

Análisis de salida

Carlos Javier Uribe Martes

Ingeniería Industrial
Universidad de la Costa

Abril 12, 2020

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Tipos de Simulación con respecto al Análisis de Salida
- 3 Tipos de Variables Estadísticas
- 4 Análisis de Simulación con horizonte finito
- 5 Análisis de Simulación con horizonte infinito

Análisis de salida

- El **Análisis de Salida** es la evaluación de los resultados generados por un modelo de simulación, con el propósito de predecir el desempeño absoluto del sistema a través de las medidas de desempeño [1].

Análisis de salida

- Como las entradas del modelo son aleatorias, sus salidas también lo serán (*RIRO*) y se requiere un tratamiento estadístico de los resultados.
- Los resultados son estimadores de las medidas de desempeño reales (desconocidas), una realización particular de variables aleatorias que pueden tener grandes varianzas [2].
- Dependen de factores como:
 - Parámetros de entrada (factores controlables y no controlables).
 - Condiciones iniciales del modelo.

Análisis de salida

- Las principales actividades que se desarrollan durante el análisis de salida son:
 - 1 Determinación del número de réplicas.
 - 2 Determinación de la longitud de corrida y del periodo de calentamiento.
 - 3 Estimación de las medidas de desempeño.

Análisis de salida

- Hay varias situaciones a considerar. Entre ellas están:
 - El tipo de simulación con respecto al horizonte de tiempo de la simulación.
 - El tipo de medida de desempeño a analizar.
 - La influencia de las condiciones iniciales.
 - Posible autocorrelación en los datos.

Tipos de simulación

- Los objetivos del estudio, junto con la naturaleza de la operación del sistema, determinan cómo se ejecutan y analizan los experimentos de simulación.
- Los modelos de simulación pueden caer en una de dos categorías según el horizonte de tiempo:[1]
 - Modelos de simulación con terminación, finito o transiente.
 - Modelos de simulación sin terminación, infinito o de estado estable.

Tipos de simulación

Simulación con terminación (transiente)

- En los modelos de simulación con terminación [1]:
 - El sistema corre por un periodo específico de tiempo T_E , donde E es el evento específico que termina la simulación.
 - La longitud de la simulación y las condiciones iniciales deben estar bien definidas y la longitud debe ser finita.
 - El número de réplicas es el parámetro crítico asociado al análisis de salida.

Tipos de simulación

Simulación sin terminación (estado estable)

- En los modelos de simulación sin terminación [1]:
 - El sistema corre continuamente o por lo menos por un periodo muy largo de tiempo T_E , especificado por el analista.
 - Las condiciones iniciales deben ser especificadas por el analista.
 - Las propiedades a observar no deben ser influenciadas por las condiciones iniciales del modelo.

Estimadores

- Si el desempeño del sistema se mide mediante un parámetro θ , el resultado de un conjunto de corridas de simulación será un estimador estadístico $\hat{\theta}$ de θ .
- La precisión del estimador $\hat{\theta}$ puede ser medida por un error estándar de $\hat{\theta}$ o por un intervalo de confianza para θ .
- El propósito del análisis estadístico es o bien estimar el error estándar o el intervalo de confianza, o bien determinar el número de observaciones requeridas para alcanzar un error estándar o intervalo de confianza de una longitud dada.

Estimadores

Intervalos de confianza

- El intervalo de confianza cuantifica la probabilidad de que el parámetro estadístico real (desconocido) caiga dentro de unos límites calculados con los estimadores puntuales apropiados.
- El intervalo de confianza es una medida de error constituida mediante un rango alrededor del estimador puntual de la forma: $\hat{\Theta} \pm h$, donde h es denominado ancho medio (half-width).

Réplicas

- Una *réplica* es la generación de una ruta muestral que representa la evolución del sistema desde sus condiciones iniciales hasta su terminación.
- Un experimento de simulación puede consistir en una o varias réplicas.
- Si hay múltiples réplicas dentro una simulación, cada una representa un camino muestral, que empieza en las mismas condiciones iniciales y es controlado por la misma configuración de parámetros.
- Las réplicas están sujetas a las mismas fuentes de variabilidad, de forma independiente unas de otras.

