Exámenes Resueltos de Matemáticas Superiores IE-0305

Carlos Vargas Agüero

Índice general

Prefacio

> "We are what we repeatedly do. Excellence, then, is not an act, but a habit."
> — Will Durant, The Story of Philosophy

Insipirado en los libros de ejercicios de Schaum[1] y que no había mucha practica con soluciones para el curso, decidí resolver todos la mayoría examenes que habían disponibles. La práctica constante es indispensable para el aprendizaje y es importante verificar que se está aprendiendo. Sin soluciones o procedimientos para verificar que se haya hecho bien un ejercicio, no se puede estar muy seguro de que se está aprendiendo, con esto espero cubrir esa parte.

La materia y el orden de los examenes son respecto a los temas de como estaba estructurado el curso antes que lo cambiaran en el I Ciclo 2015, hay temas que faltan y sobran, pero que se conserva gran parte de los temas.

Recuerden que la manera de aprender matemáticas es practicando, el simple leer no es suficiente para lograr dominar a fondo de los temas. Como todo folleto de ejercicios, la gracia es que se apoyen revisando ejercicios que ya hayan intentado y no pudieron completar, no simplemente darles una mirada por encima.

Le agradezco al profesor Edison De Faria Campos por ayudarme con las consultas que tenía en la solución a problemas durante la elaboración del folleto.

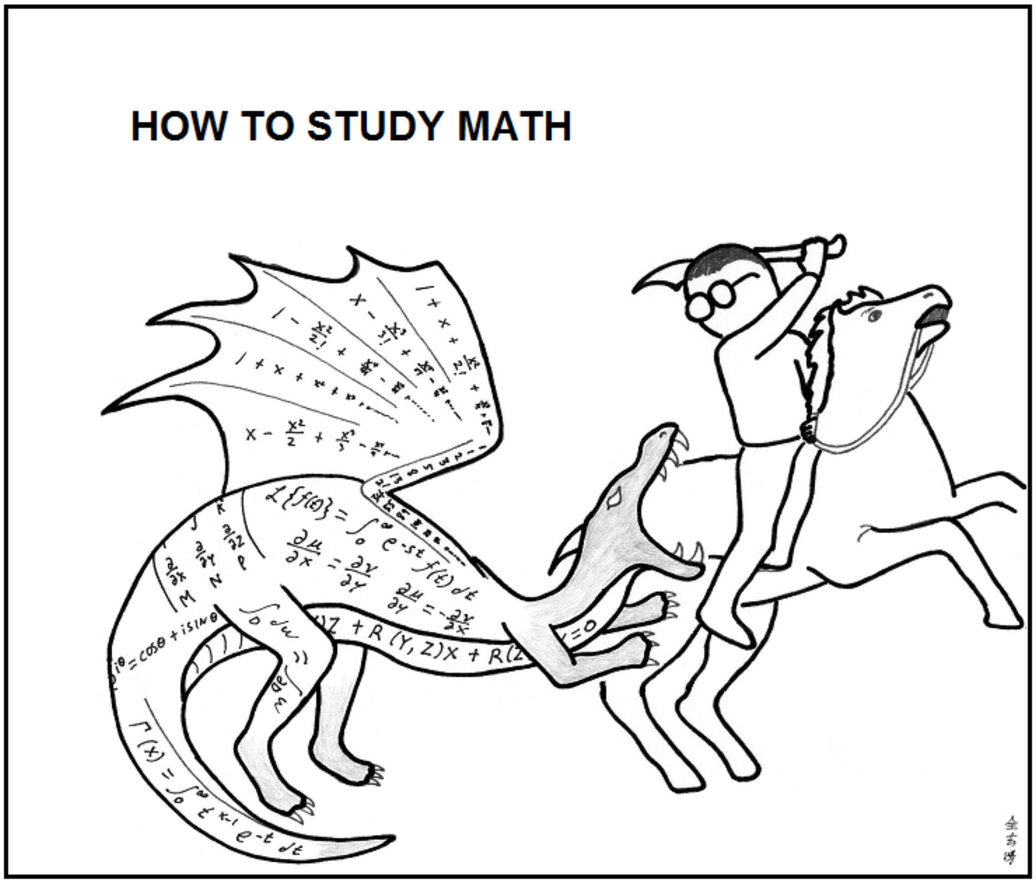
Ultima edición: I Ciclo 2018.

Carlos Vargas
carlos.vargasaguero@ucr.ac.cr

[1] Principalmente por Murray Spiegel.

Recuerden no solo leer.

Comic 353 “Warrior" de Abstruse Goose[2]



Don't just read it; fight it!

--- Paul R. Halmos

[2]Más humor de este estilo en abstrusegoose.com

1 | Primera Ronda

La mayoría de ejercicios fueron verificados usando Wolfram Mathematica 11. Los códigos se encuentran disponibles en github.com/carlosjva/mate_superior_ie-0305

1.1. I Parcial I Ciclo 2008

Pregunta 1

Determine los valores del parámetro real a para que $(1-aj)/(a-4j)$ sea un número real.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{1-aj}{a-4j} &= \frac{1-aj}{a-4j}\cdot\frac{a+4j}{a+4j} = \frac{(a+4a)+j(4-a^2)}{a^2+16}\\ &= \frac{5a+j(4-a^2)}{a^2+16}\end{aligned}$$

El problema pide que la expresión sea un numero real, lo que equivale que la parte imaginaria sea nula.

$$\operatorname{Im}\left[\frac{5a+j(4-a^2)}{a^2+16}\right]=0 \Rightarrow \frac{4-a^2}{a^2+16}=0 \Rightarrow 4-a^2=0 \Rightarrow a=\pm 2$$

La variable a tiene que tomar los valores $\pm 2 \Rightarrow a=\pm 2$.

Pregunta 2

Calcule todos los valores de $\sqrt{\dfrac{j^3-j^{-3}}{2j}}$

Solución

$$\sqrt{\frac{j^3-j^{-3}}{2j}}=\sqrt{\frac{-j+\frac{1}{j}}{2j}}=\sqrt{\frac{-j-j}{2j}}=\sqrt{\frac{-2j}{2j}}=\sqrt{-1}=\exp\left(\frac{j(\pi+2k\pi)}{2}\right);\quad k=0,1$$

Las 2 soluciones son:

$$\sqrt{\frac{j^3-j^{-3}}{2j}}=\exp\left(\frac{j\pi}{2}\right) \qquad \sqrt{\frac{j^3-j^{-3}}{2j}}=\exp\left(\frac{3j\pi}{2}\right)$$

Pregunta 3

Calcule la integral de línea $\oint_C |z+j|^2\ \mathrm{d}z$ si C es el cuadrado con vértices $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$ en dirección contraria a las manecillas del reloj.

Solución

Cambiamos la integral $\oint_C |z+j|^2\ \mathrm{d}z$ a función de x y y, la cual toma la la forma $\oint_C (x^2+(y+1)^2)(\mathrm{d}x+j\mathrm{d}y)$

Dividimos la integral en 4 trayectorias. $\int_C = \int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}+\int_{C_4}$

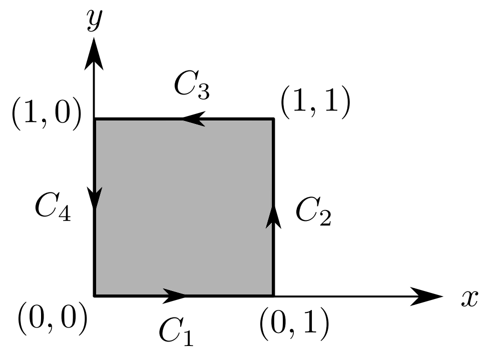


Figura 1.1: Contorno recorrido.

Pregunta 3

La curva C_1 se parametriza de la forma $C_1 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & t & \Rightarrow & \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ y & = & 0 & \Rightarrow & \mathrm{d}y & = & 0 \end{array} \right.$

$$\int_{C_1} |z+j|^2 \ \mathrm{d}z = \int_0^1 (t^2+1)\ \mathrm{d}t = \frac{4}{3}$$

De igual manera, parametrizamos e integramos sobre el resto de curvas. Tengan cuidado con el orden de los límites de C_3 y C_4, los límites dependen de la parametrización. De la manera que se escojió aquí se colocan como se muestra.

$$C_2 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & 1 & \Rightarrow & \mathrm{d}x & = & 0 \\ y & = & t & \Rightarrow & \mathrm{d}y & = & \mathrm{d}t \end{array} \right. \Rightarrow \int_{C_2} |z+j|^2 \ \mathrm{d}z = \int_0^1 \left(1+(t+1)^2\right) j\mathrm{d}t = \frac{10j}{3}$$

$$C_3 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & t & \Rightarrow & \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ y & = & 1 & \Rightarrow & \mathrm{d}y & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \int_{C_3} |z+j|^2 \ \mathrm{d}z = \int_1^0 \left(t^2+(1+1)^2\right) \mathrm{d}t = -\frac{13}{3}$$

$$C_4 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & 0 & \Rightarrow & \mathrm{d}x & = & 0 \\ y & = & 1 & \Rightarrow & \mathrm{d}y & = & \mathrm{d}t \end{array} \right. \Rightarrow \int_{C_4} |z+j|^2 \ \mathrm{d}z = \int_1^0 (t+1)^2 \ j\mathrm{d}t = -\frac{7j}{3}$$

$$\Rightarrow \oint_C |z+j|^2 \ \mathrm{d}z = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = \frac{4}{3} + \frac{10j}{3} - \frac{13}{3} - \frac{7j}{3} = -3+j$$

$$\Rightarrow \int_C |z+j|^2 \ \mathrm{d}z = -3+j$$

Método alternativo: Teorema de Green en el plano complejo

$$\oint_{\partial A} B(z,z^*)\ \mathrm{d}z = 2j \iint_A \frac{\partial B}{\partial z^*}\ \mathrm{d}A$$

Ocupamos $B(z,z^*)$, pero en $|z+j|^2$ no aparece directamente en términos de z^*. Esto podemos encontrarlo de manera facil, notando que $|z+j|^2$ es una norma cuadrada y sabemos en general que para un número complejo w, la norma cuadrada es ww^*. Usamos esto para reescribir la expresión con z^*

$$|z+j|^2 = (z+j)(z^*-j) = zz^* - zj + jz^* + 1 = B(z,z^*)$$

Ya que lo tenemos en función de z y z^*, aplicamos la derivada

$$\frac{\partial B(z,z^*)}{\partial z^*} = z + j$$

Ahora podemos aplicar la integral de area volviendo en términos de x y y

$$\Rightarrow \int_C |z+j|^2 \; \mathrm{d}z = 2j \iint_A (z+j)\mathrm{d}A = 2j \iint_A (x + j(1+y))\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = -3+j$$

Lo cual da lo mismo que calculando la integral de línea.

Pregunta 4

Utilice la fórmula de Cauchy para calcular

$$\oint_{|z-2|=4} \frac{e^{\pi z}}{(z^2-4)^2}\, \mathrm{d}z$$

Solución

$$\oint_{|z-2|=4} \frac{e^{\pi z}}{(z^2-4)^2}\, \mathrm{d}z = \oint \frac{f(z)}{(z-2)^2}\, \mathrm{d}z + \int \frac{g(z)}{(z+2)^2}\, \mathrm{d}z$$

Donde $f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{(z+2)^2}$ y $g(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{(z-2)^2}$

$$\oint \frac{f(z)}{(z-2)^2}\, \mathrm{d}z = 2\pi j \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{e^{\pi z}}{(z+2)^2}\right]\bigg|_{z=2} = 2\pi j \frac{(2\pi-1)e^{2\pi}}{32}$$

$$\int \frac{g(z)}{(z+2)^2}\, \mathrm{d}z = \pi j \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{e^{-\pi z}}{(z-2)^2}\right]\bigg|_{z=-2} = \pi j \frac{(2\pi+1)e^{-2\pi}}{32}$$

La integral con $g(z)$ se multiplica por πj, no por $2\pi j$ debido a que el polo -2 se encuentra en el contorno de integración de la integral del problema, la manera de evaluar un polo en esas condiciones es rodearlo con un semicírculo donde el radio tiende a 0. Al ser un semicirculo, se rodea con π radianes y no 2π

$$\Rightarrow \oint_{|z-2|=4} \frac{e^{\pi z}}{(z^2-4)^2}\, \mathrm{d}z = 2\pi j \frac{(2\pi-1)e^{2\pi}}{32} + \pi j \frac{(2\pi+1)e^{-2\pi}}{32}$$

Pregunta 5

Sea $u(x,y) = y/\left(x^2+y^2\right)$. Determine $v(x,y)$ la conjugada armónica de u, y escriba $f = u + jv$ en términos de z si $f(1) = 2j$

Solución

Aplicamos la condiciones de Cauchy-Riemann para encontrar el conjugado armónico

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \int \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\, \mathrm{d}y + g(x) = \frac{x}{x^2+y^2} + g(x)$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow v = -\int \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, \mathrm{d}x + h(y) = \frac{x}{x^2+y^2} + h(y)$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + h(y)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + j\left(\frac{x}{x^2+y^2} + K\right)$$

Si comparamos la función $v(x,y)$ obtenidas por ambos caminos, concluimos que $g(x) = h(y) = K$, donde K es una constante. Si aplicamos la condiciones inicial, obtenemos el valor de K.

$$f(1) = j(1+K) = 2j \Rightarrow K = 1$$

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + j\left(\frac{x}{x^2+y^2} + 1\right)$$

El problema pide que $f(x,y)$ se presente en función de z. Transformamos[1] x y y de la manera

$$x = \frac{z+z^*}{2} \qquad y = \frac{z-z^*}{2j} \qquad x^2+y^2 = zz^*$$

$$f(z,z^*) = \frac{(z-z^*)/(j2)}{zz^*} + j\left(\frac{(z+z^*)/2}{zz^*} + 1\right) = \frac{2jz^*}{2zz^*} + j = j\left(\frac{1}{z} + 1\right)$$

$$f(z) = j\left(\frac{1}{z} + 1\right)$$

Notese que la f es únicamente función de z, una función analítica *no* puede ser función de z^*

Pregunta 6

¿En qué puntos del plano complejo tiene derivada cada una de las siguientes funciones?

(a) $f(z) = z^*$

(b) $f(z) = |z|^2$

Solución

(6.a) Aplicamos las condiciones de Cauchy-Riemann a $f(z) = z^* = x - jy$ notamos que $u(x,y) = x$ y $v(x,y) = -y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

La función $f(z) = z^*$ no es derivable en ningún punto.

(6.b) Aplicamos las condiciones de Cauchy-Riemann a $g(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$, notamos que $u(x,y) = x^2 + y^2$ y $v(x,y) = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = 0 = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y = 0 = -\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

[1] Hay un truco para transformar más facil, reemplaze $x = z$ y haga $y = 0$, lo voy a usar luego más seguido pero quería mostrar como pasar a función de z de una manera más formal

La función $g(z) = |z|^2$ es únicamente derivable en el punto $(0, 0)$

Pregunta 7

Utilice residuos para calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{5 + 4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x\ ,\quad a, b \in \mathbb{R}_+$

(c) $\displaystyle\oint_{|z|=7} \frac{z}{1 - \exp(z)}\,\mathrm{d}z$

Solución

(7.a) Consideremos la integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{a + b\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$ con la condición $a > b$ y evaluamos al final.

Hagamos el cambio de variable $\exp(j\theta) = z \Rightarrow \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}z/jz$

Por lo tanto

$$\cos(\theta) = \frac{\exp(j\theta) + \exp(-j\theta)}{2} = \frac{z + 1/z}{2}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{a + b\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \oint \frac{(z + 1/z)/(2)}{a + b(z + 1/z)/(2)}\frac{\mathrm{d}z}{jz} = \oint = \frac{-j}{b}\oint \frac{z^2 + 1}{z\left(z^2 + \frac{2a}{b}z + 1\right)}\,\mathrm{d}z$$

Ahora aplicamos residuos para obtener el valor de la integral. La factorización de $z^2 + \frac{2a}{b}z + 1$ es

$$\left(z^2 + \frac{2a}{b}z + 1\right) = \left(z - \left(\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)\right)\left(z - \left(\frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)\right)$$

Los polos de la función dentro de la integral, dentro del contorno de integración son $z_1 = 0$ y $z_2 = \frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$

$$\lim_{z \to 0} z\,\frac{z^2 + 1}{z\left(z^2 + \frac{2a}{b}z + 1\right)} = 1$$

$$\lim_{z \to \frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}} \left(z - \left(\frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)\right)\frac{z^2 + 1}{z\left(z^2 + \frac{2a}{b}z + 1\right)} = \lim_{z \to \frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}} \frac{z^2 + 1}{z\left(z - \left(\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)\right)}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)^2 + 1}{-2\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}} \cdot \frac{1}{\frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}}$$

Con los residuos, ya tenemos la expresion para la integral.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{a+b\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{-j}{b}\oint \frac{z^2+1}{z(z^2+\dfrac{2a}{b}z+1)}\mathrm{d}z = \frac{-j}{b}\,2\pi j\sum \mathrm{Res}$$

$$= \frac{2\pi}{b}\left(1+\frac{\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)^2+1}{-2\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}}\cdot\frac{1}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{a+b\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{b}\left(1+\frac{\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)^2+1}{-2\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}}\cdot\frac{1}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}}\right)$$

En el problema del examen, $a=5$, $b=4$, si evaluamos, obtenemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{5+4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{3}$$

(7.b) Cambiamos la expresión de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(jbx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right]$$

Evaluamos sobre el contorno de la Fig. 1.2

$$\oint_C \frac{\exp(jbz)}{z^2+a^2}\mathrm{d}z = \int_{C_1} \frac{\exp(jbx)}{x^2+a^2}\mathrm{d}x + \int_{C_2} \frac{\exp(jbz)}{z^2+a^2}\mathrm{d}z$$

La integral sobre C_2 tiene a 0 a medida que R tiene a infinito, solo nos quedamos con la primera integral

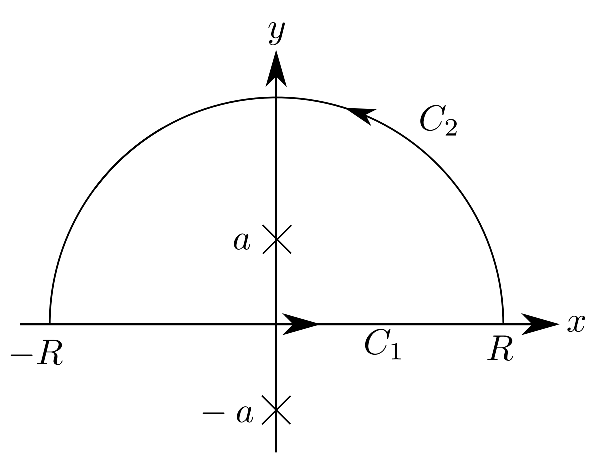


Figura 1.2: Contorno de integración.
Pregunta (7.b)

y usamos residuos para evaluar el LHS. Los polos de $\exp(jbz)/\left(z^2+a^2\right)$ son $-ja, ja$ pero a es el único polo dentro del contorno. Obtengamos el residuo en ja.

$$\lim_{z\to ja}(z-ja)\frac{\exp(jbz)}{z^2+a^2}=\lim_{z\to ja}\frac{\exp(ibz)}{(z+ja)}=\frac{\exp(-ab)}{2ja}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(jbx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\oint_C\frac{\exp(jbz)}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z=2\pi j\frac{\exp(-ab)}{2ja}=\frac{\pi\exp(-ab)}{a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(jbx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{a}\exp(-ab)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(jbx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(bx)+j\sin(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{a}\exp(-ab)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{a}\exp(-ab)$$

(7.c) Encontramos las raices de $1-\exp(z)=0\Rightarrow 1=\exp(z)$. El 1 se puede reescribir como $exp(2k\pi j)$ con $k\in\mathbb{Z}$. De aquí notamos rápido que $z=2k\pi j$. Los polos dentro de la trayectoria de integración son $-2\pi j, 0, 2\pi j$.

En polo en $z=0$ vemos que es removible evaluando el límite. Ya que no está indefinido, el residuo es nulo.

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{1-\exp(z)}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{-\exp(z)}=-1$$

Los otros 2 residuos los encontramos evaluando

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z}{1-\exp(z)},z_k\right]=\lim_{z\to z_k}(z-z_k)\frac{z}{1-\exp(z)}=z_k\lim_{z\to z_k}\frac{z-z_k}{1-\exp(z)}=z_k\lim_{z\to z_k}\frac{1}{-\exp(z)}=\frac{z_k}{\exp(z_k)}$$

Por lo tanto, evaluando para los polos, el residuo en $-2\pi j$ es $-2\pi j$ y el residuo en $2\pi j$ es $2\pi j$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=7}\frac{z}{1-\exp(z)}\,\mathrm{d}z=2\pi j\sum\operatorname{Res}=2\pi j\left(-2\pi j+2\pi j\right)=0$$

$$\oint_{|z|=7}\frac{z}{1-\exp(z)}\,\mathrm{d}z=0$$

1.2. I Parcial II Ciclo 2008

Pregunta 1

Resuelva las siguientes operaciones y muestre el resultado según la notación que se solicita.

(a) $\dfrac{j^4+j^9+j^{15}}{2-j^5+j^{11}-j^{15}}$

(b) $\dfrac{3\left[\left(\dfrac{1+j}{1-j}\right)^2-2\left(\dfrac{1-j}{1+j}\right)\right]^3}{5+j}$

Solución

(1.a)

$$\frac{j^4+j^9+j^{15}}{2-j^5+j^{11}-j^{15}} = \frac{1+j-j}{2-j-j+j} = \frac{1}{2-j} = \frac{1}{2-j}\cdot\frac{2+j}{2+j} = \frac{2+j}{5}$$

La norma es $\left|\dfrac{2+j}{5}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

La fase es $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) \approx 0.4636$ rad

$$\Rightarrow \frac{j^4+j^9+j^{15}}{2-j^5+j^{11}-j^{15}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\angle 0.4636$$

(1.b)

$$\frac{3\left[\left(\dfrac{1+j}{1-j}\right)^2 - 2\left(\dfrac{1-j}{1+j}\right)\right]^3}{5+j} = \frac{3\left[\left(\dfrac{\exp(j\pi/4)}{\exp(-j\pi/4)}\right)^2 - 2\dfrac{\exp(-j\pi/4)}{\exp(j\pi/4)}\right]^3}{5+j} = \frac{3\left[\exp(-j\pi) - 2\exp(-j\pi/2)\right]^3}{5+j}$$

$$3\frac{(-1+2j)^3}{5+j}\cdot\frac{5-j}{5-j} = 3\cdot\frac{5-j}{26}\,(-1+2j)^3$$

Evaluando por aparte $(-1+2j)^3$

$$(-1+2j)(-1+2j)(-1+2j) = (-3-4j)(-1+2j) = 11-2j$$

$$\Rightarrow 3\cdot\frac{5-j}{26}\,(-1+2j)^3 = 3\cdot\frac{5-j}{26}\cdot(11-2j) = \frac{159-63j}{26}$$

$$\Rightarrow \frac{3\left[\left(\dfrac{1+j}{1-j}\right)^2 - 2\left(\dfrac{1-j}{1+j}\right)\right]^3}{5+j} = \frac{159-63j}{26}$$

Pregunta 2

Resuelva las siguientes ecuaciones complejas:

(a) Todos los valores de $\ln\left(\sqrt{3}-j\right)$ y su valor principal.

(b) Todos los valores que satisfacen $\exp(jz) = 2$

Solución

(2.a)

$$\log\left(\sqrt{3}-j\right) = \ln\left|\sqrt{3}-j\right| + j\left(\arctan\frac{-1}{\sqrt{3}} + 2k\pi\right) = \ln 2 + j\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right);\quad k\in\mathbb{Z}$$

El valor principal[2] es cuando $k=0$

$$\log\left(\sqrt{3}-j\right) = \ln(2) - j\frac{\pi}{6}$$

[2]Para efectos de este curso, el argumento del valor principal va de $]-\pi,\pi]$

(2.b)

$$\exp(jz) = 2 = \exp\left(\ln(2) + j2k\pi\right) \Rightarrow jz = j(x+jy) = -y + jx = \ln(2) + j2k\pi$$

$$y = -\ln(2) \ \ , \ \ x = 2k\pi \Rightarrow z = 2k\pi - j\ln(2)$$

Pregunta 3

Determine si la función $u(x,y) = \ln\left[(x-1)^2 + (y-2)^2\right]$ es armónica. En caso de serlo encuentre el respectivo conjugado armónico. Exprese $u + jv$ como una función de z, si $f(0) = \ln(5)$

Solución

$$u(x,y) = \ln\left[(x-1)^2 + (y-2)^2\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+(y-2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{(x-1)^2+(y-2)^2} - \frac{4(x-1)^2}{\left((x-1)^2+(y-2)^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2}{(x-1)^2+(y-2)^2} - \frac{4(y-2)^2}{\left((x-1)^2+(y-2)^2\right)^2}$$

Después de simplificar obtenemos

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Se concluye que u es armónica. Utilicemos la condiciones de C-R para encontrar $v(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+(y-2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+(y-2)^2}\,\mathrm{d}y + g(x)$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2\arctan\left(\frac{y-2}{x-1}\right) + g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow v = -\int \frac{2(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2}\,\mathrm{d}x + h(y)$$

$$v(x,y) = -2\arctan\left(\frac{x-1}{y-2}\right) + h(y)$$

Podemos cambiar el $v(x,y)$ obtenido para que se vea al primer $v(x,y)$ con la identidad

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

En nuestro caso

$$-\arctan\left(\frac{x-1}{y-2}\right) = \arctan\left(\frac{y-2}{x-1}\right) - \frac{\pi}{2}$$

Sustituimos y obtenemos

$$v(x,y) = 2\arctan\left(\frac{y-2}{x-1}\right) - \pi + h(y)$$

Al comparar, tenemos que $g(x) = h(y) - \pi$. La única manera que esta condición se cumpla es que $g(x) = h(y) - \pi = K$, donde K es una constante.

$$\Rightarrow f(x,y) = \ln\left[(x-1)^2 + (y-2)^2\right] + j\left(2\arctan\left(\frac{y-2}{x-1}\right) + K\right)$$

Con la condición inicial, averiguamos el valor de K

$$f(0) = \ln(5) = \ln(5) + j(\arctan(2) + K) \Rightarrow K = -\arctan(2)$$

$$f(x,y) = \ln\left[(x-1)^2 + (y-2)^2\right] + j\left(2\arctan\left(\frac{y-2}{x-1}\right) - 2\arctan(2)\right)$$

Ahora, para cambiarlo a función de z, hacemos $x = z$ y $y = 0$

$$f(z) = \ln\left[(z-1)^2 + 4\right] + j\left(2\arctan\left(\frac{-2}{z-1}\right) - 2\arctan(2)\right)$$

Pregunta 4

Calcule la integral de línea $\oint_C z^* \mathrm{d}z$ si C es el triángulo con vértices $(0,0),(1,0),(1,j)$, en dirección contraria a las manecillas del reloj (z^* es el conjugado complejo de z).

$$\oint_C z^* \mathrm{d}z = \oint_C (x - jy)(\mathrm{d}x + j\mathrm{d}y)$$

La integral se evalua en 3 segmentos: $\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$

$$C_1 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & t & \Rightarrow & \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ y & = & 1 & \Rightarrow & \mathrm{d}y & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \int_{C_1} z^* \mathrm{d}z = \int_0^1 t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & 1 & \Rightarrow & \mathrm{d}x & = & 0 \\ y & = & t & \Rightarrow & \mathrm{d}y & = & \mathrm{d}t \end{array} \right. \Rightarrow \int_{C_2} z^* \mathrm{d}z = \int_0^1 (1 - jt)\ j\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + j$$

$$C_3 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & t & \Rightarrow & \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ y & = & t & \Rightarrow & \mathrm{d}y & = & \mathrm{d}t \end{array} \right. \Rightarrow \int_{C_3} z^* \mathrm{d}z = \int_1^0 (t - jt)(\mathrm{d}t + j\mathrm{d}t) = -1$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + j - 1 = j$$

$$\Rightarrow \oint_C z^* \mathrm{d}z = j$$

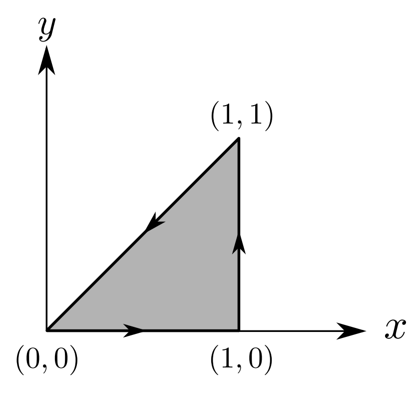


Figura 1.3: Contorno de integración.
Pregunta 4

Método alternativo: El teorema de Green en el plano complejo

$$\oint_{\partial A} B(z,z^*)\,\mathrm{d}z = 2j\iint_A \frac{\partial B}{\partial z^*}\,\mathrm{d}A$$

De aquí vemos que $B(z,z^*) = z^* \Rightarrow \dfrac{\partial B}{\partial z^*} = 1$

Así que la integral se reduce a

$$\oint_C z^*\mathrm{d}z = 2j\iint \mathrm{d}A = j$$

Ya que la integral $\iint \mathrm{d}A$ es el área del triángulo, que es $1/2$

Pregunta 5

Utilice residuos para calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\cos(z)}{z\sin(z)}\,\mathrm{d}z$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+16}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(3x)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

Solución

(5.a) El polo en 0 va a ser problematico por sus derivadas en el residuo, obtengamos el valor del coeficiente de $1/z$ haciendo expansiones de Taylor

$$\frac{\cos(z)}{z\sin(z)} = \frac{\cos(z)}{z\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\mathcal{O}(z^5)\right)} = \frac{\cos(z)}{z^2\left(1-\left(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\mathcal{O}(z^4)\right)\right)}$$

$$\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\mathcal{O}(z^4)\right)\frac{1+\left(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\mathcal{O}(z^4)\right)+\left(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\mathcal{O}(z^4)\right)^2+\cdots}{z^2}$$

Notese que al hacer la multiplicación, solo vamos a tener coeficientes de z^n donde n es par. No hay término con $1/z$, por lo tanto, el residuo en 0 da 0. Para $\pm\pi$, solo $\sin z$ se indefine. Con la expansión de Taylor, se ve que es un polo de orden 1. Sea $z_1 = \pi$ y $z_2 = -\pi$, obtengamos el residuo en esos puntos.

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k)\frac{\cos z}{z\sin z} = \frac{\cos z_k}{z_k}\lim_{z\to z_k}\frac{(z-z_k)}{\sin z} = \frac{\cos z_k}{z_k}\lim_{z\to z_k}\frac{1}{\cos z} = \frac{1}{z_k}$$

Ya que el residuo es $1/z_k$, a la hora de sumar los residuos obtenemos $1/\pi - 1/\pi + 0 = 0$. Por lo tanto

$$\oint_{|z|=4}\frac{\cos(z)}{z\sin(z)}\,\mathrm{d}z = 0$$

(5.b) Hagamos la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x;\;\; a\in\mathbb{R}, a>0$ y evaluamos luego evaluamos

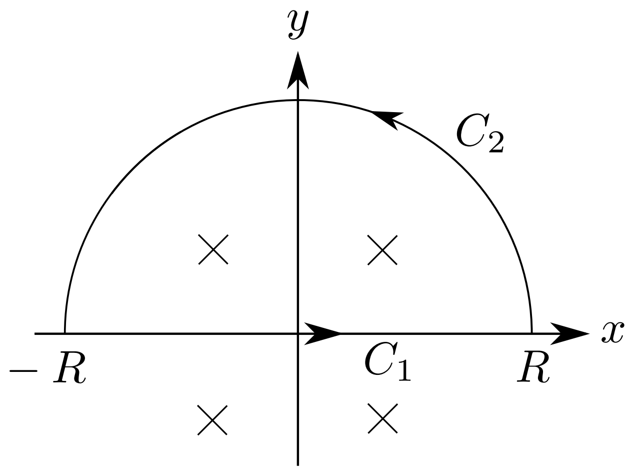


Figura 1.4: Contornos de integración.
Pregunta (5.b) y **(5.c)**

Usemos el contorno de la Fig. 1.4 para obtener la integral y usamos

$$\oint_C \frac{z^2}{z^4+a^4}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x + \int_{C_2} \frac{z^2}{z^4+a^4}\,\mathrm{d}z$$

La segunda integral tiende a 0 a medida que el $R \to \infty$. Evaluemos el LHS usando residuos. Averiguemos los polos y el orden de ellos.

$$z^4+a^4 = (z^2+ja^2)(z^2-ja^2) = \left(z^2 - a^2\exp\left(\frac{j\pi}{2}\right)\right)\left(z^2 - a^2\exp(\frac{-j\pi}{2})\right)$$

$$= \left(z - a\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)\right)\left(z - a\exp\left(\frac{j3\pi}{4}\right)\right)\left(z - a\exp\left(\frac{-j\pi}{4}\right)\right)\left(z - \exp\left(a\frac{-j3\pi}{4}\right)\right)$$

Los polos dentro del contorno de integracion son $z_1 = a\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)$ y $z_2 = a\exp\left(\frac{j3\pi}{4}\right)$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{z^4+a^4}, z_k\right] = \lim_{z\to z_k}(z-z_k)\frac{z^2}{z^4+a^4} = z_k^2 \lim_{z\to z_k}\frac{(z-z_k)}{z^4+a^4} = z_k^2 \lim_{z\to z_k}\frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4z_k}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x = \oint_C \frac{z^2}{z^4+a^4}\,\mathrm{d}z = 2\pi j \sum \operatorname{Res}$$

$$2\pi j\sum \operatorname{Res} = 2\pi j\left(\frac{1}{4a\exp(j\pi/4)} + \frac{1}{4a\exp(j3\pi/4)}\right) = \frac{j\pi}{2a}\left(\frac{\exp(j3\pi/4)+\exp(j\pi/4)}{\exp(j\pi)}\right) = \frac{\pi}{a\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a\sqrt{2}}$$

Para la integral del examen.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+16}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

(5.c) [3]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(3x)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$$

La función que estamos integrando es una función impar, sabemos que tiene que dar 0. Comprobemos por residuos que da 0. Hagamos la integral con exponencial sobre el plano $Y+$, donde la parte imaginaria va a ser la integral del seno. Hagamos el contorno de integración de la Fig. 1.4. Aquí los polos están en un circulo de radio 1, a diferencia de la **Pregunta (5.b)** donde estan en un circulo de radio a

$$\oint \frac{\exp(3jz)}{z^4+1}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(3jx)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x + \int_{C_2} \frac{\exp(3jz)}{z^4+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi j \sum \mathrm{Res}$$

La integral sobre C_2 se hace nula por el teorema de Jordan. Los polos los encontramos resolviendo

$$z^4+1=0 \Rightarrow z^4=-1=\exp\left(j\left(\pi+2k\pi\right)\right) \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$z=\exp\left(j\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)\right)$$

Los polos dentro del contorno son

$$z_1=\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right) \qquad z_2=\exp\left(\frac{3j\pi}{4}\right)$$

Por lo tanto, los residuos los obtenemos:

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\exp(3jz)}{z^4+1}, z_k\right] = \lim_{z\to z_k}(z-z_k)\frac{\exp(3jz)}{z^4+1} = \exp(3jz_k)\lim_{z\to z_k}\frac{1}{4z^3} = \exp(3jz_k)\frac{1}{4z_k^3}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(3jx)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = 2\pi j\sum\mathrm{Res} = 2\pi j\left(\exp(3jz_1)\frac{1}{4z_1^3}+\exp(3jz_2)\frac{1}{4z_2^3}\right)$$

Ya sabemos que la integral tiene que dar 0, voy a despreocuparme por los factores comunes, y preocuparme por la parte real dentro del parentesis, ya que va a terminar siendo la parte imaginaria debido al $2\pi j$, que es lo que ocupamos.

$$\frac{\exp\left(3j\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)\right)}{\exp\left(\frac{3j\pi}{4}\right)} + \frac{\exp\left(3j\exp\left(\frac{3j\pi}{4}\right)\right)}{\exp\left(\frac{9j\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{9j\pi}{4}\right)\exp\left(3j\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)+\exp\left(\frac{3j\pi}{4}\right)\exp\left(3j\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+j\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right)}{\text{Algún factor común que no nos interesa}}$$

Simpliquemos, saquemos factor común, notando que $\sin(\pi/4)=\sin(3\pi/4)$, los senos salen como un exponente real a factor común. Evaluamos los cosenos $\cos(\pi/4)=1/\sqrt{2}$ y $\cos(3\pi/4)=-1/\sqrt{2}$. También simplifiquemos el primer exponencial complejo. $\exp(9j\pi/4)=\exp(\pi/4)$

$$=(\text{Algo en común})\left[\exp\left(j\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right)+\exp\left(j\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]$$

[3] Ver **I Parcial II Ciclo 2014 Pregunta 2** para una solución más general... Igual lo mantengo para mostrar como ignorar cosas cuando uno está buscando algo

Voy a agarrar la parte de cosenos al expandir el exponencial complejos, la parte de los senos los voy a ignorar. Lo ignoró porque al final, quiero la parte compleja de la expresión final.

El j del $2\pi j \sum$ Res hace que la parte real de los residuos sea imaginaria, que es lo que buscamos.

La expansión de la parte real es

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

Expandimos usando $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$

$$= \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right] + \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$\cos\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] + \sin\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$\cos\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] + \sin\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= 0$$

Por lo tanto, la integral haciendola también por residuos da 0.[4]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(3x)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = 0$$

1.3. I Parcial I Ciclo 2009

Pregunta 1

Determine la parte real e imaginaria del número complejo $\left(\frac{1-j}{\sqrt{2}}\right)^9$

Solución

$$\left(\frac{1-j}{\sqrt{2}}\right)^9 = \left(\exp\left(\frac{-j\pi}{4}\right)\right)^9 = \exp\left(\frac{-9j\pi}{4}\right) = \exp(-2\pi j)\exp\left(\frac{-j\pi}{4}\right) = \exp\left(\frac{-j\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1-j}{\sqrt{2}}\right)^9 = \exp\left(\frac{-j\pi}{4}\right) = \frac{1-j}{\sqrt{9}}$$

Pregunta 2

Utilice residuos para calcular la integral real $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(at)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Solución

[4] Esto es el clásico "Matar una mosca con un cañon".

Ver **I Parcial I Ciclo 2008 Pregunte (7.b)** donde se demuestra que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a}\exp(-ab)$
Comparando el formato

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(at)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \pi\exp(-a)$$

Pregunta 3

Calcule la integral $\displaystyle\int_C (z+3z^*)\,\mathrm{d}z$ a lo largo de una trayectoria C que inicia en el origen y termina en $1+2j$. El camino a seguir es una línea horizontal desde 0 hasta 1 y luego una vertical desde 1 hasta $1+2j$. z^*es el conjugado complejo de z.

Solución

Dividimos la integral en 2 curvas. $\displaystyle\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$

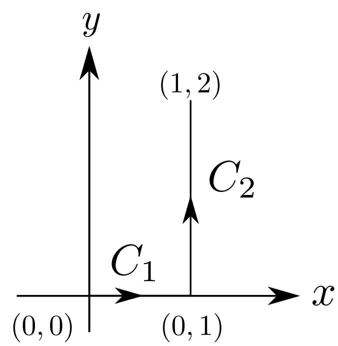


Figura 1.5: Trayectoria de integración.
Pregunta 3

La integral $\displaystyle\int_C (z+3z^*)\,\mathrm{d}z$ se puede reescribir como $\displaystyle\int_C ((x+jy)+3(x-jy))\,(\mathrm{d}x + j\mathrm{d}y)$

$$C_1 = \begin{cases} x = t \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ y = 0 \Rightarrow \mathrm{d}y = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_C (z+3z^*)\mathrm{d}z = \int_0^1 (t+3t)\mathrm{d}t = 2$$

$$C_2 = \begin{cases} x = 1 \Rightarrow \mathrm{d}x = 0 \\ y = t \Rightarrow \mathrm{d}y = t \end{cases} \Rightarrow \int_C (z+3z^*)\mathrm{d}z = \int_0^1 ((1+jt)+3(1-jt))\,j\mathrm{d}t = 1+4j$$

$$\int_C (z+3z^*)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} + \int_{C_2} = 2 + (1+4j) = 3+4j$$

Pregunta 4

Demuestre que $u(x,y) = x^2 - 3xy - y^2 + \pi x$ es armónica. Encuentre su conjugado armónico $v(x,y)$. Represente la función $f(z) = u + jv$ en términos de z. Considere que $f(1) = -j$.

Solución

Si $u(x,y) = x^2 - 3xy - y^2 + \pi x$, mostremos que el laplaciano de u es igual a 0.

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y + \pi \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -3x - 2y \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

$$\Rightarrow \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Para encontrar $v(x,y)$ aplicamos las condiciones de C-R

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y + \pi = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \int (2x - 3y + \pi)\ \mathrm{d}y + g(x) = 2xy - \frac{3}{2}y^2 + \pi y + g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -3x - 2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow v = \int (3x + 2y)\ \mathrm{d}x + h(y) = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + h(y)$$

Comparando $v(x,y)$ en ambos casos, tenemos que: $g(x) = \frac{3}{2}x^2$ y $h(y) = \frac{3}{2}y^2 + \pi y$

$$f(x,y) = x^2 - 3xy - y^2 + \pi x + j\left(2xy - \frac{3}{2}y^2 + \pi y + \frac{3}{2}x^2\right) + K,\ K \in \mathbb{C}$$

Con la condición inicial, obtenemos el valor de K

$$f(1) = -j = 1 + \pi + \frac{j3}{2} + K \Rightarrow K = -1 - \pi - j\frac{5}{2}$$

Ahora para expresar $f(x,y)$ como $f(z)$, hacemos $x = z, y = 0$

$$f(z) = z^2 + \pi z + j\frac{3z^2}{2} + -1 - \pi - j\frac{5}{2}$$

Pregunta 5

Utilice residuos para calcular la siguiente integral: $\oint_{|z+\pi j|=5} \frac{1}{z^2(\exp(z)-1)}\ \mathrm{d}z$

Solución

Ubiquemos los polos. El primer término z^2 es $z^2 = 0$ solo en $z = 0$. El segundo término $\exp(z) - 1$ es 0 en $\exp(z) - 1 = 0 \Rightarrow z = 2k\pi j$ con $k \in \mathbb{Z}$ Los polos dentro del contorno de integración son $z = 0$ y $z = 2\pi j$. El polo $z = 0$ es de orden 3

$$\frac{1}{z^2\left(\exp(z)-1\right)} = \frac{1}{z^2\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \mathcal{O}(z^3) - 1\right)} = \frac{1}{z^3\left(1 + \frac{z}{2} + \mathcal{O}(z^2)\right)}$$

Viendolo de esta manera, lo que indefine la expresión es el z^3 del denominador.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2(\exp(z)-1)}, 0\right] = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[z^3\frac{1}{z^2(\exp(z)-1)}\right] = \frac{1}{12}$$

El polo en $z = -2\pi j$ es de orden 1.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2(\exp(z)-1)}, -2\pi j\right] = \lim_{z\to -2\pi j}(z+2\pi j)\frac{1}{z^2\left(\exp(z)-1\right)} = -\frac{1}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \oint_{|z+\pi j|=5} \frac{1}{z^2(\exp(z)-1)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\sum \operatorname{Res} = 2\pi j\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{4\pi^2}\right)$$

Pregunta 6

Sea $f(z) = \begin{cases} \dfrac{(z^*)^2}{z} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$

z^* es el conjugado complejo de z

(a) Verifique si existe $f'(0)$, la derivada de $f(z)$ en $z = 0$ (Sugerencia: use la definición de derivada)

(b) Si $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$, verifique si u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z = 0$

Solución

(6.a) Obtengamos el valor de la derivada por definición.

