Matemáticas Generales

Apuntes de clase.

Profesor:
Carlos Andrés Leiton Piamba
Docente Universitario

En este documento se encuentra una recopilación selecta de mis apuntes de Matemáticas Generales, los cuales son resultado de mi dedicación y compromiso en la enseñanza de esta materia. El objetivo es complementar la formación matemática adquirida por el estudiante durante su educación básica y media. Pues, se busca dotar al estudiante de las herramientas necesarias para abordar con solidez los conceptos fundamentales en diferentes tópicos de la matemáticas básicas.

Considero que es una guía de estudio ideal para aquellos estudiantes que deseen obtener una comprensión sólida de los conceptos matemáticos fundamentales, sin la necesidad de adentrarse en demostraciones formales y complejas. En el proceso de tener un enfoque claro y didáctico, espero que este material facilite el aprendizaje y despierte el interés por el mundo de las ciencias matemáticas.

Popayán, 13 de febrero de 2025

Índice general

0.1. Conjuntos numéricos

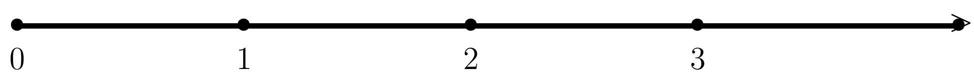
Los **Conjuntos numéricos** se crearon a partir de necesidades especificas. Así, los números naturales surgieron de la necesidad de contar, los enteros se utilizan desde la antigüedad para indicar deudas y ganancia. Los racionales permiten representar las partes de un todo y los racionales sirven para expresar la mediad de cientos elementos como la diagonal de un cuadrado.

0.1.1. Números naturales

El conjunto de los **números naturales** se simboliza con $\mathbb{N}$ y se determina por extensión así:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\} \tag{1}$$

y se representan en la recta numérica de la siguiente manera:

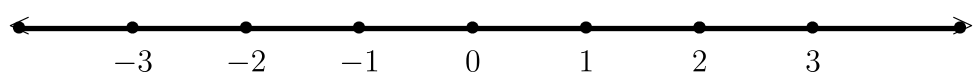


0.2. Números enteros

El conjunto de los **números enteros** se simboliza con $\mathbb{Z}$ y se determina por extensión así:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\} \tag{2}$$

Los números enteros son una extensión de los números naturales y se representan en la recta numérica así: El conjunto de los números enteros está conformado por:



- Los enteros positivos : $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4 \cdots\}$
- Los enteros negativos : $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4 \cdots\}$

- El número cero: $\{0\}$
- Por tanto el conjunto de los números enteros está formado por.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{+} \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^{-}$$

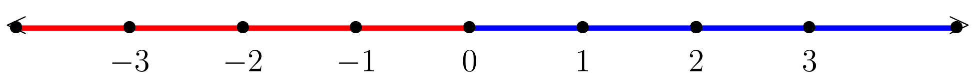
0.2.1. Propiedades y orden de los números enteros

Dados dos números enteros a y b , nosotros podemos estableces si estos son iguales $(=)$, o uno es mayor que otro $(>)$ o es decidir quien es menor $(<)$, es decir podemos establecer un orden en los $\mathbb{Z}$.

Ejemplo 0.1. *Sea* $a = 2$*,* $b = 10$*,* $c = -7$*,* $d = 0$ *y* $f = 2$

$$a > b, \quad b > c, \quad d > c, \quad f > c, \quad f = a$$

En una recta numérica podemos establecer que los números que están en la parte derecha del cero, el que este más alejado del cero es mayor, y el que este más cercano al cero es menor, y en la parte de los negativos, quienes están más cercanos al cero son mayores y quienes están alejados del cero son menores.