Tipos de estadísticas

Estadísticas dentro de las réplicas

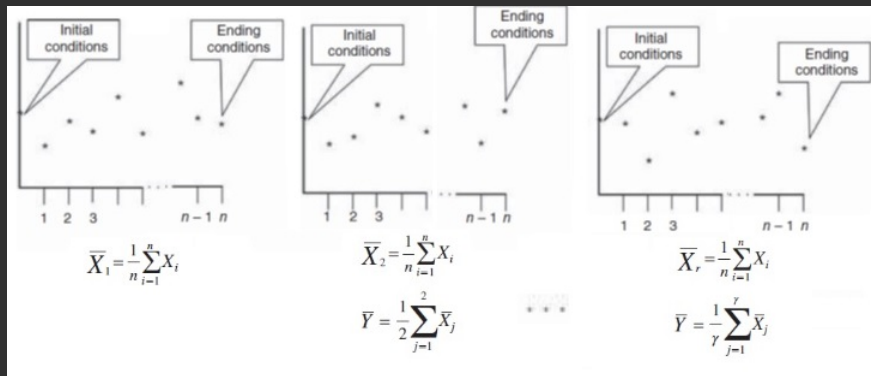
- Son recolectadas con base en la observación de un camino muestral e incluye las observaciones sobre entidades, cambios de estado, etc., que ocurren durante la ejecución de la corrida.
- Probablemente no son independientes e idénticamente distribuidas ya que se encuentran autocorrelacionadas.

Tipos de estadísticas

Estadísticas entre las réplicas

- Son recolectadas con base en la observación de los valores finales de las observaciones dentro de cada réplica, por lo tanto, se tiene una observación por cada réplica realizada.
- Como cada réplica es considerada independiente, las observaciones que forman la muestra entre réplicas es probable que sean independientes e idénticamente distribuidos.

Tipos de estadísticas



Observaciones

- Las observaciones pueden ser de dos tipos:
 - **Tally**: representa una secuencia de datos que no persisten en el tiempo (tiempo en cola, número de entidades procesadas, si un cliente en particular esperó más de 10 minutos, etc.)
 - **Time-persistent**: representa una secuencia de valores que persisten durante un cierto tiempo, el valor se pondera por la cantidad de tiempo que persiste (promedio de entidades en cola, porcentaje de tiempo que hay cola, utilización del servidor, etc.)

Análisis de Simulación con horizonte finito

El análisis estadístico en este caso se basa en tres requerimientos básicos:

- 1 Las observaciones son independientes.
- 2 Las observaciones provienen de muestras con idéntica distribución.
- 3 Las observaciones son extraídas de una distribución normal (o se tienen suficientes observaciones para recurrir al teorema del límite central).

Análisis de Simulación con horizonte finito

- Suponga que se tienen n réplicas de una simulación. Sea Y_{rj} la j -ésima observación de la réplica r para $j = 1, 2, \dots, m_r$, donde m_r es el número de observaciones en la réplica r , y $r = 1, 2, \dots, n$.
- El promedio muestral de cada réplica es:

$$\overline{Y}_r = \frac{1}{m_r} \sum_{j=1}^{m_r} Y_{rj} \quad \circ \quad \overline{Y}_r = \frac{1}{T_E} \int_0^{T_E} Y_r(t) dt$$

- \overline{Y}_r es el promedio muestral de las observaciones dentro de la réplica r , es una variable aleatoria que puede ser observada al final de la réplica; por lo tanto, \overline{Y}_r para $r = 1, 2, \dots, n$, forma una muestra aleatoria.

Determinación del número de réplicas

- El criterio clave de diseño para el experimento será el número de réplicas necesarias.
- El enfoque que se tomará es determinar la cantidad de muestras para que podamos tener una alta confianza en la estimación puntual.
- La cantidad

$$h = t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

se llama *ancho medio* del intervalo de confianza.

Determinación del número de réplicas

- Hay tres métodos para determinar el tamaño de la muestra:
 - 1 Un método iterativo basado en la distribución t .
 - 2 Un método aproximado basado en la distribución normal.
 - 3 El método de la razón de ancho medio.
- Todos los métodos asumen que se cuenta con un conjunto de réplicas piloto n_0 .

