Matemáticas Generales

Apuntes de clase.

Profesor:
Carlos Andrés Leiton Piamba
Docente Universitario

En este documento se encuentra una recopilación selecta de mis apuntes de Matemáticas Generales, los cuales son resultado de mi dedicación y compromiso en la enseñanza de esta materia. El objetivo es complementar la formación matemática adquirida por el estudiante durante su educación básica y media. Pues, se busca dotar al estudiante de las herramientas necesarias para abordar con solidez los conceptos fundamentales en diferentes tópicos de la matemáticas básicas.

Considero que es una guía de estudio ideal para aquellos estudiantes que deseen obtener una comprensión sólida de los conceptos matemáticos fundamentales, sin la necesidad de adentrarse en demostraciones formales y complejas. En el proceso de tener un enfoque claro y didáctico, espero que este material facilite el aprendizaje y despierte el interés por el mundo de las ciencias matemáticas.

Popayán, 22 de octubre de 2024

Índice general

Capítulo 1

Ecuaciones

Una ecuación es una expresión matemática que establece una igualdad entre dos cantidades o expresiones, las ecuaciones suelen contener una o más variables, en la siguiente sección se resolverá ecuaciones lineales y cuadráticas, de una o dos variables, además se utilizará la solución de una ecuación para resolver problemas de aplicaciónes.

Ejemplo 1.1. *A continuación se presenta varios tipos de ecuaciones, dependiendo de el tipo de expresiones que se encuentran en los miembros de la igualdad se clasifica la ecuación.*

- $x + 5 = 2$ *Ecuación Lineal*
- $\sin(x - 2) = 3$ *Ecuación Trigonométrica*
- $3x^2 + 5x - 1 = 13$ *Ecuación Cuadrática*

1.0.1. Definición, Solución de ecuaciones lineales y cuadráticas

Una ecuación lineal de una variable tiene la forma estándar:

$$ax + b = 0$$

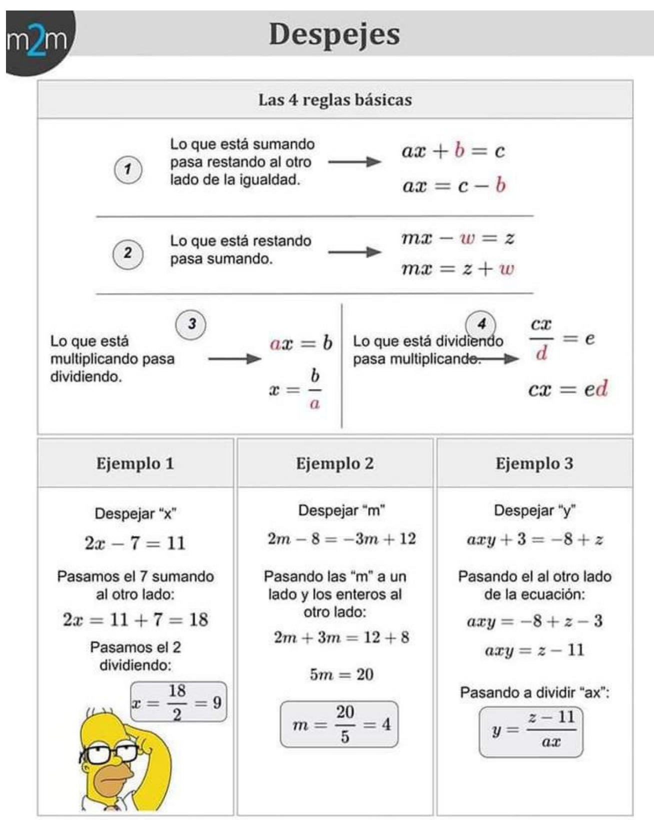
donde a y b son números reales y $a \neq 0$. Se llama lineal porque el exponente de x es uno.

1.0.2. Procedimiento para determinar la solución a una ecuación lineal

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento usual para encontrar la solución de una ecuación de primer grado.

$$
\begin{aligned}
4x+3 &= 10 && \text{Despajamos la variable x} \\
4x &= 10\text{-}3 && \text{el termino que está sumando pasa} \\
& && \text{a restar al otro lado de la igualdad.} \\
x &= \frac{7}{4} && \text{el termino que está multiplicando pasa} \\
& && \text{a dividir al otro lado de la igualdad.}
\end{aligned}
$$

En la siguiente figura se realiza los procedimientos básicos para realizar el despeje de una variable.