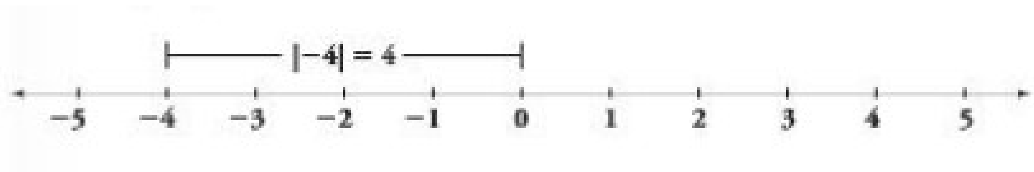
0.3. El valor absoluto

El valor absoluto de un número entero es la distancia que hay entre el número entero y el cero, en la recta numérica.

Si a es un número entero, el valor absoluto de a se expresa con el símbolo $|a|$

Ejemplo 0.2. *El valor absoluto de* -4 *es* 4 *ya que hay 4 unidades de distancia entre* -4 *y* 0*.*

Se escribe $|-4| = 4$ *y gráficamente lo podemos ver de la siguiente manera.*



0.4. Operaciones con números enteros

0.4.1. Adición:

La suma de dos números enteros se realiza como sigue;

- Silos dos números tienen el mismo singo, se suman los valores absolutos y al resultado se le asigna el signo común.
- Si los números tienen signos diferentes, se halla la diferencia entre sus valore absolutos y al resultado se le asigna el signo del número que tiene mayor valor absoluto.

Ejemplo 0.3. *Observemos que*

$$-5 + 3 = -2$$

puesto que tienen signos diferentes, entonces, la diferencias entre $|-5|$*y* $|2|$ *es 2, y el resultado tiene con signo negativo, puesto que* $|-5| > |3|$ *y el signo de* -5 *es negativo.*

0.4.2. Sustracción:

La resta de dos números enteros es la suma del primero número entero con el opuesto del segundo número, es decir:

$$a - b = a + (-b)$$

Ejemplo 0.4. *Al restar,* $8 - 17$*, se suma* 8 *con el opuesto de* 17*, que es* -17*. Luego,* $8 + (-17) = -9$

0.4.3. Multiplicación y división:

El producto o cociente de dos números enteros de iguales signo es un número entero positivo cuyo resultado es la multiplicación o división de los valores absolutos de dichos números.

Ejemplo 0.5.

$$(-10) * (-3) = 30 \quad (-92) \div (-2) = 46$$

El producto o cociente de dos números enteros de signos diferentes es un número entero positivo cuyo resultado es la multiplicación o división de los valores absolutos de dichos números.

Ejemplo 0.6.

$$(10) * (-3) = -30 \qquad (92) \div (-2) = -46$$

Ejercicio 0.1. *Realizar las siguientes operaciones.*

1. *Sumar(restar)*
   - $(-4+4+5)+(6+8)+2$
   - $301-109-(321+403)$
   - $-23+21+15$
2. *Multiplicación*
   - $(-32)(-4)$
   - $(-1)(-100 \bullet 3)$
   - $23 \bullet -5 \bullet 5 \bullet -3$
3. *Divisiones*
   - $[(-32) \div (-4)] \div (2)$
   - $(135) \div (10 \div 2)$
   - $\frac{-195}{3} \div -\frac{15}{-3}$
4. *Polinomios aritméticos*
   - $-5\,[(-1+13)(2 \bullet 10)-(1242 \div 3)]$
   - $\{[(-1+13)(2 \bullet 10)-(1242 \div 3)]\}+\{[(-12-13) \bullet (2 \bullet 10)+(142 * 6)]\}$

0.5. Números racionales

El conjunto de números racionales está formado por los números de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

observemos que:

$$\frac{a}{b} \to \frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}}$$

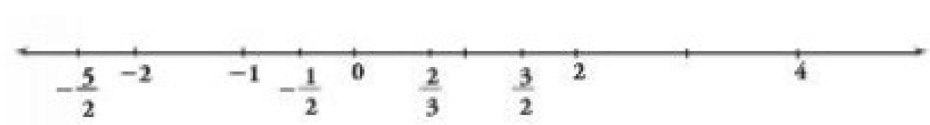
donde, el **denominador** me indica en cuantas partes iguales divido la unidad, mientras que el **numerador** me indica cuantas partes tomo, de dicha división.

