Exámenes Resueltos de Matemáticas Superiores IE-0305

Carlos Vargas Agüero

Índice general

Prefacio

> "We are what we repeatedly do. Excellence, then, is not an act, but a habit."
>
> — Will Durant, The Story of Philosophy

Este folleto tiene como objetivo mostrar como resolver los problemas de los examenes de Matemáticas Superiores. Cuando lo llevé no había práctica con respuestas ni libro de teoría oficial del curso. Con esto cubre una parte que estudiar sin respuestas nunca lo he visto productivo y lo considero escencial. Hay que verificar que se está aprendiendo y sin respuestas no veo como.

La materia y el orden de los examenes son respecto a los temas de como estaba estructurado el curso antes que lo cambiaran en el I Ciclo 2015, supongo que faltarán y sobrarán temas aquí, pero creo que se conserva gran parte de los temas y siempre es util tenerlo de práctica.

Recuerden que la manera de aprender matemáticas es practicando, el simple leer no es suficiente para lograr dominar a fondo de los temas. Como todo folleto de ejercicios, la gracia es que se apoyen revisando ejercicios que ya hayan intentado y no pudieron completar, no simplemente darles una mirada por encima.

No le voy a agregar examenes después del II Ciclo 2014 que fue cuando cambiaron el formato del curso. Falta alguno que otro examen, si lo encuentró lo actualizo, pero al menos con esto ya suficiente práctica

Es imposible que no haya algún error escondido por ahí, si encuentran alguno, les agradecería que me avisen. ☺

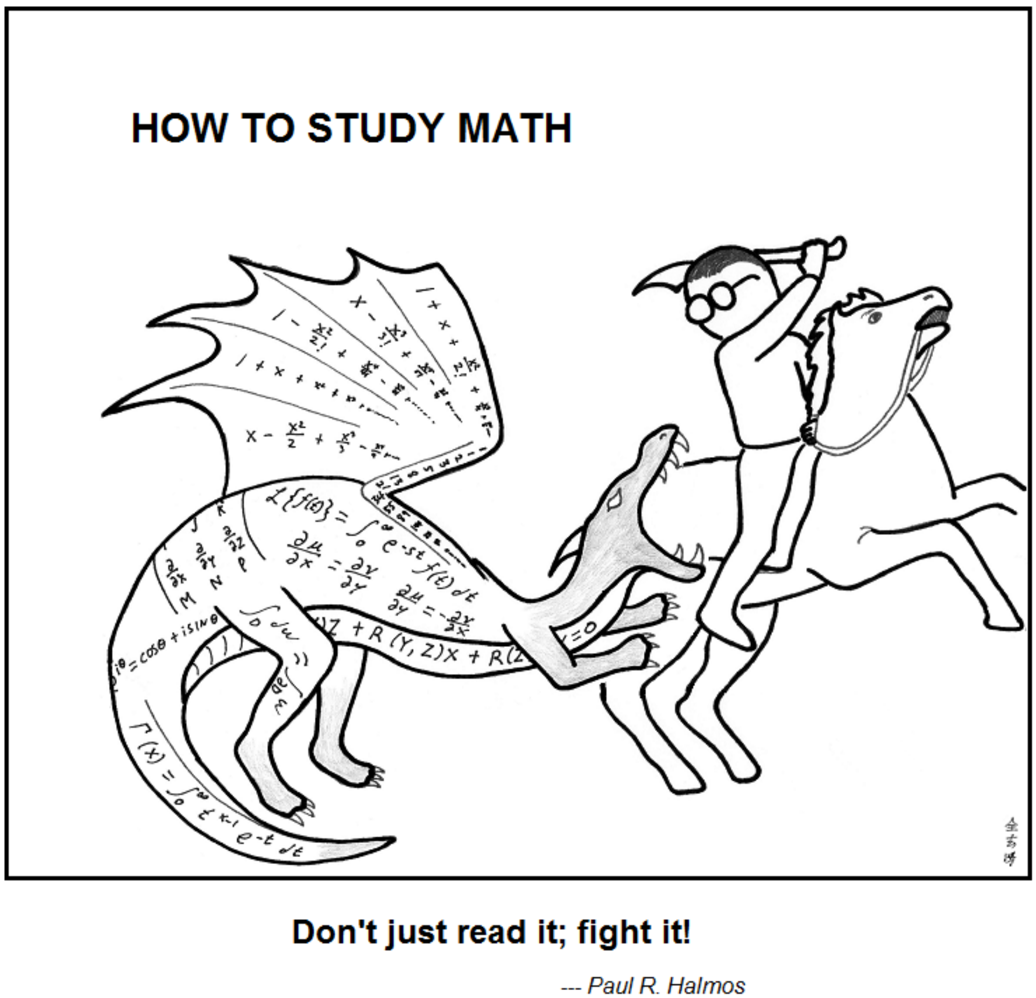
Le agradezco al profesor Edison De Faria Campos por ayudarme con las consultas que tenía en la solución a problemas durante la elaboración del folleto.

Ultima edición: II Ciclo 2017.

Carlos Vargas
carlos.vargasaguero@ucr.ac.cr

Recuerden no solo leer.

Comic 353 “Warrior” de Abstruse Goose[1]



[1]A quienes tenga un humor nerd, les recomiendo ver más comics en abstrusegoose.com

Capítulo 1

Primera Ronda

1.1. I Parcial I Ciclo 2008

Pregunta 1

Determine los valores del parámetro real a para que $(1-aj)/(a-4j)$ sea un número real.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{1-aj}{a-4j} &= \frac{1-aj}{a-4j}\cdot\frac{a+4j}{a+4j} = \frac{(a+4a)+j(4-a^2)}{a^2+16}\\ &= \frac{5a+j(4-a^2)}{a^2+16}\end{aligned}$$

El problema pide que la expresión sea un numero real, lo que equivale que la parte imaginaria sea nula.
$\mathrm{Im}\left[\dfrac{5a+j(4-a^2)}{a^2+16}\right]=0 \Rightarrow \dfrac{4-a^2}{a^2+16}=0 \Rightarrow 4-a^2=0 \Rightarrow a=\pm 2$
La variable a tiene que tomar los valores $\pm 2 \Rightarrow a=\pm 2$.

Pregunta 2

Calcule todos los valores de $\sqrt{\dfrac{j^3-j^{-3}}{2j}}$

Solución

$$\sqrt{\frac{j^3-j^{-3}}{2j}} = \sqrt{\frac{-j+\frac{1}{j}}{2j}} = \sqrt{\frac{-j-j}{2j}} = \sqrt{\frac{-2j}{2j}} = \sqrt{-1} = \exp\left(\frac{j(\pi+2k\pi)}{2}\right);\quad k=0,1$$

Las 2 soluciones son:

$$\sqrt{\frac{j^3-j^{-3}}{2j}} = \exp\left(\frac{j\pi}{2}\right) \qquad \sqrt{\frac{j^3-j^{-3}}{2j}} = \exp\left(\frac{3j\pi}{2}\right)$$

Pregunta 3

Calcule la integral de línea $\oint_C |z+j|^2\,\mathrm{d}z$ si C es el cuadrado con vértices $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$ en dirección contraria a las manecillas del reloj.

Solución

Cambiamos la integral $\oint_C |z+j|^2 \ \mathrm{d}z$ a función de x y y, la cual toma la la forma $\oint_C (x^2+(y+1)^2)(\mathrm{d}x+j\mathrm{d}y)$

Dividimos la integral en 4 trayectorias. $\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$

La curva C_1 se parametriza de la forma $C_1 = \begin{cases} x = t \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ y = 0 \Rightarrow \mathrm{d}y = 0 \end{cases}$

$$\int_{C_1} |z+j|^2 \ \mathrm{d}z = \int_0^1 (t^2+1)\ \mathrm{d}t = \frac{4}{3}$$

De igual manera, parametrizamos e integramos sobre el resto de curvas. Tengan cuidado con el orden de los límites de C_3 y C_4, los límites dependen de la parametrización. De la manera que se escojió aquí se colocan como se muestra.

$$C_2 = \begin{cases} x = 1 \Rightarrow \mathrm{d}x = 0 \\ y = t \Rightarrow \mathrm{d}y = \mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \int_{C_2} |z+j|^2 \ \mathrm{d}z = \int_0^1 (1+(t+1)^2)\ j\mathrm{d}t = \frac{10j}{3}$$

$$C_3 = \begin{cases} x = t \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ y = 1 \Rightarrow \mathrm{d}y = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_{C_3} |z+j|^2 \ \mathrm{d}z = \int_1^0 (t^2+(1+1)^2)\ \mathrm{d}t = -\frac{13}{3}$$

$$C_4 = \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \mathrm{d}x = 0 \\ y = 1 \Rightarrow \mathrm{d}y = \mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \int_{C_4} |z+j|^2 \ \mathrm{d}z = \int_1^0 (t+1)^2\ j\mathrm{d}t = -\frac{7j}{3}$$

$$\Rightarrow \oint_C |z+j|^2 \ \mathrm{d}z = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = \frac{4}{3} + \frac{10j}{3} - \frac{13}{3} - \frac{7j}{3} = -3+j$$

$$\Rightarrow \int_C |z+j|^2 \ \mathrm{d}z = -3+j$$

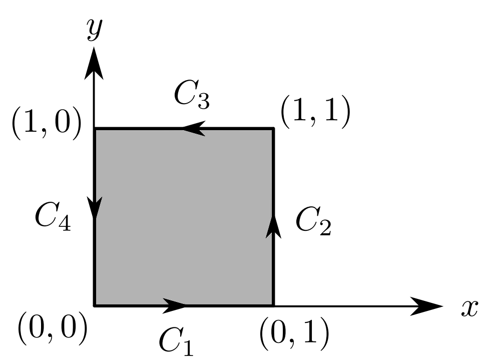


Figura 1.1: Pregunta 3

Método alternativo: Teorema de Green en el plano complejo

$$\oint_{\partial A} B(z, z^*)\,\mathrm{d}z = 2j \iint_A \frac{\partial B}{\partial z^*}\,\mathrm{d}A$$

Ocupamos $B(z, z^*)$, pero en $|z+j|^2$ no aparece directamente en términos de z^*. Esto podemos encontrarlo de manera facil, notando que $|z+j|^2$ es una norma cuadrada y sabemos en general que para un número complejo w, la norma cuadrada es ww^*. Usamos esto para reescribir la expresión con z^*

$$|z+j|^2 = (z+j)(z^*-j) = zz^* - zj + jz^* + 1 = B(z, z^*)$$

Ya que lo tenemos en función de z y z^*, aplicamos la derivada

$$\frac{\partial B(z, z^*)}{\partial z^*} = z + j$$

Ahora podemos aplicar la integral de area volviendo en términos de x y y

$$\Rightarrow \int_C |z+j|^2\,\mathrm{d}z = 2j \iint_A (z+j)\mathrm{d}A = 2j \iint_A (x + j(1+y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -3 + j$$

Lo cual da lo mismo que calculando la integral de línea.

Pregunta 4

Utilice la fórmula de Cauchy para calcular

$$\oint_{|z-2|=4} \frac{e^{\pi z}}{(z^2-4)^2}\,\mathrm{d}z$$

Solución

$$\oint_{|z-2|=4} \frac{e^{\pi z}}{(z^2-4)^2}\,\mathrm{d}z = \oint \frac{f(z)}{(z-2)^2}\,\mathrm{d}z + \int \frac{g(z)}{(z+2)^2}\,\mathrm{d}z$$

Donde $f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{(z+2)^2}$ y $g(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{(z-2)^2}$

$$\oint \frac{f(z)}{(z-2)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{e^{\pi z}}{(z+2)^2}\right]\Bigg|_{z=2} = 2\pi j\,\frac{(2\pi-1)e^{2\pi}}{32}$$

$$\int \frac{g(z)}{(z+2)^2}\,\mathrm{d}z = \pi j\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{e^{-\pi z}}{(z-2)^2}\right]\Bigg|_{z=-2} = \pi j\,\frac{(2\pi+1)e^{-2\pi}}{32}$$

La integral con $g(z)$ se multiplica por πj, no por $2\pi j$ debido a que el polo -2 se encuentra en el contorno de integración de la integral del problema, la manera de evaluar un polo en esas condiciones es rodearlo con un semicírculo donde el radio tiende a 0. Al ser un semicirculo, se rodea con π radianes y no 2π

$$\Rightarrow \oint_{|z-2|=4} \frac{e^{\pi z}}{(z^2-4)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi j \frac{(2\pi-1)e^{2\pi}}{32} + \pi j \frac{(2\pi+1)e^{-2\pi}}{32}$$

Pregunta 5

Sea $u(x,y) = y/\left(x^2+y^2\right)$. Determine $v(x,y)$ la conjugada armónica de u, y escriba $f = u + jv$ en términos de z si $f(1) = 2j$

Solución

Aplicamos la condiciones de Cauchy-Riemann para encontrar el conjugado armónico

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \int \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y + g(x) = \frac{x}{x^2+y^2} + g(x)$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow v = -\int \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x + h(y) = \frac{x}{x^2+y^2} + h(y)$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + h(y)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + j\left(\frac{x}{x^2+y^2} + K\right)$$

Si comparamos la función $v(x,y)$ obtenidas por ambos caminos, concluimos que $g(x) = h(y) = K$, donde K es una constante. Si aplicamos la condiciones inicial, obtenemos el valor de K.

$$f(1) = j(1+K) = 2j \Rightarrow K = 1$$

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + j\left(\frac{x}{x^2+y^2} + 1\right)$$

El problema pide que $f(x,y)$ se presente en función de z. Transformamos[1] x y y de la manera

$$x = \frac{z+z^*}{2} \qquad y = \frac{z-z^*}{2j} \qquad x^2+y^2 = zz^*$$

$$f(z,z^*) = \frac{(z-z^*)/(j2)}{zz^*} + j\left(\frac{(z+z^*)/2}{zz^*} + 1\right) = \frac{2jz^*}{2zz^*} + j = j\left(\frac{1}{z} + 1\right)$$

[1] Hay un truco para transformar más facil, reemplaze $x = z$ y haga $y = 0$, lo voy a usar luego más seguido pero quería mostrar como pasar a función de z de una manera más formal

$$f(z) = j\left(\frac{1}{z} + 1\right)$$

Notese que la f es únicamente función de z, una función analítica *no* puede ser función de z^*

Pregunta 6

¿En qué puntos del plano complejo tiene derivada cada una de las siguientes funciones?

a) $f(z) = z^*$

b) $f(z) = |z|^2$

Solución

6.a)

Aplicamos las condiciones de Cauchy-Riemann a $f(z) = z^* = x - jy$ notamos que $u(x,y) = x$ y $v(x,y) = -y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

La función $f(z) = z^*$ no es derivable en ningún punto.

6.b)

Aplicamos las condiciones de Cauchy-Riemann a $g(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$, notamos que $u(x,y) = x^2 + y^2$ y $v(x,y) = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = 0 = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y = 0 = -\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

La función $g(z) = |z|^2$ es únicamente derivable en el punto $(0,0)$

Pregunta 7

Utilice residuos para calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{5 + 4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x\ ,\quad a, b \in \mathbb{R}_+$

c) $\displaystyle\oint_{|z|=7} \frac{z}{1 - \exp(z)}\,\mathrm{d}z$

Solución

7.a)

Consideremos la integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{a + b\cos(\theta)}\, \mathrm{d}\theta$ con la condición $a > b$ y evaluamos al final.
Hagamos el cambio de variable $\exp(j\theta) = z \Rightarrow \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}z/jz$

Por lo tanto

$$\cos(\theta) = \frac{\exp(j\theta) + \exp(-j\theta)}{2} = \frac{z + 1/z}{2}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{a + b\cos(\theta)}\, \mathrm{d}\theta = \oint \frac{(z + 1/z)/(2)}{a + b(z + 1/z)/(2)} \frac{\mathrm{d}z}{jz} = \oint = \frac{-j}{b} \oint \frac{z^2 + 1}{z\left(z^2 + \frac{2a}{b}z + 1\right)}\, \mathrm{d}z$$

Ahora aplicamos residuos para obtener el valor de la integral. La factorización de $z^2 + \frac{2a}{b}z + 1$ es

$$\left(z^2 + \frac{2a}{b}z + 1\right) = \left(z - \left(\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)\right)\left(z - \left(\frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)\right)$$

Los polos de la función dentro de la integral, dentro del contorno de integración son $z_1 = 0$ y $z_2 = \frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$

$$\lim_{z \to 0} z \frac{z^2 + 1}{z\left(z^2 + \frac{2a}{b}z + 1\right)} = 1$$

$$\lim_{z \to \frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}} \left(z - \left(\frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)\right) \frac{z^2 + 1}{z\left(z^2 + \frac{2a}{b}z + 1\right)} = \lim_{z \to \frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}} \frac{z^2 + 1}{z\left(z - \left(\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)\right)}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)^2 + 1}{-2\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}} \cdot \frac{1}{\frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}}$$

Con los residuos, ya tenemos la expresion para la integral.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{a + b\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta = \frac{-j}{b} \oint \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + \frac{2a}{b}z + 1)} \mathrm{d}z = \frac{-j}{b}\, 2\pi j \sum \mathrm{Res}$$

$$= \frac{2\pi}{b}\left(1 + \frac{\left(\frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)^2 + 1}{-2\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}} \cdot \frac{1}{\frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{a+b\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{b}\left(1 + \frac{\left(\frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)^2 + 1}{-2\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}} \cdot \frac{1}{\frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}}\right)$$

En el problema del examen, $a = 5$, $b = 4$, si evaluamos, obtenemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{5+4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{3}$$

7.b)

Cambiamos la expresión de la forma $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(jbx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right]$

Evaluamos sobre el contorno

$$\oint_C \frac{\exp(jbz)}{z^2+a^2}\mathrm{d}z = \int_{C_1} \frac{\exp(jbx)}{x^2+a^2}\mathrm{d}x + \int_{C_2} \frac{\exp(jbz)}{z^2+a^2}\mathrm{d}z$$

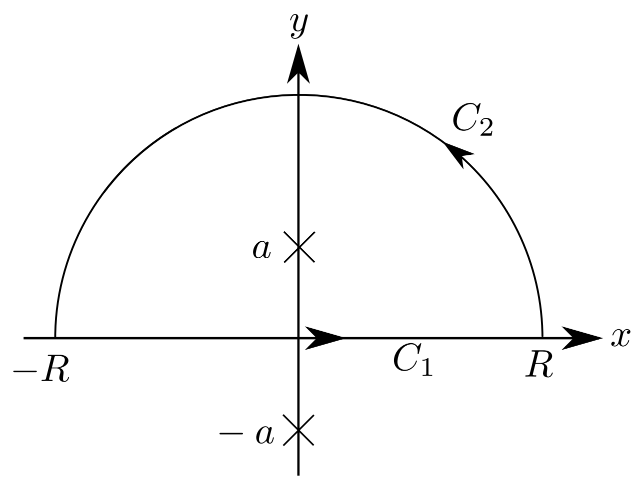


Figura 1.2: Pregunta 7b

La integral sobre C_2 tiene a 0 a medida que R tiene a infinito, solo nos quedamos con la primera integral y usamos residuos para evaluar el LHS. Los polos de $\exp(jbz)/\left(z^2+a^2\right)$ son $-ja, ja$ pero a es el único polo dentro del contorno. Obtengamos el residuo en ja.

$$\lim_{z\to ja}(z-ja)\frac{\exp(jbz)}{z^2+a^2} = \lim_{z\to ja}\frac{\exp(ibz)}{(z+ja)} = \frac{\exp(-ab)}{2ja}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(jbx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \oint_C \frac{\exp(jbz)}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\frac{\exp(-ab)}{2ja} = \frac{\pi\exp(-ab)}{a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(jbx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a}\exp(-ab)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(jbx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(bx)+j\sin(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a}\exp(-ab)$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a}\exp(-ab)$$

7.c)

Encontramos las raices de $1-\exp(z)=0 \Rightarrow 1=\exp(z)$. El 1 se puede reescribir como $exp(2k\pi j)$ con $k \in \mathbb{Z}$. De aqu notamos rápido que $z = 2k\pi j$. Los polos dentro de la trayectoria de integracin son $-2\pi j, 0, 2\pi j$.

En polo en $z=0$ vemos que es removible evaluando el límite. Ya que no está indefinido, el residuo es nulo.

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{1-\exp(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{-\exp(z)} = -1$$

Los otros 2 residuos los encontramos evaluando

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\exp(z)}, z_k\right] = \lim_{z\to z_k}(z-z_k)\frac{z}{1-\exp(z)} = z_k \lim_{z\to z_k}\frac{z-z_k}{1-\exp(z)} = z_k \lim_{z\to z_k}\frac{1}{-\exp(z)} = \frac{z_k}{\exp(z_k)}$$

Por lo tanto, evaluando para los polos, el residuo en $-2\pi j$ es $-2\pi j$ y el residuo en $2\pi j$ es $2\pi j$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=7} \frac{z}{1-\exp(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\sum \mathrm{Res} = 2\pi j\left(-2\pi j + 2\pi j\right) = 0$$
$$\oint_{|z|=7} \frac{z}{1-\exp(z)}\,\mathrm{d}z = 0$$

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica

IE-305 Matemáticas Superiores I Parcial I Ciclo 2008 Tiempo: 3 horas

Este es un examen de desarrollo. Todos los procedimientos deben aparecer en los cuadernos de examen. No se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz. Trabaje ordenadamente. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de cálculo simbólico (CAS). Calculadoras científicas son permitidas. Después de la devolución del examen, tendrá tres días para revisarlo y presentar su reclamo.

1. Determine los valores del parámetro real a para que $\dfrac{1-a\,\jmath}{a-4\,\jmath}$ sea un número real. (Valor: 10 puntos)

2. Calcule todos los valores de $\sqrt{\dfrac{\jmath^3-\jmath^{-3}}{2\,\jmath}}$. (Valor: 10 puntos)

3. Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_C |z+\jmath|^2\ dz$, si C es el cuadrado con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$, en dirección contraria a las manecillas del reloj. (Valor: 15 puntos)

4. Utilice la fórmula integral de Cauchy para calcular

$$\int_{|z-2|\,=\,4} \frac{e^{\pi\ z}\ dz}{\left(z^2-4\right)^2}$$

(Valor: 15 puntos)

5. Sea $u(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$. Determine $v(x,y)$ la conjugada armónica de u, y escriba $f = u + \jmath\ v$ en términos de z si $f(1) = 2\jmath$. (Valor: 10 puntos)

6. ¿En qué puntos del plano complejo tiene derivada cada una de las siguientes funciones? (Justifique su respuesta)

   a) $f(z) = z^*$ (conjugado complejo de z). (Valor: 5 puntos)
   b) $g(z) = |z|^2$ (Valor: 5 puntos)

7. Utilice residuos para calcular las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta\ d\theta}{5+4\cos\theta}$ (Valor: 10 puntos)
   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(bx)\ dx}{x^2+a^2}$, $a>0,\ b>0$ (Valor: 10 puntos)
   c) $\displaystyle\int_{|\ z\ |\,=\,7} \frac{z\ dz}{1-e^z}$ (Valor: 10 puntos)

Notas: Fórmula integral de Cauchy: $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)\ dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{2\pi\jmath}{n!}\ f^{(n)}(a)\,;$ $\quad e^u = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}$; $\operatorname{Res}(f,a) = \dfrac{1}{(k-1)!}\displaystyle\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-a)^k f(z)\right]$ si $z=a$ es polo de orden k.

1.2. I Parcial II Ciclo 2008

Pregunta 1

Resuelva las siguientes operaciones y muestre el resultado según la notación que se solicita.

a) $\dfrac{j^4 + j^9 + j^{15}}{2 - j^5 + j^{11} - j^{15}}$

b) $\dfrac{3\left[\left(\dfrac{1+j}{1-j}\right)^2 - 2\left(\dfrac{1-j}{1+j}\right)\right]^3}{5+j}$

Solución

1.a)

$$\frac{j^4 + j^9 + j^{15}}{2 - j^5 + j^{11} - j^{15}} = \frac{1 + j - j}{2 - j - j + j} = \frac{1}{2 - j} = \frac{1}{2 - j} \cdot \frac{2 + j}{2 + j} = \frac{2 + j}{5}$$

La norma es $\left|\dfrac{2+j}{5}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

La fase es $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) \approx 0{,}4636$ rad

$$\Rightarrow \frac{j^4 + j^9 + j^{15}}{2 - j^5 + j^{11} - j^{15}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \angle 0{,}4636$$

1.b)

$$\frac{3\left[\left(\dfrac{1+j}{1-j}\right)^2 - 2\left(\dfrac{1-j}{1+j}\right)\right]^3}{5+j} = \frac{3\left[\left(\dfrac{\exp(j\pi/4)}{\exp(-j\pi/4)}\right)^2 - 2\dfrac{\exp(-j\pi/4)}{\exp(j\pi/4)}\right]^3}{5+j} = \frac{3\left[\exp(-j\pi) - 2\exp(-j\pi/2)\right]^3}{5+j}$$

$$3\frac{(-1+2j)^3}{5+j} \cdot \frac{5-j}{5-j} = 3 \cdot \frac{5-j}{26}\,(-1+2j)^3$$

Evaluando por aparte $(-1+2j)^3$

$$(-1+2j)(-1+2j)(-1+2j) = (-3-4j)(-1+2j) = 11 - 2j$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \frac{5-j}{26}\,(-1+2j)^3 = 3 \cdot \frac{5-j}{26} \cdot (11 - 2j) = \frac{159 - 63j}{26}$$

$$\Rightarrow \frac{3\left[\left(\frac{1+j}{1-j}\right)^2 - 2\left(\frac{1-j}{1+j}\right)\right]^3}{5+j} = \frac{159-63j}{26}$$

Pregunta 2

Resuelva las siguientes ecuaciones complejas:

a) Todos los valores de $\ln\left(\sqrt{3}-j\right)$ y su valor principal.

b) Todos los valores que satisfacen $\exp(jz) = 2$

Solución

2.a)

$$\log\left(\sqrt{3}-j\right) = \ln\left|\sqrt{3}-j\right| + j\left(\arctan\frac{-1}{\sqrt{3}} + 2k\pi\right) = \ln 2 + j\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right); \quad k \in \mathbb{Z}$$

El valor principal[2] es cuando $k = 0$

$$\log\left(\sqrt{3}-j\right) = \ln(2) - j\frac{\pi}{6}$$

2.b)

$$\exp(jz) = 2 = \exp\left(\ln(2) + j2k\pi\right) \Rightarrow jz = j(x+jy) = -y + jx = \ln(2) + j2k\pi$$

$$y = -\ln(2) \;\;, \;\; x = 2k\pi \Rightarrow z = 2k\pi - j\ln(2)$$

Pregunta 3

Determine si la función $u(x,y) = \ln\left[(x-1)^2 + (y-2)^2\right]$ es armónica. En caso de serlo encuentre el respectivo conjugado armónico. Exprese $u + jv$ como una función de z, si $f(0) = \ln(5)$

Solución

$$u(x,y) = \ln\left[(x-1)^2 + (y-2)^2\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+(y-2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{(x-1)^2+(y-2)^2} - \frac{4(x-1)^2}{\left((x-1)^2+(y-2)^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2}{(x-1)^2+(y-2)^2} - \frac{4(y-2)^2}{\left((x-1)^2+(y-2)^2\right)^2}$$

Después de simplificar obtenemos

[2]Para efectos de este curso, el argumento del valor principal va de $]-\pi,\pi]$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Se concluye que u es armónica. Utilicemos la condiciones de C-R para encontrar $v(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+(y-2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+(y-2)^2}\,\mathrm{d}y + g(x)$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2\arctan\left(\frac{y-2}{x-1}\right) + g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow v = -\int \frac{2(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2}\,\mathrm{d}x + h(y)$$

$$v(x,y) = -2\arctan\left(\frac{x-1}{y-2}\right) + h(y)$$

Podemos cambiar el $v(x,y)$ obtenido para que se vea al primer $v(x,y)$ con la identidad

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

En nuestro caso

$$-\arctan\left(\frac{x-1}{y-2}\right) = \arctan\left(\frac{y-2}{x-1}\right) - \frac{\pi}{2}$$

Sustituimos y obtenemos

$$v(x,y) = 2\arctan\left(\frac{y-2}{x-1}\right) - \pi + h(y)$$

Al comparar, tenemos que $g(x) = h(y) - \pi$. La única manera que esta condición se cumpla es que $g(x) = h(y) - \pi = K$, donde K es una constante.

$$\Rightarrow f(x,y) = \ln\left[(x-1)^2 + (y-2)^2\right] + j\left(2\arctan\left(\frac{y-2}{x-1}\right) + K\right)$$

Con la condición inicial, averiguamos el valor de K

$$f(0) = \ln(5) = \ln(5) + j(\arctan(2) + K) \Rightarrow K = -\arctan(2)$$

$$f(x,y) = \ln\left[(x-1)^2 + (y-2)^2\right] + j\left(2\arctan\left(\frac{y-2}{x-1}\right) - 2\arctan(2)\right)$$

Ahora, para cambiarlo a función de z, hacemos $x = z$ y $y = 0$

$$f(z) = \ln\left[(z-1)^2 + 4\right] + j\left(2\arctan\left(\frac{-2}{z-1}\right) - 2\arctan(2)\right)$$

Pregunta 4

Calcule la integral de lnea $\oint_C z^* \mathrm{d}z$ si C es el triángulo con vértices $(0,0),(1,0),(1,j)$, en dirección contraria a las manecillas del reloj (z^* es el conjugado complejo de z).

$$\oint_C z^* \mathrm{d}z = \oint_C (x - jy)(\mathrm{d}x + j\mathrm{d}y)$$

La integral se evalua en 3 segmentos: $\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$

$$C_1 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & t & \Rightarrow & \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ y & = & 1 & \Rightarrow & \mathrm{d}y & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \int_{C_1} z^* \mathrm{d}z = \int_0^1 t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & 1 & \Rightarrow & \mathrm{d}x & = & 0 \\ y & = & t & \Rightarrow & \mathrm{d}y & = & \mathrm{d}t \end{array} \right. \Rightarrow \int_{C_2} z^* \mathrm{d}z = \int_0^1 (1 - jt)\, j\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + j$$

$$C_3 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & t & \Rightarrow & \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ y & = & t & \Rightarrow & \mathrm{d}y & = & \mathrm{d}t \end{array} \right. \Rightarrow \int_{C_3} z^* \mathrm{d}z = \int_1^0 (t - jt)(\mathrm{d}t + j\mathrm{d}t) = -1$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + j - 1 = j$$

$$\Rightarrow \oint_C z^* \mathrm{d}z = j$$

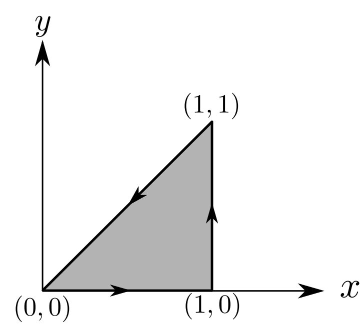


Figura 1.3: Pregunta 4

Método alternativo: El teorema de Green en el plano complejo

$$\oint_{\partial A} B(z, z^*)\, \mathrm{d}z = 2j \iint_A \frac{\partial B}{\partial z^*}\, \mathrm{d}A$$

De aquí vemos que $B(z, z^*) = z^* \Rightarrow \dfrac{\partial B}{\partial z^*} = 1$

Así que la integral se reduce a

$$\oint_C z^* \mathrm{d}z = 2j \iint \mathrm{d}A = j$$

Ya que la integral $\iint \mathrm{d}A$ es el área del triángulo, que es $1/2$

Pregunta 5

Utilice residuos para calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\cos(z)}{z\sin(z)}\,\mathrm{d}z$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+16}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(3x)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

Solución

5.a) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\cos(z)}{z\sin(z)}\,\mathrm{d}z$

El polo en 0 va a ser problematico por sus derivadas en el residuo, obtengamos el valor del coeficiente de $1/z$ haciendo expansiones de Taylor

$$\frac{\cos(z)}{z\sin(z)} = \frac{\cos(z)}{z\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\mathcal{O}(z^5)\right)} = \frac{\cos(z)}{z^2\left(1-\left(\dfrac{z^2}{3!}-\dfrac{z^4}{5!}+\mathcal{O}(z^4)\right)\right)}$$

$$\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\mathcal{O}(z^4)\right)\frac{1+\left(\dfrac{z^2}{3!}-\dfrac{z^4}{5!}+\mathcal{O}(z^4)\right)+\left(\dfrac{z^2}{3!}-\dfrac{z^4}{5!}+\mathcal{O}(z^4)\right)^2+\cdots}{z^2}$$

Notese que al hacer la multiplicación, solo vamos a tener coeficientes de z^n donde n es par. No hay término con $1/z$, por lo tanto, el residuo en 0 da 0. Para $\pm\pi$, solo $\sin z$ se indefine. Con la expansión de Taylor, se ve que es un polo de orden 1. Sea $z_1 = \pi$ y $z_2 = -\pi$, obtengamos el residuo en esos puntos.

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k)\frac{\cos z}{z\sin z} = \frac{\cos z_k}{z_k}\lim_{z\to z_k}\frac{(z-z_k)}{\sin z} = \frac{\cos z_k}{z_k}\lim_{z\to z_k}\frac{1}{\cos z} = \frac{1}{z_k}$$

Ya que el residuo es $1/z_k$, a la hora de sumar los residuos obtenemos $1/\pi - 1/\pi + 0 = 0$. Por lo tanto

$$\oint_{|z|=4}\frac{\cos(z)}{z\sin(z)}\,\mathrm{d}z = 0$$

5.b)

Hagamos la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + a^4}\, \mathrm{d}x;\ \ a \in \mathbb{R}, a > 0$ y evaluamos luego evaluamos

$$\oint_C \frac{z^2}{z^4 + a^4}\, \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + a^4}\, \mathrm{d}x + \int_{C_2} \frac{z^2}{z^4 + a^4}\, \mathrm{d}z$$

La segunda integral tiende a 0 a medida que el R tiende a infinito. Evaluemos el LHS usando residuos. Averiguemos los polos y el orden de ellos.

$$z^4 + a^4 = (z^2 + ja^2)(z^2 - ja^2) = \left(z^2 - a^2 \exp\left(\frac{j\pi}{2}\right)\right)\left(z^2 - a^2 \exp(\frac{-j\pi}{2})\right)$$

$$= \left(z - a\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)\right)\left(z - a\exp\left(\frac{j3\pi}{4}\right)\right)\left(z - a\exp\left(\frac{-j\pi}{4}\right)\right)\left(z - \exp\left(a\frac{-j3\pi}{4}\right)\right)$$

Los polos dentro del contorno de integracion son $z_1 = a\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)$ y $z_2 = a\exp\left(\frac{j3\pi}{4}\right)$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{z^4 + a^4}, z_k\right] = \lim_{z \to z_k} (z - z_k)\frac{z^2}{z^4 + a^4} = z_k^2 \lim_{z \to z_k} \frac{(z - z_k)}{z^4 + a^4} = z_k^2 \lim_{z \to z_k} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4z_k}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + a^4}\, \mathrm{d}x = \oint_C \frac{z^2}{z^4 + a^4}\, \mathrm{d}z = 2\pi j \sum \operatorname{Res}$$

$$2\pi j \sum \operatorname{Res} = 2\pi j \left(\frac{1}{4a\exp(j\pi/4)} + \frac{1}{4a\exp(j3\pi/4)}\right) = \frac{j\pi}{2a}\left(\frac{\exp(j3\pi/4) + \exp(j\pi/4)}{\exp(j\pi)}\right) = \frac{\pi}{a\sqrt{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + a^4}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{a\sqrt{2}}$$

Para la integral del examen.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 16}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

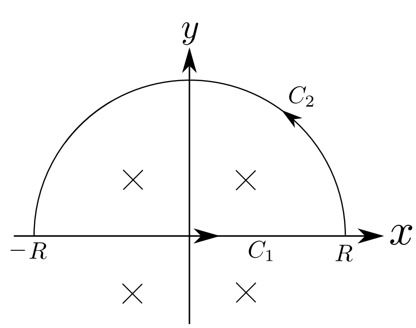


Figura 1.4: Trayectoria de las preguntas 5.b y 5.c

5.c)[3]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(3x)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$$

La función que estamos integrando es una función impar, sabemos que tiene que dar 0. Comprobemos por residuos que da 0. Hagamos la integral con exponencial sobre el plano $Y+$, donde la parte imaginaria va a ser la integral del seno. Hagamos el contorno de integración de la figura 1.4. Aquí los polos están en un circulo de radio 1, a diferencia del problema 5.b donde estan en un circulo de radio a

$$\oint \frac{\exp(3jz)}{z^4+1}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(3jx)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x + \int_{C_2} \frac{\exp(3jz)}{z^4+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi j \sum \mathrm{Res}$$

La integral sobre C_2 se hace nula por el teorema de Jordan. Los polos los encontramos resolviendo

$$z^4+1=0 \Rightarrow z^4=-1=\exp\left(j\left(\pi+2k\pi\right)\right) \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$z=\exp\left(j\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)\right)$$

Los polos dentro del contorno son

$$z_1=\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right) \qquad z_2=\exp\left(\frac{3j\pi}{4}\right)$$

Por lo tanto, los residuos los obtenemos:

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\exp(3jz)}{z^4+1}, z_k\right] = \lim_{z\to z_k}(z-z_k)\frac{\exp(3jz)}{z^4+1} = \exp(3jz_k)\lim_{z\to z_k}\frac{1}{4z^3} = \exp(3jz_k)\frac{1}{4z_k^3}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(3jx)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = 2\pi j\sum\mathrm{Res} = 2\pi j\left(\exp(3jz_1)\frac{1}{4z_1^3}+\exp(3jz_2)\frac{1}{4z_2^3}\right)$$

Ya sabemos que la integral tiene que dar 0, voy a despreocuparme por los factores comunes, y preocuparme por la parte real dentro del parentesis, ya que va a terminar siendo la parte imaginaria debido al $2\pi j$, que es lo que ocupamos.

$$\frac{\exp\left(3j\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)\right)}{\exp\left(\frac{3j\pi}{4}\right)}+\frac{\exp\left(3j\exp\left(\frac{3j\pi}{4}\right)\right)}{\exp\left(\frac{9j\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{\exp\left(\frac{9j\pi}{4}\right)\exp\left(3j\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)+\exp\left(\frac{3j\pi}{4}\right)\exp\left(3j\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+j\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right)}{\text{Algún factor común que no nos interesa}}$$

[3]Ver **I Parcial II Ciclo 2014 Pregunta 2** para una solución más general... Igual lo mantengo para mostrar como ignorar cosas cuando uno está buscando algo

Simpliquemos, saquemos factor común, notando que $\sin(\pi/4) = \sin(3\pi/4)$, los senos salen como un exponente real a factor común. Evaluamos los cosenos. $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ y $\cos(3\pi/4) = -1/\sqrt{2}$. También simplifiquemos el primer exponencial complejo. $\exp(9j\pi/4) = \exp(\pi/4)$

$$= (\text{Algo en común})\left[\exp\left(j\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right)+\exp\left(j\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]$$

Voy a agarrar la parte de cosenos al expandir el exponencial complejos, la parte de los senos los voy a ignorar. Lo ignoró porque al final, quiero la parte compleja de la expresión final.
El j del $2\pi j\sum \text{Res}$ hace que la parte real de los residuos sea imaginaria, que es lo que buscamos.

La expansión de la parte real es

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

Expandimos usando $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$

$$= \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right]+\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$\cos\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]+\sin\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$\cos\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]+\sin\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= 0$$

Por lo tanto, la integral haciendola también por residuos da 0.[4]

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(3x)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = 0$$

[4] Esto es el clásico "Matar una mosca con un cañon"

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica

ESCUELA DE INGENIERIA ELECTRICA
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

IE-305 Matemáticas Superiores I Examen Parcial II Ciclo 2008 Tiempo: 3 horas

Este es un examen de desarrollo. Todos los procedimientos deben aparecer en los cuadernos de examen. No se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz. Trabaje ordenadamente. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de cálculo simbólico (CAS). Calculadoras científicas son permitidas. Después de la devolución del examen, tendrá tres días para revisarlo y presentar su reclamo.

1. Resuelva las siguientes operaciones y muestre el resultado según la notación que se solicita.

   a) $\dfrac{\left(j^4+j^9+j^{15}\right)}{\left(2-j^5+j^{11}-j^{15}\right)}$, notación fasorial. (Valor: 7 puntos)

   b) $\dfrac{3\left[\left(\dfrac{1+j}{1-j}\right)^2-2\left(\dfrac{1-j}{1+j}\right)\right]^3}{5+j}$, notación cartesiana. (Valor: 8 puntos)

2. Resuelva las siguientes ecuaciones complejas:

   a) Todos los valores de $\ln\left(\sqrt{3}\ -\ j\right)$ y su valor principal. (Valor: 8 puntos)

   b) Todos los valores que satisfacen $e^{\,j\ z}=2$ (Valor: 7 puntos)

3. Determine si la función $u(x,y)=\ln\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right]$ es armónica. En caso de serlo encuentre el respectivo conjugado armónico. Exprese $u+\ j\ v$ como una función de z, si $f(0)=\ln 5$. (Valor: 20 puntos)

4. Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_C z^*\,dz$, si C es el triángulo con vértices $(0,0),\ (1,0),\ (1,\ j\ )$, en dirección contraria a las manecillas del reloj (z^* es el conjugado complejo de z).
   (Valor: 15 puntos)

5. Utilice residuos para calcular las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_{|z|\ =\ 4}\frac{\cos\ z\ \ d\ z}{z\ \mathrm{sen}\ z}$ (Valor: 15 puntos)

   b) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^2\ dx}{x^4+16}$ (Valor: 10 puntos)

   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\ 3x\ dx}{x^4+1}$ (Valor: 10 puntos)

Notas: Fórmula integral de Cauchy: $\displaystyle\int_\Gamma\frac{f(z)\ dz}{(z-a)^{n+1}}=\frac{2\pi j}{n!}\ f^{(n)}(a)$; $\displaystyle\cos u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}$; $\displaystyle\mathrm{sen}\ u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n u^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\displaystyle\mathrm{Res}(f,a)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-a)^k f(z)\right]$ si $z=a$ es polo de orden k; $\displaystyle\int\frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}$; $\displaystyle\frac{d}{dx}\ \tan^{-1}u=\frac{u'}{1+u^2}$.

1.3. I Parcial I Ciclo 2009

Pregunta 1

Determine la parte real e imaginaria del número complejo $\left(\dfrac{1-j}{\sqrt{2}}\right)^9$

Solución

$$\left(\frac{1-j}{\sqrt{2}}\right)^9 = \left(\exp\left(\frac{-j\pi}{4}\right)\right)^9 = \exp\left(\frac{-9j\pi}{4}\right) = \exp\left(-2\pi j\right)\exp\left(\frac{-j\pi}{4}\right) = \exp\left(\frac{-j\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1-j}{\sqrt{2}}\right)^9 = \exp\left(\frac{-j\pi}{4}\right) = \frac{1-j}{\sqrt{9}}$$

Pregunta 2

Utilice residuos para calcular la integral real $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(at)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Solución

Ver **I Parcial I Ciclo 2008 Pregunte 7.b** donde se demuestra que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a}\exp(-ab)$
Comparando el formato

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(at)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \pi\exp(-a)$$

Pregunta 3

Calcule la integral $\displaystyle\int_C (z+3z^*)\,\mathrm{d}z$ a lo largo de una trayectoria C que inicia en el origen y termina en $1+2j$. El camino a seguir es una línea horizontal desde 0 hasta 1 y luego una vertical desde 1 hasta $1+2j$. z^*es el conjugado complejo de z.

Solución

Dividimos la integral en 2 curvas. $\displaystyle\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$

La integral$\displaystyle\int_C (z+3z^*)\,\mathrm{d}z$ se puede reescribir como $\displaystyle\int_C \left((x+jy)+3(x-jy)\right)(\mathrm{d}x+j\mathrm{d}y)$

$$C_1 = \begin{cases} x = t \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ y = 0 \Rightarrow \mathrm{d}y = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_C (z+3z^*)\mathrm{d}z = \int_0^1 (t+3t)\mathrm{d}t = 2$$

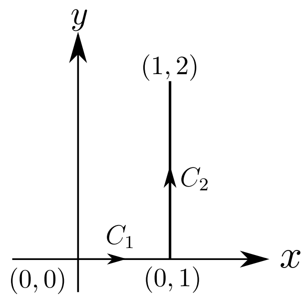


Figura 1.5

$$C_2 = \begin{cases} x = 1 \Rightarrow \mathrm{d}x = 0 \\ y = t \Rightarrow \mathrm{d}y = t \end{cases} \Rightarrow \int_C (z + 3z^*)\mathrm{d}z = \int_0^1 ((1 + jt) + 3(1 - jt))\, j\mathrm{d}t = 1 + 4j$$

$$\int_C (z + 3z^*)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} + \int_{C_2} = 2 + (1 + 4j) = 3 + 4j$$

Pregunta 4

Demuestre que $u(x,y) = x^2 - 3xy - y^2 + \pi x$ es armónica. Encuentre su conjugado armónico $v(x,y)$. Represente la función $f(z) = u + jv$ en términos de z. Considere que $f(1) = -j$.

Solución

Si $u(x,y) = x^2 - 3xy - y^2 + \pi x$, mostremos que el laplaciano de u es igual a 0.

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y + \pi \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -3x - 2y \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

$$\Rightarrow \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Para encontrar $v(x,y)$ aplicamos las condiciones de C-R

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y + \pi = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \int (2x - 3y + \pi)\,\mathrm{d}y + g(x) = 2xy - \frac{3}{2}y^2 + \pi y + g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -3x - 2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow v = \int (3x + 2y)\,\mathrm{d}x + h(y) = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + h(y)$$

Comparando $v(x,y)$ en ambos casos, tenemos que: $g(x) = \frac{3}{2}x^2$ y $h(y) = \frac{3}{2}y^2 + \pi y$

$$f(x,y) = x^2 - 3xy - y^2 + \pi x + j\left(2xy - \frac{3}{2}y^2 + \pi y + \frac{3}{2}x^2\right) + K,\ K \in \mathbb{C}$$

Con la condición inicial, obtenemos el valor de K

$$f(1) = -j = 1 + \pi + \frac{j3}{2} + K \Rightarrow K = -1 - \pi - j\frac{5}{2}$$

Ahora para expresar $f(x,y)$ como $f(z)$, hacemos $x = z, y = 0$

$$f(z) = z^2 + \pi z + j\frac{3z^2}{2} + -1 - \pi - j\frac{5}{2}$$

Pregunta 5

Utilice residuos para calcular la siguiente integral: $\displaystyle\oint_{|z+\pi j|=5} \frac{1}{z^2(\exp(z)-1)}\,\mathrm{d}z$

Solución

Ubiquemos los polos. El primer término z^2 es $z^2 = 0$ solo en $z = 0$. El segundo término $\exp(z) - 1$ es 0 en $\exp(z) - 1 = 0 \Rightarrow z = 2k\pi j$ con $k \in \mathbb{Z}$ Los polos dentro del contorno de integración son $z = 0$ y $z = 2\pi j$. El polo $z = 0$ es de orden 3

$$\frac{1}{z^2\left(\exp(z)-1\right)} = \frac{1}{z^2\left(1 + z + \dfrac{z^2}{2} + \mathcal{O}(z^3) - 1\right)} = \frac{1}{z^3\left(1 + \dfrac{z}{2} + \mathcal{O}(z^2)\right)}$$

Viendolo de esta manera, lo que indefine la expresión es el z^3 del denominador.

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2(\exp(z)-1)}, 0\right] = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[z^3\frac{1}{z^2(\exp(z)-1)}\right] = \frac{1}{12}$$

El polo en $z = -2\pi j$ es de orden 1.

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2(\exp(z)-1)}, -2\pi j\right] = \lim_{z\to -2\pi j}(z + 2\pi j)\frac{1}{z^2\left(\exp(z)-1\right)} = -\frac{1}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \oint_{|z+\pi j|=5}\frac{1}{z^2(\exp(z)-1)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\sum \mathrm{Res} = 2\pi j\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{4\pi^2}\right)$$

Pregunta 6

Sea $f(z) = \begin{cases} \dfrac{(z^*)^2}{z} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$

z^* es el conjugado complejo de z

a) Verifique si existe $f'(0)$, la derivada de $f(z)$ en $z = 0$ (Sugerencia: use la definición de derivada)

b) Si $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$, verifique si u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z = 0$

Solución

6.a) Obtengamos el valor de la derivada por definición.

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{\left(\dfrac{z^*}{z}\right)}{z} = \lim_{z\to 0} \left(\frac{z^*}{z}\right)^2$$

Agarramos el límite por 2 trayectorias, una donde $x \to 0$ y $y = 0$, y otra por donde $x = y$. Si el límite no existe, la derivada en $z = 0$ no existe.

Ya que

$$\left(\frac{z^*}{z}\right)^2 = \left(\frac{x - jy}{x + jy}\right)^2$$

Tomemos el límite donde $x \to 0$ y $y = 0$

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x - j0}{x + j0}\right)^2 = 1$$

Ahora tomemos el límite donde $x = y$

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{y\to 0} \left(\frac{x - jx}{x + jx}\right)^2 = \left(\frac{1 - j}{1 + j}\right)^2 \neq 1$$

El límite da diferente por trayectorias distintas, el límite no existe, por lo tanto, la derivada no existe.

6.b) Ahora verifiquemos si cumple con las condiciones de Cauchy-Riemann

$$f(z) = \frac{(z^*)^2}{z} = \frac{(z^*)^3}{zz^*} = \frac{(x - jy)^3}{x^2 + y^2} = \frac{x^3 + 3x^2(-jy) + 3x(-jy)^2 + (-jy)^3}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} + j\frac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} \qquad \Rightarrow v(x,y) = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2}$$

Con la condición que $f(0)=0$, se cumple que $u(0,0)=0$ y $v(0,0)=0$
Obtengamos las derivadas de u y v por definición. Las derivadas parciales de x cuando $x\to 0$ y $y=0$, las parciales de y con $x=0$ y $y\to 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{x^3}{x^2}\right)}{x}=1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{v(x,0)-v(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x-0}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\lim_{y\to 0}\frac{v(0,y)-v(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{\left(\dfrac{y^3}{y^2}\right)}{y}=1$$

En el punto $x=0, y=0$ se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores   I Examen Parcial   I Ciclo Lectivo del 2009

Este es un examen de desarrollo. Todos los procedimientos deben aparecer en los cuadernos de examen. No se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz. Trabaje ordenadamente. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de cálculo simbólico (CAS). Calculadoras científicas son permitidas.

Preguntas: 1 y 2 Profesor Arturo Camacho
3 y 4 Profesor Aramis Pérez
5 y 6 Profesor Edison De Faria

1. Determine la parte real e imaginaria del número complejo $\left(\frac{1-j}{\sqrt{2}}\right)^9$. (Valor: 15 puntos)

2. Utilice residuos para calcular la integral real $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos at}{1+t^2}\, dt$, a real. (Valor: 15 puntos)

3. Calcule la integral $\int_C \left(z+3z^*\right) dz$, a lo largo de una trayectoria C que inicia en el origen y termina en $1+2j$. El camino a seguir es una línea horizontal desde 0 hasta 1 y luego una vertical desde 1 hasta $1+2j$. z^* es el conjugado complejo de z. (Valor: 15 puntos)

4. Demuestre que $u(x,y) = x^2 - 3xy - y^2 + \pi x$ es armónica. Encuentre su conjugado armónico $v(x,y)$. Represente la función $f(z) = u + jv$ en términos de z. Considere que $f(1) = -j$. (Valor: 20 puntos)

5. Utilice residuos para calcular la siguiente integral: $\int_{|z+\pi j|=5} \frac{dz}{z^2\left(e^z - 1\right)}$ (Valor: 15 puntos)

6. Sea $f(z) = \begin{cases} \frac{\left(z^*\right)^2}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$

   z^* es el conjugado complejo de z.

   a. Verifique si existe $f'(0)$) la derivada de $f(z)$ en $z=0$. (Sugerencia: use la definición de derivada) (Valor: 10 puntos)
   b. Si $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$, verifique si u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z=0$. (Valor: 10 puntos)

FORROLARIO

Fórmula integral de Cauchy: $\int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{2\pi j}{n!} f^{(n)}(a)$.

$\text{Res}(f,a) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-a)^k f(z)\right]$ si $z=a$ es un polo de orden k.

$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$, $\operatorname{sen} u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}$

1.4. I Parcial II Ciclo 2009

Pregunta 1

Para $z = x + jy$ sea $f(z) = \sqrt{\left|z^2 - (z^*)^2\right|} = u(x,y) + jv(x,y)$ con z^* el conjugado de z

Solución

Sea $z = x + jy$ y $f(z,z^*) = \sqrt{\left|z^2 - (z^*)^2\right|}$. Verifiquemos que cumplen las condiciones de C-R calculando la derivada por definición. Obtengamos $u(x,y)$ y $v(x,y)$

$$z^2 + (z^*)^2 = (x + jy)^2 - (x - jy)^2 = 4xyj \Rightarrow \sqrt{\left|z^2 - (z^*)^2\right|} = 2\sqrt{|xy|}$$

$$u(x,y) = 2\sqrt{|xy|} \qquad\qquad v(x,y) = 0$$

Calculemos las derivadas por la definición en el punto $(0,0)$. Primero $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ con $\Delta x \to 0$ y $\Delta y = 0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sqrt{|\Delta x \cdot 0|} - 0}{\Delta x} = 0 = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(0,0)}$$

Ahora $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ cuando $\Delta x = 0$ y $\Delta y \to 0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2\sqrt{|0 \cdot \Delta y|} - 0}{\Delta y} = 0 = -\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(0,0)}$$

La función f sí cumple con las condiciones de C-R en el punto $(0,0)$ Para verificar que la derivada existe, el límite tiene que existir. Calculemos el límite por la trayectoria de $x = y \Rightarrow \Delta x = \Delta y \Rightarrow \Delta z = \Delta x + j\Delta y = \Delta x + j\Delta x$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta x + j\Delta y) - f(0,0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2\sqrt{|\Delta x|^2}}{\Delta x + j\Delta x} = \frac{2}{1+j} \neq 0$$

Como el límite da diferente por una trayectoria distinta, el límite no existe. La derivada no existe en el punto (0,0). Las condiciones de Cauchy-Riemann son *necesarias* pero no *suficientes.*

Pregunta 2

Utilice residuos para calcular $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{1}{z\sin(z)\cos(z)}\,\mathrm{d}z$

Solución

Los polos dentro del contorno son $0, \pi/2, -\pi/2$. Obtenemos el residuo en 0 expandiendo en series de Taylor.

$$\frac{1}{z\left(z - \frac{z^3}{3!} + \mathcal{O}(z^3)\right)\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \mathcal{O}(z^2)\right)} = \frac{1}{z^2\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \mathcal{O}(z^2)\right)\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \mathcal{O}(z^2)\right)}$$

$$= \frac{1}{z^2\left(1 - \left(\frac{2}{3}z^2 + \mathcal{O}(z^2)\right)\right)} = \frac{1 + \left(\frac{2}{3}z^2 + \mathcal{O}(z^2)\right) + \left(\frac{2}{3}z^2 + \mathcal{O}(z^2)\right)^2 + \cdots}{z^2}$$

Vemos que todas las potencias de z son pares al expandir, no hay coficiente $1/z$, el residuo en 0 es 0

Sea los polos $z_1 = \pi/2$ y $z_2 = -\pi/2$, donde los polos son de orden 1

$$\lim_{z\to z_k} \frac{(z - z_k)}{z\sin(z)\cos(z)} = \frac{1}{z_k\sin(z_k)} \lim_{z\to z_k} \frac{z - z_k}{\cos(z_k)} = \frac{1}{z_k\sin(z_k)} \lim_{z\to z_k} \frac{1}{-\sin(z)} = \frac{-1}{z_k\sin^2(z_k)}$$

$$\text{Res}\left[\frac{1}{z\sin z\cos z}, \frac{\pi}{2}\right] = -\frac{2}{\pi} \qquad \text{Res}\left[\frac{1}{z\sin z\cos z}, \frac{-\pi}{2}\right] = \frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=2} \frac{1}{z\sin(z)\cos(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\sum \text{Res} = 2\pi j\left(\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=2} \frac{1}{z\sin(z)\cos(z)}\,\mathrm{d}z = 0$$

Pregunta 3

Sea $u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ donde a, b y c son constantes reales

a. Determine los valores que deben tomar las constantes para que la función sea armónica, b. A partir de lo obtenido anteriormente, obtenga el conjugado armónico de $u(x, y)$ c. Represente la función en términos de z, si $f(1) = 0$

Solución

$$u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2ax + by \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2a \qquad \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = bx + 2cy \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2c$$

$$\nabla^2 u = 2a + 2c = 0 \Rightarrow -a = c$$

$$\Rightarrow u(x, y) = ax^2 + bxy + -ay^2$$

Encontremos $v(x,y)$ con las condiciones de C-R

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax + by = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \int (2ax + by)\,\mathrm{d}y + g(x) = 2axy + \frac{b}{2}y^2 + g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = bx + -2ay = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow v = \int (-bx + 2ay)\,\mathrm{d}x + h(y) = -\frac{b}{2}x^2 + 2axy + h(y)$$

Al comparar el $v(x,y)$ obtenido en ambas integraciones, tenemos que

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{b}{2}x^2 \qquad \Rightarrow h(y) = \frac{b}{2}y^2$$

Aún se le puede añadir una constante K al $v(x,y)$

$$\Rightarrow v(x,y) = -\frac{b}{2}x^2 + 2axy + +\frac{b}{2}y^2 + K$$

Con $u(x,y)$ y $v(x,y)$, ya tenemos $f(x,y)$

$$\Rightarrow f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + j\left(-\frac{b}{2}x^2 + 2axy + +\frac{b}{2}y^2 + K\right)$$

Usemos la condición inicial para hallar el valor de K

$$f(1) = 0 = a - j\frac{b}{2} + jK \Rightarrow K = \frac{b}{2} + ja$$

$$\Rightarrow f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 - a + j\left(-\frac{b}{2}x^2 + 2axy + +\frac{b}{2}y^2 + \frac{b}{2}\right)$$

Aplicamos el trucazo de cambiar $x = z$ y $y = 0$ para tenerlo en función de z y simplificamos.

$$f(z) = a(z^2 - 1) + j\frac{b}{2}(1 - z^2)$$

Pregunta 4

Utilice la fórmula integral de Cauchy para calcular $\oint_{|z|=5} \frac{175}{(5z-20)^2(z^2+1)}\,\mathrm{d}z$

Solución

$$\oint_{|z|=5} \frac{175}{(5z-20)^2(z^2+1)}\,\mathrm{d}z = \frac{175}{25}\oint_{|z|=5} \frac{1}{(z-4)^2(z^2+1)}\mathrm{d}z$$

Hagamos la integral $\oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^2(z^2+b^2)} \mathrm{d}z$ con la condición que $a < R$ y $b < R$ para que los polos esten dentro del contorno de integración. Los polos son jb de orden 1, $-jb$ de orden 1, a de orden 2.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-a)^2(z^2+b^2)}, a\right] = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z-a)^2}{(z-a)^2(z^2+b^2)}\right] = -\frac{2a}{\left(a^2+b^2\right)^2}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-a)^2(z^2+b^2)}, jb\right] = \lim_{z\to jb} \frac{(z-jb)}{(z-a)^2(z^2+b^2)} = -\frac{j}{2b(a-jb)^2}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-a)^2(z^2+b^2)}, -jb\right] = \lim_{z\to -jb} \frac{(z-(-jb))}{(z-a)^2(z^2+b^2)} = \frac{j}{2b(a+jb)^2}$$

Al sumar todos los residuos nos damos cuenta que suman 0

$$\Rightarrow \oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^2(z^2+b^2)} \mathrm{d}z = 0 \Rightarrow \oint_{|z|=5} \frac{175}{(5z-20)^2(z^2+1)} \mathrm{d}z = 0$$

Pregunta 5

Sean $z_1 = r_1 \exp(j\theta_1)$, $z_2 = r_2 \exp(j\theta_2)$. Demuestre que $\operatorname{Re}(z_1 z_2^*) = |z_1||z_2|$ si y sólo si $\theta_1 - \theta_2 = 2n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}$

Solución

Sean $z_1 = r_1 \exp(j\theta_1)$ y $z_2 = r_2 \exp(j\theta_2)$

$z_1 z_2^* = r_1 r_2 \exp(j(\theta_1 - \theta_2)) \Rightarrow \operatorname{Re}[z_1 z_2^*] = \operatorname{Re}[r_1 r_2 \exp(j(\theta_1 - \theta_2))] = r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = |z_1||z_2| \cos(\theta_1 - \theta_2)$

Para que se cumpla la condición que $\operatorname{Re}[z_1 z_2^*] = |z_1||z_2|$, ocupamos que $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$, lo que ocurre cuando el argumento del cos $= 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta_1 - \theta_2 = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

Pregunta 6

Considere la integral impropia: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(2x)}{x^2+3} \mathrm{d}x$

a. Demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(2x)}{x^2+3} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} \frac{x \sin(2x)}{x^2+3} \mathrm{d}x$

b. Utilizando el teorema de los residuos y la igualdad anterior, calcule la integral $\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin(2x)}{x^2+3} \mathrm{d}x$

Solución

Evaluemos la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ y evaluamos con valores al final.