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z\,=\,0} = \lim_{z\,\to\,0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\,\to\,0}\frac{\left(\dfrac{z^*}{z}\right)}{z} = \lim_{z\,\to\,0}\left(\frac{z^*}{z}\right)^2$$

Agarramos el límite por 2 trayectorias, una donde $x \to 0$ y $y = 0$, y otra por donde $x = y$. Si el límite no existe, la derivada en $z = 0$ no existe.

Ya que

$$\left(\frac{z^*}{z}\right)^2 = \left(\frac{x-jy}{x+jy}\right)^2$$

Tomemos el límite donde $x \to 0$ y $y = 0$

$$\lim_{z\,\to\,0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{x\,\to\,0}\left(\frac{x-j0}{x+j0}\right)^2 = 1$$

Ahora tomemos el límite donde $x = y$

$$\lim_{z\,\to\,0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{y\,\to\,0}\left(\frac{x-jx}{x+jx}\right)^2 = \left(\frac{1-j}{1+j}\right)^2 \neq 1$$

El límite da diferente por trayectorias distintas, el límite no existe, por lo tanto, la derivada no existe.

(6.b) Ahora verifiquemos si cumple con las condiciones de Cauchy-Riemann

$$f(z) = \frac{(z^*)^2}{z} = \frac{(z^*)^3}{zz^*} = \frac{(x-jy)^3}{x^2+y^2} = \frac{x^3+3x^2(-jy)+3x(-jy)^2+(-jy)^3}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} + j\frac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow u\,(x,y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} \qquad \Rightarrow v\,(x,y) = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2}$$

Con la condición que $f(0) = 0$, se cumple que $u(0,0) = 0$ y $v(0,0) = 0$
Obtengamos las derivadas de u y v por definición. Las derivadas parciales de x cuando $x \to 0$ y $y = 0$, las parciales de y con $x = 0$ y $y \to 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{x \to 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{x^3}{x^2}\right)}{x} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \to 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \lim_{x \to 0} \frac{v(x,0) - v(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \lim_{y \to 0} \frac{v(0,y) - v(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{\left(\frac{y^3}{y^2}\right)}{y} = 1$$

En el punto $x = 0, y = 0$ se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

1.4. I Parcial II Ciclo 2009

Pregunta 1

Para $z = x + jy$ sea $f(z) = \sqrt{\left|z^2 - (z^*)^2\right|} = u(x,y) + jv(x,y)$ con z^* el conjugado de z

Solución

Sea $z = x + jy$ y $f(z, z^*) = \sqrt{\left|z^2 - (z^*)^2\right|}$. Verifiquemos que cumplen las condiciones de C-R calculando la derivada por definición. Obtengamos $u(x,y)$ y $v(x,y)$

$$z^2 + (z^*)^2 = (x + jy)^2 - (x - jy)^2 = 4xyj \Rightarrow \sqrt{\left|z^2 - (z^*)^2\right|} = 2\sqrt{|xy|}$$

$$u(x,y) = 2\sqrt{|xy|} \qquad v(x,y) = 0$$

Calculemos las derivadas por la definición en el punto $(0,0)$. Primero $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ con $\Delta x \to 0$ y $\Delta y = 0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sqrt{|\Delta x \cdot 0|} - 0}{\Delta x} = 0 = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(0,0)}$$

Ahora $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ cuando $\Delta x = 0$ y $\Delta y \to 0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2\sqrt{|0 \cdot \Delta y|} - 0}{\Delta y} = 0 = -\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(0,0)}$$

La función f sí cumple con las condiciones de C-R en el punto $(0,0)$ Para verificar que la derivada existe, el límite tiene que existir. Calculemos el límite por la trayectoria de $x = y \Rightarrow \Delta x = \Delta y \Rightarrow \Delta z = \Delta x + j\Delta y = \Delta x + j\Delta x$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta x + j\Delta y) - f(0,0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2\sqrt{|\Delta x|^2}}{\Delta x + j\Delta x} = \frac{2}{1+j} \neq 0$$

Como el límite da diferente por una trayectoria distinta, el límite no existe. La derivada no existe en el punto (0,0). Las condiciones de Cauchy-Riemann son *necesarias* pero no *suficientes*.

Pregunta 2

Utilice residuos para calcular $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{1}{z\sin(z)\cos(z)}\,\mathrm{d}z$

Solución

Los polos dentro del contorno son $0, \pi/2, -\pi/2$. Obtenemos el residuo en 0 expandiendo en series de Taylor.

$$\frac{1}{z\left(z - \frac{z^3}{3!} + \mathcal{O}(z^3)\right)\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \mathcal{O}(z^2)\right)} = \frac{1}{z^2\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \mathcal{O}(z^2)\right)\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \mathcal{O}(z^2)\right)}$$

$$= \frac{1}{z^2\left(1 - \left(\frac{2}{3}z^2 + \mathcal{O}(z^2)\right)\right)} = \frac{1 + \left(\frac{2}{3}z^2 + \mathcal{O}(z^2)\right) + \left(\frac{2}{3}z^2 + \mathcal{O}(z^2)\right)^2 + \cdots}{z^2}$$

Vemos que todas las potencias de z son pares al expandir, no hay coficiente $1/z$, el residuo en 0 es 0

Sea los polos $z_1 = \pi/2$ y $z_2 = -\pi/2$, donde los polos son de orden 1

$$\lim_{z \to z_k} \frac{(z - z_k)}{z\sin(z)\cos(z)} = \frac{1}{z_k \sin(z_k)} \lim_{z \to z_k} \frac{z - z_k}{\cos(z_k)} = \frac{1}{z_k \sin(z_k)} \lim_{z \to z_k} \frac{1}{-\sin(z)} = \frac{-1}{z_k \sin^2(z_k)}$$

$$\text{Res}\left[\frac{1}{z\sin z\cos z}, \frac{\pi}{2}\right] = -\frac{2}{\pi} \qquad \text{Res}\left[\frac{1}{z\sin z\cos z}, \frac{-\pi}{2}\right] = \frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=2} \frac{1}{z\sin(z)\cos(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j \sum \text{Res} = 2\pi j\left(\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=2} \frac{1}{z\sin(z)\cos(z)}\,\mathrm{d}z = 0$$

Pregunta 3

Sea $u(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ donde a, b y c son constantes reales

(a) Determine los valores que deben tomar las constantes para que la función sea armónica, **(b)** A partir de lo obtenido anteriormente, obtenga el conjugado armónico de $u(x,y)$ **(c)** Represente la función en términos de z, si $f(1) = 0$

Solución (3.a)

$$u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2ax + by \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2a \qquad \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = bx + 2cy \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2c$$

$$\nabla^2 u = 2a + 2c = 0 \Rightarrow -a = c$$

$$\Rightarrow u(x, y) = ax^2 + bxy + -ay^2$$

(3.b) Encontremos $v(x, y)$ con las condiciones de C-R

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax + by = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \int (2ax + by)\, \mathrm{d}y + g(x) = 2axy + \frac{b}{2}y^2 + g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = bx + -2ay = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow v = \int (-bx + 2ay)\, \mathrm{d}x + h(y) = -\frac{b}{2}x^2 + 2axy + h(y)$$

Al comparar el $v(x, y)$ obtenido en ambas integraciones, tenemos que

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{b}{2}x^2 \qquad \Rightarrow h(y) = \frac{b}{2}y^2$$

Aún se le puede añadir una constante K al $v(x, y)$

$$\Rightarrow v(x, y) = -\frac{b}{2}x^2 + 2axy + +\frac{b}{2}y^2 + K$$

Con $u(x, y)$ y $v(x, y)$, ya tenemos $f(x, y)$

$$\Rightarrow f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + j\left(-\frac{b}{2}x^2 + 2axy + +\frac{b}{2}y^2 + K\right)$$

(3.c) Usemos la condición inicial para hallar el valor de K

$$f(1) = 0 = a - j\frac{b}{2} + jK \Rightarrow K = \frac{b}{2} + ja$$

$$\Rightarrow f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 - a + j\left(-\frac{b}{2}x^2 + 2axy + +\frac{b}{2}y^2 + \frac{b}{2}\right)$$

Aplicamos el truco de cambiar $x = z$ y $y = 0$ para tenerlo en función de z y simplificamos.

$$f(z) = a(z^2 - 1) + j\frac{b}{2}(1 - z^2)$$

Pregunta 4

Utilice la fórmula integral de Cauchy para calcular $\oint_{|z|=5} \frac{175}{(5z - 20)^2(z^2 + 1)}\, \mathrm{d}z$

Solución

$$\oint_{|z|=5} \frac{175}{(5z-20)^2(z^2+1)}\,\mathrm{d}z = \frac{175}{25}\oint_{|z|=5} \frac{1}{(z-4)^2(z^2+1)}\mathrm{d}z$$

Hagamos la integral $\oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^2(z^2+b^2)}\mathrm{d}z$ con la condición que $a < R$ y $b < R$ para que los polos esten dentro del contorno de integración. Los polos son jb de orden 1, $-jb$ de orden 1, a de orden 2.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-a)^2(z^2+b^2)}, a\right] = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-a)^2}{(z-a)^2(z^2+b^2)}\right] = -\frac{2a}{(a^2+b^2)^2}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-a)^2(z^2+b^2)}, jb\right] = \lim_{z\to jb}\frac{(z-jb)}{(z-a)^2(z^2+b^2)} = -\frac{j}{2b(a-jb)^2}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-a)^2(z^2+b^2)}, -jb\right] = \lim_{z\to -jb}\frac{(z-(-jb))}{(z-a)^2(z^2+b^2)} = \frac{j}{2b(a+jb)^2}$$

Al sumar todos los residuos nos damos cuenta que suman 0

$$\Rightarrow \oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^2(z^2+b^2)}\mathrm{d}z = 0 \Rightarrow \oint_{|z|=5} \frac{175}{(5z-20)^2(z^2+1)}\,\mathrm{d}z = 0$$

Pregunta 5

Sean $z_1 = r_1\exp(j\theta_1)$, $z_2 = r_2\exp(j\theta_2)$. Demuestre que $\operatorname{Re}(z_1 z_2^*) = |z_1|\,|z_2|$ si y sólo si $\theta_1 - \theta_2 = 2n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}$

Solución

Sean $z_1 = r_1\exp(j\theta_1)$ y $z_2 = r_2\exp(j\theta_2)$

$$z_1 z_2^* = r_1 r_2\exp(j(\theta_1-\theta_2)) \Rightarrow \operatorname{Re}[z_1 z_2^*] = \operatorname{Re}[r_1 r_2\exp(j(\theta_1-\theta_2))] = r_1 r_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$

$$= |z_1|\,|z_2|\cos(\theta_1-\theta_2)$$

Para que se cumpla la condición que $\operatorname{Re}[z_1 z_2^*] = |z_1|\,|z_2|$, ocupamos que $\cos(\theta_1-\theta_2) = 1$, lo que ocurre cuando el argumento del $\cos = 2n\pi, n\in\mathbb{Z} \Rightarrow \theta_1-\theta_2 = 2n\pi, n\in\mathbb{Z}$

Pregunta 6

Considere la integral impropia: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(2x)}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$

(a) Demuestre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(2x)}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin(2x)}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$

(b) Utilizando el teorema de los residuos y la igualdad anterior, calcule la integral $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin(2x)}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$

Solución

Evaluemos la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ y evaluamos con valores al final.

Ya que $\dfrac{x\sin(bx)}{x^2+a^2}$ es una función par, cumple que

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$$

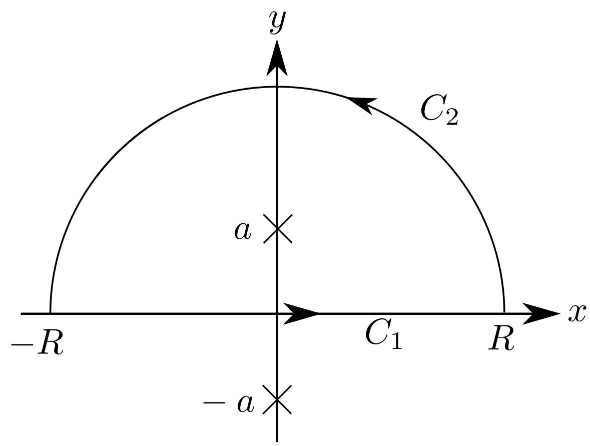


Figura 1.6: Contorno de integración.

Problema 6

Hagamos $\displaystyle\oint_C \frac{z\exp(jbz)}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z$ sobre el contorno de la Fig. 1.6

$$\oint_C \frac{z\exp(jbz)}{z^2+a^2}\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\exp(jbx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x+\oint_{C_2}\frac{z\exp(jbz)}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z$$

La integral sobre C_2 tiende a 0 cuando $R\to\infty$, evaluemos el LHS usando residuos., el único residuo dentro del contorno es ja de orden 1

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z\exp(jbz)}{z^2+a^2},ja\right]=\lim_{z\to ja}(z-aj)\,\frac{z\exp(jbz)}{z^2+a^2}=\frac{\exp(-ab)}{2}$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\exp(jbx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\oint_C\frac{z\exp(jbz)}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z=2\pi j\,\frac{\exp(-ab)}{2}=j\pi\exp(-ab)$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\exp(jbx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x+j\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=j\pi\exp(-ab)$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\pi\exp(-ab)$$

$$\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\exp(-ab)$$

Evaluando con $a=\sqrt{3}$ y $b=2$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin(2x)}{x^2+3}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\exp(-2\sqrt{3})$$

Método alternativo

Volvamos al problema **I Parcial I Ciclo 2008 (7.b)** donde se demuestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(jbx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a}\exp(-ab)$$

Si derivamos[5] con respecto a b en ambos lados e igualamos las partes reales y las imaginarias obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial b}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(jbx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\pi}{a}\exp(-ab)\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{jx\exp(jbx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{jx\cos(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = -\pi\exp(-ab)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \pi\exp(-ab)$$

Se obtiene el mismo resultado.

1.5. I Parcial I Ciclo 2010

Pregunta 1

Si $z_1 = 1+j$, $z_2 = -1-j$, $z_3 = 3\exp\left(\frac{j\pi}{6}\right)$, $z_4 = 5\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$, calcule todos los valores para la siguiente expresión: $\ln\left(\sqrt{\frac{z_1 z_3^*}{(z_2 z_4)^5}}\right)$

Solución

Sea $w = \frac{z_1 z_3^*}{(z_2 z_4)^5}$

Pasemos todos los números a notación compleja

$$z_1 = \sqrt{2}\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right) \qquad z_2 = \sqrt{2}\exp\left(\frac{-j3\pi}{4}\right)$$

$$z_3 = 3\exp\left(\frac{j\pi}{6}\right) \qquad z_4 = 5\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow w = \frac{z_1 z_3^*}{(z_2 z_4)^5} = \frac{\sqrt{2}\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)3\exp\left(-\frac{j\pi}{6}\right)}{\left(\sqrt{2}\exp\left(\frac{-j\pi}{4}\right)5\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)\right)^5} = \frac{3}{4\cdot 5^5}\frac{\exp\left[j\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\right]}{\exp\left[j5\pi\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)\right]}$$

$$= \frac{3}{4\cdot 5^5}\exp\left[j\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-5\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)\right)\right] = \frac{3}{4\cdot 5^5}\exp\left(\frac{j31\pi}{12}\right) = \frac{3}{4\cdot 5^5}\exp\left(\frac{j7\pi}{12}+2\pi j\right)$$

[5] Derivar dentro de la integral con otra variable es la regla integral de Leibniz. Se puede usar para resolver integrales difíciles. Para ver más detalles (o ver como resolver integrales espantosas), ver: Nahin, P. J. *Inside Interesting Integrals*, Springer 2015

El exponente con la parte $2\pi j$ lo quitamos ya que $\exp(2\pi j) = 1$. Queda el argumento principal y le sumamos un $2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ ya que le vamos a sacar raíz

$$\Rightarrow w = \frac{3}{4 \cdot 5^5} \exp\left(\frac{j7\pi}{12} + 2k\pi j\right) \Rightarrow w^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{50}\sqrt{\frac{3}{5}} \exp\left(\frac{j7\pi}{24} + kj\pi\right)$$

Ahora, sacamos el logaritmo. Un tecnisismo, el enunciado pide que se obtenga el ln del numero $w^{1/2}$. Eso no está definido. Suponiendo que se refiere a un logaritmo general, no de su rama principal, pediría

$$\log w^{\frac{1}{2}} = \ln\left|w^{\frac{1}{2}}\right| + j\left(\arg w^{\frac{1}{2}} + 2n\pi\right)$$

Con $n \in \mathbb{Z}$. Además con ln log, no ln. Si fuera la rama principal, sería Log, con mayúscula. El argumento del $w^{1/2}$ es la parte del exponente complejo, y la norma también la tenemos

$$\Rightarrow \log w^{\frac{1}{2}} = \ln\left(\frac{1}{50}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + j\pi\left(\frac{7}{24} + k + 2n\right)$$

Con $k \in \mathbb{Z}$

Pregunta 2

Calcule con la integral de Cauchy $\oint_{|z|=3} \frac{3z+10}{(z-1)(2z+5)^2}\,\mathrm{d}z$

Solución

$$\oint_{|z|=3} \frac{3z+10}{(z-1)(2z+5)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\oint_{|z|=3} \frac{3z+10}{(z-1)\left(z+\frac{5}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}z$$

La función tiene 2 polos, en $z = 1$ y $z = 5/2$, evaluamos 2 integrales y separamos como

$$\frac{1}{4}\oint_{|z|=3} \frac{3z+10}{(z-1)\left(z+\frac{5}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\oint \frac{f(z)}{(z-1)}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{4}\oint \frac{g(z)}{\left(z-\frac{5}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}z$$

Con $f(z) = \frac{3z+10}{\left(z+\frac{5}{2}\right)^2}$ y $g(z) = \frac{3z+10}{z-1}$ y cada una de las trayectorias rodea el polo respectivo del denominador mostrado.
Ya con esta forma podemos evaluar con la integral de Cauchy

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \frac{2\pi j}{n!} f^n(a)$$

$$\Rightarrow \oint \frac{f(z)}{(z-1)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j \lim_{z\to 1} \frac{3z+10}{\left(z+\frac{5}{2}\right)^2} = 2\pi j \frac{52}{49}$$

$$\Rightarrow \oint \frac{g(z)}{(z-1)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j \lim_{z\to \frac{5}{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{3z+10}{(z-1)}\right] = -2\pi j \frac{52}{49}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\oint \frac{f(z)}{(z-1)}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{4}\oint \frac{g(z)}{\left(z-\frac{5}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\left[2\pi j\frac{52}{49} - 2\pi j\frac{52}{49}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=3} \frac{3z+10}{(z-1)(2z+5)^2}\,\mathrm{d}z = 0$$

Pregunta 3

Considere la fución $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^*$. Demuestre que no existe derivada $f'(z)$ en ningún $z \in \mathbb{C}$

Solución

Ver **I Parcial I Ciclo 2008 Pregunta (6.a)**

Pregunta 4

Sea C la circunferencia $|z| = 1$

(a) Utilice el desarrollo de Maclaurin para $\exp(z)$ para demostrar que

$$\int_C \exp\left(z+\frac{1}{z}\right)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty}\int_C z^n \exp\left(\frac{1}{z}\right)\,\mathrm{d}z$$

(b) Evaluando cada una de las integrales de la sumatoria anterior, demuestre que

$$\int_C \exp\left(z+\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\pi j}{n!\,(n+1)!}$$

Solución

(4.a)

$$\oint_C \exp\left(z+\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z = \oint_C \exp(z)\exp\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z = \oint_C \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\exp\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\oint_C z^n \exp\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z$$

(4.b)

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\oint_C z^n\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!z^k}\right)\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,k!}\oint_C \frac{z^n}{z^k}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,k!}\oint_C \frac{1}{z^{k-n}}\,\mathrm{d}z$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,k!}\oint_C \frac{1}{z^{k-n}}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,k!}2\pi j\;\delta_{k,n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\pi j}{n!\,(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \oint_C \exp\left(z+\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\pi j}{n!\,(n+1)!}$$

Pregunta 5

(a) Demuestre que $\arctan(z) = \frac{j}{2}\ln\left(\frac{j+z}{j-z}\right)$

(b) Utilice lo anterior para calcular todos los valores de $\arctan\left(\frac{j-2}{5}\right)$

Solución

(5.a) Sea $\tan w = z \Rightarrow w = \arctan z$. Por otro lado,

$$\tan w = \frac{1}{j}\left(\frac{\exp(jw)-\exp(-jw)}{\exp(jw)+\exp(-jw)}\right) = z$$

Despejemos w para obtener $\arctan z$

$$\frac{1}{j}\left(\frac{\exp(jw)-\exp(-jw)}{\exp(jw)+\exp(-jw)}\right) = z \Rightarrow \frac{\exp(2jw)-1}{\exp(2jw)+1} = jz \Rightarrow \exp(2jw)-1 = jz\left(\exp(2jw)+1\right)$$
$$\Rightarrow \exp(2jw) = \frac{1+jz}{1-jz} \Rightarrow 2jw = \log\left(\frac{1+jz}{1-jz}\right) \Rightarrow w = \frac{j}{2}\log\left(\frac{j+z}{j-z}\right)$$
$$\Rightarrow \arctan z = \frac{j}{2}\log\left(\frac{j+z}{j-z}\right)$$

(5.b) Para $z = \frac{j-2}{5}$

$$\Rightarrow \arctan\left(\frac{j-2}{5}\right) = \frac{j}{2}\log\left[\frac{j+\frac{j-2}{5}}{j-\frac{j-2}{5}}\right]$$

La parte dentro del logaritmo es

$$\frac{j+\frac{j-2}{5}}{j-\frac{j-2}{5}} = \frac{5j+j-2}{5j-j+2} = \frac{6j-2}{4j+2} = \frac{5+5j}{5} = 1+j$$

La norma de $1+j$ es $\sqrt{2}$ y el argumento es $\pi/4$

$$\Rightarrow \frac{j}{2}\log(1+j) = \frac{j}{2}\left[\ln\left(\sqrt{2}\right) + j\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right] = -\frac{\pi}{8} + k\pi + \frac{j}{2}\log\left(\sqrt{2}\right)$$
$$\Rightarrow \arctan\left(\frac{j-2}{5}\right) = -\frac{\pi}{8} + k\pi + \frac{j}{2}\log\left(\sqrt{2}\right)$$

Pregunta 6

Calcule el residuo para cada una de las funciones abajo, en los puntos indicados:

(a) $f(z) = \frac{1}{z\sin(z)\arctan(z)}$ en $z=0$

(b) $g(z) = \frac{\exp(z)}{z^2\sin(z)}$ en $z=0$

Solución

(6.a)

$$\frac{1}{z\sin(z)\arctan(z)} = \frac{1}{z\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\mathcal{O}(z^3)\right)\left(z-\dfrac{z^3}{3}+\mathcal{O}(z^3)\right)}$$

$$= \frac{1}{z^3\left(1-\dfrac{z^2}{3!}+\mathcal{O}(z^2)\right)\left(1-\dfrac{z^2}{3}+\mathcal{O}(z^2)\right)}$$

$$= \frac{1}{z^3\left(1-\left(\dfrac{z^2}{2}+\mathcal{O}(z^2)\right)\right)} = \frac{1+\left(\dfrac{z^2}{2}+\mathcal{O}(z^2)\right)+\left(\dfrac{z^2}{2}+\mathcal{O}(z^2)\right)^2+\cdots}{z^3}$$

De aquí nos podemos fijar cuando hagamos la expansión, el coeficiente de $\dfrac{1}{z}$ es $\dfrac{1}{2}$

(6.b)

$$\frac{e^z}{z^2\sin(z)} = \frac{e^z}{z^2\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\mathcal{O}\left(z^7\right)\right)} = \frac{e^z}{z^3\left[1-\left(\dfrac{z^2}{3!}+\mathcal{O}\left(z^4\right)\right)\right]}$$

$$= \frac{\left[1+\dfrac{z}{1!}+\dfrac{z^2}{2!}\right]\left[1+\left(\dfrac{z^2}{3!}+\mathcal{O}\left(z^2\right)\right)+\cdots\right]}{z^3}$$

Al expandir, el coeficiente de $\dfrac{1}{z}$ es $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}=\dfrac{2}{3}$

1.6. I Parcial II Ciclo 2010

Pregunta 1

Encuentre todos los valores de z que satisfacen la siguiente ecuación

$$\exp\left[j\left(z+4\right)\right] = 5j$$

Solución

$$\exp(j(z+4)) = 5j = \exp\left(\ln(5)+j\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right) \iff j(z+4) = \ln 5 + j\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\ ,k\in\mathbb{Z}$$

$$z+4 = \frac{\pi}{2}+2k\pi - j\ln 5 \Rightarrow z = -4+\frac{\pi}{2}+2k\pi - j\ln 5$$

Pregunta 2

Utilice residuos para calcular el valor numérico de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

Solución

Ver **I Parcial II Ciclo 2008 (5.b)** donde se muestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a\sqrt{2}}$$

Con $a \to 1$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Pregunta 3

Sea $z = \left(\dfrac{1+j}{1+j\sqrt{3}}\right)^{-j}$

(a) Encuentre el valor de z expresado en notación cartesiana.

(b) Halle las raíces cuadradas de z en notación fasorial.

Solución

(3.a)

$$\left(\frac{1+j}{1+j\sqrt{3}}\right)^{-j} = \left(\frac{\sqrt{2}\exp\left(\dfrac{j\pi}{4}\right)}{2\exp\left(\dfrac{j\pi}{3}\right)}\right)^{-j} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{j\pi}{12}\right)\right)^{-j}$$

$$= \exp\left(-j\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}} + j\left(-\frac{\pi}{12}+2k\pi\right)\right)\right) = \exp\left(\left(-\frac{\pi}{12}+2k\pi\right) - j\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\exp\left(-\frac{\pi}{12}+2k\pi\right)\exp\left(-j\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{12}+2k\pi\right)\left[\cos\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - j\sin\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]$$

Con $k \in \mathbb{Z}$

En notación fasorial: $\exp\left(-\dfrac{\pi}{12}+2k\pi\right)\angle -\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(3.b) Para encontrar las raices hagamos:

$$w^2 = z = \exp\left(-\frac{\pi}{12}+2k\pi\right)\exp\left(j\ln\sqrt{2}\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{12}+2k\pi\right)\exp\left(j\left(\ln\sqrt{2}+2n\pi\right)\right),\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow w_n = \exp\left(-\frac{\pi}{24}+k\pi\right)\exp\left(j\left(\frac{\ln\sqrt{2}+2n\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow w_0 = \exp\left(-\frac{\pi}{24}+k\pi\right)\exp\left(j\left(\frac{\ln\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{24}+k\pi\right)\angle\frac{\ln\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow w_1 = \exp\left(-\frac{\pi}{24}+k\pi\right)\exp\left(j\left(\frac{\ln\sqrt{2}+2\pi}{2}\right)\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{24}+k\pi\right)\angle\frac{\ln\sqrt{2}+2\pi}{2}$$

Pregunta 4

Resuelva utilizando la integral de Cauchy $\int_C \frac{\cos(\pi z)}{(2z+4)^2}\,\mathrm{d}z$ donde $C : |z+1| = 2$

Solución

$$\oint_C \frac{\cos(\pi z)}{(2z+4)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\oint_C \frac{\cos(\pi z)}{(z+2)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\frac{2\pi j}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\cos(\pi z)\right]_{z=-2}$$
$$= \frac{1}{4}\frac{2\pi j}{1!}\left(-\pi\sin(-2\pi)\right) = 0$$

Pregunta 5

Utilice residuos para calcular las siguientes integrales:

(a) $\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\,\mathrm{d}z$

(b) $\oint_{|z|=1} \frac{\exp(z)}{z^2\arctan(z)}\mathrm{d}z$

Solución

(5.a) Usemos residuos para encontrar el valor de la integral. Los lugares donde $\sin(\pi z)$ se hace 0 dentro del contorno es en $-1, 0, 1$. En 0 es una singularidad removible.

$$\lim_{z\to 0}\frac{z\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = 1$$

Los polos -1 y 1 parecen que son de orden 1, intentemolo

$$\lim_{z\to z_k}\frac{(z-z_k)z\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = z_k\cos(\pi z_k)\lim_{z\to z_k}\frac{(z-z_k)}{\sin(\pi z)} = z_k\cos(\pi z_k)\lim_{z\to z_k}\frac{1}{\pi\cos(\pi z)} = \frac{z_k}{\pi}$$

Habiendo encontrado los residuos para $z = \pm 1$, se puede evaluar ya la integral

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\left(\frac{-1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\right) = 0$$

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\,\mathrm{d}z = 0$$

(5.b) Expandimos en series de Taylor para encontrar el residuo.

$$\frac{\exp(z)}{z^2\arctan(z)} = \frac{\exp(z)}{z^2\left(z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\mathcal{O}(z^5)\right)} = \frac{\exp(z)}{z^3\left(1-\left(\frac{z^2}{3}-\frac{z^4}{5}+\mathcal{O}(z^4)\right)\right)}$$

$$\frac{\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\mathcal{O}(z^2)\right)\left(1+\left(\frac{z^2}{3}-\frac{z^4}{5}+\mathcal{O}(z^4)\right)+\left(\frac{z^2}{3}-\frac{z^4}{5}+\mathcal{O}(z^4)\right)^2+\cdots\right)}{z^3}$$

Al expandir, el coeficiente de $\frac{1}{z}$ es $\frac{1}{2!}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=1}\frac{\exp(z)}{z^2\arctan(z)}\mathrm{d}z = 2\pi j\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{3}\pi j$$

1.7. I Parcial I Ciclo 2011

Pregunta 1

Demuestre que:

(a) $1 + \cos(z) = 2\cos^2\left(\frac{z}{2}\right)$

(b) $(\sin(z))(\cos(z)) = \frac{\sin(2z)}{2}$

Solución

(1.a)

$$2\cos^2\left(\frac{z}{2}\right) = 2\left(\frac{\exp\left(\frac{jz}{2}\right) + \exp\left(\frac{-jz}{2}\right)}{2}\right)^2]$$

$$= \frac{\exp(jz) + 2 + \exp(-jz)}{2} = 1 + \frac{\exp(jz) + \exp(-jz)}{2} = 1 + \cos(z)$$

(1.b)

$$\sin(z)\cos(z) = \left(\frac{\exp(jz) - \exp(-jz)}{2j}\right)\left(\frac{\exp(jz) + \exp(-jz)}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\exp(2jz) + 1 - 1 - \exp(-2jz)}{2j}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\exp(2jz) - \exp(-2jz)}{2j}\right) = \frac{1}{2}\sin(2z)$$

Método alternativo

De esta manera se prueban el ángulo doble para $\cos(2z)$ y $\sin(2z)$

$$\begin{aligned} \exp(2jz) &= (\exp(jz))^2 \\ \cos(2z) + j\sin(2z) &= (\cos(z) + j\sin(z))^2 \\ \cos(2z) + j\sin(2z) &= \cos^2(z) - \sin^2(z) + j\ 2\cos(z)\sin(z) \end{aligned}$$

Igualando las parte real e imaginaria de ambos lados de la ecuación

$$\Rightarrow \cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$$

$$\Rightarrow \sin(2z) = 2\cos(z)\sin(z)$$

Pregunta 2

Utilice residuos para calcular $\displaystyle\int_{|z|=3} (1+z)\left(\exp\left(\frac{1}{z}\right) + \exp\left(\frac{1}{z-1}\right)\right)\, dz$

Solución Separando la integral

$$= \oint_{|z|=3} (1+z)\exp\left(\frac{1}{z}\right)\, dz + \oint_{|z|=3} (1+z)\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)\, dz$$

Ocupemonos de una integral a la vez.

$$\oint_{|z|=3} (1+z)\exp\left(\frac{1}{z}\right)\ \mathrm{d}z = \oint_{|z|=3} (1+z)\left(0! + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \mathcal{O}\left(z^{-3}\right)\right)\ \mathrm{d}z$$

El coeficiente de z^{-1} al distribuir es $1/1! + 1/2! = 3/2$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=3} (1+z)\exp\left(\frac{1}{z}\right)\ \mathrm{d}z = 2j\pi\left(\frac{3}{2}\right) = 3j\pi$$

Para la segunda integral, sumemos $+1-1$ para obtener directamente los residuos de la serie de Laurent centrada en 1

$$\oint_{|z|=3} (1+z)\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)\ \mathrm{d}z = \oint_{|z|=3} (2+z-1)\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)\ \mathrm{d}z$$

$$= \oint_{|z|=3} (2+z-1)\left(0! + \frac{1}{1!(z-1)} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \mathcal{O}\left((z-1)^{-3}\right)\right)\ \mathrm{d}z$$

El coeficiente de $(z-1)^{-1}$ al expandir es $2/1! + 1/2! = 5/2$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=3} (1+z)\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)\ \mathrm{d}z = 2j\pi\left(\frac{5}{2}\right) = 5j\pi$$

Sumamos los resultados de las integrales y obtenemos

$$\oint_{|z|=3} (1+z)\left(\exp\left(\frac{1}{z}\right) + \exp\left(\frac{1}{z-1}\right)\right)\ \mathrm{d}z = 8\pi j$$

Pregunta 3

Si $u(x,y) = \cos(2x)\cosh(2y)$, determinar en términos de z la función analítica $f(z) = u + jv$, si $f(0) = 0$

Solución

$$u(x,y) = \cos(2x)\cosh(2y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2\sin(2x)\cosh(2y) = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \int -2\sin(2x)\cosh(2y)\ \mathrm{d}y + g(x) = -\sin(2x)\sinh(2y) + g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\cos(2x)\sinh(2y) = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow v = \int -2\cos(2x)\sinh(2y)\ \mathrm{d}x + h(y) = -\sin(2x)\sinh(2y) + h(y)$$

$$g(x) = h(y) = K\ ,\ K \in \mathbb{C} \Rightarrow v = -\sin(2x)\sinh(2y) + K$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \cos(2x)\cosh(2y) - j\left(\sin(2x)\sinh(2y) + K\right)$$

Con la condición inicial determinamos K

$$f(0) = 0 = 1 - jK \Rightarrow K = j$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \cos(2x)\cosh(2y) - 1 - j\sin(2x)\sinh(2y)$$

Para expresar f en función de z, aplicamos el truco $x = z$, $y = 0$

$$f(z) = \cos(2z) - 1$$

Pregunta 4

Sea $f(z) = \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\tan(z)}{z^3}$

(a) Determine el tipo de singularidad de $f(z)$ en los puntos $z_0 = 0$ y $z_1 = \pi/2$. (removible, esencial o polo, indicando el orden del polo).

(b) Calcule el residuo de $f(z)$ en z_0 y en z_1.

Solución

$$f(z) = \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\tan(z)}{z^3} = \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin(z)}{z^3 \cos(z)}$$

Saquemos este límite a ver que de orden es el polo, o si es removible.

$$\lim_{z \to 0} \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin(z)}{z} \frac{1}{\cos(z)} \frac{1}{z^2}$$

El límite tiende a infinito por el término z^2. El otro z dividiendo el sen(z) tiende a 1. Es un polo de orden 2. Obtengamos el residuo con series de Taylor.

$$\left(z - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin(z)}{z^3 \cos(z)} = \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin(z)}{z^3 \left(1 - \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \mathcal{O}(z^4)\right)\right)}$$

$$= \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin(z) \left(1 + \left(\frac{z^2}{2!} + \mathcal{O}(z^2)\right) \cdots\right)}{z^3}$$

$$= \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \mathcal{O}(z^3)\right) \left(1 + \left(\frac{z^2}{2!} + \mathcal{O}(z^2)\right) + \cdots\right)}{z^3}$$

$$= \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \mathcal{O}(z^2)\right) \left(1 + \left(\frac{z^2}{2!} + \mathcal{O}(z^2)\right) + \cdots\right)}{z^2}$$

Siguiendo el término z del primer parentesis que va a ser el término junto con $1/z^2$ da $1/z$, vemos que termina multiplicado por 1. El residuo en 0 es 1.

Para $z_1 = \frac{\pi}{2}$, sacamos el límite:

$$\lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin(z)}{z^3 \cos(z)} = \frac{8}{\pi^3} \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{\cos(z)} = -\frac{8}{\pi^3}$$

Es una singularidad *removible*. El residuo da 0.

Pregunta 5

Sean $z_1 = 1 + jA$, $z_2 = A + j$, $z_3 = 4 + 5Aj$. Determine los valores de la constante A para que $z_1 \cdot z_3 / z_2^*$ sea imaginario puro. Nota: z^* es el conjugado complejo de z.

Solución

$$\frac{z_1 z_3}{z_2^*} = \frac{(1+jA)(4+5Aj)}{A-j} = \frac{(1+jA)(4+5jA)(A+j)}{(A-j)(A+j)} = \frac{(1+jA)(4+5jA)(A+j)}{A^2+1}$$

Expandiendo el numerador

$$(1+jA)(4+5jA)(A+j) = \left(4+9Aj-5A^2\right)(A+j) = 4j-5A+4jA^2-5A^3$$

$$= -5A\left(1+A^2\right)+4j\left(1+A^2\right) = (-5A+4i)\left(1+A^2\right)$$

$$\frac{z_1 z_3}{z_2^*} = \frac{(-5A+4i)\left(1+A^2\right)}{1+A^2} = -5A+4i$$

De esta expresión, se puede obtener que para que sea puramente imaginaria, ocupamos que $A=0$

Pregunta 6

Utilice la fórmula integral de Cauchy para calcular

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=3}\frac{t\exp(tz)}{\left(z^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}z$$

Simplifique y deje la respuesta en términos de $\sin(t)$ y $\cos(t)$.

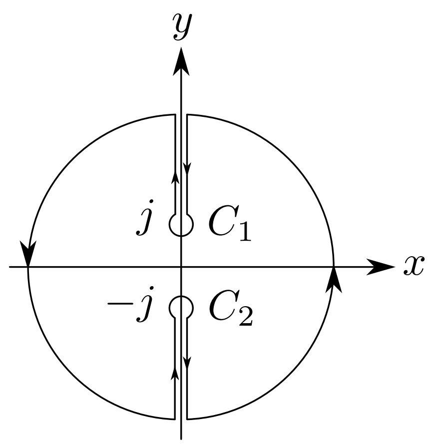


Figura 1.7: Contorno de integración.
Pregunta 6

Solución

Separamos el denominador en los 2 polos que se encuentran dentro del contorno $|z|=3$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=3}\frac{t\exp(tz)}{\left(z^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=3}\frac{t\exp(tz)}{(z-j)^2(z+j)^2}\,\mathrm{d}z$$

Integramos por la trayectoria de la Fig. 1.7 rodeando los polos. En esa trayectoria, cumple la igualdad:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=3}\frac{t\exp(tz)}{(z-j)^2(z+j)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{(z-j)^2}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi j}\oint_{C_2}\frac{g(z)}{(z+j)^2}\,\mathrm{d}z$$

Donde $f(z) = \dfrac{t\exp(tz)}{(z+j)^2}$ y $g(z) = \dfrac{t\exp(tz)}{(z-j)^2}$

Para evaluar las integrales del RHS, aplicamos la fórmula integral de Cauchy.

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-j)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f(z)\bigg|_{z=j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{t\exp(tz)}{(z+j)^2}\right)\bigg|_{z=j} = -\frac{1}{4}e^{jt}t(t+j)$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{C_2} \frac{g(z))}{(z+j)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}g(z)\bigg|_{z=-j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{t\exp(tz)}{(z-j)^2}\right)\bigg|_{z=-j} = -\frac{1}{4}e^{-jt}t(t-j)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=3} \frac{t\exp(tz)}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{4}e^{jt}t(t+j) - \frac{1}{4}e^{-jt}t(t-j) = -\frac{1}{4}t\left[e^{jt}(t+j) + e^{-jt}(t-j)\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\left[(\cos(t) + j\sin(t))\,(t+j) + (\cos(t) - j\sin(t))\right]$$

$$= \frac{1}{2}t\sin(t) - \frac{1}{2}t^2\cos(t)$$

1.8. I Parcial I Ciclo 2012

Pregunta 1

(a) Verifique que las imágenes de la función con dominio $\mathbb{C}, f(z) = z\exp(z) + z^*\exp(z^*)$ son números reales, es decir, que $f(z) \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}$.

(b) Verifique que la función compleja $f(z) = \tan(z)$ es impar.

Nota: $f(z)$ es impar si $f(-z) = -f(-z)$

Solución

(1.a)

$$z\exp(z) + z^*\exp(z^*) = (x+jy)\exp(x)(\cos(y) + j\sin(y)) + (x-jy)\exp(x)(\cos(y) - j\sin(y))$$

$$= \exp(x)\left[x\cos(y) + jx\sin(y) + jy\cos(y) - y\sin(y) + x\cos(y) - jx\sin(y) - jy\cos(y) - y\sin(y)\right]$$

$$= 2\exp(x)\left[x\cos(y) - y\sin(y)\right]$$

Vemos que la función $f(z) = z\exp(z) + z^*\exp(z^*) = 2\exp(x)\left[x\cos(y) - y\sin(y)\right]$ no tiene parte imaginaria. La función $f(z) \in \mathbb{R}$

(1.b)

$$\tan(z) = \frac{1}{j}\left(\frac{\exp(jz) - \exp(-jz)}{\exp(jz) + \exp(-jz)}\right)$$

$$\Rightarrow \tan(-z) = \frac{1}{j}\left(\frac{\exp(-jz) - \exp(jz)}{\exp(-jz) + \exp(jz)}\right) = -\frac{1}{j}\left(\frac{\exp(jz) - \exp(-jz)}{\exp(jz) + \exp(-jz)}\right) = -\tan(z)$$

$$\Rightarrow \tan(-z) = -\tan(z)$$

Pregunta 2

Utilizando residuos, verifique el siguiente resultado: dado $a \in \mathbb{R}$, que satisface $|a| < 1$, entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

Ayuda: La integral de contorno resultante tiene la misma cantidad de singularidades dentro del contorno que fuera de éste.

Solución

Consideremos

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

con la condición $|b| < a$, $0 < a$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\exp(j\theta) = z \Rightarrow \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{jz} \qquad \sin(\theta) = \frac{z + \dfrac{1}{z}}{2j}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} \frac{1}{a + \dfrac{b}{2j}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)} \frac{\mathrm{d}z}{jz} = \frac{2}{b}\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + \dfrac{j2a}{b}z - 1}\,\mathrm{d}z$$

Las soluciones de $z^2 + \dfrac{j2a}{b}z - 1 = 0$ son

$$z = \frac{\dfrac{-j2a}{b} \pm \sqrt{\dfrac{-4a^2}{b^2} + 4}}{2} = j\left(\frac{-a}{b} \pm \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)$$

Sean

$$z_1 = j\left(\frac{-a}{b} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right) \qquad z_2 = j\left(\frac{-a}{b} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)$$

Para saber que polo está dentro del contorno del contorno de integración, el círculo de radio 1, comparemos

$$z^2 + \frac{j2a}{b}z - 1 = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 + (-z_1 - z_2)z + z_1 z_2$$

$$z_1 z_2 = -1 \Rightarrow |z_1|\,|z_2| = 1 \Rightarrow |z_2| = \frac{1}{|z_1|}$$

La norma de z_1 podemos ver que es mayor a 1, por la condición que $a > b \Rightarrow a/b > 1$ y los 2 términos tienen el mismo signo, se alejan del origen.

$$|z_1| = \frac{a}{b} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} > \frac{a}{b} > 1$$

$$|z_1| > 1 \Rightarrow |z_2| = \frac{1}{|z_1|} < 1$$

El polo z_2 está dentro del contorno de integración. Obtengamos los residuos en z_2

$$\text{Res}\left[\frac{1}{z^2+\frac{j2a}{b}z-1}, z_2\right] = \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

$$= \lim_{z\to z_2}\frac{1}{z-z_1} = \frac{b}{2j\sqrt{a^2-b^2}}$$

Sumando los residuos obtemos

$$\Rightarrow \frac{2}{b}\oint \frac{1}{z^2+\frac{j2a}{b}z-1}\,\mathrm{d}z = \frac{2}{b}\;2\pi j\;\frac{b}{2j\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\frac{1}{a+b\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

Para la pregunta del examen, $a\to 1$, $b\to a$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\frac{1}{1+a\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

Pregunta 4

Sea $f(z) = z^2+(x-1)^2+j(y-1)^2$.