Los números racionales se pueden expresar como números decimales exactos o como números decimales periódicos.

Ejemplo 0.7. *Los números* $\frac{3}{4}$ *y* $\frac{1}{3}$ *se puede expresar como*

$$\frac{3}{4} = 0.75 \quad y \quad \frac{1}{3} = 0.\bar{3}$$

Los números racionales los podemos representar en la recta numérica así:



Ejercicio 0.2. *Consultar, Los proceso para realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división con números decimales.*

Ejercicio 0.3. *En que consiste la amplificación y simplificación de números racionales.*

0.6. Operaciones con números Racionales

0.6.1. Adición y sustracción:

La suma o resta de dos números racionales se realiza como sigue;

- Si tienen igual denominador, se deja el mismo denominador y se resta o suma los mismos numeradores.

  Ejemplo 0.8.
  $$\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=\frac{3+5}{7}=-\frac{8}{7}$$
  por otro lado,
  $$\frac{3}{7}-\frac{5}{7}=\frac{3-5}{7}=-\frac{2}{7}$$

- Si tienen distintos denominadores, se puede usar amplificación de fracciones y aplicar la anterior técnica, otro caso es usar la técnica de la carita feliz.

  Ejemplo 0.9.
  $$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{3*5+4*2}{4*5}=\frac{15+8}{20}=\frac{23}{20}$$
  otros casos posibles,

  Ejemplo 0.10.
  $$\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{3*5-4*2}{4*5}=\frac{15-8}{20}=\frac{7}{20}$$

  Ejemplo 0.11.
  $$-\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{-3*5+4*2}{4*5}=\frac{-15+8}{20}=\frac{-7}{20}$$

0.6.2. Multiplicación:

El producto de dos o más números racionales es otro número racional, cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores, es decir:
$$\frac{a}{b}*\frac{c}{c}=\frac{a*c}{b*d}$$

Ejemplo 0.12. *Determinar el producto entre* $\frac{-6}{3}$ *y* $\frac{8}{5}$*, esto es*

$$\frac{-6}{3} * \frac{8}{5} = -\frac{6*8}{3*5} = \frac{48}{15}$$

0.6.3. División:

El cociente entre dos números racionales es el producto del primer número racional con el reciproco del segundo.

Ejemplo 0.13.

$$\frac{8}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{8*5}{3*5} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

0.6.4. Polinomios Aritméticos

Ejercicio 0.4. *Operar el siguiente polinomio aritmético*

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{5}\left\{2\left[-\left(-\frac{1}{3}+\frac{7}{6}\right)\div\left(\frac{2}{3}*\frac{1}{3}\right)\right]\right\} &= -\frac{1}{5}\left\{2\left[-\left(\frac{-6+21}{18}\right)\div\left(\frac{2}{9}\right)\right]\right\} \\
&= -\frac{1}{5}\left\{2\left[-\left(\frac{15}{18}\right)\div\left(\frac{2}{9}\right)\right]\right\} \\
&= -\frac{1}{5}\left\{2\left[-\frac{5}{6}\div\frac{2}{9}\right]\right\} \\
&= -\frac{1}{5}\left\{2\left[-\frac{45}{12}\right]\right\} \\
&= -\frac{1}{5}\left\{2\left[-\frac{15}{4}\right]\right\} \\
&= -\frac{1}{5}\left\{-\frac{15}{2}\right\} \\
&= \frac{15}{10} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Ejercicio 0.5. *Operaciones con polinomios aritméticos*