Ya que $\frac{x\sin(bx)}{x^2+a^2}$ es una función par, cumple que

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \frac{x\sin(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$$

Hagamos $\oint_C \frac{z\exp(jbz)}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z$ sobre el contorno de la figura

$$\oint_C \frac{z\exp(jbz)}{z^2+a^2}\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\exp(jbx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + \oint_{C_2} \frac{z\exp(jbz)}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z$$

La integral sobre C_2 tiende a 0 cuando $R \to \infty$, evaluemos el LHS usando residuos., el único residuo dentro del contorno es ja de orden 1

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z\exp(jbz)}{z^2+a^2}, ja\right] = \lim_{z\to ja}(z-aj)\,\frac{z\exp(jbz)}{z^2+a^2} = \frac{\exp(-ab)}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\exp(jbx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \oint_C \frac{z\exp(jbz)}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\,\frac{\exp(-ab)}{2} = j\pi\exp(-ab)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\exp(jbx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + j\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = j\pi\exp(-ab)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \pi\exp(-ab)$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} \frac{x\sin(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\exp(-ab)$$

Evaluando con $a = \sqrt{3}$ y $b = 2$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x\sin(2x)}{x^2+3}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\exp(-2\sqrt{3})$$

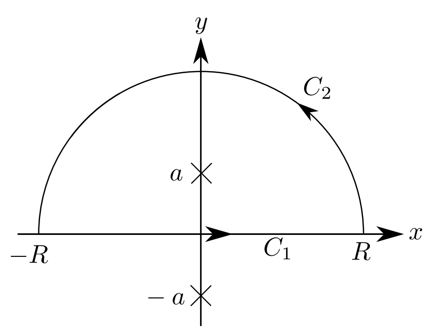


Figura 1.6

Método alternativo

Volvamos al problema **I Parcial I Ciclo 2008 7.b)** donde se demuestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(jbx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a}\exp(-ab)$$

Si derivamos[5] con respecto a b en ambos lados e igualamos las partes reales y las imaginarias obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial b}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(jbx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\pi}{a}\exp(-ab)\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{jx\exp(jbx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{jx\cos(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = -\pi\exp(-ab)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(bx)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \pi\exp(-ab)$$

Se obtiene el mismo resultado.

[5]Derivar dentro de la integral con otra variable es la regla integral de Leibniz. Se puede usar para resolver integrales dificiles. Para más detalles (o integrales espantosas), ver: Nahin, P. J. *Inside Interesting Integrals*, Springer 2015

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores I Examen Parcial II Ciclo Lectivo del 2009 Tiempo: 3 horas

Este es un examen de desarrollo. Todos los procedimientos deben aparecer en los cuadernos de examen. No se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz. Trabaje ordenadamente. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de cálculo simbólico (CAS). Calculadoras científicas son permitidas.

Preguntas 1 y 2	Prof. Edison De Faria
Preguntas 3 y 4	Prof. Aramis Pérez
Preguntas 5 y 6	Prof. Francisco Benavides

1. Para $z = x + jy$ sea $f(z) = \sqrt{\left| z^2 - \left(\bar{z}\right)^2 \right|} = u(x,y) + j\,v(x,y)$ con $\bar{z}$ el conjugado de z.

a. Verificar si $u(x,y)$ y $v(x,y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z=0$. (Valor: 8)

b. Verificar si existe la derivada de $f(z)$ en $z=0$, es decir, $f'(0)$. (Valor: 7)

2. Utilice residuos para calcular $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z\,\mathrm{sen}\,z\cos z}$ (Valor: 20)

3. Sea $u(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, donde a, b y c son constantes reales.

a. Determine los valores que deben tomar las constantes para que la función sea armónica. (Valor: 5)

b. A partir de lo obtenido anteriormente, obtenga el conjugado armónico de $u(x,y)$. (Valor: 8)

c. Represente la función en términos de z, si $f(1)=0$. (Valor: 7)

4. Utilice la fórmula integral de Cauchy para calcular $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{175\,dz}{(5z-20)^2\left(z^2+1\right)}$ (Valor: 15)

5. Sean $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}, z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$. Demuestre que $\mathrm{Re}\left(z_1\,\overline{z_2}\right) = |z_1|\,|z_2|$ si y sólo si $\theta_1 - \theta_2 = 2n\pi$, para $n \in \mathbb{Z}$. (Valor: 10)

6. Considere la integral impropia: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(2x)}{x^2+3}\,dx.$

a. Demuestre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(2x)}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(2x)}{x^2+3}\,dx$ (Valor: 5)

b. Utilizando el teorema de los residuos y la igualdad anterior, calcule la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(2x)}{x^2+3}\,dx.$ (Valor: 15)

FORROLARIO: $\displaystyle\sin u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\displaystyle\cos u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}$, $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{2\pi j\, f^{(n)}(a)}{n!}$

1.5. I Parcial I Ciclo 2010

Pregunta 1

Si $z_1 = 1 + j,\ z_2 = -1 - j,\ z_3 = 3\exp\left(\frac{j\pi}{6}\right),\ z_4 = 5\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$, calcule todos los valores para la siguiente expresión: $\ln\left(\sqrt{\frac{z_1 z_3^*}{(z_2 z_4)^5}}\right)$

Solución

Sea $w = \frac{z_1 z_3^*}{(z_2 z_4)^5}$

Pasemos todos los números a notación compleja

$$z_1 = \sqrt{2}\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right) \qquad z_2 = \sqrt{2}\exp\left(\frac{-j3\pi}{4}\right)$$

$$z_3 = 3\exp\left(\frac{j\pi}{6}\right) \qquad z_4 = 5\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow w = \frac{z_1 z_3^*}{(z_2 z_4)^5} = \frac{\sqrt{2}\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)3\exp\left(-\frac{j\pi}{6}\right)}{\left(\sqrt{2}\exp\left(\frac{-j\pi}{4}\right)5\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)\right)^5} = \frac{3}{4\cdot 5^5}\frac{\exp\left[j\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)\right]}{\exp\left[j5\pi\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)\right]}$$

$$= \frac{3}{4\cdot 5^5}\exp\left[j\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - 5\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)\right)\right] = \frac{3}{4\cdot 5^5}\exp\left(\frac{j31\pi}{12}\right) = \frac{3}{4\cdot 5^5}\exp\left(\frac{j7\pi}{12} + 2\pi j\right)$$

El exponente con la parte $2\pi j$ lo quitamos ya que $\exp(2\pi j) = 1$. Queda el argumento principal y le sumamos un $2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ ya que le vamos a sacar raíz

$$\Rightarrow w = \frac{3}{4\cdot 5^5}\exp\left(\frac{j7\pi}{12} + 2k\pi j\right) \Rightarrow w^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{50}\sqrt{\frac{3}{5}}\exp\left(\frac{j7\pi}{24} + kj\pi\right)$$

Ahora, sacamos el logaritmo. Un tecnisismo, el enunciado pide que se obtenga el ln del numero $w^{1/2}$. Eso no está definido. Suponiendo que se refiere a un logaritmo general, no de su rama principal, pediría

$$\log w^{\frac{1}{2}} = \ln\left|w^{\frac{1}{2}}\right| + j\left(\arg w^{\frac{1}{2}} + 2n\pi\right) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Con log, no ln. Si fuera la rama principal, sería Log, con mayúscula. El argumento del $w^{1/2}$ es la parte del exponente complejo, y la norma también la tenemos

$$\Rightarrow \log w^{\frac{1}{2}} = \ln\left(\frac{1}{50}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + j\pi\left(\frac{7}{24} + k + 2n\right) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Pregunta 2

Calcule con la integral de Cauchy $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{3z+10}{(z-1)(2z+5)^2}\,\mathrm{d}z$

Solución

$$\oint_{|z|=3} \frac{3z+10}{(z-1)(2z+5)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\oint_{|z|=3} \frac{3z+10}{(z-1)\left(z+\frac{5}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}z$$

La función tiene 2 polos, en $z=1$ y $z=5/2$, evaluamos 2 integrales y separamos como

$$\frac{1}{4}\oint_{|z|=3} \frac{3z+10}{(z-1)\left(z+\frac{5}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\oint \frac{f(z)}{(z-1)}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{4}\oint \frac{g(z)}{\left(z-\frac{5}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}z$$

Con $f(z) = \dfrac{3z+10}{\left(z+\frac{5}{2}\right)^2}$ y $g(z) = \dfrac{3z+10}{z-1}$ y cada una de las trayectorias rodea el polo respectivo del denominador mostrado.

Ya con esta forma podemos evaluar con la integral de Cauchy

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \frac{2\pi j}{n!} f^n(a)$$

$$\Rightarrow \oint \frac{f(z)}{(z-1)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j \lim_{z\to 1} \frac{3z+10}{\left(z+\frac{5}{2}\right)^2} = 2\pi j \frac{52}{49}$$

$$\Rightarrow \oint \frac{g(z)}{(z-1)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j \lim_{z\to\frac{5}{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{3z+10}{(z-1)}\right] = -2\pi j \frac{52}{49}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\oint \frac{f(z)}{(z-1)}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{4}\oint \frac{g(z)}{\left(z-\frac{5}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\left[2\pi j\frac{52}{49} - 2\pi j\frac{52}{49}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=3} \frac{3z+10}{(z-1)(2z+5)^2}\,\mathrm{d}z = 0$$

Pregunta 3

Considere la fución $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^*$. Demuestre que no existe derivada $f'(z)$ en ningún $z \in \mathbb{C}$

Solución

Ver **I Parcial I Ciclo 2008 Pregunta 6.a)**

Pregunta 4

Sea C la circunferencia $|z| = 1$

a. Utilice el desarrollo de Maclaurin para $\exp(z)$ para demostrar que $\int_C \exp\left(z + \frac{1}{z}\right)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \int_C z^n \exp\left(\frac{1}{z}\right)\,\mathrm{d}z$

b. Evaluando cada una de las integrales de la sumatoria anterior, demuestre que

$$\int_C \exp\left(z + \frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi j}{n!\,(n+1)!}$$

Solución

4.a)

$$\oint_C \exp\left(z + \frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z = \oint_C \exp(z)\exp\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z = \oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\exp\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\oint_C z^n \exp\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z$$

4.b)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\oint_C z^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^k}\right)\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,k!}\oint_C \frac{z^n}{z^k}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,k!}\oint_C \frac{1}{z^{k-n}}\,\mathrm{d}z$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,k!}\oint_C \frac{1}{z^{k-n}}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,k!} 2\pi j\,\delta_{k,n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi j}{n!\,(n+1)!}$$
$$\Rightarrow \oint_C \exp\left(z + \frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi j}{n!\,(n+1)!}$$

Pregunta 5

a.Demuestre que $\arctan(z) = \frac{j}{2}\ln\left(\frac{j+z}{j-z}\right)$

b. Utilice lo anterior para calcular todos los valores de $\arctan\left(\frac{j-2}{5}\right)$

Solución

5.a)

Sea $\tan w = z \Rightarrow w = \arctan z$. Por otro lado, $\tan w = \frac{1}{j}\left(\frac{\exp(jw)-\exp(-jw)}{\exp(jw)+\exp(-jw)}\right) = z$ Despejemos w para obtener $\arctan z$

$$\frac{1}{j}\left(\frac{\exp(jw)-\exp(-jw)}{\exp(jw)+\exp(-jw)}\right) = z \Rightarrow \frac{\exp(2jw)-1}{\exp(2jw)+1} = jz \Rightarrow \exp(2jw)-1 = jz\left(\exp(2jw)+1\right)$$

$$\Rightarrow \exp(2jw) = \frac{1+jz}{1-jz} \Rightarrow 2jw = \log\left(\frac{1+jz}{1-jz}\right) \Rightarrow w = \frac{j}{2}\log\left(\frac{j+z}{j-z}\right)$$

$$\Rightarrow \arctan z = \frac{j}{2}\log\left(\frac{j+z}{j-z}\right)$$

5.b)

Para $z = \frac{j-2}{5} \Rightarrow \arctan\left(\frac{j-2}{5}\right) = \frac{j}{2}\log\left[\frac{j+\frac{j-2}{5}}{j-\frac{j-2}{5}}\right]$

La parte dentro del logaritmo es

$$\frac{j+\frac{j-2}{5}}{j-\frac{j-2}{5}} = \frac{5j+j-2}{5j-j+2} = \frac{6j-2}{4j+2} = \frac{5+5j}{5} = 1+j$$

La norma de $1+j$ es $\sqrt{2}$ y el argumento es $\pi/4$

$$\Rightarrow \frac{j}{2}\log(1+j) = \frac{j}{2}\left[\ln\left(\sqrt{2}\right) + j\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right] = -\frac{\pi}{8} + k\pi + \frac{j}{2}\log\left(\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow \arctan\left(\frac{j-2}{5}\right) = -\frac{\pi}{8} + k\pi + \frac{j}{2}\log\left(\sqrt{2}\right)$$

Pregunta 6

Calcule el residuo para cada una de las funciones abajo, en los puntos indicados:

a. $f(z) = \frac{1}{z\sin(z)\arctan(z)}$ en $z = 0$

b. $g(z) = \frac{\exp(z)}{z^2\sin(z)}$ en $z = 0$

Solución

6.a)

$$\frac{1}{z\sin(z)\arctan(z)} = \frac{1}{z\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\mathcal{O}(z^3)\right)\left(z-\dfrac{z^3}{3}+\mathcal{O}(z^3)\right)} = \frac{1}{z^3\left(1-\dfrac{z^2}{3!}+\mathcal{O}(z^2)\right)\left(1-\dfrac{z^2}{3}+\mathcal{O}(z^2)\right)}$$

$$\frac{1}{z^3\left(1-\left(\dfrac{z^2}{2}+\mathcal{O}(z^2)\right)\right)} = \frac{1+\left(\dfrac{z^2}{2}+\mathcal{O}(z^2)\right)+\left(\dfrac{z^2}{2}+\mathcal{O}(z^2)\right)^2+\cdots}{z^3}$$

De aquí nos podemos fijar cuando hagamos la expansión, el coeficiente de $\dfrac{1}{z}$ es $\dfrac{1}{2}$

6.b)

$$\frac{e^z}{z^2\sin(z)} = \frac{e^z}{z^2\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\mathcal{O}\left(z^7\right)\right)} = \frac{e^z}{z^3\left[1-\left(\dfrac{z^2}{3!}+\mathcal{O}\left(z^4\right)\right)\right]}$$

$$= \frac{\left[1+\dfrac{z}{1!}+\dfrac{z^2}{2!}\right]\left[1+\left(\dfrac{z^2}{3!}+\mathcal{O}\left(z^2\right)\right)+\cdots\right]}{z^3}$$

Al expandir, el coeficiente de $\dfrac{1}{z}$ es $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}=\dfrac{2}{3}$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores I Examen Parcial I Ciclo Lectivo del 2010 Tiempo: 3 horas

Este es un examen de desarrollo. Debe mostrar todos los pasos que conducen a la respuesta. Resuelva el examen utilizando bolígrafo azul o negro. No se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz. Trabaje ordenadamente. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de cálculo simbólico (CAS). Calculadoras científicas son permitidas.

Preguntas 1 y 2	Prof. Aramis Pérez
Preguntas 3 y 4	Prof. Francisco Benavides
Preguntas 5 y 6	Prof. Edison De Faria

1. Si $z_1 = 1 + j,\ z_2 = -1 - j,\ z_3 = 3e^{j\pi/6},\ z_4 = 5\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$, calcule todos los valores para la siguiente expresión: $\ln\left(\sqrt{\frac{z_1\, z_3^{*}}{(z_2\, z_4)^5}}\right)$. (Valor: 20 puntos)

2. Calcule con la integral de Cauchy $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{(3z+10)\,dz}{(z-1)(2z+5)^2}$ (Valor: 15 puntos)

3. Considere la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^{*}$. Demuestre que no existe la derivada $f'(z)$ en ningún $z \in \mathbb{C}$. (Valor: 15 puntos)

4. Sea C la circunferencia $|z| = 1$. (Valor: (a) 5 puntos; (b) 10 puntos)

a. Utilice el desarrollo de Maclaurin para e^z para demostrar que $\displaystyle\int_C e^{\left(z+\frac{1}{z}\right)}dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_C z^n e^{\frac{1}{z}}\,dz$

b. Evaluando cada una de las integrales de la sumatoria anterior, demuestre que

$$\int_C e^{\left(z+\frac{1}{z}\right)}dz = 2\pi j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$$

5. a. Demuestre que $\tan^{-1} z = \frac{j}{2}\ln\left(\frac{j+z}{j-z}\right)$ para $z \neq \pm j$. (Valor: 10 puntos)

   b. Utilice lo anterior para calcular todos los valores de $\tan^{-1}\left(\frac{j-2}{5}\right)$. (Valor: 10 puntos)

6. Calcule el residuo para cada una de las funciones abajo, en los puntos indicados:

a. $f(z) = \dfrac{1}{z\,\mathrm{sen}\,z\,\tan^{-1} z}$ en $z = 0$. (Valor: 8 puntos)

b. $g(z) = \dfrac{e^z}{z^2\,\mathrm{sen}\,z}$ en $z = 0$. (Valor: 7 puntos)

Nota: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\mathrm{sen}\,z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\tan^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}$, $\mathrm{sen}\,z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$, $\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$

1.6. I Parcial II Ciclo 2010

Pregunta 1

Encuentre todos los valores de z que satisfacen la siguiente ecuación $\exp\left[j\left(z+4\right)\right]=5j$

Solución

$$\exp(j(z+4)) = 5j = \exp\left(\ln(5) + j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right) \iff j(z+4) = \ln 5 + j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

$$z + 4 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - j\ln 5 \Rightarrow z = -4 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi - j\ln 5$$

Pregunta 2

Utilice residuos para calcular el valor numérico de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

Solución

Ver **I Parcial II Ciclo 2008 5.b)** donde se muestra que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a\sqrt{2}}$

Con $a \to 1$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Pregunta 3

Sea $z = \left(\dfrac{1+j}{1+j\sqrt{3}}\right)^{-j}$

a. Encuentre el valor de z expresado en notación cartesiana.

b. Halle las raíces cuadradas de z en notación fasorial.

Solución

$$\left(\frac{1+j}{1+j\sqrt{3}}\right)^{-j} = \left(\frac{\sqrt{2}\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)}{2\exp\left(\frac{j\pi}{3}\right)}\right)^{-j} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{j\pi}{12}\right)\right)^{-j}$$

$$= \exp\left(-j\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}} + j\left(-\frac{\pi}{12} + 2k\pi\right)\right)\right) = \exp\left(\left(-\frac{\pi}{12} + 2k\pi\right) - j\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\exp\left(-\frac{\pi}{12} + 2k\pi\right)\exp\left(-j\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{12} + 2k\pi\right)\left[\cos\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - j\sin\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]$$

Con $k \in \mathbb{Z}$

En notación fasorial: $\exp\left(-\frac{\pi}{12} + 2k\pi\right) \angle -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Para encontrar las raices hagamos:

$$w^2 = z = \exp\left(-\frac{\pi}{12} + 2k\pi\right)\exp\left(j\ln\sqrt{2}\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{12} + 2k\pi\right)\exp\left(j\left(\ln\sqrt{2} + 2n\pi\right)\right),\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow w_n = \exp\left(-\frac{\pi}{24} + k\pi\right)\exp\left(j\left(\frac{\ln\sqrt{2} + 2n\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow w_0 = \exp\left(-\frac{\pi}{24} + k\pi\right)\exp\left(j\left(\frac{\ln\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{24} + k\pi\right) \angle \frac{\ln\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow w_1 = \exp\left(-\frac{\pi}{24} + k\pi\right)\exp\left(j\left(\frac{\ln\sqrt{2} + 2\pi}{2}\right)\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{24} + k\pi\right) \angle \frac{\ln\sqrt{2} + 2\pi}{2}$$

Pregunta 4

Resuelva utilizando la integral de Cauchy $\int_C \frac{\cos(\pi z)}{(2z+4)^2}\,\mathrm{d}z$ donde $C : |z+1| = 2$

Solución

$$\oint_C \frac{\cos(\pi z)}{(2z+4)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\oint_C \frac{\cos(\pi z)}{(z+2)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\frac{2\pi j}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\cos(\pi z)\right]_{z=-2}\frac{1}{4}\frac{2\pi j}{1!}\left(-\pi\sin(-2\pi)\right) = 0$$

Pregunta 5

Utilice residuos para calcular las siguientes integrales:

$$a.\quad \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\,\mathrm{d}z \qquad\qquad b.\quad \oint_{|z|=1} \frac{\exp(z)}{z^2\arctan(z)}\mathrm{d}z$$

Solución

5.a)

Usemos residuos para encontrar el valor de la integral. Los lugares donde $\sin(\pi z)$ se hace 0 dentro del contorno es en $-1, 0, 1$. En 0 es una singularidad removible.

$$\lim_{z\to 0} \frac{z\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = 1$$

Los polos -1 y 1 parecen que son de orden 1, intentemolo

$$\lim_{z\to z_k} \frac{(z-z_k)z\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = z_k\cos(\pi z_k)\lim_{z\to z_k}\frac{(z-z_k)}{\sin(\pi z)} = z_k\cos(\pi z_k)\lim_{z\to z_k}\frac{1}{\pi\cos(\pi z)} = \frac{z_k}{\pi}$$

Habiendo encontrado los residuos para $z = \pm 1$, se puede evaluar ya la integral

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\left(\frac{-1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\right) = 0$$

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\,\mathrm{d}z = 0$$

5.b)

Expandimos en series de Taylor para encontrar el residuo.

$$\frac{\exp(z)}{z^2\arctan(z)} = \frac{\exp(z)}{z^2\left(z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\mathcal{O}(z^5)\right)} = \frac{\exp(z)}{z^3\left(1-\left(\frac{z^2}{3}-\frac{z^4}{5}+\mathcal{O}(z^4)\right)\right)}$$

$$\frac{\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\mathcal{O}(z^2)\right)\left(1+\left(\frac{z^2}{3}-\frac{z^4}{5}+\mathcal{O}(z^4)\right)+\left(\frac{z^2}{3}-\frac{z^4}{5}+\mathcal{O}(z^4)\right)^2+\cdots\right)}{z^3}$$

Al expandir, el coeficiente de $\frac{1}{z}$ es $\frac{1}{2!}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=1} \frac{\exp(z)}{z^2\arctan(z)}\mathrm{d}z = 2\pi j\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{3}\pi j$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores I Examen Parcial II Ciclo Lectivo del 2010 Tiempo: 3 horas

Este es un examen de desarrollo. Debe mostrar todos los pasos que conducen a la respuesta. Resuelva el examen utilizando bolígrafo azul o negro. No se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz. Trabaje ordenadamente. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de cálculo simbólico (CAS). Calculadoras científicas son permitidas.

Preguntas 1 y 2	Prof. Aramis Pérez
Preguntas 3 y 4	Prof. Jhonny Cascante
Preguntas 5 y 6	Prof. Edison De Faria

1. Encuentre todos los valores de z que satisfacen la siguiente ecuación: $e^{j(z+4)} = 5j$. (15 puntos)

2. Utilice residuos para calcular el valor numérico de $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$. (15 puntos)

3. Sea $z = \left(\frac{1+j}{1+j\sqrt{3}}\right)^{-j}$.

   a. Encuentre el valor de z expresado en notación cartesiana. (10 puntos)

   b. Halle las raíces cuadradas de z en notación fasorial. (10 puntos)

4. Resuelva utilizando la integral de Cauchy: $\oint_C \frac{\cos(\pi z)}{(2z+4)^2}\,dz$ donde $C: |z+1| = 2$. (15 puntos)

5. Utilice residuos para calcular las siguientes integrales:

   a. $\int_{|z|=\frac{3}{2}} z\cot(\pi z)\,dz$ (10 puntos)

   b. $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 \arctan(z)}\,dz$ (10 puntos)

6. a. Determine el polinomio con coeficientes reales más general, de la forma $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^2$ que es la parte real $u(x,y)$ de una función analítica $f(z) = u(x,y) + j\,v(x,y)$. (7 puntos)

   b. Determine la función analítica f y exprésela en términos de z, si $f(1) = 2 + 9j$. (8 puntos)

FORROLARIO: $\int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{2\pi j}{n!} f^{(n)}(a)$ (Fórmula Integral de Cauchy)

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},\ \arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1},$$

$\operatorname{Res}\left(f(z),a\right) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-a)^k f(z)\right]$ si $z = a$ es un polo de orden k

1.7. I Parcial I Ciclo 2011

Pregunta 1

Demuestre que: $(a)\ \ 1+\cos(z) = 2\cos^2\left(\frac{z}{2}\right)$ $\qquad (b)\ (\sin(z))(\cos(z)) = \frac{\sin(2z)}{2}$

Solución

$$2\cos^2\left(\frac{z}{2}\right) = 2\left(\frac{\exp\left(\frac{jz}{2}\right)+\exp\left(\frac{-jz}{2}\right)}{2}\right)^2 = \frac{\exp(jz)+2+\exp(-jz)}{2} = 1+\frac{\exp(jz)+\exp(-jz)}{2} = 1+\cos(z)$$

$$\begin{aligned}\sin z\cos z &= \left(\frac{\exp(jz)-\exp(-jz)}{2j}\right)\left(\frac{\exp(jz)+\exp(-jz)}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\exp(2jz)+1-1-\exp(-2jz)}{2j}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\exp(2jz)-\exp(-2jz)}{2j}\right) = \frac{1}{2}\sin 2z \Rightarrow \sin z\cos z = \frac{1}{2}\sin 2z\end{aligned}$$

Método alternativo

De esta manera se prueban el angulo doble para $\cos(2z)$ y $\sin(2z)$

$$\begin{aligned}\exp(2jz) &= (\exp(jz))^2\\ \cos(2z)+j\sin(2z) &= (\cos(z)+j\sin(z))^2\\ \cos(2z)+j\sin(2z) &= \cos^2(z)-\sin^2(z)+j\,2\cos(z)\sin(z)\\ \Rightarrow\cos(2z) &= \cos^2(z)-\sin^2(z)\\ \Rightarrow\sin(2z) &= 2\cos(z)\sin(z)\end{aligned}$$

Pregunta 2

Utilice residuos para calcular $\int_{|z|=3}(1+z)\left(\exp\left(\frac{1}{z}\right)+\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)\right)\,\mathrm{d}z$

Solución

$$\oint_{|z|=3}(1+z)\left(\exp\left(\frac{1}{z}\right)+\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)\right)\,\mathrm{d}z = \oint_{|z|=3}(1+z)\exp\left(\frac{1}{z}\right)\,\mathrm{d}z + \oint_{|z|=3}(1+z)\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)\,\mathrm{d}z$$

Ocupemonos de una integral a la vez.

$$\oint_{|z|=3} (1+z)\exp\left(\frac{1}{z}\right)\,\mathrm{d}z = \oint_{|z|=3} (1+z)\left(0! + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \mathcal{O}\left(z^{-3}\right)\right)\,\mathrm{d}z$$

El coeficiente de z^{-1} al distribuir es $1/1! + 1/2! = 3/2$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=3} (1+z)\exp\left(\frac{1}{z}\right)\,\mathrm{d}z = 2j\pi\left(\frac{3}{2}\right) = 3j\pi$$

Para la segunda integral, sumemos $+1-1$ para obtener directamente los residuos de la serie de Laurent centrada en 1

$$\oint_{|z|=3} (1+z)\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)\,\mathrm{d}z = \oint_{|z|=3} (2+z-1)\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)\,\mathrm{d}z$$
$$= \oint_{|z|=3} (2+z-1)\left(0! + \frac{1}{1!(z-1)} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \mathcal{O}\left((z-1)^{-3}\right)\right)\,\mathrm{d}z$$

El coeficiente de $(z-1)^{-1}$ al expandir es $2/1! + 1/2! = 5/2$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=3} (1+z)\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)\,\mathrm{d}z = 2j\pi\left(\frac{5}{2}\right) = 5j\pi$$

Sumamos los resultados de las integrales y obtenemos

$$\oint_{|z|=3} (1+z)\left(\exp\left(\frac{1}{z}\right) + \exp\left(\frac{1}{z-1}\right)\right)\,\mathrm{d}z = 8\pi j$$

Pregunta 3

Si $u(x,y) = \cos(2x)\cosh(2y)$, determinar en términos de z la función analítica $f(z) = u + jv$, si $f(0) = 0$

Solución

$$u(x,y) = \cos(2x)\cosh(2y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2\sin(2x)\cosh(2y) = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \int -2\sin(2x)\cosh(2y)\,\mathrm{d}y + g(x) = -\sin(2x)\sinh(2y) + g(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\cos(2x)\sinh(2y) = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow v = \int -2\cos(2x)\sinh(2y)\,\mathrm{d}x + h(y) = -\sin(2x)\sinh(2y) + h(y)$$
$$g(x) = h(y) = K\ ,\ K \in \mathbb{C} \Rightarrow v = -\sin(2x)\sinh(2y) + K$$
$$\Rightarrow f(x,y) = \cos(2x)\cosh(2y) - j\left(\sin(2x)\sinh(2y) + K\right)$$

Con la condición inicial determinamos K

$$f(0) = 0 = 1 - jK \Rightarrow K = j$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \cos(2x)\cosh(2y) - 1 - j\sin(2x)\sinh(2y)$$

Para expresar f en función de z, aplicamos el truco $x = z$, $y = 0$

$$f(z) = \cos(2z) - 1$$

Pregunta 4

Sea $f(z) = \left(z - \dfrac{\pi}{2}\right)\dfrac{\tan(z)}{z^3}$

a. Determine el tipo de singularidad de $f(z)$ en los puntos $z_0 = 0$ y $z_1 = \pi/2$. (removible, esencial o polo, indicando el orden del polo).

b. Calcule el residuo de $f(z)$ en z_0 y en z_1.

Solución

$$f(z) = \left(z - \frac{\pi}{2}\right)\frac{\tan(z)}{z^3} = \left(z - \frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin(z)}{z^3\cos(z)}$$

Saquemos este límite a ver que de orden es el polo, o si es removible.

$$\lim_{z\to 0}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin(z)}{z}\frac{1}{\cos(z)}\frac{1}{z^2}$$

El límite tiende a infinito por el término z^2. El otro z dividiendo el sen(z) tiende a 1. Es un polo de orden 2. Obtengamos el residuo con series de Taylor.

$$\left(z - \frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin(z)}{z^3\cos(z)} = \left(z - \frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin(z)}{z^3\left(1 - \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \mathcal{O}(z^4)\right)\right)} = \left(z - \frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin(z)\left(1 + \left(\frac{z^2}{2!} + \mathcal{O}(z^2)\right)\cdots\right)}{z^3}$$

$$= \left(z - \frac{\pi}{2}\right)\frac{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \mathcal{O}(z^3)\right)\left(1 + \left(\frac{z^2}{2!} + \mathcal{O}(z^2)\right) + \cdots\right)}{z^3}$$

$$= \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \mathcal{O}(z^2)\right)\left(1 + \left(\frac{z^2}{2!} + \mathcal{O}(z^2)\right) + \cdots\right)}{z^2}$$

Siguiendo el término z del primer parentesis que va a ser el término junto con $\frac{1}{z^2}$ da $\frac{1}{z}$, vemos que termina multiplicado por 1. El residuo en 0 es 1.

Para $z_1 = \frac{\pi}{2}$, sacamos el límite:

$$\lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin(z)}{z^3 \cos(z)} = \frac{8}{\pi^3} \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{\cos(z)} = -\frac{8}{\pi^3}$$

Es una singularidad *removible*. El residuo da 0.

Pregunta 5

Sean $z_1 = 1 + jA$, $z_2 = A + j$, $z_3 = 4 + 5Aj$. Determine los valores de la constante A para que $z_1 \cdot z_3 / z_2^*$ sea imaginario puro. Nota: z^* es el conjugado complejo de z.

Solución

$$\frac{z_1 z_3}{z_2^*} = \frac{(1 + jA)(4 + 5Aj)}{A - j} = \frac{(1 + jA)(4 + 5jA)(A + j)}{(A - j)(A + j)} = \frac{(1 + jA)(4 + 5jA)(A + j)}{A^2 + 1}$$

Expandiendo el numerador

$$\begin{aligned}(1 + jA)(4 + 5jA)(A + j) &= \left(4 + 9Aj - 5A^2\right)(A + j) = 4j - 5A + 4jA^2 - 5A^3 \\ &= -5A\left(1 + A^2\right) + 4j\left(1 + A^2\right) = (-5A + 4i)\left(1 + A^2\right)\end{aligned}$$

$$\frac{z_1 z_3}{z_2^*} = \frac{(-5A + 4i)\left(1 + A^2\right)}{1 + A^2} = -5A + 4i$$

De esta expresión, se puede obtener que para que sea puramente imaginaria, ocupamos que $A = 0$

Pregunta 6

Utilice la fórmula integral de Cauchy para calcular $\frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=3} \frac{t \exp(tz)}{\left(z^2 + 1\right)^2} \, \mathrm{d}z$ (Simplifique y deje la respuesta en términos de seno y coseno de t).

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=3} \frac{t \exp(tz)}{\left(z^2 + 1\right)^2} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=3} \frac{t \exp(tz)}{(z - j)^2 (z + j)^2} \, \mathrm{d}z$$

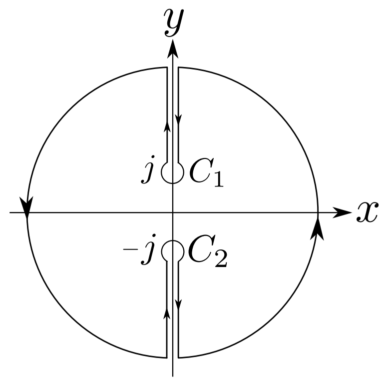


Figura 1.7

Integramos por la trayectoria de la figura rodeando los polos. En esa trayectoria, cumple la igualdad:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=3}\frac{t\exp(tz)}{(z-j)^2(z+j)^2}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi j}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{(z-j)^2}\,\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi j}\oint_{C_2}\frac{g(z)}{(z+j)^2}\,\mathrm{d}z$$

Donde $f(z)=\dfrac{t\exp(tz)}{(z+j)^2}$ y $g(z)=\dfrac{t\exp(tz)}{(z-j)^2}$

Para evaluar las integrales del RHS, aplicamos la fórmula integral de Cauchy.

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{(z-j)^2}\,\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f(z)\bigg|_{z=j}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{t\exp(tz)}{(z+j)^2}\right)\bigg|_{z=j}=-\frac{1}{4}e^{jt}t(t+j)$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{C_2}\frac{g(z))}{(z+j)^2}\,\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}g(z)\bigg|_{z=-j}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{t\exp(tz)}{(z-j)^2}\right)\bigg|_{z=-j}=-\frac{1}{4}e^{-jt}t(t-j)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=3}\frac{t\exp(tz)}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z=-\frac{1}{4}e^{jt}t(t+j)-\frac{1}{4}e^{-jt}t(t-j)=-\frac{1}{4}t\left[e^{jt}(t+j)+e^{-jt}(t-j)\right]$$

$$=-\frac{1}{4}\left[(\cos(t)+j\sin(t))(t+j)+(\cos(t)-j\sin(t))\right]=\frac{1}{2}t\sin(t)-\frac{1}{2}t^2\cos(t)$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores I Examen Parcial I Ciclo Lectivo del 2011 Tiempo: 3 horas

Este es un examen de desarrollo. Debe mostrar todos los pasos que conducen a la respuesta. Resuelva el examen utilizando bolígrafo azul o negro. No se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz. Trabaje ordenadamente. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de cálculo simbólico (CAS). Calculadoras científicas son permitidas.

Preguntas 1 y 2	Prof. Jhonny Cascante	(1.a) 7 pts (1.b) 8 pts (2) 20 pts
Preguntas 3 y 4	Prof. Edison De Faria	(3) 15 pts (4.a) 8 pts (4.b) 12 pts
Preguntas 5 y 6	Prof. Aramis Pérez	(5) 10 pts (6) 20 pts

1. Demuestre que: $(a) \quad 1+\cos(z)=2\cos^2\left(\frac{z}{2}\right) \qquad (b) \quad (\text{sen } z)(\cos z)=\frac{\text{sen } 2z}{2}$

2. Utilice residuos para calcular $\oint_{|z|=3}(1+z)\left(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}\right)dz$

3. Si $u(x,y)=\cos 2x \cosh 2y$, determinar en términos de z la función analítica $f(z)=u+jv$, si $f(0)=0$.

4. Sea $f(z)=\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\tan z}{z^3}$.

   a. Determine el tipo de singularidad de $f(z)$ en los puntos $z_0=0$ y $z_1=\frac{\pi}{2}$. (removible, esencial o polo, indicando el orden del polo).

   b. Calcule el residuo de $f(z)$ en z_0 y en z_1.

5. Sean: $z_1=1+jA,\ z_2=A+j,\ z_3=4+5Aj$. Determine los valores de la constante A para que $\frac{z_1\cdot z_3}{\left(\overline{z_2}\right)}$ sea imaginario puro. Nota: $\overline{z}$ es el conjugado complejo de z.

6. Utilice la fórmula integral de Cauchy para calcular: $\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=3}\frac{te^{zt}}{\left(z^2+1\right)^2}dz$ (Simplifique y deje la respuesta en términos de seno y coseno de t).

FORROLARIO

$$\int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}=\frac{2\pi j}{n!}f^{(n)}(a),\ \text{Res}\left(f(z),a\right)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-a)^k f(z)\right],\ \text{sen } z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},\ \cos z=\frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2},\ \text{sen } z=\frac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j},\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\text{senh } z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

1.8. I Parcial I Ciclo 2012

Pregunta 1

a) Verifique que las imágenes de la función con dominio $\mathbb{C}$, $f(z) = z\exp(z) + z^* \exp(z^*)$ son números reales, es decir, que $f(z) \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}$.

b) Verifique que la función compleja $f(z) = \tan(z)$ es impar.

Nota: $f(z)$ es impar si $f(-z) = -f(-z)$

Solución

1.a)

$$z\exp(z) + z^*\exp(z^*) = (x + jy)\exp(x)(\cos(y) + j\sin(y)) + (x - jy)\exp(x)(\cos(y) - j\sin(y))$$

$$= \exp(x)\left[x\cos(y) + jx\sin(y) + jy\cos(y) - y\sin(y) + x\cos(y) - jx\sin(y) - jy\cos(y) - y\sin(y)\right]$$

$$= 2\exp(x)\left[x\cos(y) - y\sin(y)\right]$$

Vemos que la función $f(z) = z\exp(z) + z^*\exp(z^*) = 2\exp(x)\left[x\cos(y) - y\sin(y)\right]$ no tiene parte imaginaria. La función $f(z) \in \mathbb{R}$

1.b)

$$\tan(z) = \frac{1}{j}\left(\frac{\exp(jz) - \exp(-jz)}{\exp(jz) + \exp(-jz)}\right)$$

$$\Rightarrow \tan(-z) = \frac{1}{j}\left(\frac{\exp(-jz) - \exp(jz)}{\exp(-jz) + \exp(jz)}\right) = -\frac{1}{j}\left(\frac{\exp(jz) - \exp(-jz)}{\exp(jz) + \exp(-jz)}\right) = -\tan(z)$$

$$\Rightarrow \tan(-z) = -\tan(z)$$

Pregunta 2

Utilizando residuos, verifique el siguiente resultado: dado $a \in \mathbb{R}$, que satisface $|a| < 1$, entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$$

Ayuda: La integral de contorno resultante tiene la misma cantidad de singularidades dentro del contorno que fuera de éste.

Solución

Consideremos $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$ con la condición $|b| < a,\ 0 < a,\ a, b \in \mathbb{R}$

$$\exp(j\theta) = z \Rightarrow \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{jz} \qquad \sin(\theta) = \frac{z + \frac{1}{z}}{2j}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} \frac{1}{a + \frac{b}{2j}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \frac{\mathrm{d}z}{jz} = \frac{2}{b} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + \frac{j2a}{b}z - 1}\,\mathrm{d}z$$

Las soluciones de $z^2 + \frac{j2a}{b}z - 1 = 0$ son $z = \dfrac{\frac{-j2a}{b} \pm \sqrt{\frac{-4a^2}{b^2} + 4}}{2} = j\left(\dfrac{-a}{b} \pm \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)$

$$z_1 = j\left(\frac{-a}{b} - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right) \qquad z_2 = j\left(\frac{-a}{b} + \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)$$

Para saber que polo está dentro del contorno del contorno de integración, el círculo de radio 1, comparemos

$$z^2 + \frac{j2a}{b}z - 1 = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 + (-z_1 - z_2)z + z_1 z_2$$

$$z_1 z_2 = -1 \Rightarrow |z_1||z_2| = 1 \Rightarrow |z_2| = \frac{1}{|z_1|}$$

La norma de z_1 podemos ver que es mayor a 1, por la condición que $a > b \Rightarrow a/b > 1$ y los 2 términos tienen el mismo signo, se alejan del origen.

$$|z_1| = \frac{a}{b} + \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} > \frac{a}{b} > 1$$

$$|z_1| > 1 \Rightarrow |z_2| = \frac{1}{|z_1|} < 1$$

El polo z_2 está dentro del contorno de integración. Obtengamos los residuos en z_2

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2 + \frac{j2a}{b}z - 1}, z_2\right] = \lim_{z\to z_2} (z - z_2)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \lim_{z\to z_2} \frac{1}{z - z_1} = \frac{b}{2j\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\frac{2}{b}\oint \frac{1}{z^2+\frac{j2a}{b}z-1}\,\mathrm{d}z = \frac{2}{b}\;2\pi j\;\frac{b}{2j\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

Para la pregunta del examen, $a\to 1$, $b\to a \Rightarrow \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+a\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$

Pregunta 4

Sea $f(z)=z^2+(x-1)^2+j(y-1)^2$. *a*) ¿ En qué puntos del plano complejo $f(z)$ es diferenciable?

b) ¿ En qué puntos del plano complejo $f(z)$ es analítica?

c) Calcule, si existe, las derivadas: $f'(1-j)$ y $f'(1+j)$

Solución

$$f(z)=z^2+(x-1)^2+j(y-1)^2=(x+jy)^2+(x-1)^2+j(y-1)^2=x^2-y^2+(x-1)^2+j(2xy+(y-1)^2)$$

$$f(z)=x^2-y^2+(x-1)^2+j\left[2xy+(y-1)^2\right]$$

$$u(x,y)=x^2-y^2+(x-1)^2 \qquad v(x,y)=2xy+(y-1)^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2x-2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2x+2y-2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2x-2=2x+2y-2=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow y=x$$

Con esto, tenemos la resticción que $y=x$ para que cumpla con las condiciones de C-R, además de tener sus derivadas parciales continuas.

La función es diferenciable a lo largo de la recta $y=x$. Para ser analítica, tiene que ser diferenciable en un vecindario de cada punto de la recta $y=x$, una recta no cumple con esta condición. $f(1-j)$ no existe, ya que $1-j$ no está contenido en la recta $y=x$.

En el punto $1-j$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=1+j} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=1,y=1} = 2+2j$$

Pregunta 5

Utilice residuos para calcular $\displaystyle\int_{|z-\pi|=4} \frac{1}{z^2 \sin(z)}\, \mathrm{d}z$

Solución

Los polos dentro del contorno son $0, \pi, 2\pi$.

Para el residuo en 0

$$\frac{1}{z^2\sin(z)} = \frac{1}{z^2\left(z + \frac{z^3}{3!} + \mathcal{O}(z^3)\right)} = \frac{1}{z^3\left(1 - \left(\frac{z^2}{3!} + \mathcal{O}(z^2)\right)\right)} = \frac{1 + \left(\frac{z^2}{3!} + \mathcal{O}(z^2)\right) + \cdots}{z^3}$$

Siguiendo el z^2 en el numerador,

$$= \cdots + \frac{1}{3!}\frac{1}{z}\cdots \Rightarrow \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2\sin(z)}, 0\right] = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

Los polos en π, 2π son de orden 1.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2\sin(z)}, z_k\right] = \lim_{z\to z_k} \frac{(z - z_k)}{z^2\sin(z)} = \frac{1}{z_k^2}\lim_{z\to z_k}\frac{1}{\cos(z)} = \frac{1}{z_k^2\cos(z_k)}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2\sin(z)}, \pi\right] = -\frac{1}{\pi^2} \qquad \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2\sin(z)}, 2\pi\right] = \frac{1}{4\pi^2}$$

$$\oint_{|z-\pi|=4} \frac{1}{z^2\sin(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j \sum \operatorname{Res} = 2\pi j\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2}\right)$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores I Examen Parcial I Ciclo Lectivo del 2012 Tiempo: 2 horas 45 minutos

Este es un examen de desarrollo. Debe mostrar todos los pasos que conducen a la respuesta. Resuelva el examen utilizando bolígrafo azul o negro. No se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz. Trabaje ordenadamente. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de cálculo simbólico (CAS). Calculadoras científicas son permitidas.

Preguntas: 1 y 2: Prof. Marvin Coto (Naranja); 3: Prof. Aramis Pérez (Turquesa); 4 y 5 Prof. Edison De Faria (Verde)

1. a) Verifique que las imágenes de la función con dominio $\mathbb{C}$, $f(z) = ze^z + \bar{z}e^{\bar{z}}$ son números reales, es decir, que $f(z) \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{C}$. (10 puntos)

   b) Verifique que la función compleja $f(z) = \tan(z)$ es impar. (5 puntos)
   Nota: $f(z)$ es impar si $f(-z) = -f(z)$

2. Utilizando residuos, verifique el siguiente resultado: dado $a \in \mathbb{R}$, que satisface $|a| < 1$, entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\,\mathrm{sen}(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \qquad \text{(20 puntos)}$$

Ayuda: La integral de contorno resultante tiene la misma cantidad de singularidades dentro del contorno que fuera de éste.

3. Determine el valor del número complejo A, si existe, que haga cumplir la siguiente ecuación. Suponga que va a resolver para el valor principal. Utilice la fórmula integral de Cauchy para calcular el valor de la integral en caso de ser necesario ($\bar{z}$ es el conjugado complejo de z). (Valor: 30 puntos)

$$\oint_{|z|=0.34} \frac{15(z-0.5)\,dz}{(5z+10)\left(z+\frac{1}{3}\right)^2} = A * \mathrm{Log}\left(\sqrt[3]{\frac{(1+4j)\overline{(4+3j)}}{-5+5j}}\right)$$

4. Sea $f(z) = z^2 + (x-1)^2 + j\left(y-1\right)^2$.

   a) ¿En qué puntos del plano complejo $f(z)$ es diferenciable? (5 puntos)

   b) ¿En qué puntos del plano complejo $f(z)$ es analítica? (7 puntos)

   c) Calcule, si existe, las derivadas: $f'(1-j)$ y $f'(1+j)$. (8 puntos)

5. Utilice residuos para calcular $\displaystyle\int_{|z-\pi|=4} \frac{dz}{z^2 \mathrm{sen}\, z}$ (15 puntos)

FORRO:

$$\begin{cases} \mathrm{sen}\, z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!};\ \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!};\ e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!};\ \cos z = \frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2};\ \mathrm{sen}\, z = \frac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j} \\ \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{2\pi j}{n!} f^{(n)}(a),\ \mathrm{Res}\left(f(z),a\right) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-a)^k f(z)\right];\ \mathrm{Log}\, z = \ln|z| + j\mathrm{Arg}\, z \end{cases}$$

1.9. I Parcial II Ciclo 2012

Pregunta 1

Resolver las siguientes ecuaciones encontrar todas las soluciones

a) $\cos(z) = 1 + j$

b) $\exp(jz^*) = \exp[jz]^*$, donde z^* es el conjugado de z.

Solución

1.a)

Para encontrar $\arccos(z)$ hagamos $z = \cos(w) \Rightarrow \arccos(z) = w$. Por otro lado.

$$\cos(w) = \frac{\exp(jw) + \exp(-jw)}{2} = z \Rightarrow \exp(2jw) + 1 = 2z\exp(jw)$$

$$\Rightarrow (\exp(jw))^2 - 2z\exp(jw) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \exp(jw) = \frac{2z + \sqrt{4z^2 - 4}}{2} = z + \sqrt{z^2 - 1} \Rightarrow jw = \log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$\Rightarrow w = -j\log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) = \arccos(z)$$

Ahora evaluamos en $z = 1 + j$

$$\arccos(1 + j) = -j\log\left(1 + j\sqrt{(1 + j)^2 - 1}\right) = -i\log\left[1 + j + \sqrt{-1 + 2j}\right]$$

La parte dentro de la raíz dentro del logaritmo es

$$-1 + 2j = 5^{\frac{1}{2}}\exp\left[i\left(\pi - \arctan(2)\right)\right]$$

Cuidando que el $-1 + 2j$ está en el segundo cuadrante: $-X$ y $+Y$. Aplicandole la raíz, se obtiene

$$\sqrt{-1 + 2j} = 5^{\frac{1}{4}}\exp\left[j\frac{\pi - \arctan(2)}{2} + jk\pi\right]$$

Usando[6] valores de $k = -1, 0$

La expresión toma la forma

$$= -j\log\left[1 + j + 5^{\frac{1}{4}}\exp\left(j\frac{\pi - \arctan(2)}{2} + jk\pi\right)\right]$$

$$-j\log\left[1 + 5^{\frac{1}{4}}\cos\left[\frac{\pi - \arctan(2)}{2} + k\pi\right] + j\left(1 + 5^{\frac{1}{4}}\sin\left[\frac{\pi - \arctan(2)}{2} + k\pi\right]\right)\right]$$

[6] Esos valores para que el argumento esté en el rango $]-\pi, \pi]$ para efectos del curso, de otro modo si fuera el argumento con $[0, 2\pi[$ se hubiera tomando los valores $k = 0, 1$

Ahora podemos obtener el logaritmo ya que lo divimos en la parte real e imaginaria, tomando la norma y el argumento de lo que está en el logaritmo

$$-j\left[\ln\left(\sqrt{\left(1+5^{\frac{1}{4}}\cos\left[\frac{\pi-\arctan(2)}{2}+k\pi\right]\right)^2+\left(1+5^{\frac{1}{4}}\sin\left[\frac{\pi-\arctan(2)}{2}+k\pi\right]\right)^2}\right)\right.$$
$$\left.+j\left[\arctan\left(\frac{1+5^{\frac{1}{4}}\sin\left[\frac{\pi-\arctan(2)}{2}+k\pi\right]}{1+5^{\frac{1}{4}}\cos\left[\frac{\pi-\arctan(2)}{2}+k\pi\right]}\right)+2n\pi\right]\right]$$

Con $n\in\mathbb{Z}$

Lo cual sería la respuesta [7]

1.b)

$$\begin{aligned} e^{jz^*} &= \left(e^{jz}\right)^* \\ e^{j(x-jy)} &= \left(e^{j(x+jy)}\right)^* e^{j2k\pi} \\ e^{y+jx} &= e^{-y+j(-x+2k\pi)} \end{aligned}$$

$$y=-y\Rightarrow y=0$$

$$x=-x+2k\pi\Rightarrow x=k\pi$$

$$z=k\pi$$

Con $k\in\mathbb{Z}$

Pregunta 2

Muestre que $\left(\frac{1+j\tan(\theta)}{1-j\tan(\theta)}\right)^n=\frac{1+j\tan(n\theta)}{1-j\tan(n\theta)}$

Solución

$$\left(\frac{1+j\tan(\theta)}{1-j\tan(\theta)}\right)^n=\left(\frac{\cos(\theta)+j\sin(\theta)}{\cos(\theta)-j\sin(\theta)}\right)^n=\left(\frac{e^{j\theta}}{e^{-j\theta}}\right)^n=\frac{e^{nj\theta}}{e^{-nj\theta}}=\frac{\cos(n\theta)+j\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)-j\sin(n\theta)}$$
$$=\frac{1+j\tan(n\theta)}{1-j\tan(n\theta)}$$

Pregunta 3

[7] Bueno, queda distribuir el j, pero ya está hecho lo dificil.

Utilice la fórmula integral de Cauchy para calcular $\int_C \frac{1}{e^z\left(z^2-1\right)^2}\,\mathrm{d}z$, C es un cuadrado con vértices en $z=\pm 2$, $z=\pm 2j$ orientada positivamente.

Solución

$$\oint_C \frac{1}{e^z\left(z^2-1\right)^2}\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{g(z)}{(z+1)^2}\,\mathrm{d}z$$

Donde C_1 y C_2 rodean 1 y -1 respectivamente y $f(z)=\frac{e^{-z}}{(z+1)^2}$ y $g(z)=\frac{e^{-z}}{(z-1)^2}$

$$\oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{e^{-z}}{(z+1)^2}\right]\Bigg|_{z=1} = -\frac{\pi j}{e}$$

$$\oint_{C_2} \frac{g(z)}{(z+1)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\right]\Bigg|_{z=-1} = 0$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{1}{e^z\left(z^2-1\right)^2}\,\mathrm{d}z = -\frac{\pi j}{e}$$

Pregunta 4

Sea $u(x,y)=\cos(x)\cosh(x)$.

a) Demuestre que $u(x,y)=$ es armónica.

b) Encuentre el conjugado armónico $v(x,y)$ de $u(x,y)$.

c) Determine la función analítica $f(z)=u+jv$, y exprésela en términos de z, si $f(0)=1+2j$

Solución

Ver **I Parcial I Ciclo 2011 Pregunta 3** , se hacen los mismos procedimientos. Se obtiene

$$f(x,y)=\cos(x)\cosh(y)-j\sin(x)\sinh(y)+K$$

4.c)

$$f(0)=1+2j=1+K \Rightarrow K=2j$$
$$\Rightarrow f(x,y)=\cos(x)\cosh(y)-j\sin(x)\sinh(y)+2j$$

$$\Rightarrow f(z) = \cos(z) + 2j$$

Pregunta 5

Calcule la integral de línea $\int_C z^* \, \mathrm{d}z$ donde C es el triángulo con vértices en $z = 1$, $z = j$, $z = -1$, orientado positivamente, en donde z^* es el conjugado de z.