(a) ¿ En qué puntos del plano complejo $f(z)$ es diferenciable?

(b) ¿ En qué puntos del plano complejo $f(z)$ es analítica?

(c) Calcule, si existe, las derivadas: $f'(1-j)$ y $f'(1+j)$

Solución

$$f(z) = z^2+(x-1)^2+j(y-1)^2 = (x+jy)^2+(x-1)^2+j(y-1)^2 = x^2-y^2+(x-1)^2+j(2xy+(y-1)^2)$$

$$f(z) = x^2-y^2+(x-1)^2+j\left[2xy+(y-1)^2\right]$$

$$u(x,y) = x^2-y^2+(x-1)^2 \qquad v(x,y) = 2xy+(y-1)^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x+2x-2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x+2y-2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x+2x-2 = 2x+2y-2 = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow y = x$$

Con esto, tenemos la resticción que $y=x$ para que cumpla con las condiciones de C-R, además de tener sus derivadas parciales continuas.

La función es diferenciable a lo largo de la recta $y=x$. Para ser analítica, tiene que ser diferenciable en un vecindario de cada punto de la recta $y = x$, una recta no cumple con esta condición. $f(1-j)$ no existe, ya que $1 - j$ no está contenido en la recta $y = x$.

En el punto $1 - j$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=1+j} = \left.\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=1,y=1} = 2 + 2j$$

Pregunta 5

Utilice residuos para calcular $\displaystyle\int_{|z-\pi|=4} \frac{1}{z^2\sin(z)}\,\mathrm{d}z$

Solución

Los polos dentro del contorno son $0, \pi, 2\pi$.

Para el residuo en 0

$$\frac{1}{z^2\sin(z)} = \frac{1}{z^2\left(z + \frac{z^3}{3!} + \mathcal{O}(z^3)\right)} = \frac{1}{z^3\left(1 - \left(\frac{z^2}{3!} + \mathcal{O}(z^2)\right)\right)}$$

$$= \frac{1 + \left(\frac{z^2}{3!} + \mathcal{O}(z^2)\right) + \cdots}{z^3}$$

Siguiendo el z^2 en el numerador para obtener el z^{-1} obtenemos

$$= \cdots + \frac{1}{3!}\frac{1}{z}\cdots \Rightarrow \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2\sin(z)}, 0\right] = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

Los polos en $\pi,\ 2\pi$ son de orden 1.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2\sin(z)}, z_k\right] = \lim_{z\to z_k}\frac{(z-z_k)}{z^2\sin(z)} = \frac{1}{z_k^2}\lim_{z\to z_k}\frac{1}{\cos(z)} = \frac{1}{z_k^2\cos(z_k)}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2\sin(z)}, \pi\right] = -\frac{1}{\pi^2} \qquad \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2\sin(z)}, 2\pi\right] = \frac{1}{4\pi^2}$$

$$\oint_{|z-\pi|=4}\frac{1}{z^2\sin(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\sum\operatorname{Res} = 2\pi j\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2}\right)$$

1.9. I Parcial II Ciclo 2012

Pregunta 1

Resolver las siguientes ecuaciones encontrar todas las soluciones

(a) $\cos(z) = 1 + j$

(b) $\exp(jz^*) = \exp[jz]^*$, donde z^* es el conjugado de z.

Solución

(1.a) Para encontrar $\arccos(z)$ hagamos $z = \cos(w) \Rightarrow \arccos(z) = w$. Por otro lado.

$$\cos(w) = \frac{\exp(jw) + \exp(-jw)}{2} = z \Rightarrow \exp(2jw) + 1 = 2z\exp(jw)$$

$$\Rightarrow (\exp(jw))^2 - 2z\exp(jw) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \exp(jw) = \frac{2z + \sqrt{4z^2 - 4}}{2} = z + \sqrt{z^2 - 1} \Rightarrow jw = \log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$\Rightarrow w = -j\log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) = \arccos(z)$$

Ahora evaluamos en $z = 1 + j$

$$\arccos(1 + j) = -j\log\left(1 + j\sqrt{(1 + j)^2 - 1}\right) = -i\log\left[1 + j + \sqrt{-1 + 2j}\right]$$

La parte dentro de la raíz dentro del logaritmo es

$$-1 + 2j = 5^{\frac{1}{2}}\exp\left[i\left(\pi - \arctan(2)\right)\right]$$

Cuidando que el $-1 + 2j$ está en el segundo cuadrante: $-X$ y $+Y$. Aplicandole la raíz, se obtiene

$$\sqrt{-1 + 2j} = 5^{\frac{1}{4}}\exp\left[j\frac{\pi - \arctan(2)}{2} + jk\pi\right]$$

Usando[6] valores de $k = -1, 0$

La expresión toma la forma

$$= -j\log\left[1 + j + 5^{\frac{1}{4}}\exp\left(j\frac{\pi - \arctan(2)}{2} + jk\pi\right)\right]$$

$$-j\log\left[1 + 5^{\frac{1}{4}}\cos\left[\frac{\pi - \arctan(2)}{2} + k\pi\right] + j\left(1 + 5^{\frac{1}{4}}\sin\left[\frac{\pi - \arctan(2)}{2} + k\pi\right]\right)\right]$$

Ahora podemos obtener el logaritmo ya que lo divimos en la parte real e imaginaria, tomando la norma y el argumento de lo que está en el logaritmo

$$= -j\left[\ln\left(\sqrt{\left(1 + 5^{\frac{1}{4}}\cos\left[\frac{\pi - \arctan(2)}{2} + k\pi\right]\right)^2 + \left(1 + 5^{\frac{1}{4}}\sin\left[\frac{\pi - \arctan(2)}{2} + k\pi\right]\right)^2}\right)\right.$$
$$\left. + j\left[\arctan\left(\frac{1 + 5^{\frac{1}{4}}\sin\left[\frac{\pi - \arctan(2)}{2} + k\pi\right]}{1 + 5^{\frac{1}{4}}\cos\left[\frac{\pi - \arctan(2)}{2} + k\pi\right]}\right) + 2n\pi\right]\right]$$

Con $n \in \mathbb{Z}$

Lo cual sería la respuesta [7]

[6] Esos valores para que el argumento esté en el rango $]-\pi, \pi]$ para efectos del curso, de otro modo si fuera el argumento con $[0, 2\pi[$ se hubiera tomando los valores $k = 0, 1$

[7] Queda distribuir el j para que quede de la forma estandar $z = x + jy$, pero ya está hecho lo dificil.

(1.b)

$$\begin{aligned} e^{jz^*} &= \left(e^{jz}\right)^* \\ e^{j(x-jy)} &= \left(e^{j(x+jy)}\right)^* e^{j2k\pi} \\ e^{y+jx} &= e^{-y+j(-x+2k\pi)} \end{aligned}$$

Igualamos los exponentes, que pueden diferir por una diferencia de $2\pi kj$ con $k \in \mathbb{Z}$.

$$y = -y \Rightarrow y = 0$$

$$x = -x + 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$$

$$z = k\pi$$

Pregunta 2

Muestre que $\left(\dfrac{1 + j\tan(\theta)}{1 - j\tan(\theta)}\right)^n = \dfrac{1 + j\tan(n\theta)}{1 - j\tan(n\theta)}$

Solución

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + j\tan(\theta)}{1 - j\tan(\theta)}\right)^n = \left(\frac{\cos(\theta) + j\sin(\theta)}{\cos(\theta) - j\sin(\theta)}\right)^n = \left(\frac{e^{j\theta}}{e^{-j\theta}}\right)^n = \frac{e^{nj\theta}}{e^{-nj\theta}} = \frac{\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)}{\cos(n\theta) - j\sin(n\theta)} \\ = \frac{1 + j\tan(n\theta)}{1 - j\tan(n\theta)} \end{aligned}$$

Pregunta 3

Utilice la fórmula integral de Cauchy para calcular $\displaystyle\int_C \frac{1}{e^z\left(z^2-1\right)^2}\,\mathrm{d}z$, C es un cuadrado con vértices en $z = \pm 2$, $z = \pm 2j$ orientada positivamente.

Solución

$$\oint_C \frac{1}{e^z\left(z^2-1\right)^2}\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{g(z)}{(z+1)^2}\,\mathrm{d}z$$

Donde C_1 y C_2 rodean 1 y -1 respectivamente y $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{(z+1)^2}$ y $g(z) = \dfrac{e^{-z}}{(z-1)^2}$

$$\oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{e^{-z}}{(z+1)^2}\right]\Bigg|_{z=1} = -\frac{\pi j}{e}$$

$$\oint_{C_2} \frac{g(z)}{(z+1)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\right]\Bigg|_{z=-1} = 0$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{1}{e^z\left(z^2-1\right)^2}\,\mathrm{d}z = -\frac{\pi j}{e}$$

Pregunta 4

Sea $u(x,y) = \cos(x)\cosh(x)$.

(a) Demuestre que $u(x, y) =$ es armónica.

(b) Encuentre el conjugado armónico $v(x, y)$ de $u(x, y)$.

(c) Determine la función analítica $f(z) = u + jv$, y exprésela en términos de z, si $f(0) = 1 + 2j$

Solución

(4.a) Comprobemos que $\nabla^2 u(x, y) = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\cos(x)\cosh(x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos(x)\cosh(x)$$

Sumamos los términos

$$\nabla^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\cos(x)\cosh(x) + \cos(x)\cosh(x) = 0$$

(4.b) Ver **I Parcial I Ciclo 2011 Pregunta 3**, se hacen los mismos procedimientos. Se obtiene

$$f(x, y) = \cos(x)\cosh(y) - j\sin(x)\sinh(y) + K$$

(4.c)

$$f(0) = 1 + 2j = 1 + K \Rightarrow K = 2j$$

$$\Rightarrow f(x, y) = \cos(x)\cosh(y) - j\sin(x)\sinh(y) + 2j = \cos(x)\cosh(y) + j\left(-\sin(x)\sinh(y) + 2\right)$$

Aquí usamos la identidad $\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - j\sin(x)\sinh(y)$ para dejarlo solo en términos de z

$$\Rightarrow f(z) = \cos(z) + 2j$$

Pregunta 5

Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_C z^* \,\mathrm{d}z$ donde C es el triángulo con vértices en $z = 1$, $z = j$, $z = -1$, orientado positivamente, en donde z^* es el conjugado de z.

Solución

$$\oint_C z^* \,\mathrm{d}z = \oint_C (x - jy)(\mathrm{d}x + j\mathrm{d}y)$$

$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$$

$$C_1 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & t & \Rightarrow & \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ y & = & 0 & \Rightarrow & \mathrm{d}y & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \int_{C_1} (x - jy)(\mathrm{d}x + j\mathrm{d}y) = \int_{-1}^{1} x \,\mathrm{d}x = 0$$

$$C_2 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & 1 - t & \Rightarrow & \mathrm{d}x & = & -\mathrm{d}t \\ y & = & t & \Rightarrow & \mathrm{d}y & = & \mathrm{d}t \end{array} \right. \Rightarrow \int_{C_2} (x - jy)(\mathrm{d}x + j\mathrm{d}y) = \int_0^1 \left[(1 - t) - jt\right](\mathrm{d}t + j\mathrm{d}t) = j$$

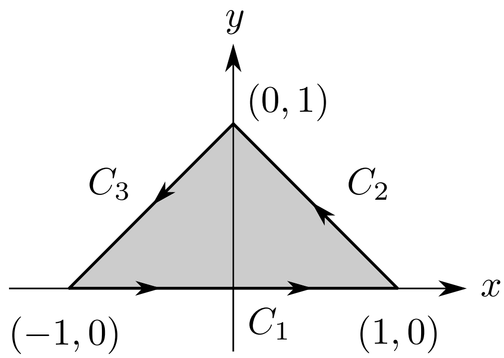


Figura 1.8: Contorno de integración.

Problema 5

$$C_3 = \begin{cases} x = -t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \\ y = 1-t \Rightarrow \mathrm{d}y = -\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \int_{C_3} z^* \,\mathrm{d}z = -\int_0^1 \left[-t - j(1-t)\right](\mathrm{d}t + j\mathrm{d}t) = j$$

$$\Rightarrow \oint_C z^* \,\mathrm{d}z = 0 + j + j = 2j$$

Método alternativo: El teorema de Green en el plano complejo

$$\oint_{\partial A} B(z, z^*) \,\mathrm{d}z = 2j \iint_A \frac{\partial B}{\partial z^*} \,\mathrm{d}A$$

Ya que $\partial B/\partial z^* = 1$, el la integral se transforma en $\oint_{\partial A} z^*\mathrm{d}z = 2j \iint_A \mathrm{d}A$. La integral es el area de la trayectoria, esta área del triangulo es igual a 1.

$$\oint_{\partial A} z^*\mathrm{d}z = 2j \iint_A \mathrm{d}A = 2j$$

Da lo mismo, como se esperaba.

Pregunta 6

Utilice rediduos para calcular la integral $\int_{|z|=4} \frac{1}{(z-\pi)\sin(z)} \,\mathrm{d}z$

Solución

Los polos dentro de la trayectoria son $0, \pi, -\pi$. 0 y $-\pi$ son polos de orden 1.

$$\text{Res}\left[\frac{1}{(z-\pi)\sin(z)}, 0\right] = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(z-\pi)} \frac{(z)}{\sin(z)} = -\frac{1}{\pi}$$

$$\text{Res}\left[\frac{1}{(z-\pi)\sin(z)}, \pi\right] = \lim_{z\to -\pi} \frac{1}{(z-\pi)} \frac{(z+\pi)}{\sin(z)} = \frac{1}{2\pi}$$

Para el residuo en π expandamos en serie centrada en π y utilicemos $\sin(z) = -\sin(z-\pi)$

$$\frac{1}{(z-\pi)\sin(z)} = -\frac{1}{(z-\pi)\sin(z-\pi)} = -\frac{1}{(z-\pi)\left((z-\pi) - \frac{(z-\pi)^3}{3!} + \mathcal{O}\left((z-\pi)^3\right)\right)}$$

$$= -\frac{1}{(z-\pi)^2\left(1-\left(\frac{(z-\pi)^2}{3!}+\mathcal{O}\left((z-\pi)^2\right)\right)\right)} = \frac{1+\left(\frac{(z-\pi)^2}{3!}+\mathcal{O}\left((z-\pi)^2\right)\right)^2+\cdots}{(z-\pi)^2}$$

Vemos que hay término con el coeficiente $\frac{1}{z-\pi}$, el residuo en π es 0, ya que todas las potencias de $(z-\pi)$ son pares.

$$\oint_{|z|=4} \frac{1}{(z-\pi)\sin(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\left(-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2\pi}\right) = -j$$

1.10. I Parcial II Ciclo 2013

Pregunta 1

Calcular:

(a) $\dfrac{j+j^2+j^3+j^4+j^5+j^6}{2+3j}$

(b) Grafique las raíces cúbicas de $z_1^* z_2$ si $z_1 = 3j$, $z_2 = 2+2j$

Solución

(1.a)

$$\frac{j+j^2+j^3+j^4+j^5+j^6}{2+3j} = \frac{j-1-j+1+j-2}{2+3j} = \frac{-1+j}{2+3j} = \frac{-1+j}{2+3j}\cdot\frac{2-3j}{2-3j}$$

$$= \frac{-2+3+j\,(2+3)}{4+9} = \frac{1}{13}+j\frac{5}{13}$$

$$\Rightarrow \frac{j+j^2+j^3+j^4+j^5+j^6}{2+3j} = \frac{1}{13}+j\frac{5}{13}$$

(1.b) Si $z_1 = 3j$ y $z_2 = 2+2j$

$$z_1^* z_2 = -3j\,(2+2j) = 6-6j = 6(1-j) = 6\sqrt{2}\left(\frac{1-6}{\sqrt{2}}\right) = (72)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{-j\pi}{4}\right)$$

Obtengamos las raices cúbicas. Sea w_k una de las raices tal, con

$$w_k^3 = (72)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{-j\pi}{4}+j2k\pi\right) \Rightarrow w_n = (72)^{\frac{1}{6}}\exp\left(\frac{-j\pi}{12}+j\frac{2k\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow w_0 = (72)^{\frac{1}{6}}\exp\left(\frac{-j\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow w_1 = (72)^{\frac{1}{6}}\exp\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow w_2 = (72)^{\frac{1}{6}}\exp\left(\frac{j15\pi}{12}\right)$$

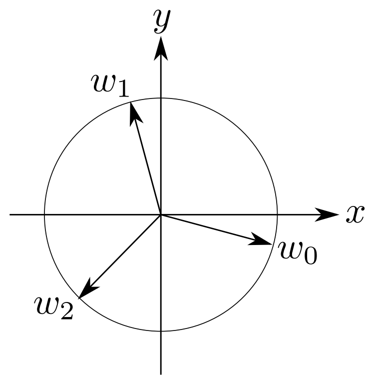


Figura 1.9: Raices de $z_1^* z_2 = 0$.
Problema (1.b)

Pregunta 2

Utilice residuos para calcular la integral real $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

Solución

Ver **I Parcial II Ciclo 2008 (5.b)** donde se demuestra que $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a\sqrt{2}}$. Cambiando los límites de 0 a ∞ dividiendo entre 2 ya que la función que se está integrnado es par, y haciendo que $a \to 1$, tenemos

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Pregunta 3

Para $z = x + jy$, considere la siguiente función: $f(z) = x^2 + jy^2$.

(a) En qué puntos del plano complejo $f(z)$ es diferenciable?

(b) En qué puntos del plano complejo $f(z)$ es analítica?

(c) Calcule la derivada de $f(z)$ en los puntos donde $f(z)$ es diferenciable.

Solución

(3.a) Vemos que $u(x,y) = x^2$ y $v(x,y) = y^2$. Aplicamos las condiciones de C-R.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

Con las condiciones de Cauchy-Riemann obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = 2y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow x = y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Para que exista la derivada, tenemos la restricción que $x = y$. A lo largo de esa recta, la derivada existe.

(3.b) La función no es analítica. Para ser analítica tiene que ser diferenciable en un vencindario en cada punto de la recta. La recta no cumple con esto.

(3.c) Aplicando la restricción que $x = y$ a la derivada para obtener los puntos donde es diferenciables

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = 2x$$

Para asegurarnos, apliquemos la derivada de otra forma

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y} = 2y = 2x$$

Donde usamos la restricción $y = x$, obtenemos el mismo resultado.

Pregunta 4

Utilice residuos para calcular las siguientes integrales complejas:

$$\oint_{|z|=4} \frac{\sin(z)}{\sinh(z)}\,\mathrm{d}z \qquad \oint_{|z|=1} \frac{1}{z\sin(z)\arctan(z)}\,\mathrm{d}z$$

Solución

(4.a) Necesitamos los puntos donde $\sinh(z)$ es 0. Está la solucioón trivial donde $z = 0$, pero aquí el argumento del sinh es complejo, hay mas lugares que considerar que solo $z = 0$. Esto podemos averigualo haciendo el cambio

$$\sinh(jz) = \frac{\exp(jz) - \exp(-jz)}{2} = j\sin(z)$$

La función $\sinh(jz)$ es 0 donde $\sin(z)$ es 0. Para el $\sin(z) = 0 \Rightarrow z = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Los 0 de la función $\sinh(z)$ están ubicados en $z = 2k\pi j$. Dentro de la trayectoria de integración, están $-2\pi j, 0$ y $2\pi j$ En 0, vemos que es una singularidad removible probando que el límite existe.

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{\sinh(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z}\frac{z}{\sinh(z)} = 1$$

Los otros 2 polos son de orden 1. Saquemos los residuos en los polos. Sea z_k un polo arbitrario.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sin(z)}{\sinh(z)}, z_k\right] = \lim_{z\to z_k}(z - z_k)\frac{\sin(z)}{\sinh(z)} = \sin(z_k)\lim_{z\to z_k}\frac{z - z_k}{\sinh(z)} = \sin(z_k)\lim_{z\to z_k}\frac{1}{\cosh(z)} = \frac{\sin(z_k)}{\cosh(z_k)}$$

$$\oint_{|z|=4} \frac{\sin(z)}{\sinh(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\sum \operatorname{Res} = 2\pi j\left(\frac{\sin(-2\pi j)}{\cosh(-2\pi j)} + \frac{\sin(2\pi j)}{\cosh(2\pi j)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=4} \frac{\sin(z)}{\sinh(z)}\,\mathrm{d}z = 0$$

Aquí aprovechamos el hecho que el seno es impar y el coseno hiperbólico es par para reducir rápido a 0.

(4.b)

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z\sin(z)\arctan(z)}\,\mathrm{d}z$$

En la pregunta **I Parcial I Ciclo 2010 Pregunta (6.a)** obtuvimos el residuo de $\dfrac{1}{z\sin(z)\arctan(z)}$ en 0, que da 1/2

$$\Rightarrow \oint_{|z|=1} \frac{1}{z\sin(z)\arctan(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j \sum \mathrm{Res} = \pi j$$

Pregunta 5

Hallar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

(a) $\sin(z) = \cosh(4)$

(b) $\cos(z) = 2$

Solución

(5.a) Hay que encontrar $\arcsin(w)$. Invirtamos haciendo $\sin(z) = w$

$$\sin(z) = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = w \Rightarrow \left(e^{jz}\right)^2 - 1 = 2jwe^{jz} \Rightarrow \left(e^{jz}\right)^2 + 2jwe^{jz} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^{jz} = \frac{2wj + \sqrt{-4w^2+4}}{2} = 2wj + \sqrt{1-w^2} \Rightarrow z = -j\log\left(2wj + \sqrt{1-w^2}\right)$$

Para el problema $\sin(z) = \cosh(4)$, evaluamos con $w = \cosh(4)$. Ya que $\cosh(4) > 1$, voy a sacar un j de la raíz de una vez.

$$\Rightarrow z = -j\log\left(i\cosh(4) + j\sqrt{\cosh^2(4)-1}\right)$$

$$= -j\left[\ln\left(\cosh(4) + \sqrt{\cosh^2(4)-1}\right) + j\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) - j\left(\cosh(4) + \sqrt{\cosh^2(4)-1}\right)$$

(5.b) En el **I Parcial II Ciclo 2012 Pregunta (1.a)** probamos que $\operatorname{arc}\cos(z) = -j\log\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$

$$\cos(z) = 2 \Rightarrow z = -j\log\left(2+\sqrt{3}\right) = -j\left[\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + 2k\pi j\right]$$

$$\Rightarrow z = 2k\pi - j\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

Pregunta 6

Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_C \pi\exp\left(\pi z^*\right)\,\mathrm{d}z$, si C es el cuadrado con vértices den los puntos $z = 0, z = 1, z = 1+j, z = j$ con orientación positiva (antihoraria) y z^* es el conjugado de z.

Solución

La integral $\displaystyle\oint_C \pi\exp\left(\pi z^*\right)\,\mathrm{d}z$ en función de x y y es $\displaystyle\oint_C \pi\exp\left[\pi\left(x - jy\right)\right]\,\left(\mathrm{d}x + j\mathrm{d}y\right)$

Dividimos la integral en 4 trayectorias. $\displaystyle\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$ y parametrizamos para cada C_i

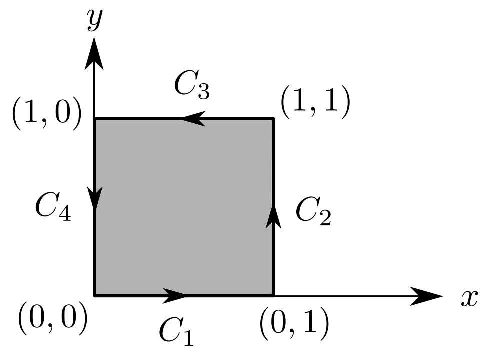


Figura 1.10: Trayectoria de integración.

Pregunta 6

$$C_1 = \begin{cases} x = t \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ y = 0 \Rightarrow \mathrm{d}y = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_{C_1} \pi \exp(\pi z^*)\ \mathrm{d}z = \int_0^1 \pi \exp(\pi t)\ \mathrm{d}t = (e^{\pi} - 1)$$

$$C_2 = \begin{cases} x = 1 \Rightarrow \mathrm{d}x = 0 \\ y = t \Rightarrow \mathrm{d}y = \mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \int_{C_2} \pi \exp(\pi z^*)\ \mathrm{d}z = \int_0^1 \pi \exp(\pi - t\pi j)\ j\mathrm{d}t = 2e^{\pi}$$

$$C_3 = \begin{cases} x = t \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ y = 1 \Rightarrow \mathrm{d}y = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_{C_3} \pi \exp(\pi z^*)\ \mathrm{d}z = \int_1^0 \pi \exp(\pi t - \pi j)\ \mathrm{d}t = (e^{\pi} - 1)$$

$$C_4 = \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \mathrm{d}x = \\ y = t \Rightarrow \mathrm{d}y = \mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \int_{C_4} \pi \exp(\pi z^*)\ \mathrm{d}z = \int_1^0 \pi \exp(-t\pi j)\ j\mathrm{d}t = -2$$

$$\oint_C \pi \exp(\pi z^*)\ \mathrm{d}z = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = (e^{\pi} - 1) + 2e^{\pi} + (e^{\pi} - 1) - 2 = 4(e^{\pi} - 1)$$

$$\Rightarrow \oint_C \pi \exp(\pi z^*)\ \mathrm{d}z = 4(e^{\pi} - 1)$$

Método Alternativo: Teorema de Green en el plano complejo

$$\oint_{\partial A} B(z, z^*)\ \mathrm{d}z = 2j \iint_A \frac{\partial B}{\partial z^*}\ \mathrm{d}A$$

$$\oint_{\partial A} \pi \exp(\pi z^*)\ \mathrm{d}z = 2j \iint_A \frac{\partial}{\partial z^*} \left[\pi \exp^{\pi z^*}\right]\ \mathrm{d}A = 2\pi^2 j \iint_A e^{x\pi - jy\pi}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\pi^2 j \left[\int_0^1 e^{x\pi}\ \mathrm{d}x\right] \left[\int_0^1 e^{-y\pi j}\ \mathrm{d}y\right] = 4(e^{\pi} - 1)$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial A} \pi \exp(\pi z^*)\ \mathrm{d}z = 4(e^{\pi} - 1)$$

1.11. I Parcial II Ciclo 2014

Pregunta 1

(a) Si $z_1 = \frac{3}{2} - j\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} + j\frac{\sqrt{6}}{2}$, $z_3 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\exp\left(\frac{-3\pi j}{4}\right)$.

Determine $\dfrac{\text{Re}\{z_1\}\,\text{Im}\{z_2^*\}\,(z_3)^3}{|z_3^*|\,(z_2^*)^2}$

(b) Determine todas las soluciones de la ecuación $z^4 + 1 = 0$ y grafique en el plano complejo.

Solución

(1.a) Pasemos primero el z_2 en forma polar. $\Rightarrow z_2 = \sqrt{3}\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)$. De aquí en la expresión solo ocupamos las magnitudes y nada mas restamos los exponentes

$$\text{Re}\{z_1\} = \frac{3}{2} \qquad \text{Im}\{z_2^*\} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{\text{Re}\{z_1\}\,\text{Im}\{z_2^*\}\,(z_3)^3}{|z_3^*|\,(z_2^*)^2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\exp\left(\frac{-3\pi j}{4}\right)\right)^3}{\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}\exp\left(\frac{-j\pi}{4}\right)\right)^2} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^2\exp\left(-\frac{9\pi j}{4} + \frac{2\pi j}{4}\right)$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^2\exp\left(-\frac{7\pi j}{4}\right) = -\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^2\exp\left(\frac{\pi j}{4}\right)$$

En el último paso, se sumó $2\pi j$ al exponente para que quede dentro del rango $]-\pi,\pi]$

(1.b)

$$z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z^4 = -1 = \exp(j\pi + 2kj\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow z = \exp\left(\frac{j\pi}{4} + \frac{kj\pi}{2}\right) \qquad k = 0,1,2,3$$

Sea w_k las distintas soluciones de z que van con los valores de k

$$w_0 = \exp\left(\frac{j\pi}{4}\right) \qquad w_1 = \exp\left(\frac{j3\pi}{4}\right)$$

$$w_2 = \exp\left(\frac{j5\pi}{4}\right) \qquad w_3 = \exp\left(\frac{j7\pi}{4}\right)$$

El gráfico se muestra en la Fig. 1.11

Pregunta 2

Utilice residuos para calcular las siguientes integrales reales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{\sqrt{2}}\right)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{\sqrt{2}}\right)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$$

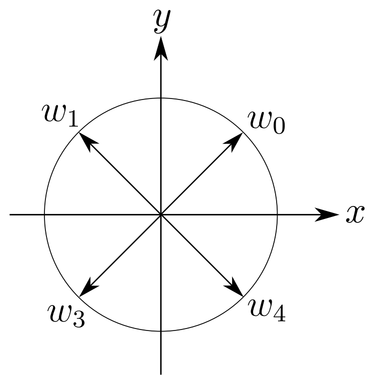


Figura 1.11: Raices $z^4 + 1 = 0$.
Pregunta (1.b)

Solución

Evaluemos la integral con letras para hacerlo más general. Sean $a > 0$, $b > 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$, hagamos las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^4 + b^4}\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x^4 + b^4}\,\mathrm{d}x$$

Con el contorno de integración de la Fig. 1.12. De aquí usamos la integral con el exponencial e igualamos las partes reales e imaginarias para obtener la integral con seno y coseno

$$\oint \frac{e^{iaz}}{z^4 + b^4}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^4 + b^4}\,\mathrm{d}x + \oint_{C_2} \frac{e^{iaz}}{z^4 + b^4}\,\mathrm{d}z$$

La integral por C_2 tiende a 0 a medida que $R \to \infty$, y usados los residuos para obtener el valor de la integral cerrada. Por lo que tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^4 + b^4}\,\mathrm{d}x = 2\pi j \sum \mathrm{Res}$$

Los polos dentro de contorno de integración son

$$z_0 = b \exp\left(\frac{\pi j}{4}\right) \qquad z_1 = b \exp\left(\frac{3\pi j}{4}\right)$$

Los polos son todos de orden 1. Ahora obtenemos los residuos en z_0 y z_1

$$\mathrm{Res}\left[\frac{e^{jaz}}{z^4 + b^4}, z_k\right] = \lim_{z \to z_k} (z - z_k) \frac{e^{iaz}}{z^4 + b^4} = e^{iaz_k} \lim_{z \to z_k} \frac{1}{4z^3} = \frac{e^{iaz_k}}{4z_k^3}$$

Sea $n = 1$ para el residuo de z_0 y $n = 3$ para el residuo de z_1. Para obtener una forma un poco mejor del residuo y no copiar todo 2 veces.

Los residuos son

$$\frac{1}{4}\frac{\exp(jaz_k)}{z_k^3} = \frac{1}{4}\frac{\exp\left(jab\exp\left(\frac{n\pi j}{4}\right)\right)}{b^3 \exp\left(\frac{3n\pi}{4}\right)} = \frac{1}{4b^3}\exp\left(jab\exp\left(\frac{nj\pi}{4}\right) - \frac{3n\pi j}{4}\right)$$

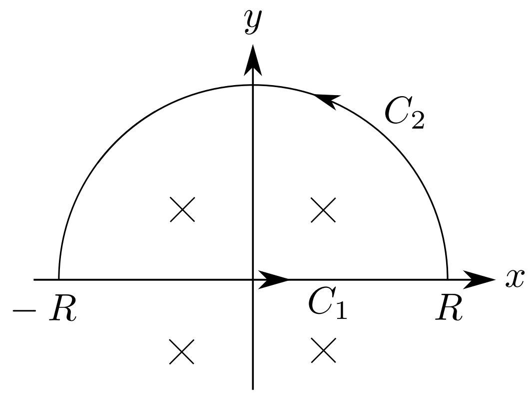


Figura 1.12: Contorno de integración y los polos.
Pregunta 2

$$= \frac{1}{4b^3}\exp\left(jab\left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+j\sin\left(\frac{n\pi j}{4}\right)\right]-\frac{3n\pi j}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4b^3}\exp\left(-ab\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\exp\left[j\left(ab\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)-\frac{3n\pi}{4}\right)\right]$$

De aquí sustituimos por $n = 1$ y $n = 3$ y sumamos los residuos

$$\frac{1}{4b^3}\exp\left(-ab\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\exp\left[j\left(ab\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3\pi}{4}\right)\right]+\frac{1}{4b^3}\exp\left(-ab\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\exp\left[j\left(ab\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\frac{9\pi}{4}\right)\right]$$

Usamos $\sin(\pi/4) = \sin(3\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ y sacamos a factor común

$$\sum \text{Res} = \frac{1}{4b^3}\exp\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\left[\exp\left[j\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)\right]+\exp\left[j\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{9\pi}{4}\right)\right]\right]$$

Ocupemonos de los exponenciales complejos ahora

$$\exp\left[j\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)\right]+\exp\left[j\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{9\pi}{4}\right)\right]$$

$$\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)+j\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{9\pi}{4}\right)+j\sin\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{9\pi}{4}\right)$$

Usamos $\cos(-x) = \cos(x)$ y $\sin(-x) = -\sin(x)$, y las identidades

$$\cos(u \pm v) = \cos(u)\cos(v) \mp \sin(u)\sin(v)$$

$$\sin(u \pm v) = \sin(u)\cos(v) \pm \cos(u)\sin(v)$$

Y cambiamos los $9\pi/4$ a $\pi/4$, ya que dentro del coseno o seno, estos difieren de 2π, por lo que dan lo mismo.

Separemos parte real e imaginaria primero y sacamos signo del cos y sin

$$\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)+j\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)-j\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)+j\left[\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Ahora expandimos. La parte real da 0.

$$\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=0$$

La parte compleja da

$$\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$=-\frac{2}{\sqrt{2}}\left[\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)+\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Ahora, ya que tenemos los residuos, ya podemos obtener el valor de la integral

$$\sum \text{Res}=-j\frac{1}{4b^3}\exp\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\frac{2}{\sqrt{2}}\left[\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)+\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\right]$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x^4+b^4}\,\mathrm{d}x=\oint\frac{e^{iaz}}{z^4+b^4}\,\mathrm{d}z=2\pi j\sum \text{Res}$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x^4+b^4}\,\mathrm{d}x=2\pi j\left[-j\frac{1}{4b^3}\exp\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\frac{2}{\sqrt{2}}\left[\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)+\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\right]\right]$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x^4+b^4}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{b^3}\exp\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\left[\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)+\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Expandimos la integral es su parte real e imaginaria

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(ax)}{x^4+b^4}\,\mathrm{d}x+j\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{x^4+b^4}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{b^3}\exp\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\left[\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)+\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Y de igualdad obtenemos

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(ax)}{x^4+b^4}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{b^3}\exp\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\left[\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)+\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\right]$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{x^4+b^4}\,\mathrm{d}x=0$$

De aquí obtenemos más general el resultado de la **I Parcial II Ciclo 2008 5.c**

Para comprobar que no nos equivocamos, que es un procedimiento algo largo, en el libro de referencia: Gradshteyn, I. S., and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press 2014, viene la fórmula **3.727.1**:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(ax)}{x^4+b^4}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\pi}{b^3}\exp\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\left[\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)+\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Esta integral va de 0 a ∞, y ya que la integral de coseno es par, esto es la mitad de la integral que obtuvimos, lo cual es equivalente. La respuesta está bien.

Solo nos queda evaluar cambiando $a = \pi\sqrt{2}$ y $b = 1$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}x\right)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}x\right)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = 0$$

Pregunta 3

Considere la función $f(z) = (x-y)^2 + 2j(x+y)$, para $z = x + jy$. Determine la región del plano complejo en donde:

(a) Se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

(b) La función $f(z)$ es diferenciable, y calcular la derivada $f'(z)$ en dicha región.

(c) La función $f(z)$ es analítica.

Solución

(3.a) La función $f(z)$ ya está separada en su parte real e imaginaria. Con el formato de $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$, vemos rápido

$$u(x,y) = (x-y)^2 \qquad v(x,y) = 2(x+y)$$

Obtenemos las derivadas para aplicar las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x-y) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2(x-y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2$$

Condiciones de C-R:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2(x-y) = 2 \Rightarrow y = x - 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -2(x-y) = -2 \Rightarrow y = x - 1$$

Las condiciones de C-R se cumplen a lo largo de la recta $y = x - 1$

(3.b) La función $f(z)$ es diferenciable donde se cumplen las condiciones de C-R, a lo largo de la recta $y = x - 1$. Obtenemos la derivada derivando con respecto a x

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = 2(x-y) + 2j$$

Sustituimos $y = x - 1$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = 2 + 2j$$

Podemos obtener el mismo resultado aplicando la derivada

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = -j\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -j\left[-2\left(x-y\right)\right] + 2$$

y volvemos a aplicar la condición $y = x - 1$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = -j(-2) + 2 = 2 + 2j$$

Se obtiene lo mismo **Comentario:** Es bueno notar las cosas de *que no hacer*. Resolviendo esto primero tuve la idea de sustituir la condición $y = x - 1$

$$\Rightarrow f(z) = f(x) = (x - (x-1))^2 + j2(x + x - 1) = 1 + j2(2x-1)$$

y aplicamos la derivada

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = 4j$$

Pero viene lo extraño, antes obtuvimos que la derivada vale $2+2j$. Con el método erroneo de aplicar la restricción desde antes que parece bueno hacer, se obtiene una derivada diferente de $4j$. Una de las maneras tiene que estar mal. Este mismo error se puede obtener si se tratara la derivada $\mathrm{d}f/\mathrm{d}z$ como si fuera una derivada total de x, tomando de antemano que y es función de x y evaluando la derivada haciendo

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$$

Aplicando eso (erróneamente), tambien se obtendría que la derivada vale $4j$. El problema es que al derivar con respecto a z con la dirección de $\Delta y = 0$, en el límite de mandar el $\Delta x \to 0$ no es una derivada *total* de x. El error aproposito sí tiene implicito el cambio en y a medida que cambia x, pero eso no es mantener $\Delta y = 0$.

Para asegurarnos que no da $4j$ y si el primer resultado obtenido, usemos otra ruta, se podría aplicar está identidad, obtenida de *Wolfram MathWorld*[8]

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - j\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

Aplicando las derivadas y luego las condiciones de C-R, se obtiene el resultado que la derivada vale $2+2j$ sobre la recta. Lo "dejare al lector" comprobarlo por este método.[9]

(3.c) La función no es analítica, en ningún lado lo es, es derivable sobre una recta, pero para ser analítica tiene que ser sobre un vecindario, una recta no es un vecindario.

Pregunta 4

Calcule la integral $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\tan(z)}{z\left(1-e^{z}\right)}\,\mathrm{d}z$

Solución

[8] *http://mathworld.wolfram.com/Cauchy-RiemannEquations.html*

[9] No es dificil, intentenlo.

Veamos donde están los polos cambiando un poco la expresión

$$\frac{\tan(z)}{z(1-e^z)} = \frac{\sin(z)}{z\cos(z)(1-e^z)}$$

Los polos de la función que están del cortorno de integración es $z_0 = 0, z_1 = -\pi/2, z_2 = \pi/2$

El polo en $z_0 = 0$ es un polo de orden 1, en el límite, $\sin(z)/z$ tiende a uno, lo que indefine la función en 0 es el término $1 - e^z$.

Hallemos los residuos y los sumamos para obtener la integral

$$\text{Res}\left[\frac{\tan(z)}{z(1-e^z)}, z_0\right] = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{\tan(z)}{z(1-e^z)} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{1-e^z} = -1$$

Los otros 2 polos son de orden 1, donde el $\cos(z)$ los indefine. Para $k = 1, 2$, obtenemos

$$\begin{aligned}\text{Res}\left[\frac{\tan(z)}{z(1-e^z)}, z_k\right] &= \lim_{z\to z_k}(z - z_k)\cdot\frac{\tan(z)}{z(1-e^z)} = \frac{\sin(z_k)}{z_k(1-e^{z_k})}\lim_{z\to z_k}\frac{z - z_k}{\cos(z)} \\ &= \frac{\sin(z_k)}{z_k(1-e^{z_k})}\lim_{z\to z_k}\frac{1}{-\sin(z_k)} = \frac{-1}{z_k(1-e^{z_k})}\end{aligned}$$

Para $z_1 = -\pi/2$

$$\text{Res}\left[\frac{\tan(z)}{z(1-e^z)}, -\frac{\pi}{2}\right] = \frac{2}{\pi\left(1-\exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

Para $z_2 = \pi/2$

$$\text{Res}\left[\frac{\tan(z)}{z(1-e^z)}, \frac{\pi}{2}\right] = -\frac{2}{\pi\left(1-\exp\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

$$\Rightarrow= \oint_{|z|=2}\frac{\tan(z)}{z(1-e^z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\sum \text{Res}$$

$$\Rightarrow= \oint_{|z|=2}\frac{\tan(z)}{z(1-e^z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\left[-1 + \frac{2}{\pi\left(1-\exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)} - \frac{2}{\pi\left(1-\exp\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}\right]$$

Pregunta 5

Utilice la fórmula integral de Cauchy pero NO el teorema de residuos, para demostrar que, para la integral siguiente, donde el contorno de integración es $C : |z| = 2$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=2}\frac{\cosh(z)}{(z+1)(z+3)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi j}{21}\left[4\cosh\left(\frac{1}{2}\right) - 7\cosh(1)\right]$$

Solución

Los 2 polos dentro del contorno de integración son $z = 1/2$ y $z = -1$. Para aplicar Cauchy, dividimos la integral en 2.

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cosh(z)}{(z+1)(z+3)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \, \mathrm{d}z = \oint_{|z|=2} \frac{g_1(z)}{(z+1)} \, \mathrm{d}z + \oint_{|z|=2} \frac{g_2(z)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)} \, \mathrm{d}z$$

Con $g_1(z)$ y $g_2(z)$

$$g_1(z) = \frac{\cosh(z)}{(z+3)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \qquad g_2 = \frac{\cosh(z)}{(z+3)(z+1)}$$

De aquí aplicamos Cauchy directo. Voy a usar la paridad del coseno hiperbólico $\cosh(-a) = \cosh(a)$, ya que el enunciado sale con 1 positivo dentro de este.