1. *Realizar la siguiente operaciones.*

- *Sumar los siguientes números*

  a) $\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{7}+\frac{5}{6}\right)$

  b) $\left(\frac{13}{5}+\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}-\frac{4}{15}\right)$

  c) $\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{8}\right)+\left(-\frac{3}{5}-\frac{4}{15}\right)$

  d) $\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{4}\right)-\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\right)$

- *Resolver el siguiente polinomio*

  a) $\left[\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\right)\right]+\left[\frac{3}{2}\div\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]$

  b) $-\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{7}+\frac{5}{6}\right)+\left[\frac{4}{2}\left(2+\frac{7}{6}\right)\right]$

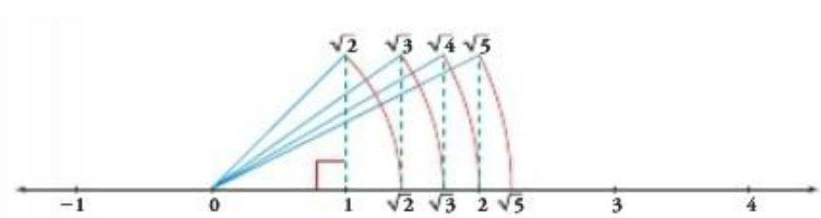
  c) $173\left\{\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{7}+\frac{5}{6}\right)+\left[\frac{4}{2}\left(2+\frac{7}{6}\right)\right]\right\}\div\left\{-\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{7}+\frac{5}{6}\right)+\left[\frac{4}{2}\left(2+\frac{7}{6}\right)\right]\right\}$

  d) $\left\{\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{10}+\frac{5}{15}\right)-\left[\frac{3}{2}\div\left(-4+\frac{1}{6}\right)\right]\right\}-\left\{-\left(\frac{12}{3}+\frac{5}{9}+\frac{5}{6}\right)+\left[\frac{49}{2}\left(2-\frac{3}{7}\right)\right]\right\}$

  e) $[12\div(0.3+0.42)]*[13-(-0.3+0.112)]$

0.7. Números irracionales

El conjunto de los números irracionales se simboliza con $\mathbb{I}$ y está formado por todos los números decimales infinitos no periódicos. Los números racionales $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\cdots$ se representan en la recta numérica a partir de triángulos rectángulos aplicando el teorema de Pitágoras.



Capítulo 1

Sistemas Numéricos

1.1. Sistema decimal

El sistema decimal se usa en forma rutinaria para la representación de cantidades mediante los siguientes 10 caracteres diferentes:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Con estas cifras se pueden expresar cantidades hasta el 9. Para expresar cantidades más allá de este número es necesario introducir la representación posicional, es decir, a cada cifra se le asigna un valor posicional determinado de acuerdo con el lugar que ocupa dentro del número.

Por ejemplo: el número decimal 836.74 se compone en la parte entera de la cifra 8 con el valor posicional 100, la cifra 3 con el valor posicional 10 y la cifra 6 con el valor posicional 1, y en la parte fraccionaria de la cifra 7 con valor posicional el valor posicional 0.1 y la cifra 4 con el valor posicional 0.01. Así se tiene que:

$$836.74 = 8 * 100 + 3 * 10 + 6 * 1 + 7 * \frac{1}{10} + 4 * \frac{1}{100}$$

1.2. Propiedades de los números reales

Sean a, b, $c \in \mathbb{R}$ entonces se cumple

1. Prop. Clausurativa
$$a + b \in \mathbb{R}, \quad a * b \in \mathbb{R}$$
2. Prop. Conmutativa
$$a + b = b + a, \quad a * b = b * a,$$
3. Prop. Asociatividad
$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad (a * b) * c = a * (b * c),$$
4. Prop. Neutro aditivo y neutro multiplicativo
$$a + (0) = a, \quad (a * 1) = a,$$
5. Prop. Opuesto aditivo y opuesto multiplicativo
$$a + (-a) = 0, \quad a * \frac{1}{a} = 1,$$

1.3. Operaciones básicas

Las cuatro operaciones básicas de los números reales, a saber: suma, resta, multiplicación y división, van acorde con las operaciones ya vistas anteriormente. Ahora queremos definir 3, operaciones más que son de gran importancia en matemáticas.