Determinación del número de réplicas

Método iterativo con la distribución t

- Se fija un error máximo, ϵ , en el ancho medio, seleccionando un número de réplicas n que satisfaga:

$$h = t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \epsilon$$

- Sin embargo, $t_{\alpha/2, n-1}$ depende de n , por lo tanto, la ecuación anterior es iterativa.
- Se deben probar varios valores de n hasta que se satisface la condición.

Determinación del número de réplicas

Método aproximado basado en la distribución normal

- Resolviendo la ecuación anterior para n se obtiene:

$$n \geq \left(\frac{t_{\alpha/2, n-1} s}{\epsilon} \right)^2$$

- A medida que n crece, $t_{\alpha/2, n-1}$ converge hacia el $100(1 - \alpha/2)$ punto porcentual de la distribución normal estándar $z_{\alpha/2}$.
- Lo cual arroja la siguiente aproximación:

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} s}{\epsilon} \right)^2$$

- Esta ecuación generalmente funciona bien para valores de n grandes ($n > 50$).

Determinación del número de réplicas

Método aproximado basado en la distribución normal para proporciones

- Si la medida de desempeño de interés es una proporción, se puede utilizar un método diferente. Un intervalo de confianza de $100 \times (1 - \alpha) \%$ para una proporción p tiene la forma:

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$$

donde \hat{p} es el estimador de p .

- A partir de esto, se puede determinar el número de réplicas mediante la siguiente ecuación:

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{\epsilon} \right)^2 \hat{p}(1 - \hat{p})$$

- Una corrida piloto servirá para obtener el valor inicial del estimado \hat{p} .

Determinación del número de réplicas

Método de la razón de ancho medio

- Sea h_0 el valor inicial del ancho medio de una corrida piloto:

$$h_0 = t_{\alpha/2, n_0-1} \frac{s_0}{\sqrt{n_0}}$$

- Resolviendo para n_0 se obtiene:

$$n_0 = t_{\alpha/2, n_0-1}^2 \frac{s_0^2}{h_0^2}$$

- En general, para cualquier n se tiene:

$$n = t_{\alpha/2, n-1}^2 \frac{s^2}{h^2}$$

- Asumiendo que $t_{\alpha/2, n-1}^2 \approx t_{\alpha/2, n_0-1}^2$ y que $s^2 \approx s_0^2$, a partir de la razón de n_0 a n se obtiene que:

$$n \cong n_0 \frac{h_0^2}{h^2} = n_0 \left(\frac{h_0}{h} \right)^2$$

Determinación del número de réplicas

- Para los métodos iterativo y de aproximación normal se requiere de un valor inicial para s . Este se puede obtener corriendo una muestra piloto (p.e. $n_0 = 10$).
- Cuando se ejecutan varias replicas en Arena, el reporte provee un intervalo de confianza de 95 % para las medidas de desempeño.
- A partir del reporte del ancho medio puede obtenerse la desviación estándar como:

$$s_0 = \frac{h_0 \sqrt{n_0}}{t_{\alpha/2, n_0-1}}$$

Determinación del número de réplicas

- El error máximo, ϵ , depende del problema y de la medida de desempeño específica que se esté observando.
- Debe considerarse que cuando se evalúa n , el error máximo ϵ , está en el denominador elevado al cuadrado.
- Si se tiene más de una medida de desempeño de interés, se puede usar cualquiera de las técnicas para determinar el número de réplicas necesarias para cada medida y utilizar la mayor entre todas.

Análisis de Simulación con horizonte infinito

- Existen dos métodos básicos para desarrollar simulaciones con estado estable:
 - 1 Correr múltiples réplicas.
 - 2 Correr una sola réplica muy larga.
- Ambos métodos dependen del manejo de los aspectos no estacionarios de los datos.

Análisis de Simulación con horizonte infinito

- Al analizar simulaciones con horizonte infinito, la principal dificultad es la naturaleza de los datos dentro de las réplicas.
- El análisis estadístico suele requerir:
 - 1 Observaciones independientes.
 - 2 Observaciones tomadas de distribuciones idénticas.
 - 3 Observaciones extraídas de una distribución normal (o que haya suficientes observaciones para recurrir al teorema del límite central).
- Las salidas dentro de una réplica no satisfacen ninguna de esas condiciones; sin embargo, ciertos procedimientos pueden establecerse en la forma en que se toman los datos para asegurar que los supuestos no sean gravemente violados.