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cosh(z)}{(z+1)(z+3)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \, \mathrm{d}z = 2\pi j \lim_{z\to -1} \frac{\cosh(z)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z+3)} + 2\pi j \lim_{z\to 1/2} \frac{\cosh(z)}{(z+1)(z+3)}$$

$$= 2\pi j \left[\frac{4}{21}\cosh\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\cosh(1)\right] = \frac{2\pi j}{21}\left[4\cosh\left(\frac{1}{2}\right) - 7\cosh(1)\right]$$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=2} \frac{\cosh(z)}{(z+1)(z+3)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \, \mathrm{d}z = \frac{2\pi j}{21}\left[4\cosh\left(\frac{1}{2}\right) - 7\cosh(1)\right]$$

Pregunta 6

Demuestre que para los números complejos ubicados sobre el círculo unitario $z = \exp(j\theta)$ se satisface la identidad:

$$\left|\tan\left(e^{j\theta}\right)\right|^2 = \frac{\left[e^{2\sin(\theta)}\csc(2\cos(\theta)) - \cot(2\cos(\theta))\right]^2 + 1}{\left[e^{2\sin(\theta)}\csc(2\cos(\theta)) + \cot(2\cos(\theta))\right]^2 + 1}$$

Solución

La tangente es

$$\tan(z) = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{e^{jz} + e^{-jz}}$$

Reemplazando $z \to e^{j\theta}$

$$\tan\left(e^{j\theta}\right) = \frac{e^{je^{j\theta}} - e^{-je^{j\theta}}}{e^{je^{j\theta}} + e^{-je^{j\theta}}}$$

Multiplicamos arriba y abajo por $e^{je^{j\theta}}$

$$\frac{e^{je^{j\theta}} - e^{-je^{j\theta}}}{e^{je^{j\theta}} + e^{-je^{j\theta}}} \cdot \frac{e^{je^{j\theta}}}{e^{je^{j\theta}}} = \frac{e^{2je^{j\theta}} - 1}{e^{2je^{j\theta}} + 1} = \frac{e^{2j[\cos(\theta)+j\sin(\theta)]} - 1}{e^{2j[\cos(\theta)+j\sin(\theta)]} + 1} = \frac{e^{-2\sin(\theta)}e^{j2\cos(\theta)} - 1}{e^{-2\sin(\theta)}e^{j2\cos(\theta)} + 1}$$

$$= \frac{e^{-2\sin(\theta)}\left[\cos(2\cos(\theta)) + j\sin(2\cos(\theta))\right] - 1}{e^{-2\sin(\theta)}\left[\cos(2\cos(\theta)) + j\sin(2\cos(\theta))\right] + 1} = \frac{-1 + e^{-2\sin(\theta)}\cos(2\cos(\theta)) + je^{-2\sin(\theta)}\sin(2\cos(\theta))}{1 + e^{-2\sin(\theta)}\cos(2\cos(\theta)) + je^{-2\sin(\theta)}\sin(2\cos(\theta))}$$

De aquí sacamos a factor común $e^{-2\sin(\theta)}\sin(2\cos(\theta))$ y obtenemos el csc y el cot

$$= \frac{-e^{2\sin(\theta)}\csc(2\cos(\theta)) + \cot(2\cos(\theta)) + j}{e^{2\sin(\theta)}\csc(2\cos(\theta)) + \cot(2\cos(\theta)) + j}$$

Con esto es facil obtener el módulo cuadrado. Solo sumando los cuadrados de la parte real y la imaginaria.

$$\left|\tan\left(e^{j\theta}\right)\right|^2 = \frac{\left[-e^{2\sin(\theta)}\csc(2\cos(\theta)) + \cot(2\cos(\theta))\right]^2 + 1}{\left[e^{2\sin(\theta)}\csc(2\cos(\theta)) + \cot(2\cos(\theta))\right]^2 + 1}$$

Ahora para que quede idéntico al enunciado del examen, solo usamos $(-a+b)^2 = (a-b)^2$

$$\Rightarrow \left|\tan\left(e^{j\theta}\right)\right|^2 = \frac{\left[e^{2\sin(\theta)}\csc(2\cos(\theta)) - \cot(2\cos(\theta))\right]^2 + 1}{\left[e^{2\sin(\theta)}\csc(2\cos(\theta)) + \cot(2\cos(\theta))\right]^2 + 1}$$

2 | Segunda Ronda

Nota: Las transformadas de Laplace voy a usar la letra p en lugar de la letra s.

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = F(p)$$

2.1. II Parcial I Ciclo 2008

Pregunta 1

Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(p)$, demuestre que $\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right\} = \dfrac{F(p)}{p}$

Solución

Sea $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$ y sea $G(p) = \mathscr{L}\{g(t)\}$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = f(t) \Rightarrow \mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right\} = \mathscr{L}\{f(t)\} = F(p)$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right\} = pG(p) - g(0)$$

El valor de $g(0)$ es 0. $g(0) = \displaystyle\int_0^0 f(u)\,\mathrm{d}u = 0$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right\} = \mathscr{L}\{f(t)\} = F(p) = pG(p) \Rightarrow G(p) = \frac{F(p)}{p}$$

$$G(p) = \mathscr{L}\{g(t)\} = \mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right\} = \frac{F(p)}{p}$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right\} = \frac{F(p)}{p}$$

Pregunta 2

Calcule $\mathscr{L}\{f(t)\}$ para $f(t)$ periódica representada gráficamente por la Fig.

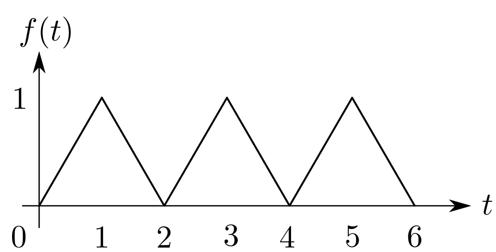


Figura 2.1: **Pregunta 2**

Solución

El periodo T es igual a 2.

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)e^{-pT}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-e^{-2p}}\left[\int_0^1 te^{-pt}\,\mathrm{d}t + \int_1^2 (2-t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t\right]$$

Evaluemos las integrales usando la integral

$$\int xe^{-ax}\,\mathrm{d}x = -\frac{e^{-ax}}{a^2}\,(ax+1)$$

$$= \int_0^1 te^{-pt}\,\mathrm{d}t + 2\int_1^2 e^{-pt}\,\mathrm{d}t - \int_1^2 te^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left(\frac{1-e^{-p}(p+1)}{p^2}\right) + 2\left(\frac{e^{-2p}\,(e^p-1)}{p}\right) + \left(\frac{e^{-2p}\,(-2p+e^p(p+1)-1)}{p^2}\right)$$

Donde dentro de cada parentesis es cada integral evaluada. Simplificando un poco, la suma de las integrales es

$$\int_0^1 te^{-pt}\,\mathrm{d}t + 2\int_1^2 e^{-pt}\,\mathrm{d}t - \int_1^2 te^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-2p}\,(e^p-1)^2}{p^2}$$

Juntandolo con la fracción que sale por ser una función periódica, la transformada de Laplace es

$$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{e^{-2p}\,(e^p-1)^2}{(1-e^{-2p})\,p^2}$$

Pregunta 3

Sea $F(p) = \dfrac{p(p+2)}{p^2+2p+5}$, utilice el método de los residuos para encontrar y simplifique hasta dejar la solución en términos de funciones reales.

Solución

Hacemos primero una división de polinomios para que el grado del numerador sea menor al denominador y poder aplicar residuos.

$$\frac{p(p+2)}{p^2+2p+5} = 1 - \frac{5}{p^2+2p+5}$$

Aplicamos residuos para obtener la transformada inversa del polinomio, la transformada inversa de 1 es $\delta(t)$. Los polos los encontramos resolviendo

$$p^2-2p+5=0 \Rightarrow p_1 = -1+2j \;\; ; \;\; p_2 = -1-2j$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\exp(pt)5}{p^2+2p+5}, p_1\right] = \lim_{p\to p_1}\,(p-p_1)\,\frac{\exp(pt)5}{(p-p_1)\,(p-p_2)} = \frac{5\exp\left((-1+2j)t\right)}{4j}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\exp(pt)5}{p^2+2p+5}, p_2\right] = \lim_{p\to p_2}\,(p-p_2)\,\frac{\exp(pt)5}{(p-p_1)\,(p-p_2)} = \frac{5\exp\left((-1-2j)t\right)}{-4j}$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{p^2+2p+5}\right\} = \sum \operatorname{Res} = \frac{5\exp\left((-1+2j)t\right)}{4j} + \frac{5\exp\left((-1-2j)t\right)}{-4j}$$

$$= \frac{5}{2}\exp(-t)\left(\frac{\exp(2jt)-\exp(-2jt)}{2j}\right) = \frac{5}{2}\exp(-t)\sin(2t)$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{p(p+2)}{p^2+2p+5}\right\} = \delta(t) - \frac{5}{2}\exp(-t)\sin(2t)$$

Pregunta 4

La carga q de un capacitor en un circuito inductivo está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + 300\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + 2\times 10^4 q = 200\sin(100t)$$

con $q(0)=0$, $\dfrac{\mathrm{d}q(0)}{\mathrm{d}t}=0$. Utilice transformada de Laplace para calcular $q(t)$.

Solución

Sea $Q(p)=\mathscr{L}\{q(t)\}$. Las condiciones iniciales son $q(0)=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(0)=0$ Al aplicar transformada de Laplace obtenemos

$$p^2Q(p)+300pQ(P)+2\times 10^4 Q(p) = 200\,\frac{100}{p^2+100}$$

$$\left[p^2+300p+2\times 10^4\right]Q(p) = \frac{2\times 10^4}{p^2+100^2} \Rightarrow Q(p) = \frac{2\times 10^4}{(p^2+300p+2\times 10^4)\,(p^2+100^2)}$$

$$p^2+300p+2\times 10^4 = (p+100)(p+200) \Rightarrow Q(p) = \frac{2\times 10^4}{(p+100)(p+200)\,(p^2+100^2)}$$

Al aplicar fracciones parciales obtenemos:

$$\frac{2\times 10^4}{(p+100)(p+200)\,(p^2+100^2)} = \frac{100}{500\,(p^2+100^2)} - \frac{3p}{500\,(p^2+100^2)} + \frac{1}{100(p+100)} - \frac{1}{250(p+200)}$$

Ya en ese formato podemos fijarnos en las tablas de transformadas y obtenemos:

$$\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\{Q(p)\} = q(t) = \frac{1}{500}\sin(100t) - \frac{3}{500}\cos(100t) + \frac{e^{-100t}}{100} - \frac{e^{-200t}}{250}$$

Pregunta 5

Demuestre que $\mathcal{Z}\{x(n-3)u(n-3)\} = z^{-3}X(z)$

Solución

Demostremos con un p general que

$$\mathcal{Z}\{x(n-p)u(n-p)\} = z^{-p}X(z)$$

Por definición:

$$\mathcal{Z}\{x(n-p)u(n-p)\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x(n-p)u(n-p)}{z^n} = \sum_{n=0}^{p-1}\frac{x(n-p)u(n-p)}{z^n} + \sum_{n=p}^{\infty}\frac{x(n-p)u(n-p)}{z^n}$$

La sumatoria de $n=0$ a $n=p-1$ es 0 debido al Heaviside que es 0 en todo ese recorrido. La sumatoria que va de p hasta infinito, el Heaviside vale 1.

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{x(n-p)u(n-p)\} = \sum_{n=p}^{\infty}\frac{x(n-p)}{z^n}$$

Si hacemos el cambio $m = n - p$ y para cambiar el inicio de la sumatoria empezando en 0

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{x(n-p)}{z^n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x(m)}{z^{m+p}} = \frac{1}{z^p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x(m)}{z^m} = z^{-p} X(z)$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\left\{x(n-p)u(n-p)\right\} = z^{-p} X(z)$$

En la pregunta del examen, $p = 3$.

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\left\{x(n-3)u(n-3)\right\} = z^{-3} X(z)$$

Pregunta 6

Resuelva la siguiente ecuación en diferencias utilizando la transformada $\mathcal{Z}$. Simplifique la expresión al máximo.

$$y(n+1) - 16y(n-1) = 2^{2n+1}$$

donde $y(0) = 0$.

Solución[1]

Al aplicar transformada $\mathcal{Z}$ con la condición $y(0) = 0$ obtenemos

$$zY(z) - \frac{16}{z} Y(z) = 2\frac{z}{z-4} \Rightarrow \left[\frac{z^2-16}{z}\right] Y(z) = 2\frac{z}{z-4}$$

$$\Rightarrow Y(z) = 2z\frac{z}{(z^2-16)(z+4)} = 2z\frac{z}{(z+4)(z-4^2)}$$

Al aplicar fracciones parciales obtenemos

$$\frac{z}{(z^2-16)(z+4)} = -\frac{1}{16(z+4)} + \frac{1}{16(z-4)} + \frac{1}{2(z-4)^2}$$

$$\Rightarrow 2z\frac{z}{(z+4)(z-4^2)} = -\frac{z}{8(z+4)} + \frac{z}{8(z-4)} + \frac{z}{(z-4)^2} = Y(z)$$

Con este formato, ya nos podemos fijar en las tablas de la transformada $\mathcal{Z}$

$$\Rightarrow y(n) = -\frac{(-4)^n}{8} + \frac{4^n}{8} + n4^{n-1}$$

Pregunta 7

Calcule

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z\left(z^2+4z+1\right)}{(z-1)^4}\right\}$$

Solución

[1] Creo que a esto le falta una condición, como un $y(1)$, la relación de recurrencia relaciona entre n y $n+2$, el $y(1)$ nunca es especificado y la relación sabiendo el $y(0)$, haciendolo iterativo salta directo al $y(2)$, no $y(1)$. El resultado que se obtiene con Mathematica es el mismo obtenido aquí, pero deja un parametro libre $C[1]$ para otra condición.

Utilizamos la identidad

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1}\, \mathrm{d}z = \sum \operatorname{Res}\left[X(z) z^{n-1}\right]$$

Donde

$$X(z) = \frac{z\left(z^2 + 4z + 1\right)}{(z-1)^4}$$

Al multiplicar $X(z)$ por z^{n-1} tenemos

$$X(z) z^{n-1} = \frac{z^n\left(z^2 + 4z + 1\right)}{(z-1)^4}$$

El único polo es $z = 1$ de orden 4.

El residuo lo obtenemos evaluando

$$\operatorname{Res}\left[X(z) z^{n-1}\right] = \lim_{z \to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \left[(z-a)^m X(z) z^{n-1}\right]$$

Donde $m = 1$ y $a = 1$

$$x(n) = \lim_{z \to 1} \frac{1}{(4-1)!} \frac{\mathrm{d}^{4-1}}{\mathrm{d}z^{4-1}} \left[(z-1)^4 X(z) z^{n-1}\right] = \lim_{z \to 1} \frac{1}{3!} \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3} \left[z^n\left(z^2 + 4z + 1\right)\right]$$

$$\Rightarrow x(n) = \lim_{z \to 1} \frac{1}{6} \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3} \left[z^{n+2} + 4z^{n+1} + z\right]$$

Calculando las primeras 3 derivadas.

$$\frac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}z^1} \left[z^{n+2} + 4z^{n+1} + z^n\right] = nz^{n-1} + (n+2)z^{n+1} + 4(n+1)z^n$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \left[z^{n+2} + 4z^{n+1} + z^n\right] = (n-1)nz^{n-2} + 4n(n+1)z^{n-1} + (n+1)(n+2)z^n$$

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3} \left[z^{n+2} + 4z^{n+1} + z^n\right] = (n-2)(n-1)nz^{n-3} + 4(n-1)n(n+1)z^{n-2} + n(n+1)(n+2)z^{n-1}$$

Evaluando el límite $z \to 1$ y simplificando

$$x(n) = \frac{1}{6} \lim_{z \to 1} (n-2)(n-1)nz^{n-3} + 4(n-1)n(n+1)z^{n-2} + n(n+1)(n+2)z^{n-1} = n^3$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\} x(n) = n^3$$

2.2. II Parcial II Ciclo 2009

Pregunta 1

Calcule $y(t)$ si $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \displaystyle\int_0^t e^{2(t-u)} \frac{\mathrm{d}y(u)}{du}\, \mathrm{d}u = e^{2t}$, si $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Solución

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \int_0^t e^{2(t-u)} \frac{\mathrm{d}y(u)}{du}\, \mathrm{d}u = e^{2t}$$

Aplicamos transformada de Laplace con las condiciones $y(0) = 0$ y $\dfrac{\mathrm{d}y(0)}{dt} = 1$

$$p^2Y(p) - py(0) - \frac{\mathrm{d}y(0)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{p-2}\left[pY(p) - y(0)\right] = \frac{1}{p-2}$$

$$\left[p^2 + \frac{p}{p-2}\right] Y(p) = \frac{1}{p-2} + 1 \Rightarrow p\left[p(p-2) + p\right] Y(p) = p - 1$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{p-1}{p\left(p(p-2)+1\right)}$$

Reordenemos el parentesis

$$p(p-2) + 1 = p^2 - 2p + 1 = (p-1)^2$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{p-1}{p(p-1)^2} = \frac{1}{p(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow y(t) = e^t - 1$$

Pregunta 2

Utilice la definición de transformada $\mathcal{Z}$ para demostrar que $\mathcal{Z}\left\{\cosh(na)\right\} = \dfrac{z\left(z - \cosh(a)\right)}{z^2 - 2z\cosh(a) + 1}$

Solución

$$\mathcal{Z}\left\{\cosh(na)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh(na)}{z^n} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^a)^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{-a})^n}{z^n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-e^a} + \frac{z}{z-e^{-a}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{z\left(z-e^{-a}\right) + z(z-e^a)}{\left(z-e^a\right)\left(z-e^{-a}\right)}\right] = \frac{z}{2}\left[\frac{2z - \left(e^a + e^{-a}\right)}{z^2 - z\left(e^a + e^{-a}\right) + 1}\right]$$

$$= \frac{z\left(z - \cosh(a)\right)}{z^2 - 2z\cosh(a) + 1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\left\{\cosh(na)\right\} = \frac{z\left(z - \cosh(a)\right)}{z^2 - 2z\cosh(a) + 1}$$

Pregunta 3

Sea $u(t)$ la función escalón unitario: $u(t) = 1$ si $t > 0$, $u(t) = 0$ si $t < 0$.

(a) Utilice las propiedades de la convolución y la transformada de Laplace para calcular $u(t) * u(t) * u(t)$

(b) Extienda este resultado a la convolución aplicada n veces: $u(t) * u(t) * \cdots * u(t) \quad n$ veces.

Solución

(3.a)

$$\mathscr{L}\left\{u(t)\right\} = \frac{1}{p}$$

$$\mathscr{L}\left\{u(t)*u(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{u(t)\right\}\mathscr{L}\left\{u(t)\right\} = \frac{1}{p^2}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{u(t)*u(t)*u(t)\right\} &= \mathscr{L}\left\{u(t)\right\}\mathscr{L}\left\{u(t)*u(t)\right\}\\ &= \mathscr{L}\left\{u(t)\right\}\mathscr{L}\left\{u(t)\right\}\mathscr{L}\left\{u(t)\right\} = \frac{1}{p^3}\end{aligned}$$

(3.b)

$$\mathscr{L}\left\{\overbrace{u(t)*\cdots*u(t)}^{n}\right\} = \mathscr{L}\left\{u(t)\right\}\mathscr{L}\left\{\overbrace{u(t)*\cdots*u(t)}^{n-1}\right\} = \overbrace{\mathscr{L}\left\{u(t)\right\}\cdots\mathscr{L}\left\{u(t)\right\}}^{n} = \frac{1}{p^n}$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{\overbrace{u(t)*\cdots*u(t)}^{n}\right\} = \frac{1}{p^n}$$

Pregunta 4

Considere la sucesión $x(n)$ cuya transformada $\mathcal{Z}$ unilateral está dada por $X(z) = 2 - 3z^{-1} + 4z^{-2}$, y la sucesión $y(n)$ cuya transformada $\mathcal{Z}$ unilateral es $Y(z) = \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}$

(a) Determine las sucesiones $x(n)$ y $y(n)$

(b) Determine la transformada $\mathcal{Z}$ de la convolución $x(n) * y(n)$

(c) Determine la sucesión $r(n) = x(n) * y(n)$

Solución

(4.a)

$$X(z) = 2 - \frac{3}{z} + \frac{4}{z^2} \qquad Y(z) = \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z^2}$$

En el formato que estan $X(z)$ y $Y(z)$, se pueden ver directo de la tabla de transformada $\mathcal{Z}$ para obtener $x(n)$ y $y(n)$ haciendo uso de $\mathcal{Z}\left\{\delta(n-r)\right\} = z^{-r}$

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{2 - \frac{3}{z} + \frac{4}{z^2}\right\} = 2\delta(n) - 3\delta(n-1) + 4\delta(n-2)$$

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{Y(n)\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{2z} + \frac{1}{2z^2}\right\} = \frac{1}{2}\delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2)$$

(4.b) Para encontrar la transformada de la convolución $x(n)*y(n)$, la transformada es el producto de las transformadas.

$$\mathcal{Z}\left\{x(n)*y(n)\right\} = X(z)Y(z) = \left(2 - \frac{3}{z} + \frac{4}{z^2}\right)\left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{2z^2}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} + \frac{2}{z^4}$$

(4.c)

$$\Rightarrow r(n) = x(n)*y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} + \frac{2}{z^4}\right\}$$

$$= \delta(n-1) - \frac{1}{2}\delta(n-2) + \frac{1}{2}\delta(n-3) + 2\delta(n-4)$$

Pregunta 5

Considere los siguientes sistemas (inicialmente en reposo) de la Fig. 2.2 con resistencias de 1Ω, inductancia de 1 mH, capacitancia de 1 mF

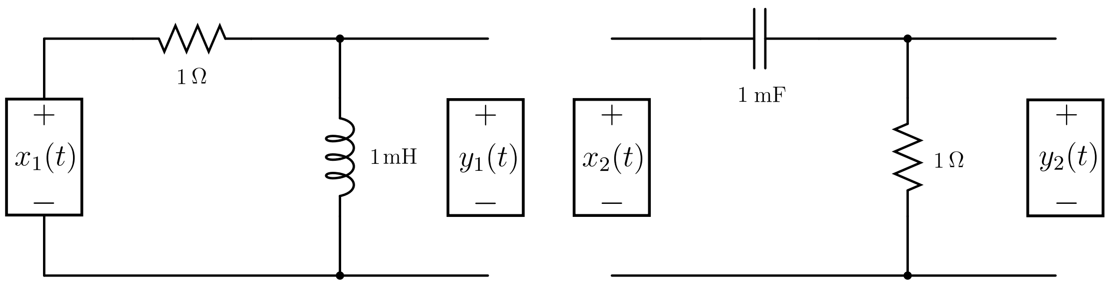


Figura 2.2: **Pregunta 5**

(a) Realice un análisis de estabilidad para cada sistema.

(b) Si la salida del primer sistema se conecta a la entrada del segundo, determine la función de transferencia del sistema en cascada.

(c) Obtenga $y_2(t)$ si $x_1(t)$ es igual a 1 V.

Solución

(5.a) Aplicamos la ley de Kirchhoff para el primer sistema. Todas las entradas y salidas son los voltajes de los elementos.

$$-x_1(t) + iR + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

Al aplicar la transformada de Laplace, con las condiciones iniciales nulas, obtenemos

$$-X_1(p) + I(p)R + LpI(p) = 0 \Rightarrow \frac{I(p)}{X_1(p)} = \frac{1}{R + Lp}$$

La FEM inducida en el inductor debido al cambio en la corriente es

$$y_1(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Lo transformamos a dominio de p

$$Y_1(p) = LpI(p) \Rightarrow I(p) = \frac{Y_1(p)}{Lp}$$

Sustituimos para tener una función de transferencia en términos de las tensiones

$$\frac{Y_1(p)/Lp}{X_1(p)} = \frac{1}{R + Lp} \Rightarrow \frac{Y_1(p)}{X_1(p)} = \frac{Lp}{R + Lp} = H_1(p)$$

Para el segundo sistema aplicamos Kirchhoff y obtenemos (Esta i es distinta a la del sistema anterior)

$$-x_2(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)\mathrm{d}\xi + iR = 0$$

Aplicando transformada de Laplace

$$-X_2(p) + \frac{I(p)}{Cp} + I(p)R = 0 \Rightarrow \frac{I(p)}{X_2(p)} = \frac{1}{\frac{1}{Cp} + R} = \frac{p}{\frac{1}{C} + Rp}$$

Aplicamos la relación de voltaje-corriente para pasar a dominio de p y sustituimos

$$y_2(t) = i(t)R \Rightarrow \frac{Y_2(p)}{R} = I(p)$$

$$\frac{Y_2(p)/R}{X_2(p)} = \frac{p}{\frac{1}{C} + R} \Rightarrow \frac{Y_2(p)}{X_2(p)} = \frac{Rp}{\frac{1}{C} + Rp} = H_2(p)$$

Los 2 sistemas son estables. Ya que R, L y C son positivos, la solución general para $mx + b = 0$ con $m, b > 0$ es $x = -b/m$, lo cual es un negativo. Los 2 denominadores de la función de transferencia tienen ese formato, ya que es negativo, los 2 son estables.

(5.b) Con la salida del primer sistema sea la entrada del segundo, no es que los conectan en paralelo. Supongan que tienen una fuende dependiente. Si se conectara en paralelo, no aplicaría tratarlo como cascada.

Tenemos que $X_2(p) = Y_1(P)$

$$Y_2(p) = X_2(p)H_2(p) = X_1 H_1(p)H_2(p) \Rightarrow \frac{Y_2(p)}{X_1(p)} = H_1(p)H_2(p)$$

$$\Rightarrow \frac{Y_2(p)}{X_1(p)} = \frac{Lp}{R + Lp}\frac{Rp}{\frac{1}{C} + Rp}$$

(5.c) Ahora sustuimos por los valores numéricos. Ya que $x_1(t) = 1$, tenemos que $X_1(p) = \dfrac{1}{p}$

$$Y_2(t) = \frac{1 \times 10^{-3}p^2}{(1 + 1 \times 10^{-3}p)\,(1000 + p)}\frac{1}{p} = \frac{1 \times 10^{-3}p}{1 \times 10^{-3}p^2 + 2p + 1000}$$

$$= \frac{p}{p^2 + 2000 + 1 \times 10^6} = \frac{p + 1000 - 1000}{(p + 1000)^2} = \frac{1}{p + 1000} - \frac{1000}{(p + 1000)^2}$$

$$y_2(t) = \exp(-1000t) - 1000t\exp(-1000t)$$

Pregunta 6

Sea el siguiente sistema discreto de la Fig. 2.3

(a) Calcule la función de transferencia resultante, sustituyendo A por algún valor tal que el sistema total sea estable.

(b) Determine la respuesta al impulso del sistema.

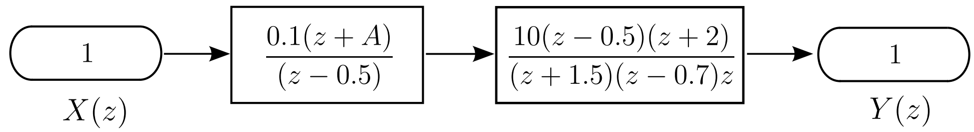


Figura 2.3: **Pregunta 6**

(c) Calcule el valor en régimen permanente de la salida si se aplica un escalón unitario en la entrada.

Solución

(6.a) Tenemos un sistema donde las funciones de transferencia están conectadas en cascada. La función de transferencia total es el producto de las funciones

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.1(z+A)}{(z-0.5)} \cdot \frac{10(z-0.5)(z+2)}{(z+1.5)(z-0.7)z} = \frac{(z+A)(z+2)}{(z+1.5)(z-0.7)z}$$

Si queremos que la función tal que el sistema sea estable, ocupamos que todos los polos tengan norma menor a 1. el $z+1.5$ lo hace inestable, si hacemos que A tome el valor de $A = 1.5$ cancelamos ese polo, y ya quedan polos de magnitud menor a 1. $\Rightarrow A = 1.5$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{z+2}{z(z-0.7)}$$

(6.b) Multiplicamos y dividimos por z y separamos en fracciones parciales.

$$H(z) = \frac{z+2}{z(z-0.7)} = \frac{z}{z}\left[\frac{z+2}{z(z-0.7)}\right] = z\left[\frac{z+2}{z^2(z-0.7)}\right]$$

$$= z\left[-\frac{20}{7}\frac{1}{z^2} - \frac{270}{49}\frac{1}{z} + \frac{270}{49}\frac{1}{z-0.7}\right] = -\frac{20}{7}\frac{1}{z} - \frac{270}{49} + \frac{270}{49}\frac{z}{z-0.7} = H(z)$$

$$\Rightarrow h(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{-\frac{20}{7}\frac{1}{z} - \frac{270}{49} + \frac{270}{49}\frac{z}{z-0.7}\right\}$$

Ya lo tenemos en formato para fijarnos en la tabla.

$$h(k) = -\frac{20}{7}\delta(k-1) - \frac{270}{49}\delta(k) + \frac{270}{49}(0.7)^k$$

(6.c) En regimen permantente, utilizamos el teorema del valor final. Si la entrada $x(k)$ es un escalon unitario, tenemos que $X(z) = z/(z-1)$

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z) = \lim_{z\to 1} H(z)X(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z-2}{z(z-7/10)} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{z+2}{z-7/10} = \frac{3}{1-7/10} = 10$$

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = 10$$

2.3. II Parcial I Ciclo 2010

Pregunta 1

Utilice transformada de Laplace para resolver

$$x(t) = 1 + 2\int_0^t \sin\left[2\left(t-u\right)\right]\frac{\mathrm{d}x(u)}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u \qquad \text{si } x(0) = 1$$

Solución[2]

Aplicando transformada de Laplace, obtenemos

$$X(p) = \frac{1}{p} + 2\left[\frac{2}{p^2+4}\left(pX(p)-1\right)\right] = \frac{1}{p} + \frac{4pX(p)}{p^2+4} - \frac{4}{p^2+4}$$

$$\Rightarrow X(p)\left(1 - \frac{4p}{p^2+4}\right) = \frac{1}{p} - \frac{4}{p^2+4}$$

$$\Rightarrow X(p)\left[\frac{p^2-4p+4}{p^2+4}\right] = \frac{p^2-4p+4}{p\left(p^2+4\right)}$$

$$X(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow x(t) = 1$$

Pregunta 2

Considere el sistema discreto lineal en cascada de la Fig. 2.4

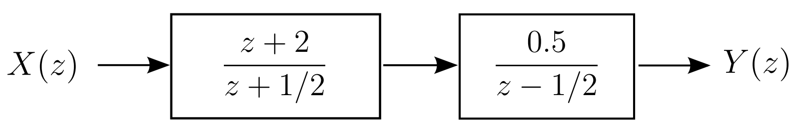


Figura 2.4: **Pregunta 2**

(a) Analice la estabilidad del sistema completo.

(b) Calcule, si existen, $y(0)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y(n)$ si la entrada $x(n) = u(n)$, el escalón unitario.

Solución

(2.a) La función de transferencia equivalente de funciones de transferencia en serie es el producto de las funciones.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z+2}{z+1/2}\,\frac{0.5}{z-1/2} = H(z)$$

El sistema completo es estable. Los polos de este sistema *discreto* se encuentran dentro del intervalo $(-1, 1)$.

[2] Algo no me gusta de esta solución, $x(t) = 1$ cumple con la ecuación integral y con la condición inicial. Pero si sustituimos el $\sin(t-u)$ por una función cualquiera $f(t-u)$, el procedimiento sería diferente ya que la transformada de Laplace va a ser otra, pero la solución $x(t) = 1$ sigue compliendo con las condiciones.

(2.b) Si la entrada es $x(n) = u(n)$, la transformada de la entrada es $X(z) = z/(z-1)$

$$Y(z) = \frac{1}{2}\frac{z+2}{(z-1/2)(z+1/2)}\frac{z}{z-1}$$

Con el teorema del valor inicial, podemos encontrar $y(0)$

$$y(0) = \lim_{z\to\infty}\frac{1}{2}\frac{z+2}{(z-1/2)(z+1/2)}\frac{z}{z-1} = 0$$

Con el teorema del valor final podemos encontrar $y(n)$ cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z) = \lim_{z\to 1}\frac{1}{2}\frac{z(z+2)}{(z-1/2)(z+1/2)} = 2$$

Pregunta 3

Un sistema tiene la siguiente función de transferencia $H(p) = \dfrac{10}{p(p+1)}$

(a) Calcule la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema.

(b) Si $u(t)$ es el escalón unitario y $h(t)$ la respuesta al impulso del sistema, calcule $h(t) * u(t)$

Solución

(3.a)

$$H(p) = \frac{10}{p(p+1)} = \frac{10}{p} - \frac{10}{p+1} \Rightarrow h(t) = 10 - 10e^{-t}$$

(3.b) Para calcular $h(t)*u(t)$, calculemos la transformada de Laplace y luego obtenemos la transformada inversa.

$$\mathscr{L}\{h(t)*u(t)\} = \mathscr{L}\{h(t)\}\,\mathscr{L}\{u(t)\} = \left(\frac{10}{p} - \frac{10}{p+1}\right)\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{10}{p^2} - \frac{10}{p(p+1)}$$

$$= \frac{10}{p^2} - \frac{10}{p} + \frac{10}{p+1} \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{10}{p^2} - \frac{10}{p} + \frac{10}{p+1}\right\} = 10t - 10 + 10e^{-t} = h(t)*u(t)$$

Pregunta 4

Suponga que $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\} = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$

(a) Calcule $\sum$ Residuos $\big(X(z)z^{-1}, \text{polos}\big)$ y verifique que cumple el teorema del valor inicial. **(b)** Determine $x(n)$ para $n \geq 1$.

Solución

$$x(0) = \sum \text{Res}\left[z^{-1}X(z)\right]$$

Los polos de $z^{-1}X(z)$ son $0, 1, 2$

$$\text{Res}\left[\frac{1}{z(z-1)(z-2)}, 0\right] = \lim_{z\to 0} z\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Res}\left[\frac{1}{z(z-1)(z-2)}, 1\right] = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = -1$$

$$\text{Res}\left[\frac{1}{z(z-1)(z-2)}, 2\right] = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2}$$

$$x(0) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$$

Con el teorema del valor inicial

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{(z-1)(z-2)} = 0$$

Da 0 por ambas rutas.

Hallemos $x(n)$ aplicando residuos. Ya que tenemos el valor de $x(0)$, consideremos los casos de $n \geq 1$

$$x(n) = \sum \text{Res}\left[z^{n-1}X(z)\right]$$

$$z^{n-1}X(z) = \frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)}$$

Ya que $n \geq 1$, el 0 ya no es un polo, ya los polos son solo 1 y 2

$$\text{Res}\left[\frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)}, 1\right] = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)} = \frac{(1)^{k-1}}{(-1)} = -1$$

$$\text{Res}\left[\frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)}, 1\right] = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)} = 2^{n-1}$$

$$x(n) = -1 + 2^{n-1}\ ;\ n \geq 1$$

Pregunta 5

Un sistema discreto tiene una respuesta al impulso $h(k) = (-3)^k$. Si se aplica una señal de entrada descrita por $x(k) = k(-2)^{k+3}$, determine la salida del sistema y justifique si este sistema es estable o no.

Solución

$$h(k) = (-3)^k \Rightarrow H(z) = \frac{z}{z+3}$$

$$x(k) = k(-2)^{k+3} = 16k(-2)^{k-1} \Rightarrow X(z) = \frac{16z}{(z+2)^2}$$

El sistema es inestable, el polo de la función de transferencia $H(z)$ es -3. En un sistema *discreto*, si hay algún polo cuyo valor absoluto es mayor a 1, el sistema es inestable.

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{16z^2}{(z+3)(z+2)^2}$$

$$y(k) = \sum \text{Res}\left[z^{k-1}Y(z)\right] = \sum \text{Res}\left[\frac{16z^{k+1}}{(z+3)(z+2)^2}\right]$$

$$\text{Res}\left[\frac{16z^{k+1}}{(z+3)(z+2)^2}, -3\right] = \lim_{z\to -3}(z+3)\frac{16z^{k+1}}{(z+3)(z+2)^2} = 16(-3)^{k+1}$$

$$\text{Res}\left[\frac{16z^{k+1}}{(z+3)(z+2)^2}, -2\right] = \lim_{z\to -2}(z+2)\frac{1}{(2-1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{16z^{k+1}}{(z+3)(z+2)^2}\right] = 16(3+k)(-2)^k$$

$$\Rightarrow y(k) = 16(-3)^{k+1} + 16(3+k)(-2)^k$$

Pregunta 6

Los resistores se utilizan en los circuitos para limitar el valor de la corriente o para fijar el valor de la tensión. Para determinar el valor de la resistencia se utiliza un código de colores donde la primera línea representa el dígito de las decenas, la segunda línea representa el dígito de las unidades y la tercera línea corresponde a un multiplicador que corresponde a una potencia de 10. Los valores de cada color son:

Negro	Marrón	Rojo	Anaranjado	Amarillo	Verde	Azul	Violeta	Gris	Blanco
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

A partir de esta información, determine la combinación de colores para la resistencia R_2 del circuito de la Fig. 2.5, tal que la función de transferencia del sistema sea igual a

$$H(s) = \frac{p}{p^2 + 358.14p + 178.57}$$

Considere el voltaje de la fuente como la entrada y el voltaje en R_2 como la salida. Las condiciones iniciales son cero.

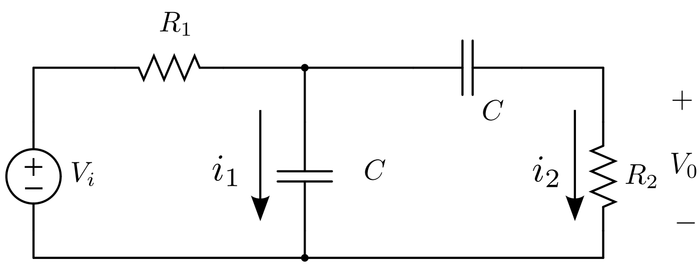


Figura 2.5: Pregunta 6

Con $R_1 = 1$ MΩ, $C_1 = C_2 = 1$ μF

Solución

Hagamos el problema algebraico. Las capacitancias son C, R_1 la resistencia de 6 MΩ y R_2 es la resistencia a determinar.

Aplicamos la regla de Kirchhoff al circuito de la Fig. 2.5 y obtenemos

$$-v_i(t) + (i_1 + i_2)R_1 + \frac{1}{C}\int_0^t i_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi + i_2R_2 = 0$$

$$-\frac{1}{C}\int_0^t i_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_0^t i_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi+i_2R_2$$

Aplicamos transformada de Laplace

$$-V_i+(I_1+I_2)\,R_1+\frac{I_2}{Cp}+I_2R_2=0$$

$$-\frac{I_1}{Cp}+\frac{I_2}{Cp}+I_2R_2=0\Rightarrow I_1=I_2\,(1+R_2Cp)$$

$$\Rightarrow [I_2\,(1+R_2Cp)+I_2]\,R_1+I_2\left(\frac{1}{Cp}+R_2\right)=V_i$$

$$\Rightarrow\frac{I_2}{V_i}=\frac{p}{R_1R_2Cp^2+(2R_1+R_2)\,p+\dfrac{1}{C}}$$

El problema pide que la señal de salida sea la diferencia de potencial en el resistor R_2. Hacemos uso de la ley de Ohm $V=IR$ para obtener $V_o(p)$

$$\frac{V_o}{V_i}=\frac{R_2p}{R_1R_2Cp^2+(2R_1+R_2)\,p+\dfrac{1}{C}}=\frac{p}{R_1Cp^2+\left(2\dfrac{R_1}{R_2}+1\right)p+\dfrac{1}{R_2C}}$$

Ya se tiene la función de transferencia en el formato que pide el examen. Evaluamos con $R_1=6$ MΩ, $C=1$ μF. El coeficiente de p^2 es 1. De aquí se puede usar cualquiera de los coeficientes de p^0 o p^1 para obtener R_2

$$2\left(\frac{1\times10^6}{R_2}+1\right)=358,14\qquad\qquad\frac{1}{R_2(1\times10^{-6})}=178,57$$

De cualquiera de las ecuaciones, al despejar R_2 se obtiene que $R_2=5600$ Ω. El código de colores es Verde-Azul-Rojo.

2.4. II Parcial II Ciclo 2010

Pregunta 1

Sea un sistema cuya función de transferencia es $H(p)=\dfrac{p}{p^2+kp+4}$

(a) Halle todos los valores de k para que el sistema sea estable. Justifique detalladamente su respuesta.

(b) Encuentre la salida $y(t)$ si al sistema se le aplica una entrada $x(t)=\delta'(t)+\delta(t)$, utilizando $k=4$ para $H(p)$.

Solución

Las polos de la función de transferencia se encuentran resolviendo

$$p^2+kp+4=0\Rightarrow p=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-16}}{2}$$

Voy a obviar el 2 que nos interesa el signo. Primero consideremos el caso donde hay 2 raices reales distintas. $\Rightarrow$ El discriminante es mayor a 0.

$$k^2 - 16 > 0 \Rightarrow |k| > 4$$

Consideremos el caso donde k es positivo, $k > 4$ Tomando la parte positiva de la raíz

$$k^2 > k^2 - 16 \Rightarrow k = \sqrt{k^2} > \sqrt{k^2 - 16} \Rightarrow 0 > -k + \sqrt{k^2 - 16}$$

Para $k > 4$, sus raices tienen signo negativo, el sistema es estable para $k > 4$. Ahora para $k < 4$. Si $k < 0 \Rightarrow -k > 0$. Por otro lado, $\sqrt{k^2 - 16} > 0$

$$-k + \sqrt{k^2 - 16} > 0$$

Los polos son positivos, el sistema es inestable con $k < 4$
Ahora el caso donde el discriminante es 0.

$$k^2 - 16 = 0 \Rightarrow k = \pm 4$$

Para $k = 4$, tenemos que la raíz es -2. Es negativo, por lo tanto es estable. Para $k = -4$, tenemos que la raíz es 2. Es positivo, por lo tanto es inestable.

Para el caso que $|k| < 4$, vamos a tener que el discriminante es menor a 0. Las raices del polinomio son

$$p = \frac{-k + j\sqrt{16 - k^2}}{2}$$

Ya solo dependen del signo de k, para $0 < k < 4$, la parte real tiene signo negativo, lo cual es estable. Para $-4 < k < 0$, la parte real tiene signo positivo, lo cual es inestable. Si hacemos que $k = 0$, tenemos 2 polos de grado 1 con la parte real igual a 0. Eso es marginalmente estable.

Pregunta 2

Demuestre que $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{z^2 + a^2}\right\} = a^{k-1} \sin\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)$

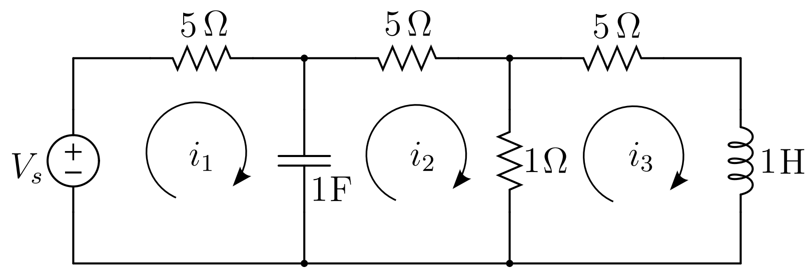
Solución

$$\frac{z}{z^2 + a^2} = z\left(\frac{1}{z^2 + a^2}\right) = z\left(-\frac{1}{2aj(z + ja)} + \frac{1}{2aj(z - aj)}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\left\{-\frac{z}{2aj(z + ja)} + \frac{z}{2aj(z - aj)}\right\} = \frac{1}{2aj}\left[\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{-z}{z - ja}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z + ja}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2aj}\left[-(-ja)^k + (ja)^k\right] = a^{k-1}\left(\frac{-\exp\left(\dfrac{j\pi k}{2}\right) + \exp\left(\dfrac{j\pi k}{2}\right)}{2j}\right) = a^{k-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z^2 + a^2}\right\} = a^{k-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$



Pregunta 3

Para el siguiente sistema encuentre la función de transferencia $H(p)$. Considere la corriente que pasa por el inductor como la salida.