1.3.1. Potenciación

La potenciación es la operación que permite expresar, forma simplificada, la multiplicación de varios factores iguales.

En la potenciación de números reales el exponente puede ser entero positivo, entero negativo o cero.

Definición 1.1.

- *Si $n \in \mathbb{Z}^+$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces se cumple que:*

$$a^n = \underbrace{a * a * a * a * \cdots * a}_{n\text{-factores}}$$

- *Si $-n \in \mathbb{Z}^-$ y $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ entonces se cumple que:*

$$\begin{aligned} a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\ &= \frac{1}{\underbrace{a * a * a * a * \cdots * a}_{n\text{-factores}}} \end{aligned}$$

- *Si $n = 0$ y $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ entonces se cumple que:*

$$a^n = a^0 = 1$$

Ejemplo 1.1. *Hallar la potencia en cada caso*

- $(-12)^3 = (-12)(-12)(-12) = -1728$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{81}} = 81$

1.3.2. Propiedades de la potenciación

Son reglas generales que se utilizan para simplificar expresión numéricas y algebraicas.

Producto de Potencias de igual base	$a^m * a^n = a^{m+n}$
Cociente de Potencias de igual base	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
Potencia de una potencia	$(a^n)^m = a^{nm}$
Potencia de un producto	$(a * b)^n = a^n * b^n$
Potencia de un cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
Potencias con exponente negativo	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
Potencias con exponente uno	$(a)^1 = a$

Ejemplo 1.2. *Simplificar la siguiente expresión*

$$\begin{aligned}
\frac{10^2 \times 32 \times 3^3}{5^2 \times 3^2 \times 2^4} &= \frac{10^2 \times 32 \times 3^3}{5^2 \times 3^2 \times 2^4} \\
&= \frac{(5 \times 2)^2 \times 2^5 \times 3^3}{5^2 \times 3^2 \times 2^4} \\
&= \frac{5^2 \times 2^2 \times 2^5 \times 3^3}{5^2 \times 3^2 \times 2^4} \\
&= \frac{5^2 \times 2^7 \times 3^3}{5^2 \times 3^2 \times 2^4} \\
&= 5^{2-2} \times 2^{7-4} \times 3^{3-2} \\
&= 5^0 \times 2^3 \times 3^1 \\
&= 2^3 \times 3
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.1. *Resolvamos los siguientes ejercicios de potenciación*

1) $(x^2y^5)^3$

2) $(a^3b^2)^2(a^4b)^{-3}$

3) $\left(\dfrac{m^2n^3p^4}{m^5np^{-2}}\right)^{-1}$

4) $\dfrac{8x^4y^{-8}}{4x^{-1}y^3}$

5) $\left(\dfrac{st^{-2}v^{-3}}{s^2t^3v^{-3}}\right)^{-3}$

6) $(m^{-2}nx^{-3}y^{-5})^{-10}$

7) $(ab^2c^{-3})^{-2}(ab^2c)$

8) $\left(\dfrac{6ab^{-4}}{3a^{-2}b^{-2}}\right)\left(\dfrac{5ab^2}{2a^{-3}b}\right)^{-1}$

9) $\dfrac{(2a^3b^4)^{-5}}{(64a^{-3}b^{-2})^{-1}}$

10) $\dfrac{(4x^2yz^{-1})^{-10}}{(1024x^6y^5z^{-4})^{-2}}$

Solución 5)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{st^{-2}v^{-3}}{s^2t^3v^{-3}}\right)^{-3} &= \frac{(st^{-2}v^{-3})^{-3}}{(s^2t^3v^{-3})^{-3}} \\
&= \frac{s^{-3}t^6v^9}{s^{-6}t^{-9}v^9} \\
&= s^{(-3+6)}t^{(6+9)}v^{(9-9)} \\
&= s^3t^{15}v^0 \\
&= s^3t^{15}
\end{aligned}$$