1.0.3. Ecuación y Formula cuadrática

Una ecuación cuadrática es una expresión de segundo grado, cuya formula estándar es: $ax^2 + bx + c$ donde a, b y c son reales y $a \neq 0$. Si a es igual a cero desaparece el término en x^2 y la ecuación ya no es de segundo grado.

Ejemplo 1.2. *Son ecuaciones cuadráticas de segundo grado.*

- $x^2 + 5x + 6 = 0$
- $x^2 - 1 = 0$
- $(2x + 1)^2 = x(x + \frac{1}{2})$

Para resolver ecuaciones cuadráticas se utilizan varios métodos; aquí estudiaremos los siguientes:

Solución de una ecuación cuadrática usando factorización:

Ejemplo 1.3. *Resolver la ecuación $x^2 + 10x + 16 = 0$. Esta ecuación se puede escribir como una ecuación equivalente pero factorizada.*

$$x^2 + 10x + 16 = (x + 8)(x + 2) = 0$$

Ahora, como el producto de dos números reales es cero si, y solamente si, al menos uno de ellos es cero entonces, $\begin{array}{ccc} x+8=0 & o & x+2=0 \\ x=-8 & o & x=-2 \end{array}$ *Lo anterior, significa que la ecuación tiene dos soluciones.*

Solución de una ecuación usando formula cuadrática:

Dada una ecuación cuadrática, $ax^2 + bx + c = 0$ a la siguiente expresión se le conoce como formula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

la cual me determina las soluciones reales (complejas) para la ecuación.

Ejemplo 1.4. *Resolver la ecuación $x^2 - 10x + 25 = 0$,*

$$a = 1, \quad b = -10, \quad c = 25$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(10)^2 - 4(25)(1)}}{2(1)} \\
&= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} \\
&= \frac{10 \pm 0}{2} \\
&= 5
\end{aligned}
$$

Nota:
la expresión $b^2 - 4ac$ se le conoce como descriminante, y se puede concluir que:

- Si $b^2 - 4ac > 0$, existen dos raíces (Soluciones) reales.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, existen una raíz (Solución) real.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, no existen raíces (Soluciones) reales, solo complejas.

Casos especiales de ecuaciones:

Ejemplo 1.5. $\dfrac{7}{x-1} - \dfrac{6}{x-1} = 5$

Ejemplo 1.6. $2\sqrt{x+4} - x = 1$

1.0.4. Taller-Repaso

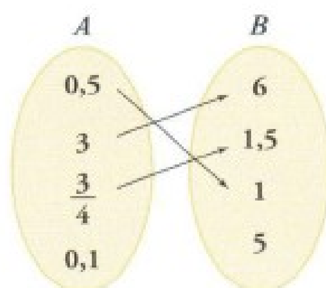
1. Determinar el valor de de la variable, en las siguientes ecuaciones lineales.
   - $5x - 10 = 10$
   - $4y - 5 = 3y + 1$
   - $2(2x - 3) = 2x - 10$
   - $\dfrac{3x}{2} + 4 = 2x + 5$
   - $\dfrac{x+6}{3} + 4 = \dfrac{3x-5}{2} + 2x - 1$
2. Determinar las soluciones para la ecuación dada:
   - $5x^2 - 10 = 10^2$
   - $4y - 5 = 3y + 1$
   - $2(2x - 3) = \dfrac{1}{x}$
   - $\dfrac{3x^2 + 2x}{2} + 4 = 2x + 5$
   - $\dfrac{x^2+6}{3} + 4 = \dfrac{3x^2-5}{2} + 2x - 1$

Capítulo 2

Funciones

Para la compresión del concepto de función, primero se estudia la idea de relación.

Definición 2.1. *Podemos definir una **relación** como conjunto en el cual todos sus elementos son pares ordenados. En otras palabras, una relación es una correspondencia que se establece entre los elementos de dos conjuntos.*



Al conjunto A se le denomina **conjunto de partida** y al conjunto B, **conjunto de llegada**. Para nombrar las relaciones se utilizan letras mayúsculas, por ejemplo en la gráfica anterior **3R6** indica que el elemento 3 del conjunto A, está relacionado con el elemento 6 del conjunto B. De ahí que todas las relaciones que podamos definir entre estos conjuntos se encuentran en el siguiente conjunto cartesiano

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\} \tag{2.1}$$

Observación 1:

Los elementos del conjunto A que tienen como imagen en B reciben el nombre de **dominio** de G; los elementos de B que son imagen de algún elemento de A reciben el nombre de **rango** de G, y el conjunto de todas las parejas ordenadas (x, y) que están relacionadas, decimos que es el **grafo** de la relación.

