \frac{k_p s + k_i + k_d s^2}{s} \frac{1}{A(s)}$$

con lo cual:

$$E(s) = -D(s) \frac{KA(s)}{sB(s) + \frac{B(s)(k_p s + k_i + k_d s^2)KA(s)}{sA(s)B(s)}} = -D(s) \frac{sKA(s)}{sB(s) + (k_p s + k_i + k_d s^2)K}$$

¿y para qué sirve esto?

## Ubicación de ceros para mejorar la respuesta del sistema: Rechazo a las perturbaciones (2/2)

¿y para qué sirve esto?

$$E(s) = -D(s) \frac{sKA(s)}{sB(s) + (k_p s + k_i + k_d s^2)K}$$

Si la perturbación es del tipo escalón:  $D(s) = 1/s$ , el error en estado estacionario resulta:

$$e_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} -s \frac{1}{s} \frac{sKA(s)}{sB(s) + (k_p s + k_i + k_d s^2)K}$$

$$e_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{0}{0 + (0 + k_i + 0)K} = -\frac{0}{k_i K} = 0$$

¡Gracias acción integral y filtro por evitar que se anule el denominador!

## Ubicación de ceros para mejorar la respuesta del sistema: Seguimiento de la referencia (1/2)

¿Cómo debo diseñar  $C_1(s)$  para ubicar los ceros de la función de transferencia a lazo cerrado de manera que *la salida siga a la referencia cuando esta es un escalón, una rampa o una parábola cuadrática*?

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) (1 - G_{yr}(s))$$

$$G_{yr}(s) = \frac{C_1(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{w(s)}{s^{n+1} + a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$E(s) = \frac{s^{n+1} + a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 - w(s)}{s^{n+1} + a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Eliendo  $w(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$ , tenemos:

$$E(s) = R(s) \frac{s^{n+1} + a_n s^n + \dots + a_3 s^3}{s^{n+1} + a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

¿y para qué sirve esto?

# Ubicación de ceros para mejorar la respuesta del sistema: Seguimiento de la referencia (2/2)

¿y para qué sirve esto?

$$E(s) = R(s) \frac{s^{n+1} + a_n s^n + \dots + a_3 s^3}{s^{n+1} + a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

El error en estado estacionario se calcula con el Teorema del Valor Final:

$$e_{t \rightarrow \infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

Caso más exigente  $r(t) = u(t)t^2$  corresponde a  $R(s) = 2/s^3$ , entonces:

$$e_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2}{s^3} \frac{s^{n+1} + a_n s^n + \dots + a_3 s^3}{s^{n+1} + a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \lim_{s \rightarrow 0} 2s \frac{a_3}{a_0} = 0$$

Los casos de referencia tipo escalón  $R(s) = 1/s$  y rampa  $R(s) = 1/s^2$  se dejan como ejercicio.

- 1 Introducción
- 2 Determinación experimental de la función de transferencia
- 3 Reglas de Ziegler–Nichols para el ajuste de controladores PID
- 4 Diseño de controladores PID por asignación de polos
- 5 Control con 2 grados de libertad (2DoF)
  - Controladores PI-D
  - Controladores I-PD
- 6 Ubicación de ceros para mejorar la respuesta del sistema
- 7 Diseño de controlador PID en tiempo discreto

# Diseño de controlador PID en tiempo discreto

Matemáticamente

$$u[k] = K_p e[k] + K_i \Delta_t \sum_{i=0}^k e[i] + K_d \frac{e[k] - e[k-1]}{\Delta_t}$$

Computacionalmente

```
1 double pid(double r, double y, double *prevError, double
    *integral) {
2     double error = r - y;
3     double derivative = (error - *prevError)/Dt;
4     *integral += Dt * error;
5
6     *prevError = error;
7
8     return Kp * error + Ki * (*integral) + Kd * derivative;
9 }
```



# Diseño de controlador PID en tiempo discreto

```
1 int main() {  
2     double r = 10.0;  
3     double y = 0.0;  
4     double prevError = 0.0;  
5     double integral = 0.0;  
6     double u = 0.0;  
7     ...  
8     while(1) {  
9         ...  
10        y = get_plantOutput();  
11        u = pid(r, y, &prevError, &integral);  
12        set_controllerOutput(u)  
13        ...  
14    }  
15    return 0;  
16 }
```

- ① Astrom, K. J., and Murray, R. M. (2008). Feedback Systems. Princeton University Press.
- ② Ogata, K. (2010). Modern control engineering (5th ed.). Prentice Hall.