Generación de variables aleatorias

Carlos Javier Uribe Martes

Ingeniería Industrial
Universidad de la Costa

Febrero 12, 2020

Generación de variables aleatorias

- Los modelos de simulación usualmente contienen actividades o atributos cuya duración o valor es impredecible o incierto.
- Para modelar este tipo de situaciones es útil emplear *variables aleatorias* con distribuciones de probabilidad específicas.
- Por *generar una variable aleatoria* se entiende obtener una observación de una variable aleatoria de una distribución deseada [3].

Generación de variables aleatorias

1 Transformada inversa

2 Convolución

3 Aceptación y rechazo

4 Distribución normal

Método de la transformada inversa

- Emplea el siguiente algoritmo:
  1. Calcule la cdf $F(X)$ para la variable aleatoria X.
  2. Iguale $F(X) = U$ para el rango de X, siendo U un número aleatorio.
  3. Resuelva la ecuación $F(X) = U$ para X es términos de U, es decir, encuentra la función inversa $X = F^{-1}(U)$.
  4. Genere los números aleatorios $R_1, R_2, R_3, \ldots$ y calcule el valor correspondiente en la distribución de la variable aleatoria como

$$X = F^{-1}(R_i)$$

Método de la transformada inversa

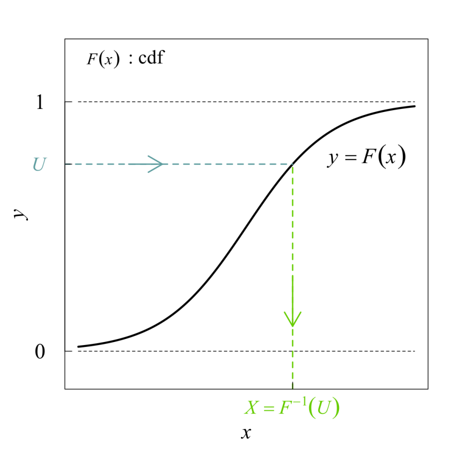

Figura: Método de la transformada inversa

Método de la transformada inversa

Distribución uniforme

- La función de probabilidad acumulada de la distribución uniforme

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

- Aplicando la transformada inversa y despejando se tiene el generador

$$X = (b-a)R + a$$

Método de la transformada inversa

Distribución exponencial

- La función de probabilidad acumulada de la distribución exponencial

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- Al aplicar la transformada inversa y despejando se tiene el generador

$$X = \frac{-\ln(1-R)}{\lambda}$$

Método de la transformada inversa

Distribución triangular

- La función de probabilidad acumulada de la distribución triangular $[a, m, b]$ está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{(x-a)^2}{(b-a)(m-a)} & a \leq x \leq m \\ 1 - \frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-m)} & m \leq x \leq b \\ 1 & b < x \end{cases}$$

Método de la transformada inversa

Distribución triangular

- Note que si $X \sim TRIA\left(0, \frac{m-a}{b-a}, 1\right)$, entonces

$$X' = a + (b-a)X \sim TRIA\,(a, m, b)$$

- El generador para X se puede obtener a partir de la transformada inversa como

$$X = \begin{cases} \sqrt{m'R} & 0 \leq R \leq m' \\ 1 - \sqrt{(1-m')\,(1-R)} & m' < R \leq 1 \end{cases}$$

donde $m' = \frac{m-a}{b-a}$

Método de la transformada inversa

Distribuciones discretas

- Suponga que se quiere generar una variable aleatoria discreta con función de probabilidad de masa:

$$P\{X = x_j\} = p_j,\ j = 0, 1, \ldots,\ \sum_j p_j = 1$$

- El algoritmo a emplear es:
  1. Genere un número aleatorio R
  2. Si $R < p_0$ entonces $X = x_0$ y pare
  3. Si $R < p_0 + p_1$ entonces $X = x_1$ y pare
  4. Si $R < p_0 + p_1 + p_2$ entonces $X = x_2$ y pare
  5. $\vdots$

Método de convolución

- La función de distribución de probabilidad de la suma de dos o más variables aleatorias independientes se conoce como *convolución* de las funciones de distribución de probailidades de las variables originales.
- Este método de generación se aplica cuando la variable aleatoria X se puede expresar como la suma de n variables aleatorias que se pueden generar más fácilmente.