Definición 2.2. *Una función f es una relación que asigna a cada elemento x de un conjunto A un único elemento y de un conjunto B.*

Matemáticamente, una función f se denota como $f : A \to B$, donde A es el conjunto de partida y B es el conjunto de llegada. Por ejemplo: escribe como sigue:

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \to & B \\ & x & \to & y = f(x) \end{array} \tag{2.2}$$

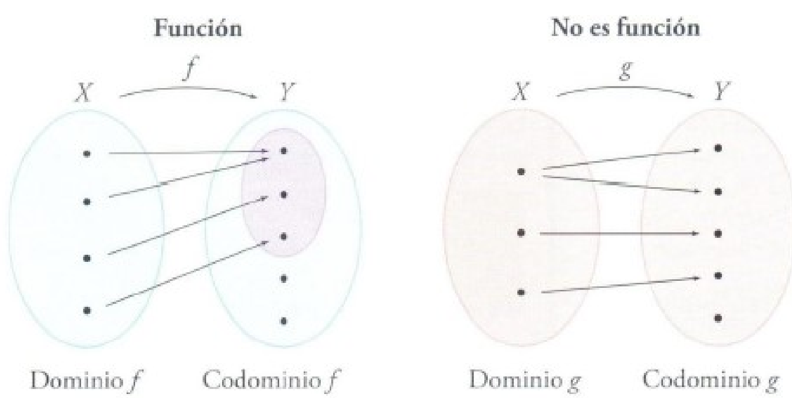
Observación 2:

Se puede decir que todas las funciones son relaciones, pero no todas las relaciones son funciones. Para que una relación sea considerada como una función, deberá cumplir con las siguientes condiciones:

1.) Todos los elemento del conjunto A deben estar relacionado con un elemento del conjunto B.

2.) Cada elemento de A no puede relacionarse con dos o más elementos de B.

Los diagramas que se muestran a continuación describen una relación que es función y una relación que no es función.



Observación 3:

- Las funciones se nombran con letras minúsculas como $f, g, h, i, \cdots$
- La notación $f(x)$ se utiliza para indicar el elemento que en el rango corresponde a x, por la función f, y se le llama *valor de la función* f en x o *imagen* de x por f.
- La expresión $f(x) = y$ se lee "f de x igual a y".

  Ejemplo 2.1. *Observemos la(s) operaciones matemáticas que hace la función*

  $$f(x) = 2x + 1$$

  es una función que asigna a cada número real x su doble más uno.

  Ejemplo 2.2. *Si $f(x) = -5x^2 + 3$, entonces,*

  $$f \ \textbf{\textit{envía}} \ x \ \textbf{\textit{a}} \ -5x^2 + 3$$

  Así, el valor de la función $f(x)$ cuando $x = -1$ es

  $$f(-1) = -5(-1)^2 + 3 = -2$$

Observación 4:

Una función se puede representar de las siguientes formas:

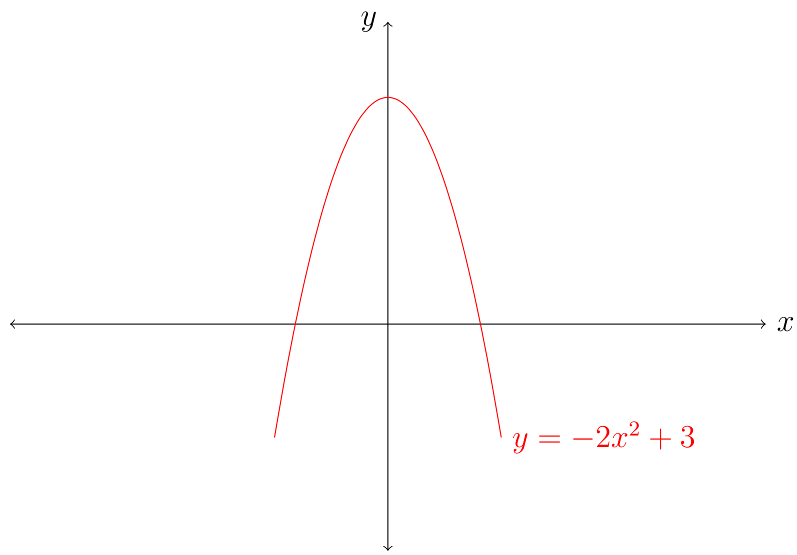
a) Expresión algebraica.

$$f(x) = -2x^2 + 3$$

b) Tabla de valores. (Tabulación)

x	-1	0.5	0	0.5	1
$f(x)$	1	-2.5	0	-2.5	1

c) Gráfica.