Solución

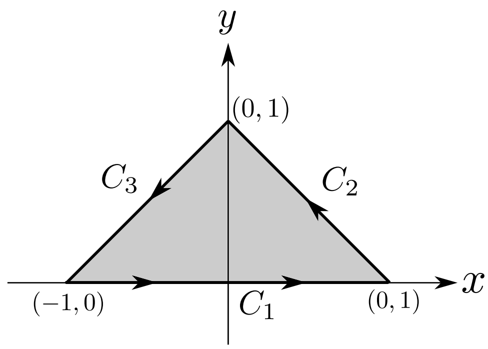


Figura 1.8

$$\oint_C z^* \, \mathrm{d}z = \oint_C (x - jy)(\mathrm{d}x + j\mathrm{d}y)$$

$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$$

$$C_1 = \begin{cases} x = t \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ y = 0 \Rightarrow \mathrm{d}y = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_{C_1} (x - jy)(\mathrm{d}x + j\mathrm{d}y) = \int_{-1}^{1} x \, \mathrm{d}x = 0$$

$$C_2 = \begin{cases} x = 1 - t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \\ y = t \Rightarrow \mathrm{d}y = \mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \int_{C_2} (x - jy)(\mathrm{d}x + j\mathrm{d}y) = \int_0^1 [(1 - t) - jt] (\mathrm{d}t + j\mathrm{d}t) = j$$

$$C_3 = \begin{cases} x = -t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \\ y = 1 - t \Rightarrow \mathrm{d}y = -\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \int_{C_3} z^* \, \mathrm{d}z = -\int_0^1 [-t - j(1 - t)] (\mathrm{d}t + j\mathrm{d}t) = j$$

$$\Rightarrow \oint_C z^* \, \mathrm{d}z = 0 + j + j = 2j$$

Método alternativo: El teorema de Green en el plano complejo

$$\oint_{\partial A} B(z, z^*) \, \mathrm{d}z = 2j \iint_A \frac{\partial B}{\partial z^*} \, \mathrm{d}A$$

Ya que $\partial B/\partial z^* = 1$, el la integral se transforma en $\oint_{\partial A} z^* \mathrm{d}z = 2j \iint\limits_A \mathrm{d}A$. La integral es el area de la trayectoria, esta área del triangulo es igual a 1.

$$\oint_{\partial A} z^* \mathrm{d}z = 2j \iint\limits_A \mathrm{d}A = 2j$$

Da lo mismo, como se esperaba.

Pregunta 6

Utilice rediduos para calcular la integral $\int_{|z|=4} \frac{1}{(z-\pi)\sin(z)}\,\mathrm{d}z$

Solución

Los polos dentro de la trayectoria son $0, \pi, -\pi$. 0 y $-\pi$ son polos de orden 1.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-\pi)\sin(z)}, 0\right] &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{(z-\pi)} \frac{(z)}{\sin(z)} = -\frac{1}{\pi} \\
\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-\pi)\sin(z)}, \pi\right] &= \lim_{z\to -\pi} \frac{1}{(z-\pi)} \frac{(z+\pi)}{\sin(z)} = \frac{1}{2\pi}
\end{aligned}$$

Para el residuo en π expandamos en serie centrada en π y utilicemos $\sin(z) = -\sin(z-\pi)$

$$\frac{1}{(z-\pi)\sin(z)} = -\frac{1}{(z-\pi)\sin(z-\pi)} = -\frac{1}{(z-\pi)\left((z-\pi) - \frac{(z-\pi)^3}{3!} + \mathcal{O}\left((z-\pi)^3\right)\right)}$$

$$= -\frac{1}{(z-\pi)^2\left(1 - \left(\frac{(z-\pi)^2}{3!} + \mathcal{O}\left((z-\pi)^2\right)\right)\right)} = \frac{1 + \left(\frac{(z-\pi)^2}{3!} + \mathcal{O}\left((z-\pi)^2\right)\right)^2 + \cdots}{(z-\pi)^2}$$

Vemos que hay término con el coeficiente $\frac{1}{z-\pi}$, el residuo en π es 0, ya que todas las potencias de $(z-\pi)$ son pares.

$$\oint_{|z|=4} \frac{1}{(z-\pi)\sin(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\left(-\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\right) = -j$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores I Examen Parcial II Ciclo Lectivo del 2012 Tiempo: 3 horas

INDICACIONES:
Toda consulta debe ser de forma, en voz alta y desde el asiento.
Únicamente se permite calculadora científica.
Muestre todos los pasos que conducen a la respuesta.
Conteste las preguntas en forma ordenada y con letra clara; en lapicero negro o azul.
Apague celulares, beepers y demás artefactos sonoros.

Preguntas: 1, 2 y 3: Prof. Edison De Faria Campos; 4, 5 y 5 Profa. Mercedes Chacón Vásquez

1) Resolver las siguientes ecuaciones (encontrar todas las soluciones):
   a) $\cos z = 1 + j$ (10%)
   b) $e^{j(\bar{z})} = \overline{e^{jz}}$, en dónde $\bar{z}$ es el conjugado de z. (10%)
2) Muestre que $\left(\dfrac{1+j\tan\theta}{1-j\tan\theta}\right)^n = \dfrac{1+j\tan n\theta}{1-j\tan n\theta}$, n entero. (15%)
3) Utilice la <u>fórmula integral de Cauchy</u> para calcular $\displaystyle\int_C \frac{dz}{e^z\left(z^2-1\right)^2}$, C es un cuadrado con vértices en $z = \pm 2,\ z = \pm 2j$ orientado positivamente. (15%)
4) Sea $u(x, y) = \cos x \cosh y$.
   a) Demuestre que $u(x, y)$ es armónica. (5 %)
   b) Encuentre el conjugado armónico $v(x, y)$ de $u(x, y)$. (8 %)
   c) Determine la función analítica $f(z) = u + jv$, y exprésela en términos de z, si $f(0) = 1 + 2j$. (7 %)
5) Calcule la integral de línea $\int_C \bar{z}\,dz$ donde C es el triángulo con vértices en $z = 1;\ z = j;\ z = -1$, orientado positivamente, en dónde $\bar{z}$ es el conjugado de z. (15 %)
6) Utilice residuos para calcular la integral: $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{dz}{(z-\pi)\operatorname{sen} z}$. (15 %)

AYUDA

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!};\ \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!};\ e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!};\ \cos z = \frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2};\ \operatorname{sen} z = \frac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j}$$

$$\int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{2\pi j}{n!} f^{(n)}(a);\ \operatorname{Res}\left(f(z),a\right) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-a)^k f(z)\right];\ \operatorname{Log} z = \ln|z| + j\operatorname{Arg} z,$$

$$\log z = \ln|z| + j\arg z;\ \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!};\ \operatorname{senh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};\ \cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2};\ \operatorname{senh} z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}.$$

1.10. I Parcial II Ciclo 2013

Pregunta 1

Calcular:

$a)$ $\dfrac{j+j^2+j^3+j^4+j^5+j^6}{2+3j}$

$b)$ Grafique las raíces cúbicas de $z_1^* z_2$ si $z_1 = 3j$, $z_2 = 2+2j$

Solución

1.a)

$$\frac{j+j^2+j^3+j^4+j^5+j^6}{2+3j} = \frac{j-1-j+1+j-2}{2+3j} = \frac{-1+j}{2+3j} = \frac{-1+j}{2+3j}\cdot\frac{2-3j}{2-3j}$$
$$= \frac{-2+3+j\,(2+3)}{4+9} = \frac{1}{13}+j\frac{5}{13}$$
$$\Rightarrow \frac{j+j^2+j^3+j^4+j^5+j^6}{2+3j} = \frac{1}{13}+j\frac{5}{13}$$

1.b) Si $z_1 = 3j$ y $z_2 = 2+2j$

$$z_1^* z_2 = -3j\,(2+2j) = 6-6j = 6(1-j) = 6\sqrt{2}\left(\frac{1-6}{\sqrt{2}}\right) = (72)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{-j\pi}{4}\right)$$

Obtengamos las raices cúbicas. Sea w_k una de las raices tal, con

$$w_k^3 = (72)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{-j\pi}{4}+j2k\pi\right) \Rightarrow w_n = (72)^{\frac{1}{6}}\exp\left(\frac{-j\pi}{12}+j\frac{2k\pi}{3}\right)$$
$$\Rightarrow w_0 = (72)^{\frac{1}{6}}\exp\left(\frac{-j\pi}{12}\right)$$
$$\Rightarrow w_1 = (72)^{\frac{1}{6}}\exp\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$
$$\Rightarrow w_2 = (72)^{\frac{1}{6}}\exp\left(\frac{j15\pi}{12}\right)$$

Pregunta 2

Utilice residuos para calcular la integral real $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

Solución

Ver **I Parcial II Ciclo 2008 5.b)** donde se demuestra que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a\sqrt{2}}$. Cambiando los límites de 0 a ∞ dividiendo entre 2 ya que la función que se está integrnado es par, y haciendo que $a \to 1$, tenemos

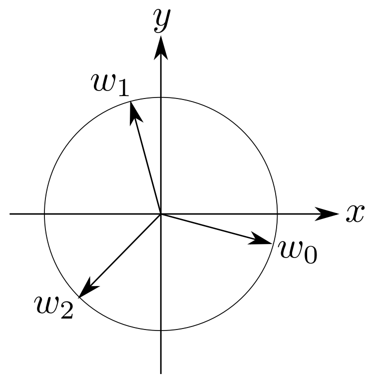


Figura 1.9: Raices del la pregunta 1.b

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Pregunta 3

Para $z = x + jy$, considere la siguiente función: $f(z) = x^2 + jy^2$.

a) ¿ En qué puntos del plano complejo $f(z)$ es diferenciable?

b) ¿ En qué puntos del plano complejo $f(z)$ es analítica?

c) Calcule la derivada de $f(z)$ en lso puntos donde $f(z)$ es diferenciable.

Solución

Vemos que $u(x,y) = x^2$ y $v(x,y) = y^2$. Aplicamos las condiciones de C-R.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = 2y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow x = y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

3.a) Para que exista la derivada, tenemos la restricción que $x = y$. A lo largo de esa recta, la derivada existe.

3.b) La función no es analítica. Para ser analítica tiene que ser diferenciable en un vencindario en cada punto de la recta. La recta no cumple con esto.

3.c)

Pregunta 4

Utilice residuos para calcular las siguientes integrales complejas:

$$\oint_{|z|=4} \frac{\sin(z)}{\sinh(z)}\,\mathrm{d}z \qquad \oint_{|z|=1} \frac{1}{z\sin(z)\arctan(z)}\,\mathrm{d}z$$

Solución

4.a)

Necesitamos los puntos donde $\sinh(z)$ es 0. Está la solucioón trivial donde $z = 0$, pero aquí el argumento del sinh es complejo, hay mas lugares que considerar que solo $z = 0$. Esto podemos averigualo haciendo el cambio

$$\sinh(jz) = \frac{\exp(jz) - \exp(-jz)}{2} = j\sin(z)$$

La función $\sinh(jz)$ es 0 donde $\sin(z)$ es 0. Para el $\sin(z) = 0 \Rightarrow z = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Los 0 de la función $\sinh(z)$ están ubicados en $z = 2k\pi j$. Dentro de la trayectoria de integración, están $-2\pi j, 0$ y $2\pi j$ En 0, vemos que es una singularidad removible probando que el límite existe.

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{\sinh(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z}\frac{z}{\sinh(z)} = 1$$

Los otros 2 polos son de orden 1. Saquemos los residuos en los polos. Sea z_k un polo arbitrario.

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\sin(z)}{\sinh(z)}, z_k\right] = \lim_{z\to z_k}(z - z_k)\frac{\sin(z)}{\sinh(z)} = \sin(z_k)\lim_{z\to z_k}\frac{z - z_k}{\sinh(z)} = \sin(z_k)\lim_{z\to z_k}\frac{1}{\cosh(z)} = \frac{\sin(z_k)}{\cosh(z_k)}$$

$$\oint_{|z|=4} \frac{\sin(z)}{\sinh(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\sum \mathrm{Res} = 2\pi j\left(\frac{\sin(-2\pi j)}{\cosh(-2\pi j)} + \frac{\sin(2\pi j)}{\cosh(2\pi j)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=4} \frac{\sin(z)}{\sinh(z)}\,\mathrm{d}z = 0$$

Aquí aprovechamos el hecho que el seno es impar y el coseno hiperbólico es par para reducir rápido a 0.

4.b)

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z\sin(z)\arctan(z)}\,\mathrm{d}z$$

En la pregunta **I Parcial I Ciclo 2010 6.a)** obtuvimos el residuo de $\dfrac{1}{z\sin(z)\arctan(z)}$ en 0, que da 1/2

$$\Rightarrow \oint_{|z|=1} \frac{1}{z\sin(z)\arctan(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j \sum \mathrm{Res} = \pi j$$

Pregunta 5

Hallar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $\sin(z) = \cosh(4)$

b) $\cos(z) = 2$

Solución

5.a)

Hay que encontrar $\arcsin(w)$. Invirtamos haciendo $\sin(z) = w$

$$\sin(z) = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = w \Rightarrow \left(e^{jz}\right)^2 - 1 = 2jwe^{jz} \Rightarrow \left(e^{jz}\right)^2 + 2jwe^{jz} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^{jz} = \frac{2wj + \sqrt{-4w^2 + 4}}{2} = 2wj + \sqrt{1 - w^2} \Rightarrow z = -j\log\left(2wj + \sqrt{1 - w^2}\right)$$

Para el problema $\sin(z) = \cosh(4)$, evaluamos con $w = \cosh(4)$. Ya que $\cosh(4) > 1$, voy a sacar un j de la raíz de una vez.

$$\Rightarrow z = -j\log\left(i\cosh(4) + j\sqrt{\cosh^2(4) - 1}\right)$$

$$= -j\left[\ln\left(\cosh(4) + \sqrt{\cosh^2(4) - 1}\right) + j\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) - j\left(\cosh(4) + \sqrt{\cosh^2(4) - 1}\right)$$

5.b)

En **I Parcial II Ciclo 2012 1.a)** probamos que $\arccos(z) = -j\log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$

$$\cos(z) = 2 \Rightarrow z = -j\log\left(2 + \sqrt{3}\right) = -j\left[\ln\left(2 + \sqrt{3}\right) + 2k\pi j\right]$$

$$\Rightarrow z = 2k\pi - j\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

Pregunta 6

Calcule la integral de línea $\int_C \pi \exp(\pi z^*)\ \mathrm{d}z$, si C es el cuadrado con vértices den los puntos $z = 0, z = 1, z = 1 + j, z = j$ con orientación positiva (antihoraria) y z^* es el conjugado de z.

Solución

La integral $\oint_C \pi \exp(\pi z^*)\ \mathrm{d}z$ en función de x y y es $\oint_C \pi \exp[\pi(x - jy)]\ (\mathrm{d}x + j\mathrm{d}y)$

Dividimos la integral en 4 trayectorias. $\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$ y parametrizamos para cada C_i

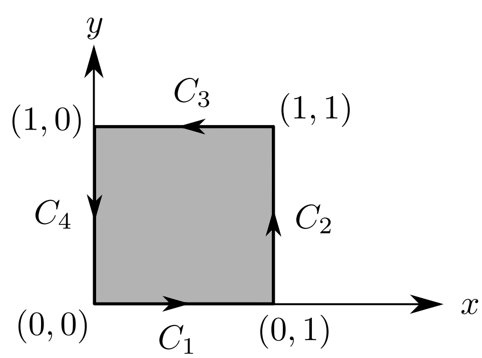


Figura 1.10

$$C_1 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & t & \Rightarrow & \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ y & = & 0 & \Rightarrow & \mathrm{d}y & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \int_{C_1} \pi \exp(\pi z^*)\ \mathrm{d}z = \int_0^1 \pi \exp(\pi t)\ \mathrm{d}t = (e^\pi - 1)$$

$$C_2 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & 1 & \Rightarrow & \mathrm{d}x & = & 0 \\ y & = & t & \Rightarrow & \mathrm{d}y & = & \mathrm{d}t \end{array} \right. \Rightarrow \int_{C_2} \pi \exp(\pi z^*)\ \mathrm{d}z = \int_0^1 \pi \exp(\pi - t\pi j)\ j\mathrm{d}t = 2e^\pi$$

$$C_3 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & t & \Rightarrow & \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ y & = & 1 & \Rightarrow & \mathrm{d}y & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \int_{C_3} \pi \exp(\pi z^*)\ \mathrm{d}z = \int_1^0 \pi \exp(\pi t - \pi j)\ \mathrm{d}t = (e^\pi - 1)$$

$$C_4 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & 0 & \Rightarrow & \mathrm{d}x & = & \\ y & = & t & \Rightarrow & \mathrm{d}y & = & \mathrm{d}t \end{array} \right. \Rightarrow \int_{C_4} \pi \exp(\pi z^*)\ \mathrm{d}z = \int_1^0 \pi \exp(-t\pi j)\ j\mathrm{d}t = -2$$

$$\oint_C \pi \exp(\pi z^*)\ \mathrm{d}z = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = (e^\pi - 1) + 2e^\pi + (e^\pi - 1) - 2 = 4(e^\pi - 1)$$

$$\Rightarrow \oint_C \pi \exp(\pi z^*)\ \mathrm{d}z = 4(e^\pi - 1)$$

Método Alternativo: Teorema de Green en el plano complejo

$$\oint_{\partial A} B(z,z^*)\,\mathrm{d}z = 2j\iint\limits_A \frac{\partial B}{\partial z^*}\,\mathrm{d}A$$

$$\oint_{\partial A} \pi\exp\left(\pi z^*\right)\,\mathrm{d}z = 2j\iint\limits_A \frac{\partial}{\partial z^*}\left[\pi\exp^{\pi z^*}\right]\,\mathrm{d}A = 2\pi^2 j\iint\limits_A e^{x\pi - jy\pi}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\pi^2 j\left[\int_0^1 e^{x\pi}\,\mathrm{d}x\right]\left[\int_0^1 e^{-y\pi j}\,\mathrm{d}y\right] = 4(e^{\pi} - 1)$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial A} \pi\exp\left(\pi z^*\right)\,\mathrm{d}z = 4(e^{\pi} - 1)$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores I Examen Parcial II Ciclo Lectivo del 2013 Tiempo: 3 horas

INDICACIONES:
Toda consulta debe ser de forma, en voz alta y desde el asiento. Únicamente se permite calculadora científica.
Muestre todos los pasos que conducen a la respuesta. Respuesta sin los cálculos correspondientes se califica con cero.
Conteste las preguntas en forma ordenada y con letra clara; en lapicero negro o azul.

Preguntas	1 y 2	3 y 4	5 y 6
Profesor(a)	Jhonny Cascante	Edison De Faria Campos	Mercedes Chacón Vásquez
Color	Melón	Gris	Verde

1) Calcular:

a) $\dfrac{j+j^2+j^3+j^4+j^5+j^6}{2+3j}$ (5 puntos)

b) Grafique las raíces cúbicas de $\overline{z_1}\,.\,z_2$ si $z_1=3j,\ z_2=2+2j.$ (10 puntos)

2) Utilice residuos para calcular la integral real $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2dx}{x^4+1}$ (15 puntos)

3) Para $z=x+jy,$ considere la siguiente función: $f(z)=x^2+jy^2.$

a) ¿En qué puntos del plano complejo $f(z)$ es diferenciable? (5 puntos)

b) ¿En qué puntos del plano complejo $f(z)$ es analítica? (5 puntos)

c) Calcule la derivada de $f(z)$ en los puntos dónde $f(z)$ es diferenciable. (5 puntos)

4) Utilice residuos para calcular las siguientes integrales complejas:

a) $\displaystyle\oint_{|z|=4}\frac{\operatorname{sen} z\,dz}{\operatorname{senh} z}$ (10 puntos) b) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z\operatorname{sen}(z)\arctan(z)}$ (10 puntos)

5) Hallar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{sen}(z)=\cosh(4)$ (10 puntos)

b) $\cos(z)=2$ (10 puntos)

6) Calcule la integral de línea $\int_C \pi e^{\pi\bar{z}}dz$, si C es el cuadrado con vértices en los puntos $z=0, z=1,\ z=1+j,$ $z=j$ con orientación positiva (antihoraria) y $\bar{z}$ es el conjugado de z. (15 puntos)

AYUDA GENERAL

$$\operatorname{sen} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!};\ \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!};\ e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!};\ \cosh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!};\ \operatorname{senh} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\arctan z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1};\ \int_\Gamma\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}=\frac{2\pi j}{n!}f^{(n)}(a);\ \operatorname{Res}\big(f(z),a\big)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\Big[(z-a)^k f(z)\Big];$$

$$\log z=\ln|z|+j\arg z;\ \cos z=\frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2};\ \operatorname{sen} z=\frac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j};\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2};\ \operatorname{senh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}.$$

1.11. I Parcial II Ciclo 2014

Pregunta 1

a) Si $z_1 = \frac{3}{2} - j\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} + j\frac{\sqrt{6}}{2}$, $z_3 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\exp\left(\frac{-3\pi j}{4}\right)$, determine $\frac{\mathrm{Re}\{z_1\}\,\mathrm{Im}\{z_2^*\}\,(z_3)^3}{|z_3^*|\,(z_2^*)^2}$

b) Determine todas las soluciones de la ecuación $z^4 + 1 = 0$ y grafique en el plano complejo.

Solución

1.a)

Pasemos primero el z_2 en forma polar. $\Rightarrow z_2 = \sqrt{3}\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)$. De aquí en la expresión solo ocupamos las magnitudes y nada mas restamos los exponentes

$$\mathrm{Re}\{z_1\} = \frac{3}{2} \qquad \mathrm{Im}\{z_2^*\} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{\mathrm{Re}\{z_1\}\,\mathrm{Im}\{z_2^*\}\,(z_3)^3}{|z_3^*|\,(z_2^*)^2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\exp\left(\frac{-3\pi j}{4}\right)\right)^3}{\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}\exp\left(\frac{-j\pi}{4}\right)\right)^2} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^2\exp\left(-\frac{9\pi j}{4} + \frac{2\pi j}{4}\right)$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^2\exp\left(-\frac{7\pi j}{4}\right) = -\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^2\exp\left(\frac{\pi j}{4}\right)$$

En el último paso, se sumó $2\pi j$ al exponente para que quede dentro del rango $]-\pi,\pi]$

1.b)

$$z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z^4 = -1 = \exp(j\pi + 2kj\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow z = \exp\left(\frac{j\pi}{4} + \frac{kj\pi}{2}\right) \qquad k = 0,1,2,3$$

Sea w_k las distintas soluciones de z que van con los valores de k

$$w_0 = \exp\left(\frac{j\pi}{4}\right) \qquad w_1 = \exp\left(\frac{j3\pi}{4}\right)$$
$$w_2 = \exp\left(\frac{j5\pi}{4}\right) \qquad w_3 = \exp\left(\frac{j7\pi}{4}\right)$$

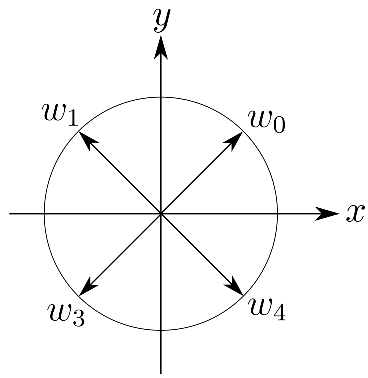


Figura 1.11: Raices de la pregunta 1.b

Pregunta 2

Utilice residuos para calcular las siguientes integrales reales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{\sqrt{2}}\right)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\dfrac{\pi x}{\sqrt{2}}\right)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$$

Solución

Evaluemos la integral con letras para hacerlo más general. Sean $a>0$, $b>0$ con $a,b\in\mathbb{R}$, hagamos las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^4+b^4}\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x^4+b^4}\,\mathrm{d}x$$

De aquí agarramos la integral con el exponencial, e igualamos las partes reales e imaginarias para obtener la integral con seno y coseno

$$\oint \frac{e^{iaz}}{z^4+b^4}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^4+b^4}\,\mathrm{d}x + \oint_{C_2} \frac{e^{iaz}}{z^4+b^4}\,\mathrm{d}z$$

La integral por C_2 tiende a 0 a medida que $R\to\infty$, y usados los residuos para obtener el valor de la integral cerrada. Por lo que tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^4+b^4}\,\mathrm{d}x = 2\pi j\sum \mathrm{Res}$$

Los polos dentro de contorno de integración son

$$z_0 = b\exp\left(\frac{\pi j}{4}\right) \qquad z_1 = b\exp\left(\frac{3\pi j}{4}\right)$$

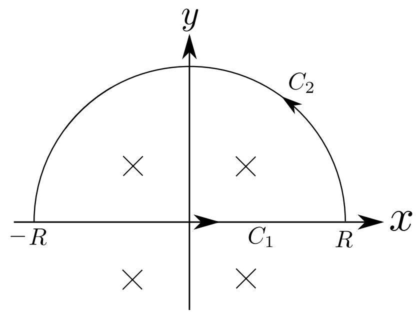


Figura 1.12

Los polos son todos de orden 1. Ahora obtenemos los residuos en z_0 y z_1

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{jaz}}{z^4+b^4}, z_k\right] = \lim_{z\to z_k}(z-z_k)\frac{e^{iaz}}{z^4+b^4} = e^{iaz_k}\lim_{z\to z_k}\frac{1}{4z^3} = \frac{e^{iaz_k}}{4z_k^3}$$

Sea $n = 1$ para el residuo de z_0 y $n = 3$ para el residuo de z_1. Para obtener una forma un poco mejor del residuo y no copiar todo 2 veces.

Los residuos son

$$\frac{1}{4}\frac{\exp(jaz_k)}{z_k^3} = \frac{1}{4}\frac{\exp\left(jab\exp\left(\frac{n\pi j}{4}\right)\right)}{b^3\exp\left(\frac{3n\pi}{4}\right)} = \frac{1}{4b^3}\exp\left(jab\exp\left(\frac{nj\pi}{4}\right)-\frac{3n\pi j}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4b^3}\exp\left(jab\left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+j\sin\left(\frac{n\pi j}{4}\right)\right]-\frac{3n\pi j}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4b^3}\exp\left(-ab\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\exp\left[j\left(ab\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)-\frac{3n\pi}{4}\right)\right]$$

De aquí sustituimos por $n = 1$ y $n = 3$ y sumamos los residuos

$$\frac{1}{4b^3}\exp\left(-ab\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\exp\left[j\left(ab\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3\pi}{4}\right)\right]+\frac{1}{4b^3}\exp\left(-ab\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\exp\left[j\left(ab\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\frac{9\pi}{4}\right)\right]$$

Usamos $\sin(\pi/4) = \sin(3\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ y sacamos a factor común

$$\sum\operatorname{Res} = \frac{1}{4b^3}\exp\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\left[\exp\left[j\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)\right]+\exp\left[j\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{9\pi}{4}\right)\right]\right]$$

Ocupemonos de los exponenciales complejos ahora

$$\exp\left[j\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)\right]+\exp\left[j\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{9\pi}{4}\right)\right]$$

$$\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)+j\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{9\pi}{4}\right)+j\sin\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{9\pi}{4}\right)$$

Usamos $\cos(-x)=\cos(x)$ y $\sin(-x)=-\sin(x)$, y las identidades

$$\cos(u\pm v)=\cos(u)\cos(v)\mp\sin(u)\sin(v)$$

$$\sin(u\pm v)=\sin(u)\cos(v)\pm\cos(u)\sin(v)$$

Y cambiamos los $9\pi/4$ a $\pi/4$, ya que dentro del coseno o seno, estos difieren de 2π, por lo que dan lo mismo.

Separemos parte real e imaginaria primero y sacamos signo del cos y sin

$$\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)+j\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)-j\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)+j\left[\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Ahora expandimos. La parte real da 0.

$$\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=0$$

La parte compleja da

$$\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$=-\frac{2}{\sqrt{2}}\left[\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)+\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Ahora, ya que tenemos los residuos, ya podemos obtener el valor de la integral

$$\sum\text{Res}=-j\frac{1}{4b^3}\exp\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\frac{2}{\sqrt{2}}\left[\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)+\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x^4+b^4}\,\mathrm{d}x=\oint\frac{e^{iaz}}{z^4+b^4}\,\mathrm{d}z=2\pi j\sum\text{Res}$$
$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x^4+b^4}\,\mathrm{d}x=2\pi j\left[-j\frac{1}{4b^3}\exp\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\frac{2}{\sqrt{2}}\left[\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)+\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\right]\right]$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^4+b^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{b^3}\exp\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\left[\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)+\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Expandimos la integral es su parte real e imaginaria

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^4+b^4}\,\mathrm{d}x + j\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x^4+b^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{b^3}\exp\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\left[\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)+\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Y de igualdad obtenemos

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^4+b^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{b^3}\exp\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\left[\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)+\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x^4+b^4}\,\mathrm{d}x = 0$$

De aquí obtenemos más general el resultado de la **I Parcial II Ciclo 2008 5.c**

Para comprobar que no nos equivocamos, que es un procedimiento algo largo, en el libro de referencia[8]: Gradshteyn, I. S., and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press 2014, viene la fórmula **3.727.1**:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^4+b^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\pi}{b^3}\exp\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\left[\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)+\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Esta integral va de 0 a ∞, y ya que la integral de coseno es par, esto es la mitad de la integral que obtuvimos, lo cual es equivalente. La respuesta está bien.

Solo nos queda evaluar cambiando $a = \pi\sqrt{2}$ y $b = 1$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}x\right)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}x\right)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = 0$$

Pregunta 3

3) Considere la función $f(z) = (x-y)^2 + 2j(x+y)$, para $z = x + jy$. Determine la región del plano complejo en donde:

[8] Consigan este libro de referencia, aquí vienen todas las integrales que van a ocupar en su vida, es colosal.

a) Se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

b) La función $f(z)$ es diferenciable, y calcular la derivada $f'(z)$ en dicha región.

c) La función $f(z)$ es analítica.

Solución

La función $f(z)$ ya está separada en su parte real e imaginaria. Con el formato de $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$, vemos rápido

$$u(x,y) = (x-y)^2 \qquad v(x,y) = 2(x+y)$$

Obtenemos las derivadas para aplicar las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x-y) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2(x-y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2$$

Condiciones de C-R:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2(x-y) = 2 \Rightarrow y = x-1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -2(x-y) = -2 \Rightarrow y = x-1$$

3.a) Las condiciones de C-R se cumplen a lo largo de la recta $y = x-1$

3.b) La función $f(z)$ es diferenciable donde se cumplen las condiciones de C-R, a lo largo de la recta $y = x-1$. Obtenemos la derivada derivando con respecto a x

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = 2(x-y) + 2j$$

Sustituimos $y = x-1$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = 2 + 2j$$

Podemos obtener el mismo resultado aplicando la derivada

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = -j\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -j\left[-2\left(x-y\right)\right] + 2$$

y volvemos a aplicar la condición $y = x-1$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = -j(-2) + 2 = 2 + 2j$$

Se obtiene lo mismo

Comentario: Es bueno notar las cosas de *que no hacer*. Resolviendo esto primero tuve la idea de sustituir la condición $y = x - 1$

$$\Rightarrow f(z) = f(x) = (x - (x-1))^2 + j2(x + x - 1) = 1 + j2(2x - 1)$$

y aplicamos la derivada

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = 4j$$

Pero viene lo extraño, antes obtuvimos que la derivada vale $2 + 2j$. Con el método erroneo de aplicar la restricción desde antes que parece bueno hacer, se obtiene una derivada diferente de $4j$. Una de las maneras tiene que estar mal. Este mismo error se puede obtener si se tratara la derivada $\mathrm{d}f/\mathrm{d}z$ como si fuera una derivada total de x, tomando de antemano que y es función de x y evaluando la derivada haciendo

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$$

Aplicando eso (erróneamente), tambien se obtendría que la derivada vale $4j$. El problema es que al derivar con respecto a z con la dirección de $\Delta y = 0$, en el límite de mandar el $\Delta x \to 0$ no es una derivada *total* de x. El error aproposito si tiene implicito el cambio en y a medida que cambia x, pero eso no es mantener $\Delta y = 0$.

Para asegurarnos que no da $4j$ y si el primer resultado obtenido, usemos otra ruta, se podría aplicar está identidad, obtenida de *Wolfram MathWorld*[9]

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - j\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

Aplicando las derivadas y luego las condiciones de C-R, se obtiene el resultado que la derivada vale $2 + 2j$ sobre la recta. Lo "dejare al lector" comprobarlo por este método.[10]

3.c) La función no es analítica, en ningún lado lo es, es derivable sobre una recta, pero para ser analítica tiene que ser sobre un vecindario, una recta no es un vecindario.

Pregunta 4

Calcule la integral $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\tan(z)}{z\,(1 - e^z)}\,\mathrm{d}z$

Solución

Veamos donde están los polos cambiando un poco la expresión

[9] *http://mathworld.wolfram.com/Cauchy-RiemannEquations.html*
[10] No es dificil, intentenlo. ☺

$$\frac{\tan(z)}{z(1-e^z)} = \frac{\sin(z)}{z\cos(z)(1-e^z)}$$

Los polos de la función que están del cortorno de integración es $z_0 = 0, z_1 = -\pi/2, z_2 = \pi/2$

El polo en $z_0 = 0$ es un polo de orden 1, en el límite, $\sin(z)/z$ tiende a uno, lo que indefine la función en 0 es el término $1 - e^z$.

Hallemos los residuos y los sumamos para obtener la integral

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\tan(z)}{z(1-e^z)}, z_0\right] = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{\tan(z)}{z(1-e^z)} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{1-e^z} = -1$$

Los otros 2 polos son de orden 1, donde el $\cos(z)$ los indefine. Para $k = 1, 2$, obtenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{\tan(z)}{z(1-e^z)}, z_k\right] &= \lim_{z\to z_k} (z - z_k) \cdot \frac{\tan(z)}{z(1-e^z)} = \frac{\sin(z_k)}{z_k(1-e^{z_k})} \lim_{z\to z_k} \frac{z - z_k}{\cos(z)} \\ &= \frac{\sin(z_k)}{z_k(1-e^{z_k})} \lim_{z\to z_k} \frac{1}{-\sin(z_k)} = \frac{-1}{z_k(1-e^{z_k})}\end{aligned}$$

Para $z_1 = -\pi/2$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\tan(z)}{z(1-e^z)}, -\frac{\pi}{2}\right] = \frac{2}{\pi\left(1-\exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

Para $z_2 = \pi/2$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\tan(z)}{z(1-e^z)}, \frac{\pi}{2}\right] = -\frac{2}{\pi\left(1-\exp\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

$$\Rightarrow= \oint_{|z|=2} \frac{\tan(z)}{z(1-e^z)}\, \mathrm{d}z = 2\pi j \sum \operatorname{Res}$$

$$\Rightarrow= \oint_{|z|=2} \frac{\tan(z)}{z(1-e^z)}\, \mathrm{d}z = 2\pi j\left[-1 + \frac{2}{\pi\left(1-\exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)} - \frac{2}{\pi\left(1-\exp\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}\right]$$

Pregunta 5

Utilice la fórmula integral de Cauchy pero NO el teorema de residuos, para demostrar que, para la integral siguiente, donde el contorno de integración es $C : |z| = 2$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=2} \frac{\cosh(z)}{(z+1)(z+3)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\, \mathrm{d}z = \frac{2\pi j}{21}\left[4\cosh\left(\frac{1}{2}\right) - 7\cosh(1)\right]$$

Solución

Los 2 polos dentro del contorno de integración son $z = 1/2$ y $z = -1$. Para aplicar Cauchy, dividimos la integral en 2.

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cosh(z)}{(z+1)(z+3)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\,\mathrm{d}z = \oint_{|z|=2} \frac{g_1(z)}{(z+1)}\,\mathrm{d}z + \oint_{|z|=2} \frac{g_2(z)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)}\,\mathrm{d}z$$

Con

$$g_1(z) = \frac{\cosh(z)}{(z+3)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \qquad g_2 = \frac{\cosh(z)}{(z+3)(z+1)}$$

De aquí aplicamos Cauchy directo. Voy a usar la paridad del coseno hiperbólico $\cosh(-a) = \cosh(a)$, ya que el enunciado sale con 1 positivo dentro de este.

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cosh(z)}{(z+1)(z+3)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j \lim_{z\to-1} \frac{\cosh(z)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z+3)} + 2\pi j \lim_{z\to1/2} \frac{\cosh(z)}{(z+1)(z+3)}$$

$$= 2\pi j\left[\frac{4}{21}\cosh\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\cosh(1)\right] = \frac{2\pi j}{21}\left[4\cosh\left(\frac{1}{2}\right) - 7\cosh(1)\right]$$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=2} \frac{\cosh(z)}{(z+1)(z+3)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi j}{21}\left[4\cosh\left(\frac{1}{2}\right) - 7\cosh(1)\right]$$

Pregunta 6

Demuestre que para los números complejos ubicados sobre el círculo unitario $z = \exp(j\theta)$ se satisface la identidad:

$$\left|\tan\left(e^{j\theta}\right)\right|^2 = \frac{\left[e^{2\sin(\theta)}\csc(2\cos(\theta)) - \cot(2\cos(\theta))\right]^2 + 1}{\left[e^{2\sin(\theta)}\csc(2\cos(\theta)) + \cot(2\cos(\theta))\right]^2 + 1}$$

Solución

La tangente es

$$\tan(z) = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{e^{jz} + e^{-jz}}$$

Reemplazando $z \to e^{j\theta}$

$$\tan\left(e^{j\theta}\right) = \frac{e^{je^{j\theta}} - e^{-je^{j\theta}}}{e^{je^{j\theta}} + e^{-je^{j\theta}}}$$

Multiplicamos arriba y abajo por $e^{je^{j\theta}}$

$$\frac{e^{je^{j\theta}} - e^{-je^{j\theta}}}{e^{je^{j\theta}} + e^{-je^{j\theta}}} \cdot \frac{e^{je^{j\theta}}}{e^{je^{j\theta}}} = \frac{e^{2je^{j\theta}} - 1}{e^{2je^{j\theta}} + 1} = \frac{e^{2j[\cos(\theta)+j\sin(\theta)]} - 1}{e^{2j[\cos(\theta)+j\sin(\theta)]} + 1} = \frac{e^{-2\sin(\theta)}e^{j2\cos(\theta)} - 1}{e^{-2\sin(\theta)}e^{j2\cos(\theta)} + 1}$$

$$= \frac{e^{-2\sin(\theta)}\left[\cos\left(2\cos\left(\theta\right)\right) + j\sin\left(2\cos\left(\theta\right)\right)\right] - 1}{e^{-2\sin(\theta)}\left[\cos\left(2\cos\left(\theta\right)\right) + j\sin\left(2\cos\left(\theta\right)\right)\right] + 1} = \frac{-1 + e^{-2\sin(\theta)}\cos\left(2\cos\left(\theta\right)\right) + je^{-2\sin(\theta)}\sin\left(2\cos\left(\theta\right)\right)}{1 + e^{-2\sin(\theta)}\cos\left(2\cos\left(\theta\right)\right) + je^{-2\sin(\theta)}\sin\left(2\cos\left(\theta\right)\right)}$$

De aquí sacamos a factor común $e^{-2\sin(\theta)}\sin\left(2\cos\left(\theta\right)\right)$ y obtenemos el csc y el cot

$$= \frac{-e^{2\sin(\theta)}\csc\left(2\cos\left(\theta\right)\right) + \cot\left(2\cos\left(\theta\right)\right) + j}{e^{2\sin(\theta)}\csc\left(2\cos\left(\theta\right)\right) + \cot\left(2\cos\left(\theta\right)\right) + j}$$

Con esto es facil obtener el módulo cuadrado. Solo sumando los cuadrados de la parte real y la imaginaria.

$$\left|\tan\left(e^{j\theta}\right)\right|^2 = \frac{\left[-e^{2\sin(\theta)}\csc\left(2\cos\left(\theta\right)\right) + \cot\left(2\cos\left(\theta\right)\right)\right]^2 + 1}{\left[e^{2\sin(\theta)}\csc\left(2\cos\left(\theta\right)\right) + \cot\left(2\cos\left(\theta\right)\right)\right]^2 + 1}$$

Ahora para que quede idéntico al enunciado del examen, solo usamos $(-a+b)^2 = (a-b)^2$

$$\Rightarrow \left|\tan\left(e^{j\theta}\right)\right|^2 = \frac{\left[e^{2\sin(\theta)}\csc\left(2\cos\left(\theta\right)\right) - \cot\left(2\cos\left(\theta\right)\right)\right]^2 + 1}{\left[e^{2\sin(\theta)}\csc\left(2\cos\left(\theta\right)\right) + \cot\left(2\cos\left(\theta\right)\right)\right]^2 + 1}$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-0305 Matemáticas Superiores

ESCUELA DE INGENIERIA ELECTRICA
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

I Examen Parcial   II Ciclo 2014   Tiempo: 3 horas

Este es un examen de desarrollo. Debe mostrar todos los pasos que conducen a la respuesta. Resuelva el examen utilizando lapicero azul o negro. No se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz. Trabaje ordenadamente. No se permite el uso de calculadoras, celulares o tabletas con capacidad de cálculo simbólico. Calculadoras científicas son permitidas.

Preguntas	1 y 2	3 y 4	5 y 6
Profesor	Erick Carvajal	Edison De Faria	Jorge Romero
Color hoja	Turquesa claro	Gris	Melón

1) a) Si $z_1 = \frac{3}{2} - j\frac{3\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} + j\frac{\sqrt{6}}{2}$; $z_3 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-3\pi j/4}$, determine $\frac{\operatorname{Re}\{z_1\}\operatorname{Im}\{\overline{z_2}\}(z_3)^3}{|\overline{z_3}|(\overline{z_2})^2}$. (10 puntos)

   b) Determine todas las soluciones de la ecuación $z^4 + 1 = 0$ y grafique en el plano complejo. (5 puntos)

2) Utilice residuos para calcular las siguientes integrales reales:

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{\sqrt{2}}\right)}{x^4+1}dx$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{\sqrt{2}}\right)}{x^4+1}dx$ (10 puntos cada)

   Nota: Puede ayudarse con los resultados obtenidos en el problema 1.b

3) Considere la función $f(z) = (x-y)^2 + 2j(x+y)$, para $z = x + jy$. Determine la región del plano complejo en dónde:
   a) Se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. (5 puntos)
   b) La función $f(z)$ es diferenciable, y calcular la derivada $f'(z)$ en dicha región. (10 puntos)
   c) La función $f(z)$ es analítica. (5 puntos)

4) Calcule la integral $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\tan z}{z(1-e^z)}dz$ (15 puntos)

5) Utilice la fórmula integral de Cauchy pero NO el teorema de los residuos, para demostrar que, para la integral siguiente, donde el contorno de integración es C: $|z| = 2$

$$\oint_C \frac{\cosh(z)}{(z+1)(z+3)(z-0.5)}dz = \frac{2\pi j}{21}\left[4\cosh\left(\frac{1}{2}\right) - 7\cosh(1)\right] \qquad (15 \text{ puntos})$$

6) Demuestre que para los números complejos ubicados sobre el círculo unitario ($z = e^{j\theta}$) se satisface la identidad:

$$\left|\tan\left(e^{j\theta}\right)\right|^2 = \frac{\left[e^{2\operatorname{sen}(\theta)}\csc(2\cos(\theta)) - \cot(2\cos(\theta))\right]^2 + 1}{\left[e^{2\operatorname{sen}(\theta)}\csc(2\cos(\theta)) + \cot(2\cos(\theta))\right]^2 + 1} \qquad (15 \text{ puntos})$$

NOTA: $\displaystyle\int_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{2\pi j}{n!}f^{(n)}(a)$; $e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$; $\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$; $\cos z = \frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2}$

$\displaystyle\operatorname{Res}(f(z),a) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-a)^k f(z)\right]$ (polo orden k); $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$; $\operatorname{sen} z = \frac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j}$

Capítulo 2

Segunda Ronda

Nota: Las transformadas de Laplace voy a usar la letra p en lugar de la letra s.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = F(p)$$

Hay un libro que está apenas para el curso que salió hace poco: Sadiku, M. N. O., & Ali, W. H,. *Signals and Systems: A Primer with MATLAB®*. CRC Press 2015. Trae todo, hasta transformada $\mathcal{Z}$, excepto la analisis complejo.

Voy a abstenerme a usar las impedancias en las soluciónes a problemas con circuitos. El objetivo en este curso es usar las transformaciones integrales en las ecuaciónes diferenciales que modelan a los circuitos. Que sea un circuito es secundario en esto, perfectamente se podría usar un sistema de masa-resorte con amortiguación con una fuerza externa y sería el mismo análisis con respecto a la matemática que modelan a estos sistemas.[1]

[1] Por ahí debe haber casos triviales como que usé la inductancia equivalente de 2 inductores en serie, que es la suma. Esos casos tan triviales hice "trampa" reduciendo, pero... es tan trivial que no afecta, igual los iba a terminar sumando.

2.1. II Parcial I Ciclo 2008

Pregunta 1

Si $\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(p)$, demuestre que $\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right\} = \dfrac{F(p)}{p}$

Solución

Sea $g(t) := \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$ y sea $G(p) = \mathscr{L}\left\{g(t)\right\}$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = f(t) \Rightarrow \mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right\} = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(p)$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right\} = pG(p) - g(0)$$

El valor de $g(0)$ es 0. $g(0) = \int_0^0 f(u)\,\mathrm{d}u = 0$

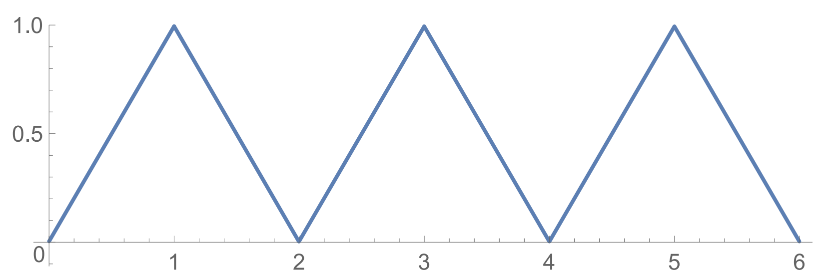
$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right\} = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(p) = pG(p) \Rightarrow G(p) = \frac{F(p)}{p}$$

$$G(p) = \mathscr{L}\left\{g(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right\} = \frac{F(p)}{p}$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right\} = \frac{F(p)}{p}$$

Pregunta 2

Calcule $\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}$ para $f(t)$ periódica representada gráficamente por la figura abajo



Solución

El periodo T es igual a 2.

$$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)e^{-pT}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-e^{-2p}}\left[\int_0^1 te^{-pt}\,\mathrm{d}t + \int_1^2 (2-t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t\right]$$

Evaluemos las integrales usando la integral

$$\int xe^{-ax}\,\mathrm{d}x = -\frac{e^{-ax}}{a^2}\left(ax+1\right)$$

$$= \int_0^1 te^{-pt}\,\mathrm{d}t + 2\int_1^2 e^{-pt}\,\mathrm{d}t - \int_1^2 te^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left(\frac{1-e^{-p}(p+1)}{p^2}\right) + 2\left(\frac{e^{-2p}\left(e^p-1\right)}{p}\right) + \left(\frac{e^{-2p}\left(-2p+e^p(p+1)-1\right)}{p^2}\right)$$

Donde dentro de cada parentesis es cada integral evaluada. Simplificando un poco, la suma de las integrales es

$$\int_0^1 te^{-pt}\,\mathrm{d}t + 2\int_1^2 e^{-pt}\,\mathrm{d}t - \int_1^2 te^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-2p}\left(e^p-1\right)^2}{p^2}$$

Juntandolo con la fracción que sale por ser una función periódica, la transformada de Laplace es

$$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{e^{-2p}\left(e^p-1\right)^2}{\left(1-e^{-2p}\right)p^2}$$

Pregunta 3

Sea $F(p) = \dfrac{p(p+2)}{p^2+2p+5}$, utilice el método de los residuos para encontrar y simplifique hasta dejar la solución en términos de funciones reales.

Solución

Hacemos primero una división de polinomios para que el grado del numerador sea menor al denominador y poder aplicar residuos.

$$\frac{p(p+2)}{p^2+2p+5} = 1 - \frac{5}{p^2+2p+5}$$

Aplicamos residuos para obtener la transformada inversa del polinomio, la transformada inversa de 1 es $\delta(t)$. Los polos los encontramos resolviendo

$$p^2 - 2p + 5 = 0 \Rightarrow p_1 = -1+2j \ ; \ p_2 = -1-2j$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\exp(pt)5}{p^2+2p+5}, p_1\right] = \lim_{p\to p_1}\left(p-p_1\right)\frac{\exp(pt)5}{\left(p-p_1\right)\left(p-p_2\right)} = \frac{5\exp\left((-1+2j)t\right)}{4j}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\exp(pt)5}{p^2+2p+5}, p_2\right] = \lim_{p\to p_2}(p-p_2)\frac{\exp(pt)5}{(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{5\exp((-1-2j)t)}{-4j}$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{p^2+2p+5}\right\} = \sum \operatorname{Res} = \frac{5\exp((-1+2j)t)}{4j} + \frac{5\exp((-1-2j)t)}{-4j}$$

$$= \frac{5}{2}\exp(-t)\left(\frac{\exp(2jt)-\exp(-2jt)}{2j}\right) = \frac{5}{2}\exp(-t)\sin(2t)$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{p(p+2)}{p^2+2p+5}\right\} = \delta(t) - \frac{5}{2}\exp(-t)\sin(2t)$$

Pregunta 4

La carga q de un capacitor en un circuito inductivo está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + 300\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + 2\times10^4 q = 200\sin(100t)$$

con $q(0) = 0$, $\dfrac{\mathrm{d}q(0)}{\mathrm{d}t} = 0$. Utilice transformada de Laplace para calcular $q(t)$.

Solución

Sea $Q(p) = \mathscr{L}\{q(t)\}$. Las condiciones iniciales son $q(0) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ Al aplicar transformada de Laplace obtenemos

$$p^2Q(p) + 300pQ(P) + 2\times10^4Q(p) = 200\,\frac{100}{p^2+100}$$

$$\left[p^2+300p+2\times10^4\right]Q(p) = \frac{2\times10^4}{p^2+100^2} \Rightarrow Q(p) = \frac{2\times10^4}{(p^2+300p+2\times10^4)(p^2+100^2)}$$

$$p^2+300p+2\times10^4 = (p+100)(p+200) \Rightarrow Q(p) = \frac{2\times10^4}{(p+100)(p+200)(p^2+100^2)}$$

Al aplicar fracciones parciales obtenemos:

$$\frac{2\times10^4}{(p+100)(p+200)(p^2+100^2)} = \frac{100}{500(p^2+100^2)} - \frac{3p}{500(p^2+100^2)} + \frac{1}{100(p+100)} - \frac{1}{250(p+200)}$$

Ya en ese formato podemos fijarnos en las tablas de transformadas y obtenemos:

$$\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\{Q(p)\} = q(t) = \frac{1}{500}\sin(100t) - \frac{3}{500}\cos(100t) + \frac{e^{-100t}}{100} - \frac{e^{-200t}}{250}$$

Pregunta 5

Demuestre que $\mathcal{Z}\left\{x(n-3)u(n-3)\right\} = z^{-3}X(z)$

Solución

Demostremos con un p general que

$$\mathcal{Z}\left\{x(n-p)u(n-p)\right\} = z^{-p}X(z)$$

Por definición:

$$\mathcal{Z}\left\{x(n-p)u(n-p)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x(n-p)u(n-p)}{z^n} = \sum_{n=0}^{p-1}\frac{x(n-p)u(n-p)}{z^n} + \sum_{n=p}^{\infty}\frac{x(n-p)u(n-p)}{z^n}$$

La sumatoria de $n = 0$ a $n = p-1$ es 0 debido al Heaviside que es 0 en todo ese recorrido. La sumatoria que va de p hasta infinito, el Heaviside vale 1.

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\left\{x(n-p)u(n-p)\right\} = \sum_{n=p}^{\infty}\frac{x(n-p)}{z^n}$$

Si hacemos el cambio $m = n-p$ y para cambiar el inicio de la sumatoria empezando en 0

$$\sum_{n=p}^{\infty}\frac{x(n-p)}{z^n} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x(m)}{z^{m+p}} = \frac{1}{z^p}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x(m)}{z^m} = z^{-p}X(z)$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\left\{x(n-p)u(n-p)\right\} = z^{-p}X(z)$$

En la pregunta del examen, $p = 3$.

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\left\{x(n-3)u(n-3)\right\} = z^{-3}X(z)$$

Pregunta 6

Resuelva la siguiente ecuación en diferencias utilizando la transformada $\mathcal{Z}$. Simplifique la expresión al máximo.

$$y(n+1) - 16y(n-1) = 2^{2n+1}$$

donde $y(0) = 0$.

Solución[2]

[2]Creo que a esto le falta una condición, como un $y(1)$, la relación de recurrencia relaciona entre n y $n+2$, el $y(1)$ nunca es especificado y la relación sabiendo el $y(0)$, haciendolo iterativo salta directo al $y(2)$, no $y(1)$. El resultado que se obtiene con Mathematica es el mismo obtenido aquí, pero deja un parametro libre $C[1]$ para otra condición.

Al aplicar transformada $\mathcal{Z}$ con la condición $y(0) = 0$ obtenemos

$$zY(z) - \frac{16}{z}Y(z) = 2\frac{z}{z-4} \Rightarrow \left[\frac{z^2-16}{z}\right]Y(z) = 2\frac{z}{z-4}$$

$$\Rightarrow Y(z) = 2z\frac{z}{(z^2-16)(z+4)} = 2z\frac{z}{(z+4)(z-4^2)}$$

Al aplicar fracciones parciales obtenemos

$$\frac{z}{(z^2-16)(z+4)} = -\frac{1}{16(z+4)} + \frac{1}{16(z-4)} + \frac{1}{2(z-4)^2}$$

$$\Rightarrow 2z\frac{z}{(z+4)(z-4^2)} = -\frac{z}{8(z+4)} + \frac{z}{8(z-4)} + \frac{z}{(z-4)^2} = Y(z)$$

Con este formato, ya nos podemos fijar en las tablas de la transformada $\mathcal{Z}$

$$\Rightarrow y(n) = -\frac{(-4)^n}{8} + \frac{4^n}{8} + n4^{n-1}$$

Pregunta 7

Calcule

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z\left(z^2+4z+1\right)}{(z-1)^4}\right\}$$

Solución

Utilizamos la identidad

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}\,\mathrm{d}z = \sum \mathrm{Res}\left[X(z)z^{n-1}\right]$$

Donde

$$X(z) = \frac{z\left(z^2+4z+1\right)}{(z-1)^4}$$

Al multiplicar $X(z)$ por z^{n-1} tenemos

$$X(z)z^{n-1} = \frac{z^n\left(z^2+4z+1\right)}{(z-1)^4}$$

El único polo es $z = 1$ de orden 4.

El residuo lo obtenemos evaluando

$$\operatorname{Res}\left[X(z)z^{n-1}\right] = \lim_{z\to a} \frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left[(z-a)^m X(z)z^{n-1}\right]$$

Donde $m = 1$ y $a = 1$

$$x(n) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{(4-1)!}\frac{\mathrm{d}^{4-1}}{\mathrm{d}z^{4-1}}\left[(z-1)^4 X(z)z^{n-1}\right] = \lim_{z\to 1}\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3}\left[z^n\left(z^2+4z+1\right)\right]$$

$$\Rightarrow x(n) = \lim_{z\to 1}\frac{1}{6}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3}\left[z^{n+2}+4z^{n+1}+z\right]$$

Calculando las primeras 3 derivadas.

$$\frac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}z^1}\left[z^{n+2}+4z^{n+1}+z^n\right] = nz^{n-1}+(n+2)z^{n+1}+4(n+1)z^n$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[z^{n+2}+4z^{n+1}+z^n\right] = (n-1)nz^{n-2}+4n(n+1)z^{n-1}+(n+1)(n+2)z^n$$

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3}\left[z^{n+2}+4z^{n+1}+z^n\right] = (n-2)(n-1)nz^{n-3}+4(n-1)n(n+1)z^{n-2}+n(n+1)(n+2)z^{n-1}$$

Evaluando el límite $z \to 1$ y simplificando

$$x(n) = \frac{1}{6}\lim_{z\to 1}(n-2)(n-1)nz^{n-3}+4(n-1)n(n+1)z^{n-2}+n(n+1)(n+2)z^{n-1} = n^3$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\}x(n) = n^3$$

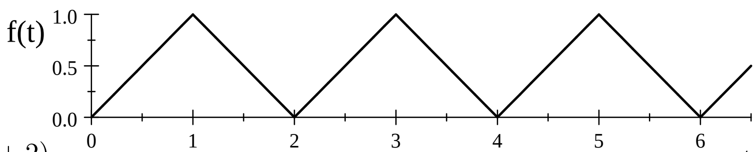
Universidad de Costa Rica
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica

IE-305 Matemáticas Superiores II Parcial I Ciclo 2008 Tiempo: 3 horas

Este es un examen de desarrollo. Todos los procedimientos deben aparecer en los cuadernos de examen. No se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz. Trabaje ordenadamente. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de cálculo simbólico (CAS). Calculadoras científicas son permitidas. Después de la devolución del examen, tendrá tres días para revisarlo y presentar su reclamo.

1. Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, demuestre que $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\ du\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$. (Valor: 15 puntos)

2. Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$ para $f(t)$ periódica representada gráficamente por la figura abajo. (Valor: 15 puntos)



3. Sea $F(s) = \dfrac{s(s+2)}{s^2+2s+5}$, utilice el método de los residuos para encontrar $f(t)$ y simplifique hasta dejar la solución en términos de funciones reales.(Valor: 15 puntos)

4. La carga q de un capacitor en un circuito inductivo está dada por la ecuación diferencial
$$\frac{d^2q}{dt^2} + 300\ \frac{dq}{dt} + 2\times 10^4\ q = 200\ \text{sen}\ (100\ t)$$
con $q(0) = 0$, $\dfrac{dq}{dt}(0) = 0$.Utilice transformada de Laplace para calcular $q(t)$. (Valor: 15 puntos)

5. Demuestre que:
$$\mathcal{Z}\{x(n-3)\ u(n-3)\} = z^{-3}\ X(z)$$
(Valor: 10 puntos)

6. Resuelva la siguiente ecuación en diferencias utilizando la Transformada $\mathcal{Z}$. Simplifique la expresión al máximo.
$$y(n+1) - 16\ y(n-1) = 2^{2n+1}$$
donde $y(0) = 0$. (Valor: 15 puntos)

7. Calcule
$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z\left(z^2+4z+1\right)}{(z-1)^4}\right\}.$$
(Valor: 15 puntos)

2.2. II Parcial II Ciclo 2009

Pregunta 1

Calcule $y(t)$ si $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \displaystyle\int_0^t e^{2(t-u)}\frac{\mathrm{d}y(u)}{du}\,\mathrm{d}u = e^{2t}$, si $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Solución

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \int_0^t e^{2(t-u)}\frac{\mathrm{d}y(u)}{du}\,\mathrm{d}u = e^{2t}$$

Aplicamos transformada de Laplace con las condiciones $y(0) = 0$ y $\dfrac{\mathrm{d}y(0)}{dt} = 1$

$$p^2Y(p) - py(0) - \frac{\mathrm{d}y(0)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{p-2}\left[pY(p) - y(0)\right] = \frac{1}{p-2}$$

$$\left[p^2 + \frac{p}{p-2}\right]Y(p) = \frac{1}{p-2} + 1 \Rightarrow p\left[p(p-2) + p\right]Y(p) = p - 1$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{p-1}{p\left(p(p-2)+1\right)}$$

Reordenemos el parentesis

$$p(p-2) + 1 = p^2 - 2p + 1 = (p-1)^2$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{p-1}{p(p-1)^2} = \frac{1}{p(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow y(t) = e^t - 1$$

Pregunta 2

Utilice la definición de transformada $\mathcal{Z}$ para demostrar que $\mathcal{Z}\left\{\cosh(na)\right\} = \dfrac{z\left(z - \cosh(a)\right)}{z^2 - 2z\cosh(a) + 1}$

Solución

$$\mathcal{Z}\left\{\cosh(na)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cosh(na)}{z^n} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^a)^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{-a})^n}{z^n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-e^a} + \frac{z}{z-e^{-a}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{z\left(z-e^{-a}\right) + z(z-e^a)}{\left(z-e^a\right)\left(z-e^{-a}\right)}\right] = \frac{z}{2}\left[\frac{2z - \left(e^a + e^{-a}\right)}{z^2 - z\left(e^a+e^{-a}\right) + 1}\right] = \frac{z\left(z-\cosh(a)\right)}{z^2 - 2z\cosh(a) + 1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\left\{\cosh(na)\right\} = \frac{z\left(z-\cosh(a)\right)}{z^2 - 2z\cosh(a) + 1}$$

Pregunta 3

Sea $u(t)$ la función escalón unitario: $u(t) = 1$ si $t > 0$, $u(t) = 0$ si $t < 0$.

a. Utilice las propiedades de la convolución y la transformada de Laplace para calcular $u(t) * u(t) * u(t)$

b. Extienda este resultado a la convolución aplicada n veces: $u(t) * u(t) * \cdots * u(t)$ n veces.

Solución

$$\mathscr{L}\{u(t)\} = \frac{1}{p}$$

$$\mathscr{L}\{u(t) * u(t)\} = \mathscr{L}\{u(t)\}\mathscr{L}\{u(t)\} = \frac{1}{p^2}$$

$$\mathscr{L}\{u(t) * u(t) * u(t)\} = \mathscr{L}\{u(t)\}\mathscr{L}\{u(t) * u(t)\} = \mathscr{L}\{u(t)\}\mathscr{L}\{u(t)\}\mathscr{L}\{u(t)\} = \frac{1}{p^3}$$

$$\mathscr{L}\left\{\overbrace{u(t) * \cdots * u(t)}^{n}\right\} = \mathscr{L}\{u(t)\}\mathscr{L}\left\{\overbrace{u(t) * \cdots * u(t)}^{n-1}\right\} = \overbrace{\mathscr{L}\{u(t)\}\cdots\mathscr{L}\{u(t)\}}^{n} = \frac{1}{p^n}$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{\overbrace{u(t) * \cdots * u(t)}^{n}\right\} = \frac{1}{p^n}$$

Pregunta 4

Considere la sucesión $x(n)$ cuya transformada $\mathcal{Z}$ unilateral está dada por $X(z) = 2 - 3z^{-1} + 4z^{-2}$, y la sucesión $y(n)$ cuya transformada $\mathcal{Z}$ unilateral es $Y(z) = \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}$

a. Determine las sucesiones $x(n)$ y $y(n)$

b. Determine la transformada $\mathcal{Z}$ de la convolución $x(n) * y(n)$

c. Deterine la sucesión $r(n) = x(n) * y(n)$

Solución

$$X(z) = 2 - \frac{3}{z} + \frac{4}{z^2} \qquad Y(z) = \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z^2}$$

En el formato que estan $X(z)$ y $Y(z)$, se pueden ver directo de la tabla de transformada $\mathcal{Z}$ para obtener $x(n)$ y $y(n)$ haciendo uso de $\mathcal{Z}\{\delta(n-r)\} = z^{-r}$

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{2 - \frac{3}{z} + \frac{4}{z^2}\right\} = 2\delta(n) - 3\delta(n-1) + 4\delta(n-2)$$

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(n)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{2z} + \frac{1}{2z^2}\right\} = \frac{1}{2}\delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2)$$

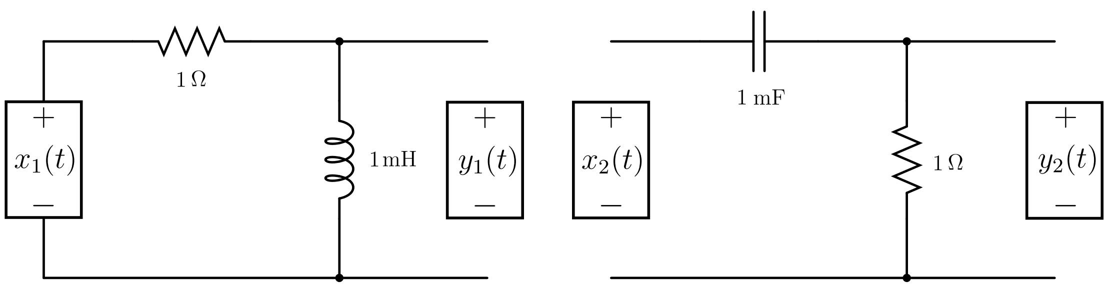
Para encontrar la transformada de la convolución $x(n) * y(n)$, la transformada es el producto de las transformadas.

$$\mathcal{Z}\{x(n) * y(n)\} = X(z)Y(z) = \left(2 - \frac{3}{z} + \frac{4}{z^2}\right)\left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{2z^2}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} + \frac{2}{z^4}$$

$$\Rightarrow r(n) = x(n) * y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} + \frac{2}{z^4}\right\} = \delta(n-1) - \frac{1}{2}\delta(n-2) + \frac{1}{2}\delta(n-3) + 2\delta(n-4)$$

Pregunta 5

Considere los siguientes sistemas (inicialmente en reposo) con resistencias de 1Ω, inductancia de 1 mH, capacitancia de 1 mF



a) Realice un análisis de estabilidad para cada sistema.

b) Si la salida del primer sistema se conecta a la entrada del segundo, determine la función de transferencia del sistema en cascada.

c) Obtenga $y_2(t)$ si $x_1(t)$ es igual a 1 V.

Solución

5.a Aplicamos la ley de Faraday [3] para el primer sistema. Todas las entradas y salidas son los voltajes de los elementos.

$$-x_1(t) + iR = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Al aplicar la transformada de Laplace, con las condiciones iniciales nulas, obtenemos

$$-X_1(p) + I(p)R + LpI(p) = 0 \Rightarrow \frac{I(p)}{X_1(p)} = \frac{1}{R + Lp}$$

[3] Formalmente, la regla de tensión de Kirchhoff no aplica en una trayectoria donde hay un campo magnético cambiando en el tiempo, la ley de Faraday es lo que siempre aplica. Voy a referirme de aquí en adelante a Faraday cuando el circuito tenga un inductor. Más información en el apédice

La FEM inducida en el inductor debido al cambio en la corriente es

$$y_1(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Lo transformamos a dominio de p

$$Y_1(p) = LpI(p) \Rightarrow I(p) = \frac{Y_1(p)}{Lp}$$

Sustituimos para tener una función de transferencia en términos de las tensiones

$$\frac{Y_1(p)/Lp}{X_1(p)} = \frac{1}{R+Lp} \Rightarrow \frac{Y_1(p)}{X_1(p)} = \frac{Lp}{R+Lp} = H_1(p)$$

Para el segundo sistema aplicamos Kirchhoff y obtenemos (Esta i es distinta a la del sistema anterior)

$$-x_2(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)\mathrm{d}\xi + iR = 0$$

Aplicando transformada de Laplace

$$-X_2(p) + \frac{I(p)}{Cp} + I(p)R = 0 \Rightarrow \frac{I(p)}{X_2(p)} = \frac{1}{\frac{1}{Cp}+R} = \frac{p}{\frac{1}{C}+Rp}$$

Aplicamos la relación de voltaje-corriente para pasar a dominio de p y sustituimos

$$y_2(t) = i(t)R \Rightarrow \frac{Y_2(p)}{R} = I(p)$$

$$\frac{Y_2(p)/R}{X_2(p)} = \frac{p}{\frac{1}{C}+R} \Rightarrow \frac{Y_2(p)}{X_2(p)} = \frac{Rp}{\frac{1}{C}+Rp} = H_2(p)$$

Los 2 sistemas son estables. Ya que R, L y C son positivos, la solución general para $mx + b = 0$ con $m, b > 0$ es $x = -b/m$, lo cual es un negativo. Los 2 denominadores de la función de transferencia tienen ese formato, ya que es negativo, los 2 son estables.

5.b) Con la salida del primer sistema sea la entrada del segundo, no es que los conectan en paralelo. Supongan que tienen una fuende dependiente. Si se conectara en paralelo, no aplicaría tratarlo como cascada.

Tenemos que $X_2(p) = Y_1(P)$

$$Y_2(p) = X_2(p)H_2(p) = X_1H_1(p)H_2(p) \Rightarrow \frac{Y_2(p)}{X_1(p)} = H_1(p)H_2(p)$$

$$\Rightarrow \frac{Y_2(p)}{X_1(p)} = \frac{Lp}{R+Lp} \frac{Rp}{\frac{1}{C}+Rp}$$

5.c) Ahora sustuimos por los valores numéricos. Ya que $x_1(t) = 1$, tenemos que $X_1(p) = \frac{1}{p}$

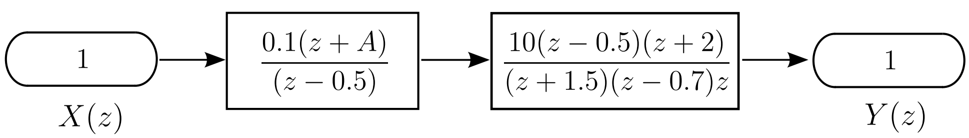
$$Y_2(t) = \frac{1\times10^{-3}p^2}{(1+1\times10^{-3}p)\,(1000+p)}\frac{1}{p} = \frac{1\times10^{-3}p}{1\times10^{-3}p^2+2p+1000}$$

$$= \frac{p}{p^2+2000+1\times10^6} = \frac{p+1000-1000}{(p+1000)^2} = \frac{1}{p+1000} - \frac{1000}{(p+1000)^2}$$

$$y_2(t) = \exp(-1000t) - 1000t\exp(-1000t)$$

Pregunta 6

Sea el siguiente sistema discreto



a) Calcule la función de transferencia resultante, sustituyendo A por algún valor tal que el sistema total sea estable.

b) Determine la respuesta al impulso del sistema.

c) Calcule el valor en régimen permanente de la salida si se aplica un escalón unitario en la entrada.

Solución

6.a) Tenemos un sistema donde las funciones de transferencia están conectadas en cascada. La función de transferencia total es el producto de las funciones

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0{,}1(z+A)}{(z-0{,}5)}\cdot\frac{10(z-0{,}5)(z+2)}{(z+1{,}5)(z-0{,}7)z} = \frac{(z+A)(z+2)}{(z+1{,}5)(z-0{,}7)z}$$

Si queremos que la función tal que el sistema sea estable, ocupamos que todos los polos tengan norma menor a 1. el $z+1{,}5$ lo hace inestable, si hacemos que A tome el valor de $A = 1{,}5$ cancelamos ese polo, y ya quedan polos de magnitud menor a 1. $\Rightarrow A = 1{,}5$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{z+2}{z(z-0{,}7)}$$

6.b) Multiplicamos y dividimos por z y separamos en fracciones parciales.

$$H(z) = \frac{z+2}{z(z-0{,}7)} = \frac{z}{z}\left[\frac{z+2}{z(z-0{,}7)}\right] = z\left[\frac{z+2}{z^2(z-0{,}7)}\right]$$

$$= z\left[-\frac{20}{7}\frac{1}{z^2} - \frac{270}{49}\frac{1}{z} + \frac{270}{49}\frac{1}{z-0{,}7}\right] = -\frac{20}{7}\frac{1}{z} - \frac{270}{49} + \frac{270}{49}\frac{z}{z-0{,}7} = H(z)$$

$$\Rightarrow h(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{-\frac{20}{7}\frac{1}{z} - \frac{270}{49} + \frac{270}{49}\frac{z}{z-0{,}7}\right\}$$

Ya lo tenemos en formato para fijarnos en la tabla.

$$h(k) = -\frac{20}{7}\delta(k-1) - \frac{270}{49}\delta(k) + \frac{270}{49}(0{,}7)^k$$

6.c) En regimen permantente, utilizamos el teorema del valor final. Si la entrada $x(k)$ es un escalon unitario, tenemos que $X(z) = z/(z-1)$

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z) = \lim_{z\to 1} H(z)X(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z-2}{z(z-7/10)}\cdot\frac{z}{z-1}$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{z+2}{z-7/10} = \frac{3}{1-7/10} = 10$$

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = 10$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores II Examen Parcial II Ciclo Lectivo del 2009 Tiempo: 3 horas

Este es un examen de desarrollo. Debe mostrar todos los pasos que conducen a la respuesta. Resuelva el examen utilizando bolígrafo azul o negro. No se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz. Trabaje ordenadamente. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de cálculo simbólico (CAS). Calculadoras científicas son permitidas.

Preguntas 1 y 2	Prof. Edison De Faria
Preguntas 3 y 4	Prof. Francisco Benavides
Preguntas 5 y 6	Prof. Aramis Pérez

1. Calcule $y(t)$ si $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+\displaystyle\int_0^t e^{2(t-u)}\frac{dy(u)}{du}\,du=e^{2t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$. (15 puntos)

2. Utilice la definición de transformada Z para demostrar que $\mathcal{Z}\{\cosh(na)\}=\dfrac{z(z-\cosh a)}{z^2-2z\cosh a+1}$

   (15 puntos)

3. Sea $u(t)$ la función escalón unitario: $u(t)=1$ si $t>0$, $u(t)=0$ si $t<0$.

a. Utilice las propiedades de la convolución y la transformada de Laplace para calcular $u(t)*u(t)*u(t)$. (10 puntos)

b. Extienda este resultado a la convolución aplicada n veces: $u(t)*u(t)*\cdots*u(t)$ n veces (5 puntos)

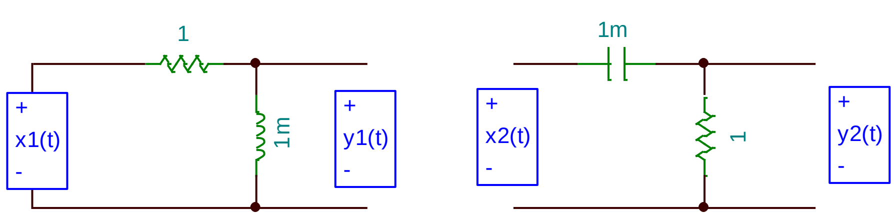
4. Considere la sucesión $x(n)$ cuya transformada Z unilateral está dada por $X(z)=2-3z^{-1}+4z^{-2}$, y la sucesión $y(n)$ cuya transformada Z unilateral es $Y(z)=\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}$.

a. Determine las sucesiones $x(n)$ y $y(n)$. (5 puntos)

b. Determine la Transformada Z de la convolución $x(n)*y(n)$. (5 puntos)

c. Determine la sucesión $r(n)=x(n)*y(n)$ (5 puntos)

5. Considere los siguientes sistemas (inicialmente en reposo) con resistencias de 1Ω, inductancia de $1\text{m}H$, capacitancia de $1\text{m}F$:

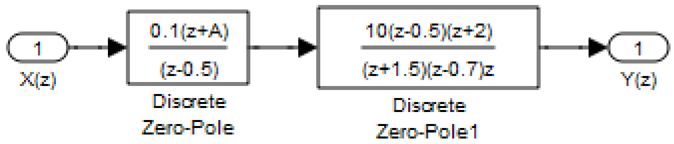


a) Realice un análisis de estabilidad para cada sistema. (8 puntos)

b) Si la salida del primer sistema se conecta a la entrada del segundo, determine la función de transferencia del sistema en cascada. (5 puntos)

c) Obtenga $y_2(t)$ si $x_1(t)$ es igual a 1 V. (7 puntos)

6. Se tiene el siguiente sistema discreto:



$$H_1(z) = \frac{0.1(z+A)}{(z-0.5)},$$

$$H_2(z) = \frac{10(z-0.5)(z+2)}{(z+1.5)(z-0.7)z}$$

a) Calcule la función de transferencia resultante, sustituyendo A por algún valor tal que el sistema total sea estable. (5 puntos)

b) Determine la respuesta al impulso del sistema. (7 puntos)

c) Calcule el valor en régimen permanente de la salida si se aplica un escalón unitario en la entrada. (8 puntos)

2.3. II Parcial I Ciclo 2010

Pregunta 1

Utilice transformada de Laplace para resolver

$$x(t) = 1 + 2\int_0^t \sin\left[2\left(t-u\right)\right]\frac{\mathrm{d}x(u)}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u \qquad \text{si } x(0) = 0$$

Solución[4]

Una correción. Es posible obtener la condición inicial $x(0)$. Evaluando en $t = 0$ la integral se hace nula, ya que va de 0 a 0.

$$x(0) = 1 + 2\int_0^0 \sin\left[2\left(0-u\right)\right]\frac{\mathrm{d}x(u)}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u = 1 \Rightarrow x(0) = 1$$

La condición inicial es $x(0) = 1$, no $x(0) = 0$ como dice el enunciado. Voy a hacer el problema con $x(0) = 1$

Aplicando transformada de Laplace, obtenemos

$$\begin{aligned}
X(p) = \frac{1}{p} + 2\left[\frac{2}{p^2+4}\left(pX(p)-1\right)\right] &= \frac{1}{p} + \frac{4pX(p)}{p^2+4} - \frac{4}{p^2+4} \\
\Rightarrow X(p)\left(1 - \frac{4p}{p^2+4}\right) &= \frac{1}{p} - \frac{4}{p^2+4} \\
\Rightarrow X(p)\left[\frac{p^2-4p+4}{p^2+4}\right] &= \frac{p^2-4p+4}{p\left(p^2+4\right)} \\
X(p) = \frac{1}{p} &\Rightarrow x(t) = 1
\end{aligned}$$

Pregunta 2

Considere el sistema discreto lineal en cascada:

$$X(z) \longrightarrow \boxed{\frac{z+2}{z+1/2}} \longrightarrow \boxed{\frac{0.5}{z-1/2}} \longrightarrow Y(z)$$

a. Analice la estabilidad del sistema completo.

b. Calcule, si existen, $y(0)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y(n)$ si la entrada $x(n) = u(n)$, el escalón unitario.

[4] Algo no me gusta de esta solución, $x(t) = 1$ cumple con la ecuación integral y con la condición inicial. Pero si sustituimos el $\sin(t-u)$ por una función cualquiera $f(t-u)$, el procedimiento sería diferente ya que la transformada de Laplace va a ser otra, pero la solución $x(t) = 1$ sigue cumpliendo con las condiciones.

Solución

La función de transferencia equivalente de funciones de transferencia en serie es el producto de las funciones.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z+2}{z+1/2}\,\frac{0{,}5}{z-1/2} = H(z)$$

El sistema completo es estable. Los polos de este sistema *discreto* se encuentran dentro del intervalo $(-1,1)$. Si la entrada es $x(n) = u(n)$, la transformada de la entrada es $X(z) = z/(z-1)$

$$Y(z) = \frac{1}{2}\,\frac{z+2}{(z-1/2)(z+1/2)}\,\frac{z}{z-1}$$

Con el teorema del valor inicial, podemos encontrar $y(0)$

$$y(0) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{2}\,\frac{z+2}{(z-1/2)(z+1/2)}\,\frac{z}{z-1} = 0$$

Con el teorema del valor final podemos encontrar $y(n)$ cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{2}\,\frac{z(z+2)}{(z-1/2)(z+1/2)} = 2$$

Pregunta 3

Un sistema tiene la siguiente función de transferencia $H(p) = \dfrac{10}{p(p+1)}$

a. Calcule la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema.

b. Si $u(t)$ es el escalón unitario y $h(t)$ la respuesta al impulso del sistema, calcule $h(t) * u(t)$

c. Explique brevemente el concepto de " sistema marginalmente estable ", basándose en los resultados de (a) y (b).

Solución

3.a)

$$H(p) = \frac{10}{p(p+1)} = \frac{10}{p} - \frac{10}{p+1} \Rightarrow h(t) = 10 - 10e^{-t}$$

3.b)

Para calcular $h(t) * u(t)$, calculemos la transformada de Laplace y luego obtenemos la transformada inversa.

$$\mathscr{L}\{h(t) * u(t)\} = \mathscr{L}\{h(t)\}\,\mathscr{L}\{u(t)\} = \left(\frac{10}{p} - \frac{10}{p+1}\right)\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{10}{p^2} - \frac{10}{p(p+1)}$$

$$= \frac{10}{p^2} - \frac{10}{p} + \frac{10}{p+1} \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{10}{p^2} - \frac{10}{p} + \frac{10}{p+1}\right\} = 10t - 10 + 10e^{-t} = h(t) * u(t)$$

Pregunta 4

Suponga que $X(z) = \mathcal{Z}\left\{x(n)\right\} = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$

a. Calcule $\sum$ Residuos $\left(X(z)z^{-1}, \text{polos}\right)$ y verifique que cumple el teorema del valor inicial. *b*. Determine $x(n)$ para $n \geq 1$.

Solución

$$x(0) = \sum \operatorname{Res}\left[z^{-1}X(z)\right]$$

Los polos de $z^{-1}X(z)$ son $0, 1, 2$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(z-1)(z-2)}, 0\right] = \lim_{z\to 0} z\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(z-1)(z-2)}, 1\right] = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = -1$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(z-1)(z-2)}, 2\right] = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2}$$

$$x(0) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$$

Con el teorema del valor inicial

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{(z-1)(z-2)} = 0$$

Da 0 por ambas rutas.

Hallemos $x(n)$ aplicando residuos. Ya que tenemos el valor de $x(0)$, consideremos los casos de $n \geq 1$

$$x(n) = \sum \operatorname{Res}\left[z^{n-1}X(z)\right]$$

$$z^{n-1}X(z) = \frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)}$$

Ya que $n \geq 1$, el 0 ya no es un polo, ya los polos son solo 1 y 2

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)}, 1\right] = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)} = \frac{(1)^{k-1}}{(-1)} = -1$$

$$\text{Res}\left[\frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)},1\right]=\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)}=2^{n-1}$$

$$x(n)=-1+2^{n-1}\ ;\ n\geq 1$$

Pregunta 5

Un sistema discreto tiene una respuesta al impulso $h(k)=(-3)^k$. Si se aplica una señal de entrada descrita por $x(k)=k(-2)^{k+3}$, determine la salida del sistema y justifique si este sistema es estable o no.

Solución

$$h(k)=(-3)^k\Rightarrow H(z)=\frac{z}{z+3}$$
$$x(k)=k(-2)^{k+3}=16k(-2)^{k-1}\Rightarrow X(z)=\frac{16z}{(z+2)^2}$$

El sistema es inestable, el polo de la función de transferencia $H(z)$ es -3. En un sistema *discreto*, si hay algún polo cuyo valor absoluto es mayor a 1, el sistema es inestable.

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{16z^2}{(z+3)(z+2)^2}$$
$$y(k)=\sum\text{Res}\left[z^{k-1}Y(z)\right]=\sum\text{Res}\left[\frac{16z^{k+1}}{(z+3)(z+2)^2}\right]$$

$$\text{Res}\left[\frac{16z^{k+1}}{(z+3)(z+2)^2},-3\right]=\lim_{z\to -3}(z+3)\frac{16z^{k+1}}{(z+3)(z+2)^2}=16(-3)^{k+1}$$

$$\text{Res}\left[\frac{16z^{k+1}}{(z+3)(z+2)^2},-2\right]=\lim_{z\to -2}(z+2)\frac{1}{(2-1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{16z^{k+1}}{(z+3)(z+2)^2}\right]=16(3+k)(-2)^k$$
$$\Rightarrow y(k)=16(-3)^{k+1}+16(3+k)(-2)^k$$

Pregunta 6

Los resistores se utilizan en los circuitos para limitar el valor de la corriente o para fijar el valor de la tensión. Para determinar el valor de la resistencia se utiliza un código de colores donde la primera línea representa el dígito de las decenas, la segunda línea representa el dígito de las unidades y la tercera línea corresponde a un multiplicador que corresponde a una potencia de 10. Los valores de cada color son:

Negro	Marrón	Rojo	Anaranjado	Amarillo	Verde	Azul	Violeta	Gris	Blanco
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ejemplo: Tenemos una resistencia con los colores verde, amarillo, rojo. Registramos el valor de la primera línea (verde): 5. *Registramos el valor de la segunda línea (amarillo):* 4. *Registramos el valor de la tercera línea (rojo):* $\times 100$. *Unimos los valores de las primeras dos líneas y multiplicamos por el valor de la tercera línea:* $54 \times 100 = 5400$ *y este es el valor de la resistencia expresada en Ohmios.*

A partir de esta información, determine la combinación de colores para la resistencia R_2 del circuito abajo, tal que la función de transferencia del sistema sea igual a $H(s) = \dfrac{p}{p^2 + 358{,}14p + 178{,}57}$

Considere el voltaje de la fuente como la entrada y el voltaje en R_2 como la salida. Las condiciones iniciales son cero.

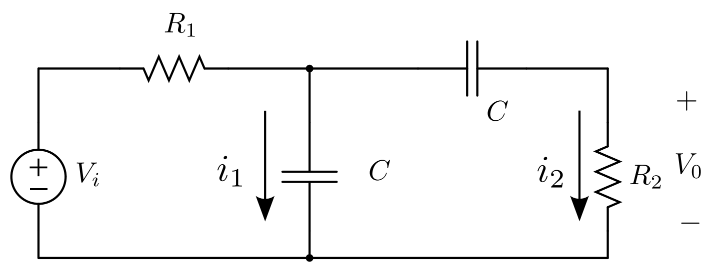


Figura 2.1: Pregunta 6

Con $R_1 = 1$ MΩ, $C_1 = C_2 = 1$ μF

Solución

Hagamos el problema algebraico. Las capacitancias son C, R_1 la resistencia de 6 MΩ y R_2 es la resistencia a determinar.

Aplicamos la regla de Kirchhoff al circuito de la figura 2.1 y obtenemos

$$-v_i(t) + (i_1 + i_2)R_1 + \frac{1}{C}\int_0^t i_2(\xi)\, \mathrm{d}\xi + i_2 R_2 = 0$$

$$-\frac{1}{C}\int_0^t i_1(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \frac{1}{C}\int_0^t i_2(\xi)\, \mathrm{d}\xi + i_2 R_2$$

Aplicamos transformada de Laplace

$$-V_i + (I_1 + I_2)\, R_1 + \frac{I_2}{Cp} + I_2 R_2 = 0$$

$$-\frac{I_1}{Cp} + \frac{I_2}{Cp} + I_2 R_2 = 0 \Rightarrow I_1 = I_2\,(1 + R_2 C p)$$

$$\Rightarrow [I_2 (1 + R_2Cp) + I_2] R_1 + I_2 \left(\frac{1}{Cp} + R_2\right) = V_i$$

$$\Rightarrow \frac{I_2}{V_i} = \frac{p}{R_1R_2Cp^2 + (2R_1 + R_2) p + \dfrac{1}{C}}$$

El problema pide que la señal de salida sea la diferencia de potencial en el resistor R_2. Hacemos uso de la ley de Ohm $V = IR$ para obtener $V_o(p)$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R_2p}{R_1R_2Cp^2 + (2R_1 + R_2) p + \dfrac{1}{C}} = \frac{p}{R_1Cp^2 + \left(2\dfrac{R_1}{R_2} + 1\right) p + \dfrac{1}{R_2C}}$$

Ya se tiene la función de transferencia en el formato que pide el examen. Evaluamos con $R_1 = 6$ MΩ, $C = 1$ μF. El coeficiente de p^2 es 1. De aquí se puede usar cualquiera de los coeficientes de p^0 o p^1 para obtener R_2

$$2\left(\frac{1 \times 10^6}{R_2} + 1\right) = 358,14 \qquad\qquad \frac{1}{R_2(1 \times 10^{-6})} = 178,57$$

De cualquiera de las ecuaciones, al despejar R_2 se obtiene que $R_2 = 5600$ Ω. El código de colores es Verde-Azul-Rojo.

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

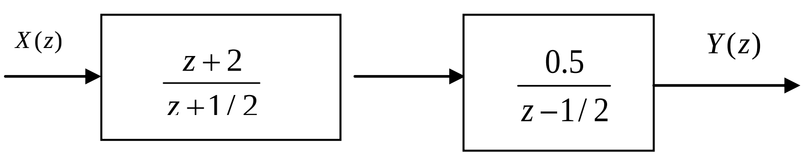
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores II Examen Parcial I Ciclo Lectivo del 2010 Tiempo: 3 horas

Este es un examen de desarrollo. Debe mostrar todos los pasos que conducen a la respuesta. Resuelva el examen utilizando bolígrafo azul o negro. No se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz. Trabaje ordenadamente. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de cálculo simbólico (CAS). Calculadoras científicas son permitidas.

Preguntas 1 y 2	Prof. Edison De Faria
Preguntas 3 y 4	Prof. Francisco Benavides
Preguntas 5 y 6	Prof. Aramis Pérez

1. Utilice transformada de Laplace para resolver $x(t) = 1 + 2\int_0^t \left(\text{sen}\left[2(t-u)\right]\right).\dfrac{dx(u)}{du}\,du$ si $x(0) = 0$. (Valor: 15 puntos)
2. Considere el sistema discreto lineal en cascada:



   a. Analice la estabilidad del sistema completo (Valor: 5 puntos)
   b. Calcule, si existen, $y(0)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y(n)$ si la entrada $x(n) = u(n)$, el escalón unitario (Valor: 10 puntos)

3. Un sistema tiene la siguiente función de transferencia $H(s) = \dfrac{10}{s(s+1)}$.
   a. Calcule la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema. (Valor: 5 puntos)
   b. Si $u(t)$ es el escalón unitario y $h(t)$ la respuesta al impulso del sistema, calcule $h(t) * u(t)$ (Valor: 10 puntos)
   c. Explique brevemente el concepto de "sistema marginalmente estable", basándose en los resultados de (a) y (b). (Valor: 5 puntos)

4. Suponga que $X(z) = Z\left\{x(n)\right\} = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$.
   a. Calcule $\sum \text{Residuos}\left(X(z)\,z^{-1}, \text{polos}\right)$ y verifique que cumple el teorema del valor inicial. (Valor: 10 puntos)
   b. Determine $x(n)$ para $n \geq 1$. (Valor: 5 puntos)

5. Un sistema discreto tiene una respuesta al impulso $h(k) = (-3)^k$. Si se aplica una señal de entrada descrita por $x(k) = k(-2)^{k+3}$, determine la salida del sistema y justifique si este sistema es estable o no. (Valor: 15 puntos)

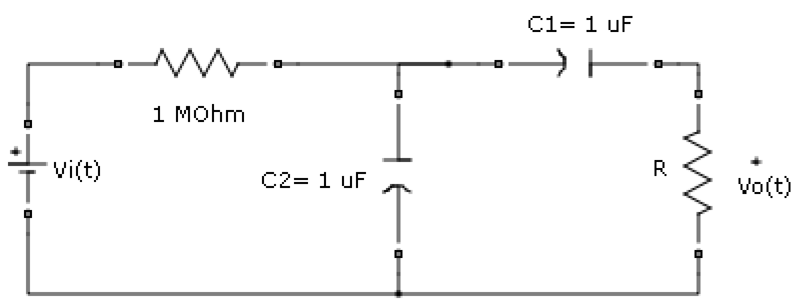
6. Los resistores se utilizan en los circuitos para limitar el valor de la corriente o para fijar el valor de la tensión. Para determinar el valor de la resistencia se utiliza un código de colores donde la primera línea representa el dígito de las decenas, la segunda línea representa el dígito de las unidades y la tercera línea corresponde a un multiplicador que corresponde a una potencia de 10. Los valores de cada color son:

Negro	Marrón	Rojo	Anaranjado	Amarillo	Verde	Azul	Violeta	Gris	Blanco
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ejemplo: Tenemos una resistencia con los colores verde, amarillo, rojo. Registramos el valor de la primera línea (verde): 5. Registramos el valor de la segunda línea (amarillo): 4. Registramos el valor de la tercera línea (rojo): $\times 100$. *Unimos los valores de las primeras dos líneas y multiplicamos por el valor de la tercera línea:* $54 \times 100 = 5400\,\Omega$ *y este es el valor de la resistencia expresada en Ohmios.*

A partir de esta información, determine la combinación de colores para la resistencia R del circuito abajo, tal que la función de transferencia del sistema sea igual a $H(s) = \dfrac{s}{s^2 + 358.14s + 178.57}$.

Considere el voltaje de la fuente como la entrada y el voltaje en R como la salida. Las condiciones iniciales son cero. (Valor: 20 puntos)



FORROLARIO: $\operatorname{Res}\big(f(z), a\big) = \dfrac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} \dfrac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \Big[(z-a)^k \; f(z) \Big]$ si $z = a$ es polo de orden k.

2.4. II Parcial II Ciclo 2010

Pregunta 1

Sea un sistema cuya función de transferencia es $H(p) = \dfrac{p}{p^2 + kp + 4}$

a) Halle todos los valores de k para que el sistema sea estable. Justifique detalladamente su respuesta.

b) Encuentre la salida $y(t)$ si al sistema se le aplica una entrada $x(t) = \delta'(t) + \delta(t)$, utilizando $k = 4$ para $H(p)$.

Solución

Las polos de la función de transferencia se encuentran resolviendo

$$p^2 + kp + 4 = 0 \Rightarrow p = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 16}}{2}$$

Voy a obviar el 2 que nos interesa el signo. Primero consideremos el caso donde hay 2 raices reales distintas. $\Rightarrow$ El discriminante es mayor a 0.

$$k^2 - 16 > 0 \Rightarrow |k| > 4$$

Consideremos el caso donde k es positivo, $k > 4$ Tomando la parte positiva de la raíz

$$k^2 > k^2 - 16 \Rightarrow k = \sqrt{k^2} > \sqrt{k^2 - 16} \Rightarrow 0 > -k + \sqrt{k^2 - 16}$$

Para $k > 4$, sus raices tienen signo negativo, el sistema es estable para $k > 4$. Ahora para $k < 4$. Si $k < 0 \Rightarrow -k > 0$. Por otro lado, $\sqrt{k^2 - 16} > 0$

$$-k + \sqrt{k^2 - 16} > 0$$

Los polos son positivos, el sistema es inestable con $k < 4$
Ahora el caso donde el discriminante es 0.

$$k^2 - 16 = 0 \Rightarrow k = \pm 4$$

Para $k = 4$, tenemos que la raíz es -2. Es negativo, por lo tanto es estable. Para $k = -4$, tenemos que la raíz es 2. Es positivo, por lo tanto es inestable.

Para el caso que $|k| < 4$, vamos a tener que el discriminante es menor a 0. Las raices del polinomio son

$$p = \frac{-k + j\sqrt{16 - k^2}}{2}$$

Ya solo dependen del signo de k, para $0 < k < 4$, la parte real tiene signo negativo, lo cual es estable. Para $-4 < k < 0$, la parte real tiene signo positivo, lo cual es inestable. Si hacemos que $k = 0$, tenemos

2 polos de grado 1 con la parte real igual a 0. Eso es marginalmente estable.

Pregunta 2

Demuestre que $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z^2+a^2}\right\} = a^{k-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$

Solución

$$\frac{z}{z^2+a^2} = z\left(\frac{1}{z^2+a^2}\right) = z\left(-\frac{1}{2aj(z+ja)} + \frac{1}{2aj(z-aj)}\right)$$

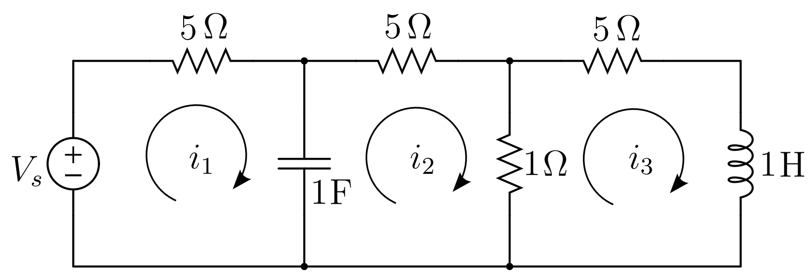
$$\Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\left\{-\frac{z}{2aj(z+ja)} + \frac{z}{2aj(z-aj)}\right\} = \frac{1}{2aj}\left[\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{-z}{z-ja}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+ja}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2aj}\left[-(-ja)^k + (ja)^k\right] = a^{k-1}\left(\frac{-\exp\left(\frac{j\pi k}{2}\right) + \exp\left(\frac{j\pi k}{2}\right)}{2j}\right) = a^{k-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z^2+a^2}\right\} = a^{k-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

Pregunta 3

Para el siguiente sistema encuentre la función de transferencia $H(p)$. Considere la corriente que pasa por el inductor como la salida.



Solución

Aplicamos ley de Faraday sobre el circuito, utilizamos corrientes de mallas. i_1 para la malla izquierda, i_2 para la central e i_3 para la malla derecha.

Obtenemos 3 ecuaciones.

$$-V_s(t) + 5i_1 + \int_0^t (i_1(\xi) - i_2(\xi))\, \mathrm{d}\xi = 0$$

$$\int_0^t (i_2(\xi) - i_1(\xi))\, \mathrm{d}\xi + 5i_2 + (i_2 - i_3) = 0$$

$$(i_3 - i_2) + 5i_3 + \frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} = 0$$

Transformamos con Laplace con las condiciones iniciales nulas.

$$-V_s(p) + 5I_1(p) + \frac{I_1 - I_2}{p} = 0$$

$$\frac{I_2(p) - I_1(p)}{p} + 5I_2(p) + (I_2(p) - I_3(p)) = 0$$

$$(I_3(p) - I_2(p)) + 5I_3(p) + pI_3(p) = 0$$

Acomodamos en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 5 + \frac{1}{p} & \frac{-1}{p} & 0 \\ \frac{-1}{p} & 6 + \frac{1}{p} & -1 \\ 0 & -1 & 6 + p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_s(p) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Usamos la regla de Cramer para obtener $I_3(p)$.

$$\mathrm{Det} \begin{vmatrix} 5 + \frac{1}{p} & \frac{-1}{p} & 0 \\ \frac{-1}{p} & 6 + \frac{1}{p} & -1 \\ 0 & -1 & 6 + p \end{vmatrix} = \left(5 + \frac{1}{p}\right)\left[\left(6 + \frac{1}{p}\right)(6 + p) - 1\right] - \frac{6 + p}{p^2}$$

Simplificando un poco

$$\left(5 + \frac{1}{p}\right)\left[\left(6 + \frac{1}{p}\right)(6 + p) - 1\right] - \frac{6 + p}{p^2} = 186 + \frac{65}{p} + 30p$$

Ahora sustituimos en la tercera columna para obtener la solución de $I_3(p)$

$$\mathrm{Det} \begin{vmatrix} 5 + \frac{1}{p} & \frac{-1}{p} & V_s(p) \\ \frac{-1}{p} & 6 + \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{V_s(p)}{p}$$

La solución para $I_3(p)$ es

$$I_3(p) = \frac{V_s(p)/p}{186 + \frac{65}{p} + 30p}$$

Por lo tanto, la función de transferencia es

$$\frac{I_3(p)}{V_s(p)} = \frac{1}{30p^2 + 186p + 65}$$

Pregunta 4

Sea $H(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2z + 1}$ la función de transferencia de un sistema discreto.

a) Obtenga la respuesta al impulso $h(t)$.

b) Calcule el valor de la salida en régimen permanente si se aplica un escalón unitario en la entrada.

Solución

4.a)

$$H(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 1} = \frac{1}{(z+1)^2} = z\frac{1}{z(z+1)^2} = z\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{z+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{z}{(z+1)^2} - \frac{z}{z+1} \Rightarrow h(k) = \delta(k) - k(-1)^{k-1} - (-1)^k$$

4.b) Al aplicar un escalón unitario, se obtiene de salida

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z}{z-1}\frac{1}{z^2 + 2z + 1} = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$$

Los polos son de magnitud 1 y no se puede aplicar el teorema del valor final. Además, el polo de $z = 1$ es de orden 2. El sistema no es estable y va a diverger. Verifiquemos calculando explicitamente la transformada inversa. Aplicando fracciones parciales separamos la expresión a

$$Y(z) = X(z)H(z) = z\left[\frac{1}{4}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{z+1}\right] = \frac{1}{4}\frac{z}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{z}{(z+1)^2} - \frac{1}{4}\frac{z}{z+1}$$

Con el formato obtenido, ya se puede comparar con tablas y obtener $y(k)$

$$y(k) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(-1)^{k-1}k + \frac{(-1)^k}{4}$$

Para $k > 0$. El sistema va a diverger para $k \to \infty$.

Pregunta 5

Un sistema discreto se modela con la siguiente ecuación en diferencias.

$$y(k+2) + 5y(k+1) + 6y(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Con $y(0) = 0,\ y(1) = 1$.

a) Determine la solución de la ecuación en diferencias dada.

b) Utilice el teorema del valor final para calcular $\lim\limits_{k\to\infty} y(k)$, o bien explique caso esto no fuera posible.

Solución

5.a)

$$y(k+2)+5y(k+1)+6y(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\Rightarrow z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)+5zY(z)-5zy(0)+6Y(z)=\frac{z}{z-1/2}$$

$$\Rightarrow \left(z^2+5z+6\right)Y(z)=\frac{z}{z-1/2}+z$$

$$z^2+5z+6=(z+3)(z+2)\Rightarrow Y(z)=z\left[\frac{1}{(z-1/2)(z+2)(z+3)}+\frac{1}{(z+2)(z+3)}\right]$$

$$=z\left[\frac{z+1/2}{(z-1/2)(z+2)(z+3)}\right]=z\left[\frac{3}{5(z+2)}-\frac{5}{7(z+3)}+\frac{4}{35(z-1/2)}\right]$$

Distribuyendo z, ya podemos fijarnos en la tabla de transformadas para obtener la inversa

$$y(k)=\frac{3}{5}(-2)^k-\frac{5}{7}(-3)^k+\frac{4}{35}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

5.b)

El límite de $y(k\to\infty)$ no converge, los términos divergen oscilando.

Pregunta 6

Calcule: $a)\mathcal{L}\left\{\frac{1-\cosh(at)}{t}\right\}$, $\quad b)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p^2+a^2}{(p-b)^2}\right)\right\}$

Solución

6.a)

Usamos la propiedad $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_p^\infty F(\xi)\,\mathrm{d}\xi$; donde $f(t)=1-\cosh(at)$

$$\mathcal{L}\left\{1-\cosh(at)\right\}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2-a^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{1-\cosh(at)}{t}\right\}=\lim_{R\to\infty}\int_p^R \frac{1}{\xi}-\frac{\xi}{\xi^2-a^2}\,\mathrm{d}\xi=\lim_{R\to\infty}\ln(\xi)-\frac{1}{2}\ln(\xi^2-a^2)\Big|_p^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} \ln\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{p^2-a^2}}{p}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{p^2-a^2}}{p}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{1-\cosh(at)}{t}\right\} = \ln\left(\frac{\sqrt{p^2-a^2}}{p}\right)$$

6.b)

Usamos la propiedad $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{\mathrm{d}F(p)}{\mathrm{d}p}$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\ln\left(\frac{p^2+a^2}{(p-b)^2}\right)\right] = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\ln(p^2+a^2) - 2\ln(p-b)\right] = -\frac{p}{p^2+a^2} + \frac{1}{p-b}$$

$$f(t) = \frac{1}{t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{p}{p^2+a^2} + \frac{1}{p-b}\right\} = \frac{-\cos(at)+e^{bt}}{t}$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores II Examen Parcial II Ciclo Lectivo del 2010 Tiempo: 3 horas

Muestre todos los pasos que conducen a la respuesta. Resuelva el examen utilizando bolígrafo azul o negro. No se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de cálculo simbólico (CAS).

Preguntas 1 y 2: Prof. Jhonnny Cascante; 3 y 4: Prof. Aramis Pérez; 5 y 6: Edison De Faria

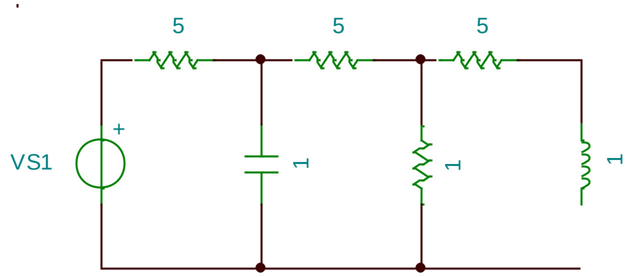
1. Sea un sistema cuya función de transferencia es $H(s)=\dfrac{s}{s^2+ks+4}$.

a) Halle todos los valores de "k" para que el sistema sea estable. Justifique detalladamente su respuesta. (10 puntos)

b) Encuentre la salida y(t) si al sistema se le aplica una entrada $x(t)=\delta'(t)+\delta(t)$, utilizando k = 4 para H(s). (10 puntos)

2. Demuestre que $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{z^2+a^2}\right\}=a^{k-1}\operatorname{sen}\dfrac{k\pi}{2}$. (15 puntos)

3. Para el siguiente sistema encuentre la función de transferencia $H(s)$. Considere la corriente que pasa por el inductor como la salida. (20 puntos)



4. Sea $H(z)=\dfrac{1}{z^2+2z+1}$ la función de transferencia de un sistema discreto.

a) Obtenga la respuesta al impulso $h(t)$. (5 puntos)

b) Calcule el valor de la salida en régimen permanente si se aplica un escalón unitario en la entrada. (10 puntos)

5. Un sistema discreto se modela con la siguiente ecuación en diferencias.

$$y(k+2)+5y(k+1)+6y(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k,\ y(0)=0,\ y(1)=1.$$

a) Determine la solución de la ecuación en diferencias dada. (10 puntos)

b) Utilice el teorema del valor final para calcular $\lim_{k\to\infty} y(k)$, o bien explique caso esto no fuera posible. (5 puntos)

6. Calcule: a) $\mathfrak{L}\left\{\dfrac{1-\cosh(at)}{t}\right\}$ (8 puntos) b) $\mathfrak{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{s^2+a^2}{(s-b)^2}\right\}$ (7 puntos)

2.5. II Parcial II Ciclo 2011

Pregunta 1

Calcule la transformada $\mathcal{Z}$ inversa de $X(z) = \dfrac{\pi}{z(z+2)^2}$

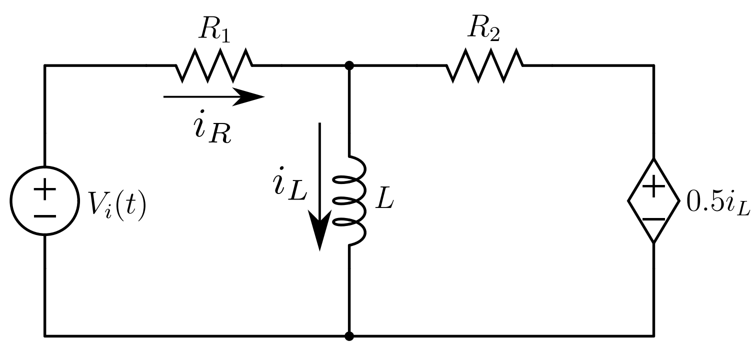
Solución

$$X(z) = \frac{\pi}{z(z+2)^2} = \pi z\left[\frac{1}{z^2(z+2)^2}\right] = \pi z\left[\frac{1}{4z^2} - \frac{1}{4z} + \frac{1}{4(z+2)^2} + \frac{1}{4(z+2)}\right]$$

$$= \pi\left[\frac{1}{4z} - \frac{1}{4} + \frac{z}{4(z+2)^2} + \frac{z}{4(z+2)}\right] \Rightarrow x(k) = \pi\left[-\frac{\delta(k)}{4} + \frac{\delta(k-1)}{4} + \frac{k}{4}(-2)^{k-1} + \frac{(-2)^k}{4}\right]$$

Pregunta 2

Considere el siguiente circuito:



a) Determine la función de transferencia (en términos de una ganancia, polos y ceros) si se considera el voltaje de la fuente independiente como señal de entrada y la corriente que pasa por el inductor como señal de salida.

b) Si $R_1 = 1\Omega, R_2 = 10\Omega, L = 1$ mH, y $V_i(t) = 0{,}5$ V. Determine la corriente que pasa por el inductor.

Solución

La corriente que entra por la derecha debe ser $i_L - i_R$. Aplicamos las reglas de Kirchhoff para obtener las ecuaciónes del circuito. Voy a cambiar la ganancia de 0.5 por A

$$-V_s(t) + R_1 i_R + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$-Ai_L + R_2\left(i_L - i_R\right) + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 0$$

Aplicamos transformada de Laplace y reordenamos un poco

$$-V_s(p) + R_1 I_R + LpI_L = 0$$

$$-AI_L + R_2 I_L + LpI_L = R_2 I_R$$

De la primera ecuación se despeja I_R para sustituir en la segunda

$$I_R = \frac{V_s(p) - LpI_L}{R_1}$$

$$\Rightarrow I_L\left(R_2 + Lp - A\right) = R_2\left(\frac{V_s(p) - LpI_L}{R_1}\right) \Rightarrow I_L\left(Lp\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right) + R_2 - A\right) = \frac{R_2}{R_1}V_s(p)$$

$$\frac{I_l}{V_s(p)} = \frac{R_2}{R_1}\frac{1}{\left(Lp\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right) + R_2 - A\right)}$$

6.b) Para encontrar la corriente, separamos en fracciones parciales. Voy a reacomodar para facilidad.

$$\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{\left(Lp\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right) + R_2 - A\right)} = \frac{R_2}{R_1 L\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)}\frac{1}{\left(p + \frac{R_2 - A}{L\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)}\right)}$$

Para simplificar, sea

$$B = \frac{R_2 - A}{L\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Ahora, si se una diferencia de potencial constante de entrada $v_s(t) = K$, la entrada en el dominio de p es $V_p = K/p$. Reemplazando datos, tenemos

$$I_3(p) = \frac{C}{p\left(p+B\right)}$$

Donde

$$C = \frac{R_2 K}{R_1 L\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Al separar en fracciones obtenemos

$$\frac{C}{p\,(p+B)} = \frac{C}{B}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+B}\right) \Rightarrow i_L(t) = \frac{C}{B}\left(1 - e^{-Bt}\right)$$

Reemplazando en los valores para C/B se obtiene

$$i_L(t) = \frac{R_2 K}{R_1\,(R_2 - A)}\left(1 - e^{-Bt}\right)$$

Como es de esperarse, el valor de la corriente en el infinito no depende de la inductancia ya que no hay cambios en la corriente, el inductor no aporta en el valor de la corriente estacionaria. Sustituyendo datos con $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $L = 1$ mH, $K = 0{,}5$ V y $A = 0{,}5\ \Omega$

$$i_L = 0{,}526316\left(1 - e^{-863{,}636t}\right)$$

Pregunta 3

Determine la transformada inversa de Laplace de:

a) $F(p) = \ln(1 + ap^2)$

b) $G(p) = \dfrac{cp+d}{(p-a)^2 + b^2}$, a, b, c, d son constantes reales.

Solución

3.a)

$$\mathscr{L}\{tf(t)\} = -\frac{\mathrm{d}F(p)}{\mathrm{d}p} = -\frac{2ap}{ap^2+1} = -\frac{2p}{p^2 + \frac{1}{a}} \Rightarrow tf(t) = -2\cos\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = -\frac{2}{t}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right)$$

3.b)

$$G(p) = \frac{cp+d}{(p-a)^2+b^2} = \frac{c(p-a+a)+d}{(p-a)^2+b^2} = \frac{c(p-a)}{(p-a)^2+b^2} + \frac{ac+d}{(p-a)^2+b^2}$$

$$= \frac{c(p-a)}{(p-a)^2+b^2} + \frac{ac+d}{b}\frac{b}{(p-a)^2+b^2} \Rightarrow g(t) = c\cos(bt)e^{at} + \frac{ac+d}{b}\sin(bt)e^{at}$$

Pregunta 4

Un sistema discreto, ante una entrada escalón unitario $u(k)$, presenta una salida $y(k)$ dada por la siguiente expresión:

$$y(k)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad k<2 \\ 1 & \text{si} \quad 2\leq k<4 \\ 2 & \text{si} \quad 4\leq k<6 \\ 1 & \text{si} \quad 6\leq k<8 \\ 0 & \text{si} \quad k\geq 8 \end{cases}$$

Para este sistema determine:

a) Función de transferencia.

b) Estabilidad (con justificación).

c) Ecuación en diferencias que modela el sistema, con la relación entre una secuencia entrada $x(k)$ y la salida $y(k)$

Solución

$$\begin{aligned} y(k) &= \delta(t-2)+\delta(t-3)+2\delta(t-4)+2\delta(t-5)+\delta(t-6)+\delta(t-7) \\ \Rightarrow Y(z) &= \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{2}{z^4}+\frac{2}{z^5}+\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^7} \\ x(k)=u(k) &\Rightarrow X(z)=\frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{2}{z^4}+\frac{2}{z^5}+\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^7}\right)}{\left(\frac{z}{z-1}\right)}$$
$$=(z-1)\left(\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\frac{2}{z^5}+\frac{2}{z^6}+\frac{1}{z^7}+\frac{1}{z^8}\right)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^6}-\frac{1}{z^8}=\frac{-1-z^2+z^4+z^6}{z^8}$$

Es estable. El polo de la función es 0. Para sistemas *discretos*, si la magnitud de polos son menores a 1, el sistema es estable.

Pregunta 5

Muestre que $\mathscr{L}^{-1}\left\{\arctan\left(\frac{2}{p^2}\right)\right\}=\frac{2\sin(t)\sinh(t)}{t}$

Solución

Reescribamos la ecuación del problema, un poco trivial este paso pero voy a iniciar desde aquí, en reversa.