Efecto de las condiciones iniciales

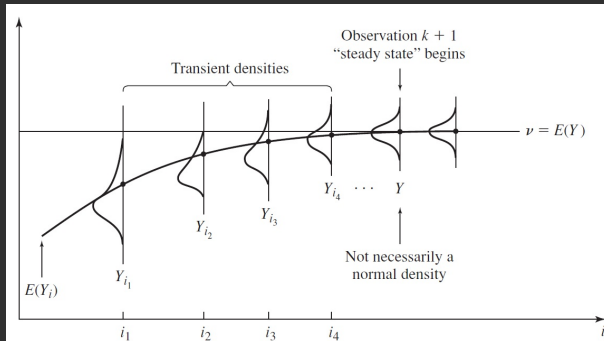
- Sea $F_i(x|I)$ la distribución condicional acumulada de X_i donde I representa las condiciones utilizadas al iniciar la simulación en el tiempo 0.
- Si $F_i(x|I) \rightarrow F(x)$ cuando $i \rightarrow \infty$, para cualquier I , entonces $F(x)$ se denomina la distribución de estado estable del proceso.
- Las condiciones iniciales de una simulación, representan el estado del sistema cuando la simulación comienza.

Efecto de las condiciones iniciales

- La dificultad al estimar el desempeño en estado estable, es que al menos que el sistema inicie utilizando la distribución de estado estable (la cual no se conoce), no hay forma de observar directamente la distribución de estado estable.
- La distribución $F_i(x|I)$ al comienzo de la simulación depende fuertemente de las condiciones iniciales.
- Si la distribución de estado estable existe, al correr una simulación suficientemente larga, los estimadores tienden a converger a las cantidades deseadas.

Efecto de las condiciones iniciales

Estado transitorio y estable



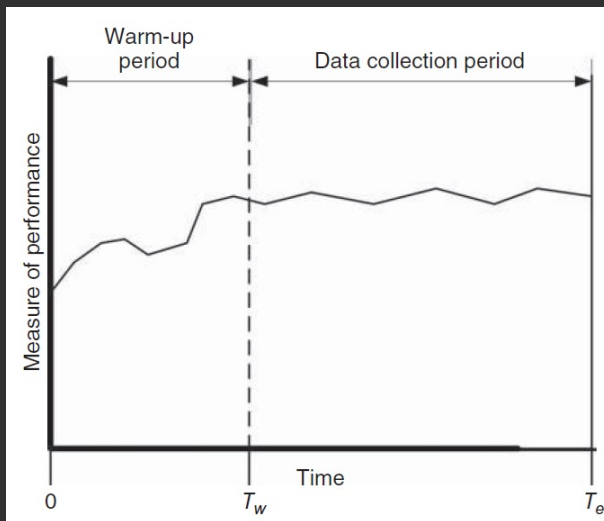
Efecto de las condiciones iniciales

- Los estimadores de las medidas de desempeño en estado estable como los promedios muestrales tenderán a estar *sesgados*.
- Un estimador, $\hat{\theta}$, es un estimador *insesgado* de un parámetro de interés θ , si $E[\hat{\theta}] = \theta$.
- Si el estimador es sesgado, entonces la diferencia, $E[\hat{\theta} - \theta]$, se denomina el sesgo del estimador $\hat{\theta}$.
- El sesgo es una propiedad del estimador. Para estimar el sesgo de un estimador, se requiere contar con múltiples observaciones del estimador.

Periodo de calentamiento

- Para mitigar el *sesgo de inicialización*, aquel producido por la elección de unas condiciones iniciales específicas diferentes de $F(x)$, se puede emplear un método de simulación en dos fases.
- La estrategia consiste en encontrar un índice d , para el proceso de salida X_i , tal que $X_i; i = d + 1, \dots$ tenga en esencia las mismas propiedades que la distribución en estado estable $F(x)$.
- Donde, $i = 1, \dots, d$ es el *periodo de calentamiento* del sistema y no se consideran para el cálculo de los estimadores. De esta forma, los estimadores de desempeño en estado estable se basan solo en $X_i; i = d + 1, \dots$.