Algunos de los software más usados para para la gráficas de las las funciones se pueden encontrar: *Geogebra; Excel (solver); Mathsolver(app dispositivo móvil); Plataformas web (Symbolab) ; Wolfram, entre otros.*

2.1. Tipos de Funciones

En esta sección se explorarán varios tipos de funciones, incluyendo:

Tipo de Función	Descripción
Funciones constantes	Son funciones cuya regla de correspondencia asigna un único valor constante a cualquier valor de la variable independiente. Ejemplo: $f(x) = c$, donde c es una constante.
Funciones lineales	Son funciones cuya gráfica es una línea recta. Tienen la forma $f(x) = mx + b$, donde m es la pendiente y b es la ordenada al origen.
Funciones cuadráticas	Son funciones polinómicas de segundo grado. Tienen la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b, y c son constantes y $a \neq 0$.
Funciones Racionales	Son funciones que se pueden expresar como cociente de dos polinomios. Tienen la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios.
Funciones exponenciales	Son funciones que involucran una variable en el exponente. Tienen la forma $f(x) = a^x$, donde a es una constante y x es la variable independiente.
Funciones logarítmicas	Son funciones inversas de las funciones exponenciales. Tienen la forma $f(x) = \log_a(x)$, donde a es la base del logaritmo.

2.2. Modelización de Funciones

Las funciones son herramientas poderosas para modelar fenómenos del mundo real. En esta sección se estudiarán diferentes aplicaciones de las funciones, como el análisis marginal, costos e ingresos, punto de equilibrio, modelos de crecimiento y decaimiento exponencial, entre otros.

2.2.1. Funciones Lineales

Una función lineal tiene la forma $f(x) = mx + b$, donde m es la pendiente y b es la ordenada al origen. La pendiente m indica la inclinación de la recta y la ordenada al origen b es el valor de $f(x)$ cuando $x = 0$.

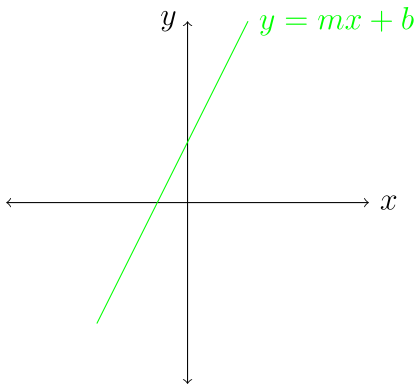


Figura 2.1: Gráfica de la función lineal $y = mx + b$ con pendiente positiva $m > 0$ y $b \neq 0$.

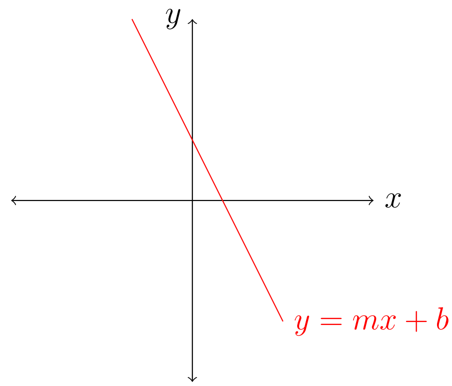


Figura 2.2: Gráfica de la función lineal $y = mx + b$ con pendiente negativa $m < 0$ y $b \neq 0$.

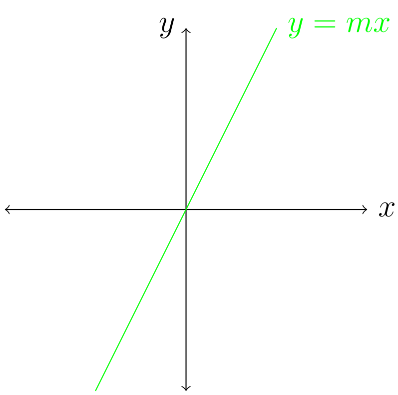


Figura 2.3: Gráfica de la función lineal $y = mx + b$ con pendiente positiva $m > 0$ y $b = 0$.