Método de convolución

Distribución k-Erlang

- La suma de k variables independientes distribuidas exponencialmente, cada una con media $\frac{1}{k\theta}$ sigue una distribución k-Erlang con media $\frac{1}{\theta}$.
- Usando el método de convolución, una variable aleatoria k-Erlang se puede crear generando $X_1, X_2, \ldots, X_k$ como variables exponenciales exponenciales y luego sumarlas para obtener X.

$$X = \sum_{i=1}^{k} X_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{-\ln(R_i)}{k\theta} = -\frac{1}{k\theta} \ln\left(\Pi_{i=1}^{k} R_i\right)$$

Método de aceptación y rechazo

- Suponga que se tiene un método eficiente para simular una V.A. con función de densidad $r(x)$ tal que $t(x) = c * r(x) > f(x)$ para cualquier valor de x.
- Podemos utilizarla para simular una distribución con función de densidad $f(x)$ mediante el siguiente algoritmo:
  1. Genere x con densidad $r(x)$.
  2. Genere y uniforme $[0, t(x)]$.
  3. Si $y \leq f(x)$, devuelva x, de lo contrario vuelva al paso 1.

Método de aceptación y rechazo

Distribución de Poisson

- La función de probabilidad $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ para $x \geq 0$.
- El procedimiento para generar una V.A. Poisson N con parámetro λ, es el siguiente:
  1. Sea $n = 0$, $P = 1$.
  2. Genere un número aleatorio R_{n+1} y reemplace P por $P * R_{n+1}$.
  3. Si $P < e^{-\alpha}$, entonces acepte $N = n$, de lo contrario, rechace el n actual, incremente n en uno y regrese al paso 2.

Distribución normal

- El método de la transformada inversa no puede ser aplicado fácilmente porque la función de distribución acumulada para una variable aleatoria con distribución normal no puede ser escrita en forma cerrada.
- La función de distribución acumulada de la distribución normal está dada por:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad -\infty < x < \infty$$

Distribución normal

Aproximación al Teorema del límite central

- Si $R_1, R_2, \ldots, R_n \sim UNIF(0,1)$, entonces

$$Z = \frac{\sum R_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}$$

sigue aproximadamente una distribución normal estándar.

- Con $n = 12$ se obtiene la forma:

$$Z = \sum r_i - 6$$

Distribución normal

Método de Box-Muller

1. Genere dos números aleatorios independientes R_1 y R_2 de una distribución $UNIF(0,1)$.
2. Devuelva

$$Z_1 = \sqrt{-2\ln R_1}\cos\left(2\pi R_2\right)$$

y

$$Z_2 = \sqrt{-2\ln R_1}\,\mathrm{sen}\left(2\pi R_2\right)$$

Distribución normal

Método Polar

1. Genere dos números aleatorios independientes R_1 y R_2 de una distribución $UNIF(0,1)$.
2. Defina $V_1 = 2R_1 - 1$, $V_2 = 2R_2 - 1$ y $S = V_1^2 + V_2^2$.
3. Si $S > 1$ vuelva al paso 1, de lo contrario devuelva

$$Z_1 = \sqrt{\frac{-2\ln S}{S}} V_1$$

y

$$Z_2 = \sqrt{\frac{-2\ln S}{S}} V_2$$

Distribución normal

Método de Inversión de Rao, Boiroju y Reddy

- Emplea un ajuste logístico de la función de distribución acumulada de la distribución normal estándar, dado por:

$$\Phi(Z) = \frac{1}{1 + e^{-[1{,}702Z]}}$$

- Usa esta relación como una aproximación para utilizar luego el método de la transformada inversa con el siguiente algoritmo:
  1. Genere un aleatorio $R \sim UNIF(0,1)$.
  2. Devuelva

$$Z = \frac{-\ln\left(\frac{1}{R} - 1\right)}{1{,}702}$$

Referencias

- Banks, J., Carson II, J. S., Nelson, B. L. y Nicol, D. M. *Discrete-Event System Simulation.* Fifth (Pearson, 2014).
- Dunna, E. G., Reyes, H. G. y Barrón, L. E. C. *Simulación y análisis de sistemas con ProModel.* Second (Pearson Educación, 2013).
- Law, A. M. *Simulation modeling and analysis.* Fifth (McGraw-Hill, 2015).
- Pazos Arias, J. J., Suárez González, A. y Díaz Redondo, R. *Teoría de colas y simulación de eventos discretos.* (Prentice Hall, 2003).
- Ross, S. *Simulation.* Fifth (Academic Press, 2012).