Solución

Aplicamos ley de Kirchhoff sobre el circuito, utilizamos corrientes de mallas. i_1 para la malla izquierda, i_2 para la central e i_3 para la malla derecha.

Obtenemos 3 ecuaciones.

$$-V_s(t) + 5i_1 + \int_0^t (i_1(\xi) - i_2(\xi))\ \mathrm{d}\xi = 0$$

$$\int_0^t (i_2(\xi) - i_1(\xi))\ \mathrm{d}\xi + 5i_2 + (i_2 - i_3) = 0$$

$$(i_3 - i_2) + 5i_3 + \frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} = 0$$

Transformamos con Laplace con las condiciones iniciales nulas.

$$-V_s(p) + 5I_1(p) + \frac{I_1 - I_2}{p} = 0$$

$$\frac{I_2(p) - I_1(p)}{p} + 5I_2(p) + (I_2(p) - I_3(p)) = 0$$

$$(I_3(p) - I_2(p)) + 5I_3(p) + pI_3(p) = 0$$

Acomodamos en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 5 + \frac{1}{p} & \frac{-1}{p} & 0 \\ \frac{-1}{p} & 6 + \frac{1}{p} & -1 \\ 0 & -1 & 6 + p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_s(p) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Usamos la regla de Cramer para obtener $I_3(p)$.

$$\operatorname{Det} \begin{vmatrix} 5 + \frac{1}{p} & \frac{-1}{p} & 0 \\ \frac{-1}{p} & 6 + \frac{1}{p} & -1 \\ 0 & -1 & 6 + p \end{vmatrix} = \left(5 + \frac{1}{p}\right) \left[\left(6 + \frac{1}{p}\right)(6 + p) - 1\right] - \frac{6 + p}{p^2}$$

Simplificando

$$\left(5+\frac{1}{p}\right)\left[\left(6+\frac{1}{p}\right)(6+p)-1\right]-\frac{6+p}{p^2}=186+\frac{65}{p}+30p$$

Ahora sustituimos en la tercera columna para obtener la solución de $I_3(p)$

$$\text{Det}\begin{vmatrix} 5+\frac{1}{p} & \frac{-1}{p} & V_s(p) \\ \frac{-1}{p} & 6+\frac{1}{p} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\frac{V_s(p)}{p}$$

La solución para $I_3(p)$ es

$$I_3(p)=\frac{V_s(p)/p}{186+\frac{65}{p}+30p}$$

Por lo tanto, la función de transferencia es

$$\frac{I_3(p)}{V_s(p)}=\frac{1}{30p^2+186p+65}$$

Pregunta 4

Sea $H(z)=\dfrac{1}{z^2+2z+1}$ la función de transferencia de un sistema discreto.

(a) Obtenga la respuesta al impulso $h(t)$.

(b) Calcule el valor de la salida en régimen permanente si se aplica un escalón unitario en la entrada.

Solución

(4.a)

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{z^2+2z+1}=\frac{1}{(z+1)^2}=z\frac{1}{z(z+1)^2}=z\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{(z+1)^2}-\frac{1}{z+1}\right) \\ &= 1-\frac{z}{(z+1)^2}-\frac{z}{z+1}\Rightarrow h(k)=\delta(k)-k(-1)^{k-1}-(-1)^k \end{aligned}$$

(4.b) Al aplicar un escalón unitario, se obtiene de salida

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{z}{z-1}\frac{1}{z^2+2z+1}=\frac{z}{(z-1)\,(z+1)^2}$$

Los polos son de magnitud 1 y no se puede aplicar el teorema del valor final. Además, el polo de $z=1$ es de orden 2. El sistema no es estable y va a diverger. Verifiquemos calculando explicitamente la transformada inversa. Aplicando fracciones parciales separamos la expresión a

$$Y(z)=X(z)H(z)=z\left[\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(z+1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{z+1}\right]=\frac{1}{4}\frac{z}{z-1}-\frac{1}{2}\frac{z}{(z+1)^2}-\frac{1}{4}\frac{z}{z+1}$$

Con el formato obtenido, ya se puede comparar con tablas y obtener $y(k)$

$$y(k) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(-1\right)^{k-1} k + \frac{(-1)^k}{4}$$

Para $k > 0$. El sistema va a diverger para $k \to \infty$.

Pregunta 5

Un sistema discreto se modela con la siguiente ecuación en diferencias.

$$y(k+2) + 5y(k+1) + 6y(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Con $y(0) = 0,\ y(1) = 1$.

(a) Determine la solución de la ecuación en diferencias dada.

(b) Utilice el teorema del valor final para calcular $\lim\limits_{k\to\infty} y(k)$, o bien explique caso esto no fuera posible.

Solución

(5.a)

$$y(k+2) + 5y(k+1) + 6y(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\Rightarrow z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) + 5zY(z) - 5zy(0) + 6Y(z) = \frac{z}{z-1/2}$$

$$\Rightarrow \left(z^2 + 5z + 6\right) Y(z) = \frac{z}{z-1/2} + z$$

$$z^2 + 5z + 6 = (z+3)(z+2) \Rightarrow Y(z) = z\left[\frac{1}{(z-1/2)(z+2)(z+3)} + \frac{1}{(z+2)(z+3)}\right]$$

$$= z\left[\frac{z+1/2}{(z-1/2)(z+2)(z+3)}\right] = z\left[\frac{3}{5(z+2)} - \frac{5}{7(z+3)} + \frac{4}{35(z-1/2)}\right]$$

Distribuyendo z, ya podemos fijarnos en la tabla de transformadas para obtener la inversa

$$y(k) = \frac{3}{5}(-2)^k - \frac{5}{7}(-3)^k + \frac{4}{35}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

(5.b) El límite de $y(k \to \infty)$ no converge, los términos divergen oscilando.

Pregunta 6

Calcule:

(a) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{1-\cosh(at)}{t}\right\}$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p^2+a^2}{(p-b)^2}\right)\right\}$

Solución

(6.a) Usamos la propiedad $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_p^\infty F(\xi)\,\mathrm{d}\xi$; donde $f(t) = 1 - \cosh(at)$

$$\mathcal{L}\{1-\cosh(at)\} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2-a^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{1-\cosh(at)}{t}\right\} = \lim_{R\to\infty}\int_p^R \frac{1}{\xi} - \frac{\xi}{\xi^2-a^2}\,\mathrm{d}\xi = \lim_{R\to\infty} \ln(\xi) - \frac{1}{2}\ln(\xi^2-a^2)\Big|_p^R$$

$$= \lim_{R\to\infty}\ln\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{p^2-a^2}}{p}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{p^2-a^2}}{p}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{1-\cosh(at)}{t}\right\} = \ln\left(\frac{\sqrt{p^2-a^2}}{p}\right)$$

(6.b) Usamos la propiedad $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{\mathrm{d}F(p)}{\mathrm{d}p}$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\ln\left(\frac{p^2+a^2}{(p-b)^2}\right)\right] = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\ln(p^2+a^2) - 2\ln(p-b)\right] = -\frac{p}{p^2+a^2} + \frac{1}{p-b}$$

$$f(t) = \frac{1}{t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{p}{p^2+a^2} + \frac{1}{p-b}\right\} = \frac{-\cos(at)+e^{bt}}{t}$$

2.5. II Parcial II Ciclo 2011

Pregunta 1

Calcule la transformada $\mathcal{Z}$ inversa de $X(z) = \frac{\pi}{z(z+2)^2}$

Solución

$$X(z) = \frac{\pi}{z(z+2)^2} = \pi z\left[\frac{1}{z^2(z+2)^2}\right] = \pi z\left[\frac{1}{4z^2} - \frac{1}{4z} + \frac{1}{4(z+2)^2} + \frac{1}{4(z+2)}\right]$$

$$= \pi\left[\frac{1}{4z} - \frac{1}{4} + \frac{z}{4(z+2)^2} + \frac{z}{4(z+2)}\right] \Rightarrow x(k) = \pi\left[-\frac{\delta(k)}{4} + \frac{\delta(k-1)}{4} + \frac{k}{4}(-2)^{k-1} + \frac{(-2)^k}{4}\right]$$

Pregunta 2

Considere el circuito de la Fig. 2.6

(a) Determine la función de transferencia (en términos de una ganancia, polos y ceros) si se considera el voltaje de la fuente independiente como señal de entrada y la corriente que pasa por el inductor como señal de salida.

(b) Si $R_1 = 1\Omega, R_2 = 10\Omega, L = 1$ mH, y $V_i(t) = 0.5$ V. Determine la corriente que pasa por el inductor.

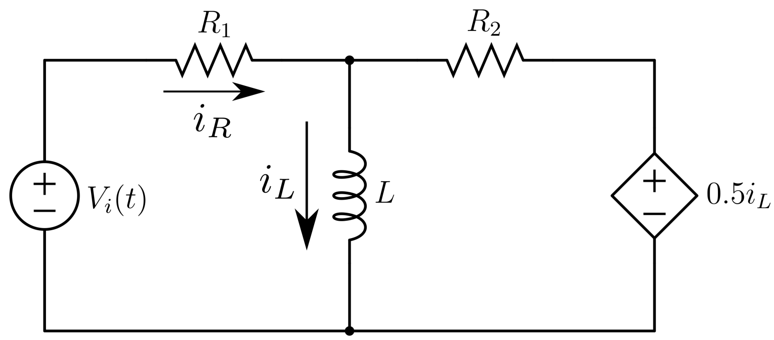


Figura 2.6: **Pregunta 2**

Solución

(6.a) La corriente que entra por la derecha debe ser $i_L - i_R$. Aplicamos las reglas de Kirchhoff para obtener las ecuaciónes del circuito. Voy a cambiar la ganancia de 0.5 por A

$$-V_s(t) + R_1 i_R + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$-Ai_L + R_2\left(i_L - i_R\right) + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 0$$

Aplicamos transformada de Laplace y reordenamos un poco

$$-V_s(p) + R_1 I_R + LpI_L = 0$$

$$-AI_L + R_2 I_L + LpI_L = R_2 I_R$$

De la primera ecuación se despeja I_R para sustituir en la segunda

$$I_R = \frac{V_s(p) - LpI_L}{R_1}$$

$$\Rightarrow I_L\left(R_2 + Lp - A\right) = R_2\left(\frac{V_s(p) - LpI_L}{R_1}\right) \Rightarrow I_L\left(Lp\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + R_2 - A\right) = \frac{R_2}{R_1}V_s(p)$$

$$\frac{I_l}{V_s(p)} = \frac{R_2}{R_1}\frac{1}{\left(Lp\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + R_2 - A\right)}$$

6.b) Para encontrar la corriente, separamos en fracciones parciales. Voy a reacomodar para facilidad.

$$\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{\left(Lp\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + R_2 - A\right)} = \frac{R_2}{R_1 L\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}\frac{1}{\left(p + \frac{R_2 - A}{L\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}\right)}$$

Para simplificar, sea

$$B = \frac{R_2 - A}{L\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Ahora, si se una diferencia de potencial constante de entrada $v_s(t) = K$, la entrada en el dominio de p es $V_p = K/p$. Reemplazando datos, tenemos

$$I_3(p) = \frac{C}{p\,(p+B)}$$

Donde

$$C = \frac{R_2 K}{R_1 L\left(1+\dfrac{R_2}{R_1}\right)}$$

Al separar en fracciones obtenemos

$$\frac{C}{p\,(p+B)} = \frac{C}{B}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+B}\right) \Rightarrow i_L(t) = \frac{C}{B}\left(1 - e^{-Bt}\right)$$

Reemplazando en los valores para C/B se obtiene

$$i_L(t) = \frac{R_2 K}{R_1\,(R_2 - A)}\left(1 - e^{-Bt}\right)$$

Como es de esperarse, el valor de la corriente en el infinito no depende de la inductancia ya que no hay cambios en la corriente, el inductor no aporta en el valor de la corriente estacionaria. Sustituyendo datos con $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $L = 1$ mH, $K = 0.5$ V y $A = 0.5\ \Omega$

$$i_L = 0.526316\left(1 - e^{-863.636t}\right)$$

Pregunta 3

Determine la transformada inversa de Laplace de:

(a) $F(p) = \ln(1 + ap^2)$

(b) $G(p) = \dfrac{cp+d}{(p-a)^2+b^2}$, a, b, c, d son constantes reales.

Solución

(3.a)

$$\mathscr{L}\left\{tf(t)\right\} = -\frac{\mathrm{d}F(p)}{\mathrm{d}p} = -\frac{2ap}{ap^2+1} = -\frac{2p}{p^2+\dfrac{1}{a}} \Rightarrow tf(t) = -2\cos\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = -\frac{2}{t}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right)$$

(3.b)

$$G(p) = \frac{cp+d}{(p-a)^2+b^2} = \frac{c(p-a+a)+d}{(p-a)^2+b^2} = \frac{c(p-a)}{(p-a)^2+b^2} + \frac{ac+d}{(p-a)^2+b^2}$$

$$= \frac{c(p-a)}{(p-a)^2+b^2} + \frac{ac+d}{b}\frac{b}{(p-a)^2+b^2} \Rightarrow g(t) = c\cos(bt)e^{at} + \frac{ac+d}{b}\sin(bt)e^{at}$$

Pregunta 4

Un sistema discreto, ante una entrada escalón unitario $u(k)$, presenta una salida $y(k)$ dada por la siguiente expresión:

$$y(k) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k < 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 \leq k < 4 \\ 2 & \text{si} \quad 4 \leq k < 6 \\ 1 & \text{si} \quad 6 \leq k < 8 \\ 0 & \text{si} \quad k \geq 8 \end{cases}$$

Para este sistema determine:

(a) Función de transferencia.

(b) Estabilidad (con justificación).

Solución

(4.a)

$$y(k) = \delta(t-2) + \delta(t-3) + 2\delta(t-4) + 2\delta(t-5) + \delta(t-6) + \delta(t-7)$$
$$\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^4} + \frac{2}{z^5} + \frac{1}{z^6} + \frac{1}{z^7}$$
$$x(k) = u(k) \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-1}$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^4} + \frac{2}{z^5} + \frac{1}{z^6} + \frac{1}{z^7}\right)}{\left(\frac{z}{z-1}\right)}$$
$$= (z-1)\left(\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{2}{z^5} + \frac{2}{z^6} + \frac{1}{z^7} + \frac{1}{z^8}\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^8} = \frac{-1 - z^2 + z^4 + z^6}{z^8}$$

(4.b) Es estable. El polo de la función es 0. Para sistemas *discretos*, si la magnitud de polos son menores a 1, el sistema es estable.

Pregunta 5

Muestre que $\mathscr{L}^{-1}\left\{\arctan\left(\frac{2}{p^2}\right)\right\} = \frac{2\sin(t)\sinh(t)}{t}$

Solución

Reescribamos la ecuación del problema, un poco trivial este paso pero voy a iniciar desde aquí, en reversa.

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\arctan\left(\frac{2}{p^2}\right)\right\} = \frac{2\sin(t)\sinh(t)}{t} \Rightarrow \mathscr{L}\left\{\frac{2\sin(t)\sinh(t)}{t}\right\} = \arctan\left(\frac{2}{p^2}\right)$$

Usemos la propiedad 6 del formulario de transformadas de Laplace: $t^n f(t) = (-1)^n F^n(p)$

Entonces, si multiplicamos por t a $2\sin(t)\sinh(t)/t$ y le sacamos la transformada, sabemos que esa transformada es igual a la derivada de $\arctan\left(2/p^2\right)$ respecto a p

$$\mathscr{L}\left\{t \cdot \frac{2\sin(t)\sinh(t)}{t}\right\} = \mathscr{L}\left\{2\sin(t)\sinh(t)\right\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\arctan\left(\frac{2}{p^2}\right) = \frac{4p}{p^4+4}$$

Ahora podemos obtener $\mathscr{L}\left\{2\sin(t)\sinh(t)\right\}$ por aparte y ver que es igual a la derivada del arctan. Usemos el hecho que $\sin(t) = \left(e^{jt} - e^{-jt}\right)/2j$ y usemos la propiedad 2 de las tablas de transformadas de Laplace.

$$\mathscr{L}\left\{2\sin(t)\sinh(t)\right\} = \frac{1}{j}\mathscr{L}\left\{e^{jt}\sinh(t)\right\} - \frac{1}{j}\mathscr{L}\left\{e^{-jt}\sinh(t)\right\}$$

Ahora por la tabla de transformada, usando la propiedad 17, ya se cuanto valen las transformadas de $e^{\pm jt}\sinh(t)$

$$\frac{1}{j}\mathscr{L}\left\{e^{jt}\sinh(t)\right\} - \frac{1}{j}\mathscr{L}\left\{e^{-jt}\sinh(t)\right\} = \frac{1}{j}\left[\frac{1}{(p-j)^2-1} - \frac{1}{(p+j)^2-1}\right]$$

Ahora juntando todo

$$\frac{1}{j}\left[\frac{1}{(p-j)^2-1} - \frac{1}{(p+j)^2-1}\right] = \frac{1}{j}\left[\frac{(p+j)^2-1-(p-j)^2+1}{(p-j)^2(p+j)^2-(p-j)^2-(p+j)^2+1}\right] = \frac{1}{j}\frac{4jp}{p^4+4} = \frac{4p}{p^4+4}$$

Lo cual da igual que la derivada de p y pruebo que los 2 lados de la ecuación sí dan lo mismo, y podemos ir en reversa en todo el procedimiento hasta obtener la ecuación del enunciado original y con esto queda mostrado.[3]

Pregunta 6

Si $x(k)$ es una sucesión periódica con periodo T, es decir, $x(k+T) = x(k)$, demuestre (utilizando la definición de transformada zeta) que $\mathcal{Z}\left\{x(k)\right\} = \dfrac{1}{1-z^{-T}}\displaystyle\sum_{k=0}^{T-1}\frac{x(k)}{z^k}$, si $|z| > 1$

Solución

$$\mathcal{Z}\left\{x(k)\right\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x(k)}{z^k}$$

$$\frac{x(0)}{z^0} + \frac{x(1)}{z^1} + \frac{x(2)}{z^2}\cdots + \frac{x(T-1)}{z^{T-1}} + \frac{x(0)}{z^T} + \frac{x(1)}{z^{T+1}}\cdots + \frac{x(T-1)}{z^{2T-1}} + \frac{x(0)}{z^{2T}} + \frac{x(1)}{z^{2T+1}} + \cdots$$
$$= \frac{1}{z^{0T}}\left[\frac{x(0)}{z^0} + \cdots + \frac{x(T-1)}{Z^{T-1}}\right] + \frac{1}{z^{1T}}\left[\frac{x(0)}{z^0} + \cdots + \frac{x(T-1)}{Z^{T-1}}\right] + \frac{1}{z^{2T}}\left[\frac{x(0)}{z^0} + \cdots\frac{x(T-1)}{Z^{T-1}}\right] + \cdots$$

[3] Este procedimiento ya supone que uno conoce la respuesta de antemano... No es muy elegante, pero funciona.

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{T-1} \frac{x(m)}{z^{m+\ell T}} = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{z^{\ell T}} \right) \left(\sum_{m=0}^{T-1} \frac{x(m)}{z^m} \right) = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \left(z^{-T}\right)^{\ell} \right) \left(\sum_{m=0}^{T-1} \frac{x(m)}{z^m} \right) = \frac{1}{1-z^{-T}} \sum_{m=0}^{T-1} \frac{x(m)}{z^m}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-z^{-T}} \sum_{m=0}^{T-1} \frac{x(m)}{z^m}$$

2.6. II Parcial I Ciclo 2012

Pregunta 1

Muestre que $\mathscr{L}\left\{\sin^3(t)\right\} = \dfrac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$

Solución

$$\sin^3(t) = \left(\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\right)^3 = \frac{1}{-8j}\left(e^{3jt} - 3e^{2jt}e^{-jt} + 3e^{jt}e^{-2jt} - e^{-3jt}\right)$$

$$= \frac{1}{-8j}\left[\left(e^{3jt}-e^{-3jt}\right) - 3\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)\right] = -\frac{1}{4}\left[\sin(3t) - 3\sin(t)\right]$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{\sin^3(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{-\frac{1}{4}\left[\sin(3t)-3\sin(t)\right]\right\} = -\frac{1}{4}\left(\frac{3}{p^2+9} - \frac{3}{p^2+1}\right) = \frac{6}{(p^2+9)(p^2+1)}$$

Pregunta 2

Muestre que $\mathcal{Z}\left\{\dfrac{1}{2}(k+1)(k+2)a^k\right\} = \dfrac{z^3}{(z-a)^3}$

Solución

$$\mathcal{Z}\left\{a^k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^k} = \frac{z}{z-a}$$

Multipliquemos por a^2 y derivemos, del LHS:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{k+2}}{z^k} = \frac{za^2}{z-a}$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{k+2}}{z^k}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+2)a^{k+1}}{z^k}$$

Del RHS tenemos

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{za^2}{z-a}\right] = z\left[\frac{2a}{z-a} + \frac{a^2}{(z-a)^2}\right] = \frac{z(2az-a^2)}{(z-a)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+2)a^{k+1}}{z^k} = \frac{z(2az-a^2)}{(z-a)^2}$$

Derivamos de nuevo a ambos lados, del LHS tenemos

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+2)a^{k+1}}{z^k}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)a^k}{z^k}$$

Del RHS:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{z(2az-a^2)}{(z-a)^2}\right] = z\left[\frac{2z-2a}{(z-a)^2} + \frac{2z(2az-a^2)}{(z-a)^3}\right] = \frac{2z^3}{(z-a)^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)a^k}{z^k} = \frac{2z^3}{(z-a)^3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)a^k}{z^k} = \frac{z^3}{(z-a)^3}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)a^k\right\} = \frac{z^3}{(z-a)^3}$$

Pregunta 3

Determine la transformada inversa de Laplace de las siguientes expresiones:

(a) $F(p) = \dfrac{2p}{(p+1)(p^2+2p+5)}$

(b) $G(p) = \dfrac{(p+3)}{p(p^2+1)}e^{-\pi s}$

Solución

(3.a)

$$\begin{aligned} F(p) = \frac{2p}{(p+1)(p^2+2p+5)} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)} + \frac{5}{2}\frac{1}{(p^2+2p+5)} + \frac{1}{2}\frac{p}{(p^2+2p+5)} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)} + \frac{5}{2}\frac{1}{[(p+1)^2+2^2]} + \frac{1}{2}\frac{(p+1)-1}{[(p+1)^2+2^2]} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)} + \frac{2}{[(p+1)^2+2^2]} + \frac{1}{2}\frac{p}{[(p+1)^2+2^2]} \\ \Rightarrow f(t) &= -\frac{1}{2}e^{-t} + \sin(2t)e^{-t} + \frac{1}{2}\cos(2t)e^{-t} \end{aligned}$$

(3.b) Primero eliminemos el exponencial. Usando la propiedad 3, sabemos que $f(t-a)U(t-a) = e^{-ap}F(p)$, así que apliquemos residuos al resto de la expresión sin el exponencial. Sea $H(p)$ tal que

$$H(p) = G(p)e^{\pi p} = \frac{p+3}{p(p^2+1)} = \frac{p+3}{p(p-j)(p+j)}$$

Y saquemos la transformada inversa a $H(p)$ con residuos. Los polos de $H(p)$ son $p=0$, $p=\pm j$, todos de orden 1. Los residuos son:

$$\text{Res}\left[H(p)e^{pt},0\right] = \frac{1}{(1-1)!}\lim_{p\to 0}(p)\frac{p+3}{p(p-j)(p+j)}e^{pt} = 3$$

$$\text{Res}\left[H(p)e^{pt},j\right] = \frac{1}{(1-1)!}\lim_{p\to j}(p-j)\frac{p+3}{p(p-j)(p+j)}e^{pt} = -\frac{1}{2}(3+i)e^{jt}$$

$$\text{Res}\left[H(p)e^{pt},-j\right] = \frac{1}{(1-1)!}\lim_{p\to -j}(p+j)\frac{p+3}{p(p-j)(p+j)}e^{pt} = \frac{1}{2}(-3+i)e^{-jt}$$

Ahora sumamos los residuos y obtenemos $\mathscr{L}^{-1}\{H(p)\} = h(t)$

$$h(p) = \sum \text{Res}\left[H(p)e^{pt}\right] = 3 - \frac{1}{2}(3+i)e^{jt} + \frac{1}{2}(-3+i)e^{-jt} = 3 - \frac{3}{2}\left(e^{jt}+e^{-jt}\right) + \frac{1}{2j}\left(e^{jt}-e^{jt}\right)$$

Cambiamos por los exponenciales a cos y sen

$$\Rightarrow h(p) = 3 - 3\cos(t) + \sin(t)$$

Ahora ponemos la contribución del exponencial $e^{\pi p}$ de la expresión original y obtenemos la transformada inversa de $G(p)$

$$\mathscr{L}^{-1}\{G(p)\} = g(t) = h(t-\pi)U(t-\pi) = [3 - 3\cos(t-\pi) + \sin(t-\pi)]\,U(t-\pi)$$

Pregunta 4

La dinámica de un sistema de tiempo discreto está determinado por la ecuación en diferencias:

$$y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = x(k)$$

en la que $y(k)$ es la salida y $x(k)$ es la entrada. Para este sistema, determine:

(a) La función de transferencia, en términos de las condiciones iniciales.

(b) Si $y(0) = 1$, determine, si es posible, la condición para $y(1)$ de manera que el sistema sea estable.

(c) La respuesta ante la entrada escalón unitario $u(k)$, si $y(0) = y(1) = 1$.

Solución

Esta pregunta en el ciclo que se evaluó, a lo que tengo entendido, fue anulada. El porqué es este: Una función de transferencia *por definición* tiene *todas* las condiciones iniciales nulas, no depende de estas. Una función de transferencia que depende de las condiciones iniciales ciertamente no cumple con la defición. No tiene mucho sentido esta pregunta.

Pregunta 5

Considere el circuito de la Fig. 2.7

(a) Determine la función de transferencia si considera el voltaje de la fuente como la entrada y el voltaje del inductor como la salida.

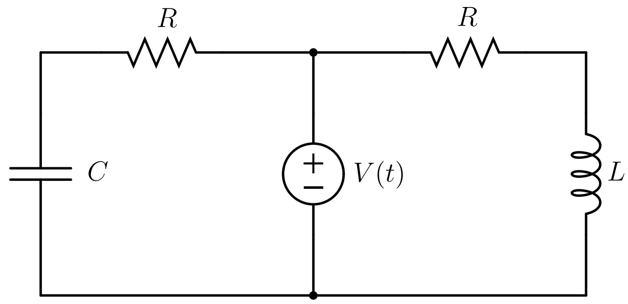


Figura 2.7: **Pregunta 5**

(b) Determine todas las corrientes que usted como ingeniero eléctrico puede medir con un amperímetro.

Solución

Sean i_C y i_L las corrientes que pasan por el capacitor y el inductor respectivamente.

(5.a) Aplicamos las reglas de Kirchhoff sobres la malla para obtener la corriente que pasa

$$-v(t) + Ri_L(t) + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$-v(t) + Ri_C(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$$

Las ecuaciones de $i_L(t)$ y $i_C(t)$ están desacopladas. Podemos tratarlas por separado.[4] Resolviendo primero para $i_L(t)$ aplicamos transformada de Laplace y reordenando se obtiene

$$RI_L + LpI_L = V(p) \Rightarrow \frac{I_L(p)}{V(p)} = \frac{1}{R + Lp}$$

Ahora usamos la relación de la FEM inducida con el cambio de corriente en el inductor para obtener la función de transferencia deseada. Usamos la propiedad 10 de la tabla, que la multiplicación de 2 funciones transformadas es la convolución de las funciones originales.

$$v_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \Rightarrow I_L(p) = \frac{V_L(p)}{pL}$$

Sustituimos

$$\frac{V_L(p)/Lp}{V(p)} = \frac{1}{R + Lp} \Rightarrow \frac{V_L(p)}{V(p)} = \frac{Lp}{R + Lp}$$

(5.b) Ahora encontramos las corrientes, primero la corriente en el inductor, usamos la función de transferencia encontrada

$$I_L(p) = \frac{V(p)}{L\left(p + \frac{R}{L}\right)} \Rightarrow i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\xi)\exp\left(-\frac{R}{L}(t-\xi)\right)\mathrm{d}\xi$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\int_0^t v(\xi)\exp\left(\frac{R}{L}\xi\right)\mathrm{d}\xi$$

[4]Por estar en paralelo.

Resolvemos para $i_C(t)$. Aplicamos transformada de Laplace

$$-V(p) + RI_C + \frac{1}{Cp} I_C(p) = 0 \Rightarrow I_C(p) = \frac{V(p)}{R + \dfrac{1}{Cp}}$$

Esta expresión aunque se reacomodara no parece tener una expresión que venga en la tabla de transformadas. Si usamos la ecuación $i_C(t) = C\ \mathrm{d}v_C(t)/\mathrm{d}t$ y le aplicamos la transformada de Laplace y sustituimos en $I_c(p)$ se obtiene una expresión que sí viene en la tabla

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow I_C(p) = pCV_C(p)$$

Sustituyendo

$$\Rightarrow pCV_C(t) = \frac{V_(p)}{R + \dfrac{1}{Cp}} \Rightarrow V_C(p) = \frac{1}{p + \dfrac{1}{RC}} \cdot \frac{V(p)}{RC}$$

Se puede ver que $V_C(t)$ es la multipliación de 2 transformadas de Laplace. Para obtener $v_C(t)$ se usa la transformación de una convolución

$$\Rightarrow v_C(t) = \frac{1}{RC}\int_0^t v(\xi)\exp\left[-\frac{(t-\xi)}{RC}\right]\ \mathrm{d}\xi = \frac{1}{RC}\exp\left[-\frac{t}{RC}\right]\int_0^t v(\xi)\exp\left[-\frac{\xi}{RC}\right]\ \mathrm{d}\xi$$

Ahora que sabemos $v_C(t)$, obtenemos $i_C(t)$ con la relación $i_C(t) = C\ \mathrm{d}v_C(t)/\mathrm{d}t$. Solo tener cuidado derivando, ya que es un producto y una de las variables t está en el límite de la integral

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$= C\left[-\frac{1}{(RC)^2}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\int_0^t v(\xi)\exp\left(\frac{\xi}{RC}\right)\ \mathrm{d}\xi + \frac{1}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)v(t)\exp\left(\frac{t}{RC}\right)\right]$$

$$i_C(t) = \frac{-C}{(RC)^2}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\int_0^t v(\xi)\exp\left(\frac{\xi}{RC}\right)\ \mathrm{d}\xi + \frac{v(t)}{R}$$

Se le invita al lector a probar que $i_L(t)$ e $i_C(t)$ se reducen los casos conocidos[5] cuando la fuente tiene es de la forma $v(t) = V_0$, con V_0 constante, cuando se conecta al circuito en $t = 0$.

Pregunta 6

Considere el siguiente sistema discreto, lineal e invariante en el tiempo de la Fig. 2.8

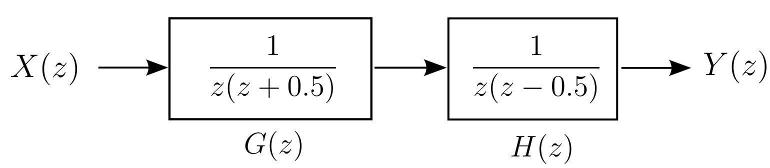


Figura 2.8: Pregunta 6

(a) Determine la respuesta al impulso para el sistema anterior.

[5] Siempre es bueno probar el caso límite.

(b) Obtenga el valor en régimen permanente del sistema, si se aplica un escalón de magnitud 5 en la entrada.

Solución

(6.a) La función de transferencia equivalente es el producto de las funciones.

$$G(z)H(z) = \frac{1}{z^2(z-0.5)(z+0.5)}$$

$$h(k) = \mathscr{Z}^{-1}\left\{G(z)H(z)\right\} = \mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z^2(z-0.5)(z+0.5)}\right\}$$

$$\frac{1}{z^2(z-0.5)(z+0.5)} = z\left[\frac{1}{z^3(z-0.5)(z+0.5)}\right] = z\left[-\frac{4}{z^3} - \frac{16}{z} + \frac{8}{z-0.5} + \frac{8}{z+0.5}\right]$$

Después de distribuir, obtenemos

$$h(k) = \mathscr{Z}^{-1}\left\{-\frac{4}{z^2} - 16 + \frac{8z}{z-0.5} + \frac{8z}{z+0.5}\right\} = -4\delta(k-2) - 16\delta(k) + 8\left(\frac{1}{2}\right)^k + 8\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

(6.b) Si la entrada es $x(k) = 5u(k) \Rightarrow X(z) = \dfrac{5z}{z-1}$, la salida $y(k)$ cuando $k \to \infty$ es:

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)G(z)H(z) = (z-1)\left(\frac{5z}{z-1}\right)\left(\frac{1}{z(z-0.5)}\right)\left(\frac{1}{z(z+0.5)}\right) = \frac{20}{3}$$

2.7. II Parcial I Ciclo 2013

Pregunta 1

Encuentre la convolución $f(t) * g(t)$ si $\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = \dfrac{2p^2+9p-8}{p^2+4p-5}$, y $\mathscr{L}\left\{g(t)\right\} = e^{-p}$

Solución

Para encontrar la convolución $f(t) * g(t)$, obtengamos la transformada de Laplace y calculemos la inversa.

$$\mathscr{L}\left\{f(t) * g(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}\mathscr{L}\left\{g(t)\right\} = \frac{2p^2+9p-8}{p^2+4p-5}e^{-p}$$

Al tener el exponencial, obtengamos la transformada inversa del resto y desplazamos al final

$$\frac{2p^2+9p-8}{p^2+4p-5} = 2 + \frac{p+2}{p^2+4p-5} = 2 + \frac{p+2}{(p-1)(p+5)} = 2 + \frac{1}{2}\frac{1}{(p-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+5}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2p^2+9p-8}{p^2+4p-5}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{2 + \frac{1}{2}\frac{1}{(p-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+5}\right\} = 2\delta(t) + \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-5t}$$

Ahora desplazemos la función obtenida

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2p^2+9p-8}{p^2+4p-5}e^{-p}\right\} = \left[2\delta(t-1) + \frac{1}{2}e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-5(t-1)}\right]u(t-1)$$

Pregunta 2

Para $X(z) = \dfrac{z-b}{z^2+(a+b)z+ab}$, $a, b \in \mathbb{C}$, muestre que $x(0) = 0$ y $x(1) = 1$ si $\mathcal{Z}\{x(k)\} = X(z)$

Solución

Usemos la identidad para transformar $X(z)$ a $x(k)$

$$x(k) = \sum \text{Res}\left[z^{k-1}X(z)\right]$$

Para $x(0)$ y $x(1)$ serían

$$x(0) = \sum \text{Res}\left[z^{-1}X(z)\right] \qquad x(1) = \sum \text{Res}\left[X(z)\right]$$

Encontramos primero $x(0)$. Factorizamos el denominador de $X(z)$ para reacomodar.

$$X(z) = \frac{z-b}{z^2+(a+b)z+ab} = \frac{z-b}{(z+a)(z+b)}$$

$$x(0) = \sum \text{Res}\left[z^{-1}X(z)\right] = \sum \text{Res}\left[\frac{z-b}{z(z+a)(z+b)}\right]$$

Los polos son $0, -a, -b$. Todos de orden 1.

$$\text{Res}\left[\frac{z-b}{z(z+a)(z+b)}, 0\right] = \lim_{z\to 0} z\frac{z-b}{z(z+a)(z+b)} = -\frac{1}{a}$$

$$\text{Res}\left[\frac{z-b}{z(z+a)(z+b)}, -a\right] = \lim_{z\to -a}(z+a)\frac{z-b}{z(z+a)(z+b)} = \frac{-a-b}{a(a-b)}$$

$$\text{Res}\left[\frac{z-b}{z(z+a)(z+b)}, -b\right] = \lim_{z\to -b}(z+b)\frac{z-b}{z(z+a)(a+b)} = \frac{2}{a-b}$$

$$\Rightarrow x(0) = -\frac{1}{a} + \frac{-a-b}{a(a-b)} + \frac{2}{a-b} = 0$$

Ahora con $x(1)$

$$x(1) = \sum \text{Res}\left[X(z)\right] = \sum \text{Res}\left[\frac{z-b}{(z+a)(z+b)}\right]$$

Los polos son $-a, -b$, los 2 de orden 1.

$$\text{Res}\left[\frac{z-b}{(z+a)(z+b)}, -a\right] = \lim_{z\to -a}(z+a)\frac{z-b}{(z+a)(z+b)} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\text{Res}\left[\frac{z-b}{(z+a)(z+b)}, -b\right] = \lim_{z\to -b}(z+b)\frac{z-b}{(z+a)(z+b)} = -\frac{2b}{a-b}$$

$$\Rightarrow x(1) = \frac{a+b}{a-b} - \frac{2b}{a-b} = 1$$

Pregunta 3

Considere el siguiente circuito acoplado de la siguiente figura

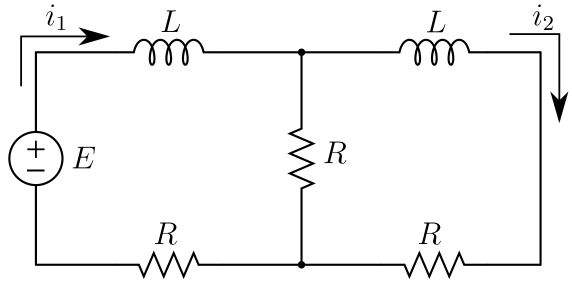


Figura 2.9: **Pregunta 3**

Calcule i_1 en términos de t, L, E, R si $i_1(0) = 0, \dfrac{\mathrm{d}i_1(0)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{L}$ y calcule $\lim\limits_{t\to\infty} i_1(t)$

Solución

Aplicamos las reglas de Kirchhoff sobre las 2 mallas y obtenemos las ecuaciones

$$-E + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + (i_1 - i_2) R + i_1 R = 0$$

$$(i_2 - i_1) R + L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + i_2 R = 0$$

Aplicando transformada de Laplace obtenemos

$$-\frac{E}{p} + LpI_1 + (I_1 - I_2) R + I_1 R = 0$$

$$(I_2 - I_1) R + LpI_2 + I_2 R = 0$$

Reacomodando en forma matricial obtenemos

$$\begin{pmatrix} 2R + Lp & -R \\ -R & 2R + Lp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{E}{p} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con la regla de Cramer determinamos I_1

$$\text{Det} \begin{vmatrix} 2R + Lp & -R \\ -R & 2R + Lp \end{vmatrix} = 3R^2 + 4RLp + L^2p^2$$

$$\text{Det} \begin{vmatrix} \dfrac{E}{p} & v \\ 0 & 2R + Lp \end{vmatrix} = \frac{E}{p} (2R + Lp)$$

$$I_1(p) = \frac{E (2R + Lp)}{p \left(3R^2 + 4RLp + L^2p^2\right)}$$

Usamos el teorema del valor final para encontrar $i_1(t)$ cuando $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} i_1(t) = \lim_{p\to 0} pI_1(p) = \lim_{p\to 0} p \, \frac{E (2R + Lp)}{p \left(3R^2 + 4RLp + L^2p^2\right)} = \frac{2}{3}\frac{E}{R}$$

Se puede verificar el resultado calculando la resistencia equivalente del circuito visto por la fuente en estado estacionario. En el estado estacionario es como si los inductores no estuvieran. La resistencia equivalente es $(3/2)R$.

Pregunta 4

Un sistema discreto tiene función de transferencia $H(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)(z-1)}$. Encuentre la respuesta cuando la entrada de la sucesión $\{1, -1, 0, 0, 0, 0, ...\}$

Solución

La entrada $x(k)$ del sistema es $x(k) = \delta(k) - \delta(k-1)$, al aplicar la transformada $\mathcal{Z}$, obtenemos

$$X(z) = 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z}$$

La salida la determinamos encontrando la transformada inversa de $Y(z)$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z-1}{z}\frac{z^2}{(z+1)(z-1)} = \frac{z}{z+1}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z+1} \Rightarrow y(k) = (-1)^k$$

Pregunta 5

La entrada del circuito rectificador de media onda está dada por la función

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) & \text{si} \quad 0 < t < \pi/\omega \\ 0 & \text{si} \quad \pi/\omega < t < 2\pi/\omega \end{cases}$$

Encontrar la transformada de Laplace de la función $f(t)$ si $f\left(t + \dfrac{2\pi}{\omega}\right) = f(t)$

Solución

Usemos $e^{j\omega t}$ y obtenemos la parte imaginaria para evitar hacer muchas integraciones por partes. Usamos la tabla de transformadas para funciones periodicas, la identidad 9 con periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \text{Im}\left\{\frac{1}{1-\exp\left(-\dfrac{2\pi p}{\omega}\right)}\int_0^{\pi/\omega} e^{-pt}e^{j\omega t}\,\text{dt}\right\}$$

Ocupemonos de la integral y luego multiplicamos por el resto.

$$\int_0^{\pi/\omega} e^{(-p+j\omega)t}\,\text{dt} = \left.\frac{e^{t(-p+j\omega)}}{-p+j\omega}\right|_0^{\pi/\omega} = \frac{1}{-p+j\omega}\left[\exp\left(\frac{-\pi p}{\omega}\right)\exp(j\pi) - 1\right] = \frac{1}{p-j\omega}\left[\exp\left(\frac{-\pi p}{\omega}\right) + 1\right]$$

$$= \frac{1}{p^2+\omega^2}(p+j\omega)\left[\exp\left(\frac{-\pi p}{\omega}\right)+1\right]$$

La parte imaginaria es

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\left[\exp\left(\frac{-\pi p}{\omega}\right)+1\right] \Rightarrow \int_0^{\pi/\omega} e^{-pt}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\left[\exp\left(\frac{-\pi p}{\omega}\right)+1\right]$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{1-\exp\left(-\dfrac{2\pi p}{\omega}\right)}\,\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\left[\exp\left(\frac{-\pi p}{\omega}\right)+1\right]$$

Pregunta 6

Un sistema de control digital puede describirse mediante la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{z^2+1}\begin{bmatrix} z^2 & z \\ -z & z^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre las respuestas $x_1(k)$ y $x_2(k)$ en función de las condiciones iniciales, aplicando transformada zeta inversa en ambos lados de la expresión. Simplifique su respuesta al máximo.

(b) Si se encuentra que la función de transferencia del sistema tiene la forma $\dfrac{z+1}{z^2+1}$. ¿Qué conclusiones puede obtener de la estabilidad del sistema?

Solución

(6.a)

$$\begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{z^2}{z^2+1} & \dfrac{z}{z^2+1} \\ -\dfrac{z}{z^2+1} & \dfrac{z^2}{z^2+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

Sea $\xi_1(k)$ y $\xi_2(k)$ donde $\mathcal{Z}\left\{\xi_1(k)\right\} = \dfrac{z^2}{z^2+1}$ y $\mathcal{Z}\left\{\xi_2(k)\right\} = \dfrac{z}{z^2+1}$

$$\Rightarrow \xi_1(k) = \sum \mathrm{Res}\left[z^{k-1}\frac{z^2}{z^2+1}\right] = \sum \mathrm{Res}\left[\frac{z^{k+1}}{z^2+1}\right]$$

Los polos son $j, -j$, de orden 1.