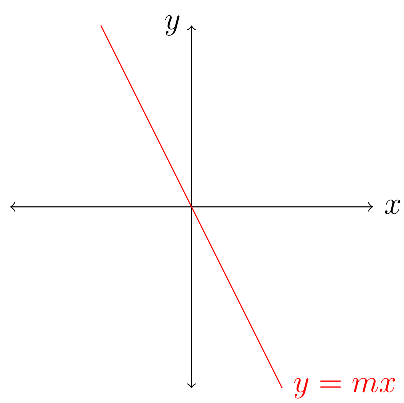


Figura 2.4: Gráfica de la función lineal $y = mx + b$ con pendiente negativa $m < 0$ y $b = 0$.

2.2.2. Pendiente

La pendiente m de una función lineal se calcula como el cambio en y dividido por el cambio en x entre dos puntos en la recta. Matemáticamente, se expresa como:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2.2.3. Cortes con los Ejes Coordenados

Para encontrar los cortes con los ejes coordenados, simplemente sustituimos $x = 0$ para encontrar la ordenada al origen, y $y = 0$ para encontrar la abscisa al origen.

- **Ordenada al Origen**: $b = f(0)$ (Cuando x=0).
- **Abscisa al Origen**: Para encontrar la abscisa al origen, igualamos la función a 0 y despejamos x: $0 = mx + b$, luego $x = -\frac{b}{m}$ (Cuando y=0).

2.2.4. Aplicaciones en Economía

En economía, las funciones lineales se utilizan comúnmente para modelar la relación entre la cantidad de bienes o servicios y su precio, como en las funciones de demanda y oferta.

Función de Demanda

La función de demanda $D(x)$ indica la cantidad de un bien o servicio que los consumidores están dispuestos a comprar a un determinado precio x.

Se puede modelar con una función lineal, donde la pendiente representa la sensibilidad de los consumidores al precio y la ordenada al origen refleja la cantidad demandada cuando el precio es 0.

Ejemplo 2.3. *Supongamos que la función de demanda para un producto (Bien o servicio) es $D(x) = 100 - 2x$, donde x es el precio del producto en dólares.*

- ***Pendiente**: $m = -2$, lo que indica que por cada dólar que aumenta el precio, la cantidad demandada disminuye en 2 unidades.*

- ***Ordenada al Origen***: *$b = 100$, lo que significa que cuando el precio es 0, se demandan 100 unidades del producto.*
- ***Cortes con los Ejes Coordenados***: *$x = 0$ (ordenada al origen), $y = 0$ (absisa al origen).*

Función de Oferta

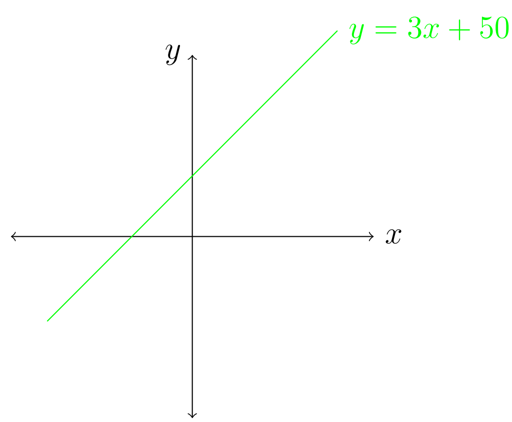
La función de oferta $O(x)$ indica la cantidad de un bien o servicio que los productores están dispuestos a ofrecer a un determinado precio x. También se puede modelar con una función lineal, donde la pendiente representa el costo de producción y la ordenada al origen refleja la cantidad ofrecida cuando el precio es 0.