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\arctan\left(\frac{2}{p^2}\right)\right\}=\frac{2\sin(t)\sinh(t)}{t}\Rightarrow\mathscr{L}\left\{\frac{2\sin(t)\sinh(t)}{t}\right\}=\arctan\left(\frac{2}{p^2}\right)$$

Usemos la propiedad 6 del formulario de transformadas de Laplace: $t^n f(t) = (-1)^n F^n(p)$

Entonces, si multiplicamos por t a $2\sin(t)\sinh(t)/t$ y le sacamos la transformada, sabemos que esa transformada es igual a la derivada de $\arctan\left(2/p^2\right)$ respecto a p

$$\mathscr{L}\left\{t\cdot\frac{2\sin(t)\sinh(t)}{t}\right\} = \mathscr{L}\left\{2\sin(t)\sinh(t)\right\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\arctan\left(\frac{2}{p^2}\right) = \frac{4p}{p^4+4}$$

Ahora puedo obtener $\mathscr{L}\left\{2\sin(t)\sinh(t)\right\}$ por aparte y ver que es igual a la derivada del arctan. Usemos el hecho que $\sin(t) = \left(e^{jt} - e^{-jt}\right)/2j$ y usemos la propiedad 2 de las tablas de transformadas de Laplace.

$$\mathscr{L}\left\{2\sin(t)\sinh(t)\right\} = \frac{1}{j}\mathscr{L}\left\{e^{jt}\sinh(t)\right\} - \frac{1}{j}\mathscr{L}\left\{e^{-jt}\sinh(t)\right\}$$

Ahora por la tabla de transformada, usando la propiedad 17, ya se cuanto valen las transformadas de $e^{\pm jt}\sinh(t)$

$$\frac{1}{j}\mathscr{L}\left\{e^{jt}\sinh(t)\right\} - \frac{1}{j}\mathscr{L}\left\{e^{-jt}\sinh(t)\right\} = \frac{1}{j}\left[\frac{1}{(p-j)^2-1} - \frac{1}{(p+j)^2-1}\right]$$

Ahora juntando todo

$$\frac{1}{j}\left[\frac{1}{(p-j)^2-1} - \frac{1}{(p+j)^2-1}\right] = \frac{1}{j}\left[\frac{(p+j)^2-1-(p-j)^2+1}{(p-j)^2(p+j)^2-(p-j)^2-(p+j)^2+1}\right] = \frac{1}{j}\frac{4jp}{p^4+4} = \frac{4p}{p^4+4}$$

Lo cual da igual que la derivada de p y pruebo que los 2 lados de la ecuación sí dan lo mismo, y podemos ir en reversa en todo el procedimiento hasta obtener la ecuación del enunciado original y con esto queda mostrado.[5]

Pregunta 6

Si $x(k)$ es una sucesión periódica con periodo T, es decir, $x(k+T) = x(k)$, demuestre (utilizando la definición de transformada zeta) que $\mathcal{Z}\left\{x(k)\right\} = \dfrac{1}{1-z^{-T}}\displaystyle\sum_{k=0}^{T-1}\frac{x(k)}{z^k}$, si $|z| > 1$

Solución

$$\mathcal{Z}\left\{x(k)\right\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x(k)}{z^k}$$

$$\frac{x(0)}{z^0} + \frac{x(1)}{z^1} + \frac{x(2)}{z^2}\cdots + \frac{x(T-1)}{z^{T-1}} + \frac{x(0)}{z^T} + \frac{x(1)}{z^{T+1}}\cdots + \frac{x(T-1)}{z^{2T-1}} + \frac{x(0)}{z^{2T}} + \frac{x(1)}{z^{2T+1}} + \cdots$$

[5]Este procedimiento ya supone que uno conoce la respuesta de antemano... No es muy elegante, pero funciona.

$$= \frac{1}{z^{0T}}\left[\frac{x(0)}{z^0} + \cdots + \frac{x(T-1)}{Z^{T-1}}\right] + \frac{1}{z^{1T}}\left[\frac{x(0)}{z^0} + \cdots + \frac{x(T-1)}{Z^{T-1}}\right] + \frac{1}{z^{2T}}\left[\frac{x(0)}{z^0} + \cdots \frac{x(T-1)}{Z^{T-1}}\right] + \cdots$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{T-1}\frac{x(m)}{z^{m+\ell T}} = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{z^{\ell T}}\right)\left(\sum_{m=0}^{T-1}\frac{x(m)}{z^m}\right) = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(z^{-T}\right)^{\ell}\right)\left(\sum_{m=0}^{T-1}\frac{x(m)}{z^m}\right) = \frac{1}{1-z^{-T}}\sum_{m=0}^{T-1}\frac{x(m)}{z^m}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-z^{-T}}\sum_{m=0}^{T-1}\frac{x(m)}{z^m}$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

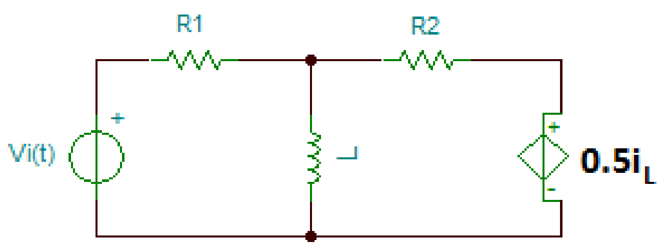
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores II Examen Parcial II Ciclo Lectivo del 2011 Tiempo: 3 horas

Este es un examen de desarrollo. Debe mostrar todos los pasos que conducen a la respuesta. Resuelva el examen utilizando bolígrafo azul o negro. No se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz. Trabaje ordenadamente. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de cálculo simbólico (CAS). Calculadoras científicas son permitidas. Preguntas 1 y 2: Prof. Aramis Pérez; 3 y 4: Prof. Marvin Coto; 5 y 6 Prof. Edison De Faria

1. Calcule la transformada Z inversa de $X(z) = \dfrac{\pi}{z(z+2)^2}$ (15 puntos)

2. Considere el siguiente circuito:



   a) Determine la función de transferencia (en términos de una ganancia, polos y ceros) si se considera el voltaje de la fuente independiente como señal de entrada y la corriente que pasa por el inductor como señal de salida. (10 puntos)
   b) Si $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $L = 1$ mH, y $V_i(t) = 0.5V$. Determine la corriente que pasa por el inductor. (10 puntos)

3. Determine la transformada inversa de Laplace de:

   a) $F(s) = \ln\left(1 + a s^2\right)$ (8 puntos)

   b) $G(s) = \dfrac{cs + d}{(s-a)^2 + b^2}$, a, b, c, d son constantes reales (12 puntos)

4. Un sistema discreto, ante una entrada escalón unitario $u(k)$, presenta una salida $y(k)$ dada por la siguiente expresión:

$$y(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \le k < 4 \\ 2 & \text{si } 4 \le k < 6 \\ 1 & \text{si } 6 \le k < 8 \\ 0 & \text{si } k \ge 8 \end{cases}$$

Para este sistema determine:

   a) Función de transferencia. (5 puntos)

b) Estabilidad (con justificación). (5 puntos)

c) Ecuación en diferencias que modela el sistema, con la relación entre una secuencia entrada $x(k)$ y la salida $y(k)$. (5 puntos)

Nota: Si no logra determinar la función de transferencia en a), para las partes b) y c) puede usar como función de transferencia $H(s)=\dfrac{z^3+z-2}{z^3}$. En este caso, con un puntaje máximo total posible de 7 para b) y c) en conjunto.

5. Muestre que $\mathfrak{L}^{-1}\left\{\tan^{-1}\left(\dfrac{2}{s^2}\right)\right\}=\dfrac{2\operatorname{sen}(t)\operatorname{senh}(t)}{t}$ (15 puntos)

6. Si $x(k)$ es una sucesión periódica con período T, es decir, $x(k+T)=x(k)$, demuestre (utilizando la definición de transformada zeta) que $\mathcal{Z}\{x(k)\}=\dfrac{1}{1-z^{-T}}\sum_{k=0}^{T-1}\dfrac{x(k)}{z^k}$, si $|z|>1$. (15 puntos)

FORROLARIO

$$\int\frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+C;\ \left(\arctan u\right)'=\frac{u'}{1+u^2};\ \operatorname{Res}\left(f(z),a\right)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\left(z-a\right)^k f(z)\right]$$

$$\operatorname{sen}(z)=\frac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j};\ \cos(z)=\frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2};\ \operatorname{senh}(z)=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2};\ \cosh(z)=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

2.6. II Parcial I Ciclo 2012

Pregunta 1

Muestre que $\mathscr{L}\left\{\sin^3(t)\right\} = \dfrac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$

Solución

$$\sin^3(t) = \left(\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\right)^3 = \frac{1}{-8j}\left(e^{3jt}-3e^{2jt}e^{-jt}+3e^{jt}e^{-2jt}-e^{-3jt}\right)$$
$$= \frac{1}{-8j}\left[\left(e^{3jt}-e^{-3jt}\right)-3\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)\right] = -\frac{1}{4}\left[\sin(3t)-3\sin(t)\right]$$
$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{\sin^3(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{-\frac{1}{4}\left[\sin(3t)-3\sin(t)\right]\right\} = -\frac{1}{4}\left(\frac{3}{p^2+9}-\frac{3}{p^2+1}\right) = \frac{6}{(p^2+9)(p^2+1)}$$

Pregunta 2

Muestre que $\mathcal{Z}\left\{\dfrac{1}{2}(k+1)(k+2)a^k\right\} = \dfrac{z^3}{(z-a)^3}$

Solución

$$\mathcal{Z}\left\{a^k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{z^k} = \frac{z}{z-a}$$

Multipliquemos por a^2 y derivemos, del LHS:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{k+2}}{z^k} = \frac{za^2}{z-a}$$
$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{k+2}}{z^k}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(k+2)a^{k+1}}{z^k}$$

Del RHS tenemos

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{za^2}{z-a}\right] = z\left[\frac{2a}{z-a}+\frac{a^2}{(z-a)^2}\right] = \frac{z(2az-a^2)}{(z-a)^2}$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(k+2)a^{k+1}}{z^k} = \frac{z(2az-a^2)}{(z-a)^2}$$

Derivamos de nuevo a ambos lados, del LHS tenemos

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(k+2)a^{k+1}}{z^k}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)a^k}{z^k}$$

Del RHS:
$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{z(2az-a^2)}{(z-a)^2}\right]=z\left[\frac{2z-2a}{(z-a)^2}+\frac{2z(2az-a^2)}{(z-a)^3}\right]=\frac{2z^3}{(z-a)^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)a^k}{z^k}=\frac{2z^3}{(z-a)^3}\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)a^k}{z^k}=\frac{z^3}{(z-a)^3}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)a^k\right\}=\frac{z^3}{(z-a)^3}$$

Pregunta 3

Determine la transformada inversa de Laplace de las siguientes expresiones:

a) $F(p)=\dfrac{2p}{(p+1)(p^2+2p+5)}$

b) $G(p)=\dfrac{(p+3)}{p(p^2+1)}e^{-\pi s}$

Solución

3.a)

$$F(p)=\frac{2p}{(p+1)(p^2+2p+5)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)}+\frac{5}{2}\frac{1}{(p^2+2p+5)}+\frac{1}{2}\frac{p}{(p^2+2p+5)}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)}+\frac{5}{2}\frac{1}{[(p+1)^2+2^2]}+\frac{1}{2}\frac{(p+1)-1}{[(p+1)^2+2^2]}=-\frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)}+\frac{2}{[(p+1)^2+2^2]}+\frac{1}{2}\frac{p}{[(p+1)^2+2^2]}$$
$$\Rightarrow f(t)=-\frac{1}{2}e^{-t}+\sin(2t)e^{-t}+\frac{1}{2}\cos(2t)e^{-t}$$

3.b)

Primero eliminemos el exponencial. Usando la propiedad 3, sabemos que $f(t-a)U(t-a)=e^{-ap}F(p)$, así que apliquemos residuos al resto de la expresión sin el exponencial. Sea $H(p)$ tal que

$$H(p)=G(p)e^{\pi p}=\frac{p+3}{p(p^2+1)}=\frac{p+3}{p(p-j)(p+j)}$$

Y saquemos la transformada inversa a $H(p)$ con residuos. Los polos de $H(p)$ son $p=0$, $p=\pm j$, todos de orden 1. Los residuos son:

$$\operatorname{Res}\left[H(p)e^{pt},0\right]=\frac{1}{(1-1)!}\lim_{p\to 0}(p)\frac{p+3}{p(p-j)(p+j)}e^{pt}=3$$

$$\operatorname{Res}\left[H(p)e^{pt},j\right]=\frac{1}{(1-1)!}\lim_{p\to j}(p-j)\frac{p+3}{p(p-j)(p+j)}e^{pt}=-\frac{1}{2}(3+i)e^{jt}$$

$$\text{Res}\left[H(p)e^{pt}, -j\right] = \frac{1}{(1-1)!}\lim_{p\to -j}(p+j)\frac{p+3}{p(p-j)(p+j)}e^{pt} = \frac{1}{2}(-3+i)e^{-jt}$$

Ahora sumamos los residuos y obtenemos $\mathscr{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = h(t)$

$$h(p) = \sum \text{Res}\left[H(p)e^{pt}\right] = 3 - \frac{1}{2}(3+i)e^{jt} + \frac{1}{2}(-3+i)e^{-jt} = 3 - \frac{3}{2}\left(e^{jt}+e^{-jt}\right) + \frac{1}{2j}\left(e^{jt}-e^{jt}\right)$$

Cambiamos por los exponenciales a cos y sen

$$\Rightarrow h(p) = 3 - 3\cos(t) + \sin(t)$$

Ahora ponemos la contribución del exponencial $e^{\pi p}$ de la expresión original y obtenemos la transformada inversa de $G(p)$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{G(p)\right\} = g(t) = h(t-\pi)U(t-\pi) = \left[3 - 3\cos(t-\pi) + \sin(t-\pi)\right]U(t-\pi)$$

Pregunta 4

La dinámica de un sistema de tiempo discreto está determinado por la ecuación en diferencias:

$$y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = x(k)$$

en la que $y(k)$ es la salida y $x(k)$ es la entrada. Para este sistema, determine:

a) La función de transferencia, en términos de las condiciones iniciales.

b) Si $y(0) = 1$, determine, si es posible, la condición para $y(1)$ de manera que el sistema sea estable.

c) La respuesta ante la entrada escalón unitario $u(k)$, si $y(0) = y(1) = 1$.

Solución

Esta pregunta en el ciclo que se evaluó, a lo que tengo entendido, fue anulada. El porqué es este: Una función de transferencia *por definición* tiene *todas* las condiciones iniciales nulas, no depende de estas. Una función de transferencia que depende de las condiciones iniciales ciertamente no cumple con la defición. No tiene mucho sentido esta pregunta.

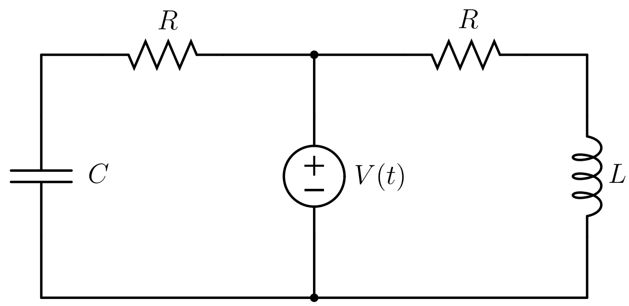
Pregunta 5

Considere el siguiente circuito:

a) Determine la función de transferencia si considera el voltaje de la fuente como la entrada y el voltaje del inductor como la salida.

b) Determine todas las corrientes que usted como ingeniero eléctrico puede medir con un amperímetro.

Solución



Sean i_C y i_L las corrientes que pasan por el capacitor y el inductor respectivamente.

5.a) Aplicamos las reglas de Kirchhoff sobres la malla para obtener la corriente que pasa

$$-v(t) + Ri_L(t) + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 0$$
$$-v(t) + Ri_C(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$$

Las ecuaciones de $i_L(t)$ y $i_C(t)$ están desacopladas. Podemos tratarlas por separado.[6] Resolviendo primero para $i_L(t)$ aplicamos transformada de Laplace y reordenando se obtiene

$$RI_L + LpI_L = V(p) \Rightarrow \frac{I_L(p)}{V(p)} = \frac{1}{R + Lp}$$

Ahora usamos la relación de la FEM inducida con el cambio de corriente en el inductor para obtener la función de transferencia deseada. Usamos la propiedad 10, que la multiplicación de 2 funciones transformadas es la convolución de las funciones originales.

$$v_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \Rightarrow I_L(p) = \frac{V_L(p)}{pL}$$

Sustituimos

$$\frac{V_L(p)/Lp}{V(p)} = \frac{1}{R + Lp} \Rightarrow \frac{V_L(p)}{V(p)} = \frac{Lp}{R + Lp}$$

5.b) Ahora encontramos las corrientes, primero la corriente en el inductor, usamos la función de transferencia encontrada

$$I_L(p) = \frac{V(p)}{L\left(p + \frac{R}{L}\right)} \Rightarrow i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\xi)\exp\left(-\frac{R}{L}(t-\xi)\right)\mathrm{d}\xi$$

[6] Por estar en paralelo.

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\int_0^t v(\xi)\exp\left(\frac{R}{L}\xi\right)\mathrm{d}\xi$$

Resolvemos para $i_C(t)$. Aplicamos transformada de Laplace

$$-V(p) + RI_C + \frac{1}{Cp}I_C(p) = 0 \Rightarrow I_C(p) = \frac{V(p)}{R + \dfrac{1}{Cp}}$$

Esta expresión aunque se reacomodara no parece tener una expresión que venga en la tabla de transformadas. Si usamos la ecuación $i_C(t) = C\ \mathrm{d}v_C(t)/\mathrm{d}t$ y le aplicamos la transformada de Laplace y sustituimos en $I_c(p)$ se obtiene una expresión que sí viene en la tabla

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow I_C(p) = pCV_C(p)$$

Sustituyendo

$$\Rightarrow pCV_C(t) = \frac{V_(p)}{R + \dfrac{1}{Cp}} \Rightarrow V_C(p) = \frac{1}{p + \dfrac{1}{RC}}\cdot\frac{V(p)}{RC}$$

Se puede ver que $V_C(t)$ es la multipliación de 2 transformadas de Laplace. Para obtener $v_C(t)$ se usa la transformación de una convolución

$$\Rightarrow v_C(t) = \frac{1}{RC}\int_0^t v(\xi)\exp\left[-\frac{(t-\xi)}{RC}\right]\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{RC}\exp\left[-\frac{t}{RC}\right]\int_0^t v(\xi)\exp\left[-\frac{\xi}{RC}\right]\,\mathrm{d}\xi$$

Ahora que sabemos $v_C(t)$, obtenemos $i_C(t)$ con la relación $i_C(t) = C\ \mathrm{d}v_C(t)/\mathrm{d}t$. Solo tener cuidado derivando, ya que es un producto y una de las variables t está en el límite de la integral

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$= C\left[-\frac{1}{(RC)^2}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\int_0^t v(\xi)\exp\left(\frac{\xi}{RC}\right)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)v(t)\exp\left(\frac{t}{RC}\right)\right]$$

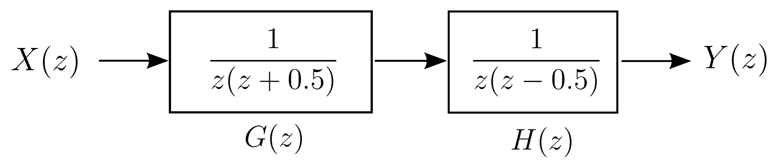
$$i_C(t) = \frac{-C}{(RC)^2}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\int_0^t v(\xi)\exp\left(\frac{\xi}{RC}\right)\,\mathrm{d}\xi + \frac{v(t)}{R}$$

Se le invita al lector a probar que $i_L(t)$ e $i_C(t)$ se reducen los casos conocidos[7] cuando la fuente tiene es de la forma $v(t) = V_0$, con V_0 constante, cuando se conecta al circuito en $t = 0$.

[7]Siempre es bueno probar el caso límite.

Pregunta 6

Considere el siguiente sistema discreto, lineal e invariante en el tiempo:



a) Determine la respuesta al impulso para el sistema anterior.

b) Obtenga el valor en régimen permanente del sistema, si se aplica un escalón de magnitud 5 en la entrada.

Solución

6.a) La función de transferencia equivalente es el producto de las funciones.

$$G(z)H(z) = \frac{1}{z^2(z-0{,}5)(z+0{,}5)}$$

$$h(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{G(z)H(z)\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z^2(z-0{,}5)(z+0{,}5)}\right\}$$

$$\frac{1}{z^2(z-0{,}5)(z+0{,}5)} = z\left[\frac{1}{z^3(z-0{,}5)(z+0{,}5)}\right] = z\left[-\frac{4}{z^3} - \frac{16}{z} + \frac{8}{z-0{,}5} + \frac{8}{z+0{,}5}\right]$$

Después de distribuir, obtenemos

$$h(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{-\frac{4}{z^2} - 16 + \frac{8z}{z-0{,}5} + \frac{8z}{z+0{,}5}\right\} = -4\delta(k-2) - 16\delta(k) + 8\left(\frac{1}{2}\right)^k + 8\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

6.b)

Si la entrada es $x(k) = 5u(k) \Rightarrow X(z) = \dfrac{5z}{z-1}$, la salida $y(k)$ cuando $k \to \infty$ es:

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)G(z)H(z) = (z-1)\left(\frac{5z}{z-1}\right)\left(\frac{1}{z(z-0{,}5)}\right)\left(\frac{1}{z(z+0{,}5)}\right) = \frac{20}{3}$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores   II Examen Parcial   I Ciclo Lectivo del 2012   Tiempo: 3 horas

INDICACIONES:

Toda consulta debe ser de forma, en voz alta y desde el asiento.
Únicamente se permite calculadora científica.
Muestre todos los pasos que conducen a la respuesta.
Conteste las preguntas en forma ordenada y con letra clara; en lapicero negro o azul.
Apague celulares, beepers y demás artefactos sonoros.

Preguntas: 1 y 2: Prof. Edison De Faria (celeste) ; 3 y 4: Prof. Marvin Coto (verde); 5 y 6 Prof. Aramis Pérez (rosado)

1. Muestre que $\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}^3 t\right\} = \dfrac{6}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+9\right)}$ (15 puntos)

2. Muestre que $\mathcal{Z}\left\{\dfrac{1}{2}(k+1)(k+2)a^k\right\} = \dfrac{z^3}{(z-a)^3}$ (15 puntos)

3. Determine la transformada inversa de Laplace de las siguientes expresiones:

   a) $F(s) = \dfrac{2s}{(s+1)\left(s^2+2s+5\right)}$ (por fracciones parciales)   (10 puntos)

   b) $G(s) = \dfrac{(s+3)}{s\left(s^2+1\right)}e^{-\pi s}$ (por residuos)   (10 puntos)

4. La dinámica de un sistema de tiempo discreto está determinada por la ecuación en diferencias: $y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=x(k)$ en la que $y(k)$ es la salida y $x(k)$ es la entrada. Para este sistema, determine:

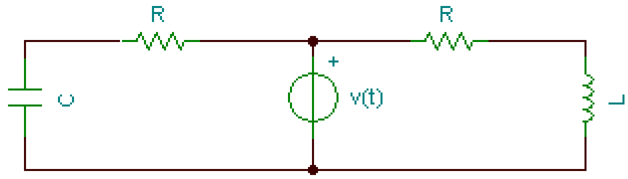
   a) La función de transferencia, en términos de las condiciones iniciales.   (4 puntos)

   b) Si $y(0)=1$, determine, si es posible, la condición para $y(1)$ de manera que el sistema sea estable. (4 puntos)

   c) La respuesta ante la entrada escalón unitario $u(k)$, si $y(0)=y(1)=1$.   (7 puntos)

   Nota: Si no logra determinar la función de transferencia en la parte a), puede usar $H(z) = \dfrac{5}{z^2(1-y(0)) - z(y(1)-3y(0)+6)+6}$ para las partes b) y c), en este caso con un puntaje máximo de 7 en ambas partes.

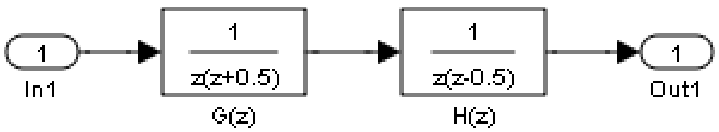
5. Considere el siguiente circuito:



a) Determine la función de transferencia si considera el voltaje de la fuente como la entrada y el voltaje del inductor como la salida. (10 puntos)

b) Determine todas las corrientes que usted como ingeniero eléctrico puede medir con un amperímetro. (10 puntos)

6. Considere el siguiente sistema discreto, lineal e invariante en el tiempo:



a) Determine la respuesta al impulso para el sistema anterior. (10 puntos)

b) Obtenga el valor en régimen permanente del sistema, si se aplica un escalón de magnitud 5 en la entrada. (5 puntos)

Formulario: $\operatorname{sen} x = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$, $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$, $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

2.7. II Parcial I Ciclo 2013

Pregunta 1

Encuentre la convolución $f(t) * g(t)$ si $\mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{2p^2+9p-8}{p^2+4p-5}$, y $\mathscr{L}\{g(t)\} = e^{-p}$

Solución

Para encontrar la convolución $f(t) * g(t)$, obtengamos la transformada de Laplace y calculemos la inversa.

$$\mathscr{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\mathscr{L}\{g(t)\} = \frac{2p^2+9p-8}{p^2+4p-5}e^{-p}$$

Al tener el exponencial, obtengamos la transformada inversa del resto y desplazamos al final

$$\frac{2p^2+9p-8}{p^2+4p-5} = 2 + \frac{p+2}{p^2+4p-5} = 2 + \frac{p+2}{(p-1)(p+5)} = 2 + \frac{1}{2}\frac{1}{(p-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+5}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2p^2+9p-8}{p^2+4p-5}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{2 + \frac{1}{2}\frac{1}{(p-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+5}\right\} = 2\delta(t) + \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-5t}$$

Ahora desplazemos la función obtenida

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2p^2+9p-8}{p^2+4p-5}e^{-p}\right\} = \left[2\delta(t-1) + \frac{1}{2}e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-5(t-1)}\right]u(t-1)$$

Pregunta 2

Para $X(z) = \dfrac{z-b}{z^2+(a+b)z+ab}$, $a, b \in \mathbb{C}$, muestre que $x(0) = 0$ y $x(1) = 1$ si $\mathcal{Z}\{x(k)\} = X(z)$

Solución

Usemos la identidad para transformar $X(z)$ a $x(k)$

$$x(k) = \sum \operatorname{Res}\left[z^{k-1}X(z)\right]$$

Para $x(0)$ y $x(1)$ serían

$$x(0) = \sum \operatorname{Res}\left[z^{-1}X(z)\right] \qquad x(1) = \sum \operatorname{Res}\left[X(z)\right]$$

Encontramos primero $x(0)$. Factorizamos el denominador de $X(z)$ para reacomodar.

$$X(z) = \frac{z-b}{z^2+(a+b)z+ab} = \frac{z-b}{(z+a)(z+b)}$$

$$x(0) = \sum \text{Res}\left[z^{-1}X(z)\right] = \sum \text{Res}\left[\frac{z-b}{z(z+a)(z+b)}\right]$$

Los polos son $0, -a, -b$. Todos de orden 1.

$$\text{Res}\left[\frac{z-b}{z(z+a)(z+b)}, 0\right] = \lim_{z\to 0} z\frac{z-b}{z(z+a)(z+b)} = -\frac{1}{a}$$

$$\text{Res}\left[\frac{z-b}{z(z+a)(z+b)}, -a\right] = \lim_{z\to -a}(z+a)\frac{z-b}{z(z+a)(z+b)} = \frac{-a-b}{a(a-b)}$$

$$\text{Res}\left[\frac{z-b}{z(z+a)(z+b)}, -b\right] = \lim_{z\to -b}(z+b)\frac{z-b}{z(z+a)(a+b)} = \frac{2}{a-b}$$

$$\Rightarrow x(0) = -\frac{1}{a} + \frac{-a-b}{a(a-b)} + \frac{2}{a-b} = 0$$

Ahora con $x(1)$

$$x(1) = \sum \text{Res}\left[X(z)\right] = \sum \text{Res}\left[\frac{z-b}{(z+a)(z+b)}\right]$$

Los polos son $-a, -b$, los 2 de orden 1.

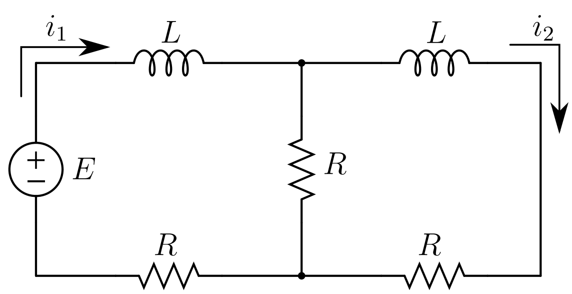
$$\text{Res}\left[\frac{z-b}{(z+a)(z+b)}, -a\right] = \lim_{z\to -a}(z+a)\frac{z-b}{(z+a)(z+b)} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\text{Res}\left[\frac{z-b}{(z+a)(z+b)}, -b\right] = \lim_{z\to -b}(z+b)\frac{z-b}{(z+a)(z+b)} = -\frac{2b}{a-b}$$

$$\Rightarrow x(1) = \frac{a+b}{a-b} - \frac{2b}{a-b} = 1$$

Pregunta 3

Considere el siguiente circuito acoplado de la siguiente figura



Calcule i_1 en términos de t, L, E, R si $i_1(0) = 0, \dfrac{\mathrm{d}i_1(0)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{L}$ y calcule $\lim_{t\to\infty} i_1(t)$

Solución

Aplicamos las reglas de Kirchhoff sobre las 2 mallas y obtenemos las ecuaciones

$$-E + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + (i_1 - i_2)\,R + i_1 R = 0$$
$$(i_2 - i_1)\,R + L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + i_2 R = 0$$

Aplicando transformada de Laplace obtenemos

$$-\frac{E}{p} + LpI_1 + (I_1 - I_2)\,R + I_1 R = 0$$
$$(I_2 - I_1)\,R + LpI_2 + I_2 R = 0$$

Reacomodando en forma matricial obtenemos

$$\begin{pmatrix} 2R + Lp & -R \\ -R & 2R + Lp \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{p} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con la regla de Cramer determinamos I_1

$$\mathrm{Det}\begin{vmatrix} 2R + Lp & -R \\ -R & 2R + Lp \end{vmatrix} = 3R^2 + 4RLp + L^2p^2$$
$$\mathrm{Det}\begin{vmatrix} \frac{E}{p} & v \\ 0 & 2R + Lp \end{vmatrix} = \frac{E}{p}\,(2R + Lp)$$

$$I_1(p) = \frac{E\,(2R + Lp)}{p\left(3R^2 + 4RLp + L^2p^2\right)}$$

Usamos el teorema del valor final para encontrar $i_1(t)$ cuando $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} i_1(t) = \lim_{p\to 0} pI_1(p) = \lim_{p\to 0} p\,\frac{E\,(2R + Lp)}{p\left(3R^2 + 4RLp + L^2p^2\right)} = \frac{2}{3}\frac{E}{R}$$

Se puede verificar el resultado calculando la resistencia equivalente del circuito visto por la fuente en estado estacionario. En el estado estacionario es como si los inductores no estuvieran. La resistencia equivalente es $(3/2)R$.

Pregunta 4

Un sistema discreto tiene función de transferencia $H(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)(z-1)}$. Encuentre la respuesta cuando la entrada de la sucesión $\{1, -1, 0, 0, 0, 0, ...\}$

Solución

La entrada $x(k)$ del sistema es $x(k) = \delta(k) - \delta(k-1)$, al aplicar la transformada $\mathcal{Z}$, obtenemos

$$X(z) = 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z}$$

La salida la determinamos encontrando la transformada inversa de $Y(z)$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z-1}{z}\frac{z^2}{(z+1)(z-1)} = \frac{z}{z+1}$$
$$Y(z) = \frac{z}{z+1} \Rightarrow y(k) = (-1)^k$$

Pregunta 5

La entrada del circuito rectificador de media onda está dada por la función

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) & \text{si} \quad 0 < t < \pi/\omega \\ 0 & \text{si} \quad \pi/\omega < t < 2\pi/\omega \end{cases}$$

Encontrar la transformada de Laplace de la función $f(t)$ si $f\left(t + \dfrac{2\pi}{\omega}\right) = f(t)$

Solución

Usemos $e^{j\omega t}$ y obtenemos la parte imaginaria para evitar hacer muchas integraciones por partes. Usamos la tabla de transformadas para funciones periodicas, la identidad 9 con periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \text{Im}\left\{\frac{1}{1 - \exp\left(-\dfrac{2\pi p}{\omega}\right)}\int_0^{\pi/\omega} e^{-pt}e^{j\omega t}\,\text{d}t\right\}$$

Ocupemonos de la integral y luego multiplicamos por el resto.

$$\int_0^{\pi/\omega} e^{(-p+j\omega)t}\,\text{d}t = \left.\frac{e^{t(-p+j\omega)}}{-p+j\omega}\right|_0^{\pi/\omega} = \frac{1}{-p+j\omega}\left[\exp\left(\frac{-\pi p}{\omega}\right)\exp(j\pi) - 1\right] = \frac{1}{p-j\omega}\left[\exp\left(\frac{-\pi p}{\omega}\right) + 1\right]$$

$$= \frac{1}{p^2+\omega^2}(p+j\omega)\left[\exp\left(\frac{-\pi p}{\omega}\right) + 1\right]$$

La parte imaginaria es

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\left[\exp\left(\frac{-\pi p}{\omega}\right)+1\right] \Rightarrow \int_0^{\pi/\omega} e^{-pt}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\left[\exp\left(\frac{-\pi p}{\omega}\right)+1\right]$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{1-\exp\left(-\dfrac{2\pi p}{\omega}\right)}\,\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\left[\exp\left(\frac{-\pi p}{\omega}\right)+1\right]$$

Pregunta 6

Un sistema de control digital puede describirse mediante la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{z^2+1}\begin{bmatrix} z^2 & z \\ -z & z^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

a) Encuentre las respuestas $x_1(k)$ y $x_2(k)$ en función de las condiciones iniciales, aplicando transformada zeta inversa en ambos lados de la expresión. Simplifique su respuesta al máximo.

b) Si se encuentra que la función de transferencia del sistema tiene la forma $\dfrac{z+1}{z^2+1}$. ¿Qué conclusiones puede obtener de la estabilidad del sistema?

Solución

$$\begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{z^2}{z^2+1} & \dfrac{z}{z^2+1} \\ -\dfrac{z}{z^2+1} & \dfrac{z^2}{z^2+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

Sea $\xi_1(k)$ y $\xi_2(k)$ donde $\mathscr{Z}\left\{\xi_1(k)\right\} = \dfrac{z^2}{z^2+1}$ y $\mathscr{Z}\left\{\xi_2(k)\right\} = \dfrac{z}{z^2+1}$

$$\Rightarrow \xi_1(k) = \sum \text{Res}\left[z^{k-1}\frac{z^2}{z^2+1}\right] = \sum \text{Res}\left[\frac{z^{k+1}}{z^2+1}\right]$$

Los polos son $j, -j$, de orden 1.

$$\text{Res}\left[\frac{z^{k+1}}{z^2+1}, j\right] = \lim_{z\to j}(z-j)\frac{z^{k+1}}{(z-j)(z+j)} = \frac{(j)^{k+1}}{2j} = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{j\pi k}{2}\right)$$

$$\text{Res}\left[\frac{z^{k+1}}{z^2+1}, -j\right] = \lim_{z\to -j}(z+j)\frac{z^{k+1}}{(z-j)(z+j)} = \frac{(-j)^{k+1}}{-2j} = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{-j\pi k}{2}\right)$$

$$\xi_1(k) = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{j\pi k}{2}\right) + \frac{1}{2}\exp\left(\frac{-j\pi k}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

$$\xi_2(k) = \sum \text{Res}\left[z^{k-1}\frac{z}{z^2+1}\right] = \sum \text{Res}\left[\frac{z^k}{z^2+1}\right]$$

Los polos son $j, -j$, de orden 1

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^k}{z^2+1}, j\right] = \lim_{z\to j}(z-j)\frac{z^k}{(z-j)(z+j)} = \frac{(j)^k}{2j} = \frac{1}{2j}\exp\left(\frac{j\pi k}{2}\right)$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^k}{z^2+1}, -j\right] = \lim_{z\to -j}(z+j)\frac{z^k}{(z-j)(z+j)} = \frac{(-j)^k}{-2j} = -\frac{1}{2j}\exp\left(\frac{-j\pi k}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \xi_2(k) = \frac{1}{2j}\exp\left(\frac{j\pi k}{2}\right) - \frac{1}{2j}\exp\left(\frac{-j\pi k}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

Ahora sustituimos en la matriz para obtener el resultado[8]

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1(k) & \xi_2(k) \\ -\xi_2(k) & \xi_1(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi k/2) & \sin(\pi k/2) \\ -\sin(\pi k/2) & \cos(\pi k/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

6.b)

Los polos de la función de transferencia son j y $-j$, con norma 1 y de orden 1 cada uno. Estas caracteristicas lo hacen un sistema marginalmente estable.

[8]Esto tiene la forma de una matriz de rotación

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores II Examen Parcial I Ciclo Lectivo del 2013 Tiempo: 3 horas

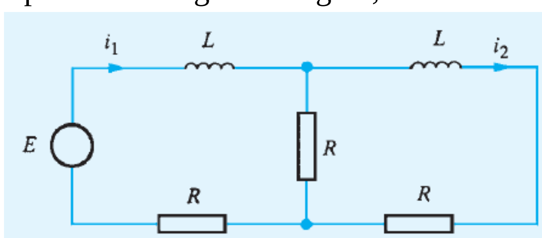
INDICACIONES: *Toda consulta debe ser de forma, en voz alta y desde el asiento. Únicamente se permite calculadora científica. Muestre todos los pasos que conducen a la respuesta. Respuesta sin los cálculos correspondientes se califica con cero. Conteste las preguntas en forma ordenada y con letra clara; en lapicero negro o azul. Apague celulares y demás artefactos sonoros.*

Preguntas	1 y 2	3 y 4	5 y 6
Profesor(a)	Teodoro Willink	Edison De Faria Campos	Mercedes Chacón Vásquez
Color	morado	crema	rosa

1. Encuentre la convolución $f(t)*g(t)$ si $\mathscr{L}\{f(t)\}=\dfrac{2s^2+9s-8}{s^2+4s-5}$, y $\mathscr{L}\{g(t)\}=e^{-s}$. (15 puntos)

2. Para $X(z)=\dfrac{z-b}{z^2+(a+b)z+ab}$, $a,b\in\mathbb{C}$, muestre que $x(0)=0$ y $x(1)=1$ si $\mathscr{Z}\{x(k)\}=X(z)$. (15 puntos)

3. Considere el siguiente circuito acoplado de la siguiente figura,



Calcule i_1 en términos de t,L,E,R si $i_1(0)=0$, $\dfrac{di_1(0)}{dt}=\dfrac{E}{L}$, y calcule $\lim_{t\to\infty} i_1(t)$. (20 puntos)

4. Un sistema discreto tiene función de transferencia $H(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-1)}$. Encuentre la respuesta cuando la entrada es la sucesión $\{1,-1,0,0,0,\cdots\}$. (15 puntos)

5. La salida del circuito rectificador de media onda está dada por la función

$$f(t)=\begin{cases}\operatorname{sen}(\omega t) & \text{si } 0<t<\pi/\omega\\ 0 & \text{si } \pi/\omega<t<2\pi/\omega\end{cases}$$

Encontrar la transformada de Laplace de la función $f(t)$ si $f\left(t+\dfrac{2\pi}{\omega}\right)=f(t)$. (15 puntos)

6. Un sistema de control digital puede describirse mediante la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix}X_1(z)\\ X_2(z)\end{bmatrix}=\frac{1}{z^2+1}\begin{bmatrix}z^2 & z\\ -z & z^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}.$$

a) Encuentre las respuestas $x_1(k)$ y $x_2(k)$ en función de las condiciones iniciales, aplicando transformada zeta inversa en ambos lados de la expresión. Simplifique su respuesta al máximo. (14 puntos)

b) Si se encuentra que la función de transferencia del sistema tiene la forma $\dfrac{z+1}{z^2+1}$ ¿qué conclusiones puede obtener de la estabilidad del sistema? (6 puntos)

2.8. II Parcial II Ciclo 2013

Pregunta 1

Si $\mathcal{Z}\left\{x(k)\right\} = X(z)$

a) Utilice la definición de transformada zeta unilateral para demostrar que $\mathcal{Z}\left\{x(k)e^{j\alpha k}\right\} = X(ze^{-j\alpha})$, α constante real.

b) Utilice el resultado anterior para calcular $\mathcal{Z}\left\{u(k)\cos(k\alpha)\right\}$, para $u(k)$ escalón unitario discreto.

Solución

1.a)

Sea $\mathcal{Z}\left\{x(k)\right\} = X(z)$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\left\{x(k)e^{j\alpha k}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x(k)e^{j\alpha k}}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x(k)}{\left(ze^{-j\alpha}\right)^k} = X(ze^{-j\alpha})$$

1.b)

Usando el resultado anterior y que la transformada $\mathcal{Z}$ del escalon unitario $u(k)$ es $z/(z-1)$, separamos al $\cos(k\alpha)$ en $\cos(k\alpha) = \dfrac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\left\{x(k)\cos(k\alpha)\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{x(k)e^{j\alpha k}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{x(k)e^{-j\alpha k}\right\} = \frac{1}{2}\frac{e^{-j\alpha}}{e^{-j\alpha}-1} + \frac{1}{2}\frac{e^{j\alpha}}{e^{j\alpha}-1}$$

Pregunta 2

Si $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(p)$, utilice propiedades de la tabla de transformada de Laplace para calcular

$$\mathcal{L}\left\{t^2 f'(t) + 2tf(t)\right\}$$

Simplifique al máximo el resultado.

Solución

Usamos las propiedades 5 y 6 de la tabla de transformadas de Laplace.

$$\mathscr{L}\left\{t^2 f'(t) + 2tf(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{t^2 f(t)\right\} + 2\mathscr{L}\left\{tf(t)\right\} = (-1)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\left[pF(p) - f(0)\right] + 2(-1)^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}F(p)$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[F(p) + p\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}\right] - 2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p} + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p} + p\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}p^2} - 2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p} = p\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}p^2}$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{t^2 f'(t) + 2tf(t)\right\} = p\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}p^2}$$

Pregunta 3

Resuelva y simpifique al máximo: $\mathscr{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}\right\}$

Solución

Usemos residuos para determinar cuanto vale la inversa. Aplicamos

$$x(k) = \sum \mathrm{Res}\left[z^{k-1}\frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}, \text{polos}\right]$$

Ocupamos encontrar los polos de la función

$$z^{k-1}\frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)} = \frac{z^k}{(z+j)(z-j)(z+2)(z-2)}$$

No ocupamos considerar los casos en $z = 0$ ya que $k \geq 0$. Los polos son $j, -j, 2, -2$.

Polo en j

$$\lim_{z\to j}(z-j)\frac{z^k}{(z+j)(z-j)(z+2)(z-2)} = \frac{j^k}{2j(j+2)(j-2)} = -\frac{1}{5}\frac{j^k}{2j}$$

Polo en $-j$

$$\lim_{z\to -j}(z+j)\frac{z^k}{(z+j)(z-j)(z+2)(z-2)} = \frac{(-j)^k}{2j(2-j)(2+j)} = \frac{1}{5}\frac{(-j)^k}{2j}$$

Polo en 2

$$\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z^k}{(z+j)(z-j)(z+2)(z-2)} = \frac{2^k}{(2+j)(2-j)4} = \frac{2^k}{20}$$

Polo en -2

$$\lim_{z\to -2}(z+2)\frac{z^k}{(z+j)(z-j)(z+2)(z-2)} = \frac{-2(-2)^k}{(-2+j)(-2-j)(-2-2)} = -\frac{(-2)^k}{20}$$

$$\Rightarrow \sum \mathrm{Res}\left[z^{k-1}\frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}, \text{polos}\right] = -\frac{1}{5}\frac{j^k}{2j} + \frac{1}{5}\frac{(-j)^k}{2j} + \frac{2^k}{20} - \frac{(-2)^k}{20}$$

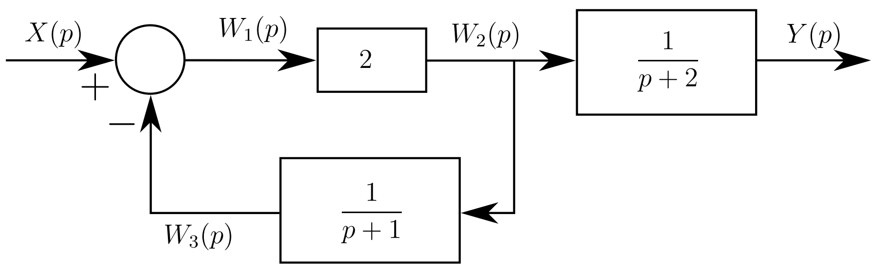
Cambiamos j^k por $\exp\left(\frac{\pi jk}{2}\right)$ y $-j^k$ por $\exp\left(-\frac{\pi jk}{2}\right)$

$$= \frac{1}{5}\left[-\left(\frac{\exp\left(\frac{\pi jk}{2}\right)-\exp\left(-\frac{\pi jk}{2}\right)}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(2^k-(-2)^k\right)\right] = \frac{1}{5}\left(-\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(2^k-(-2)^k\right)\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}\right\} = \frac{1}{5}\left(-\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(2^k-(-2)^k\right)\right)$$

Pregunta 4

Considere el siguiente sistema en lazo cerrado (con realimentación):



a) Encuentre la función de transferencia $\frac{Y(p)}{X(p)}$

b) Encuentre $y(t)$ para $X(s) = \frac{1}{p+2}$

Solución

4.a)

Encontremos $W_2(p)$ en función de la entrada.

$$W_3(p) = \frac{W_2(p)}{p+1}$$

$$W_1(p) = X(p) - W_3(p) = X(p) - \frac{W_2(p)}{p+1}$$

$$W_2(p) = 2W_1(p) = 2\left[X(p) - \frac{W_2(p)}{p+1}\right]$$

$$\Rightarrow W_2(p) = \frac{2}{1+\frac{2}{p+1}}X(p) = \frac{2(p+1)}{p+3}X(p)$$

$$Y(p) = \frac{1}{p+2}W_2(p) = \frac{2(p+1)}{(p+2)(p+3)}X(p) \Rightarrow \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{2(p+1)}{(p+2)(p+3)}$$

b)

Si $X(p) = \dfrac{1}{p+2}$

$$Y(p) = \frac{2(p+1)}{(p+2)(p+3)} X(p) = \frac{2(p+1)}{(p+2)^2(p+3)}$$

Separamos en fracciones parciales

$$\frac{2(p+1)}{(p+2)^2(p+3)} = -\frac{2}{(p+2)^2} + \frac{4}{2+p} - \frac{4}{p+3}$$

Con esta forma ya podemos usar las tablas. La inversa la obtenemos con la propiedad 13

$$y(t) = -2te^{-2t} + 4e^{-2t} - 4e^{-3t}$$

Pregunta 5

Sean $F(p) = \dfrac{(1-e^{-p})\,e^{-p}}{p^3\,(p^2+1)}$, $G(p) = \dfrac{1}{p\,(p+1)^2}$

a) Calcule $f(t)$. No utilice el método de residuos ni fracciones parciales para encontrar su respuesta.

b) Calcule $g(t)$ utilizando el teorema de convolución.

c) Si $F(p)$ se coloca en cascada con $G(p)$, determine la estabilidad del sistema resultante. Justifique su respuesta.

Solución

5.a)

$$F(p) = \frac{(1-e^{-p})\,e^{-p}}{p^3\,(p^2+1)} = \frac{e^{-p}}{p^3\,(p^2+1)} - \frac{e^{-2p}}{p^3\,(p^2+1)}$$

Ocupemonos de la parte sin el exponencial, luego añadimos la traslación al final. Ahora obtengamos la transformada inversa de $\dfrac{1}{p^3\,(p^2+1)}$ por convolución. Vemos que es el producto de las transformadas $\mathscr{L}\left\{\dfrac{t^2}{2}\right\} = \dfrac{1}{p^3}$ y $\mathscr{L}\left\{\sin(t)\right\} = \dfrac{1}{p^2+1}$

$$f(t) = \int_0^t \frac{u^2}{2} \sin(t-u)\,\mathrm{d}u$$

Usamos la identidad $\sin(t-u) = \sin(t)\cos(u) - \sin(u)\cos(t)$. Reordenando un poco

$$\Rightarrow f(t) = \frac{\sin(t)}{2} \int_0^t u^2 \cos(u)\,\mathrm{d}u - \frac{\cos(t)}{2} \int_0^t u^2 \sin(u)\mathrm{d}u$$

Hagamos la primera integral, usemos integración por partes

$$\int_0^t u^2\cos(u)\,\mathrm{d}u = t^2\sin(t) - 2\int_0^t u\sin(t)\,\mathrm{d}u = t^2\sin(t) - 2\left[-t\cos(t) + \int_0^t \cos(u)\,\mathrm{d}u\right]$$

$$= t^2\sin(t) + 2t\cos(t) - 2\sin(t)$$

La segunda integral es

$$\int_0^t u^2\sin(u)\,\mathrm{d}u = -t^2\cos(t) + 2\int_0^t u\cos(t)\,\mathrm{d}u = -t^2\cos(t) + 2\left[t\sin(t) - \int_0^t \sin(u)\,\mathrm{d}u\right]$$

$$-t^2\cos(t) + 2t\sin(t) + 2\cos(t) - 2$$

Sumando todo

$$\frac{\sin(t)}{2}\left[t^2\sin(t) + 2t\cos(t) - 2\sin(t)\right] - \frac{\cos(t)}{2}\left[-t^2\cos(t) + 2t\sin(t) + 2\cos(t) - 2\right]$$

Simplificando

$$= \frac{t^2}{2} - 1 + \cos(t)$$

Ahora trasladando por el factor exponencial del principio

$$\Rightarrow\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\{F(p)\} = f(t) = \left[\frac{(t-1)^2}{2} - 1 + \cos(t-1)\right]U(t-1) - \left[\frac{(t-2)^2}{2} - 1 + \cos(t-2)\right]U(t-2)$$

5.b)

Notamos que $G(p)$ es el producto de la transformada de $\mathscr{L}\{1\} = 1/p$ y $\mathscr{L}\left\{te^{-t}\right\} = 1/(p+1)^2$

Usamos la convolución con $h_1(t-u) = 1$ y $h_2(u) = ue^{-u}$

$$g(t) = \int_0^t h_1(t)h_2(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^t ue^{-u}\,\mathrm{d}u$$

$$-ue^{-u}\Big|_0^t + \int_0^t e^{-u}\,\mathrm{d}u = -te^{-t} - e^{-t} + 1$$

$$\Rightarrow g(t) = -te^{-t} - e^{-t} + 1$$

5.c)

En cascada es multiplicar las funciones

$$F(p)G(p) = \frac{(1-e^{-p})e^{-p}}{p^3(p^2+1)}\frac{1}{p(p+1)^2}$$

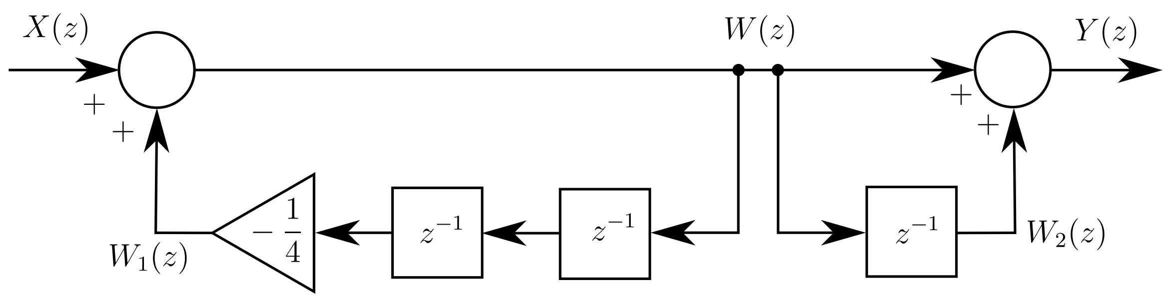
Ignoremos los términos exponenciales, que solo desplazan en el tiempo y no contribuyen a la estabilidad. Separemos los términos en fracciones parciales sin determinar los coeficientes

$$F(p)G(p) = \frac{A}{p^4} + \frac{B}{p^3} + \cdots$$

Donde A y B serían los coeficientes de la expansión. La transformada inversa de $1/p^4$ y $1/p^3$ va a ser proporcional a t^3 y t^2 respectivamente. Estos términos tienen a infinito en $t \to \infty$. El sistema no es estable.

Pregunta 6

En la figurta siguiente se describe el diagrama de bloques de un filtro digital con función de transferencia $H(z) = Y(z)/X(z)$



A partir del diagrama determine:

a) La respuesta en el tiempo del filtro digital $y(k)$, antes una entrada alternada $x(k) = (-1)^k$. Simplifique al máximo su respuesta.

b) Determine si el filtro es estable. Justifique su respuesta.

Solución

a)

Averiguemos primero la función de transferencia. $W(z)$ en términos de $X(z)$ lo encontramos con

$$W_1(z) = -\frac{1}{4}\frac{1}{z^2}W(z)$$

$$W(z) = X(z) + W_1(z) = X(z) - \frac{1}{4}\frac{1}{z^2}W(z) \Rightarrow W(z) = \frac{X(z)}{1+\frac{1}{4}\frac{1}{z^2}} = \frac{4z^2}{4z^2+1}X(z)$$

Ahora averiguamos $Y(z)$ en términos de $X(z)$

$$W_2(z) = \frac{1}{z}W(z)$$

$$Y(z) = W(z) + W_2(z) = W(z) + \frac{1}{z}W(z) = W(z)\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{4z^2}{4z^2+1}X(z)\left(1+\frac{1}{z}\right)$$

$$= \frac{4z^2}{4z^2+1}\frac{z+1}{z}X(z) = \frac{z(z+1)}{(z+1/2)(z-1/2)}X(z) = Y(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z(z+1)}{(z+1/2)(z-1/2)}$$

Para averiguar $y(k)$ tenemos que transformar $Y(z)$. La entrada es $x(k) = (-1)^k$, por lo tanto $X(z)$ es $X(z) = z/(z+1)$. (Propiedad 4 de la tabla)

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{z(z+1)}{(z+1/2)(z-1/2)}\frac{z}{z+1} = \frac{z^2}{(z+1/2)(z-1/2)}$$

Separando en fracciones parciales

$$z\left[\frac{z}{(z+1/2)(z-1/2)}\right] = z\left[\frac{1}{2}\frac{1}{z-1/2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z+1/2}\right] = \frac{1}{2}\frac{z}{z-1/2} + \frac{1}{2}\frac{z}{z+1/2}$$

Ya podemos obtener la inversa con el formato comparando con la tabla.

$$\Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\left\{Y(z)\right\} = y(k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

b) Los polos de la función de transferencia $H(z)$ es $z = \pm 1/2$. Ya que los polos están dentro del circulo unitario, el sistema es estable.

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores II Examen Parcial II Ciclo Lectivo del 2013 Tiempo: 3 horas

INDICACIONES:
Toda consulta debe ser de forma, en voz alta y desde el asiento. Únicamente se permite calculadora científica.
Muestre todos los pasos que conducen a la respuesta. Respuesta sin los cálculos correspondientes se califica con cero.
Conteste las preguntas en forma ordenada y con letra clara; en lapicero negro o azul.

Preguntas	1 y 2	3 y 4	5 y 6
Profesor(a)	Edison De Faria	Jhonny Cascante	Mercedes Chacón
Color	Gris	Verde	Café

1) Si $\mathscr{Z}\left\{x(k)\right\} = X(z)$,

   a) Utilice la <u>definición</u> de transformada zeta unilateral para demostrar que $\mathscr{Z}\left\{x(k)\,e^{j\alpha k}\right\} = X(z\,e^{-j\alpha})$, α constante real. (7 puntos)

   b) Utilice el <u>resultado anterior</u> para calcular $\mathscr{Z}\left\{u(k)\cos\left(k\alpha\right)\right\}$, para $u(k)$ escalón unitario discreto. (8 puntos)

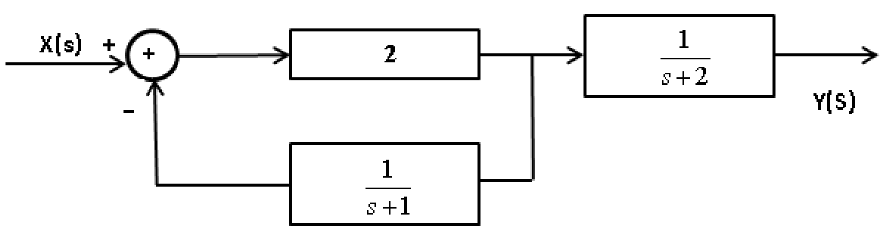
2) Si $\mathscr{L}\left\{f\left(t\right)\right\} = F(s)$, utilice propiedades de la tabla de transformada de Laplace para calcular

$$\mathscr{L}\left\{t^2 f'\left(t\right) + 2t\ f(t)\right\}.$$

   Simplifique al máximo el resultado. (15 puntos)

3) Resuelva y simplifique al máximo: $\mathscr{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{\left(z^2+1\right)\left(z^2-4\right)}\right\}$ (15 puntos)

4) Considere el siguiente sistema en lazo cerrado (con realimentación):



   a) Encuentre la función de transferencia $\dfrac{Y(s)}{X(s)}$. (10 puntos)

   b) Encuentre $y(t)$ para $X(s) = \dfrac{1}{s+2}$. (10 puntos)

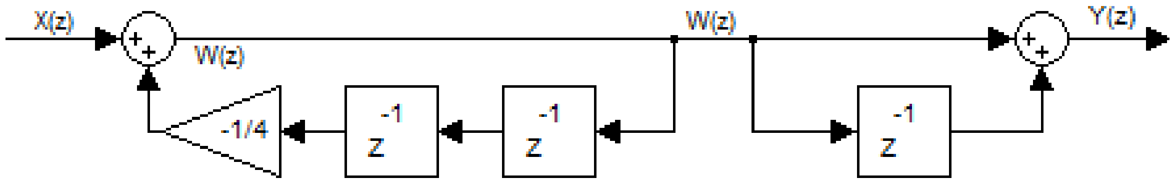
5) Sean $F(s) = \dfrac{\left(1-e^{-s}\right)e^{-s}}{s^3\left(s^2+1\right)}$, $G(s) = \dfrac{1}{s\left(s+1\right)^2}$.

   a) Calcule $f(t)$. No utilice el método de residuos ni fracciones parciales para encontrar su respuesta. (8 puntos)

b) Calcule $g(t)$ utilizando el teorema de convolución. (7 puntos)

c) Si $F(s)$ se coloca en cascada con $G(s)$, determine la estabilidad del sistema resultante. Justifique su respuesta. (5 puntos)

6) En la figura siguiente se describe el diagrama de bloques de un filtro digital con función de transferencia $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$.



A partir del diagrama determine:

a) La respuesta en el tiempo del filtro digital, $y(k)$, ante una entrada alternada $x(k) = (-1)^k$. Simplifique al máximo su respuesta. (10 puntos)

b) Determine si el filtro es estable. Justifique su respuesta. (5 puntos)

AYUDA GENERAL

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2};\ \operatorname{sen} z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j};\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2};\ \operatorname{senh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

Capítulo 3

Tercera Ronda

3.1. III Parcial I Ciclo 2008

Pregunta 1

Sea $f(t) = \cos(t)$, $0 \le t \le \pi/2$

a. Desarrollo $f(t)$ en serie de Fourier en cosenos.

b. Utilice el resultado obtenido para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$

c. Utilice el teorema de Parseval para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}$

Solución

1.a)

Ver **III Parcial II Ciclo 2014 Pregunta 5.b**. $A \to 1$, $T \to \pi$

1.b)

$$f(0) = 1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{\pi} - 1\right)$$

1.c)

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2\,\mathrm{d}t = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2}\frac{1}{(4n^2 - 1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)$$

Pregunta 2

Sea

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{si} \quad -1 < t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |t| > 1 \end{cases}$$

a. Calcule $\mathscr{F}\left\{f(t)\right\} = F(\omega)$

b. Use la propiedad de simetría para calcular $\mathscr{F}\left\{F(t)\right\}$

Solución

2.a)

$$\mathscr{F}\left\{f(t)\right\} = F(\omega) = \int_{\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)\left(\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)\right)\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-1}^{1}(1-t^2)\cos(\omega t)\ \mathrm{d}t - j\int_{-1}^{1}(1-t^2)\sin(\omega t)\ \mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1}(1-t^2)\cos(\omega t)\ \mathrm{d}t$$

La integral con el $\sin(\omega t)$ es igual a 0 ya que la la función de la integral es una función impar de -1 a 1. Al realizar la integral del $\cos(\omega t)$ se obtiene:

$$2\int_{0}^{1}(1-t^2)\cos(\omega t)\ \mathrm{d}t = \frac{-4\omega\cos(\omega) + 4\sin(\omega)}{\omega^3} = \mathscr{F}\left\{f(t)\right\}$$

2.b)

$$F(t) = \frac{-4t\cos(t) + 4\sin(t)}{t^3} \Rightarrow \mathscr{F}\left\{F(t)\right\} = 2\pi f(-\omega) = 2\pi\left(1-(-\omega)^2\right) = 2\pi\left(1-\omega^2\right),\ \ |\omega| < 1$$

Pregunta 3

Sea a real positivo. Demuestre que

$$\mathscr{F}\left\{e^{-|a|t}\right\} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

Solución

$$f(t) = e^{-a|t|} \Rightarrow \mathscr{F}\left\{e^{-a|t|}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} e^{-(a+j\omega)t}\mathrm{d}t = \left.\frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega}\right|_{-\infty}^{0} + -\left.\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega}\right|_{0}^{\infty}$$
$$= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a+j\omega+2-j\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$
$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{e^{-a|t|}\right\} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

Pregunta 4

Sea $f(t)$ una función cuya serie trigonometrica de Fourier está definida como

$$f(t) = 20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\cos(nt) - \frac{1}{\pi n}\sin(nt)$$

Si la potencia total de la función es de 60 W, determine cuantas armónicas deben considerarse para superar el 95 % de tal potencia.