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z^{k+1}}{z^2+1}, j\right] = \lim_{z\to j}(z-j)\frac{z^{k+1}}{(z-j)(z+j)} = \frac{(j)^{k+1}}{2j} = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{j\pi k}{2}\right)$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z^{k+1}}{z^2+1}, -j\right] = \lim_{z\to -j}(z+j)\frac{z^{k+1}}{(z-j)(z+j)} = \frac{(-j)^{k+1}}{-2j} = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{-j\pi k}{2}\right)$$

$$\xi_1(k) = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{j\pi k}{2}\right) + \frac{1}{2}\exp\left(\frac{-j\pi k}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

$$\xi_2(k) = \sum \mathrm{Res}\left[z^{k-1}\frac{z}{z^2+1}\right] = \sum \mathrm{Res}\left[\frac{z^k}{z^2+1}\right]$$

Los polos son $j, -j$, de orden 1

$$\text{Res}\left[\frac{z^k}{z^2+1}, j\right] = \lim_{z\to j}(z-j)\frac{z^k}{(z-j)(z+j)} = \frac{(j)^k}{2j} = \frac{1}{2j}\exp\left(\frac{j\pi k}{2}\right)$$

$$\text{Res}\left[\frac{z^k}{z^2+1}, -j\right] = \lim_{z\to -j}(z+j)\frac{z^k}{(z-j)(z+j)} = \frac{(-j)^k}{-2j} = -\frac{1}{2j}\exp\left(\frac{-j\pi k}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \xi_2(k) = \frac{1}{2j}\exp\left(\frac{j\pi k}{2}\right) - \frac{1}{2j}\exp\left(\frac{-j\pi k}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

Ahora sustituimos en la matriz para obtener el resultado[6]

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1(k) & \xi_2(k) \\ -\xi_2(k) & \xi_1(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi k/2) & \sin(\pi k/2) \\ -\sin(\pi k/2) & \cos(\pi k/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

(6.b) Los polos de la función de transferencia son j y $-j$, con norma 1 y de orden 1 cada uno. Estas caracteristicas lo hacen un sistema marginalmente estable.

2.8. II Parcial II Ciclo 2013

Pregunta 1

Si $\mathcal{Z}\{x(k)\} = X(z)$

(a) Utilice la definición de transformada zeta unilateral para demostrar que $\mathcal{Z}\left\{x(k)e^{j\alpha k}\right\} = X(ze^{-j\alpha}),\ \alpha$ constante real.

(b) Utilice el resultado anterior para calcular $\mathcal{Z}\{u(k)\cos(k\alpha)\}$, para $u(k)$ escalón unitario discreto.

Solución

(1.a) Sea $\mathcal{Z}\{x(k)\} = X(z)$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\left\{x(k)e^{j\alpha k}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x(k)e^{j\alpha k}}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x(k)}{(ze^{-j\alpha})^k} = X(ze^{-j\alpha})$$

(1.b) Usando el resultado anterior y que la transformada $\mathcal{Z}$ del escalon unitario $u(k)$ es $z/(z-1)$, separamos al $\cos(k\alpha)$ en $\cos(k\alpha) = \dfrac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{x(k)\cos(k\alpha)\} = \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{x(k)e^{j\alpha k}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{x(k)e^{-j\alpha k}\right\} = \frac{1}{2}\frac{e^{-j\alpha}}{e^{-j\alpha}-1} + \frac{1}{2}\frac{e^{j\alpha}}{e^{j\alpha}-1}$$

Pregunta 2

[6] Esto tiene la forma de una matriz de rotación

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$, utilice propiedades de la tabla de transformada de Laplace para calcular

$$\mathcal{L}\left\{t^2 f'(t) + 2tf(t)\right\}$$

Simplifique al máximo el resultado.

Solución

Usamos las propiedades 5 y 6 de la tabla de transformadas de Laplace.

$$\mathscr{L}\left\{t^2 f'(t) + 2tf(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{t^2 f(t)\right\} + 2\mathscr{L}\{tf(t)\} = (-1)^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}[pF(p) - f(0)] + 2(-1)^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}F(p)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[F(p) + p\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}\right] - 2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p} + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p} + p\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}p^2} - 2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p} = p\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}p^2}$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{t^2 f'(t) + 2tf(t)\right\} = p\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}p^2}$$

Pregunta 3

Resuelva y simpifique al máximo: $\mathscr{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}\right\}$

Solución

Usemos residuos para determinar cuanto vale la inversa. Aplicamos

$$x(k) = \sum \operatorname{Res}\left[z^{k-1}\frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}, \text{polos}\right]$$

Ocupamos encontrar los polos de la función

$$z^{k-1}\frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)} = \frac{z^k}{(z+j)(z-j)(z+2)(z-2)}$$

No ocupamos considerar los casos en $z = 0$ ya que $k \geq 0$. Los polos son $j, -j, 2, -2$.

Polo en j

$$\lim_{z\to j}(z-j)\frac{z^k}{(z+j)(z-j)(z+2)(z-2)} = \frac{j^k}{2j(j+2)(j-2)} = -\frac{1}{5}\frac{j^k}{2j}$$

Polo en $-j$

$$\lim_{z\to -j}(z+j)\frac{z^k}{(z+j)(z-j)(z+2)(z-2)} = \frac{(-j)^k}{2j(2-j)(2+j)} = \frac{1}{5}\frac{(-j)^k}{2j}$$

Polo en 2

$$\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z^k}{(z+j)(z-j)(z+2)(z-2)} = \frac{2^k}{(2+j)(2-j)4} = \frac{2^k}{20}$$

Polo en -2

$$\lim_{z\to -2}(z+2)\frac{z^k}{(z+j)(z-j)(z+2)(z-2)} = \frac{-2(-2)^k}{(-2+j)(-2-j)(-2-2)} = -\frac{(-2)^k}{20}$$

$$\Rightarrow \sum \operatorname{Res}\left[z^{k-1}\frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}, \text{polos}\right] = -\frac{1}{5}\frac{j^k}{2j} + \frac{1}{5}\frac{(-j)^k}{2j} + \frac{2^k}{20} - \frac{(-2)^k}{20}$$

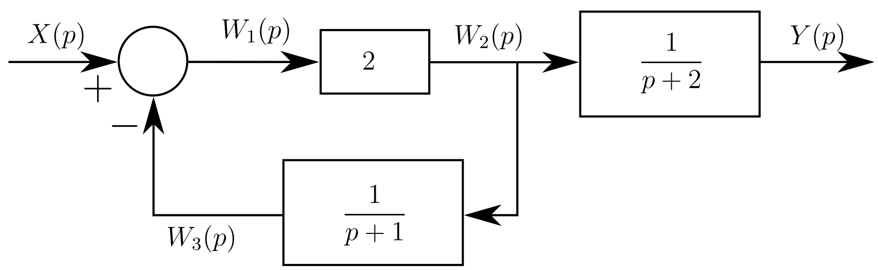
Cambiamos j^k por $\exp\left(\dfrac{\pi j k}{2}\right)$ y $-j^k$ por $\exp\left(-\dfrac{\pi j k}{2}\right)$

$$= \frac{1}{5}\left[-\left(\frac{\exp\left(\frac{\pi jk}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\pi jk}{2}\right)}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(2^k - (-2)^k\right)\right] = \frac{1}{5}\left(-\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(2^k - (-2)^k\right)\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}\right\} = \frac{1}{5}\left(-\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(2^k - (-2)^k\right)\right)$$

Pregunta 4

Considere el siguiente sistema en lazo cerrado (con realimentación):



(a) Encuentre la función de transferencia $\dfrac{Y(p)}{X(p)}$

(b) Encuentre $y(t)$ para $X(s) = \dfrac{1}{p+2}$

Solución

(4.a)

Encontremos $W_2(p)$ en función de la entrada.

$$W_3(p) = \frac{W_2(p)}{p+1}$$

$$W_1(p) = X(p) - W_3(p) = X(p) - \frac{W_2(p)}{p+1}$$

$$W_2(p) = 2W_1(p) = 2\left[X(p) - \frac{W_2(p)}{p+1}\right]$$

$$\Rightarrow W_2(p) = \frac{2}{1+\dfrac{2}{p+1}}X(p) = \frac{2(p+1)}{p+3}X(p)$$

$$Y(p) = \frac{1}{p+2}W_2(p) = \frac{2(p+1)}{(p+2)(p+3)}X(p) \Rightarrow \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{2(p+1)}{(p+2)(p+3)}$$

(4.b) Si $X(p) = \dfrac{1}{p+2}$

$$Y(p) = \frac{2(p+1)}{(p+2)(p+3)} X(p) = \frac{2(p+1)}{(p+2)^2(p+3)}$$

Separamos en fracciones parciales

$$\frac{2(p+1)}{(p+2)^2(p+3)} = -\frac{2}{(p+2)^2} + \frac{4}{2+p} - \frac{4}{p+3}$$

Con esta forma ya podemos usar las tablas. La inversa la obtenemos con la propiedad 13

$$y(t) = -2te^{-2t} + 4e^{-2t} - 4e^{-3t}$$

Pregunta 5

Sean $F(p) = \dfrac{(1-e^{-p})\, e^{-p}}{p^3\,(p^2+1)}$, $G(p) = \dfrac{1}{p\,(p+1)^2}$

(a) Calcule $f(t)$. No utilice el método de residuos ni fracciones parciales para encontrar su respuesta.

(b) Calcule $g(t)$ utilizando el teorema de convolución.

(c) Si $F(p)$ se coloca en cascada con $G(p)$, determine la estabilidad del sistema resultante. Justifique su respuesta.

Solución

(5.a)

$$F(p) = \frac{(1-e^{-p})\, e^{-p}}{p^3\,(p^2+1)} = \frac{e^{-p}}{p^3\,(p^2+1)} - \frac{e^{-2p}}{p^3\,(p^2+1)}$$

Ocupemonos de la parte sin el exponencial, luego añadimos la traslación al final. Ahora obtengamos la transformada inversa de $\dfrac{1}{p^3\,(p^2+1)}$ por convolución. Vemos que es el producto de las transformadas $\mathscr{L}\left\{\dfrac{t^2}{2}\right\} = \dfrac{1}{p^3}$ y $\mathscr{L}\left\{\sin(t)\right\} = \dfrac{1}{p^2+1}$

$$f(t) = \int_0^t \frac{u^2}{2} \sin(t-u)\ \mathrm{d}u$$

Usamos la identidad $\sin(t-u) = \sin(t)\cos(u) - \sin(u)\cos(t)$. Reordenando un poco

$$\Rightarrow f(t) = \frac{\sin(t)}{2}\int_0^t u^2\cos(u)\ \mathrm{d}u - \frac{\cos(t)}{2}\int_0^t u^2\sin(u)\mathrm{d}u$$

Hagamos la primera integral, usemos integración por partes

$$\int_0^t u^2\cos(u)\ \mathrm{d}u = t^2\sin(t) - 2\int_0^t u\sin(t)\ \mathrm{d}u = t^2\sin(t) - 2\left[-t\cos(t) + \int_0^t \cos(u)\ \mathrm{d}u\right]$$

$$= t^2\sin(t) + 2t\cos(t) - 2\sin(t)$$

La segunda integral es

$$\int_0^t u^2 \sin(u)\, \mathrm{d}u = -t^2\cos(t) + 2\int_0^t u\cos(t)\, \mathrm{d}u = -t^2\cos(t) + 2\left[t\sin(t) - \int_0^t \sin(u)\, \mathrm{d}u\right]$$

$$= -t^2\cos(t) + 2t\sin(t) + 2\cos(t) - 2$$

Sumando todo

$$\frac{\sin(t)}{2}\left[t^2\sin(t) + 2t\cos(t) - 2\sin(t)\right] - \frac{\cos(t)}{2}\left[-t^2\cos(t) + 2t\sin(t) + 2\cos(t) - 2\right]$$

Simplificando

$$= \frac{t^2}{2} - 1 + \cos(t)$$

Ahora trasladando por el factor exponencial del principio

$$\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\{F(p)\} = f(t) = \left[\frac{(t-1)^2}{2} - 1 + \cos(t-1)\right]U(t-1) - \left[\frac{(t-2)^2}{2} - 1 + \cos(t-2)\right]U(t-2)$$

(5.b) Notamos que $G(p)$ es el producto de la transformada de $\mathscr{L}\{1\} = 1/p$ y $\mathscr{L}\left\{te^{-t}\right\} = 1/(p+1)^2$

Usamos la convolución con $h_1(t-u) = 1$ y $h_2(u) = ue^{-u}$

$$g(t) = \int_0^t h_1(t-u)h_2(u)\, \mathrm{d}u = \int_0^t ue^{-u}\, \mathrm{d}u$$

$$-ue^{-u}\Big|_0^t + \int_0^t e^{-u}\, \mathrm{d}u = -te^{-t} - e^{-t} + 1$$

$$\Rightarrow g(t) = -te^{-t} - e^{-t} + 1$$

(5.c) En cascada es multiplicar las funciones

$$F(p)G(p) = \frac{(1-e^{-p})e^{-p}}{p^3(p^2+1)}\frac{1}{p(p+1)^2}$$

Ignoremos los términos exponenciales, que solo desplazan en el tiempo y no contribuyen a la estabilidad. Separemos los términos en fracciones parciales sin determinar los coeficientes

$$F(p)G(p) = \frac{A}{p^4} + \frac{B}{p^3} + \cdots$$

Donde A y B serían los coeficientes de la expansión. La transformada inversa de $1/p^4$ y $1/p^3$ va a ser proporcional a t^3 y t^2 respectivamente. Estos términos tienen a infinito en $t \to \infty$. El sistema no es estable.

Pregunta 6

En la Fig. 2.10 siguiente se describe el diagrama de bloques de un filtro digital con función de transferencia $H(z) = Y(z)/X(z)$

A partir del diagrama determine:

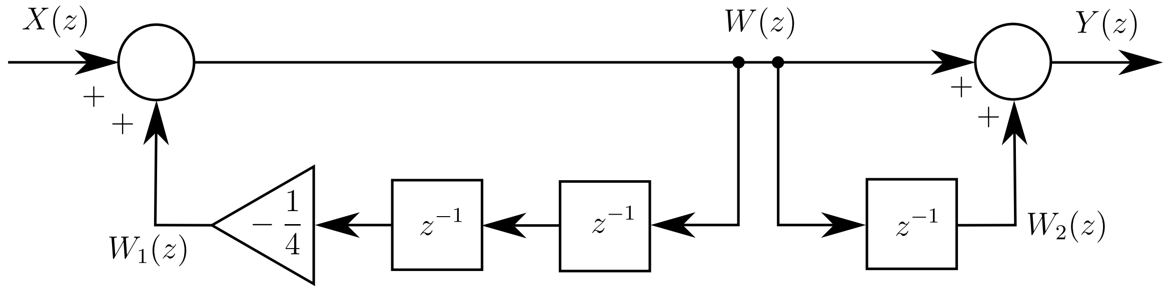


Figura 2.10: **Pregunta 6**

(a) La respuesta en el tiempo del filtro digital $y(k)$, antes una entrada alternada $x(k) = (-1)^k$. Simplifique al máximo su respuesta.

(b) Determine si el filtro es estable. Justifique su respuesta.

Solución

(5.a) Averiguemos primero la función de transferencia. $W(z)$ en términos de $X(z)$ lo encontramos con

$$W_1(z) = -\frac{1}{4}\frac{1}{z^2}W(z)$$

$$W(z) = X(z) + W_1(z) = X(z) - \frac{1}{4}\frac{1}{z^2}W(z) \Rightarrow W(z) = \frac{X(z)}{1+\frac{1}{4}\frac{1}{z^2}} = \frac{4z^2}{4z^2+1}X(z)$$

Ahora averiguamos $Y(z)$ en términos de $X(z)$

$$W_2(z) = \frac{1}{z}W(z)$$

$$\begin{aligned} Y(z) = W(z) + W_2(z) = W(z) + \frac{1}{z}W(z) = W(z)\left(1+\frac{1}{z}\right) &= \frac{4z^2}{4z^2+1}X(z)\left(1+\frac{1}{z}\right) \\ = \frac{4z^2}{4z^2+1}\frac{z+1}{z}X(z) &= \frac{z(z+1)}{(z+1/2)(z-1/2)}X(z) = Y(z) \\ \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{z(z+1)}{(z+1/2)(z-1/2)} \end{aligned}$$

Para averiguar $y(k)$ tenemos que transformar $Y(z)$. La entrada es $x(k) = (-1)^k$, por lo tanto $X(z)$ es $X(z) = z/(z+1)$. (Propiedad 4 de la tabla)

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{z(z+1)}{(z+1/2)(z-1/2)}\frac{z}{z+1} = \frac{z^2}{(z+1/2)(z-1/2)}$$

Separando en fracciones parciales

$$z\left[\frac{z}{(z+1/2)(z-1/2)}\right] = z\left[\frac{1}{2}\frac{1}{z-1/2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z+1/2}\right] = \frac{1}{2}\frac{z}{z-1/2} + \frac{1}{2}\frac{z}{z+1/2}$$

Ya podemos obtener la inversa con el formato comparando con la tabla.

$$\Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\left\{Y(z)\right\} = y(k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

(5.b) Los polos de la función de transferencia $H(z)$ es $z = \pm 1/2$. Ya que los polos están dentro del circulo unitario, el sistema es estable.

3 | Tercera Ronda

3.1. III Parcial I Ciclo 2008

Pregunta 1

Sea $f(t) = \cos(t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$

(a) Desarrollo $f(t)$ en serie de Fourier en cosenos.

(b) Utilice el resultado obtenido para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$

(c) Utilice el teorema de Parseval para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$

Solución

(1.a)

Ver **III Parcial II Ciclo 2014 Pregunta 5.b**. Donde las variables son $A \to 1$, $T \to \pi$

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \cos(2nt)$$

(1.b)

$$f(0) = 1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{\pi} - 1\right) = \frac{2-\pi}{4}$$

(1.c)

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 \,\mathrm{d}t = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)$$

Pregunta 2

Sea

$$f(t) = \begin{cases} 1-t^2 & \text{si} \quad -1 < t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |t| > 1 \end{cases}$$

(2.a) Calcule $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega)$

(2.b) Use la propiedad de simetría para calcular $\mathscr{F}\{F(t)\}$

Solución

(2.a)

$$\mathscr{F}\left\{f(t)\right\} = F(\omega) = \int_{\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)\left(\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-1}^{1}(1-t^2)\cos(\omega t)\ \mathrm{d}t - j\int_{-1}^{1}(1-t^2)\sin(\omega t)\ \mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1}(1-t^2)\cos(\omega t)\ \mathrm{d}t$$

La integral con el $\sin(\omega t)$ es igual a 0 ya que la la función de la integral es una función impar de -1 a 1. Al realizar la integral del $\cos(\omega t)$ se obtiene:

$$2\int_{0}^{1}(1-t^2)\cos(\omega t)\ \mathrm{d}t = \frac{-4\omega\cos(\omega) + 4\sin(\omega)}{\omega^3} = \mathscr{F}\left\{f(t)\right\}$$

(2.b)

$$F(t) = \frac{-4t\cos(t) + 4\sin(t)}{t^3} \Rightarrow \mathscr{F}\left\{F(t)\right\} = 2\pi f(-\omega) = 2\pi\left(1-(-\omega)^2\right) = 2\pi\left(1-\omega^2\right), \quad |\omega| < 1$$

Pregunta 3

Sea a real positivo. Demuestre que

$$\mathscr{F}\left\{e^{-|a|t}\right\} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

Solución

$$f(t) = e^{-a|t|} \Rightarrow \mathscr{F}\left\{e^{-a|t|}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} e^{-(a+j\omega)t}\mathrm{d}t = \left.\frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega}\right|_{-\infty}^{0} + -\left.\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega}\right|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a+j\omega+2-j\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{e^{-a|t|}\right\} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

Pregunta 4

Sea $f(t)$ una función cuya serie trigonometrica de Fourier está definida como

$$f(t) = 20\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n}\cos(nt) - \frac{1}{\pi n}\sin(nt)\right)$$

Si la potencia total de la función es de 60 W, determine cuantas armónicas deben considerarse para superar el 95 % de tal potencia.

Solución

Una corrección. Es posible calcular la potencia total de la función y no es 60 W como dice el enunciado.

$$f(t) = 20\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n}\cos nt - \frac{1}{\pi n}\sin nt\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{20}{\pi n}\cos nt - \frac{20}{\pi n}\sin nt\right)$$

Vemos que $a_n = 20/\pi n$, $b_n = -20/\pi n$ y $a_0 = 0$

Ahora calculamos la potencia

$$P = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{400}{\pi^2 n^2}\right) = \frac{400}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{400}{\pi^2}\frac{\pi^2}{6} = \frac{400}{6} = \frac{200}{3} \approx 66.6 \text{ W}$$

La potencia es $P = 200/3$ W ≈ 66.6 W, no 60 W. Ahora, el problema. No encuentro una manera elegante más que hacerlo por fuerza bruta tabulando valores, haciendo la sumatoria explicitamente. Sea P_n la potencia contenida hasta el n-ésimo armónico

$$P_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{400}{\pi^2 k^2}$$

Tabulando los valores, evaluando la sumatoria hasta el n -ésimo termino

Cuadro 3.1: Pregunta 4: Valores de P_n

n	P_n	P_n/P
1	40.5285	0.607927
2	50.6606	0.759909
3	55.1638	0.827456
4	57.6968	0.865452
5	59.3179	0.889769
6	60.4437	0.906656
7	61.2708	0.919062
8	61.9041	0.928561
9	62.4044	0.936067
10	62.8097	0.942146
11	63.1447	0.94717
12	63.4261	0.951392

Se requieren 12 armónicos para tener un mínimo de 95 % de la Potencia total.

Pregunta 5

Utilizando tablas y propiedades, determine $f(t)$ si

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 8\omega + 20}$$

Solución

Utilicemos las propiedas de la tabla $\mathscr{F}\left\{f(t)e^{j\omega_0 t}\right\} = F(\omega - \omega_0)$ y $\mathscr{F}\left\{e^{-a|t-t_0|}\right\} = \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}e^{-j\omega t_0}$

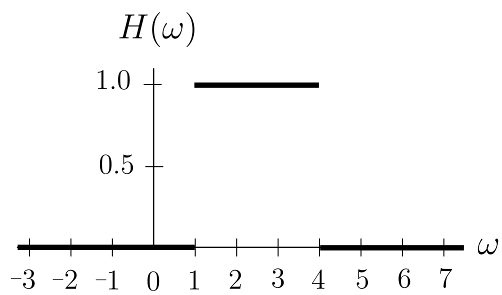
$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 8\omega + 20} = \frac{1}{(\omega+4)^2 + 4} = \frac{1}{4}\frac{2\cdot 2}{(\omega+4)^2 + 2^2}$$

Si comparamos con la propiedades, vemos que $\omega_0 = -4, a = 2$ y $t_0 = 0$

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{F(\omega)\right\} = \frac{1}{4}e^{-2|t|}e^{-j4t}$$

Pregunta 6

Sea un sistema cuya función de transferencia $H(\omega)$ se muestra en la figura. Si al sistema se le aplica la señal de entrada $x(t) = \text{sgn}(t)$, calcule la energía de la señal de salida $y(t)$



Solución

$$\int_{-\infty}^{\infty}[y(t)]^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|Y(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\,|H(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$$

Usamos la propiedad en la tabla: $\mathscr{F}\left\{x(t)\right\} = \mathscr{F}\left\{\text{sgn}(t)\right\} = \dfrac{2}{j\omega} = X(\omega)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\,|H(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{1}^{4}\frac{4}{\omega^2}\mathrm{d}\omega = \frac{3}{2}\frac{1}{\pi}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}[y(t)]^2\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\frac{1}{\pi}$$

3.2. III Parcial II Ciclo 2008

Pregunta 1

Sea $f(t)$ la señal mostrada en la Fig. 3.1

(a) Desarrolle $f(t)$ en serie exponencial de Fourier.

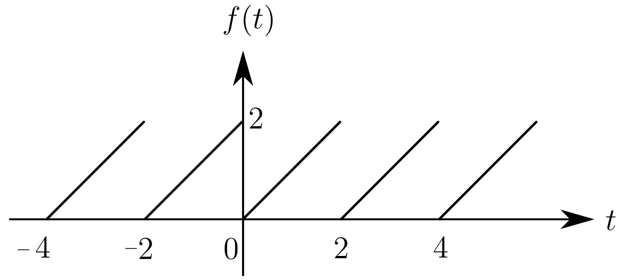


Figura 3.1: Pregunta 1

(b) Utilice el resultado anterior y el teorema de Parseval para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(c) Dibuje el espectro de magnitud ($|c_n| \times n\omega_0$) y el de fase ($\Theta_n \times n\omega_0$) de la señal $f(t)$. (incluya los primeros 5 armónicos).

Solución

(1.a) $f(t) = t\ ;\ 0 < t < 2\ ;\ f(t+2) = f(t) \Rightarrow T = 2 \Rightarrow \omega_0 = \pi$

$$c_n = \frac{1}{2}\int_0^2 te^{-jn\pi t}\,\mathrm{d}t = \frac{j}{n\pi} \qquad c_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 t\,\mathrm{d}t = 1$$

$$\Rightarrow f(t) = 1 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{j}{n\pi}\, e^{jn\pi t}$$

(1.b) Por el teorema de Parseval:

$$\frac{1}{2}\int_0^2 t^2\,\mathrm{d}t = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2}$$

$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Los coeficientes se pueden escribir como

$$c_n = \frac{j}{n\pi} = \frac{1}{n\pi}e^{j\pi/2}$$

La fase es constante, pero cambia de signo cuando n cambia de signo.

(1.c)

Cuadro 3.2: Valores de los espectros

$n\omega_0$	0	π	2π	3π	4π	5π
$\lvert c_n\rvert$	1	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{3\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{5\pi}$
Θ_n	-	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

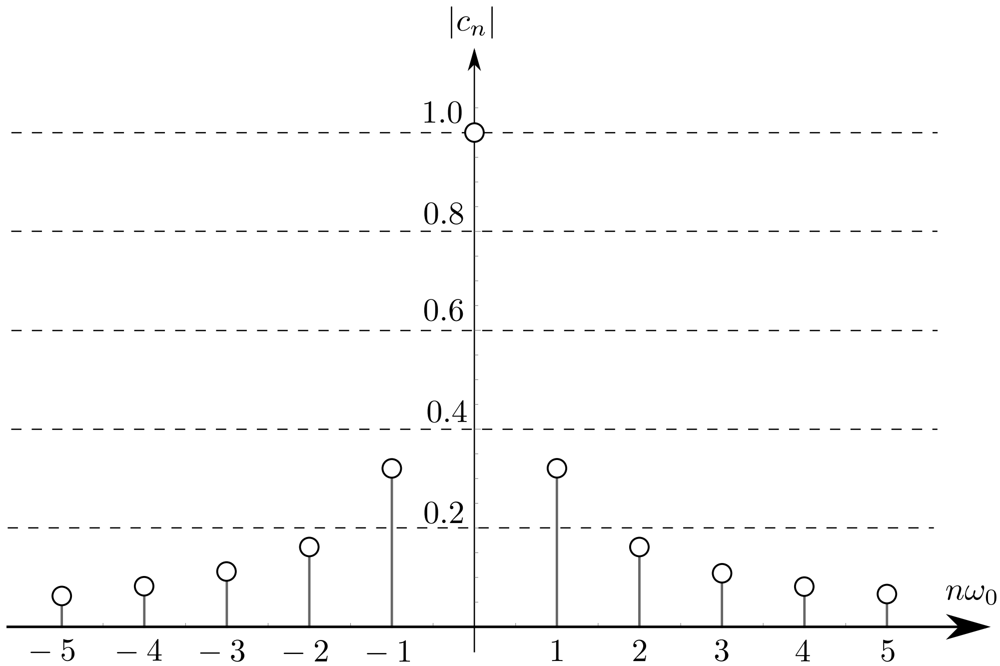


Figura 3.2: Espectro de magnitud

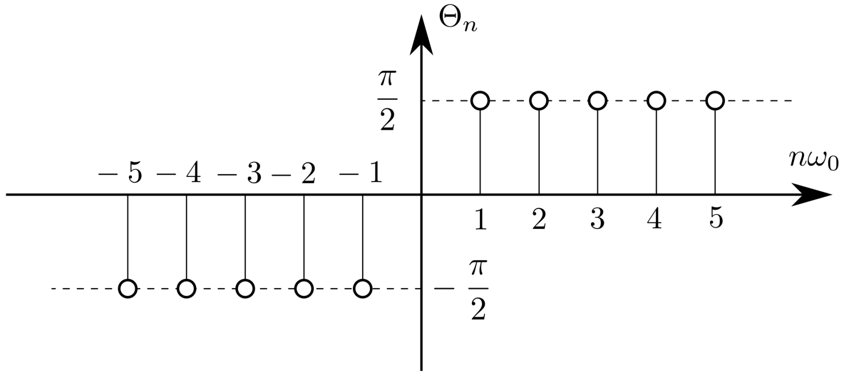


Figura 3.3: Espectro de fase

Pregunta 2

Calcule la transformada inversa de Fourier de la función de frecuencia dada en la Fig. 3.4

Solución

Sea $g(t)$ donde $\mathscr{F}\{g(t)\} = G(\omega)$. Usemos la simetría de la transformada de Fourier, $\mathscr{F}\{G(t)\} = 2\pi g(-\omega)$. Para obtener la transformada inversa, tratemos a $G(\omega)$ como si estuviera en el dominio de t, $G(t)$. Al derivar 2 veces $G(t)$ como se muestra en la Fig. 3.5 , se obtiene:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}G(t) = \delta(t+3) - 2\delta(t+2) + \delta(t+1) + \delta(t-1) - 2\delta(t-2) + \delta(t-3)$$

Usamos la propiedad de la transformada de Fourier de una derivada: $\mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}h(t)\right\} = (j\omega)^n H(w)$ donde

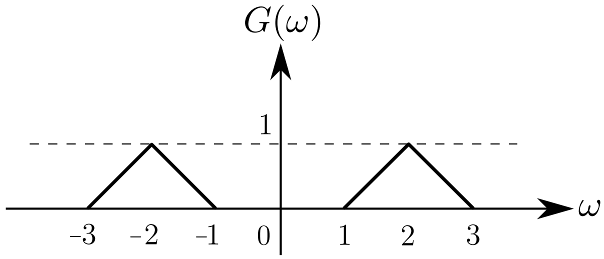


Figura 3.4: Figura del enunciado
Problema 2

$\mathscr{F}\{h(t)\} = H(w)$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}G(t)\right\} = e^{3j\omega} - 2e^{2j\omega} + e^{j\omega} + e^{-j\omega} - 2e^{-2j\omega} + e^{-3j\omega} = (j\omega)^2 \mathscr{F}\{G(t)\}$$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\{G(t)\} = \frac{1}{-\omega^2}\left[\left(e^{3j\omega} + e^{-3j\omega}\right) - 2\left(e^{2j\omega} + e^{-2j\omega}\right) + \left(e^{j\omega} + e^{j\omega}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\{G(t)\} = \frac{-2\cos(3\omega) + 4\cos(2\omega) - 2\cos(\omega)}{\omega^2}$$

Por la propiedad de simetría: $\mathscr{F}\{G(t)\} = 2\pi g(-\omega)$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\{G(t)\} = 2\pi g(-\omega) = \frac{-2\cos(3\omega) + 4\cos(2\omega) - 2\cos(\omega)}{\omega^2}$$

$$\Rightarrow g(\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{-2\cos(3\omega) + 4\cos(2\omega) - 2\cos(\omega)}{\omega^2}$$

Donde usamos el hecho que $g(\omega)$ es una función par. El argumento en si es una variable muda, cambiemos ω por t y finalizamos el problema

$$\mathscr{F}^{-1}\{G(\omega)\} = g(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{-2\cos(3t) + 4\cos(2t) - 2\cos(t)}{t^2}$$

Pregunte 3

Considere la función $f(t) = 5\cos(3t)$. Calcule la potencia contenida por las primeras 6 componentes.

Solución

La serie de Fourier de $5\cos(3t)$ es $5\cos(3t)$. Es la misma función. Los senos de la forma $\sin(nt)$ con $n \in \mathbb{Z}$ son ortogonales en un intervalo de un periodo completo, igual para $\cos(nt)$, $n \in \mathbb{Z}, n \neq 3$. El único coeficiente que no se hace nulo es a_3 que corresponde a $\cos(3t)$, el cual es $a_3 = 5$.

La potencia contenida es

$$P = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{2}a_3^2 = \frac{5^2}{2}$$

Pregunta 4

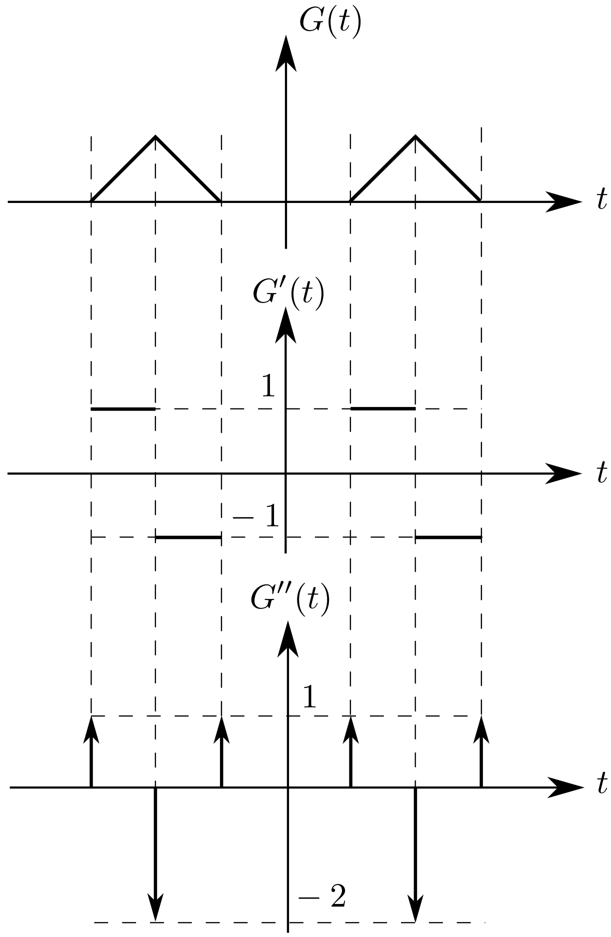


Figura 3.5: $G(t)$ con su primera y segunda derivada
Problema 2

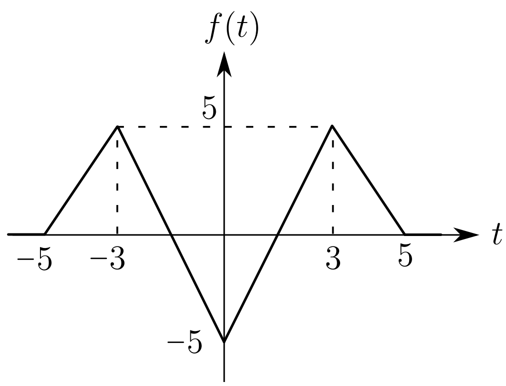


Figura 3.6: Problema 4

Calcule la transformada de Fourier y la energía de la señal de la Fig. 3.6.

Solución

Derivemos 2 veces y usemos propiedades de la transformada de Fourier de las derivadas. La segunda

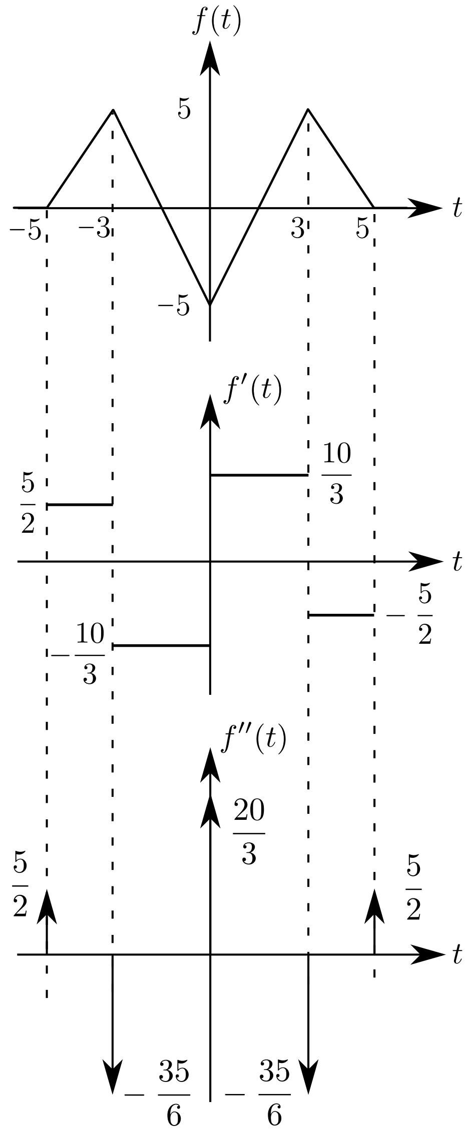


Figura 3.7: $f(t)$ con su primera y segunda derivada.
Problema 4

derivada, como se muestra en la Fig. 3.7 es

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) = \frac{5}{2}\delta(t+5) - \frac{35}{6}\delta(t+3) + \frac{20}{3}\delta(t) - \frac{35}{6}\delta(t-3) + \frac{5}{2}\delta(t+5)$$

Ahora obtenemos la transformada de Fourier

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t)\right\} = \frac{5}{2}e^{j\omega 5} - \frac{35}{6}e^{j\omega 3} + \frac{20}{3} - \frac{35}{6}e^{-j\omega 3} + \frac{5}{2}e^{-j\omega 5} = -\omega^2\mathscr{F}\left\{f(t)\right\}$$

$$-\omega^2\mathscr{F}\left\{f(t)\right\} = \frac{20}{3} + 5\left(\frac{e^{5j\omega} + e^{-5j\omega}}{2}\right) - \frac{35}{3}\left(\frac{e^{3j\omega} + e^{-3j\omega}}{2}\right) = \frac{20}{3} + 5\cos(5\omega) - \frac{35}{3}\cos(3\omega)$$

$$\mathscr{F}\left\{f(t)\right\} = \frac{\frac{35}{3}\cos(3\omega) - 5\cos(5\omega) - \frac{20}{3}}{\omega^2}$$

Para calcular la energiía de la señal, obtenemos la función de $f(t)$. Para $0 < t < 3$, tenemos una pendiente de $10/3$ y corta el eje de $f(t)$ en -5. Para $3 < t < 5$, tiene una pendiente de $-5/2$. Centrando un marco de referencia t' en $t = 5$, encontramos la recta.

$$f(t) = -\frac{5}{2}t' = -\frac{5}{2}(t-5) = -\frac{5}{2}t + \frac{25}{2}$$

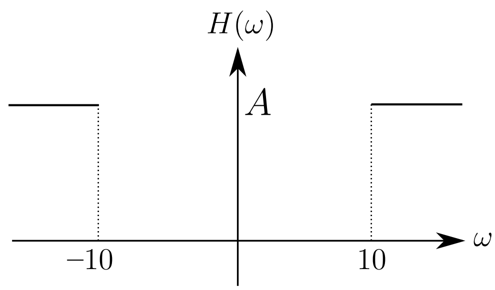
$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{10}{3}t - 5 & \text{para} \quad 0 < t < 3 \\ -\dfrac{5}{2}t + \dfrac{25}{2} & \text{para} \quad 3 < t < 5 \end{cases}$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t = 2\left[\int_0^3 \left(\frac{10}{3}t - 5\right)^2 \mathrm{d}t + \int_3^5 \left(-\frac{5}{2}t + \frac{25}{2}\right)^2 \mathrm{d}t\right] = \frac{250}{3} \text{ J}$$

$$\Rightarrow E = \frac{250}{3}\text{J}$$

Pregunta 5

Si se aplica una señal $f(t) = e^{-8t}u(t)$ por un filtro pasa alto con frecuencias de corte en -10 y 10 rad/s y magnitud A. Determine el valor de A para poder transferir un 75 % de la energía de entrada a la salida.



Solución

La relación entre la potencia de la señal de entrada y la señal se salida se puede escribir como:

$$\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} [y(t)]^2 \, \mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t} = \frac{3}{4}$$

Por el teorema de Parseval, podemos reescribirlo de la manera:

$$\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} [y(t)]^2 \, \mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, |H(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega} = \frac{3}{4}$$

La transformada de Fourier de la señal de entrada $f(t)$ es $\mathscr{F}\left\{f(t)\right\} = \mathscr{F}\left\{e^{-8t}u(t)\right\} = \dfrac{1}{8 + j\omega}$

$\Rightarrow |F(\omega)|^2 = \dfrac{1}{64 + \omega^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega = \int_{\infty}^{\infty} \frac{1}{8^2 + \omega^2} \, \mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{-10} \frac{A^2}{8^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega + \int_{10}^{\infty} \frac{A^2}{8^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega = \frac{A^2}{8}\left(\pi - 2\arctan\left(\frac{5}{4}\right)\right)$$

$$\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega} = \frac{\frac{A^2}{8}\left(\pi - 2\arctan\left(\frac{5}{4}\right)\right)}{\frac{\pi}{8}} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{3\pi}{4\left(\pi - 2\arctan\left(\frac{5}{4}\right)\right)}} \approx 1.32136$$

3.3. III Parcial II Ciclo 2010

Pregunta 1

Para la función periódica $f(t)$ dada abajo, con periodo $T = 6$, halle el contenido de potencia de $f(t)$ hasta la tercera armónica utilizando series de Fourier

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < t < 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2 < t < 4 \\ 1 & \text{si} \quad 4 < t < 6 \end{cases}$$

Solución

$T = 6 \Rightarrow \omega_0 = \dfrac{\pi}{3}$

La función es par, va a contener solo terminos a_k. El intervalo de las integrales para obtener los coeficientes de Fourier se realizan de -3 a 3 para eliminar una integral, pero dentro del intervalo $(-2, 2)$ es diferente de 0, el resto del intervalo $f(t)$ es 0, simplifica los cálculos.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int_{-2}^{2} \mathrm{d}t = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{4}{6}\int_{0}^{2} \cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right)$$

El contenido de la potencia hasta los 3 primeros término esta dado por la expresión:

$$P_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\left(\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{15}{8\pi^2} \approx 0.634422$$

Pregunta 2

Sea $G(\omega) = \mathscr{F}\{g(t)\} = e^{-a\omega j}\cos(b\omega)$. Encuentre $g(t)$ utilizando propiedades y tabla de transformada de Fourier.

Solución

Usemos la propiedad 4 de simetría de la tabla de Fourier, la transformada de Fourier de coseno y la traslación en t

$$\mathscr{F}\left\{\cos(bt)\right\} = \pi\left(\delta(\omega-b)+\delta(\omega+b)\right)$$
$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{\pi\left(\delta(t-b)+\delta(t+b)\right)\right\} = 2\pi\cos(b(-\omega)) = 2\pi\cos(b\omega)$$
$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{\frac{1}{2}\left(\delta(t-b)+\delta(t+b)\right)\right\} = \cos(b\omega)$$

Ahora usemos la propiedad de traslación en el dominio de t, donde ya tenemos $G(\omega)=\cos(b\omega)$

$$\mathscr{F}\left\{g(t-a)\right\} = G(\omega)e^{-ja\omega}$$

$$g(t) = \frac{1}{2}\left[\delta((t-a)-b)+\delta((t-a)+b)\right] = \frac{1}{2}\left[\delta(t-(a+b))+\delta(t-(a-b))\right]$$

Pregunta 3

Sea $f(t)=|t|-\dfrac{\pi}{2}$ si $-\pi\leq t\leq\pi$ tal que $f(t+2\pi)=f(t)$

(a) Expanda $f(t)$ en serie exponencial de Fourier.