1.3.3. Radicación

La raíz enésima de un número real a es un número real b, si y sólo si la enésima potencia de b es a. Es decir,

$$\sqrt[n]{a} = b, \qquad \text{si y solo si} \qquad b^n = a$$

Donde, $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Si n es par, se debe cumplir que $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Un exponente racional de la forma $\frac{m}{n}$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n > 0$ se define como

$$\sqrt[n]{a^m} \Longleftrightarrow a^{\frac{m}{n}} \tag{1.1}$$

si n es par, entonces, $a \geq 0$

1.3.4. Propiedades de los radicales

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$, se cumplen las siguientes propiedades siempre y cuando las raíces indicadas existan, es decir, que las raíces deben ser números reales.

Propiedad	Expresión algebraica
Raíz de un producto	$\sqrt[n]{a * b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$
Raíz de un cociente	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Raíz de una raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
Raíz de una potencia	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
Raíz enésima de un número positivo, $a > 0$	$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$
Raíz enésima, con n impar	$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$

Ejemplo 1.3. *Usando las propiedades de la radicación simplificar la siguiente expresión*

$$\begin{aligned} \sqrt{80x^5y^4} &= \sqrt{5 \times 2^4 \times x^4 \times x \times y^4} \\ &= 2^2x^2y^2\sqrt{5x} \\ &= 4x^2y^2\sqrt{5x} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2. *Aplicar las propiedades de radiación para simplificar las siguientes expresiones.*

1) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{b}}$

2) $\sqrt[3]{a^2\sqrt[3]{a^2}}$

3) $\sqrt{4x}\sqrt{20x^3}$

4) $\sqrt[3]{80x^5y^4}$

5) $\sqrt[3]{\dfrac{4xy^3}{256x^4y^2}}$

6) $\sqrt[4]{\sqrt{a^{16}b^{24}}}$

7) $\sqrt[6]{(\sqrt{m^2n^4})(\sqrt{m^4n^2})}$

8) $\sqrt[6]{\sqrt{s^{24}t^{36}u^{12}}}$

9) $\sqrt{\sqrt{\dfrac{\sqrt{4a^2b^8}}{\sqrt{6561a^{16}b^{24}}}}}$

10) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256(a^{16}b^4)^2}}}$

Solución 10)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt{4a^2b^8}}{\sqrt{6561a^{16}b^{24}}}}} &= \sqrt[4]{\frac{\sqrt{4a^2b^8}}{\sqrt{6561a^{16}b^{24}}}} \\
&= \frac{\sqrt[8]{4a^2b^8}}{\sqrt[8]{3^8a^{16}b^{24}}} \\
&= \frac{\sqrt[8]{4a^2b^8}}{\sqrt[8]{3^8a^{16}b^{24}}} \\
&= \frac{b\sqrt[8]{4a^2}}{3a^2b^3} \\
&= \frac{\sqrt[8]{4a^2}}{3a^2b^2}
\end{aligned}
$$

Escribe las siguientes expresiones con exponentes racionales. Luego, simplifica si es po-

sible.