Solución

Una corrección. Es posible calcular la potencia total de la función y no es 60 W como dice el enunciado.

$$f(t) = 20\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n}\cos nt - \frac{1}{\pi n}\sin nt\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{20}{\pi n}\cos nt - \frac{20}{\pi n}\sin nt\right)$$

Vemos que $a_n = 20/\pi n$, $b_n = -20/\pi n$ y $a_0 = 0$

Ahora calculamos la potencia

$$P = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{400}{\pi^2 n^2}\right) = \frac{400}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{400}{\pi^2}\frac{\pi^2}{6} = \frac{400}{6} = \frac{200}{3} \approx 66{,}6$$

La potencia es $P = 200/3$ W, no 60 W. Ahora, el problema. No encuentro una manera elegante más que hacerlo por fuerza bruta tabulando valores, haciendo la sumatoria explicitamente. Sea P_n la potencia contenida hasta el n-ésimo armónico

$$P_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{400}{\pi^2 k^2}$$

Tabulando los valores, evaluando la sumatoria hasta el n -ésimo termino

Se requieren 12 armónicos para tener un mínimo de 95 % de la Potencia total.

Pregunta 5

Utilizando tablas y propiedades, determine $f(t)$ si

n	P_n	P_n/P
1	40.5285	0.607927
2	50.6606	0.759909
3	55.1638	0.827456
4	57.6968	0.865452
5	59.3179	0.889769
6	60.4437	0.906656
7	61.2708	0.919062
8	61.9041	0.928561
9	62.4044	0.936067
10	62.8097	0.942146
11	63.1447	0.94717
12	63.4261	0.951392

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 8\omega + 20}$$

Solución

Utilicemos las propiedas de la tabla $\mathscr{F}\left\{f(t)e^{j\omega_0 t}\right\} = F(\omega - \omega_0)$ y $\mathscr{F}\left\{e^{-a|t-t_0|}\right\} = \dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}e^{-j\omega t_0}$

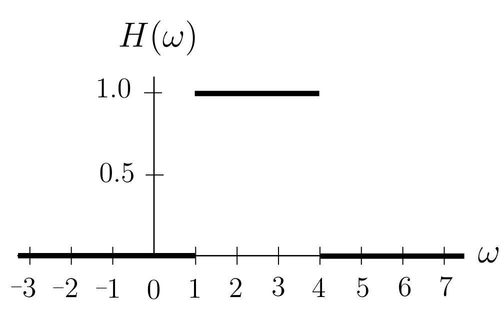
$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 8\omega + 20} = \frac{1}{(\omega+4)^2 + 4} = \frac{1}{4}\frac{2\cdot 2}{(\omega+4)^2 + 2^2}$$

Si comparamos con la propiedades, vemos que $\omega_0 = -4, a = 2$ y $t_0 = 0$

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{F(\omega)\right\} = \frac{1}{4}e^{-2|t|}e^{-j4t}$$

Pregunta 6

Sea un sistema cuya función de transferencia $H(\omega)$ se muestra en la figura. Si al sistema se le aplica la señal de entrada $x(t) = \mathrm{sgn}(t)$, calcule la energía de la señal de salida $y(t)$



Solución

$$\int_{-\infty}^{\infty} [y(t)]^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega$$

Usamos la propiedad en la tabla: $\mathscr{F}\{x(t)\} = \mathscr{F}\{\mathrm{sgn}(t)\} = \dfrac{2}{j\omega} = X(\omega)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{1}^{4} \frac{4}{\omega^2}\mathrm{d}\omega = \frac{3}{2}\frac{1}{\pi}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} [y(t)]^2 \,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\frac{1}{\pi}$$

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica

IE-305 Matemáticas Superiores II Parcial I Ciclo 2008 Tiempo: 3 horas

Este es un examen de desarrollo. Todos los procedimientos deben aparecer en los cuadernos de examen. No se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz. Trabaje ordenadamente. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de cálculo simbólico (CAS). Calculadoras científicas son permitidas. Después de la devolución del examen, tendrá tres días para revisarlo y presentar su reclamo.

Nota: $\cos a \operatorname{sen} b = \dfrac{\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)}{2}$;$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \dfrac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$; $\cos a \; \cos b = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$

1. Sea $f(t) = \cos t,\ 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$.

a. Desarrolle $f(t)$ en serie de Fourier en cosenos. (Valor: 10 puntos)

b. Utilice el resultado obtenido para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ (Valor: 5 puntos)

c. Utilice el teorema de Parseval para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$ (Valor: 5 puntos)

2. Sea

$$f(t) = \begin{cases} 1-t^2 & \text{si} \quad -1 < t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |t| > 1 \end{cases}$$

a. Calcule $\Im\{f(t)\} = F(w)$. (Valor: 10 puntos)

b. Use la propiedad de simetría para calcular $\Im\{F(t)\}$. (Valor: 5 puntos)

3. Sea a real positivo. Demuestre que

$$\Im\left\{e^{-a|t|}\right\} = \frac{2a}{a^2+\omega^2} \qquad \text{(Valor: 15 puntos)}$$

4. Sea f(t) una función cuya serie trigonométrica de Fourier está definida como

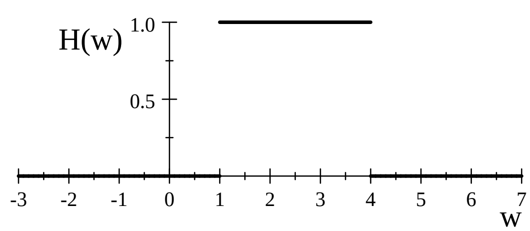
$$f(t) = 20\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n}\cos nt - \frac{1}{\pi n}\operatorname{sen} nt\right)$$

Si la potencia total de la función es de 60 W, determine cuántas armónicas deben considerarse para superar el 95 % de tal potencia. (Valor: 20 puntos)

5. Utilizando tablas y propiedades, determine $f(t)$ si

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^2+8\omega+20}. \qquad \text{(Valor: 15 puntos)}$$

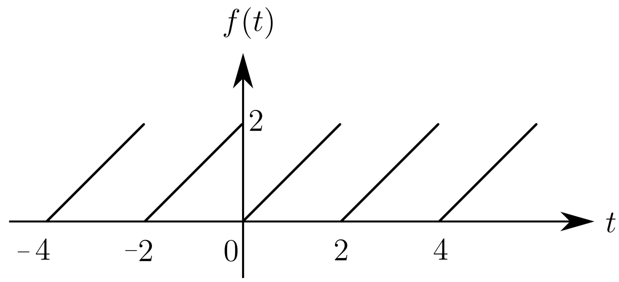
6. Sea un sistema cuya función de transferencia $H(\omega)$ se muestra en la figura. Si al sistema se le aplica la señal de entrada $x(t) = sgn(t)$, calcule la energía de la señal de salida $y(t)$.(Valor:15 puntos)



3.2. III Parcial II Ciclo 2008

Pregunta 1

Sea $f(t)$ la señal mostrada en la figura



a) Desarrolle $f(t)$ en serie exponencial de Fourier.

b) Utilice el resultado anterior y el teorema de Parseval para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

c) Dibuje el espectro de magnitud ($|c_n| \times n\omega_0$) y el de fase ($\Theta_n \times n\omega_0$) de la señal $f(t)$. (incluya los primeros 5 armónicos).

Solución

1.a) $f(t) = t\ ;\ 0 < t < 2\ ;\ f(t+2) = f(t) \Rightarrow T = 2 \Rightarrow \omega_0 = \pi$

$$c_n = \frac{1}{2}\int_0^2 te^{-jn\pi t}\,\mathrm{d}t = \frac{j}{n\pi} \qquad c_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 t\,\mathrm{d}t = 1$$

$$\Rightarrow f(t) = 1 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{j}{n\pi}\, e^{jn\pi t}$$

1.b) Por el teorema de Parseval:

$$\frac{1}{2}\int_0^2 t^2\,\mathrm{d}t = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2 n^2}$$

$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

1.c)

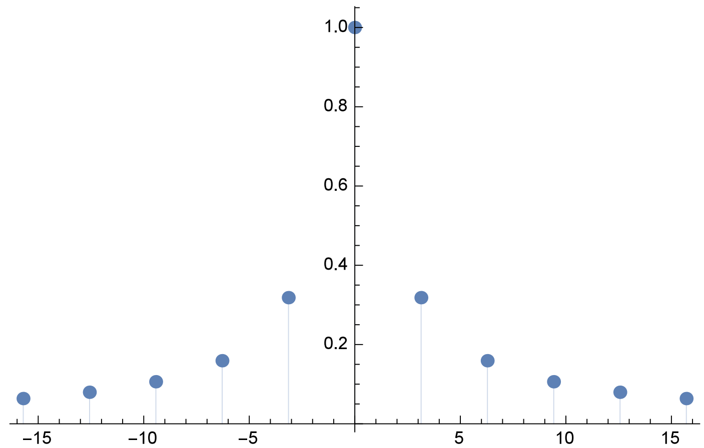


Figura 3.1: Espectro de magnitud

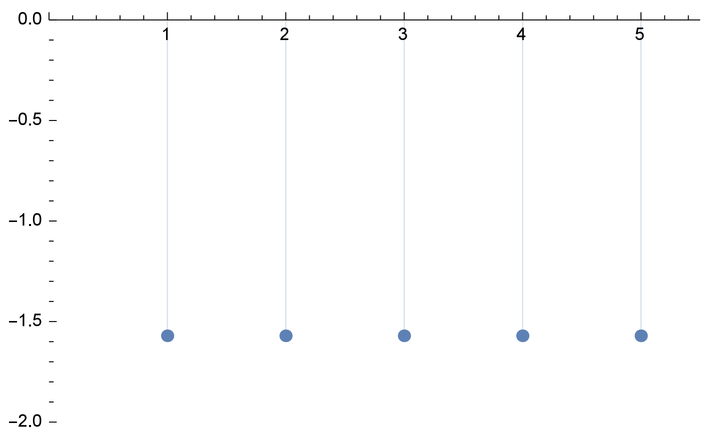


Figura 3.2: Espectro de fase

$n\omega_0$	0	π	2π	$3\ \pi$	$4\ \pi$	$5\ \pi$
$\lvert c_n \rvert$	1	$\dfrac{1}{\pi}$	$\dfrac{1}{2\pi}$	$\dfrac{1}{3\pi}$	$\dfrac{1}{4\pi}$	$\dfrac{1}{5\pi}$
Θ_n	-	$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{2}$

Cuadro 3.1: Valores de los espectros

Pregunta 2

Calcule la transformada inversa de Fourier de la función de frecuencia dada

Solución

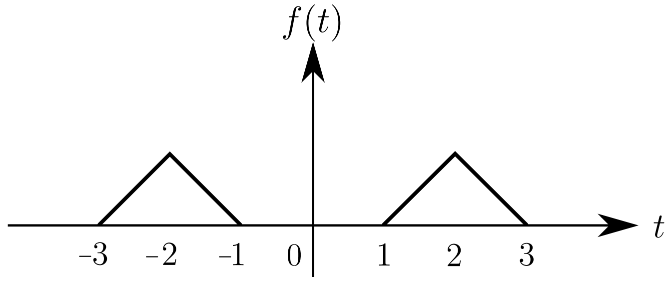


Figura 3.3: Figura del enunciado, pregunta 2

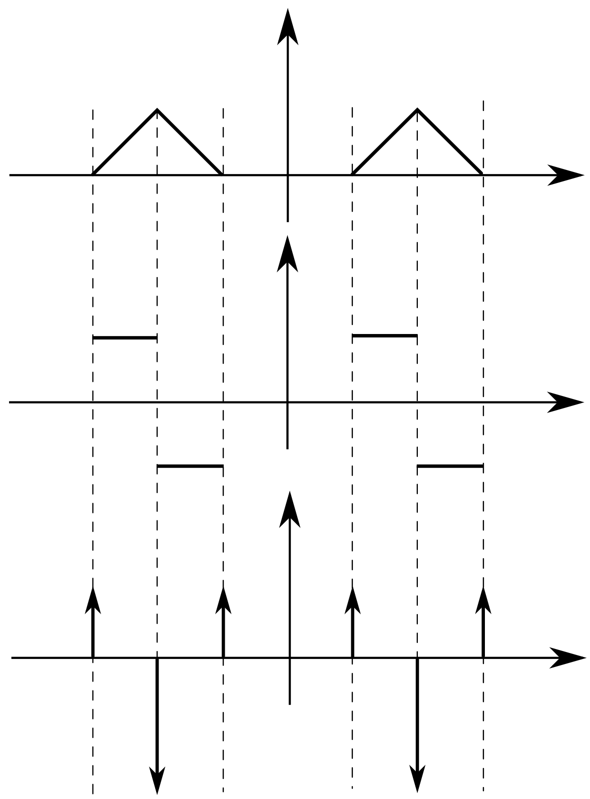


Figura 3.4: $G(t)$ con su primera y segunda derivada, problema 2

Sea $g(t)$ donde $\mathscr{F}\{g(t)\} = G(\omega)$. Usemos la simetría de la transformada de Fourier, $\mathscr{F}\{G(t)\} = 2\pi g(-\omega)$. Para obtener la transformada inversa, tratemos a $G(\omega)$ como si estuviera en el dominio de t, $G(t)$. Al derivar 2 veces $G(t)$, se obtiene:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}G(t) = \delta(t+3) - 2\delta(t+2) + \delta(t+1) + \delta(t-1) - 2\delta(t-2) + \delta(t-3)$$

Usamos la propiedad de la transformada de Fourier de una derivada: $\mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}h(t)\right\} = (j\omega)^n H(w)$ donde $\mathscr{F}\{h(t)\} = H(w)$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}G(t)\right\} = e^{3j\omega} - 2e^{2j\omega} + e^{j\omega} + e^{-j\omega} - 2e^{-2j\omega} + e^{-3j\omega} = (j\omega)^2\mathscr{F}\{G(t)\}$$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\{G(t)\} = \frac{1}{-\omega^2}\left[\left(e^{3j\omega} + e^{-3j\omega}\right) - 2\left(e^{2j\omega} + e^{-2j\omega}\right) + \left(e^{j\omega} + e^{j\omega}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\{G(t)\} = \frac{-2\cos(3\omega) + 4\cos(2\omega) - 2\cos(\omega)}{\omega^2}$$

Por la propiedad de simetría: $\mathscr{F}\{G(t)\} = 2\pi g(-\omega)$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\{G(t)\} = 2\pi g(-\omega) = \frac{-2\cos(3\omega) + 4\cos(2\omega) - 2\cos(\omega)}{\omega^2}$$

$$\Rightarrow g(\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{-2\cos(3\omega) + 4\cos(2\omega) - 2\cos(\omega)}{\omega^2}$$

Donde usamos el hecho que $g(\omega)$ es una función par. El argumento en si es una variable muda, cambiemos ω por t y finalizamos el problema

$$\mathscr{F}^{-1}\{G(\omega)\} = g(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{-2\cos(3t) + 4\cos(2t) - 2\cos(t)}{t^2}$$

Pregunte 3

Considere la función $f(t) = 5\cos(3t)$. Calcule la potencia contenida por las primeras 6 componentes.

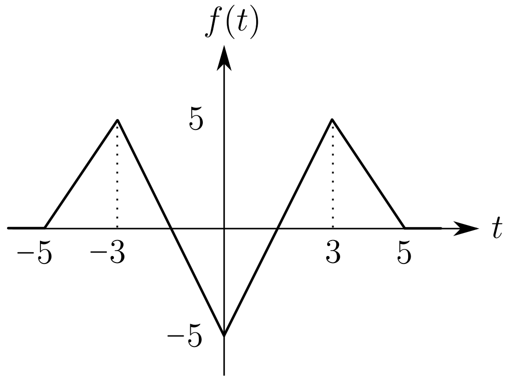
Solución

La serie de Fourier de $5\cos(3t)$ es $5\cos(3t)$. Es la misma función. Los senos de la forma $\sin(nt)$ con $n \in \mathbb{Z}$ son ortogonales en un intervalo de un periodo completo, igual para $\cos(nt)$, $n \in \mathbb{Z}, n \neq 3$. El único coeficiente que no se hace nulo es a_3 que corresponde a $\cos(3t)$, el cual es $a_3 = 5$.

La potencia contenida es

$$P = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{2}a_3^2 = \frac{5^2}{2}$$

Pregunta 4



Calcule la transformada de Fourier y la energía de la señal.

Solución

Derivemos 2 veces y usemos propiedades de la transformada de Fourier de las derivadas. La segunda derivada es

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) = \frac{5}{2}\delta(t+5) - \frac{35}{6}\delta(t+3) + \frac{20}{3}\delta(t) - \frac{35}{6}\delta(t-3) + \frac{5}{2}\delta(t+5)$$

Ahora obtenemos la transformada de Fourier

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t)\right\} = \frac{5}{2}e^{j\omega 5} - \frac{35}{6}e^{j\omega 3} + \frac{20}{3} - \frac{35}{6}e^{-j\omega 3} + \frac{5}{2}e^{-j\omega 5} = -\omega^2\mathscr{F}\{f(t)\}$$

$$-\omega^2\mathscr{F}\{f(t)\} = \frac{20}{3} + 5\left(\frac{e^{5j\omega}+e^{-5j\omega}}{2}\right) - \frac{35}{3}\left(\frac{e^{3j\omega}+e^{-3j\omega}}{2}\right) = \frac{20}{3} + 5\cos(5\omega) - \frac{35}{3}\cos(3\omega)$$

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = \frac{\frac{35}{3}\cos(3\omega) - 5\cos(5\omega) - \frac{20}{3}}{\omega^2}$$

Para calcular la energiía de la senñal, obtenemos la función de $f(t)$. Para $0 < t < 3$, tenemos una pendiente de $10/3$ y corta el eje de $f(t)$ en -5. Para $3 < t < 5$, tiene una pendiente de $-5/2$. Centrando un marco de referencia t' en $t = 5$, encontramos la recta.

$$f(t) = -\frac{5}{2}t' = -\frac{5}{2}(t-5) = -\frac{5}{2}t + \frac{25}{2}$$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{10}{3}t - 5 & \text{para} \quad 0 < t < 3 \\ -\frac{5}{2}t + \frac{25}{2} & \text{para} \quad 3 < t < 5 \end{cases}$$

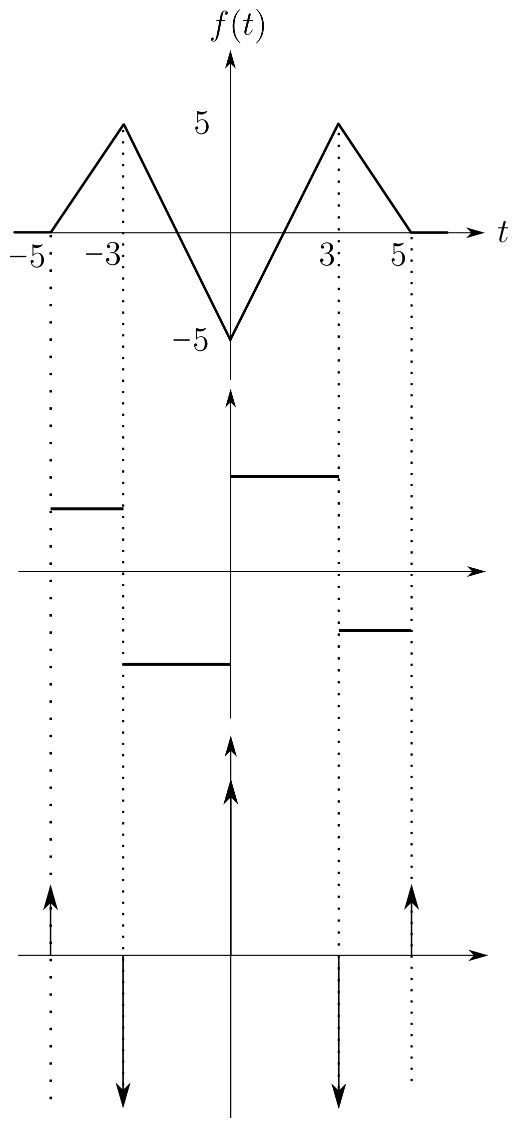


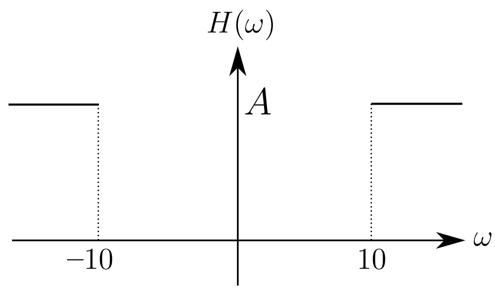
Figura 3.5: $f(t)$ con su primera y segunda derivada, problema 4

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t = 2\left[\int_0^3 \left(\frac{10}{3}t - 5\right)^2 \mathrm{d}t + \int_3^5 \left(-\frac{5}{2}t + \frac{25}{2}\right)^2 \mathrm{d}t\right] = \frac{250}{3} \text{ J}$$

$$\Rightarrow E = \frac{250}{3} \text{J}$$

Pregunta 5

Si se aplica una señal $f(t) = e^{-8t}u(t)$ por un filtro pasa alto con frecuencias de corte en -10 y 10 rad/s y magnitud A. Determine el valor de A para poder transferir un 75 % de la energía de entrada a la salida.



Solución

La relación entre la potencia de la señal de entrada y la señal se salida se puede escribir como:

$$\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} [y(t)]^2 \,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 \,\mathrm{d}t} = \frac{3}{4}$$

Por el teorema de Parseval, podemos reescribirlo de la manera:

$$\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} [y(t)]^2 \,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 \,\mathrm{d}t} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega} = \frac{3}{4}$$

La transformada de Fourier de la señal de entrada $f(t)$ es $\mathscr{F}\left\{f(t)\right\} = \mathscr{F}\left\{e^{-8t}u(t)\right\} = \dfrac{1}{8 + j\omega}$

$\Rightarrow |F(\omega)|^2 = \dfrac{1}{64 + \omega^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega = \int_{\infty}^{\infty} \frac{1}{8^2 + \omega^2} \,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{-10} \frac{A^2}{8^2 + \omega^2} \mathrm{d}\omega + \int_{10}^{\infty} \frac{A^2}{8^2 + \omega^2} \mathrm{d}\omega = \frac{A^2}{8}\left(\pi - 2\arctan\left(\frac{5}{4}\right)\right)$$

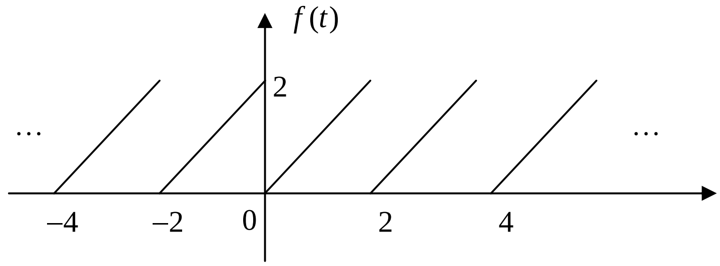
$$\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega} = \frac{\dfrac{A^2}{8}\left(\pi - 2\arctan\left(\dfrac{5}{4}\right)\right)}{\dfrac{\pi}{8}} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{3\pi}{4\left(\pi - 2\arctan\left(\frac{5}{4}\right)\right)}} \approx 1{,}32136$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

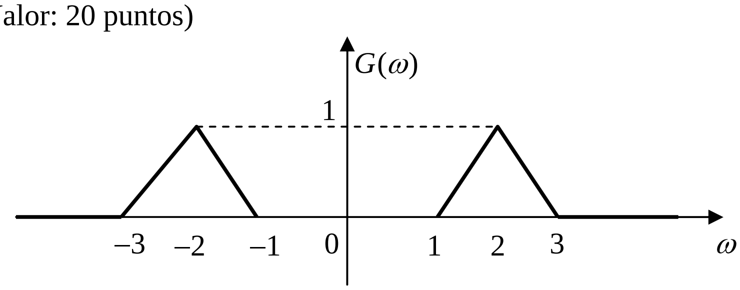
IE-305 Matemáticas Superiores III Examen Parcial
II Ciclo 2008 Tiempo:3 horas
Este es un examen de desarrollo. Todos los procedimientos deben aparecer en los cuadernos de examen. No se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz. Trabaje ordenadamente. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de cálculo simbólico (CAS). Calculadoras científicas son permitidas.

1) Sea $f(t)$ la señal mostrada en la figura abajo.

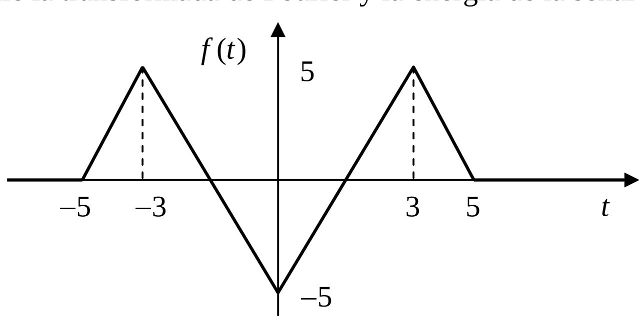


   a) Desarrolle $f(t)$ en serie exponencial de Fourier. (Valor: 10 puntos)
   b) Utilice el resultado anterior y el teorema de Parseval para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
   (Valor: 10 puntos)
   c) Dibuje el espectro de magnitud $\left(|c_n| \times n\omega_0\right)$ y el de fase $\left(\Theta_n \times n\omega_0\right)$ de la señal $f(t)$ (incluya los primeros 5 armónicos). (Valor: 10 puntos)

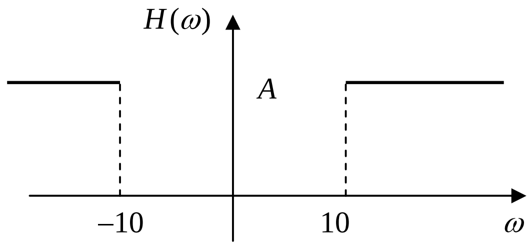
2) Calcule la transformada inversa de Fourier de la función de frecuencia dada abajo: (Valor: 20 puntos)



3) Considere la función $f(t) = 5\cos(3t)$. Calcule la potencia contenida por las primeras 6 componentes. (Valor: 10 puntos)
4) Calcule la transformada de Fourier y la energía de la señal abajo (Valor: 20 puntos)



5) Si se aplica una señal $f(t) = e^{-8t}\,u(t)$ por un filtro paso alto con frecuencias de corte en -10 y 10 rad/s y magnitud A. Determine el valor de A para poder transferir un 75% de la energía de entrada a la salida. (Valor: 20 puntos)



NOTAS:

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C;\ \frac{d}{dx}\tan^{-1}u = \frac{u'}{1+u^2};\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (Fórmula de integración por partes)

$$\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}\left(a\cos bu + b\,\mathrm{sen}\,bu\right) + C$$

$$\int e^{au}\,\mathrm{sen}\,bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}\left(a\,\mathrm{sen}\,bu - b\cos bu\right) + C$$

$$\mathrm{sen}^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2};\ \cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2};\ \mathrm{sen}\left(x \pm y\right) = \mathrm{sen}\,x\cos y \pm \mathrm{sen}\,y\cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,y;\ \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

3.3. III Parcial II Ciclo 2010

Pregunta 1

Para la función periódica $f(t)$ dada abajo, con periodo $T = 6$, halle el contenido de potencia de $f(t)$ hasta la tercera armónica utilizando series de Fourier

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < t < 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2 < t < 4 \\ 1 & \text{si} \quad 4 < t < 6 \end{cases}$$

Solución

$T = 6 \Rightarrow \omega_0 = \dfrac{\pi}{3}$

La función es par, va a contener solo terminos a_k. El intervalo de las integrales para obtener los coeficientes de Fourier se realizan de -3 a 3 para eliminar una integral, pero dentro del intervalo $(-2,2)$ es diferente de 0, el resto del intervalo $f(t)$ es 0, simplifica los cálculos.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int_{-2}^{2}\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{4}{6}\int_0^2 \cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right)$$

El contenido de la potencia hasta los 3 primeros término esta dado por la expresión:

$$P_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\left(\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{15}{8\pi^2} \approx 0{,}634422$$

Pregunta 2

Sea $G(\omega) = \mathscr{F}\{g(t)\} = e^{-a\omega j}\cos(b\omega)$. Encuentre $g(t)$ utilizando propiedades y tabla de transformada de Fourier.

Solución

Usemos la propiedad de simetría, la transformada de Fourier de coseno y la traslación en t

$$\mathscr{F}\{\cos(bt)\} = \pi\left(\delta(\omega - b) + \delta(\omega + b)\right)$$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{\pi\left(\delta(t-b)+\delta(t+b)\right)\right\} = 2\pi\cos(b(-\omega)) = 2\pi\cos(b\omega)$$
$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{\frac{1}{2}\left(\delta(t-b)+\delta(t+b)\right)\right\} = \cos(b\omega)$$

Ahora usemos la propiedad de traslación en el dominio de t, donde ya tenemos $G(\omega) = \cos(b\omega)$

$$\mathscr{F}\left\{g(t-a)\right\} = G(\omega)e^{-ja\omega}$$

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(\delta((t-a)-b)+\delta((t-a)+b)\right) = \frac{1}{2}\left(\delta((t-(a+b))+\delta((t-(b-a))\right)$$

Pregunta 3

Sea $f(t) = |t| - \dfrac{\pi}{2}$ si $-\pi \le t \le \pi$ tal que $f(t+2\pi) = f(t)$

a) Expanda $f(t)$ en serie exponencial de Fourier.

b.) Utilice el resultado obtenido en (a) y caso sea necesario, el teorema de Parseval para calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \qquad \text{y} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

Solución

Usemos el hecho que la función $f(t)$ para eliminar la integral con el sin más adelante. Del problema se sabe que $T = 2\pi \Rightarrow \omega_0 = 1$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t - j\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t$$
$$c_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

Para el termino c_0, se puede obtener la integral sumando el area entre el eje y la curva, sumado da 0.

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\,e^{jnt}$$

3.b) Reescribamos la serie de otra manera. Notemas que el termino de $(-1)^n$ hace que desaparezcan terminos de la sumatoria cuando n es par y no se eliminen cuando n es impar. Sea k un número tal que $k \in \mathbb{Z}$

$$(-1)^n - 1 = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad n = 2k \\ 0 & \text{si} \quad n = 2k-1 \end{cases}$$

También cuando evaluamos en $f(0)$, los terminos de la sumatoria son simetricos en el aspecto que $c_k = c_{-k}$. Al aplicar estos 2 cambiamos, podemos escribirla de la manera:

$$f(0) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{\pi(2k-1)^2}$$

$$-\frac{\pi}{2} = \frac{-4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Para la otra sumatoria, usamos el teorema de Parseval, y aprovechamos que la función es par.

$$\frac{1}{2\pi}\,2\int_0^{\pi}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[(-1)^n - 1\right]^2}{\pi^2 n^4}$$

Reescribimos la sumatoria para quitar el término $(-1)^n - 1$

$$\frac{\pi^2}{12} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^2}{\pi^2(2k-1)^4} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Pregunta 4

Si $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ utilice la definición de transformada de Fourier para demostrar que $\mathscr{F}\left\{e^{jbt}f(at)\right\} = \dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega - b}{a}\right)$, $a \neq 0$ real, $b \in \mathbb{R}$.

Solución

Sea $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ y asumamos para el primer caso que $a > 0$

$$\mathscr{F}\left\{e^{jbt}f(at)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jbt}f(at)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

Sea $u = at$. Cuando $t \to \infty$; $u \to \infty$ y $t \to -\infty$; $u \to -\infty$. $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{a}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(jb\frac{u}{a}\right) f(u)\exp\left(-j\omega\frac{u}{a}\right)\frac{\mathrm{d}u}{a} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\exp\left[-j\left(\frac{\omega - b}{a}\right)t\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{a}F\left(\frac{w-b}{a}\right)$$

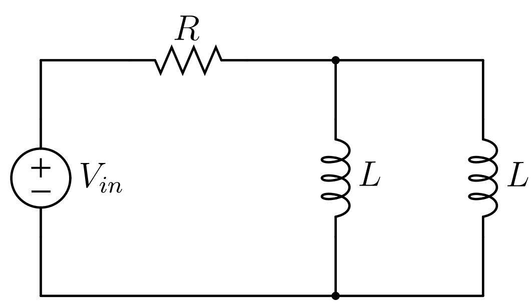
Para el caso que $a < 0$, se procede de una manera similar. Sea $u = at$. Cuando $t \to -\infty; u \to \infty$ y $t \to -\infty; u \to \infty$

$$= \int_{\infty}^{-\infty} \exp\left(jb\frac{u}{a}\right) f(u) \exp\left(-j\omega\frac{u}{a}\right) \frac{\mathrm{d}u}{a} = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \exp\left[-j\left(\frac{\omega - b}{a}\right)t\right] \mathrm{d}t = -\frac{1}{a}F\left(\frac{w-b}{a}\right)$$

Con esto se generaliza $\mathscr{F}\left\{e^{jbt}f(at)\right\} = \dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega - b}{a}\right)$

Pregunta 5

Considere el siguiente circuito



a) Determine la función de transferencia considerando como la salida la corriente que pasa por el inductor de la derecha.

b) Calcule la respuesta al impulso de ese circuito. Utilice $R = 1\Omega$ y $L = 1$ H

Solución

La inductancia equivalente de los inductores paralelos es $L/2$. Por la simetría del circuito, la corriente que pasa por la resistencia es el doble de la corriente que fluye por los inductores. $i_R = 2\, i_L$ Aplicamos la ley de Faraday para el circuito:

$$-v(t) + i_R R = -\frac{L}{2}\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}$$

Aplicamos transformada de Fourier:

$$-V(\omega) + RI_R(\omega) = -j\omega\frac{L}{2}I_R(\omega)$$

$$\Rightarrow -V(\omega) + 2RI_L(\omega) = -j\omega LI_L(\omega)$$

$$\Rightarrow \frac{I_L(\omega)}{V(\omega)} = \frac{1}{2R + jL\omega} = H(\omega)$$

5.b)

Con $R = 1\ \Omega$ y $L = 1\ H$ y fijandonos en la tabla de transformadas de Fourier, obtenemos $h(t)$

$$H(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega} \Rightarrow h(t) = e^{-2t}u(t)$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores III Examen Parcial II Ciclo Lectivo del 2010 Tiempo: 3 horas

Muestre todos los pasos que conducen a la respuesta. Resuelva el examen utilizando bolígrafo azul o negro. No se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de cálculo simbólico (CAS).

Preguntas 1 y 2: Prof. Johnny Cascante; 3 y 4: Prof. Edison De Faria; 5: Prof. Aramis Pérez

1. Para la función periódica $f(t)$ dada abajo, con periodo $T=6$, halle el contenido de potencia de $f(t)$ hasta la tercera armónica utilizando series de Fourier. (20 pts)

$$f(t)=\begin{cases}1 & \text{si } 0<t<2\\ 0 & \text{si } 2<t<4\\ 1 & \text{si } 4<t<6\end{cases}.$$

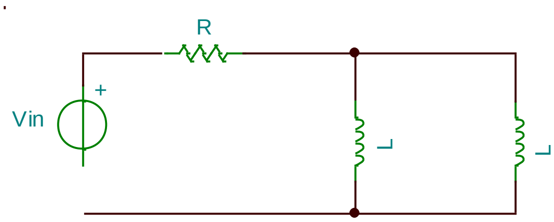
2. Sea $G(\omega)=\Im\{g(t)\}=e^{-a\omega j}\cos(b\omega)$. Encuentre $g(t)$ utilizando propiedades y tabla de transformada de Fourier. (15 pts)

3. Sea $f(t)=|t|-\dfrac{\pi}{2}$ si $-\pi\le t\le\pi$ tal que $f(t+2\pi)=f(t)$.
   a) Expanda $f(t)$ en serie exponencial de Fourier. (8 pts)
   b) Utilice el resultado obtenido en (a) y, caso sea necesario, el teorema de Parseval para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$. (6 pts cada)

4. Si $\Im\{f(t)\}=F(\omega)$ <u>utilice la</u> <u>definición</u> de transformada de Fourier para demostrar que

$$\Im\left\{e^{jbt}f(at)\right\}=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega-b}{a}\right),\quad a\neq 0 \text{ real}, b\in\mathbb{R}.$$ (15 pts)

5. Considere el siguiente circuito



   a) Determine la función de transferencia considerando como la salida la corriente que pasa por el inductor de la derecha. (10 pts)
   b) Calcule la respuesta al impulso de ese circuito. Utilice R=1 Ω y L=1 H. (10 pts)
   c) Determine la serie compleja de Fourier equivalente para la expresión de la respuesta al impulso. Considere T=2 s. (10 pts)

3.4. III Parcial I Ciclo 2011

Pregunta 1

La representación de una función $f(t)$ en serie trigonométrica de Fourier es:

$$f(t) = \frac{5}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(nt)}{n} - \frac{\sin(nt)}{n} \right)$$

a) Calcule la potencia contenida por las primeras 5 armónicas.

b) Grafique el espectro de magnitud y fase para la serie compacta.

Solución

1.a)

$$f(t) = \frac{5}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n} - \frac{\sin(nt)}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5\cos(nt)}{n\pi} - \frac{5\sin(nt)}{n\pi}$$

$$a_0 = 0 \qquad a_n = \frac{5}{n\pi} \qquad b_n = -\frac{5}{n\pi}$$

La potencia hasta el k–ésimo armónico esta dado por al expresión:

$$P_k = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} a_n^2 + b_n^2 = \frac{25}{\pi^2} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} \Rightarrow P_5 = \frac{25}{\pi^2} \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n^2} = \frac{5269}{144} \frac{1}{\pi^2} \approx 3{,}707$$

1.b)

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\frac{25}{n^2\pi^2} + \frac{25}{n^2\pi^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{n\pi}$$

El ángulo de fase es siempre $\pi/4$, ya que $a_n = -b_n \Rightarrow -\arctan(b_n/a_n) = \pi/4$

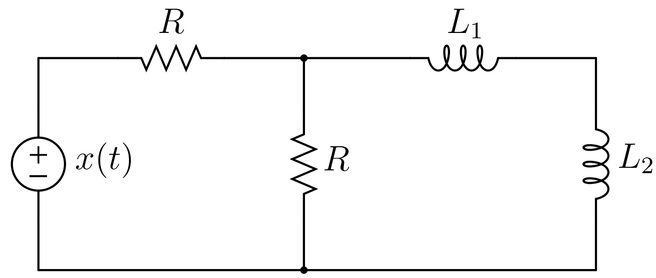
Pregunta 2

Considere el siguiente circuito

a) Determine la función de transferencia, si considera la corriente que pasa por los inductores como la salida.

b) Si los inductores son de 1 H y la resistencia de 1 Ω, calcule $y(t)$, si la entrada es $x(t) = 4\delta(t)$.

Solución



Sea L la inductancia equivalente de los inductores L_1 y L_2. La inductancia equivalente de los inductores es $L = L_1 + L_2$. Sea i_R la corriente que fluye por la resistencia en paralelo a los inductores y i_L la corriente que fluye por los inductores.

Al aplicar la Ley de Faraday sobre el circuito, obtenemos las ecuaciones:

$$-x(t) + R\left(i_R(t) + i_L(t)\right) = -L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \qquad - Ri_R = -L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

Combinando las 2 ecuaciones y reordenando, obtenemos:

$$R\left(\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + i_L\right) + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 2L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + Ri_L = x(t)$$

Aplicando transformada de Fourier:

$$2Lj\omega I(\omega) + RI(\omega) = X(\omega) \Rightarrow \frac{I(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{R + 2Lj\omega} = H(\omega)$$

Si la entrada $x(t) = 4\delta(t)$. La transformada de Fourier de la entrada es $X(\omega) = 4$. Con los valores $R = 1\ \Omega, L = 2$ H

$$I(\omega) = \frac{4}{1 + 4j\omega} = \frac{1}{\frac{1}{4} + j\omega}$$

Usando la tabla de transformadas de Fourier, obtenemos $i(t) = \exp\left(-\frac{1}{4}t\right)u(t)$

Pregunta 3

Utilice transformada de Fourier para calcular la convolución $(f * g)(t)$ si $f(t) = \sin(bt)$, $g(t) = e^{-a|t|}, a > 0$

Solución

$$f(t) = \sin(bt) \Rightarrow F(\omega) = -j\pi\left[\delta(\omega - b) - \delta(\omega + b)\right] \qquad g(t) = e^{-a|t|} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

Obtengamos la transformada de Fourier de la convolución y luego calculemos la transformada inversa.

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\mathscr{F}\left(f * g\right)\right\} = (f * g)(t)$$

$$\mathscr{F}\left\{f * g\right\}(t) = F(\omega)G(\omega) = -j\pi\left[\delta(\omega - b) - \delta(\omega + b)\right]\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$$\Rightarrow (f * g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} -j\pi\left[\delta(\omega - b) - \delta(\omega + b)\right]\frac{2a}{a^2 + \omega^2}e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$= -ja\left[\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega - b)\frac{1}{a^2 + \omega^2}\,e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega - \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega + b)\frac{1}{a^2 + \omega^2}\,e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega\right]$$

$$= -ja\left(\frac{e^{jbt}}{a^2 + b^2} - \frac{e^{-jbt}}{a^2 + b^2}\right) = \frac{2a}{a^2 + b^2}\left(\frac{e^{jbt} - e^{-jbt}}{2j}\right) = \frac{2a}{a^2 + b^2}\,\sin(bt)$$

$$(f * g)(t) = \frac{2a}{a^2 + b^2}\sin(bt)$$

Pregunta 4

Sea $f(t) = \sin(t/2)$, $0 \leq t \leq \pi$. Desarrolle $f(t)$ en serie de Fourier en cosenos. Utilice el resultado anterior y el teorema de Parseval para calcular $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2 - 1)^2}$

Solución

Para el desarrollo en serie de Fourier de cosenos, tenemos $T = 2\pi \Rightarrow \omega_0 = 1$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}\frac{1}{(1 - 4n^2)}$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{1}{(1 - 4n^2)}\cos(nt)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2}\frac{1}{\left(4n^2 - 1\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(4n^2 - 1\right)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(4n^2 - 1\right)^2} = \frac{1}{16}\left(\pi^2 - 8\right)$$

Pregunta 5

Sea $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < t < \pi \\ 0 & \text{si} \quad \pi < t < 3\pi \\ 1 & \text{si} \quad 3\pi < t < 4\pi \end{cases}$

a. Dibuje el espectro discreto de magnitud de la serie trigonométrica de Fourier para las primeras cinco armónicas.

b. Demuestre que $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ utilizando la serie trigonométrica de Fourier.

Solución

La función $f(t)$ es una función par, lo que implica que los término b_n sean 0. $T = 4\pi \Rightarrow \omega_0 = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{4}{4\pi}\int_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{nt}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{nt}{2}\right)$$

Reescribamos la sumatoria notando como se comporta $\sin(n\pi/2)$. Sea k donde $k \in \mathbb{Z}$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 4k \\ 1 & \text{si} \quad n = 4k+1 \\ 0 & \text{si} \quad n = 4k+2 \\ -1 & \text{si} \quad n = 4k+3 \end{cases}$$

Solo sobreviven los terminos cuando n es un impar y estos terminos van alternando el signo. Podemos reescribir una sumatoria de manera donde $g(n)$ los terminos de la sumatoria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}g(2n-1)$$

Evaluemos en 0 para determinar la sumatoria que pide el problema.

$$f(0) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

Pregunta 6

Obtenga la transformada inversa de Fourier de

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{j(\omega+\omega_0)}{a^2 + 2aj(\omega+\omega_0) - (\omega+\omega_0)^2} + \frac{j(\omega-\omega_0)}{a^2 + 2aj(\omega-\omega_0) - (\omega-\omega_0)^2}\right)$$

Solución

Los 2 términos de la función están desplazadas en ω. Obtenemos la inversa de una y agregamos el término para desplazar. Manipulamos la expresión para que quede en identidades conocidass en la tabla de Fourier.

$$\frac{j\omega}{a^2+2aj\omega-\omega^2}=\frac{j\omega}{(a+j\omega)^2}=\frac{j\omega+a-a}{(a+j\omega)^2}=\frac{1}{a+j\omega}-\frac{a}{(a+j\omega)^2}$$

De aquí, ya tenemos la expresión con el formato para fijarnos, la transformada inversa es

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a+j\omega}-\frac{a}{(a+j\omega)^2}\right\}=e^{-at}u(t)-ate^{-at}u(t)$$

Para los 2 términos agregamos el término de traslación en ω: $\mathscr{F}\left\{f(t)e^{j\omega_o t}\right\}=F(\omega-\omega_0)$

$$\frac{1}{2}\,\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{j\,(\omega+\omega_0)}{a^2+2aj(\omega+\omega_0)-(\omega+\omega_0)^2}+\frac{j\,(\omega-\omega_0)}{a^2+2aj(\omega-\omega_0)-(\omega-\omega_0)^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{j\omega}{a^2+2aj\omega-\omega^2}\right\}e^{-j\omega_0 t}+\frac{1}{2}\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{j\omega}{a^2+2aj\omega-\omega^2}\right\}e^{j\omega_0 t}$$

$$=\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{j\omega}{a^2+2aj\omega-\omega^2}\right\}\left(\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right)=\left(e^{-at}u(t)-ate^{-at}u(t)\right)\cos(\omega_0 t)$$

$$=(1-at)\,e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores III Examen Parcial I Ciclo Lectivo del 2011 Tiempo: 3 horas

Este es un examen de desarrollo. Debe mostrar todos los pasos que conducen a la respuesta. Resuelva el examen utilizando bolígrafo azul o negro. No se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz. Trabaje ordenadamente. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de cálculo simbólico (CAS). Calculadoras científicas son permitidas.

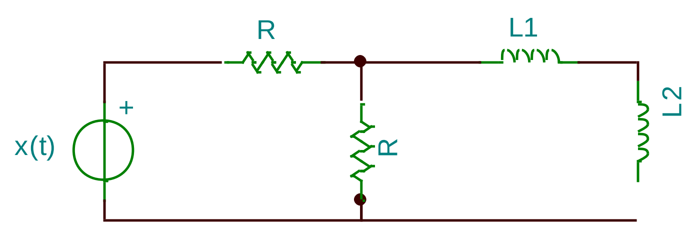
Preguntas 1 y 2	Prof. Aramis Pérez
Preguntas 3 y 4	Prof. Edison De Faria
Preguntas 5 y 6	Prof. Jhonny Cascante

1. La representación de una función $f(t)$ en serie trigonométrica de Fourier es:

$$f(t) = \frac{5}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(nt)}{n} - \frac{\text{sen}(nt)}{n}\right)$$

   a) Calcule la potencia contenida por las primeras 5 armónicas. (7 pts)
   b) Grafique el espectro de magnitud y fase para la serie compacta. (8 pts)

2. Considere el siguiente circuito:



   a) Determine la función de transferencia, si considera la corriente que pasa por los inductores como la salida. (10 pts)
   b) Si los inductores son de 1 H y la resistencia de 1 Ohm, calcule $y(t)$, si la entrada es $x(t) = 4\delta(t)$. (10 pts)

3. Utilice transformada de Fourier para calcular la convolución $(f * g)(t)$ si $f(t) = \text{sen}(bt)$, $g(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$. (15 pts)

4. Sea $f(t) = \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$, $0 \le t \le \pi$. (a) Desarrolle $f(t)$ en serie de Fourier en cosenos. (10 pts) (b) Utilice el resultado anterior y el teorema de Parseval para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(4n^2-1\right)^2}$ (10 pts)

5. Sea $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{si } \pi < t < 3\pi \\ 1 & \text{si } 3\pi < t < 4\pi \end{cases}$

a. Dibuje el espectro discreto de magnitud de la serie trigonométrica de Fourier para las primeras cinco armónicas. (10 pts)

b. Demuestre que $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ utilizando la serie trigonométrica de Fourier. (5 pts)

6. Obtenga la transformada inversa de Fourier de

$$F(\omega)=\frac{1}{2}\left(\frac{j\left(\omega+\omega_0\right)}{a^2+2aj\left(\omega+\omega_0\right)-\left(\omega+\omega_0\right)^2}+\frac{j\left(\omega-\omega_0\right)}{a^2+2aj\left(\omega-\omega_0\right)-\left(\omega-\omega_0\right)^2}\right)$$

(15 pts)

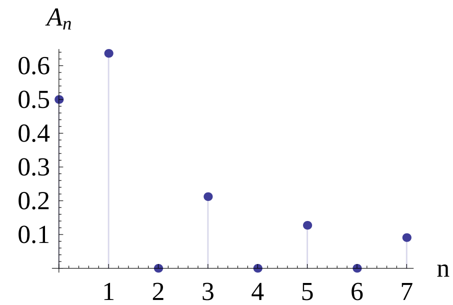
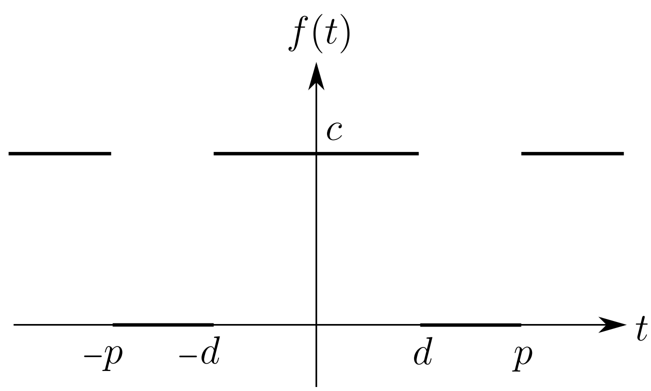


Figura 3.6: Espectro de amplitud, 5.a

3.5. III Parcial II Ciclo 2011

Pregunta 1

Desarrolle en serie trigonométrica de Fourier la función la función periódica



Solución

La función es par, solo va a tener términos a_n en una serie de Fourier. $T = p \Rightarrow \omega_0 = \dfrac{2\pi}{p}$

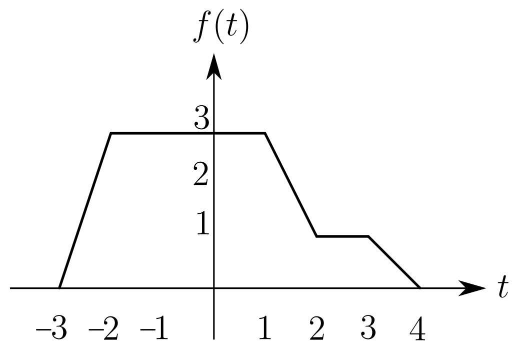
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p}\int_{-d}^{d} c\,\mathrm{d}t = \frac{2cd}{p}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{p}\int_{-d}^{d} c\,\cos\left(\frac{2\pi nt}{p}\right)\mathrm{d}t = \frac{4c}{p}\int_{0}^{d}\cos\left(\frac{2\pi nt}{p}\right)\mathrm{d}t = \frac{4c}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi nd}{p}\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2cd}{p} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2c}{\pi n}\sin\left(\frac{2\pi nd}{p}\right)\cos\left(\frac{2\pi nt}{p}\right)$$

Pregunta 2

Determine la transformada de Fourier de la función representada en la siguiente figura



Solución

En la pregunta nos dan la gráfica de la función, graficamos la segunda derivanda y usamos la propiedad de la transformada de Fourier de la derivada n–ésima.

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}f(t)\right\} = (j\omega)^n F(\omega)$$

Por otro lado:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) = 3\delta(t+3) - 3\delta(t+2) - 2\delta(t-1) + 2\delta(t-2) - \delta(t-3) + \delta(t-4)$$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t)\right\} = 3e^{3j\omega} - 3e^{2j\omega} - 2^{-j\omega} + 2e^{-2j\omega} - e^{-3j\omega} + e^{-4j\omega} = -\omega^2 F(\omega)$$

$$\Rightarrow F(\omega) = -\frac{1}{\omega^2}\left(3e^{3j\omega} - 3e^{2j\omega} - 2^{-j\omega} + 2e^{-2j\omega} - e^{-3j\omega} + e^{-4j\omega}\right)$$

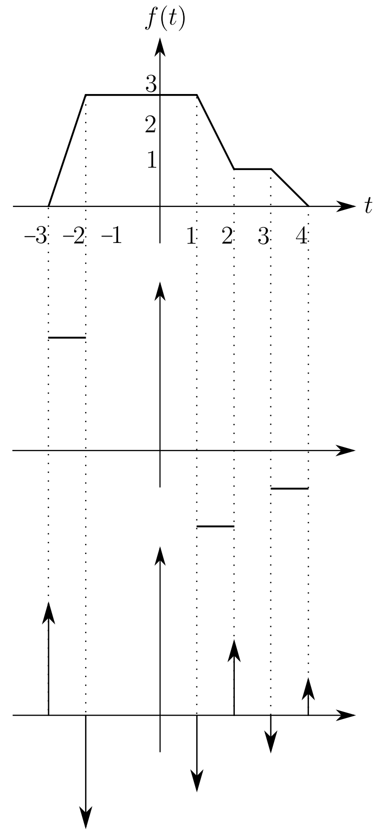
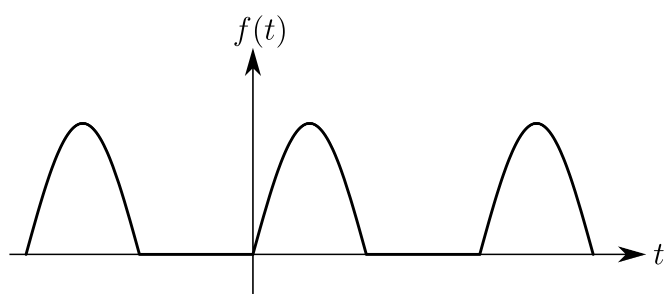


Figura 3.7: $f(t)$ con sus primera y segunda derivada.

Pregunta 3[1]

Si se aplica una tensión senoidal $f(t) = \sin(t)$ a través de un rectificador de medio onda, tal que se suprimen los ciclos negativos, determine la potencia contenida hasta la tercera armónica



Solución

[1] Los coeficientes son algo tramposos.

$T = 2\pi \Rightarrow \omega_0 = 1$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi \sin(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1+(-1)^n}{\pi}\frac{1}{1-n^2}$$

$$a_n = \frac{1+(-1)^n}{\pi}\frac{1}{1-n^2}\ ;\ n \neq 1$$

n no puede ser igual 1, obtengamos a_1 como caso especial.

$$a_1 = \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Ahora obtengamos los terminos b_n

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi \sin(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = 0$$

Ahora analicemos el caso de b_1. Resulta raro pensar que la integral de $\sin^2(t)$ sea 0.

$$b_1 = \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi \sin(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{\pi}\frac{1}{1-n^2}\cos(nt) + \frac{1}{2}\sin(t)$$

Notese que la sumatoria empieza en $n = 2$. La potencia hasta el tercer armónico se obtiene:

$$P_3 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3} a_n^2 + b_n^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(b_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$$

$$P_3 = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{4}{\pi^2\left(1-n^2\right)^2} + 0\right) \approx 0{,}227$$

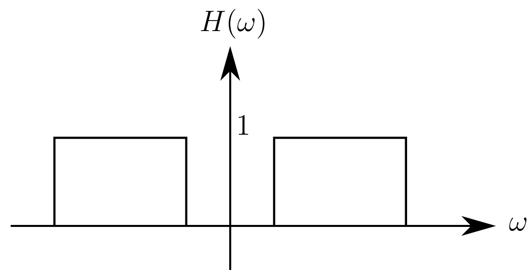
Pregunta 4

La señal $f(t) = 2\left(\sin^2(2t) - \cos^2(t)\right)$ si aplica un filtro pasa banda ideal con frecuencias de cruce en $-3;1$ rad/s y $1;3$ rads/s. Determine la función $y(t)$ de la señal de salida del filtro.

Solución

$$f(t) = 2\left[\sin^2(2t) - \cos^2(t)\right] = 2\left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(4t)}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2}\right)\right] = -\left[\cos(4t) + \cos(2t)\right]$$

$$F(\omega) = -\left[\pi\left[\delta(\omega-4) + \delta(\omega+4)\right] + \pi\left[\delta(\omega-2) + \delta(\omega+2)\right]\ \right]$$



$$F(\omega) = -\pi\left[\ \delta(\omega-4)+\delta(\omega+4)+\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2)\ \right]$$

Para obtener $y(t)$, calculemos la transformada inversa de $F(\omega)H(\omega)$.