(b) Utilice el resultado obtenido en (a) y caso sea necesario, el teorema de Parseval para calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \qquad \text{y} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

Solución

(3.a) Usemos el hecho que la función $f(t)$ para eliminar la integral con el sin más adelante. Del enunciado se sabe que $T=2\pi\Rightarrow\omega_0=1$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t - j\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t$$

$$c_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right]$$

Para el termino c_0, se puede obtener la integral sumando el area entre el eje y la curva, sumado da 0.

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\,e^{jnt}$$

(3.b) Reescribamos la serie de otra manera. Notemas que el termino de $(-1)^n$ hace que desaparezcan terminos de la sumatoria cuando n es par y no se eliminen cuando n es impar. Sea k un número tal que $k\in\mathbb{Z}$

$$(-1)^n-1 = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad n = 2k \\ 0 & \text{si} \quad n = 2k-1 \end{cases}$$

También cuando evaluamos en $f(0)$, los terminos de la sumatoria son simetricos en el aspecto que $c_k = c_{-k}$. Al aplicar estos 2 cambiamos, podemos escribirla de la manera:

$$f(0) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{\pi\left(2k-1\right)^2}$$

$$-\frac{\pi}{2} = \frac{-4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2k-1\right)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2k-1\right)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Para la otra sumatoria, usamos el teorema de Parseval, y aprovechamos que la función es par.

$$\frac{1}{2\pi}\, 2\int_0^{\pi} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[(-1)^n - 1\right]^2}{\pi^2 n^4}$$

Reescribimos la sumatoria para quitar el término $(-1)^n - 1$

$$\frac{\pi^2}{12} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^2}{\pi^2\left(2k-1\right)^4} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(2k-1\right)^4} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(2k-1\right)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Pregunta 4

Si $\mathscr{F}\left\{f(t)\right\} = F(\omega)$ utilice la definición de transformada de Fourier para demostrar que $\mathscr{F}\left\{e^{jbt} f(at)\right\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega - b}{a}\right)$, $a \neq 0$ real, $b \in \mathbb{R}$.

Solución

Sea $\mathscr{F}\left\{f(t)\right\} = F(\omega)$ y asumamos para el primer caso que $a > 0$

$$\mathscr{F}\left\{e^{jbt} f(at)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jbt} f(at) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$

Sea $u = at$. Cuando $t \to \infty$; $u \to \infty$ y $t \to -\infty$; $u \to -\infty$. $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{a}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(jb\frac{u}{a}\right) f(u) \exp\left(-j\omega\frac{u}{a}\right) \frac{\mathrm{d}u}{a} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \exp\left[-j\left(\frac{\omega - b}{a}\right)t\right] \mathrm{d}t = \frac{1}{a} F\left(\frac{w-b}{a}\right)$$

Para el caso que $a < 0$, se procede de una manera similar. Sea $u = at$. Cuando $t \to -\infty; u \to \infty$ y $t \to -\infty; u \to \infty$

$$= \int_{\infty}^{-\infty} \exp\left(jb\frac{u}{a}\right) f(u) \exp\left(-j\omega\frac{u}{a}\right) \frac{\mathrm{d}u}{a} = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \exp\left[-j\left(\frac{\omega - b}{a}\right)t\right] \mathrm{d}t = -\frac{1}{a} F\left(\frac{w-b}{a}\right)$$

Con esto se generaliza $\mathscr{F}\left\{e^{jbt} f(at)\right\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega - b}{a}\right)$

Pregunta 5

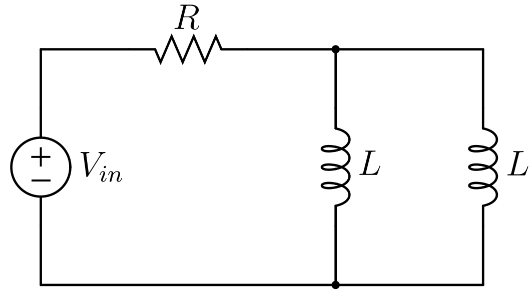


Figura 3.8: Pregunta 5

Considere el circuito de la Fig. 3.8

(a) Determine la función de transferencia considerando como la salida la corriente que pasa por el inductor de la derecha.

(b) Calcule la respuesta al impulso de ese circuito. Utilice $R = 1\Omega$ y $L = 1$ H

Solución

La inductancia equivalente de los inductores paralelos es $L/2$. Por la simetría del circuito, la corriente que pasa por la resistencia es el doble de la corriente que fluye por los inductores. $i_R = 2\ i_L$ Aplicamos la ley de Faraday para el circuito:

$$-v(t) + i_R R = -\frac{L}{2}\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}$$

Aplicamos transformada de Fourier:

$$-V(\omega) + RI_R(\omega) = -j\omega\frac{L}{2}I_R(\omega)$$

$$\Rightarrow -V(\omega) + 2RI_L(\omega) = -j\omega LI_L(\omega)$$

$$\Rightarrow \frac{I_L(\omega)}{V(\omega)} = \frac{1}{2R + jL\omega} = H(\omega)$$

(5.b) Con $R = 1\ \Omega$ y $L = 1\ H$ y usando la propiedad 22 en la tabla de transformadas de Fourier, obtenemos $h(t)$

$$H(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega} \Rightarrow h(t) = e^{-2t}u(t)$$

3.4. III Parcial I Ciclo 2011

Pregunta 1

La representación de una función $f(t)$ en serie trigonométrica de Fourier es:

$$f(t) = \frac{5}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(nt)}{n} - \frac{\sin(nt)}{n}\right)$$

(a) Calcule la potencia contenida por las primeras 5 armónicas.

(b) Grafique el espectro de magnitud y fase para la serie compacta.

Solución

(1.a)

$$f(t) = \frac{5}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nt)}{n} - \frac{\sin(nt)}{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5\cos(nt)}{n\pi} - \frac{5\sin(nt)}{n\pi}$$

$$a_0 = 0 \qquad a_n = \frac{5}{n\pi} \qquad b_n = -\frac{5}{n\pi}$$

La potencia hasta el $k-$ésimo armónico esta dado por al expresión:

$$P_k = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} a_n^2 + b_n^2 = \frac{25}{\pi^2}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2} \Rightarrow P_5 = \frac{25}{\pi^2}\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n^2} = \frac{5269}{144}\frac{1}{\pi^2} \approx 3.707$$

(1.b)

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\frac{25}{n^2\pi^2} + \frac{25}{n^2\pi^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{n\pi}$$

El ángulo de fase es siempre $\pi/4$, ya que $a_n = -b_n \Rightarrow -\arctan(b_n/a_n) = \pi/4$

Pregunta 2

Considere el circuito de la Fig. 3.9

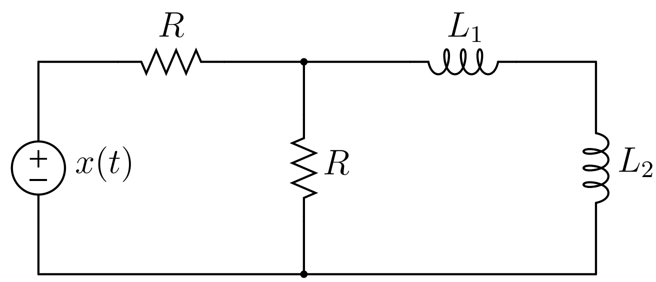


Figura 3.9: Pregunta 2

(a) Determine la función de transferencia, si considera la corriente que pasa por los inductores como la salida.

(b) Si los inductores son de 1 H y la resistencia de 1 Ω, calcule $y(t)$, si la entrada es $x(t) = 4\delta(t)$.

Solución

Sea L la inductancia equivalente de los inductores L_1 y L_2. La inductancia equivalente de los inductores es $L = L_1 + L_2$. Sea i_R la corriente que fluye por la resistencia en paralelo a los inductores y i_L la corriente que fluye por los inductores.

Al aplicar la Ley de Faraday sobre el circuito, obtenemos las ecuaciones:

$$-x(t) + R\left(i_R(t) + i_L(t)\right) = -L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \qquad - Ri_R = -L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

Combinando las 2 ecuaciones y reordenando, obtenemos:

$$R\left(\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L\right)+L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=2L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+Ri_L=x(t)$$

Aplicando transformada de Fourier:

$$2Lj\omega I(\omega)+RI(\omega)=X(\omega)\Rightarrow\frac{I(\omega)}{X(\omega)}=\frac{1}{R+2Lj\omega}=H(\omega)$$

Si la entrada $x(t)=4\delta(t)$. La transformada de Fourier de la entrada es $X(\omega)=4$. Con los valores $R=1\ \Omega, L=2\ \mathrm{H}$

$$I(\omega)=\frac{4}{1+4j\omega}=\frac{1}{\dfrac{1}{4}+j\omega}$$

Usando la tabla de transformadas de Fourier, obtenemos $i(t)=\exp\left(-\frac{1}{4}t\right)u(t)$

Pregunta 3

Utilice transformada de Fourier para calcular la convolución $(f*g)(t)$ si $f(t)=\sin(bt)$, $g(t)=e^{-a|t|}$, $a>0$

Solución

$$f(t)=\sin(bt)\Rightarrow F(\omega)=-j\pi\left[\delta(\omega-b)-\delta(\omega+b)\right]\qquad g(t)=e^{-a|t|}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

Obtengamos la transformada de Fourier de la convolución y luego calculemos la transformada inversa.

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\mathscr{F}(f*g)\right\}=(f*g)(t)$$

$$\mathscr{F}\left\{f*g\right\}(t)=F(\omega)G(\omega)=-j\pi\left[\delta(\omega-b)-\delta(\omega+b)\right]\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\Rightarrow(f*g)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}-j\pi\left[\delta(\omega-b)-\delta(\omega+b)\right]\frac{2a}{a^2+\omega^2}e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$=-ja\left[\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-b)\frac{1}{a^2+\omega^2}\ e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega+b)\frac{1}{a^2+\omega^2}\ e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega\right]$$

$$=-ja\left(\frac{e^{jbt}}{a^2+b^2}-\frac{e^{-jbt}}{a^2+b^2}\right)=\frac{2a}{a^2+b^2}\left(\frac{e^{jbt}-e^{-jbt}}{2j}\right)=\frac{2a}{a^2+b^2}\ \sin(bt)$$

$$(f*g)(t)=\frac{2a}{a^2+b^2}\sin(bt)$$

Pregunta 4

Sea $f(t)=\sin(t/2)$, $0\leq t\leq\pi$. Desarrolle $f(t)$ en serie de Fourier en cosenos. Utilice el resultado anterior y el teorema de Parseval para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$

Solución

Para el desarrollo en serie de Fourier de cosenos, tenemos $T = 2\pi \Rightarrow \omega_0 = 1$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(nt)\ \mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}\frac{1}{(1-4n^2)}$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{1}{(1-4n^2)}\cos(nt)$$

Ahora usamos el teorema de Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\ \mathrm{d}t = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{16}\left(\pi^2-8\right)$$

Pregunta 5

Sea $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < t < \pi \\ 0 & \text{si} \quad \pi < t < 3\pi \\ 1 & \text{si} \quad 3\pi < t < 4\pi \end{cases}$

(a) Dibuje el espectro discreto de magnitud de la serie trigonométrica de Fourier para las primeras cinco armónicas.

(b) Demuestre que $\displaystyle\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ utilizando la serie trigonométrica de Fourier.

Solución

La función $f(t)$ es una función par, lo que implica que los término b_n sean 0. $T = 4\pi \Rightarrow \omega_0 = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{4}{4\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{nt}{2}\right)$$

El espectro de magnitud es

Ya que $f(t)$ es par, los coeficientes c_n son reales, no tienen componente sin en la descomposición de Fourier, el ángulo de fase es 0 ó π. Entonces va a ser Θ_n es $\Theta_n = 0$ cuando $2\sin(n\pi/2)/(n\pi) \geq 0$ y $\Theta_n = \pi$ cuando $2\sin(n\pi/2)/(n\pi) < 0$. En $n = 0$ se puede probar que

$$\lim_{n\to 0}\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1 > 0$$

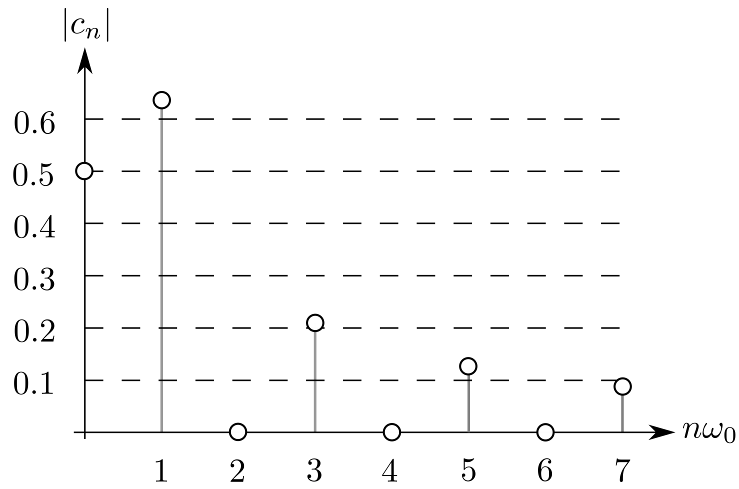


Figura 3.10: Espectro de amplitud.
Pregunta **(5.a)**

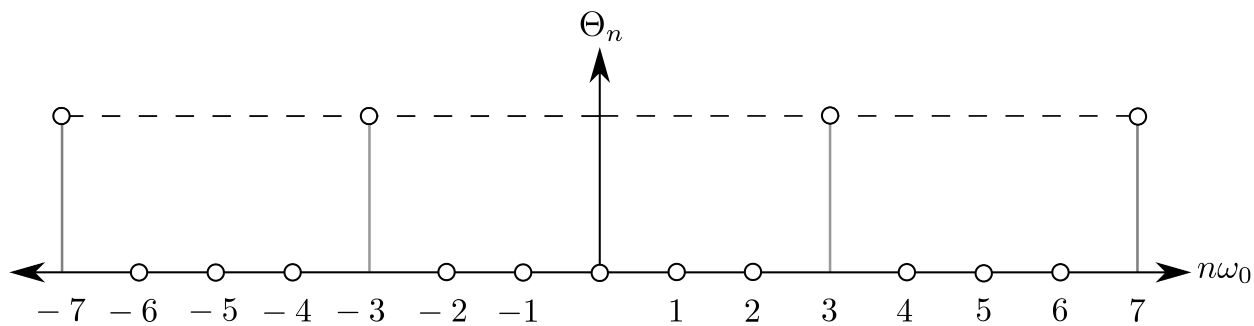


Figura 3.11: Espectro de fase.
Pregunta **(5.a)**

El espectro de fase es

(b) Reescribamos la sumatoria notando como se comporta $\sin(n\pi/2)$. Sea k donde $k \in \mathbb{Z}$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 4k \\ 1 & \text{si} \quad n = 4k+1 \\ 0 & \text{si} \quad n = 4k+2 \\ -1 & \text{si} \quad n = 4k+3 \end{cases}$$

Solo sobreviven los terminos cuando n es un impar y estos terminos van alternando el signo. Podemos reescribir una sumatoria de manera donde $g(n)$ los terminos de la sumatoria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} g(2n-1)$$

Evaluemos en 0 para determinar la sumatoria que pide el problema.

$$f(0) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

Pregunta 6

Obtenga la transformada inversa de Fourier de

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{j(\omega+\omega_0)}{a^2+2aj(\omega+\omega_0)-(\omega+\omega_0)^2} + \frac{j(\omega-\omega_0)}{a^2+2aj(\omega-\omega_0)-(\omega-\omega_0)^2}\right)$$

Solución

Los 2 términos de la función están desplazadas en ω. Obtenemos la inversa de una y agregamos el término para desplazar. Manipulamos la expresión para que quede en identidades conocidas en la tabla de Fourier.

$$\frac{j\omega}{a^2+2aj\omega-\omega^2} = \frac{j\omega}{(a+j\omega)^2} = \frac{j\omega+a-a}{(a+j\omega)^2} = \frac{1}{a+j\omega} - \frac{a}{(a+j\omega)^2}$$

De aquí, ya tenemos la expresión con el formato para fijarnos, la transformada inversa es

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a+j\omega} - \frac{a}{(a+j\omega)^2}\right\} = e^{-at}u(t) - ate^{-at}u(t)$$

Para los 2 términos agregamos el término de traslación en ω: $\mathscr{F}\left\{f(t)e^{j\omega_o t}\right\} = F(\omega-\omega_0)$

$$\frac{1}{2}\,\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{j\,(\omega+\omega_0)}{a^2+2aj(\omega+\omega_0)-(\omega+\omega_0)^2} + \frac{j\,(\omega-\omega_0)}{a^2+2aj(\omega-\omega_0)-(\omega-\omega_0)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{j\omega}{a^2+2aj\omega-\omega^2}\right\}e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2}\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{j\omega}{a^2+2aj\omega-\omega^2}\right\}e^{j\omega_0 t}$$

$$= \mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{j\omega}{a^2+2aj\omega-\omega^2}\right\}\left(\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right) = \left(e^{-at}u(t) - ate^{-at}u(t)\right)\cos(\omega_0 t)$$

$$= (1-at)\,e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$$

3.5. III Parcial II Ciclo 2011

Pregunta 1

Desarrolle en serie trigonométrica de Fourier la función la función periódica de la Fig. 3.12

Solución

La función es par, solo va a tener términos a_n en una serie de Fourier. Averiguemos el periodo. Tomemos com punto donde se repite la función el punto medio entre d y p. La parte donde $f(t) = 0$ es de longitud $p-d$, la mitad es $(p-d)/2$. Entonces medio periodo es

$$\frac{T}{2} = d + \frac{p-d}{2} = \frac{p+d}{2}$$

El periodo de la onda es $T = p + d$ y ω_0 es

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{p+d}$$

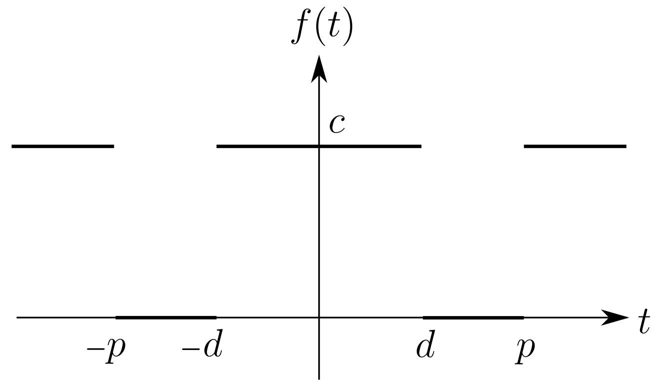


Figura 3.12: Pregunta 1

Encontramos las componentes, integramos desde $-(p+d)/2$ hasta $(p+d)/2$, que sería de $-d$ hasta d, ya que $f(t)$ es 0 fuera de esa sección del periodo.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-(p+d)/2}^{(p+d)/2} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{p+d}\int_{-d}^{d} c\ \mathrm{d}t = \frac{2cd}{p+d}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-(p+d)/2}^{(p+d)/2} \cos(n\omega_0 t)\, f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{2}{p+d}\int_{-d}^{d} \cos\left(\frac{2\pi nt}{p+d}\right) c\ \mathrm{d}t = \frac{2c}{n\pi}\sin\left(\frac{2nd\pi}{p+d}\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2cd}{p+d} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2c}{n\pi}\sin\left(\frac{2\pi nd}{p+d}\right)\cos\left(\frac{2\pi nt}{p+d}\right)$$

Pregunta 2

Determine la transformada de Fourier de la función representada en la Fig. 3.13

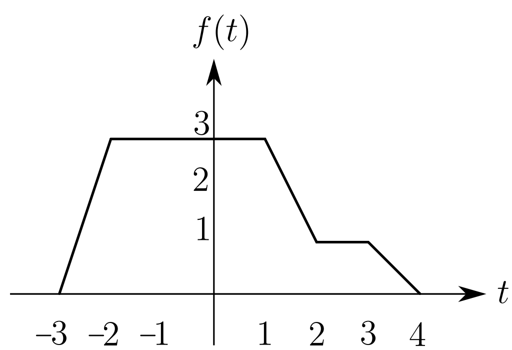


Figura 3.13: Pregunta 2

Solución

Obtenemos la transformada derivando $f(t)$ dos veces como se muestra en la Fig. 3.14 y usamos la propiedad de la transformada de Fourier de la derivada $n-$ésima.

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(t)\right\} = (j\omega)^n F(\omega)$$

Por otro lado:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) = 3\delta(t+3) - 3\delta(t+2) - 2\delta(t-1) + 2\delta(t-2) - \delta(t-3) + \delta(t-4)$$

Igualamos

$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t)\right\} = 3e^{3j\omega} - 3e^{2j\omega} - 2^{-j\omega} + 2e^{-2j\omega} - e^{-3j\omega} + e^{-4j\omega} = -\omega^2 F(\omega)$$

$$\Rightarrow F(\omega) = -\frac{1}{\omega^2}\left(3e^{3j\omega} - 3e^{2j\omega} - 2e^{-j\omega} + 2e^{-2j\omega} - e^{-3j\omega} + e^{-4j\omega}\right)$$

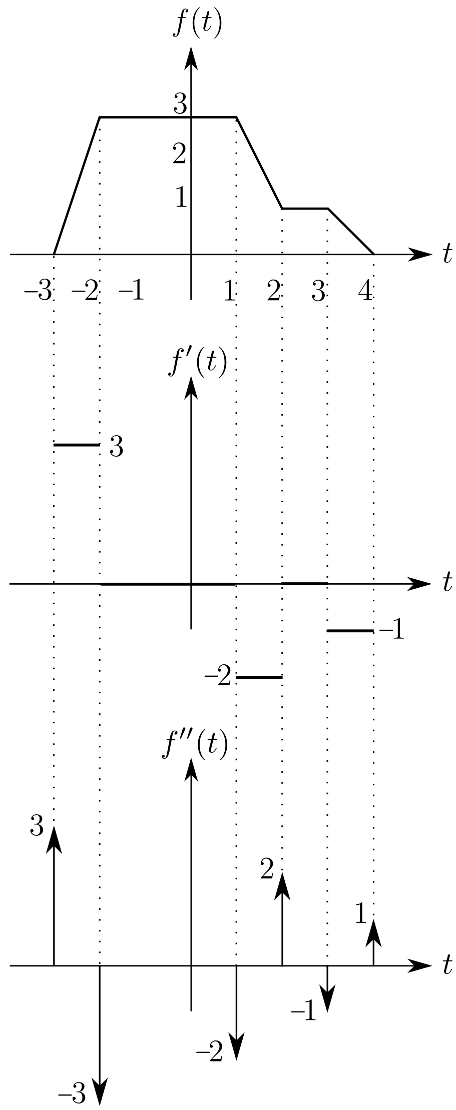


Figura 3.14: $f(t)$ con sus primera y segunda derivada.
Pregunta 2

Pregunta 3[1]

Si se aplica una tensión senoidal $f(t) = \sin(t)$ a través de un rectificador de medio onda como se muestra en la Fig. 3.15, tal que se suprimen los ciclos negativos, determine la potencia contenida hasta la tercera armónica

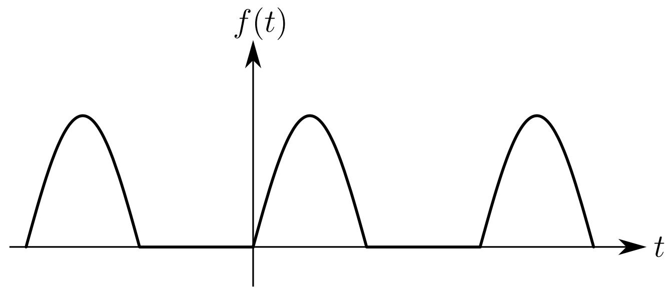


Figura 3.15: Pregunta 3

Solución $T = 2\pi \Rightarrow \omega_0 = 1$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)\ \mathrm{d}t = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t = \frac{1+(-1)^n}{\pi}\frac{1}{1-n^2}$$

$$a_n = \frac{1+(-1)^n}{\pi}\frac{1}{1-n^2}\ ;\ n \neq 1$$

n no puede ser igual 1, obtengamos a_1 como caso especial.

$$a_1 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\cos(t)\ \mathrm{d}t = 0$$

Ahora obtengamos los terminos b_n

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)\ \mathrm{d}t = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = 0$$

Ahora analicemos el caso de b_1. El $\sin(t)$ no es ortogonal a la función misma.

$$b_1 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\sin(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\pi}\frac{1}{1-n^2}\cos(nt) + \frac{1}{2}\sin(t)$$

Notese que la sumatoria empieza en $n = 2$. La potencia hasta el tercer armónico se obtiene:

$$P_3 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3} a_n^2 + b_n^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(b_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$$

[1] Los coeficientes son algo tramposos.

$$P_3 = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2} + \left[\frac{2}{\pi\left(1-2^2\right)^2}\right] + 0\right) \approx 0.2488$$

Pregunta 4

La señal $f(t) = 2\left(\sin^2(2t) - \cos^2(t)\right)$ si aplica un filtro pasa banda ideal con frecuencias de cruce en $-3; 1$ rad/s y $1; 3$ rads/s como se muestra en la Fig. 3.16. Determine la función $y(t)$ de la señal de salida del filtro.

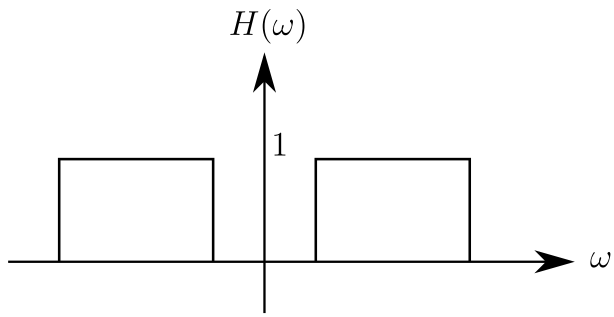


Figura 3.16: Pregunta 4

Solución Reacomodamos $f(t)$ para obtener la transformada de Fourier

$$f(t) = 2\left[\sin^2(2t) - \cos^2(t)\right] = 2\left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(4t)}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2}\right)\right] = -\left[\cos(4t) + \cos(2t)\right]$$

Ahora obtenemos la transformada

$$\Rightarrow F(\omega) = -\left[\pi\left[\delta(\omega-4) + \delta(\omega+4)\right] + \pi\left[\delta(\omega-2) + \delta(\omega+2)\right]\right]$$

$$\Rightarrow F(\omega) = -\pi\left[\delta(\omega-4) + \delta(\omega+4) + \delta(\omega-2) + \delta(\omega+2)\right]$$

Para obtener $y(t)$, calculemos la transformada inversa de $F(\omega)H(\omega)$.

Sea $\xi(t) := \delta(\omega-4) + \delta(\omega+4) + \delta(\omega-2) + \delta(\omega+2) \Rightarrow F(\omega) = \pi\xi(t)$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-3}^{-1} -\pi\xi e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega + \int_{1}^{3} -\pi\xi e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\right]$$

Dentro de cada región de integracion, la integral de la izquierda, el único $\delta(\omega-\omega_0)$ dentro del intervalo es $\delta(\omega+2)$, para la integral de la derecha, el $\delta(\omega-2)$ es el único delta dentro del intervalo. Las integrales resultan:

$$\frac{1}{2\pi}\left(-\pi e^{-2jt} - \pi e^{2jt}\right) = -\cos(2t) \Rightarrow y(t) = -\cos(2t)$$

Pregunta 5

Sea $f(t) = \begin{cases} \pi^2 & \text{si} \quad -\pi < t < 0 \\ (t-\pi)^2 & \text{si} \quad 0 < t < \pi \end{cases}$ con $f(t+2\pi) = f(t)$

(a) Determine la serie trigonométrica de Fourier para $f(t)$.

(b) Utilice el resultado de **(a)** para calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Solución

(5.a) El periodo de la función es $T = 2\pi$, entonces tenemos que $\omega_0 = 1$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \pi^2\ \mathrm{d}t + \int_0^{\pi} (t-\pi)^2\ \mathrm{d}t\right) = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega_0 t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \pi^2\cos(nt)\ \mathrm{d}t + \int_0^{\pi} (t-\pi)^2\cos(nt)\ \mathrm{d}t\right) = \frac{2}{n^2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(n\omega_0 t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \pi^2\sin(nt)\ \mathrm{d}t + \int_0^{\pi} (t-\pi)^2\sin(nt)\ \mathrm{d}t\right)$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{-2+(-1)^n(2+n^2\pi^2)}{n^3\pi}$$

La serie de Fourier de $f(t)$ es

$$f(t) = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}\cos(nt) + \frac{-2+(-1)^n(2+n^2\pi^2)}{n^3\pi}\sin(nt)$$

(5.b) Para determinar la primera sumatoria, evaluamos en $t = 0$, para eliminar la parte del seno. La función en $t = 0$ es $f(0) = \pi^2$

$$f(0) = \pi^2 = \frac{2\pi^2}{3} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} = \frac{\pi^2}{6}$$

Para la segunda sumatoria, evaluamos en $t = \pi$, donde también se elimina la parte del seno. Al evaluar en $t = \pi$, coseno solo alterna el signo.

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

Ya que $f(t)$ es discontinua en $t = \pi$, la serie de Fourier converge al promedio de la función en ese punto

$$\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{2} = \frac{2\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Pasando el signo al otro lado e incluyendo $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Pregunta 6

Calcule las siguiente transformada: $f(t) = t^2 e^{-5|t|}$

Solución

Empecemos por la definición y dividamos la integral en 2 intervalos

$$\mathscr{F}\left\{t^2e^{-5|t|}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-5|t|}e^{-j\omega t}\ \mathrm{dt} = \int_{-\infty}^{0} t^2e^{5t}e^{-j\omega t}\ \mathrm{dt} + \int_{0}^{\infty} t^2e^{-5t}e^{-j\omega t}\ \mathrm{dt}$$

La segunda integral que va de 0 a ∞ es equivalente a obtener la transformada de Fourier de $t^2e^{-5t}u(t)$, usando la propiedad 22

$$\mathscr{F}\left\{\frac{t^{3-1}e^{-5t}}{(3-1)!}\right\} = \frac{1}{(5+j\omega)^3}$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} t^2e^{-5t}e^{-j\omega t}\ \mathrm{dt} = \mathscr{F}\left\{t^2e^{-5t}\right\} = \frac{2}{(5+j\omega)^3} \tag{3.1}$$

La primera integral que va de $-\infty$ a 0, hacemos el cambio de variable $-t = u$

$$t \to 0 \Rightarrow u \to 0$$

$$t \to -\infty \Rightarrow u \to \infty$$

$$\int_{-\infty}^{0} t^2e^{5t}e^{-j\omega t}\ \mathrm{dt} = \int_{\infty}^{0} u^2e^{-5u}e^{j\omega u}\,(-\mathrm{du})$$

Ahora, si hacemos $-\omega' = \omega$ y le damos vuelta a los límites de integración, obtenemos

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} t^2e^{5t}e^{-j\omega t}\ \mathrm{dt} = \int_{0}^{\infty} u^2e^{-5u}e^{-j\omega' u}\ \mathrm{du}$$

Esta integral ya la calculamos en la Ec. 3.1, entonces

$$\int_{-\infty}^{0} t^2e^{5t}e^{-j\omega t}\ \mathrm{dt} = \int_{0}^{\infty} u^2e^{-5u}e^{-j\omega' u}\ \mathrm{du} = \frac{2}{(5+j\omega')^3} = \frac{2}{(5-j\omega)^3}$$

Sumando las 2 integrales, obtenemos

$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{t^2e^{-5|t|}\right\} = \frac{2}{(5-j\omega)^3} + \frac{2}{(5+j\omega)^3}$$

3.6. III Parcial II Ciclo 2012

Pregunta 1

Sea $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 < t < 2 \end{cases}$ periódica con periodo $T = 2$ segundos.

(a) Desarrolle $f(t)$ en serie trigonométrica de Fourier.

(b) Utilice el desarrollo anterior para calcular las sumas: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solución

(1.a) $T = 2 \Rightarrow \omega_0 = \pi$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} t^2\ \mathrm{dt} = \frac{1}{6}$$

Para las obtener los otros coeficientes, podemos ayudarnos con las integrales:

$$\int x^2 \cos(ax)\ \mathrm{d}x = \frac{2x}{a}\cos(ax) + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin(ax) + C$$

$$\int x^2 \sin(ax)\ \mathrm{d}x = \frac{2x}{a^2}\sin(ax) + \left(\frac{2}{a^3} - \frac{x^2}{a}\right)\cos(ax) + C$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^1 t^2\cos(n\pi t)\ \mathrm{d}t = \frac{2\cos(n\pi)}{\pi^2 n^2} = \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^1 t^2\sin(n\pi t)\ \mathrm{d}t = \left(\frac{2}{n^3\pi^3} - \frac{1}{n\pi}\right)(-1)^n - \frac{2}{n^3\pi^3}$$

$$f(t) = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos(n\pi t) + \left[\left(\frac{2}{n^3\pi^3} - \frac{1}{n\pi}\right)(-1)^n - \frac{2}{n^3\pi^3}\right]\sin(n\pi t)$$

(1.b) Evaluamos en $t = 0$ para obtenes la primera sumatoria.

$$f(0) = 0 = \frac{1}{6} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Ahora evaluamos en $t = 1$ para eliminar el $(-1)^n$ con un $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Como la función no es continua en ese punto, la serie converge al promedio entre los puntos de discontinuidad, sacamos el promedio entre los 2 puntos, 1 y 0, que es 1/2

$$f(1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Pregunta 2

(a) $e^{t^2}\sin(t)$

(b) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -a < t < a \\ 0 & \text{si} \quad |t| > a \end{cases}$

(c) $g(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ utilizando el resultado del punto **(b)** y la propiedad de simetría.

Solución

(2.a)

$$\mathscr{F}\left\{e^{t^2}\sin(t)\right\} = \mathscr{F}\left\{e^{t^2}\left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}\right)\right\} = \frac{1}{2j}\mathscr{F}\left\{e^{t^2+jt} - e^{t^2-jt}\right\}$$

Completando cuadrados para los exponentes:

$$t^2 + jt = \left(t + \frac{j}{2}\right) + \frac{1}{4} \quad , \quad t^2 - jt = \left(t - \frac{j}{2}\right) + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2j}\mathscr{F}\left\{e^{t^2+jt} - e^{t^2-jt}\right\} = \frac{e^{\frac{1}{4}}}{2j}\left[\mathscr{F}\left\{e^{\left(t+\frac{j}{2}\right)^2}\right\} - \mathscr{F}\left\{e^{\left(t-\frac{j}{2}\right)^2}\right\}\right]$$

Ahora podemos usar la tabla de transformadas. La propiedad de traslación

$$\mathscr{F}\left\{f(t-t_0)\right\} = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Con $t_0 = \pm\frac{j}{2}$ para cada caso. Ahora usamos la transformada de la Gaussiana con $a = -1$

$$F(\omega) = \mathscr{F}\left\{e^{t^2}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{-1}} e^{\frac{-\omega^2}{4(-1)}} = \frac{\sqrt{\pi}}{j} e^{\frac{\omega^2}{4}}$$

Combinando estas propiedades, tenemos

$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{e^{t^2}\sin(t)\right\} = \frac{e^{\frac{1}{4}}}{2j}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{j}e^{\frac{\omega^2}{4}}e^{\frac{-\omega}{2}} - \frac{\sqrt{\pi}}{j}e^{\frac{\omega^2}{4}}e^{\frac{\omega}{2}}\right) = -\frac{\sqrt{\pi}e^{1/4}}{2}\left[\exp\left(\frac{\omega^2}{4}-\frac{\omega}{2}\right) - \exp\left(\frac{\omega^2}{4}+\frac{\omega}{2}\right)\right]$$

(2.b)

$$\mathscr{F}\left\{f(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}\omega = \int_{-a}^{a} e^{-jwt}\mathrm{d}t = -\frac{e^{-j\omega a}}{j\omega} + \frac{e^{j\omega a}}{j\omega} = 2\,\frac{\sin(\omega a)}{\omega}$$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{f(t)\right\} = 2\,\frac{\sin(\omega a)}{\omega}$$

(2.c) Para obtener la transformada de Fourier de $g(t)$ usando la parte **2.b**, hacemos $a = 1$, y usamos la propiedad de simetría.

$$\mathscr{F}\left\{2\frac{\sin(t)}{t}\right\} = 2\pi f(-\omega) \Rightarrow \mathscr{F}\left\{\frac{\sin(t)}{t}\right\} = \pi f(\omega)$$

Usamos el hecho que $f(\omega)$ es una función par. Como evaluamos en $a = 1$, la función $f(\omega)$ es:

$$f(\omega)\begin{cases} \pi & \text{si} \quad |\omega| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |\omega| > 1 \end{cases}$$

Pregunta 3

Calcule la transformada inversa de Fourier de la siguiente función. Simplifique al máximo.

$$F(\omega) = \frac{1-\omega}{1+2j(\omega-1)-(\omega-1)^2}$$

Solución

$$F(\omega) = \frac{1-\omega}{1+2j(\omega-1)-(\omega-1)^2} = -\frac{\omega-1}{1+2j(\omega-1)-(\omega-1)^2}$$

La transformada esta desplazada en ω, sacamos la transformada inversa de solo ω y agregamos e^{jt} a la transformada inversa.

$$\frac{\omega}{1+2j\omega-\omega^2} = \frac{\omega}{(1+j\omega)^2} = \frac{1}{j}\frac{j\omega+1-1}{(1+j\omega)} = -j\left[\frac{1+j}{(1+j\omega)^2} - \frac{1}{(1+j\omega)^2}\right]$$

$$-j\left[\frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{1+j\omega}\right]$$

Ahora obtenemos la transformada inversa

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1-\omega}{1+2j(\omega-1)-(\omega-1)^2}\right\} = -j\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+j\omega}-\frac{1}{1+j\omega}\right\}e^{jt}$$

$$= -j\left(e^{-t}u(t) - te^{-t}u(t)\right)e^{jt} = je^{-t}e^{jt}(1-t)u(t)$$

Pregunta 4

La señal de entrada $y(t) = e^{-5t}u(t)$ se aplica simultáneamente a dos filtros pasa bandas, cuyas funciones de transferencia se observan en la Fig. 3.17. La amplitud de uno de los filtros es A y la del otro B y el gráfico no está a escala. Determine la relación entre A y B, tal que la energía de la señal de salida, $x(t)$ sea igual al 20 % de la enería total de entrada. Asuma que $x(t)$ es igual a la señal de cada uno de los filtros.

Nota: $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$

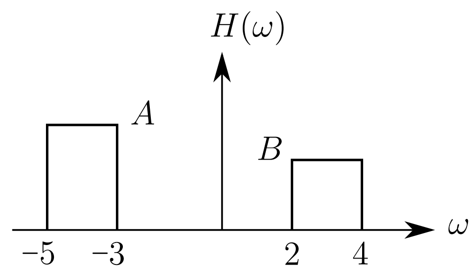


Figura 3.17: Pregunta 4

Solución

$$y(t) = e^{-5t}u(t) \Rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{5+j\omega}$$

El problema pide que la energía de la señal $x(t)$ sea un quinta parte de la energía de la señal de entrada.

$$\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}[x(t)]^2\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}[y(t)]^2\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{5}$$

Utilizamos el teorema de Parseval

$$\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}[x(t)]^2\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}[y(t)]^2\,\mathrm{d}t} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|Y(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|Y(\omega)|^2\,|H(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|Y(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|Y(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{25+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|Y(\omega)|^2\,|H(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega = \int_{-5}^{3}\frac{A^2}{25+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega + \int_{2}^{4}\frac{B^2}{25+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega = \frac{A^2}{5}\arctan\left(\frac{\omega}{5}\right)\Big|_{-5}^{-3} + \frac{B^2}{5}\arctan\left(\frac{\omega}{5}\right)\Big|_{2}^{4}$$

$$= \frac{A^2}{5}\left[\arctan(1) - \arctan\left(\frac{3}{5}\right)\right] + \frac{B^2}{5}\left[\arctan\left(\frac{4}{5}\right) - \arctan\left(\frac{2}{5}\right)\right]$$

Después de hacer la división y reordenar un poco, A y B pueden tomar valores tal que cumplan con:

$$A^2\left[\arctan(1) - \arctan\left(\frac{3}{5}\right)\right] + B^2\left[\arctan\left(\frac{4}{5}\right) - \arctan\left(\frac{2}{5}\right)\right] = \frac{\pi}{5}$$

No estoy seguro si el problema quería una respuesta en este formato, pero si nos dan cierto valor de A, podemos encontrar el de B inmediato tal que el filtro funcione como se desea.

3.7. III Parcial I Ciclo 2013

Pregunta 1

Sea $f(t) = |\cos(t)|\,, -\infty < t < \infty$

(a) Desarrolle $f(t)$ en serie trigonométrica de Fourier.

(b) Use la serie obtenida en **(a)** para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$

(c) Utilice la obtenida en **(a)** y el teorema de Parseval para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$

Solución

(1.a) Ver **III Parcial II Ciclo 2014 Pregunta 5.b** donde se hace para $|\cos(\pi t/T)|$ y altura A, donde se obtuvo

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

Para este problema, $T = \pi$ y $A = 1$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos(2nt)$$

(1.b) Evaluemos $f(t)$ en $t = 0$, el cos de la expansión pasa a ser $\cos(0) = 1$ y despejamos la serie que nos piden

$$f(0) = 1 = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{2}{\pi} = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2-\pi}{4}$$

(1.c) Aplicando el teorema de Parseval, usando que $b_n = 0$ obtenemos

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(t)\ \mathrm{d}t = \frac{4}{\pi^2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

La integral del LHS da

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

Entonces

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2} = \left(\frac{\pi^2-8}{16}\right)$$

Pregunta 2

(a) Utilice la definición de transformada de Fourier para demostrar que $\mathscr{F}\left\{e^{-a|t|}\right\} = \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}, a > 0$

(b) Utilice **(a)** y el teorema de Parseval para calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{(a^2+\omega^2)^2}$

Solución

(2.a)

Ver **III Parcial I Ciclo 2008 Pregunta 3**

(2.b)

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)]^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2a|t|}\ \mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\infty}e^{-2at}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4a^2}{(a^2+\omega^2)^2}\ \mathrm{d}\omega = \frac{2a^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a^2+\omega^2)^2}\ \mathrm{d}\omega$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{a^2}\int_{0}^{\infty}e^{-2at}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a^2+\omega^2)^2}\ \mathrm{d}\omega$$

$$\int_{0}^{\infty}e^{-2at}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2a} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a^2+\omega^2)^2}\ \mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2a^3}$$

Pregunta 3

Considere la señal periódica $f(t)$ mostrada en la Fig. 3.18

Muestre que el nivel DC y la primera armónica de $f(t)$ contienen (juntos) aproximadamente la mitad de su potencia promedio. Recuerde que $\displaystyle\int te^{kt}\ \mathrm{d}t = \frac{(kt-1)e^{kt}}{k^2}+C.$

Solución

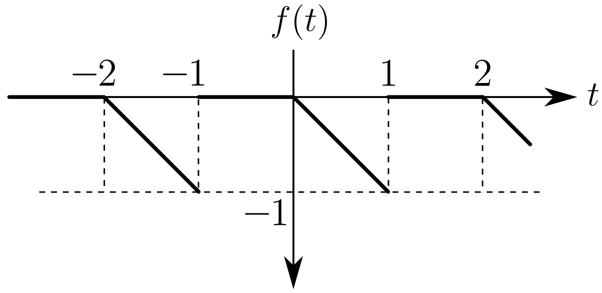


Figura 3.18: Pregunta 3

$T = 2 \Rightarrow \omega_0 = \pi$

$$c_n = \frac{1}{2}\int_0^1 -te^{-jn\pi t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[\frac{(-jn\pi t-1)e^{jn\pi t}}{-n^2\pi^2}\Bigg|_0^1\right] = \frac{1}{2n^2\pi^2}\left[(-jn\pi-1)e^{-jn\pi}+1\right]$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{1-(-1)^n}{2n^2\pi^2} - \frac{j(-1)^n}{2n\pi}$$

Tomando en cuenta que $e^{-jn\pi} = (-1)^n$ y separar la parte real de la imaginaria.