Periodo de calentamiento



Periodo de calentamiento

- Varios métodos y políticas se han propuesto para determinar el periodo de calentamiento.
- Se explica a continuación un procedimiento gráfico:
 - 1 Realice n réplicas (se recomienda $n > 5$).
 - 2 Sea Y_{rj} la j -ésima observación en la réplica r , para $j = 1, 2, \dots, m_r$, donde m_r es el número de observaciones en la réplica r .
 - 3 Calcule el promedio a través de cada réplica para cada $j = 1, 2, \dots, m$, donde $m = \min(m_r, \text{para } r = 1, 2, \dots, n$

$$\bar{Y}_{.j} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n Y_{rj}$$

- 4 Grafique $\bar{Y}_{.j}$ para cada $j = 1, 2, \dots, m$.
- 5 Evalúe visualmente dónde las gráficas comienzan a converger.

Método de replicación-eliminación

- Al realizar simulación de horizonte infinito especificando un periodo de calentamiento y haciendo múltiples réplicas, se emplea el *método de replicación-eliminación*.
- Este método es muy utilizado en la práctica por la simplicidad del análisis después de que se ha determinado un periodo de calentamiento adecuado.

Método de replicación-eliminación

- Al eliminar las estadísticas durante el periodo de calentamiento se reduce el sesgo de inicialización.
- Existe una compensación entre la variabilidad del estimador y el sesgo de inicialización.
- Al eliminar parte de los datos, la variabilidad del estimador tiende a subir cuando el sesgo de inicialización disminuye.

Método de replicación-eliminación

- En cada réplica, parte de los datos se desecha. Lo cual representa tiempo computacional que podría ser usado más eficientemente recolectando datos útiles.
- Las técnicas para determinar el periodo de calentamiento (como el procedimiento gráfico) requieren por lo general almacenar una cantidad significativa de datos.

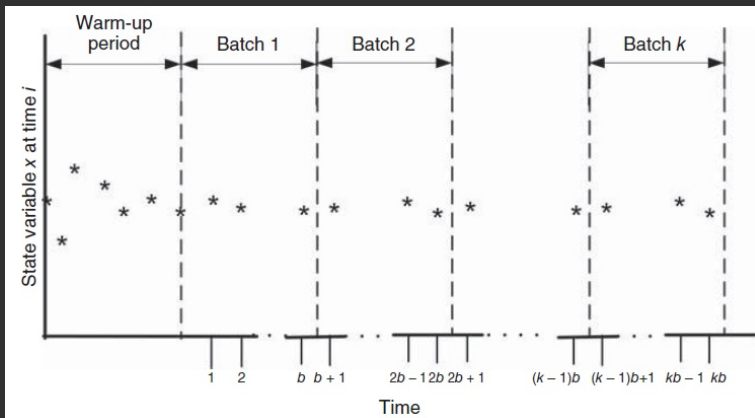
Método de replicación-eliminación

- Si se tienen múltiples medidas de desempeño, es posible que se requiera desarrollar un análisis del periodo de calentamiento por cada una, ya que cada medida de desempeño puede converger al estado estable a una tasa diferente.
- En tal caso, el periodo de calentamiento debe ser lo suficientemente grande como para cubrir todas las medidas de desempeño.
- De no especificarse un periodo de calentamiento suficientemente largo, es posible que esté agravando el problema del sesgo para las n réplicas.

Método de lotes equivalentes

- En el método de los lotes equivalentes, solo se corre una réplica.
- Después de eliminar el periodo de calentamiento, el resto de la corrida es dividida en k lotes, donde el promedio en cada lote representa una observación.

Método de lotes equivalentes



Método de lotes equivalentes

- La ventaja de este método es que comprende una réplica muy larga, moderando el efecto de las condiciones iniciales.
- La principal desventaja es que las observaciones dentro de la réplica están correlacionadas y a menos que se formen adecuadamente, los lotes pueden exhibir un fuerte grado de correlación.

Método de lotes equivalentes

- El principal problema en este método es determinar el tamaño del lote o de forma alternativa el número de lotes a utilizar.
- Lotes más largos mejoran la independencia de las observaciones, pero reduce el número de lotes, resultando en una mayor varianza del estimador.

Referencias



Banks, J., Carson II, J. S., Nelson, B. L. y Nicol, D. M. *Discrete-Event System Simulation*. Fifth (Pearson, 2014).



Law, A. M. *Simulation modeling and analysis*. Fifth (McGraw-Hill, 2015).