Ejemplo 2.4. *En el mercado de bienes, la función de oferta de un producto puede ser modelada por la ecuación:*

$$O(x) = 50 + 3x$$

donde:

- *x representa el precio del producto en dólares.*
- *$O(x)$ representa la cantidad ofrecida del producto.*



Este modelo sugiere que el precio del producto afecta la cantidad ofrecida de la siguiente manera:

- *La ordenada al origen es* 50*, lo que indica que, incluso cuando el precio es* 0*, todavía se ofrecen* 50 *unidades del producto.*
- *La pendiente de la función es* 3*, lo que significa que por cada aumento de un dólar en el precio, la cantidad ofrecida aumenta en* 3 *unidades.*

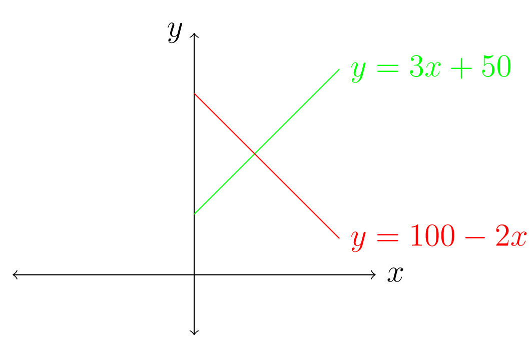
2.2.5. Punto de Equilibrio

El punto de equilibrio se produce cuando la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida, es decir, cuando las funciones de demanda y oferta se cruzan. Matemáticamente, se encuentra igualando las funciones de demanda y oferta y resolviendo para encontrar el valor de x. Esto nos da el precio y la cantidad en la que se equilibran el mercado.

Ejemplo 2.5. *Supongamos que la función de demanda es* $D(x) = 100 - 2x$ *y la función de oferta es* $O(x) = 50 + 3x$*. Para encontrar el punto de equilibrio, igualamos ambas funciones y resolvemos para* x*.*

$$D(x) = O(x) \implies 100 - 2x = 50 + 3x$$

Resolviendo esta ecuación, encontramos $x = 10$*, lo que significa que el precio de equilibrio es* 10 *dólares. Para encontrar la cantidad en equilibrio, sustituimos* $x = 10$ *en cualquiera de las funciones y encontramos* $D(10) = O(10) = 80$*, lo que indica que en equilibrio se demandan y ofrecen* 80 *unidades del producto.*



Es importante recordar que en el desarrollo del álgebra y la trigonométrica se han trabajado con diferentes funciones de variable real, tales como que muy usadas de ahora en adelante.

Tipo de función	Expresión algebraica	Gráfica
Función Lineal	$y = f(x) = mx + b$	
Función Cuadrática	$y = f(x) = ax^2 + bx + c$	
Función Cubica	$y = f(x) = x^3$	
Función Racional	$y = f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	
Función Radical	$y = \sqrt{x}$	
Función trigonométrica	$y = f(x) = \cos(x)$	
Función Exponencial	$y = f(x) = e^{ax}$	
Función Logarítmica	$y = f(x) = \log(x)$	
Función inversa	$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$	

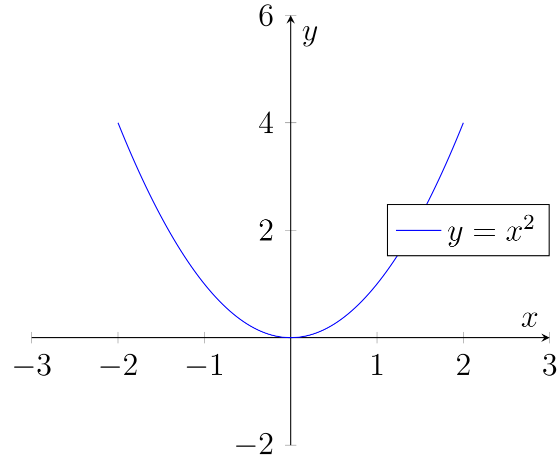
2.3. Función Cuadrática

Una función cuadrática es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

Propiedades

- Tiene una forma de parábola.
- El vértice de la parábola es un punto de la forma $V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
- Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba; si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo.

Ejemplo 2.6. *Gráfica de una función cuadrática*



2.4. Dominio y Rango

Para determinar el dominio y rango de dos funciones primero

$$
\begin{array}{ccc|l}
y & = & f(x) & \\
\downarrow & & \downarrow & y \rightarrow \text{Rango de la función} \\
\text{Variable} & & \text{Variable} & \\
\text{dependiente} & & \text{independiente} & x \rightarrow \text{Dominio de la función}
\end{array}
$$

Podemos decir que el dominio de la función, es el conjunto de puntos donde la expresión algebraica $f(x)$ este bien definida, y rango no es nada más que el conjunto de las imágenes de x mediante la función f.

Para determinar el dominio de una función se despeja la variable y, y se busca las restricciones que tiene x. Del mismo modo, para hallar el rango se despeja la variable x y se buscan las restricciones de y.