Sea $\xi := \delta(\omega-4)+\delta(\omega+4)+\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2)$

$$\Rightarrow F(\omega) = \pi\xi$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-3}^{-1} -\pi\xi e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega + \int_{1}^{3} -\pi\xi e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\right]$$

Dentro de cada región de integracion, la integral de la izquierda, el único $\delta(\omega-\omega_0)$ dentro del intervalo es $\delta(\omega+2)$, para la integral de la derecha, el $\delta(\omega-2)$ es el único delta dentro del intervalo. Las integrales resultan:

$$\frac{1}{2\pi}\left(-\pi e^{-2jt} - \pi e^{2jt}\right) = -\cos(2t) \Rightarrow y(t) = -\cos(2t)$$

Pregunta 5

Sea $f(t) = \begin{cases} \pi^2 & si \quad -\pi < t < 0 \\ (t-\pi)^2 & si \quad 0 < t < \pi \end{cases}$ con $f(t+2\pi) = f(t)$

a. Determine la serie trigonométrica de Fourier para $f(t)$.

b. Utilice (a) para calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Solución

5.a) El periodo de la función es $T = 2\pi$, entonces tenemos que $\omega_0 = 1$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\pi^2\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi}(t-\pi)^2\ \mathrm{d}t\right) = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega_0 t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\pi^2\cos(nt)\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi}(t-\pi)^2\cos(nt)\ \mathrm{d}t\right) = \frac{2}{n^2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\pi^2\sin(nt)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi}(t-\pi)^2\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right)$$
$$\Rightarrow b_n = \frac{\pi(-1)^n}{n} - \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^3}$$

La serie de Fourier de $f(t)$ es

$$f(t) = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}\cos(nt) + \left[\frac{\pi(-1)^n}{n} - \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^3}\right]\sin(nt)$$

5.b) Para determinar la primera sumatoria, evaluamos en $t = 0$, para eliminar la parte del seno. La función en $t = 0$ es $f(0) = \pi^2$

$$f(0) = \pi^2 = \frac{2\pi^2}{3} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} = \frac{\pi^2}{6}$$

Para la segunda sumatoria, evaluamos en $t = \pi$, donde también se elimina la parte del seno. Al evaluar en $t = \pi$, coseno solo alterna el signo.

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

Ya que $f(t)$ es discontinua en $t = \pi$, la serie de Fourier converge al promedio de la función en ese punto

$$\frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{2} = \frac{2\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Pasando el signo al otro lado e incluyendo $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Pregunta 6

Calcule las siguientes transformada: $f(t) = t^2 e^{-5|t|}$

Solución

Empezemos por la definición y dividamos la integral en 2 intervalos

$$\mathscr{F}\left\{t^2 e^{-5|t|}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-5|t|} e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} t^2 e^{5t} e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\infty} t^2 e^{-5t} e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

La segunda integral que va de 0 a ∞ es equivalente a obtener la transformada de Fourier de $t^2 e^{-5t} u(t)$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} t^2 e^{-5t} e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(5+j\omega)^2}$$

La primera integral que va de $-\infty$ a 0, hacemos el cambio de variable $-t = u$

$$t \to 0 \Rightarrow u \to 0$$
$$t \to -\infty \Rightarrow u \to \infty$$

$$\int_{-\infty}^{0} t^2 e^{5t} e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} u^2 e^{-5u} e^{j\omega u}\,(-\mathrm{d}u)$$

Ahora, si hacemos $-\omega' = \omega$, obtenemos la misma expresión que la integral original que va de 0 a ∞ para evualuar la transformada de Fourier

$$-\int_0^{\infty} u^2 e^{-5u} e^{-j\omega' u}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{(5+j\omega')^2} = -\frac{1}{(5-j\omega)^2}$$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{t^2 e^{-5|t|}\right\} = -\frac{1}{(5-j\omega)^2} + \frac{1}{(5+j\omega)^2}$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

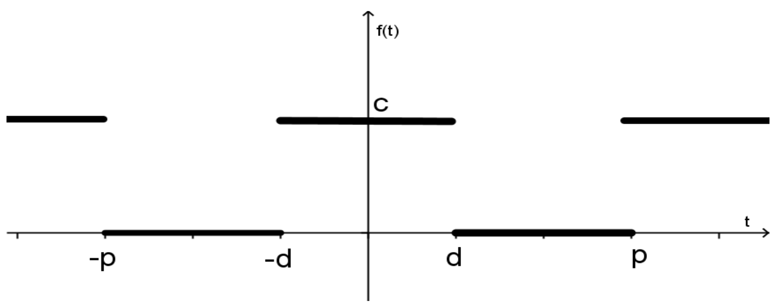
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores III Examen Parcial II Ciclo Lectivo del 2011 Tiempo: 3 horas

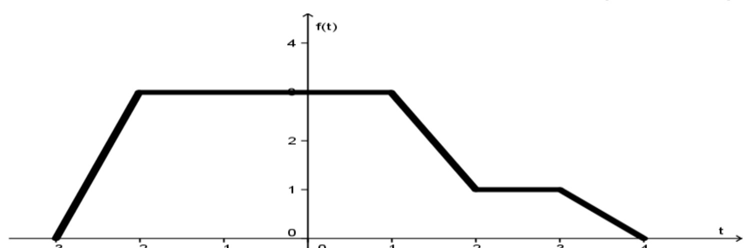
Este es un examen de desarrollo. Debe mostrar todos los pasos que conducen a la respuesta. Resuelva el examen utilizando bolígrafo azul o negro. No se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz. Trabaje ordenadamente. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de cálculo simbólico (CAS). Calculadoras científicas son permitidas.

Preguntas 1 y 2: Prof. Marvin Coto; 3 y 4 Prof. Aramis Pérez; 5 y 6 Prof. Edison De Faria

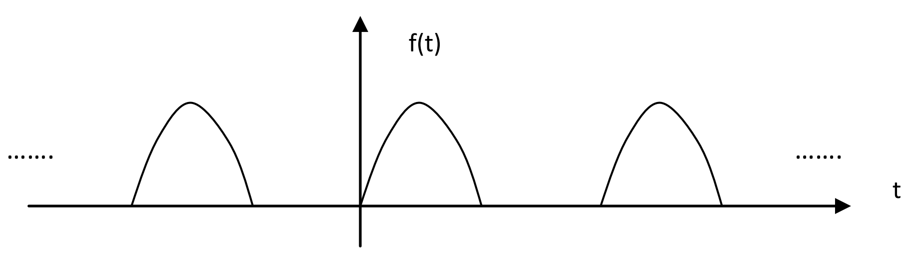
1. Desarrolle en serie trigonométrica de Fourier la función periódica representada en la siguiente figura (15 puntos).



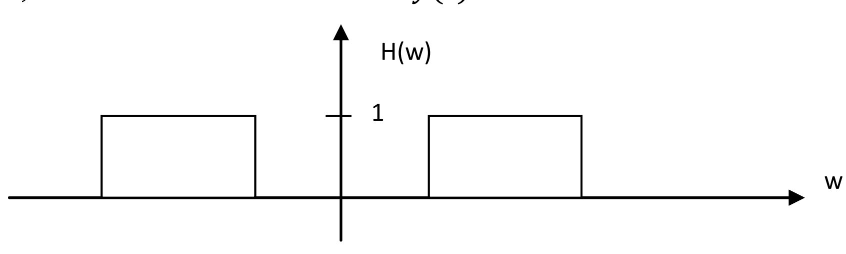
2. Determine la transformada de Fourier de la función representada en la siguiente figura (15 puntos):



3. Si se aplica una tensión senoidal $f(t) = sen(t)$ a través de un rectificador de media onda, tal que se suprimen los ciclos negativos, determine la potencia contenida hasta la tercera armónica. (15 puntos)



4. La señal $f(t) = 2\left(sen^2(2t) - cos^2(t)\right)$ se aplica a un filtro pasa banda ideal con frecuencias de cruce en -3;-1 rad/s y 1;3 rad/s. Determine la función $y(t)$ de la señal de salida del filtro. (20 puntos)



5. Sea $f(t) = \begin{cases} \pi^2, & -\pi < t < 0 \\ (t-\pi)^2, & 0 < t < \pi \end{cases}$ con $f(t+2\pi) = f(t)$.

   a. Determine la serie trigonométrica de Fourier para $f(t)$. (10 puntos)

   b. Utilice (a.) para calcular

      i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ (5 puntos cada)

6. Calcule las siguientes transformadas:

   a. La transformada de Fourier de $f(t) = t^2 \mathrm{e}^{-5|t|}$ (8 puntos)

   b. La transformada inversa de Fourier de $F(w) = \frac{10(4+j\,w)}{9 - w^2 + 8\,j\,w}$ (7 puntos)

3.6. III Parcial II Ciclo 2012

Pregunta 1

Sea $f(t) == \begin{cases} t^2 & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 < t < 2 \end{cases}$ periódica con periodo $T = 2$ segundos.

a. Desarrolle $f(t)$ en serie trigonométrica de Fourier.

b. Utilice el desarrollo anterior para calcular las sumas: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^2}{n^2}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solución

1.a) $T = 2 \Rightarrow \omega_0 = \pi$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{6}$$

Para las obtener los otros coeficientes, podemos ayudarnos con las integrales:

$$\int x^2 \cos(ax) \, \mathrm{d}x = \frac{2x}{a}\cos(ax) + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin(ax) + C$$

$$\int x^2 \sin(ax) \, \mathrm{d}x = \frac{2x}{a^2}\sin(ax) + \left(\frac{2}{a^3} - \frac{x^2}{a}\right)\cos(ax) + C$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^1 t^2 \cos(n\pi t) \, \mathrm{d}t = \frac{2\cos(n\pi)}{\pi^2 n^2} = \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$
$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^1 t^2 \sin(n\pi t) \, \mathrm{d}t = \left(\frac{2}{n^3\pi^3} - \frac{1}{n\pi}\right)(-1)^n - \frac{2}{n^3\pi^3}$$
$$f(t) = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos(n\pi t) + \left[\left(\frac{2}{n^3\pi^3} - \frac{1}{n\pi}\right)(-1)^n - \frac{2}{n^3\pi^3}\right]\sin(n\pi t)$$

1.b) Evaluamos en $t = 0$ para obtenes la primera sumatoria.

$$f(0) = 0 = \frac{1}{6} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Ahora evaluamos en $t = 1$ para eliminar el $(-1)^n$ con un $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Como la función no es continua en ese punto, la serie converge al promedio entre los puntos de discontinuidad, sacamos el promedio entre los 2 puntos, 1 y 0, que es 1/2

$$f(1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Pregunta 2

2.a)

$(a)\ e^{t^2}\sin(t), \qquad (b) f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -a < t < a \\ 0 & \text{si} \quad |t| > a \end{cases}$

$(c)\ \ g(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ utilizando el resultado del punto (b) y la propiedad de simetría.

Solución

2.a)

$$\mathscr{F}\left\{e^{t^2}\sin(t)\right\} = \mathscr{F}\left\{e^{t^2}\left(\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\right)\right\} = \frac{1}{2j}\mathscr{F}\left\{e^{t^2+jt} - e^{t^2-jt}\right\}$$

Completando cuadrados para los exponentes:

$$t^2 + jt = \left(t + \frac{j}{2}\right) + \frac{1}{4} \quad , \quad t^2 - jt = \left(t - \frac{j}{2}\right) + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2j}\mathscr{F}\left\{e^{t^2+jt} - e^{t^2-jt}\right\} = \frac{e^{\frac{1}{4}}}{2j}\left[\mathscr{F}\left\{e^{\left(t+\frac{j}{2}\right)^2}\right\} - \mathscr{F}\left\{e^{\left(t-\frac{j}{2}\right)^2}\right\}\right]$$

Ahora podemos usar la tabla de transformadas. La propiedad de traslación

$$\mathscr{F}\left\{f(t-t_0)\right\} = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Con $t_0 = \pm\dfrac{j}{2}$ para cada caso. Ahora usamos la transformada de la Gaussiana con $a = -1$

$$F(\omega) = \mathscr{F}\left\{e^{t^2}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{-1}}\exp^{\frac{-\omega^2}{4(-1)}} = \frac{\pi}{j}e^{\frac{\omega^2}{4}}$$

Combinando estas propiedades, tenemos

$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{e^{t^2}\sin(t)\right\} = \frac{e^{\frac{1}{4}}}{2j}\left(\frac{\pi}{j}e^{\frac{\omega^2}{4}}e^{\frac{-\omega}{2}} - \frac{\pi}{j}e^{\frac{\omega^2}{4}}e^{\frac{\omega}{2}}\right)$$

2.b)

$$\mathscr{F}\left\{f(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}\omega = \int_{-a}^{a} e^{-jwt}\mathrm{d}t = -\frac{e^{-j\omega a}}{j\omega} + \frac{e^{j\omega a}}{j\omega} = 2\,\frac{\sin(\omega a)}{\omega}$$

$$\mathscr{F}\left\{f(t)\right\} = 2\,\frac{\sin(\omega a)}{\omega}$$

2.c) Para obtener la transformada de Fourier de $g(t)$ usando la parte **2.b**, hacemos $a = 1$, y usamos la propiedad de simetría.

$$\mathscr{F}\left\{2\frac{\sin(t)}{t}\right\} = 2\pi f(-\omega) \Rightarrow \mathscr{F}\left\{\frac{\sin(t)}{t}\right\} = \pi f(\omega)$$

Usamos el hecho que $f(\omega)$ es una función par. Como evaluamos en $a = 1$, la función $f(\omega)$ es:

$$f(\omega)\begin{cases} \pi & \text{si} \quad |\omega| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |\omega| > 1 \end{cases}$$

Pregunta 3

Calcule la transformada inversa de Fourier de la siguiente función. Simplifique al máximo.

$$F(\omega) = \frac{1-\omega}{1+2j(\omega-1)-(\omega-1)^2}$$

Solución

$$F(\omega) = \frac{1-\omega}{1+2j(\omega-1)-(\omega-1)^2} = -\frac{\omega-1}{1+2j(\omega-1)-(\omega-1)^2}$$

La transformada esta desplazada en ω, sacamos la transformada inversa de solo ω y agregamos e^{jt} a la transformada inversa.

$$\frac{\omega}{1+2j\omega-\omega^2} = \frac{\omega}{(1+j\omega)^2} = \frac{1}{j}\frac{j\omega+1-1}{(1+j\omega)} = -j\left[\frac{1+j}{(1+j\omega)^2} - \frac{1}{(1+j\omega)^2}\right]$$

$$-j\left[\frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{1+j\omega}\right]$$

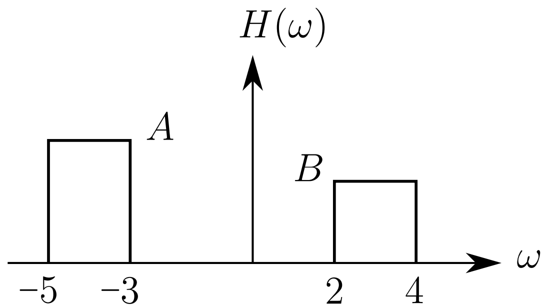
Ahora obtenemos la transformada inversa

$$-\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1-\omega}{1+2j(\omega-1)-(\omega-1)^2}\right\} = j\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{1+j\omega}\right\}e^{jt}$$

$$= j\left(e^{-t}u(t) - te^{-t}u(t)\right)e^{jt} = je^{-t}e^{jt}(1-t)u(t)$$

Pregunta 4

La señal de entrada $y(t) = e^{-5t}u(t)$ se aplica simultáneamente a dos filtros pasa bandas, cuyas funciones de transferencia se observan en la figura. La amplitud de uno de los filtros es A y la del otro B y el gráfico no está a escala. Determine la relación entre A y B y el gráfico no está a escala. Determine la relación entre A y B, tal que la energía de la señal de salida, $x(t)$ sea igual al 20 % de la enería total de entrada. Asuma que $x(t)$ es igual a la señal de cada uno de los filtros.
Nota: $\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$



Solución

$$y(t) = e^{-5t}u(t) \Rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{5 + j\omega}$$

El problema pide que la energía de la señal $x(t)$ sea un quinta parte de la energía de la señal de entrada.

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2\,\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{\infty} [y(t)]^2\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{5}$$

Utilizamos el teorema de Parseval:

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2\,\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{\infty} [y(t)]^2\,\mathrm{d}t} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 |H(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{25 + \omega^2}\,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 |H(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega = \int_{-5}^{3} \frac{A^2}{15 + \omega^2}\,\mathrm{d}\omega + \int_{2}^{4} \frac{B^2}{25 + \omega^2}\,\mathrm{d}\omega = \frac{A^2}{5}\arctan\left(\frac{\omega}{5}\right)\Big|_{-5}^{-3} + \frac{B^2}{5}\arctan\left(\frac{\omega}{5}\right)\Big|_{2}^{4}$$

$$= \frac{A^2}{5}\left[\arctan(1) - \arctan\left(\frac{3}{5}\right)\right] + \frac{B^2}{5}\left[\arctan\left(\frac{4}{5}\right) - \arctan\left(\frac{2}{5}\right)\right]$$

Después de hacer la división y reordenar un poco, A y B pueden tomar valores tal que cumplan con:

$$A^2\left[\arctan(1)-\arctan\left(\frac{3}{5}\right)\right]+B^2\left[\arctan\left(\frac{4}{5}\right)-\arctan\left(\frac{2}{5}\right)\right]=\frac{\pi}{5}$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores III Examen Parcial II Ciclo Lectivo del 2012 Tiempo: 3 horas

INDICACIONES: *Únicamente se permite calculadora científica. Muestre todos los pasos que conducen a la respuesta. Conteste las preguntas en forma ordenada y con letra clara; en lapicero negro o azul. Apague celulares, beepers y demás artefactos sonoros.*

Preguntas 1: Prof. Edison De Faria (Celeste); 2, 3 Profa. Mercedes Chacón (Naranja); 4: Prof. Aramis Pérez (Morado)

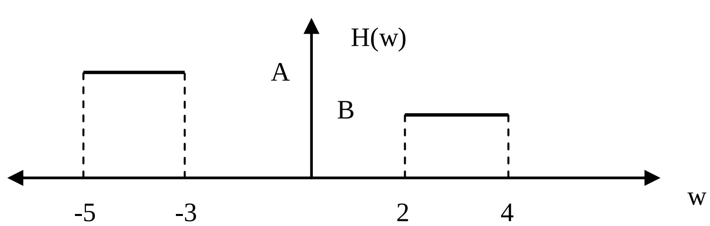
1. Sea $f(t)=\begin{cases} t^2 \ , \ 0<t<1 \\ 0 \ , \ 1<t<2 \end{cases}$ periódica con periodo $T = 2$ segundos.
   a. Desarrolle $f(t)$ en serie trigonométrica de Fourier. (10 puntos)
   b. Utilice el desarrollo anterior para calcular las sumas: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (5 puntos cada)
   c. Calcule el porcentaje de la potencia total contenida en las 2 primeras armónicas. (10 puntos)
2. Obtenga la transformada de Fourier de las siguientes funciones. Simplifique al máximo.

   (a) $e^{t^2}\operatorname{sen} t$ (10 puntos) (b) $f(t)=\begin{cases} 1 \ , \ -a<t<a \\ 0 \ , \ |t|>a \end{cases}$ (10 puntos)

   (c) $g(t)=\frac{\operatorname{sen} t}{t}$ utilizando el resultado del punto (b) y la propiedad de simetría. (5 puntos)

   (En caso de no encontrar el punto (b), puede utilizar otro método para calcular (c), obteniendo por esto la mitad de los puntos)
3. Calcule la transformada inversa de Fourier de la siguiente función. Simplifique al máximo. (20 puntos)
$$F(\omega)=\frac{1-\omega}{1+2j(\omega-1)-(\omega-1)^2}$$
4. La señal de entrada $y(t)=e^{-5t}u(t)$ se aplica simultáneamente a dos filtros pasa bandas, cuyas funciones de transferencia se observan en la figura. La amplitud de uno de los filtros es A y la del otro B y el gráfico no está a escala. Determine la relación entre A y B, tal que la energía de la señal de salida, $x(t)$ sea igual al 20% de la energía total de entrada. Asuma que $x(t)$ es igual a la señal de salida de cada uno de los filtros.

   Nota: $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$ (25 puntos)



3.7. III Parcial I Ciclo 2013

Pregunta 1

Sea $f(t) = |\cos(t)|\,, -\infty < t < \infty$

a) Desarrolle $f(t)$ en serie trigonométrica de Fourier.

b) Use la serie obtenida en (a) para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$

c) Utilice la obtenida en (a) y el teorema de Parseval para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}$

Solución

Ver **III Parcial II Ciclo 2014 Pregunta 5.b**

Pregunta 2

a) Utilice la definición de transformada de Fourier para demostrar que $\mathscr{F}\left\{e^{-a|t|}\right\} = \dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}, a > 0$

b) Utilice (a) y el teorema de Parseval para calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{(a^2 + \omega^2)^2}$

Solución

2.a)

Ver **III Parcial I Ciclo 2008 Pregunta 3**

2.b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2$$

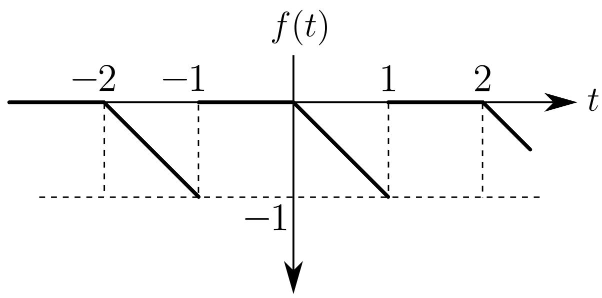
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|t|}\, \mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\infty} e^{-2at}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4a^2}{(a^2 + \omega^2)^2}\, \mathrm{d}\omega = \frac{2a^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + \omega^2)^2}\, \mathrm{d}\omega$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{a^2}\int_{0}^{\infty} e^{-2at}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + \omega^2)^2}\, \mathrm{d}\omega$$

$$\int_0^\infty e^{-2at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a} \Rightarrow \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\left(a^2+\omega^2\right)^2}\,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2a^3}$$

Pregunta 3

Considere la señal periódica $f(t)$ mostrada en la figura:



Muestre que el nivel DC y la primera armónica de $f(t)$ contienen (juntos) aproximadamente la mitad de su potencia promedio. Recuerde que $\int te^{kt}\,\mathrm{d}t = \dfrac{(kt-1)e^{kt}}{k^2} + C$.

Solución

$T = 2 \Rightarrow \omega_0 = \pi$

$$c_n = \frac{1}{2}\int_0^1 -te^{-jn\pi t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[\frac{(-jn\pi t-1)e^{jn\pi t}}{-n^2\pi^2}\bigg|_0^1\right] = \frac{1}{2n^2\pi^2}\left[(-jn\pi-1)e^{-jn\pi}+1\right]$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{1-(-1)^n}{2n^2\pi^2} - \frac{j(-1)^n}{2n\pi}$$

Tomando en cuenta que $e^{-jn\pi} = (-1)^n$ y separar la parte real de la imaginaria.

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 -t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}$$

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\left[\frac{1-(-1^n)}{2n^2\pi^2} - \frac{j(-1)^n}{2n\pi}\right]e^{jn\pi t}$$

La potencia promedio de la función es

$$P = |c_0| + \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}|c_n|^2 = \int_0^1 t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{6}$$

La potencia almacenada en el DC y el primer armónico es

$$P_1 = \frac{1}{16} + 2\left[\frac{4}{4\pi^4} + \frac{1}{4\pi^2}\right] \approx 0{,}133693$$

La proporción de la potencia total que contienen el nivel DC y el primer armónico

$$\frac{0{,}133693}{\left(\frac{1}{6}\right)} \approx 0{,}802155$$

En realidad tiene más de la mitad de potencia total.

Pregunta 4

Una señal $f(t) = e^{-100t}u(t)$ es aplicada a un filtro pasa-bajos ideal cuya función de transferencia tiene una amplitud en la banda de paso de $|F(\omega)|_{\text{paso}} = 1$. Determine la frecuencia de corte necesaria para que el filtro disipe el 20 % de la energía de $f(t)$. Recuerde que $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$

Solución

Se pide que la señal de salida disipe el 20 % de la energía de entrada, de otra manera, que disipe 1/5 de la energía. Voy a cambiar la entrada a $f(t)$ por $x(t)$ y $F(\omega)$ por $H(\omega)$ a la función de transferencia. En la notación original $\mathscr{F}\{f(t)\} \neq F(\omega)$, lo cambio por eso.

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty}[y(t)]^2\ \mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{\infty}[x(t)]^2\ \mathrm{d}t} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}|Y(\omega)|^2\ \mathrm{d}\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\ \mathrm{d}\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2|X(\omega)|^2\ \mathrm{d}\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\ \mathrm{d}\omega} = \frac{1}{5}$$

Ya que $x(t) = e^{-100t}u(t) \Rightarrow X(\omega) = \frac{1}{100+j\omega} \Rightarrow |X(\omega)|^2 = \frac{1}{100^2+\omega^2}$

Evaluamos primero la integral del denominador

$$\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\ \mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{100^2+\omega^2}\ \mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{100^2+\omega^2}\ \mathrm{d}\omega + \int_{0}^{\infty}\frac{1}{100^2+\omega^2}\ \mathrm{d}\omega$$

$$\frac{1}{100}\arctan\left(\frac{\omega}{100}\right)\Bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{100}\arctan\left(\frac{\omega}{100}\right)\Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{1}{100}\pi$$

La integral del numerador, ya que es un filtro pasa bajos, los limites de la integral son $-\omega_c$ y ω_c, donde ω_c es la frecuencia de corte.

$$\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\frac{1}{100^2+\omega^2}\ \mathrm{d}\omega = \frac{1}{100}\arctan\left(\frac{\omega}{100}\right)\Bigg|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{2}{100}\arctan\left(\frac{\omega_c}{100}\right)$$

Al dividir las integrales, tenemos

$$\frac{2\arctan\left(\frac{\omega_c}{100}\right)}{\pi} = \frac{1}{5} \Rightarrow \omega_c = 100\arctan\left(\frac{\pi}{100}\right)$$

Pregunta 5

La serie trigonométrica de Fourier de una función periódica está dada por:

$$f(t) = \frac{Ad}{T} + \frac{2Ad}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{n\pi d}{T}}\sin\left(\frac{n\pi d}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

a. Calcule la amplitud y la fase de la n–ésima armónica, si se expresa $f(t)$ en forma compacta: $f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\left(n\omega_0 t + \Theta_n\right)$

b. Dibuje el espectro de amplitud hasta el primer cruce por cero, si $\frac{d}{T} = \frac{1}{5}$

c. Determine la serie de Fourier de la primera derivada de la función $f(t)$, descrita de la siguiente forma:

$$f'(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos\left(n\omega t\right) + \beta_n\sin\left(n\omega_o t\right)\right)$$

Solución

Al expandir el coseno la serie de Fourier compacta, comparamos los coeficientes que acompaan al coseno y el seno.

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\left(\frac{2\pi nt}{T} + \Theta_n\right)$$

$$= A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n\cos\left(\Theta_n\right)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) - A_n\sin\left(\Theta_n\right)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

$$\begin{cases} A_0 &= \frac{Ad}{T} \\ A_n\cos\left(\Theta_n\right) &= \frac{2A}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi d}{T}\right) \\ -A_n\sin\left(\Theta_n\right) &= 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Theta_n = 0 \Rightarrow A_n = \frac{2A}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi d}{T}\right)$$

Nota: Tanto la figura 3.8 como el cuadro 3.2 son los coeficientes que acompañan a A.

Pregunta 6

Encuentre la respuesta al impulso del filtro pasa altas ideal, si su función de transferencia está dada por: $H(\omega) = e^{-j\omega t_0} - H_B(\omega)$, donde $H_b(\omega)$ es la función de transferencia del filtro pasa bajas ideal, definida como:

$$H_B(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & \text{si} \quad |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{si} \quad |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Solución

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathscr{F}^{-1}\left\{H(\omega)\right\} \\ \mathscr{F}^{-1}\left\{H(\omega)\right\} &= \mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-j\omega t_0}\right\} - \mathscr{F}^{-1}\left\{H_B(\omega)\right\} \\ &= \delta(t-t_0) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

Evaluamos la integral y luego lo restamos al delta de Dirac.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega(t-t_0)}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{-j(t-t_0)}\right|_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

$$\frac{1}{2\pi(t-t_0)}\left(-\frac{e^{j\omega_c(t-t_0)}}{j} + \frac{e^{-j\omega_c(t-t_0)}}{j}\right) = -\frac{1}{\pi}\frac{\sin\left(\omega_c(t-t_0)\right)}{t-t_0}$$

$$\Rightarrow h(t) = \delta(t-t_0) + \frac{1}{\pi}\frac{\sin\left(\omega_c(t-t_0)\right)}{t-t_0}$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores III Examen Parcial I Ciclo Lectivo del 2013 Tiempo: 3 horas

INDICACIONES: *Toda consulta debe ser de forma, en voz alta y desde el asiento. Únicamente se permite calculadora científica. Muestre todos los pasos que conducen a la respuesta. Respuesta sin los cálculos correspondientes se califica con cero. Conteste las preguntas en forma ordenada y con letra clara; en lapicero negro o azul. Apague celulares y demás artefactos sonoros.*

Preguntas	1 y 2	3 y 4	5 y 6
Profesor(a)	Edison De Faria Campos	Teodoro Willink	Mercedes Chacón Vásquez
Color	celeste	amarillo	rosado

1) Sea $f(t)=|\cos(t)|,\ -\infty<t<\infty.$

   a) Desarrolle $f(t)$ en serie trigonométrica de Fourier. (10 puntos)

   b) Use la serie obtenida en (a) para calcular $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$. (5 puntos)

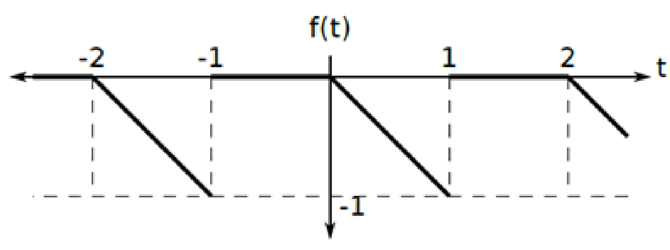
   c) Utilice la serie obtenida en (a) y el teorema de Parseval para calcular $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(4n^2-1\right)^2}$. (5 puntos)

2) a) Utilice la definición de Transformada de Fourier para demostrar que $\mathscr{F}\left\{e^{-a|t|}\right\}=\frac{2a}{a^2+\omega^2},\ a>0.$

   (8 puntos)

   b) Utilice (a) y el teorema de Parseval para calcular $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\left(a^2+\omega^2\right)^2}$. (7 puntos)

3) Considere la señal periódica $f(t)$ mostrada en la figura:



Muestre que el nivel DC y la primera armónica de $f(t)$ contienen (juntos) aproximadamente la mitad de su potencia promedio. Recuerde que $\int te^{kt}dt=\frac{(kt-1)e^{kt}}{k^2}+C$. (15 puntos)

4) Una señal $f(t)=e^{-100t}u(t)$ es aplicada a un filtro pasa-bajos ideal cuya función de transferencia tiene una amplitud en la banda de paso de $\left|F(\omega)\right|_{\text{paso}}=1.$ Determine la frecuencia de corte necesaria para que el filtro disipe el 20% de la energía de $f(t)$. Recuerde que $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C.$ (20 puntos)

5) La serie trigonométrica de Fourier de una función periódica está dada por:

$$f(t)=\frac{Ad}{T}+\frac{2Ad}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\frac{n\pi d}{T}}\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

A, *d*, *T* constantes.

a. Calcule la amplitud y la fase de la n-ésima armónica, si se expresa $f(t)$ en forma compacta: $f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(n\omega_0 t+\Theta_n\right).$

b. Dibuje el espectro de amplitud hasta el primer cruce por cero, si $\frac{d}{T}=\frac{1}{5}.$

c. Determine la serie de Fourier de la primera derivada de la función $f(t)$, descrita de la siguiente forma: $f'(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos\left(n\omega_0 t\right)+\beta_n\operatorname{sen}\left(n\omega_0 t\right)\right).$ (20 puntos total)

6) Encuentre la respuesta al impulso del filtro pasa altas ideal, si su función de transferencia está dada por: $H(\omega)=e^{-j\omega t_0}-H_B(\omega)$, donde $H_B(\omega)$ es la función de transferencia del filtro pasa bajas ideal, definida como:

$$H_B(\omega)=\begin{cases} e^{-j\omega t_0} & \text{si } |\omega|<\omega_c \\ 0 & \text{si } |\omega|>\omega_c \end{cases}$$

(15 puntos)

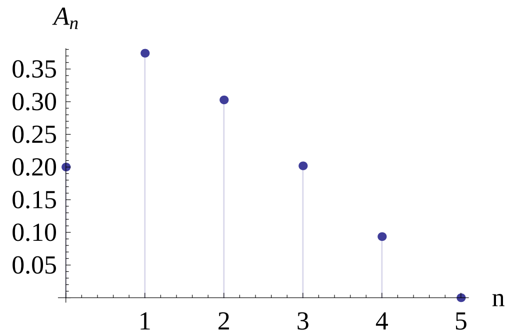


Figura 3.8: Espectro de amplitud del problema 5

Cuadro 3.2: Valor numérico del coeficiente de A_n

n	0	1	2	3	4	5
A_n	0.2	0.374196	0.302731	0.20182	0.0935489	0

3.8. III Parcial II Ciclo 2013

Pregunta 1

Sea $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi < t < 0 \\ \sin(t) & \text{si} \quad 0 \leq t < \pi \end{cases}$ con $f(t+2\pi) = f(t)$

a) Desarrolle $f(t)$ en serie trigonométrica de Fourier.

b) Utilice la serie anterior para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

c) Utilice Parseval para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$

Solución

1.a) Ver **III Parcial II Ciclo 2011 3)**, donde se obtiene la serie de Fourier para la función del problema.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\pi} \frac{1}{1-n^2} \cos(nt) + \frac{1}{2} \sin(t)$$

1.b) Los términos impares de a_n se mueren debido al término que alterna signo. Solo los términos pares sobreviven. Si cambiamos la sumatoria de $n = 2m$ con m corriendo de 1 hasta ∞. La función queda

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{1}{1-4m^2} \cos(2mt) + \frac{1}{2}\sin(t)$$

Evaluamos la función en $t = \pi/2$ para obtener el nuevo término que alterna en la sumatoria ya que eliminamos el término anterior que alternaba

$$\cos\left(2m \cdot \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^m$$

Voy a sacar un menos de la sumatoria y cambiar el orden del denominador. Ya que $f(\pi/2) = 1$.

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2-1} + \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2-1} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right)$$

1.c) Teorema de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2}\left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]$$

Evaluo la integral y hago lo mismo de la parte **1.b)** de cambiar $n = 2m$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(4m^2-1)^2} + \frac{1}{8} \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(4m^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2}\right)$$

Pregunta 2

a) Muestre que $\mathscr{F}\{u(t+a) - u(t-a)\} = 2a\left(\frac{a\omega}{a\omega}\right)$, $a \neq 0$, $u(t)$ escalón unitario.

b) Utilice a) para calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(a\omega)}{a\omega}\right)^2 \mathrm{d}\omega$. Simplifique el resultado.

Solución

2.a)

$$\mathscr{F}\{u(t+a) - u(t-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [u(t+a) - u(t-a)]\, e^{-j\omega t} \, \mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} e^{-j\omega t} \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{e^{ja\omega} - e^{-ja\omega}}{j\omega} = 2a\left(\frac{e^{ja\omega} - e^{-ja\omega}}{a2j\omega}\right) = 2a\left(\frac{\sin(a\omega)}{a\omega}\right)$$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{u(t+a)-u(t-a)\right\} = 2a\left(\frac{\sin(a\omega)}{a\omega}\right)$$

2.b) Teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t)\right]^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left[u(t+a)-u(t-a)\right]^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 4a^2\left(\frac{\sin(a\omega)}{a\omega}\right)^2 \, \mathrm{d}\omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(a\omega)}{a\omega}\right)^2 \mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2a^2}\int_{-a}^{a} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{a}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(a\omega)}{a\omega}\right)^2 \mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{a}$$

Pregunta 3

Sea $f(t) = 1-t$ para $0 < t < 2$, con $f(t+2) = f(t)$

a) Encuentre la serie compleja de Fourier para $f(t)$.

b) Dibuje los espectros de magnitud y de fase de $f(t)$ para las primeras 3 armónicas.

Solución

3.a) El periodo de $f(t)$ es $T = 2$, tenemos entonces $\omega_0 = \pi$. Hallamos los coeficientes c_n de la serie compleja

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^2 (1-t)e^{-jn\pi t} \, \mathrm{d}t = \frac{-j}{n\pi}$$

Calculamos el caso para c_0 ya que se indefine en $n = 0$

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 (1-t) \, \mathrm{d}t = 0$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{-j}{n\pi} e^{n\pi j t}$$

3.b)

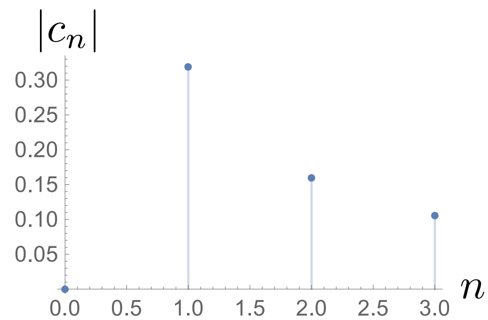


Figura 3.9: Espectro de magnitud de la pregunta 3.b

Cuadro 3.3: Espectro de magnitud numérico de $|c_n|$

n	0	1	2	3
$\lvert c_n \rvert$	0	0.31831	0.159155	0.106103

Pregunta 4

Encuentre el espectro de magnitud de la señal modulada $f(t) = A(1+A\cos(\omega_m t))\cos(\omega_c t)$, si $\omega_m = 100$ Hz, $\omega_c = 2000$ Hz.

Solución

$$f(t) = A(1 + A\cos(\omega_m t))\cos(\omega_c t) = A\cos(\omega_c t) + A^2\cos(\omega_m t)\cos(\omega_c t)$$

Ahora pasamos los cosenos a exponenciales

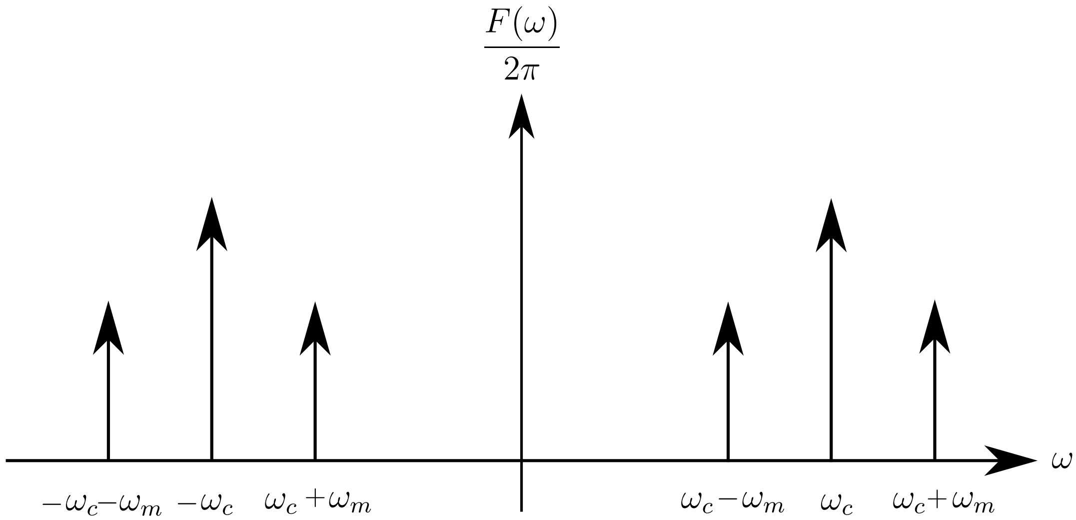
$$= A\left(\frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2}\right) + A^2\left(\frac{e^{j\omega_m t} + e^{-j\omega_m t}}{2}\right)\left(\frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2}\right)$$

$$= A\left(\frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2}\right) + \frac{A^2}{4}\left(e^{j(\omega_m+\omega_c)t} + e^{j(\omega_m-\omega_c)t} + e^{j(-\omega_m+\omega_c)t} + e^{-j(\omega_m+\omega_c)t}\right)$$

$$= \frac{A}{2}\left(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}\right) + \frac{A^2}{4}\left(e^{j(\omega_c+\omega_m)t} + e^{-j(\omega_c+\omega_m)t}\right) + \frac{A^2}{4}\left(e^{j(\omega_c-\omega_m)t} + e^{-j(\omega_c+\omega_m)t}\right)$$

De aquí podemos obtener directamente la transformada de Fourier y obtener el espectro de magnitud, ya que las transformadas de estas exponenciales son deltas de Dirac.

$$F(\omega) = 2\pi\Bigg[\frac{A}{2}\left(\delta(\omega-\omega_c) + \delta(\omega+\omega_c)\right) + \frac{A^2}{4}\left(\delta(\omega-(\omega_c+\omega_m)) + \delta(\omega+(\omega_c+\omega_m))\right)$$
$$+\frac{A^2}{4}\left(\delta(\omega-(\omega_c-\omega_m)) + \delta(\omega+(\omega_c-\omega_m))\right)\Bigg]$$



El gráfico está hecho asumiendo que $\omega_m \ll \omega_c$. Mucho más grande me refiero que el $\pm\omega_c \pm \omega_m$ siempre se queda del mismo lado positivo o negativo de ω. Las alturas de los deltas se asumieron, ya en general no se puede decir si A es mayor o menor $A^2/4$, pero el la simetría en ω sí es así.

Pregunta 5

Determine la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

a) $f(t) = \dfrac{1}{1+(3t^2)}$

b) $g(t) = te^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}$

Solución

5.a) Usemos la propiedad 4 de simetría y luego usamos la propiedad 20. Manipulemos para que quede de esa forma

$$\frac{1}{1+9t^2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3^2}\right)+t^2}$$

Teniendo en cuenta que vamos a usar $F(t) = 2\pi f(-\omega)$. Ya tenemos la forma para aplicar la propiedad 20 con $a = 1/3$ y $t_0 = 0$

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = \mathscr{F}\left\{\exp\left(-\frac{1}{3}|t|\right)\right\} = \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3^2}+\omega^2} = F(\omega)$$

Ahora cambiamos a $F(t)$ con el 1/6 afuera

$$\frac{1}{6}F(t) = \frac{1}{6}\cdot\frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3^2}+t^2}$$

$$\frac{1}{6}\mathscr{F}\left\{\frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3^2}+t^2}\right\} = \frac{1}{6}\cdot 2\pi f(-\omega) = \frac{\pi}{3}\exp\left(-\frac{1}{3}|\omega|\right)$$

5.b)

$$g(t) = te^{-\frac{1}{2}(t-1)^2} = (t-1+1)\,e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2} = (t-1)e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2} + e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}$$

Saquemos primero la transformada de $(t-1)e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}$. Vemos que esta desplaza en $t-1$. Entonces ocupemenos de $te^{-\frac{1}{2}t^2}$. Sabemos por la tabla que la transformada de una Gaussiana es

$$\mathscr{F}\left\{e^{-\frac{1}{2}t^2}\right\} = \sqrt{2\pi}e^{\frac{-\omega^2}{2}}$$

Usamos la propiedad 8 de la tabla

$$\mathscr{F}\left\{te^{-\frac{1}{2}t^2}\right\} = j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\sqrt{2\pi}e^{\frac{-\omega^2}{2}} = -j\sqrt{2\pi}\omega e^{\frac{-\omega^2}{2}}$$

Trasladamos con la propiedad 2

$$\mathscr{F}\left\{(t-1)e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}\right\} = -j\sqrt{2\pi}\omega e^{\frac{-\omega^2}{2}}e^{-j\omega}$$

Trasladamos la Gaussiana

$$\mathscr{F}\left\{e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}\right\} = \sqrt{2\pi}e^{\frac{-\omega^2}{2}}e^{-j\omega}$$

Sumamos todos los términos

$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{te^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}\right\} = -j\sqrt{2\pi}\omega e^{\frac{-\omega^2}{2}}e^{-j\omega} + \sqrt{2\pi}e^{\frac{-\omega^2}{2}}e^{-j\omega}$$

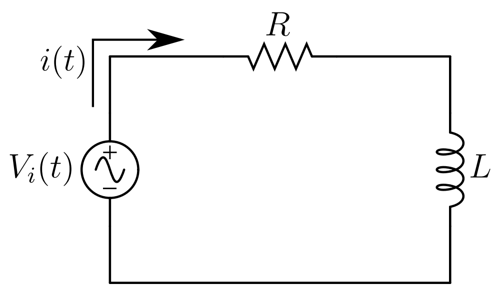
Pregunta 6

Para el circuito RL de la figura abajo:

a) Determine la función de transferencia, donde la entrada es $v_i(t)$ y la salida es $i(t)$. No aplique funciones de impedancia para obtener su respuesta.

b) Determine la respuesta al impulso unitario.

c) Encuentre la energía de la señal de salida, si la densidad espectral de la entrada está dada por $|V_i(\omega)|^2 = K$, K constante.



Solución

6.a) Aplicando la Ley de Faraday, obtenemos la ecuación que modela el circuito

$$-V_i(t) + iR = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \Rightarrow V_i(t) = iR + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Aplicando la transformada de Fourier, obtenemos

$$V_i(\omega) = RI(\omega) + jL\omega I(\omega) \Rightarrow \frac{I(\omega)}{V_i(\omega)} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1}{L}\cdot\frac{1}{\dfrac{R}{L} + j\omega} = H(\omega)$$

6.b) Usamos la propiedad 22 de la tabla de Fourier para obtener $h(t)$

$$h(t) = \mathscr{F}^{-1}\left\{H(\omega)\right\} = \mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{L}\cdot\frac{1}{\dfrac{R}{L} + j\omega}\right\} = \frac{1}{L}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)u(t) = h(t)$$

6.c)

$$\int_{-\infty}^{\infty}[i(t)]^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|I(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|V_i(\omega)|^2|H(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{K}{2\pi L^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2} \, \mathrm{d}\omega = \frac{K}{2\pi R L} \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{K}{2RL}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left[i(t)\right]^2 \, \mathrm{d}t = \frac{K}{2RL}$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IE-305 Matemáticas Superiores III Examen Parcial II Ciclo Lectivo del 2013 Tiempo: 3 horas

INDICACIONES:
Toda consulta debe ser de forma, en voz alta y desde el asiento. Únicamente se permite calculadora científica.
Muestre todos los pasos que conducen a la respuesta. Respuesta sin los cálculos correspondientes se califica con cero.
Conteste las preguntas en forma ordenada y con letra clara; en lapicero negro o azul.

Preguntas	1 y 2	3 y 4	5 y 6
Profesor(a)	Edison De Faria	Jhonny Cascante	Mercedes Chacón
Color	Azul	Verde	Rosado

1) Sea $f(t)=\begin{cases} 0 \text{ si } -\pi<t<0 \\ \text{sen}(t) \text{ si } 0\le t<\pi \end{cases}$ con $f(t+2\pi)=f(t)$.

   a) Desarrolle $f(t)$ en serie trigonométrica de Fourier. (10 puntos)

   b) Utilice la serie anterior para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$. (5 puntos)

   c) Utilice Parseval para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(4n^2-1\right)^2}$. (5 puntos)

2) a) Muestre que $\mathscr{F}\left\{u(t+a)-u(t-a)\right\}=2a\left(\dfrac{\text{sen}\, a\omega}{a\omega}\right)$, $a\neq 0$, $u(t)$ escalón unitario. (5 puntos)

   b) Utilice a) para calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\text{sen}\, a\omega}{a\omega}\right)^2 d\omega.$ Simplifique el resultado. (10 puntos)

3) Sea $f(t)=1-t$ para $0<t<2$, con $f(t+2)=f(t)$.

   a) Encuentre la serie compleja de Fourier para $f(t)$. (7 puntos)

   b) Dibuje los espectros de magnitud y de fase de $f(t)$ para las primeras 3 armónicas. (8 puntos)

4) Encuentre el espectro de magnitud de la señal modulada $f(t)=A\left(1+A\cos\left(\omega_m t\right)\right)\cos\left(\omega_c t\right)$, si $\omega_m=100\,\text{Hz}$, $\omega_c=2000$ Hz. (15 puntos)

5) Determine la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

   a) $f(t)=\dfrac{1}{1+\left(3t\right)^2}$ (10 puntos)

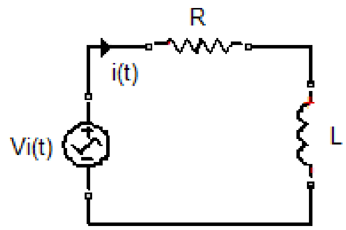
   b) $g(t)=t\,e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}$ (10 puntos)

6) Para el circuito RL de la figura abajo:

   a) Determine la función de transferencia, donde la entrada es $v_i(t)$ y la salida es $i(t)$. No aplique funciones de impedancia para obtener su respuesta. (7 puntos)

   b) Determine la respuesta al impulso unitario. (3 puntos)

c) Encuentre la energía de la señal de salida, si la densidad espectral de energía de la entrada está dada por $\left|V_i(\omega)\right|^2 = K$, K constante. (5 puntos)



AYUDAS:

$$\int t\,e^{at}dt = \frac{at-1}{a^2}e^{at} + C,\ \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C,\ \cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2},\ \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$$

3.9. III Parcial II Ciclo 2014

Pregunta 1

Para la función periódica $f(t) = t^2$, $-\pi \leq t \leq \pi$ con serie de Fourier definida como sigue:

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$$

a. Determine el valor númerico de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

b. Determine el valor númerico de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

c. Determine la potencia asociada a la tercera armónica.

Solución

1.a)

Evaluamos en $t = \pi$. Ya que la función da π^2 en $t = \pi$ en ambos lados de la expansión, el valor de la de la serie de Fourier en $t = \pi$ es π^2. El coseno queda como el termino $(-1)n$ alternando, cancelando el otro.

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

1.b) Usamos el teorema de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 \, dt = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

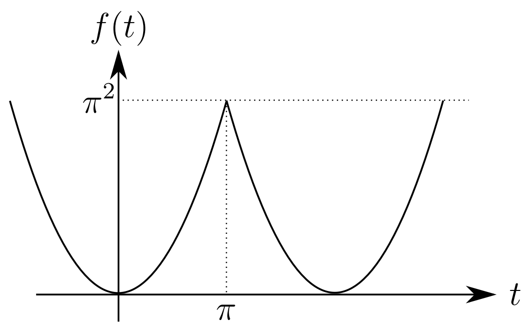
El término a_n es $a_n = 4(-1)^n/n^2$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4 \, dt = \frac{\pi^4}{5}$$

$$\frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

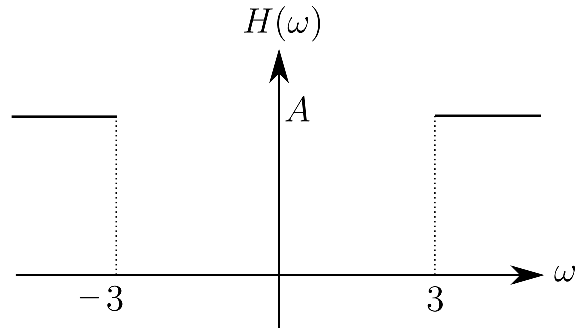
1.c) Supongo que se refiere a la potencia de solo la tercera armónica, no toda la potencia hasta ahi.

$$P_3 = \frac{1}{2}a_3^2 = \frac{1}{2}\frac{16}{3^4} = \frac{8}{81} \approx 0{,}0987654$$



Pregunta 2

Cierto sistema tiene una función de transferencia $H(\omega)$ como la de la figura, la cual es A si $|\omega| \geq 3$ y 0 en caso contrario. Determine el valor de A si en la entrada se aplica una señal que tiene la forma $x(t) = 3e^{-3t}u(t)$ y únicamente se propaga el 75 % de la energía a la salida.



Solución

Relacionamos las integrales de energía, donde la energía de la senãl $y(t)$ es 3/4 de la senñal de $x(t)$

$$\frac{3}{4} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [y(t)]^2 \, \mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 \, \mathrm{d}t} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega}$$

Si tenemos la señal $x(t) = 3e^{-3t}u(t)$, con la tabla obtenemos que la transformada de Fourier es $X(\omega) = \dfrac{3}{3+j\omega}$. Además, estas integrales son de funciones pares, integremos solo la parte positiva.

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega} = \frac{\int_{3}^{\infty} \frac{9A^2}{9+\omega^2} \, \mathrm{d}\omega}{\int_{0}^{\infty} \frac{9}{9+\omega^2} \, \mathrm{d}\omega} = \frac{\frac{A^2}{3} \arctan\left(\frac{\omega}{3}\right)\Big|_3^{\infty}}{\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{\omega}{3}\right)\Big|_0^{\infty}}$$

$$= \frac{A^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{A^2}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Pregunta 3

Dado la función $f(t) = e^t$, $-\pi \leq t \leq \pi$, $f(t+2\pi) = f(t)$

a. Desarrolle $f(t)$ en serie trigonométrica de Fourier

b. Utilice la serie desarrollada en la parte anterior para calcular el valor numérico de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

Solución

3.a)

$T = 2\pi \Rightarrow \omega_0 = 1$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\sinh(\pi)$$

En los coeficientes de a_n y b_n voy a usar que $\sin(\pm n\pi) = 0$ y $\cos(\pm n\pi) = (-1)^n$. Y voy a usar las integrales en la ayuda del examen

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos(nt) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\cos(nt) + n\sin(nt)}{1+n^2}\right)e^t\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi(1+n^2)}\left((-1)^n e^{\pi} - (-1)^n e^{-\pi}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) = \frac{2(-1)^n}{\pi(1+n^2)}\sinh(\pi) \Rightarrow a_n = \frac{2(-1)^n}{\pi(1+n^2)}\sinh(\pi)$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin(nt) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\sin(nt) - n\cos(nt)}{1+n^2}\right)e^t\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi(1+n^2)}\left(-n(-1)^n e^{\pi} + n(-1)^n e^{-\pi}\right)$$

$$= \frac{-n(-1)^n}{\pi(1+n^2)}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) = \frac{2n(-1)^{n+1}}{\pi(1+n^2)}\sinh(\pi) \Rightarrow b_n = \frac{2n(-1)^{n+1}}{\pi(1+n^2)}\sinh(\pi)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2}{\pi}\sinh(\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi(1+n^2)}\sinh(\pi)\cos(nt) + \frac{2n(-1)^{n+1}}{\pi(1+n^2)}\sinh(\pi)\sin(nt)$$

3.b)

Evaluamos en $t = \pi$. Ya que la función es discontinua, tenemos que promediar los valores para obtener donde converge la serie. Los términos b_n se mueren todos por $\sin(n\pi) = 0$

$$f(\pi) = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} = \cosh(\pi) = \frac{1}{\pi}\sinh(\pi) + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$$

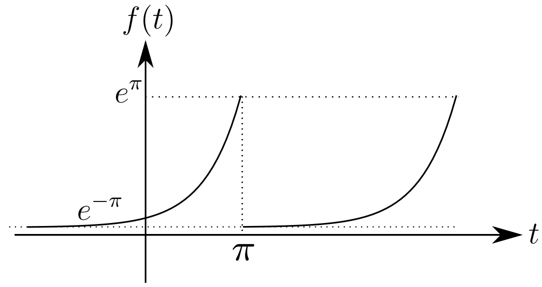


Figura 3.10: Gráfico, Pregunta 3

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left[\pi \coth(\pi) - 1\right]$$

Pregunta 4

Si la transformada de Fourier $\mathscr{F}\{f(t)\} = \dfrac{2e^{-j\omega}}{1+2\omega^2}$, calcule $\mathscr{F}\{f(3t-5)\}$

Solución

Sea $H(\omega)$ la transformarda de Fourier de $h(t)$. Obtengamos $\mathscr{F}\{h(at-b)\}$

$$\mathscr{F}\{h(at-b)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(at-b)\exp(-j\omega t)$$

Sea $u = at-b \Rightarrow t = (u+b)/a$ y $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/a$ y cambiamos la integral a

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\exp\left(-j\omega\left(\frac{u+b}{a}\right)\right)\ \frac{\mathrm{d}u}{a} = \frac{1}{a}\exp\left(-j\omega\frac{b}{a}\right)\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\exp\left(-j\left(\frac{\omega}{a}\right)u\right)\ \mathrm{d}u = \frac{1}{a}\exp\left(-j\omega\frac{b}{a}\right)H\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\{h(at-b)\} = \frac{1}{a}\exp\left(-j\omega\frac{b}{a}\right)H\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Ya que $\mathscr{F}\{f(t)\} = \dfrac{2\exp(-j\omega)}{1+2\omega^2}$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\{f(3t-5)\} = \frac{1}{3}\exp\left(-j\omega\frac{5}{3}\right)\frac{2\exp\left(\dfrac{\omega}{3}\right)}{1+2\left(\dfrac{\omega}{5}\right)^2}$$

Pregunta 5

Una función periódica está caracterizada por: $f(t) = A\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)$ para $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$

a. Dibuje la función mostrando al menos tres periodos.

b. Pruebe que la serie trigonométrica de Fourier de esta señal está dada por:

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)} \cos(n\omega_0 t)$$

5.a)

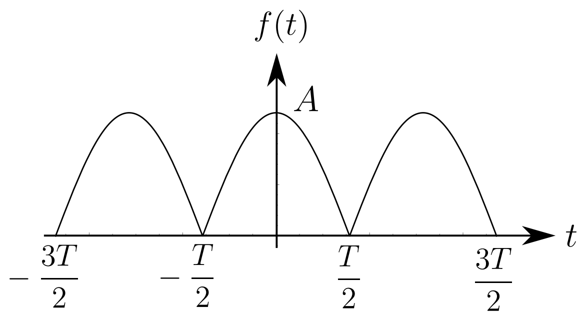


Figura 3.11: Gráfico, pregunta 5.a

5.b)

Sea $f(t) = A\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)$. El perdiodo de la función es T

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{4A}{\pi}$$

Para los términos a_n voy a usar la identidad

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{A}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2n-1}{T}\pi t\right) + \cos\left(\frac{2n+1}{T}\pi\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{A}{T}\left[\frac{\sin\left(\frac{2n-1}{T}\pi t\right)}{\frac{2n-1}{T}\pi} + \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{T}\pi t\right)}{\frac{2n+1}{T}\pi}\right]\Bigg|_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{A}{\pi}\left[\frac{\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-(2n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{2n-1} + \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1}\right]$$

Usamos que sin es una función impar, $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ y simplificamos

$$= \frac{A}{\pi}\left[\frac{2\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{2n-1} + \frac{2\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1}\right]$$

Ahora pasamos los senos a alternar con $(-1)^n$

$$\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(n\pi) = -(-1)^n$$

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$\Rightarrow \frac{2A}{\pi}\left[\frac{-(-1)^n}{2n-1} + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right] = \frac{2A}{\pi}\left[\frac{-2(-1)^n}{4n^2-1}\right] = \frac{4A(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$$

Los términos b_n son 0 ya que la función es par. Ya conocemos todos los a_n, ya podemos montar la serie de Fourier.