11) $\sqrt[3]{y\sqrt{y}}$

12) $(\sqrt[7]{m^6})(\sqrt[6]{m^5})$

13) $(\sqrt{16ab^3})(\sqrt[6]{4a^3b^2})$

14) $\sqrt[3]{(\frac{8}{27}a^{-3}b^6)^{-2}}$

15) $\sqrt[4]{\left(\frac{3mn}{2a^3b^2}\right)^8}$

16) $\sqrt{\sqrt{x^{12}y^8\sqrt{x^2y}}}$

17) $\sqrt[3]{a^2b^6c}\sqrt[3]{a^3b^3c^2}$

18) $(\sqrt[6]{mn^2})(\sqrt{\sqrt[3]{m^5n^4}})$

19) $\sqrt[5]{\sqrt{\frac{a^{20}b^{35}}{x^{12}x^{17}}}}$

20) $\frac{\sqrt[3]{s^6t^9v^4}}{\sqrt[3]{s^{12}t^3v^{10}}}$

Solución 20)

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{s^6t^9v^4}}{\sqrt[3]{s^{12}t^3v^{10}}} &= \sqrt[3]{\frac{s^6t^9v^4}{s^{12}t^3v^{10}}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{t^{9-3}}{s^{12-6}v^{10-4}}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{t^6}{s^6v^6}} \\
&= \left(\frac{t^6}{s^6v^6}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{t^2}{s^2v^2}
\end{aligned}$$

1.3.5. Racionalizar

La racionalización de radicales es el proceso mediante el cual se eliminan las raíces del denominador (numerador) de una fracción. Esto, con un fin de simplificación. La racionalización de radicales permite que sea más fácil operar las fracciones.

Para este contexto tenemos 3 casos de racionalizar el denominador:

1. Racionalizar el denominador con un solo termino

- Racionalizar una raíz cuadrada

  Para ello se multiplica el numerador y el denominador por otra expresión de forma que al operar, se elimine la raíz del denominador.

  Ejemplo 1.4. *Racionalizar el siguiente número* $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

  Ejemplo 1.5. *Racionalizar el siguiente número* $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{8}} &= \frac{2}{2\sqrt{2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

- Racionalizar una raíz mayor que 2 Racionalización del tipo $\dfrac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$

  Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$.

Ejemplo 1.6. *Racionalizar el siguiente número* $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{\sqrt[3]{2^2}} &= \frac{3}{\sqrt[3]{2^2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^{3-2}}}{\sqrt[3]{2^{3-2}}} \\
&= \frac{3}{\sqrt[3]{2^2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^1}}{\sqrt[3]{2^1}} \\
&= \frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}} \\
&= \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}
\end{aligned}$$

Por otro lado,

Ejemplo 1.7. *Racionalizar el siguiente número* $\dfrac{3}{\sqrt[5]{x^3}}$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{\sqrt[5]{x^2}} &= \frac{3}{\sqrt[5]{x^2}} \times \frac{\sqrt[5]{x^{5-2}}}{\sqrt[5]{2^{5-2}}} \\
&= \frac{3}{\sqrt[5]{x^2}} \times \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^3}} \\
&= \frac{3\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^5}} \\
&= \frac{3\sqrt[3]{x^3}}{x}
\end{aligned}$$

2. Racionalizar cuando el denominador tiene dos términos

   - Racionalización del tipo $\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

     Y en general cuando el denominador sea un binomio con al menos un radical. Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador. *El conjugado de un binomio es igual al binomio con el signo central cambiado:*

Ejemplo 1.8. *Racionalizar el siguiente número* $\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x}-2} &= \frac{1}{\sqrt{x}-2}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\\ &= \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x})^2-2^2}\\ &= \frac{\sqrt{x}+2}{x-4}\end{aligned}$$

Otro ejemplo,

Ejemplo 1.9. *Racionalizar el siguiente número* $\dfrac{3}{1+\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}\frac{3}{1+\sqrt{x}} &= \frac{3}{1+\sqrt{x}}\times\frac{(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})}\\ &= \frac{3(1-\sqrt{x})}{1^2-(\sqrt{x})^2}\\ &= \frac{3-3\sqrt{x}}{1-x}\end{aligned}$$

Bibliografía

- Santillana. **Los caminos del saber 8, 9, 11**
- Carlo B. Allendoerfer **Matematicas Universitarias**.
- Jiménez Murillo J. **Matemáticas para la Computación**