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 -t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}$$

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\left[\frac{1-(-1^n)}{2n^2\pi^2} - \frac{j(-1)^n}{2n\pi}\right]e^{jn\pi t}$$

La potencia promedio de la función es

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{6}$$

Por el teorema de Parseval también podemos obtener la potencia, que es

$$P = |c_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}|c_n|^2$$

La potencia almacenada en el DC y el primer armónico es

$$P_1 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi^4} + \frac{1}{4\pi^2}\right] \approx 0.0802981$$

La proporción de la potencia total que contienen el nivel DC y el primer armónico

$$\frac{0.0802981}{\left(\frac{1}{6}\right)} \approx 0.481789$$

Sí es aproximadamente la mitad de la potencia.

Pregunta 4

Una señal $x(t) = e^{-100t}u(t)$ es aplicada a un filtro pasa-bajos ideal cuya función de transferencia tiene una amplitud en la banda de paso de $|H(\omega)|_{\text{paso}} = 1$. Determine la frecuencia de corte necesaria para que el filtro disipe el 20 % de la energía de $x(t)$. Recuerde que $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$

Solución

Se pide que la señal de salida disipe el 20 % de la energía de entrada, de otra manera, que disipe 1/5 de la energía.

$$\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} [y(t)]^2 \ \mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 \ \mathrm{d}t} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 \ \mathrm{d}\omega}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \ \mathrm{d}\omega} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \, |X(\omega)|^2 \ \mathrm{d}\omega}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \ \mathrm{d}\omega} = \frac{1}{5}$$

Ya que

$$x(t) = e^{-100t}u(t) \Rightarrow X(\omega) = \frac{1}{100 + j\omega} \Rightarrow |X(\omega)|^2 = \frac{1}{100^2 + \omega^2}$$

Evaluamos primero la integral del denominador

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \ \mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{100^2+\omega^2} \ \mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{100^2+\omega^2} \ \mathrm{d}\omega + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{100^2+\omega^2} \ \mathrm{d}\omega$$

$$\frac{1}{100} \ \arctan\left(\frac{\omega}{100}\right)\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{100} \ \arctan\left(\frac{\omega}{100}\right)\bigg|_{0}^{\infty} = \frac{1}{100}\pi$$

La integral del numerador, ya que es un filtro pasa bajos, los limites de la integral son $-\omega_c$ y ω_c, donde ω_c es la frecuencia de corte.

$$\int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{1}{100^2+\omega^2} \ \mathrm{d}\omega = \frac{1}{100} \ \arctan\left(\frac{\omega}{100}\right)\bigg|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{2}{100}\arctan\left(\frac{\omega_c}{100}\right)$$

Al dividir las integrales, tenemos

$$\frac{2\arctan\left(\dfrac{\omega_c}{100}\right)}{\pi} = \frac{1}{5} \Rightarrow \omega_c = 100\arctan\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

Pregunta 5

La serie trigonométrica de Fourier de una función periódica está dada por:

$$f(t) = \frac{Ad}{T} + \frac{2Ad}{T}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\dfrac{n\pi d}{T}} \sin\left(\frac{n\pi d}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

(a) Calcule la amplitud y la fase de la $n-$ésima armónica, si se expresa $f(t)$ en forma compacta:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\omega_0 t + \Theta_n\right)$$

(b) Dibuje el espectro de amplitud hasta el primer cruce por cero, si $\dfrac{d}{T} = \dfrac{1}{5}$

(c) Determine la serie de Fourier de la primera derivada de la función $f(t)$, descrita de la siguiente forma:

$$f'(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos\left(n\omega t\right) + \beta_n \sin\left(n\omega_o t\right)\right)$$

Solución

(5.a) Al expandir el coseno la serie de Fourier compacta, comparamos los coeficientes que acompañan al coseno y el seno.

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \Theta_n\right) \\ &= A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\Theta_n\right) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) - A_n \sin\left(\Theta_n\right) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \end{aligned}$$

Igualamos cada uno de los coeficientes de cada expansión

$$\begin{cases} A_0 &= \dfrac{Ad}{T} \\ A_n \cos\left(\Theta_n\right) &= \dfrac{2A}{n\pi} \sin\left(\dfrac{n\pi d}{T}\right) \\ -A_n \sin\left(\Theta_n\right) &= 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Theta_n = \{0, \pi\}$$

$$\Rightarrow A_n \cos\left(\Theta_n\right) = A_n = \frac{2A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi d}{T}\right) \tag{3.2}$$

Podemos fijar el valor en $\Theta_n = 0$ en la Eq. 3.2, ya que con cualquier signo que le demos al $\cos\left(\Theta_n\right)$ se puede cancelar con el nuevo signo que obtendría A_n.

(5.b) El espectro de magnitud se muestra en la Fig. 3.19

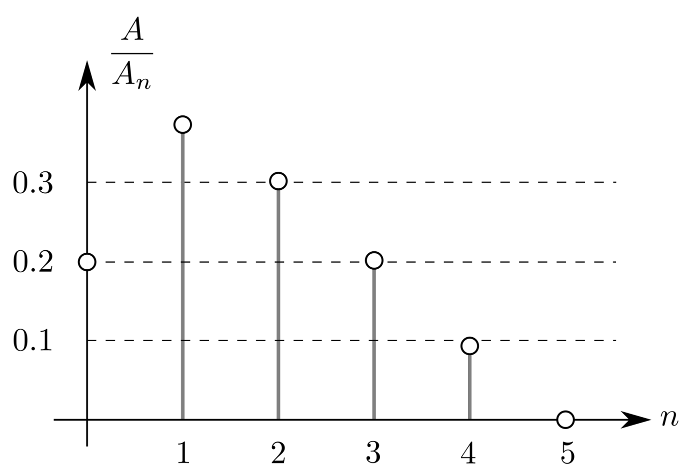


Figura 3.19: Espectro de amplitud del problema 5

Cuadro 3.3: Valor numérico del coeficiente de A_n/A

n	0	1	2	3	4	5
A_n/A	0.2	0.374196	0.302731	0.20182	0.0935489	0

(5.c) Escribimos la expansión usando A_0, A_n, que se va a ver igual a la función original del enunciado.

$$f(t) = \frac{Ad}{T} + \frac{2Ad}{T}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{n\pi d}{T}} \sin\left(\frac{n\pi d}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

Derivamos y obtenemos

$$f'(t) = -\frac{2Ad}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{d}\sin\left(\frac{n\pi d}{T}\right)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

Pregunta 6

Encuentre la respuesta al impulso del filtro pasa altas ideal, si su función de transferencia está dada por: $H(\omega) = e^{-j\omega t_0} - H_B(\omega)$, donde $H_b(\omega)$ es la función de transferencia del filtro pasa bajas ideal, definida como:

$$H_B(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & \text{si} \quad |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{si} \quad |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Solución

$$h(t) = \mathscr{F}^{-1}\left\{H(\omega)\right\}$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{H(\omega)\right\} = \mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-j\omega t_0}\right\} - \mathscr{F}^{-1}\left\{H_B(\omega)\right\}$$

$$= \delta(t-t_0) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

Evaluamos la integral y luego lo restamos al delta de Dirac.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega(t-t_0)}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{-j(t-t_0)}\right|_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

$$\frac{1}{2\pi(t-t_0)}\left(-\frac{e^{j\omega_c(t-t_0)}}{j} + \frac{e^{-j\omega_c(t-t_0)}}{j}\right) = -\frac{1}{\pi}\frac{\sin\left(\omega_c(t-t_0)\right)}{t-t_0}$$

$$\Rightarrow h(t) = \delta(t-t_0) - \frac{1}{\pi}\frac{\sin\left(\omega_c(t-t_0)\right)}{t-t_0}$$

3.8. III Parcial II Ciclo 2013

Pregunta 1

Sea $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi < t < 0 \\ \sin(t) & \text{si} \quad 0 \leq t < \pi \end{cases}$ con $f(t+2\pi) = f(t)$

(a) Desarrolle $f(t)$ en serie trigonométrica de Fourier.

(b) Utilice la serie anterior para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

(c) Utilice Parseval para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$

Solución

(1.a) Ver **III Parcial II Ciclo 2011 Pregunta 3**, donde se obtiene la serie de Fourier para la función del problema.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\pi} \frac{1}{1-n^2} \cos(nt) + \frac{1}{2}\sin(t)$$

(1.b) Los términos impares de a_n se mueren debido al término que alterna signo. Solo los términos pares sobreviven, 2,4,6,8,... Si cambiamos la sumatoria de $n = 2m$ con m corriendo de 1 hasta ∞, recorremos todos los pares. La función queda

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{1}{1-4m^2} \cos(2mt) + \frac{1}{2}\sin(t)$$

Evaluamos la función en $t = \pi/2$ para obtener el nuevo término que alterna en la sumatoria ya que eliminamos el término anterior que alternaba

$$\cos\left(2m \cdot \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^m$$

Voy a sacar un menos de la sumatoria y cambiar el orden del denominador. Ya que $f(\pi/2) = 1$.

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2-1} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2-1} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2-\pi}{4}$$

(1.c) Teorema de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2 \ \mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2}\left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]$$

Evalúo la integral y hago lo mismo de la parte **(1.b)** de cambiar $n = 2m$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(4m^2-1)^2} + \frac{1}{8} \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(4m^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi^2-8}{16}$$

Pregunta 2

(a) Muestre que $\mathscr{F}\left\{u(t+a)-u(t-a)\right\} = 2a\dfrac{\sin(a\omega)}{a\omega}$, $a \neq 0$, $u(t)$ escalón unitario.

(b) Utilice el resultado de **(a)** para calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(a\omega)}{a\omega}\right)^2 \mathrm{d}\omega$. Simplifique el resultado.

Solución

(2.a)

$$\mathscr{F}\left\{u(t+a)-u(t-a)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[u(t+a)-u(t-a)\right]e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{e^{ja\omega}-e^{-ja\omega}}{j\omega} = 2a\left(\frac{e^{ja\omega}-e^{-ja\omega}}{a2j\omega}\right) = 2a\left(\frac{\sin(a\omega)}{a\omega}\right)$$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{u(t+a)-u(t-a)\right\} = 2a\left(\frac{\sin(a\omega)}{a\omega}\right)$$

(2.b) Usando el teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(t)\right]^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\left[u(t+a)-u(t-a)\right]^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}4a^2\left(\frac{\sin(a\omega)}{a\omega}\right)^2\,\mathrm{d}\omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(a\omega)}{a\omega}\right)^2\,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2a^2}\int_{-a}^{a}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{a}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(a\omega)}{a\omega}\right)^2\,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{a}$$

Pregunta 3

Sea $f(t) = 1-t$ para $0 < t < 2$, con $f(t+2) = f(t)$

(a) Encuentre la serie compleja de Fourier para $f(t)$.

(a) Dibuje los espectros de magnitud y de fase de $f(t)$ para las primeras 3 armónicas.

Solución

(3.a) El periodo de $f(t)$ es $T = 2$, tenemos entonces $\omega_0 = \pi$. Hallamos los coeficientes c_n de la serie compleja

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^2(1-t)e^{-jn\pi t}\,\mathrm{d}t = \frac{-j}{n\pi}$$

Calculamos el caso para c_0 ya que se indefine en $n=0$

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_0^2(1-t)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{-j}{n\pi}e^{n\pi jt}$$

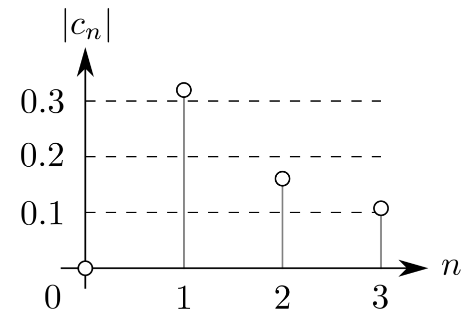


Figura 3.20: Espectro de magnitud.
Pregunta (3.b)

Cuadro 3.4: Espectro de magnitud numérico de $|c_n|$.
Pregunta (3.b)

n	0	1	2	3
$\lvert c_n \rvert$	0	0.31831	0.159155	0.106103

3.b) Es espectro de magnitud se muestra en la Fig. 3.20

Los c_n son solo complejos, vemos que $\text{Im}[c_n] < 0$ para $n > 0$ y $\text{Im}[c_n] > 0$ para $n < 0$, entonces la fase es $\text{Arg}[c_n] = -\pi/2$ para $n > 0$ y $\text{Arg}[c_n] = \pi/2$ para $n < 0$. El espectro de fase se muestra en la Fig. 3.21

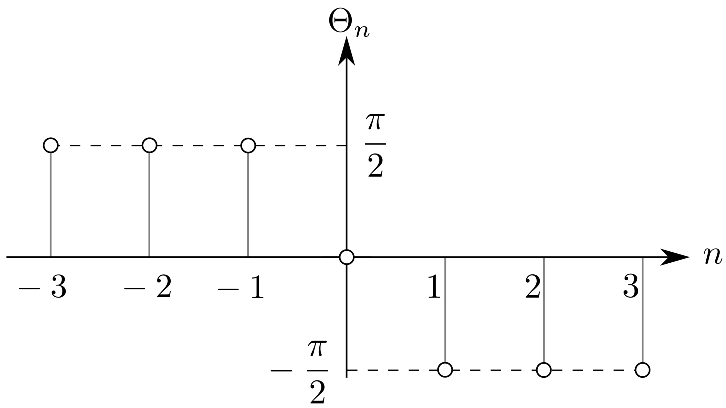


Figura 3.21: Espectro de fase.
Pregunta (3.b)

Pregunta 4

Encuentre el espectro de magnitud de la señal modulada $f(t) = A(1 + A\cos(\omega_m t))\cos(\omega_c t)$, si $\omega_m = 100$ Hz, $\omega_c = 2000$ Hz.

Solución

$$f(t) = A(1 + A\cos(\omega_m t))\cos(\omega_c t) = A\cos(\omega_c t) + A^2\cos(\omega_m t)\cos(\omega_c t)$$

Ahora pasamos los cosenos a exponenciales

$$= A\left(\frac{e^{j\omega_c t}+e^{-j\omega_c t}}{2}\right) + A^2\left(\frac{e^{j\omega_m t}+e^{-j\omega_m t}}{2}\right)\left(\frac{e^{j\omega_c t}+e^{-j\omega_c t}}{2}\right)$$

$$= A\left(\frac{e^{j\omega_c t}+e^{-j\omega_c t}}{2}\right) + \frac{A^2}{4}\left(e^{j(\omega_m+\omega_c)t}+e^{j(\omega_m-\omega_c)t}+e^{j(-\omega_m+\omega_c)t}+e^{-j(\omega_m+\omega_c)t}\right)$$

$$= \frac{A}{2}\left(e^{j\omega_c t}+e^{-j\omega_c t}\right) + \frac{A^2}{4}\left(e^{j(\omega_c+\omega_m)t}+e^{-j(\omega_c+\omega_m)t}\right) + \frac{A^2}{4}\left(e^{j(\omega_c-\omega_m)t}+e^{-j(\omega_c+\omega_m)t}\right)$$

De aquí podemos obtener directamente la transformada de Fourier y obtener el espectro de magnitud, ya que las transformadas de estas exponenciales son deltas de Dirac.

$$F(\omega) = 2\pi\left[\frac{A}{2}\left(\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)\right) + \frac{A^2}{4}\left(\delta(\omega-(\omega_c+\omega_m))+\delta(\omega+(\omega_c+\omega_m))\right)\right.$$
$$\left. + \frac{A^2}{4}\left(\delta(\omega-(\omega_c-\omega_m))+\delta(\omega+(\omega_c-\omega_m))\right)\right]$$

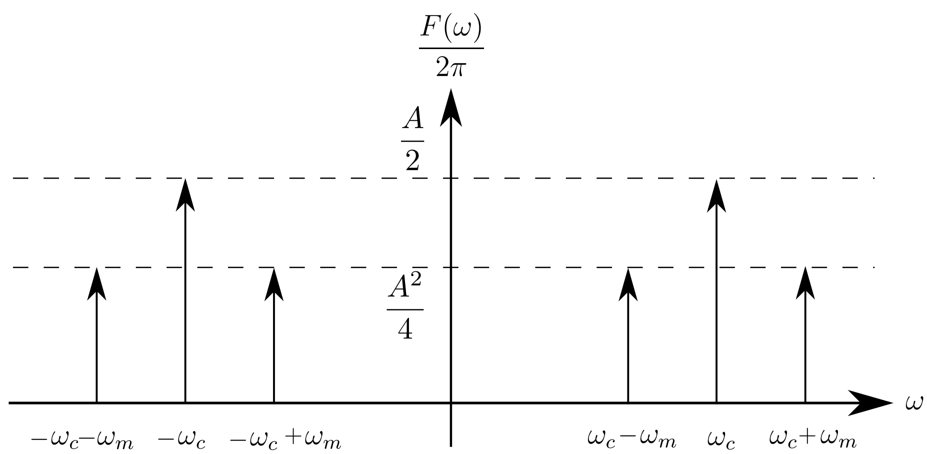


Figura 3.22: Espectro de magnitud.

Pregunta 4

Cada trío de deltas de Dirac ($\omega_c \pm \omega_m$ para cada ω_c ya que $|omega_m| < |omega_c|$) están del mismo lado, 3 en el $+\omega$ y 3 en $-\omega$ El gráfico se hizo asumiendo que $A/2 > A^2/4$. No tiene que ser así, pero si tiene esa simetría.

Pregunta 5

Determine la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

(a) $f(t) = \dfrac{1}{1+(3t^2)}$

(b) $g(t) = te^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}$

Solución

(5.a) Usemos la propiedad 4 de simetría y luego usamos la propiedad 20. Manipulemos para que quede de esa forma

$$\frac{1}{1+9t^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3^2}\right) + t^2}$$

Teniendo en cuenta que vamos a usar $F(t) = 2\pi f(-\omega)$. Ya tenemos la forma para aplicar la propiedad 20 con $a = 1/3$ y $t_0 = 0$

$$\mathscr{F}\left\{f(t)\right\} = \mathscr{F}\left\{\exp\left(-\frac{1}{3}|t|\right)\right\} = \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3^2} + \omega^2} = F(\omega)$$

Ahora cambiamos a $F(t)$ con el $1/6$ afuera

$$\frac{1}{6}F(t) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3^2} + t^2}$$

$$\frac{1}{6}\mathscr{F}\left\{\frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3^2} + t^2}\right\} = \frac{1}{6} \cdot 2\pi f(-\omega) = \frac{\pi}{3}\exp\left(-\frac{1}{3}|\omega|\right)$$

(5.b)

$$g(t) = te^{-\frac{1}{2}(t-1)^2} = (t-1+1)\,e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2} = (t-1)e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2} + e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}$$

Saquemos primero la transformada de $(t-1)e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}$. Vemos que esta desplaza en $t-1$. Entonces ocupemenos de $te^{-\frac{1}{2}t^2}$. Sabemos por la tabla que la transformada de una Gaussiana es

$$\mathscr{F}\left\{e^{-\frac{1}{2}t^2}\right\} = \sqrt{2\pi}e^{\frac{-\omega^2}{2}}$$

Usamos la propiedad 8 de la tabla

$$\mathscr{F}\left\{te^{-\frac{1}{2}t^2}\right\} = j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\sqrt{2\pi}e^{\frac{-\omega^2}{2}} = -j\sqrt{2\pi}\omega e^{\frac{-\omega^2}{2}}$$

Trasladamos con la propiedad 2

$$\mathscr{F}\left\{(t-1)e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}\right\} = -j\sqrt{2\pi}\omega e^{\frac{-\omega^2}{2}}e^{-j\omega}$$

Trasladamos la Gaussiana

$$\mathscr{F}\left\{e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}\right\} = \sqrt{2\pi}e^{\frac{-\omega^2}{2}}e^{-j\omega}$$

Sumamos todos los términos

$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{te^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}\right\} = -j\sqrt{2\pi}\omega e^{\frac{-\omega^2}{2}}e^{-j\omega} + \sqrt{2\pi}e^{\frac{-\omega^2}{2}}e^{-j\omega} = \exp\left(\frac{-\omega^2}{2} - j\omega\right)\sqrt{2\pi}(1-j\omega)$$

Pregunta 6

Para el circuito RL de la Fig. 3.23

(a) Determine la función de transferencia, donde la entrada es $v_i(t)$ y la salida es $i(t)$. No aplique funciones de impedancia para obtener su respuesta.

(b) Determine la respuesta al impulso unitario.

(c) Encuentre la energía de la señal de salida, si la densidad espectral de la entrada está dada por $|V_i(\omega)|^2 = K$, K constante.

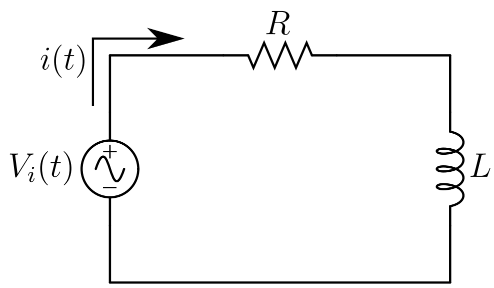


Figura 3.23: Pregunta 6

Solución

(6.a) Aplicando la Ley de Kirchhoff, obtenemos la ecuación

$$-V_i(t) + iR + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow V_i(t) = iR + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Aplicando la transformada de Fourier, obtenemos

$$V_i(\omega) = RI(\omega) + jL\omega I(\omega) \Rightarrow \frac{I(\omega)}{V_i(\omega)} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{\frac{R}{L} + j\omega} = H(\omega)$$

(6.b) Usamos la propiedad 22 de la tabla de Fourier para obtener $h(t)$

$$h(t) = \mathscr{F}^{-1}\left\{H(\omega)\right\} = \mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{L} \cdot \frac{1}{\frac{R}{L} + j\omega}\right\} = \frac{1}{L}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)u(t)$$

(6.c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} [i(t)]^2 \ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |I(\omega)|^2 \ \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |V_i(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 \ \mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{K}{2\pi L^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2} \ \mathrm{d}\omega = \frac{K}{2\pi RL}\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{K}{2RL}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} [i(t)]^2 \ \mathrm{d}t = \frac{K}{2RL}$$

3.9. III Parcial II Ciclo 2014

Pregunta 1

Para la función periódica $f(t) = t^2$, $-\pi \leq t \leq \pi$ con serie de Fourier definida como sigue:

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt)$$

(a) Determine el valor númerico de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(b) Determine el valor númerico de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

(c) Determine la potencia asociada a la tercera armónica.

Solución

(1.a)

Evaluamos en $t = \pi$. Ya que la función da π^2 en $t = \pi$ en ambos lados de la expansión, el valor de la de la serie de Fourier en $t = \pi$ es π^2. El coseno queda como el término $(-1)^n$ alternando, cancelando el otro.

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(1.b) Usamos el teorema de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

El término a_n es $a_n = 4(-1)^n/n^2$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4 \, \mathrm{d}t = \frac{\pi^4}{5}$$

$$\frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

(1.c) Supongo que se refiere a la potencia de solo la tercera armónica, no toda la potencia hasta ahí, sería

$$P_3 = \frac{1}{2}a_3^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3^2}\right)^2 = \frac{8}{81} \approx 0.0987654$$

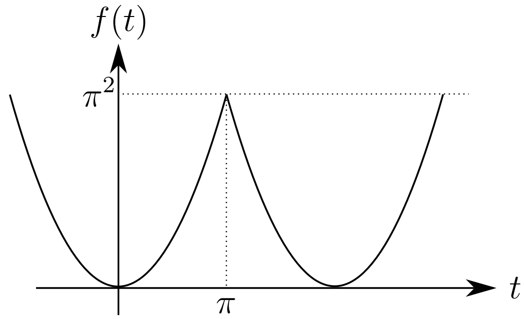


Figura 3.24: Gráfico de $f(t)$.
Pregunta 1

Pregunta 2

Cierto sistema tiene una función de transferencia $H(\omega)$ como la de la Fig. 3.25, la cual es A si $|\omega| \geq 3$ y 0 en caso contrario. Determine el valor de A si en la entrada se aplica una señal que tiene la forma $x(t) = 3e^{-3t}u(t)$ y únicamente se propaga el 75 % de la energía a la salida.

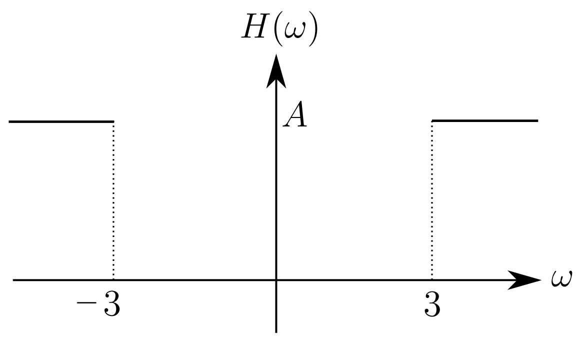


Figura 3.25: **Pregunta 2**

Solución

Relacionamos las integrales de energía, donde la energía de la senãl $y(t)$ es $3/4$ de la senñal de $x(t)$

$$\frac{3}{4} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} [y(t)]^2 \ \mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 \ \mathrm{d}t} = \frac{\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 \ \mathrm{d}\omega}{\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \ \mathrm{d}\omega} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 \ \mathrm{d}\omega}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \ \mathrm{d}\omega}$$

Si tenemos la señal $x(t) = 3e^{-3t}u(t)$, con la tabla obtenemos que la transformada de Fourier es $X(\omega) = \dfrac{3}{3 + j\omega}$. Además, estas integrales son de funciones pares, integremos solo la parte positiva.

$$\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 \ \mathrm{d}\omega}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \ \mathrm{d}\omega} = \frac{\displaystyle 2\int_{3}^{\infty} \frac{9A^2}{9+\omega^2} \ \mathrm{d}\omega}{\displaystyle 2\int_{0}^{\infty} \frac{9}{9+\omega^2} \ \mathrm{d}\omega} = \frac{\displaystyle\frac{A^2}{3} \arctan\left(\frac{\omega}{3}\right)\Big|_3^{\infty}}{\displaystyle\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{\omega}{3}\right)\Big|_0^{\infty}}$$

$$= \frac{A^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{A^2}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Pregunta 3

Dado la función $f(t) = e^t$, $-\pi \leq t \leq \pi$, $f(t+2\pi) = f(t)$

(a) Desarrolle $f(t)$ en serie trigonométrica de Fourier

(b) Utilice la serie desarrollada en la parte anterior para calcular el valor numérico de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

Solución

(3.a)

$T = 2\pi \Rightarrow \omega_0 = 1$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\sinh(\pi)$$

En los coeficientes de a_n y b_n voy a usar que $\sin(\pm n\pi) = 0$ y $\cos(\pm n\pi) = (-1)^n$. Y voy a usar las integrales en la ayuda del examen

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos(nt) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\cos(nt) + n\sin(nt)}{1+n^2}\right)e^t\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi(1+n^2)}\left((-1)^n e^{\pi} - (-1)^n e^{-\pi}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) = \frac{2(-1)^n}{\pi(1+n^2)}\sinh(\pi) \Rightarrow a_n = \frac{2(-1)^n}{\pi(1+n^2)}\sinh(\pi)$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin(nt) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\sin(nt) - n\cos(nt)}{1+n^2}\right)e^t\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi(1+n^2)}\left(-n(-1)^n e^{\pi} + n(-1)^n e^{-\pi}\right)$$

$$= -\frac{n(-1)^n}{\pi(1+n^2)}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) = -\frac{2n(-1)^{n+1}}{\pi(1+n^2)}\sinh(\pi) \Rightarrow b_n = -\frac{2n(-1)^{n+1}}{\pi(1+n^2)}\sinh(\pi)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2}{\pi}\sinh(\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi(1+n^2)}\sinh(\pi)\cos(nt) - \frac{2n(-1)^{n+1}}{\pi(1+n^2)}\sinh(\pi)\sin(nt)$$

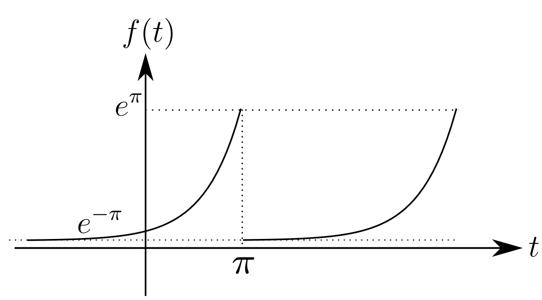


Figura 3.26: Gráfico, Pregunta 3

(3.b)

Evaluamos en $t = \pi$. Ya que la función es discontinua, tenemos que promediar los valores para obtener donde converge la serie. Los términos b_n se mueren todos por $\sin(n\pi) = 0$

$$f(\pi) = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} = \cosh(\pi) = \frac{1}{\pi}\sinh(\pi) + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left[\pi\coth(\pi) - 1\right]$$

Pregunta 4

Si la transformada de Fourier $\mathscr{F}\{f(t)\} = \dfrac{2e^{-j\omega}}{1+2\omega^2}$, calcule $\mathscr{F}\{f(3t-5)\}$

Solución

Sea $H(\omega)$ la transformarda de Fourier de $h(t)$. Obtengamos $\mathscr{F}\{h(at-b)\}$

$$\mathscr{F}\{h(at-b)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(at-b)\exp(-j\omega t)$$

Sea $u = at - b \Rightarrow t = (u+b)/a$ y $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/a$ y cambiamos la integral a

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\exp\left(-j\omega\left(\frac{u+b}{a}\right)\right)\ \frac{\mathrm{d}u}{a} = \frac{1}{a}\exp\left(-j\omega\frac{b}{a}\right)\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\exp\left(-j\left(\frac{\omega}{a}\right)u\right)\ \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{a}\exp\left(-j\omega\frac{b}{a}\right)H\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\{h(at-b)\} = \frac{1}{a}\exp\left(-j\omega\frac{b}{a}\right)H\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Ya que $\mathscr{F}\{f(t)\} = \dfrac{2\exp(-j\omega)}{1+2\omega^2}$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\{f(3t-5)\} = \frac{1}{3}\exp\left(-j\omega\frac{5}{3}\right)\frac{2\exp\left(-j\dfrac{\omega}{3}\right)}{1+2\left(\dfrac{\omega}{3}\right)^2} = \frac{6\exp(-2\omega j)}{9+2\omega^2}$$

Pregunta 5

Una función periódica está caracterizada por: $f(t) = A\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)$ para $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$

(a) Dibuje la función mostrando al menos tres periodos.

(b) Pruebe que la serie trigonométrica de Fourier de esta señal está dada por:

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4A(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}\cos(n\omega_0 t)$$

Solución

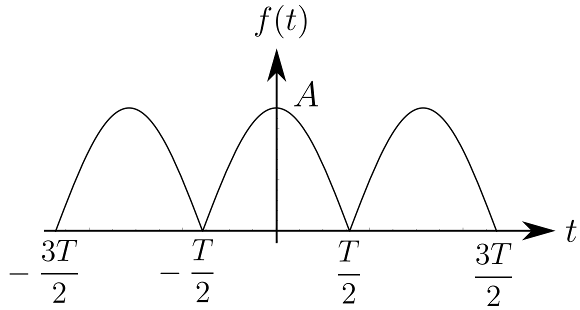


Figura 3.27: Gráfico, **Pregunta (5.a)**

(5.a)

(5.b)

Sea $f(t) = A\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)$. El perdiodo de la función es T

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)\ \mathrm{d}t = \frac{2A}{\pi}$$

Para los términos a_n voy a usar la identidad

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\ \mathrm{d}t = \frac{A}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos\left(\frac{2n-1}{T}\pi t\right) + \cos\left(\frac{2n+1}{T}\pi\right)\ \mathrm{d}t$$

$$= \frac{A}{T}\left[\frac{\sin\left(\frac{2n-1}{T}\pi t\right)}{\frac{2n-1}{T}\pi} + \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{T}\pi t\right)}{\frac{2n+1}{T}\pi}\right]\Bigg|_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{A}{\pi}\left[\frac{\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-(2n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{2n-1} + \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1}\right]$$

Usamos que sin es una función impar, $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ y simplificamos

$$= \frac{A}{\pi}\left[\frac{2\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{2n-1} + \frac{2\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1}\right]$$

Ahora pasamos los senos a alternar con $(-1)^n$

$$\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(n\pi) = -(-1)^n$$

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$\Rightarrow \frac{2A}{\pi}\left[\frac{-(-1)^n}{2n-1} + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right] = \frac{2A}{\pi}\left[\frac{-2(-1)^n}{4n^2-1}\right] = \frac{4A(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$$

Los términos b_n son 0 ya que la función es par. Ya conocemos todos los a_n, ya podemos montar la serie de Fourier.

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2A}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos(n\omega_0 t)$$

Con $\omega_0 = 2\pi/T$

A | Tabla de la Transformada de Laplace

Sea $f(t)$ una función del tiempo. La función $F(p)$ son las transformadas de Laplace que se obtienen con la transformación integral

$$F(p) = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\ \mathrm{d}t$$

La se puede revertir la transformada con

$$f(t) = \mathscr{L}\left\{F(p)\right\}^{-1} = \sum \mathrm{Res}\left[e^{pt}F(p)\right]$$

Donde la sumatoria suma sobre los polos de $F(s)$.
La variables a, b en la table son constantes tal que $a, b \in \mathbb{R}$

1. Linealidad	$af(t) + bg(t)$	$aF(p) + bG(p)$
2. Traslación en la frecuencia	$e^{-at}f(t)$	$F(p+a)$
3. Traslación en el tiempo	$f(t-a)U(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$
4. Escalamiento	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$
5. $n-$ésima derivada	$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f^{(1)}(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
6.	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}F(p)$
7.	$\int_0^t f(u)\ \mathrm{d}u$	$\frac{F(p)}{p}$
8.	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(u)\ \mathrm{d}u$

9. Función $f(t)$ con periodo T	$f(t) = f(t+T)$	$\dfrac{1}{1-\exp(-pT)}\int_0^T e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t$
10. Convolución	$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\mathrm{d}u$	$F(p)G(p)$
11.	$\int_t^\infty \dfrac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$	$\dfrac{1}{p}\int_0^p F(q)\mathrm{d}q$
12.	$\int_0^t \dfrac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$	$\dfrac{1}{p}\int_p^\infty F(q)\mathrm{d}q$
13.	t^n	$\dfrac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$
14.	$\cos(at)$	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$
15.	$\sin(at)$	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$
16.	$\cosh(at)$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$
17.	$\sinh(at)$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$
18. Delta de Dirac	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\delta(t-a)$	$p^n e^{-ap}$
19. Heaviside	$U(t-a)$	$\dfrac{\exp(-ap)}{p}$
20.	$f(t)U(t-a)$	$e^{-ap}\mathscr{L}\{f(t+a)\}$

Teorema del valor inicial: $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$

Teorema del valor final: $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s)$

Teorema de Expansión de Heaviside:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{P(p)}{Q(p)}\right\} = \sum_k \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$$

donde $P(p)$ y $Q(p)$ son polinomios sin factor común, tal que el grado de Q es mayor al grado de P y α_k son las distintas raíces de $Q(p) = 0$.
Para ver las demostraciones de varias de las propiedades en la tabla, ver el libro: Spiegel, M. R., *Laplace Transform*, in *Schaum's Outline Series*. McGraw-Hill 1965

B | Tabla de la Transformada Zeta

Sea $x(k)$ sucesión en k. La función $X(z)$ es la transformada Zeta que se obtienen con la transformación

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x(k)}{z^k}$$

La se puede revertir la transformada con

$$x(k) = \mathcal{Z}\{X(z)\}^{-1} = \sum \mathrm{Res}\left[z^{k-1}X(z)\right]$$

Donde la sumatoria recorre los polos de $z^{k-1}X(z)$.
La variables a, b en la table son constantes tal que $a, b \in \mathbb{R}$

1. Linealidad	$ax(k) + by(k)$	$aX(z) + bY(z)$
2.	$\delta(k-r)$	z^{-r}
3.	$u(k-r)$	$\dfrac{1}{z^{r-1}(z-1)}\ , \lvert z\rvert > 1$
4.	a^k	$\dfrac{z}{z-a}\ \ \lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
5.	ka^{k-1}	$\dfrac{z}{(z-a)^2}\ , \lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
6.	$e^{-ka}\sin(kb)$	$\dfrac{ze^{-a}\sin(b)}{z^2 - 2ze^{-a}\cos(b) + e^{-2a}}\ , \lvert z\rvert > e^{-a}$
7.	$e^{-ka}\cos(kb)$	$\dfrac{z(z - e^{-a}\cos(b))}{z^2 - 2ze^{-a}\cos(b) + e^{-2a}}\ , \lvert z\rvert > e^{-a}$
8. Diferenciación en z	$k^r x(k),\ \ r \in \mathbb{N}$	$-z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\cdots - z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(-z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z)\right)\right)$ r veces

9.	$x(k+r)$	$z^r X(z) - z^r x(0) -$ $z^{r-1}x(1) - \cdots - zx(r-1)$
10. Traslación en el tiempo	$x(k-r)$	$z^{r-1}X(z)$
11. Convolución	$x(k) * y(k) = \sum_{r=0}^{k} x(r)y(k-r)$	$X(z)Y(z)$
12. Sucesión $x(k)$ con periodo p	$x(k) = x(k+p)$	$\frac{1}{1-z^{-p}} \sum_{r=0}^{p-1} x(r)z^{-r} \quad , \lvert z\rvert > 1$
13.	$x(ak)$	$X\left(z^{1/a}\right)$
14. Escalamiento	$a^k x(k)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
15. Acumulación	$\sum_{r=0}^{k} x(r)$	$\frac{z}{z-1}X(z)$

Teorema del valor final: $\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{s\to\infty} (z-1)X(z)$, si los polos de $(z-1)X(z)$ tiene magnitud menor que uno.

Teorema del valor inicial: Si $X(z)$ tiene la forma

$$X(z) = \frac{a_m z^m + \cdots + a_0}{b_n z^n + \cdots + b_0}$$

Con $n > m$, entonces el primer valor no nulo de $x(k)$ es $x(n-m)$ con valor

$$x(n-m) = \lim_{z\to\infty} \left(z^{n-m} X(z)\right)$$

C | Tabla de la Transformada de Fourier

Sea $h(t)$ funciones del tiempo. La función $H(\omega)$ es transformadas de Fourier que se obtienen con la transformación integral

$$H(\omega) = \mathscr{F}\left\{h(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

La se puede revertir la transformada con

$$h(t) = \mathscr{F}\left\{H(\omega)\right\}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

La variables a, b, t_0 en la table son constantes tal que $a, b \in \mathbb{R}$

1. Linealidad	$af(t) + bg(t)$	$aF(\omega) + bG(\omega)$
2. Traslación en el tiempo	$f(t-a)$	$F(\omega)e^{-j\omega a}$
3. Traslación en la frecuencia	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$
4. Simetría	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
5. Escalamiento $(a \neq 0)$	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
6. Derivadas en t	$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}f(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
7. Integración	$\int_{\infty}^{t} f(u)\,\mathrm{d}u$	$\frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$
8. Derivadas en ω	$(-jt)^n f(t)$	$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}F(\omega)$
9. Convolución en t	$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)\,\mathrm{d}u$	$F(\omega)G(\omega)$

10. Convolución en ω	$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi}(F*G)(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega-u)G(u)\,\mathrm{d}u$
11. Delta de Dirac	$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\delta(t-t_0)$	$(j\omega)^n e^{-j\omega t_0}$
12.	$u(t-t_0)$	$\left(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right)e^{-j\omega t_0}$
13.	$e^{j\omega_0 t}$	$\left(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right)e^{-j\omega t_0}$
14.	t^n	$2\pi j^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}\delta(\omega)$
15.	$\frac{1}{t^n}$	$\frac{\pi(-1)^n j^n\omega^{n-1}\mathrm{Sgn}(\omega)}{(n-1)!}$
16.	$u(t)\cos(\omega_0 t)$	$\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$
17.	$u(t)\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$
18.	$\mathrm{Sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
19.	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)\ ,\ \omega_0=\frac{2\pi}{T}$
20.	$\exp\left(-a\lvert t-t_0\rvert\right)$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}e^{-j\omega t_0}$
21. Gaussiana	$\exp\left(-at^2\right)$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)$
22.	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$
23.	$\frac{\cos(bt)}{a^2+t^2}$	$\frac{\pi}{2a}\left(e^{-a\lvert\omega-b\rvert}+e^{-a\lvert\omega+b\rvert}\right)$
24.	$\frac{\sin(bt)}{a^2+t^2}$	$\frac{\pi}{2aj}\left(e^{-a\lvert\omega-b\rvert}-e^{-a\lvert\omega+b\rvert}\right)$
25.	$\cos(at)$	$\pi(\delta(\omega-a)+\delta(\omega+a))$

26.	$\sin(at)$	$-j\pi(\delta(\omega-a)-\delta(\omega+a))$

Series de Fourier

Sea $f(t)$ una función con periodo $T \Rightarrow f(t+T)=t(t)$. La expansión en serie trigonométrica de Fourier es

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)$$

Con $\omega=2\pi/T$. Cada coeficiente de la expansión se obtiene con

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T_2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\ \mathrm{d}t$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T_2} f(t)\sin(n\omega_0 t)\ \mathrm{d}t$$

Donde t_0 es un punto arbitrario. La integral recorre todo un periodo. La expansión compleja de la serie de Fourier es

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

El coeficiente c_n se obtiene evaluando

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\ \mathrm{d}t$$

La relación entre a_n, b_n y c_n es

$$c_n=\begin{cases}\dfrac{a_b+jb_n}{2} & \text{para} \quad n<0\\ \dfrac{a_0}{2} & \text{para} \quad n=0\\ \dfrac{a_b-jb_n}{2} & \text{para} \quad n>0\end{cases}$$

Teorema de Parseval

Funciones periodicas: Sea $f(t)$ una función de periodo T. La función cumple que

$$\frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2}[f(t)]^2\ \mathrm{d}t=\left(\frac{a_0}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2+b_n^2=|c_0|^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$$

Se puede usar para calcular potencia promedio por ciclo de una señal periodica, donde la potencia P es

$$P=\frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2}[f(t)]^2\ \mathrm{d}t$$

Funciones no periodicas: Sea $F(\omega)$ la transformada de Fourier de $f(t)$ sin periodo. Va a cumplir que[1]

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)]^2\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\ \mathrm{d}\omega$$

[1]Esta igualdad depende de la convención de la transformada de Fourier que se esté usando, como que no tenga la división de 2π, verifiquen siempre cual convención es.