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2A}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos(n\omega_0 t)$$

Con $\omega_0 = 2\pi/T$

	Universidad de Costa Rica Escuela de Ingeniería Eléctrica	
	IE-0305 Matemáica Superior II Examen Parcial II-2014 3 horas	

Este es un examen de desarrollo. Debe mostrar todos los pasos que conducen a la respuesta. Resuelva el examen utilizando lapicero azul o negro. No se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz. Trabaje ordenadamente. No se permite el uso de calculadoras, celulares o tabletas con capacidad de cálculo simbólico. Calculadoras científicas son permitidas.

Preguntas	1 y 2	3 y 4	5 y 6
Profesor	Erick Carvajal	Edison De Faria	Jorge Romero
Color hoja	Melón	Gris	Turqueza

1) Para la función periódica $f(t)=t^2, -\pi \le t \le \pi$ con serie de Fourier definida como sigue:

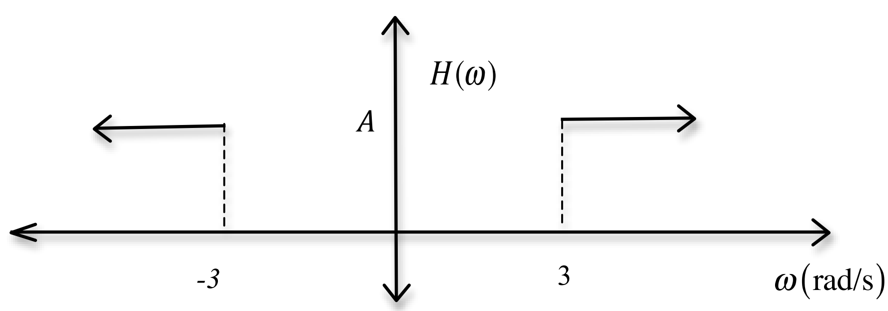
$$f(t)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$$

   a. Determine el valor numérico de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (5 puntos)

   b. Determine el valor numérico de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ (5 puntos)

   c. Determine la potencia asociada a la tercera armónica (5 puntos)

2) Cierto sistema tiene una función de transferencia $H(\omega)$ como la de la figura abajo, la cual es A si $|\omega| \ge 3$ rad/s y 0 caso contrario. Determine el valor de A si en la entrada se aplica una señal que tiene la forma $x(t)=3e^{-3t}u(t)$ y únicamente se propaga el 75% de la energía a la salida. (20 puntos)



3) Dado la función $f(t)=e^t, -\pi < t \le \pi, f(t+2\pi)=f(t)$

   a. Desarrolle $f(t)$ en serie trigonométrica de Fourier. (10 puntos)

   b. Utilice la serie desarrollada en la parte anterior para calcular el valor numérico de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$

   (10 puntos)

4) Si la transformada de Fourier $\mathfrak{F}\{f(t)\} = \frac{2e^{-j\omega}}{1+2\omega^2}$, calcule $\mathfrak{F}\{f(3t-5)\}$.   (15 puntos)

5) Una función periódica está caracterizada por:

$$f(t) = A\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right) \text{ para } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

a. Dibuje la función mostrando al menos tres periodos. (5 puntos)
b. Pruebe que la serie trigonométrica de Fourier de esta señal está dada por:

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)} \cos(n\omega_0 t) \qquad (1)$$

(10 puntos)

6) Un filtro pasabanda es un dispositivo electrónico que permite pasar las señales con frecuencias que están comprendidas entre un límite inferior (ω_a) y un límite superior (ω_b). Las otras señales con frecuencias fuera de tal banda $(\omega < \omega_a \text{ y } \omega > \omega_b)$ no pueden pasar y son eliminadas por el filtro. Suponga que usted tiene un filtro pasabanda con $\omega_a = 3\omega_0$ y $\omega_b = 6\omega_0$. Indique la potencia promedio total de todas las señales cuyas frecuencias son permitidas pasar por este filtro, a partir de la ecuación (1) del problema anterior (puede dejar el cálculo indicado). (15 puntos)

AYUDA:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c; \quad \int e^{ax}\cos(bx)dx = \left(\frac{a\cos(bx)+b\,\mathrm{sen}(bx)}{a^2+b^2}\right)e^{ax} + c;$$

$$\int e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)dx = \left(\frac{a\,\mathrm{sen}(bx)-b\cos(bx)}{a^2+b^2}\right)e^{ax} + c; \quad \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}; \quad \mathrm{senh}\,x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$\cos z = \frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2}; \quad \mathrm{sen}\,z = \frac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j}$$

Apéndice A

Ley de Faraday contra regla de Kirchhoff

Hay un muy común mal entendido acerca de la aplicación de las reglas de Kirchhoff al resolver un circuito con inductores. La regla de Kirchhoff supone que uno esta tratando con campos eléctricos conservativos. Los campos vectoriales conservativos tienen la buena y facil caracteristica que la función potencial que representa a estos campos dependen únicamente de los puntos iniciales y finales y no de la trayectoria.

$$-\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a})$$

En el caso especial donde hacemos una trayectoria cerrada, terminos en el mismo punto $\Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$

$$\Rightarrow \oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0$$

Lo cual se reduce a la regla de Kirchhoff. Esta ecuación supone que el campo eléctrico es consevativo, pero el problema inicia cuando el campo eléctrico es provocado cambios en los flujos de campos magneticos. La ley general es

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$

Y no necesariamente es 0.

El profesor Walter Lewin en las clases de electricidad y magnetismo del MIT realiza un experimento donde coloca 2 multimetros a medir el voltaje entre los 2 mismos nodos, peros estos NO dan la misma medida. Pueden ver la demostración experimental donde los voltajes de una trayectoria cerrada no suman cero en YouTube:

Lec 16: Electromagnetic Induction — 8.02 Electricity and Magnetism, Spring 2002 (Walter Lewin) Inicienlo desde el tiempo 35:13, que es donde empieza la discusión de esta parte. Las notas de curso [1](Obtenidas de MIT OpenCourseWare del curso *Physics II: Electricity and Magnetism 8.02*[2])

[1]Le agradezco por permitirme colocar sus apuntes en este compendio

[2]Ya no se puede accesar al MIT OpenCourseWare del curso de Lewin, las clases aún están en YouTube en una cuenta no oficial.

(que están en este apéndice), hechas por Walter Lewin y John Belcher respectivamente, viene una explicación del experimento hecho junto a una discusión más detallada de la confusión de Faraday contra Kirchhoff. Si, a la hora de diseñar un circuito y obtener ecuaciones de manera rápida sin ocupar mucho detalle, aplicar Kirchhoff al inductor da las ecuaciones correctas, pero aunque de las ecuaciones correctas, no significa que la física del planteamiento esté correcta.

Veamos que consecuencias tendría que la sumatoria de tensiones alrededor de una trayectoria cerrada siempre sea 0. Voy a probar que las ondas electromagnéticas no existirían de ser el caso. La forma diferencial de escribir las ecuaciones de Maxwell en el vacío tienen la forma

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Usemos una identidad vectorial, donde $\mathbf{A}$ es un vector arbitrario.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

Obtengamos la ecuación de onda primero para el campo eléctrico

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

Ya que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, por otro lado, ya que la densidad de carga es 0 (vacio)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Juntando los resultados, se obtiene la ecuación de onda

$$\Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Hacemos lo mismo para el campo magnético

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Al comparar los resultados, se obtiene el famoso resultado que $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$, donde c es la velocidad de la luz. Si la regla de Kirchhoff aplicara siempre, tendriamos

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \Longleftrightarrow \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

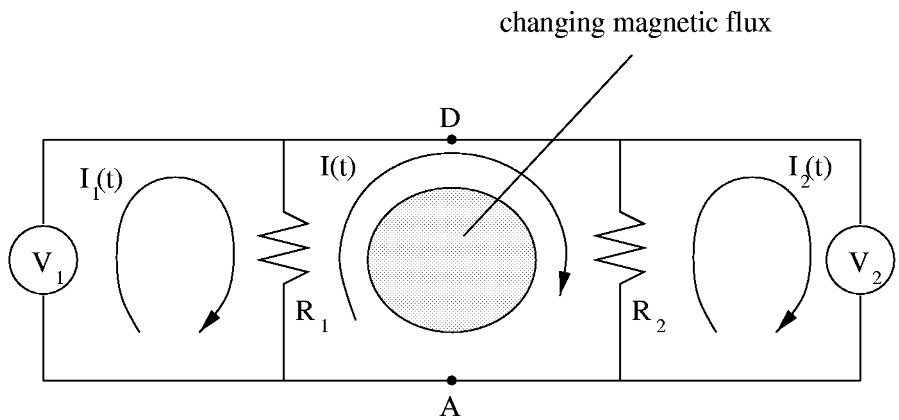
Para demostracíon de las ondas electromagnéticas, ocupamos $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$, no $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Si fuera 0, no obtendriamos la ecuación de onda. Por dicha Kirchhoff no cumple y Faraday sí, si no, las ondas EM no existirían. Eso sería catastrófico.

Massachusetts Institute of Technology - Physics Department

Physics 8.02 March 15, 2002.

Non-Conservative Fields - Do Not Trust Your Intuition!

The following notes may help you to digest the very *non-intuitive* consequences of Faraday's Law as discussed and demonstrated in my lecture of Friday, March 15.



A magnetic field is present in the shaded area; it is perpendicular to the page, and it is changing in time. There are two identical voltmeters V_1 and V_2, and two resistors R_1 and R_2; the internal resistance of each voltmeter, R_i, is much much larger than R_1 and R_2. All connecting wires have a negligible resistance.

We identify three **closed loops** in this circuit: the left loop with voltmeter V_1 and resistor R_1, the middle loop with the two resistors, and the right loop with voltmeter V_2 and resistor R_2. We call the currents in these loops $I_1(t)$, $I(t)$, and $I_2(t)$, respectively (see the diagram). We will assume that at time t the current in each loop is clockwise. If one (or more) of our currents turns out to be negative, it simply means that that current is counter clockwise.

In both the left and right closed loop we may apply Kirchhoff's 2nd rule:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{1}$$

However, in the middle closed loop this rule can **NOT** be used; instead we now MUST use Faraday's Law which ALWAYS holds, we could also have used Faraday's Law for the left and right loops (the right side of Faraday's Law would then have been zero):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}(t) = -\frac{d\phi_B}{dt} \tag{2}$$

NOTICE: the induced EMF, $\mathcal{E}$, only depends on the magnetic flux change through any open surface that we attach to the closed loop, thus it depends on the change in the B field in the shaded area (since we may choose any open surface, I suggest we choose a flat surface that lies in the plane of our paper). $\mathcal{E}$ is therefore independent of R_1 and R_2.

Applying the above equations, starting at A, and going clockwise around each loop separately, we have:

Left loop (eq. 1)	$I_1R_i + I_1R_1 - IR_1 = 0$	(3)
Middle loop (eq. 2)	$IR_1 + IR_2 - I_1R_1 - I_2R_2 = \mathcal{E}$	(4)
Right loop (eq. 1)	$I_2R_2 - IR_2 + I_2R_i = 0$	(5)

$R_i \gg R_1$ and $R_i \gg R_2$, therefore $I_1 \ll I$ and $I_2 \ll I$, and these equations can be simplified:

$$I_1R_i - IR_1 \approx 0 \quad (6)$$
$$I\,(R_1 + R_2) \approx \mathcal{E} \quad (7)$$
$$I_2R_i - IR_2 \approx 0 \quad (8).$$

Each voltmeter will show a reading which depends on the current through that meter (I_1 through the voltmeter on the left, and I_2 through the voltmeter on the right). The scales of the meters have been calibrated to show a voltage which is the product of the current through the meter and the internal resistance of that meter. Thus the left voltmeter will read $|V_1| = I_1R_i$, and the right voltmeter will read $|V_2| = I_2R_i$. If we substitute this in eqs. (6) and (8) we find:

$$|V_1| = I_1R_i \approx IR_1 \quad (9), \text{ and}$$
$$|V_2| = I_2R_i \approx IR_2 \quad (10).$$

If we connect the "+" side of both voltmeters with the A-side in the diagram (and the "-" side with the D-side), the recorded values of V_1 and V_2 at any point in time will be ***opposite*** in sign, as demonstrated in lectures. This is immediately obvious when you realize that a clockwise current I dictates a clockwise current I_1 as well as a clockwise current I_2 (this follows from eqs. 6 and 8; I, I_1 and I_2 always have the same sign). This means that when the current goes through the left voltmeter from its "+" side (A) to its "-" side (D), thus when it will indicate a "positive" voltage, that the current through the right voltmeter then goes from its "-" side (D) to its "+" side (A), and thus its voltage reading will be "negative".

If R_1 and R_2 are known, for given $\mathcal{E}$ (at a given point in time; see equation 2), the current I can be calculated from eq. (7), and the voltage readings follow from eqs. (9) and (10), but they will have an opposite sign. **Notice** that $|V_2 \,/\, V_1| \approx R_2 \,/\, R_1$ (independent of I).

Example

Suppose: $\mathcal{E} = 1$ Volt (at a given instant in time when the magnetic flux, coming out of the paper, is increasing), $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 900\ \Omega$, and $R_i = 10^7\ \Omega$, then, using eq. (7), we find $I \approx 1.0 \times 10^{-3}$ A (clockwise), and using eqs. (9) and (10), we find $|V_1| \approx \frac{1}{10}$ Volt, and $|V_2| \approx \frac{9}{10}$ Volt, **and the polarities of V_1 and V_2 are opposite**!

In case you are interested in I_1 and I_2, using eq. (9), we find $I_1 \approx 1.0 \times 10^{-8}$ A, and using eq. (10), we find $I_2 \approx 9.0 \times 10^{-8}$ A. Notice how small they both are in comparison with I. Both I_1 and I_2 are in clockwise direction.

If R_1 were 5 Ω, and R_2 were 45 Ω, (thus both 20 times smaller than above), I would be about 2.0×10^{-2} A (20 times higher than above), but the values for V_1 and V_2 would be the same as before!

Thus, for the given ratio $R_2/R_1 = 9$, at any time

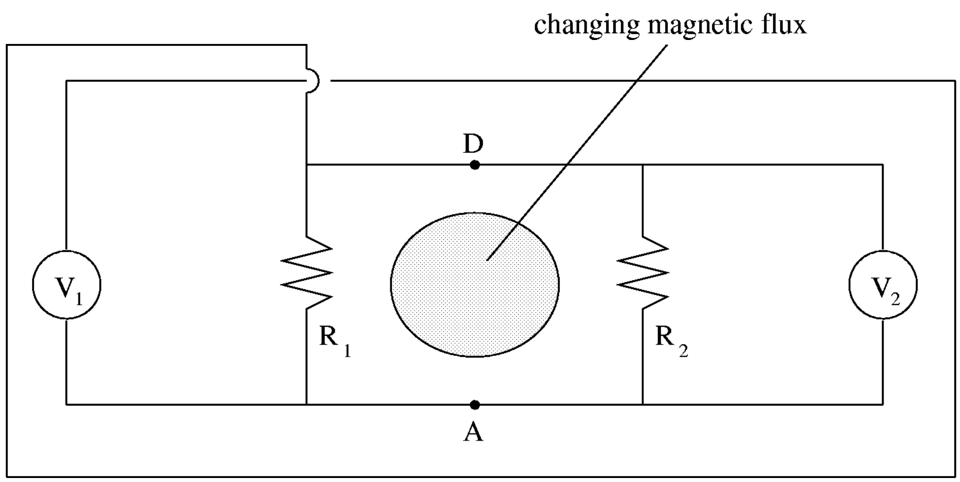
$|V_2| \approx \frac{9}{10}\mathcal{E}$ and $|V_1| \approx \frac{1}{10}\mathcal{E}$, **but the polarities are always opposite!**

Summary.
If I "travel" from A to D through the resistor R_1, the "potential difference"[1] between A and D is $\approx$ IR$_1$ (**A has a higher "potential"[1] than D**), and this value (V$_A$ - V$_D$) is registered by the left voltmeter. If I continue my journey through R_2, back to A, the "potential difference"[1] between D and A is $\approx$ IR$_2$ (**D has a higher "potential"[1] than A**), and this value (V$_D$ - V$_A$) is registered by the right voltmeter. Thus, once I have completed the closed loop journey in the middle loop, starting at A, and ending at A, the "potential difference"[1] V$_A$ - V$_A$ $\neq$ 0. Isn't that weird? **NO**, notice eq. (2)!

In Non-Conservative Fields, the electric potential difference[1]*, if one defines this as the integral of* $\overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{l}$ *between two points, depends on the path, our intuition breaks down completely.*

Test yourself.

Test 1. If you want to see whether you understand this difficult concept, calculate what the relative readings of V_1 and V_2 are for the diagram below. Notice that the wire that was connecting the left voltmeter with the D-side in our diagram on page 1, now is again connected with the D-side, but it is wrapped once around the whole circuit. The small arc in the wire above R$_1$ indicates that it is not in contact with the horizontal wire with which it appears to intersect due to the 2-dimensional projection. To stress this further I have interrupted the horizontal wire a trifle on either side of the arc. *This interruption is not real; the horizontal wire is continuous.*



Test 2. Now wrap that same wire not once around the whole circuit but 100 times before you connect it again on the D-side. Without realizing it, in doing so, you have been building yourself some kind of a transformer (we will discuss transformers later in the course). What now will the relative readings be between V_1 and V_2?

I hope this was helpful, this is not easy!

Walter Lewin

---

[1] *In non-conservative fields it may be better not to use the words "potential difference," but instead, one should say "the line integral of* $\overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{l}$ *along a specified path."*

Almost all authors of college physics books are confused about the proper use of Faraday's Law in circuits with inductors. Giancoli is no exception. Professor **John Belcher** (who has lectured 8.02 many times) has a wonderful Lecture Supplement which sets the record straight. It follows below. I (Walter Lewin) have amended it slightly by adding references to Giancoli (Belcher used a different book which made the same embarrassing mistakes) and by referencing my 8.02 lecture of March 15, 2002. It may help to first read the lecture supplement on non-conservative fields of March 15.

Self-Inductance — Kirchhoff's 2nd Law — Faraday's Law

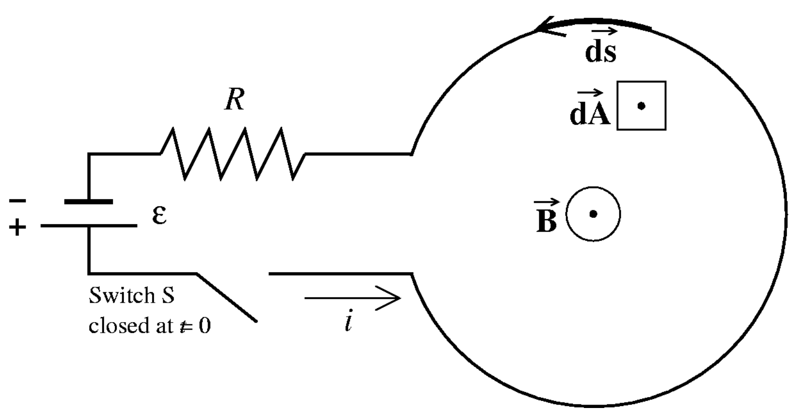
The addition of time-changing magnetic fields to simple circuits means that the closed line integral of the electric field around a circuit is no longer zero. Instead, we have, for any open surface

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{ds}} = -\frac{d}{dt}\int \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{dA}}$$

Any circuit where the current changes with time will have time-changing magnetic fields, and therefore induced electric fields. How do we solve simple circuits taking such effects into account? We discuss here a consistent way to understand the consequences of introducing time-changing magnetic fields into circuit theory — that is, *inductance.*

As soon as we introduce time-changing magnetic fields, the electric potential difference between two points in our circuit is no longer well-defined, because when the line integral of the electric field around a closed loop is no longer zero, the potential difference between points a and b, say, is no longer independent of the path used to get from point a to point b. That is, the electric field is no longer a conservative field, and the electric potential is no longer an appropriate concept ($\vec{\mathbf{E}}$ can no longer be written as the negative gradient of a scalar potential). However, we can still write down in a straight-forward fashion the equation that determines the behavior of a circuit.

To show how to do this, consider the circuit shown in the sketch to the right. We have a battery, a resistor, a switch S that is closed at $t = 0$, and a "one-loop inductor." It will become clear what the consequences of this "inductance" are as we proceed. For $t > 0$, current will flow in the direction shown (from the positive terminal of the battery to the negative, as usual). What is the equation that governs the behavior of our current i for $t > 0$?



To investigate this, apply Faraday's Law to the open surface bounded by our circuit, where we take $\vec{\mathbf{dA}}$ out of the page, and $\vec{\mathbf{ds}}$ right-handed with respect to that choice (counter-clockwise). First, what is the integral of the electric field around this circuit? Well, there is an electric field in the battery, directed from the positive terminal to the negative terminal, and when we go through the battery in the direction of $\vec{\mathbf{ds}}$ that we have chosen, we are moving against that electric field, so that $\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{ds}}$ is negative. Thus the contribution of the battery to our integral is $-\varepsilon$. Then, there is an electric field in the resistor, in the direction of the current, so when we move through the resistor in that direction, $\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{ds}}$ is positive, and that contribution to our integral is $+iR$. What about when we move through our "one-loop inductor"? There is no electric field in this loop if the resistance of the wire making up the loop is zero (this may bother you — if so, see the next section). If the wire has a small resistance $r \ll R$, then there will be an electric field in the wire, and a contribution to the integral of the electric field of $+ir$, which we just lump with the iR term we already have (that is, we redefine R to include both resistances). So, going totally around the closed loop, we have

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{ds}} = -\varepsilon + iR$$

Now, what is the magnetic flux ϕ through our open surface? First of all, we arrange the geometry so that the part of the circuit which includes the battery, the switch, and the resistor makes only a small contribution to ϕ as compared to the (much larger in area) part of the open surface which includes our "one-loop" inductor. Second, we know that ϕ is positive in that part of the surface, because current flowing counter-clockwise will produce a $\vec{\mathbf{B}}$ field out of the paper, which is the same direction we have assumed for $\vec{\mathbf{dA}}$, so $\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{dA}}$ is positive. Note that $\vec{\mathbf{B}}$ is the *self* magnetic field — that is the magnetic field produced by the current flowing in the circuit, and not by any external currents.

We also know that at any point in space, $\vec{\mathbf{B}}$ is proportional to the current i, since it is computed from the Biot-Savart Law, to wit,

$$\vec{\mathbf{B}} = i \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathbf{ds}} \times \vec{\mathbf{r}}}{r^3}$$

If we look at this expression, although for a general point in space it involves a very complicated integral over the circuit, it is clear that $\vec{\mathbf{B}}$ is everywhere proportional to i. That is, if we double the current, $\vec{\mathbf{B}}$ at every point in space will also double, all other things being the same. It then follows that the magnetic flux ϕ itself must also be proportional to i, since it is the surface integral of $\vec{\mathbf{B}}$, and $\vec{\mathbf{B}}$ is everywhere proportional to i.

That is, we must have $\phi = Li$, where L is a ***constant*** for a given arrangement of the wires of the circuit. If we change the geometry of the circuit (i.e., suppose we halve the radius of the circle in our sketch), we will change L, but for a ***given*** geometry, L does not change. The quantity L is called the self-inductance of the circuit, or simply the inductance. From its definition, we can show that the inductance has dimensions of μ_0 times length. We give an estimate of L for a single loop of wire below.

But first, let us write down the equation that governs the time evolution of i. If $\phi = Li$, then the time rate of change of ϕ is just $L\, di/dt$, so that we have from Faraday's Law

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{ds}} = -\varepsilon + iR = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} \tag{1}$$

If we divide equation (1) by L, and rearrange terms, we find that the equation that determines the behavior of i is $di/dt + (R/L)i = \varepsilon/L$. The solution to this equation given our initial conditions is $i(t) = (\varepsilon/R)(1 - e^{-Rt/L})$ [see Giancoli, equation 30-9, p. 762]. This solution for $i(t)$ reduces to what we expect as t gets very large, ε/R, but also shows a continuous rise of the current from zero at $t = 0$ to this final value, in a characteristic time $\tau_L = L/R$ (τ_L is called the *inductive time constant*). This is the effect of having a non-zero inductance in a circuit, i.e., of taking into account the induced electric fields due to time changing $\vec{\mathbf{B}}$ fields. And this is what we expect from Lenz's Law — the reaction of the system is to try to keep things the same, that is to delay the build-up of current (or its decay, if we already have a current flowing in the circuit).

Kirchhoff's Second "Law" Modified for Inductors

We can write the governing equation for $i(t)$ from above (equation (1)) as

$$+\varepsilon - iR - L\frac{di}{dt} = \Delta V_i = 0 \tag{2}$$

where we have now cast it in a form that "looks like" a version of Kirchhoff's Second Law, namely that the sum of the potential drops around a circuit is zero (we are still moving counter-clockwise around the circuit, but the overall sign changes from equation (1) to (2) because we are now adding up changes in electric "potential").

Our text (Giancoli) chooses to approach circuits with inductance by preserving "Kirchhoff's Second Law," or the loop theorem, by specifying the "potential drop" across an inductor. To get the correct equation, Giancoli must make an additional "rule" for inductors as follows:

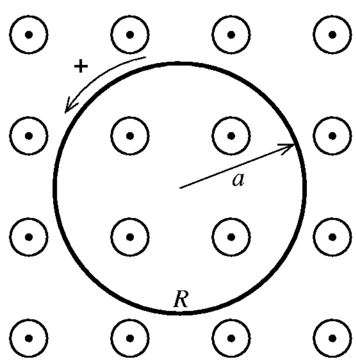
Inductors: If an inductor is traversed in the direction moving with the current, the change in potential is $-L\,di/dt$; if it is traversed in the direction opposite the current, the change in potential is $+L\,di/dt$.

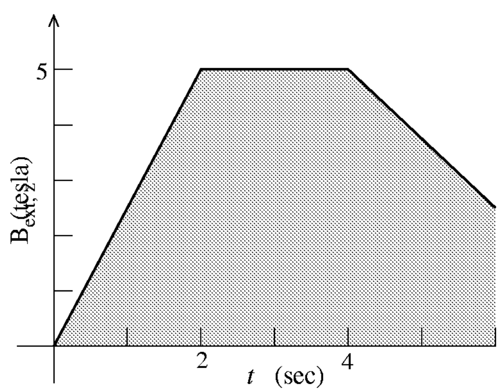
Although Giancoli never explicitly states this rule, it is implicit in his use of the "Loop Theorem" in sections 30-4, 30-5, and 30-6.

Use of this formalism will give the correct equations. However, the continued use of Kirchhoff's Second Law with this additional rule is **MISLEADING** at best, and at some level **DEAD WRONG** in terms of the physics, for the following reasons. Kirchhoff's Second Law was originally based on the fact that the integral of $\vec{\mathbf{E}}$ around a closed loop was zero. With time-changing magnetic fields, this is no longer so, and thus the sum of the "potential drops" around the circuit, if we take that to mean the negative of the closed loop integral of $\vec{\mathbf{E}}$, is ***no longer zero*** — in fact it is $+L\,di/dt$. As do many introductory texts, Giancoli brings the $L\,di/dt$ term to the other side of the equation, adds it to the negative of the closed loop of $\vec{\mathbf{E}}$, and ascribes it to a "potential drop" across the inductor.

This approach gives the right equations, but it sure confuses the physics. In particular, having a "potential drop" across the inductor of $-L\,di/dt$ implies that there is an electric field in the inductor such that the integral of $\vec{\mathbf{E}}$ through the inductor is equal in magnitude to $L\,di/dt$. **This is not always, or even usually, true**, as in our example above (the integral of $\vec{\mathbf{E}}$ through our "one-loop" inductor above is **zero**, **NOT** $L\,di/dt$).

The fact that $\vec{\mathbf{E}}$ is zero in our "one-loop inductor" above may confuse you, and for good reason. You have developed some intuition about induced electric fields, based on the kinds of Faraday's Law problems we have been doing up to now. The fact is, quite often in the past when we have had time-changing magnetic fields, we have had an electric field right where $d\vec{\mathbf{B}}/dt$ was non-zero. That fact would make you think that Giancoli is right, that there is an electric field right there in the inductor, and thus a potential drop across it. What has changed in our circuit above to make $\vec{\mathbf{E}}$ zero in our "one-loop inductor," even though there is a time-changing magnetic field through it? This is a very subtle point, and the source of endless confusion, so let's look at it carefully.



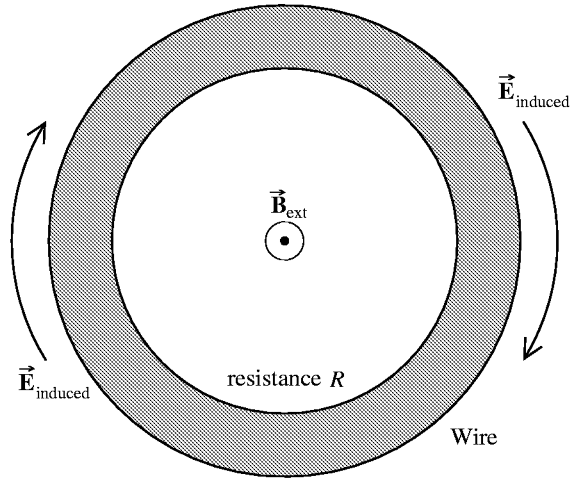


Our intuition that there should be an electric field in an inductor is based on doing problems like that shown in the sketch to the right. We have a loop of wire of radius a and total resistance R, immersed in an external magnetic field which is out of the page and increasing with time as shown. In considering this circuit, unlike our "one-loop" inductor above, we *neglect* the magnetic field due to the currents in the wire itself, assuming that $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}$ is much greater than that field, and consider *only* the effects of the external field. The conclusions we arrive at here can be applied as well to the self-inductance case.

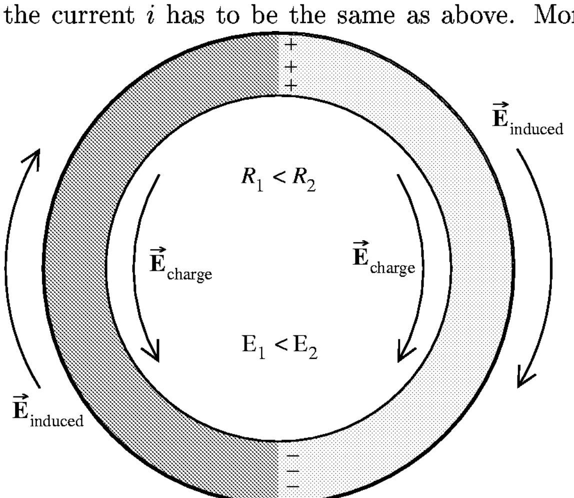
The changing external magnetic field will give rise to an induced electric field in the loop of wire, with a line integral which is equal to $-\pi a^2(d\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}/dt)$. This induced electric field is azimuthal and uniformly distributed around the loop (see sketch). We have from Faraday's Law that

$$\begin{aligned} 2\pi a \vec{\mathbf{E}}_{\text{induced}} &= -\pi a^2 \frac{d\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}}{dt} \\ \Rightarrow \vec{\mathbf{E}}_{\text{induced}} &= -\frac{a}{2}\frac{d\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}}{dt} \end{aligned}$$

Thus if the resistance is distributed uniformly around our wire loop, we get a uniform $\vec{\mathbf{E}}_{\text{induced}}$ in the loop which is the same at every point in the wire loop, and circulating clockwise for $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}$ increasing in time. This electric field causes a current, with the current density given by $\vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{E}}_{\text{induced}}/r$ (the microscopic form of Ohm's Law). The total current in the wire loop will be the total "potential drop" around the loop divided by the resistance R (the macroscopic form of Ohm's Law), or $2\pi a\vec{\mathbf{E}}_{\text{induced}}/R$. This current will circulate clockwise in the same sense as $\vec{\mathbf{E}}_{\text{induced}}$. Thus if the resistance is distributed uniformly around our wire loop, we get a uniform $\vec{\mathbf{E}}_{\text{induced}}$ in the loop which is the same at every point in the wire loop, and circulating clockwise for increasing $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}$.



But what happens to the electric field if we *don't* distribute the resistance uniformly around the loop. For example, let's make the left half of our loop out of wire with resistance R_1, and the right half the loop out of wire with resistance R_2, with $R = R_1 + R_2$, so that we have the same total resistance as before (see sketch next page). Let's furthermore assume that $R_1 < R_2$. NOTICE some similarity with the demo I (Walter Lewin) did in lecture on March 15, 2002 (read my Lecture Supplement). How is the electric field distributed around the loop of wire now? First of all, the *emf* in the circuit is the same as above, as is the total resistance, so that the current i has to be the same as above. Moreover it must be the same on both sides of the loop, by charge conservation. But the electric field in the left half of the wire loop ($\vec{\mathbf{E}}_1$) must now be ***different*** from that in the right half ($\vec{\mathbf{E}}_2$).



This is so because the line integral of the electric field on the left side, over the left side, is $\pi a \mathrm{E}_1$, and this must be (from Ohm's Law) equal to iR_1. Similarly, $\pi a \mathrm{E}_2 = iR_2$. Thus $\mathrm{E}_1/\mathrm{E}_2 = R_1/R_2$, and therefore $\mathrm{E}_1 < \mathrm{E}_2$, since $R_1 < R_2$. And this makes sense. We must get the same current on both sides, even though the resistances are different. We do this by adjusting the electric field on the side with the smaller resistance to ***be*** smaller. Because the resistance is also smaller, we produce the same current as on the opposing side with this smaller electric field.

But what happened to our uniform electric field? Well, there are ***two*** ways to produce electric fields — one from time-changing magnetic fields, the other from electric charges. Nature accomplishes the reduction in $\vec{\mathbf{E}}_1$ compared to $\vec{\mathbf{E}}_2$ by charging up the junctions separating the wire segments (see sketch above), positive on top and negative on bottom. The total electric field is the sum of the electric field induced by the changing external magnetic field ($\vec{\mathbf{E}}_{\text{induced}}$, as indicated in the sketch above, still clockwise), and the electric field associated with the charging at the junctions ($\vec{\mathbf{E}}_{\text{charge}}$, as indicated in the sketch, going from positive charge to negative charge, as is always true for fields produced by charges). It is clear that the addition of these two contributions to the electric field will reduce the total electric field on the left and enhance it on the right. The field $\vec{\mathbf{E}}_1$ will always be clockwise (as it must be to produce clockwise current flow), but it can be made arbitrarily small by making $R_1 \ll R_2$. However, we still always have the integral of $\vec{\mathbf{E}}$ over the complete closed loop equal to $-\pi a^2 (d\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}/dt)$, as Faraday's Law demands.

Thus we see that we can make a non-uniform electric field in an inductor by using non-uniform resistances, even though our intuition tells us (correctly) that the *induced* electric field should be uniform at a given radius. The reality is that there is *another* way to produce electric fields, namely from charges, and Nature uses that fact as needed. All that Faraday's Law tells us is that the line integral of $\vec{\mathbf{E}}$ around a closed loop is equal to the negative time rate of change of the magnetic flux through the enclosed surface. It doesn't tell us at what locations the $\vec{\mathbf{E}}$ field is non-zero around the loop, and it may be non-zero (or zero!) in unexpected places. The field in wire making up the "one-loop inductor" above was zero (or at least very small), with the significant fields occurring only in the resistor and the battery, for exactly the sort of reason we have considered here.

One final point. Suppose you put the probes of a voltmeter across the terminals of an inductor (with very small resistance) in a circuit. What will you measure? What you will measure on the meter of the voltmeter is a "voltage drop" of $L\,di/dt$. But that is not because there is an electric field in the inductor! It is because putting the voltmeter in the circuit will result in a time changing magnetic flux through the voltmeter circuit, consisting of the inductor, the voltmeter leads, and the large internal resistor in the voltmeter (see my Lecture Supplement of March 15, 2002). A current will flow in the voltmeter circuit because there will be an electric field in the large internal resistance of the voltmeter, with a potential drop across that resistor of $L\,di/dt$, by Faraday's Law applied to the voltmeter circuit, and that is what the voltmeter will read. The voltmeter as usual gives you a measure of the potential drop across its own internal resistance, but this is *not* a measure of the potential drop across the inductor. It is a measure of the time rate of change of magnetic flux in the voltmeter circuit! As before, there is only a very small electric field in the inductor if it has a very small resistance compared to other resistances in the circuit.

If you find all this confusing, you are in good company. This is one of the most difficult and subtle topics in this course — it trips up experts all the time. Not easy!

Apéndice B

Carta al estudiante

Esta carta al estudiante es antes de que cambiaran los temas y cambiaran un poco los temas vistos por el curso, pero es el orden y los temas que siguen este folleto.

	UNIVERSIDAD DE COSTA RICA **ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA** **PROGRAMA DEL CURSO**	
IE-0305 Matemáticas Superiores		

II Ciclo de 2014

Descripción del curso: El curso de matemáticas superiores complementa la formación que usted ha recibido en los cursos anteriores de cálculo, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales, para reforzar sus habilidades en la modelación matemática de sistemas de variable continua o discreta. Los contenidos del curso, son variables complejas, transformadas integrales de Laplace y de Fourier, transformada discreta Zeta y series de Fourier, y se busca aplicar dichos contenidos a la ingeniería eléctrica.

Créditos: 3

Horas lectivas: 5 horas de teoría y práctica por semana.

Requisitos y correquisitos:
Requisitos: CI-0202 Principios de Informática, MA-1005 Ecuaciones Diferenciales.
Aunque oficialmente no es requisito o correquisito, consideramos importante que usted haya ganado los cursos IE-0209 Circuitos Lineales I y MA-1003 Cálculo Diferencial e Integral III.

Objetivo general:

Dar una visión comprensiva del tipo de herramientas matemáticas empleadas en ingeniería eléctrica para modelar sistemas de variables continuas o discretas.

Objetivos específicos:

Al finalizar el curso los estudiantes deberán estar en capacidad de:

1. Realizar operaciones algebraicas con números complejos: suma, resta, división, multiplicación, potencias, raíces.
2. Determinar la analiticidad de una función compleja de variable compleja.
3. Calcular derivadas de funciones complejas de variable compleja.
4. Demostrar identidades que relacionan funciones trigonométricas inversas e hiperbólicas inversas con la función logarítmica.
5. Calcular integrales de línea de funciones complejas de variable compleja.
6. Aplicar el teorema del residuo para evaluar integrales de contorno de funciones complejas de variable compleja.
7. Utilizar series de Laurent para calcular residuos de funciones complejas de variable compleja.
8. Calcular integrales reales definidas especiales mediante residuos.
9. Utilizar transformada unilateral de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones integro-diferenciales.
10. Utilizar la transformada unilateral de Laplace para determinar la función de transferencia, respuestas al impulso y estabilidad de un sistema lineal continuo invariante en el tiempo.
11. Demostrar propiedades básicas de la transformada de Laplace y su inversa.
12. Aplicar la transformada unilateral de Laplace para resolver problemas en ingeniería eléctrica.
13. Utilizar la transformada unilateral Z para resolver ecuaciones en diferencias.

14. Utilizar la transformada unilateral Z para determinar la función de transferencia, respuesta al impulso y estabilidad de un sistema discreto invariante en el tiempo.
15. Demostrar propiedades básicas de la transformada Z y su inversa.
16. Aplicar la transformada unilateral Z para resolver problemas en ingeniería eléctrica.
17. Representar señales periódicas por series de Fourier: trigonométrica, compleja, compacta.
18. Prolongar funciones definidas en un intervalo finito de la forma $[0, L]$ con extensión par o impar y periódica, para desarrollarla en serie de Fourier de cosenos o de senos (serie de medio recorrido).
19. Determinar el espectro de amplitud y el de fase de funciones periódicas.
20. Calcular la potencia media de una señal periódica.
21. Utilizar el teorema de Parseval para calcular la suma de series infinitas.
22. Utilizar transformada de Fourier para analizar espectros de amplitud y de fase de señales continuas.
23. Calcular la energía de una señal representada por una función de soporte compacto.
24. Resolver ecuaciones diferenciales utiliando transformada de Fourier.
25. Diseñar filtros analógicos.
26. Utilizar transformada de Fourier para modular, demodular y filtrar señales en el dominio de frecuencia.

Contenidos:

I. Variables complejas (5 semanas)

- Números complejos: Definición, propiedades, representaciones cartesiana, polar y fasorial. Operaciones: Suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces de números complejos. (3 lecciones)
- Funciones de variable compleja: Definición, funciones elementales y especiales (exponencial, logarítmica, trigonométricas, hiperbólicas, trigonométricas inversas, hiperbólicas inversas). Limite, continuidad, derivada, funciones analíticas, ecuaciones de Cauchy-Riemann. (5 lecciones)
- Integración compleja: integrales de línea. Teorema de Cauchy. Fórmula integral de Cauchy. (5 lecciones)
- Series de Laurent. Residuos y polos. Singularidades. Teorema del residuo y cálculo de integrales de contorno. Teorema del interior y del exterior. (5 lecciones)
- Cálculo de integrales reales definidas: $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{jkx}\, dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos kx\, dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen} kx\, dx$. (2 lecciones)

  Terminar teoría y práctica en la semana número 5 (Semana 6: Práctica. I Parcial: Miércoles, 24 setiembre, semana 7).

II. Transformada de Laplace y Transformada Z (5 semanas)

Transformada de Laplace

- Repaso de Transformada de Laplace: Definición. Transformada de funciones básicas (escalón, rampa, exponencial, senoidales, hiperbólicas, impulso). Propiedades y teoremas. Transformada inversa de Laplace: Definición, cálculo mediante fracciones parciales y tablas, fórmula de inversión compleja. Propiedades y teoremas. Convolución en el tiempo y en frecuencia. (5 lecciones. Empezar en la semana 7)
- Aplicaciones a la ingeniería: ecuaciones y sistema de ecuaciones integro diferenciales, circuitos, función de transferencia y criterios de estabilidad. Conexión en cascada, en serie y con retroalimentación. Filtros analógicos. (8 lecciones)

Transformada Z

- Transformada Z unilateral: Sistemas de tiempo discreto. Definición de transformada Z. Propiedades y teoremas. Métodos para obtener la transformada Z inversa. (5 lecciones)
- Aplicaciones a la ingeniería: Solución de ecuaciones en diferencias usando la transformada Z. Función de transferencia. Conexión en cascada, en serie y con realimentación. Análisis de estabilidad. Filtros digitales. (2 lecciones)

Terminar teoría y práctica en la semana 11. II Parcial, Miércoles 29 de octubre, en la semana 12

III. Series y transformada de Fourier (5 semanas)

- Repaso de Series de Fourier: Representación de señales periódicas por series de Fourier. Serie trigonométrica de Fourier. Simplificaciones según simetría de la señal. Extensión par o impar de una función definida en un intervalo y desarrollo en serie de cosenos o de senos. (5 lecciones. Empezar al final de la semana 12)
- Derivación e integración de series de Fourier, forma compacta y forma compleja de la serie de Fourier. El teorema de Parseval. Espectro de potencia. (3 lecciones)
- Transformada de Fourier: Definición. Representación de señales no periódicas. Transformada de Fourier de funciones básicas. Transformada inversa de Fourier (incluye inversión compleja mediante residuos). (5 lecciones)
- Propiedades y teoremas. Espectro continuo de frecuencia. Teorema de Parseval y contenido de energía. Aplicaciones con filtros. (2 lecciones)
- Aplicaciones a la ingeniería: modulación, demodulación y filtrado en el dominio de la frecuencia. Filtros analógicos. (3 lecciones)

Terminar teoría y práctica en la semana 16. III Parcial, Lunes 1 de diciembre.

Metodología: Las lecciones serán magistrales. El profesor presentará la teoría y desarrollará ejemplos, pondrá problemas para que los estudiantes trabajen en el aula en forma individual o en grupos y dejará ejercicios y problemas para trabajo fuera del aula. En algunas ocasiones el docente utilizará computadora personal con proyector para presentar la teoría o para desarrollar aplicaciones. Las evaluaciones serán frecuentes (exámenes cortos semanales, exámenes parciales). En la página del curso los estudiantes dispondrán de materiales didácticos: textos, exámenes, prácticas.

Actividades: Lecciones teóricas, prácticas, evaluaciones periódicas. Es importante aclarar que no se aceptan reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz.

Evaluación:

Actividades de evaluación	Fecha y hora
I Examen Parcial (30%)	Miércoles 24 de setiembre del 2014, 1 p.m.
II Examen Parcial (30%)	Miércoles 29 de octubre del 2014, 1 p.m.
III Examen Parcial (30%)	Lunes 01 de diciembre del 2014, 9 a.m.
Quices (10%)	En el aula
Examen de Ampliación	Jueves 11 de diciembre del 2014, 9 a.m.

Cuando el estudiante se vea imposibilitado, por razones justificadas, para efectuar una evaluación en la fecha fijada, puede presentar una solicitud de reposición a más tardar en cinco días hábiles a partir del momento en que se reintegre normalmente a sus estudios. Esta solicitud debe presentarla ante el profesor que imparte el curso, adjuntando la documentación y las razones por las cuales no pudo efectuar la prueba, con el fin de que el profesor determine, en los tres días hábiles posteriores a la presentación de la solicitud, si procede una reposición. Si ésta procede, el profesor deberá fijar la fecha de reposición, la cual no podrá establecerse en un plazo menor de cinco días hábiles contados a partir del momento en que el estudiante se reintegre normalmente a sus estudios. Son justificaciones: la muerte de un pariente hasta de segundo grado, la enfermedad del estudiante u otra situación de fuerza mayor o caso fortuito. En caso de rechazo, esta decisión podrá ser apelada ante la dirección de la unidad académica en los cinco días hábiles posteriores a la notificación del rechazo, según lo establecido en este Reglamento. (Artículo 24 Reglamento de Régimen Académico Estudiantil)

Cronograma:

Contenido	Agosto	Setiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Variables Complejas	Lunes 11 o martes 12	Jueves 18 o viernes 19 con práctica			
Transformada de Laplace y Transformada Z		Lunes 22 o martes o 23	Jueves 23 o viernes 24 con práctica		
Series de Fourier y transformada de Fourier			Lunes 27 o martes 28	Jueves 27 o viernes 28 con práctica	

Bibliografía:

1. Antoniou, A. (2006). *Digital Signal Processing. Signals, systtems and filters*. McGraw-Hill.
2. Cascante, J. (2005). *Apuntes curso Matemática Superior*, disponible en el sitio Web de cada profesor del curso (Claroline)
3. Churchill, R. y Brown, J. (1987). *Variable compleja y sus aplicaciones*, México: Editorial McGraw-Hill.
4. Hsu, H. (1973) *Análisis de Fourier*, Bogotá: Fondo Educativo Interamericano.
5. Jackson, L. (1987). *Signals, Systems and Transforms*, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
6. **J**ames, G. (2002). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería* (Segunda edición), México: Pearson Educación de México.
7. Kreyszig, E. (1990). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, México_ Editorial Limusa y Noriega Editores.
8. Lathi, B. (1967). *Signals, Systems and Communications*, Wiley, USA.
9. LePage, W. (1980). *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers*, New York: Dover Publications, Inc.
10. Papoulis, A. (1987), *The Fourier integral and its applications*, New York: McGraw-Hill Publishing Company.
11. Roberts, M. J. (2005). *Señales y sistemas: Análisis mediante métodos de transformada y MATLAB*, México: McGraw-Hill.
12. Spiegel, M. (2001). *Matemáticas avanzadas para ingeniería y ciencias*, México: McGraw-Hill/Interamericana Editores.
13. Spiegel, M. (1991). *Variable compleja*, México: McGraw-Hill.
14. Spiegel, M. (1996). *Transformada de Laplace*. México: McGraw-Hill.
15. Wylie, C. (1994). *Matemáticas Superiores para ingeniería* (Segunda edición). México: McGraw-Hill/Interamericana Editores.

Profesores:

Grupo	Profesor	Datos
01 Aula 304 IE L:7 a 9:50; J:7 a 8:50	Edison De Faria Campos	edison.defaria@ucr.ac.cr Oficina 615 IE, Tel. 25113893
02 Aula 406 IE K:13 a 15:50; V:13 a 14:50	Erick Carvajal	erick.carvajal.barboza@gmail.com
03 Aula 301 IE K: 10 a 12:50; V: 9 a 10.50	Jorge Romero Chacón	jromero@eie.ucr.ac.cr Oficina 509 IE, Tel. 25113878

Apéndice C

Tablas de Laplace, Zeta y Fourier

TABLA DE TRANSFORMADA DE LAPLACE UNILATERAL(II CICLO 2013)

$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum \text{Residuos}\left(e^{st}F(s), \text{polos de } F(s)\right)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$
1. $af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$ linealidad
2. $e^{at} f(t)$	$F(s-a)$ traslación en la frecuencia
3. $f(t-a)U(t-a)$	$e^{-as}F(s)$ traslación en el tiempo
4. $f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),\ a>0$ escala
5. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
6. $t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
7. $\int_0^t f(u)\,du$	$\frac{F(s)}{s}$
8. $\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} F(u)\,du$
9. $f(t)$ periódica con periodo T	$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$
10. $(f * g)(t) = \int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du$	$F(s)G(s)$ transformada de convolución en t
11. $\int_t^{\infty} \frac{f(u)}{u}\,du$	$\frac{1}{s}\int_0^s F(z)\,dz$
12. $\int_0^t \frac{f(u)}{u}\,du$	$\frac{1}{s}\int_s^{\infty} F(z)\,dz$
13. $t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
14. $e^{bt}\cos(at)$	$\frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}$
15. $e^{bt}\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{(s-b)^2 + a^2}$
16. $e^{bt}\cosh(at)$	$\frac{s-b}{(s-b)^2 - a^2}$
17. $e^{bt}\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{(s-b)^2 - a^2}$
18. $\delta^{(n)}(t-a)$	$s^n e^{-as}$
19. $U(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
20. $f(t)U(t-a)$	$e^{-as}\,\mathscr{L}\{f(t+a)\}$

Teorema del valor inicial: $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$.

Teorema del valor final: $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s)$, si ambos límites existen.

Teorema de expansión de Heaviside: $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum \dfrac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$, P, Q polinomios sin factor común, grado de $Q >$ grado de P, α_k distintas raíces de $Q(s) = 0$.

TABLA DE TRANSFORMADA Z UNILATERAL

$x(k) = \mathscr{Z}^{-1}\{X(z)\} = \sum \text{Residuos}\{z^{k-1}X(z), \text{Polos}\}$	$X(z) = \mathscr{Z}\{x(k)\} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$
1. $ax(k) + by(k)$	$aX(z) + bY(z)$
2. $\delta(k-r) = 1$ si $k = r$, 0 si $k \neq r$	z^{-r}
3. $u(k-r) = 1$ si $k \geq r$, 0 si $k < r$	$\dfrac{1}{z^{r-1}(z-1)}$, $\lvert z\rvert > 1$
4. a^k, a constante	$\dfrac{z}{z-a}$, $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
5. ka^{k-1}, k constante	$\dfrac{z}{(z-a)^2}$, $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
6. $e^{-ka}\operatorname{sen}(kb)$, a, b constantes	$\dfrac{ze^{-a}\operatorname{sen}(b)}{z^2 - 2ze^{-a}\cos(b) + e^{-2a}}$, $\lvert z\rvert > e^{-a}$
7. $e^{-ka}\cos(kb)$, a, b constantes	$\dfrac{z\left(z - e^{-a}\cos(b)\right)}{z^2 - 2ze^{-a}\cos(b) + e^{-2a}}$, $\lvert z\rvert > e^{-a}$
8. $k^r\, x(k)$, $r \in \mathbb{N}$	$-z\dfrac{d}{dz}\left(\cdots - z\dfrac{d}{dz}\left(-z\dfrac{d}{dz}X(z)\right)\right)$, r veces
9. $x(k+r)$, $r \in \mathbb{N}$	$z^r X(z) - z^r x(0) - z^{r-1}x(1) - \cdots - zx(r-1)$
10. $x(k-r)$, $r \in \mathbb{N}$	$z^{-r}X(z)$
11. $x(k) * y(k) := \sum\limits_{r=0}^{k} x(r)y(k-r)$	$X(z)Y(z)$ transformada de convolución
12. $x(k) = x(k+p)$, $x(k)$ periódica con periodo p	$\dfrac{1}{1-z^{-p}}\sum\limits_{r=0}^{p-1} x(r)z^{-r}$, $\lvert z\rvert > 1$
13. $x(ak)$, $a \neq 0$ constante	$X\left(z^{1/a}\right)$
14. $a^k x(k)$, $a \neq 0$ constante	$X\left(\dfrac{z}{a}\right)$
15. $\sum\limits_{r=0}^{k} x(r)$	$\dfrac{z}{z-1}X(z)$

Teorema del valor final: $\lim\limits_{k\to\infty} x(k) = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)X(z)$, si los polos de $(z-1)X(z)$ tienen magnitud menor que uno.

Teorema del valor inicial generalizado: Si $X(z) = \dfrac{a_m z^m + \cdots + a_0}{b_n z^n + \cdots + b_0}$, $n \geq m$ entonces el primer valor no nulo de $x(k)$ es $x(n-m)$, y además, $x(n-m) = \lim\limits_{z\to\infty}\left(z^{n-m}X(z)\right)$.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE FOURIER (II Ciclo 2011)

$h(t)=\mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$	$H(\omega)=\mathcal{F}\{h(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,dt$
1. $af(t)+bg(t)$	$aF(\omega)+bG(\omega)$ linealidad
2. $f(t-a)$	$F(\omega)e^{-j\omega a}$ translación en t
3. $f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega-\omega_0)$ translación en w
4. $F(t)$	$2\pi f(-\omega)$ simetría
5. $f(at),\ a\neq 0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ homotecia
6. $f^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
7. $\int_{-\infty}^{t} f(u)\,du$	$\frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$
8. $(-jt)^n f(t)$	$F^{(n)}(\omega)$
9. $(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,g(t-u)\,du$ convolución	$F(\omega)G(\omega)$
10. $f(t)\,g(t)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)G(\omega-u)\,du=\frac{1}{2\pi}(F*G)(\omega)$
11. $\delta^{(n)}(t-t_0)$	$(j\omega)^n e^{-j\omega t_0}$
12. $u(t-t_0)$	$\left(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right)e^{-j\omega t_0}$
13. $e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
14. t^n	$2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega)$
15. $\frac{1}{t^n}$	$\frac{\pi(-1)^n j^n \omega^{n-1}\operatorname{Sgn}(\omega)}{(n-1)!}$
16. $u(t)\cos(\omega_0 t)$	$\frac{j\omega}{\omega_0^{\,2}-\omega^2}+\frac{\pi}{2}\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right)$
17. $u(t)\operatorname{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{\omega_0^{\,2}-\omega^2}+\frac{\pi}{2j}\left(\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right)$
18. $\operatorname{sgn} t$	$\frac{2}{j\omega}$
19. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0),\quad \omega_0=2\pi/T$
20. $e^{-a\lvert t-t_0\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}e^{-j\omega t_0}$

21. $e^{-a t^2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\ e^{-\omega^2/4a}$
22. $\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\,u(t)$	$\dfrac{1}{(a+j\,\omega)^n}$
23. $\dfrac{\cos bt}{a^2+t^2}$	$\dfrac{\pi}{2a}\left(e^{-a\lvert\omega-b\rvert}+e^{-a\lvert\omega+b\rvert}\right)$
24. $\dfrac{\text{sen}\ bt}{a^2+t^2}$	$\dfrac{\pi}{2\,a\,j}\left(e^{-a\lvert\omega-b\rvert}-e^{-a\lvert\omega+b\rvert}\right)$
25. $\cos at$	$\pi\left(\delta(\omega-a)+\delta(\omega+a)\right)$
26. $\text{sen}\,at$	$-j\pi\left(\delta(\omega-a)-\delta(\omega+a)\right)$

SERIES DE FOURIER

$$f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(n\omega_0 t\right)+b_n\,\text{sen}\left(n\omega_o t\right)\right),\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\cos\left(n\omega_0 t\right)dt,\ \ n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\text{sen}\left(n\omega_o t\right)dt,\ \ n=1,2,3,\cdots$$

$$f(t)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,e^{j\,n\,w_0\,t},\quad c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,e^{-j\,n\,\omega_0\,t}\,dt,\ n\in\mathbb{Z}$$

Teorema de Parseval (para funciones periódicas): Si $f(t)$ periódica con periodo T satisface las condiciones de Dirichlet con serie de Fourier $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\,\cos\left(n\,\omega_0\,t\right)+b_n\,\text{sen}\left(n\,\omega_o\,t\right)\right)$, entonces

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\,f(t)\,\right)^2 dt=\frac{{a_0}^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left({a_n}^2+{b_n}^2\right)=\left|c_0\right|^2+2\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_n\right|^2 .$$

$P=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}\left(\,f(t)\,\right)^2 dt$ es el contenido de potencia de la señal periódica $f(t)$

Teorema de Parseval (para funciones no periódicas): $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(t)\right)^2 dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)\right|^2 d\omega$

$E=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(t)\right)^2 dt$ es el contenido de energía de la señal $f(t)$

Propiedades función impulso: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(t-a)\,f(t)\,dt=(-1)^n\,f^{(n)}(a)$;

$f(t)\delta(t-a)=f(a)\delta(t-a)$; $\delta(a\,t)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t)$; $\delta^{(n)}(-t)=(-1)^n\,\delta^{(n)}(t)$; $t\,\delta'(t)=-\delta(t)$, $\delta(t)$ es par

Identidades trigonometricas: $(\cos a)(\text{sen}\,b)=\dfrac{\text{sen}(a+b)-\text{sen}(a-b)}{2}$

$(\text{sen}\,a)(\text{sen}\,b)=\dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$; $\quad(\cos a)(\cos b)=\dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$

$\text{sen}\,(a+b)=\text{sen}\,a\cos b+\text{sen}\,b\cos a$; $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$