EJEMPLOS

1. Encontrar el dominio de cada función.

a. $h(x) = \sqrt{3x + 2}$

Como las cantidades subradicales de raíces con índice par deben ser positivas o cero, se tiene que:

$3x + 2 \geqslant 0$

$3x \geqslant -2$

$x \geqslant -\frac{2}{3}$

Por tanto, Dom $h = \left[-\frac{2}{3}, \infty\right)$.

b. $g(x) = \text{Log}_3 (x - 5)$

Como los logaritmos están definidos para valores positivos, se realiza:

$x - 5 > 0$

$x > 5$

Por tanto, Dom $g = (5, \infty)$.

2. Hallar el rango de la función $f(x) = \frac{3x - 2}{x + 3}$.

Para hallar el rango, se despeja x, así:

$y = \frac{3x - 2}{x + 3}$

$y(x + 3) = 3x - 2$

$xy + 3y = 3x - 2$

$xy - 3x = -2 - 3y$

$x(y - 3) = -2 - 3y$

$x = \frac{-2 - 3y}{y - 3}$

Como $y - 3 \neq 0$, entonces, y no debe ser 3. Por tanto, Ran $f = R - \{3\}$.

3. Hallar el dominio y el rango de la función

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}.$$

Como el denominador de la expresión racional debe ser diferente de cero, se tiene que:

Como $x^2 - 1 = 0$ cuando $x = 1$ o $x = -1$, entonces, la función $f(x)$ no está definida en estos valores.

Por tanto, Dom $f = \mathbb{R} - \{1, -1\}$.

Para hallar el rango se despeja x en $y = \frac{2}{x^2 - 1}$.

$y = \frac{2}{x^2 - 1}$

$yx^2 - y = 2$

$yx^2 = 2 + y$

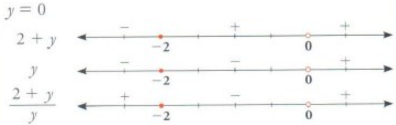
$x^2 = \frac{2 + y}{y}$

Entonces, $x = \pm\sqrt{\frac{2 + y}{y}}$.

Ahora, se resuelve $\frac{2 + y}{y} \geqslant 0$ utilizando la forma gráfica para solucionar desigualdades.

$2 + y = 0$, de donde $y = -2$

$y = 0$



Como $\frac{2 + y}{y} \geqslant 0$, entonces, la solución de la desigualdad es: $S = (-\infty, -2] \cup (0, \infty)$.

Por tanto, Ran $f = (-\infty, -2] \cup (0, \infty) = \mathbb{R} - (-2, 0]$.

Función Logarítmica y Propiedades

Concepto

La función logarítmica tiene la forma $f(x) = \log_a x$, donde a es una constante positiva diferente de 1.

Propiedades

- El dominio es $(0, \infty)$.
- El rango es $(-\infty, \infty)$.
- La función crece lentamente para valores grandes de x.

- La función decrece rápidamente para valores pequeños de x.

Ejemplo de Aplicación en Economía

- Modelado de elasticidad precio de la demanda: Se utiliza la función logarítmica para calcular la elasticidad-precio de la demanda de un bien.

Ejercicio 2.1. *Tarea Investigativa*

1. *Como hallar los puntos de cortes con los ejes coordenados.*
2. *Dar un ejemplo particular para cada función, donde se vea en forma explicita la función en forma de : Expresión algebraica, tabulación (mínimo 4 valores) y su gráfica (Puede usar una graficadora).*

2.5. Taller

Para las funciones

Tipo de función	Expresión algebraica	Gráfica
Función Lineal	$f(x) = -3x + 2$	
Función Cuadrática	$f(x) = -2x^2 + 3x + 2$	
Función Cubica	$f(x) = -x^3$	
Función Racional	$f(x) = \dfrac{x + 2x}{x - 2}$	
Función Radical	$y = \sqrt{x + 1}$	
Función trigonométrica	$f(x) = 2\cos(x)$	
Función Exponencial	$f(x) = e^{2x}$	
Función Logarítmica	$f(x) = \log(x)$	
Función inversa	$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$	

Determinar

- Dominio y rango de funciones

- Puntos de cortes, con los ejes coordenados.
- Gráficas

Bibliografía

- Santillana. **Los caminos del saber 8 y 9**
- Carlo B. Allendoerfer **Matematicas Universitarias**.
- Jiménez Murillo J. **Matemáticas para la Computación**