Álgebra de Matrices

Apuntes de clase.

Profesor:
Carlos Andrés Leiton Piamba
Docente Universitario

....

Popayán, 18 de junio de 2025

Índice general

Índice general **1**

0.1. Preliminares 3

0.1.1. Operaciones entre vectores 4

0.2. Matrices 6

0.3. Operación entre matrices: suma, resta y multiplicación 8

0.3.1. Resta de matrices 8

0.3.2. Propiedades 9

0.3.3. Producto de dos matrices 10

0.4. Determinantes y técnicas para el cálculo de determinantes 11

0.4.1. Determinante de una matriz 2×2 11

0.4.2. Determinante de una matriz 3×3 12

0.5. Propiedades de determinantes 13

0.6. Taller 14

0.6.1. Vectores 14
0.6.2. Matrices 15
0.6.3. Determinantes 16
0.7. Sistemas de ecuaciones lineales 17
0.7.1. Sustitución 17
0.7.2. Igualación 19
0.7.3. Reducción 20
0.7.4. Método por determinantes 21
0.7.5. Taller-Aplicaciones 22

0.1. Preliminares

Regla de la Suma(Resta)

Definición 0.1. *Vector renglón de n componentes: Un vector de n componentes se define como un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:*

$$(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \tag{1}$$

Definición 0.2. *Vector columna de n componentes: es un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

En las ecuaciones (0.1) o (0.1), x_1 se denomina la primera componente del vector, x_2 es la segunda componente, y así sucesivamente. En términos generales, x_k se denomina la *k-ésima* componente del vector. Cualquier vector cuyos elementos sean todos ceros

Nota: La palabra ordenado, que describe la definición de un vector es de fundamental importancia. Pues, dos vectores con las mismas componentes escritas en diferente orden no son iguales. Es decir, los vectores renglón $(1, 3)$ y $(3, 1)$ no son iguales.

A lo largo del documentos se resaltarán los vectores con letras minúsculas negritas como **u, v, a, b,** y así sucesivamente. Un vector cero se denota por $\mathbf{0}$. Más aún, como en términos generales resultará obvio cuando se trate de un vector renglón o de un vector columna, se hará referencia a ellos simplemente como "vectores".

Aplicación

Los vectores surgen de diversas maneras. Suponga que el jefe de compras de una fábrica debe ordenar cantidades diferentes de acero, aluminio, aceite y papel. Él puede mantener el control de las unidades a ordenar con un solo vector.

Ejemplo 0.1. *El vector*

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \\ 60 \end{pmatrix}$$

indica que ordenará unidad de acero, 30 unidades de aluminio, etcétera.
Un caso particular en el que se evidencia que el orden de los vectores es de suma importancia, radica en que tiene distintos significados para el comprador los vectores

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \\ 60 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}$$

0.1.1. Operaciones entre vectores

Suma y resta entre vectores

Para sumar o restar dos vectores, es necesario que dichos vectores tengas la mismas cantidad de componente; la operación suma se denota con el simbolo $+$ y la operación resta con el simbolo $-$, y si quiero sumar o restar vectores, basta con sumar o restar componente a componente, es decir;

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ a_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

Ejemplo 0.2. *Sumar los siguientes vectores*

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 \\ 0+5 \\ 3+(-3) \\ 8+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Restar los siguientes vectores

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ 0-5 \\ 3-(-3) \\ 8-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Denotamos la siguientes multiplicaciones (Producto por un escalar) y (Producto punto o producto interno)

Producto por un escalar

Definición 0.3. *Sea α un escalar (Número real) y $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ (un vector columna de n-componentes), al multiplicar un escalar con un vector $\alpha\boldsymbol{v}$ el escalar multiplica a cada componente del vector, es decir:*

$$\alpha\boldsymbol{v} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

Producto interno

Definición 0.4. *Sean* $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ *(vector fila de n-componentes) y* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ *(vector columna de n-componentes), el simbolo de producto entre dos vectores lo es como* $\bullet$ *y denotamos la operación producto entre dos vectores como* $\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{u}$ *y se define como la multiplicación componente a componente, es decir:*

$$\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{u} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \tag{5}$$

Ejemplo 0.3. *Multiplicar los siguientes vectores*

$$\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{u} = (5, -5, 5, 0) \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 5 - 10 + 5 + 0 = 0$$

0.2. Matrices

Estructura de una matriz

Definición 0.5. *Matriz: Una* ***matriz*** A *de* $m \times n$ *es un arreglo rectangular de* mn *números dispuestos en* m *renglones (filas) y* n *columnas.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{6}$$

El símbolo $m \times n$ se lee "m por n". A menos que se establezca lo contrario, se supondrá siempre que los números en una matriz o vector son reales. El vector renglón

$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ se llama renglón i y el vector columna,

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots a_{mj} \end{pmatrix}$$

se le llama columna j. La componente o elemento ij de A, se denota por a_{ij},es el número que aparece en el renglon i y la columnas j de A. En ocasiones se escribirá la matriz A como $A = (a_{ij})$.

Por lo general, las matrices se denotarán con letras mayúsculas ; si A es una matriz $m \times n$ con $m = n$, entonces A se llama **matriz cuadrada**.

Ejemplo 0.4. *A continuación presentamos algunas matrices especiales.*

Tipo Matriz	*Matriz*	*tamaño*
Nula	$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$	

0.3. Operación entre matrices: suma, resta y multiplicación

Suma de matrices

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices de $m \times n$.Entonces la suma de A y B es la matriz $m \times n$, $A + B$ dada por

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mj}+b_{mj} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Ejemplo 0.5. *Realizar la siguiente suma entre matrices*

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & -5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & 4 \\ -6 & 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Resta de matrices

0.3.1. Resta de matrices

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices de $m \times n$.Entonces la suma de A y B es la matriz $m \times n$, $A - B$ dada por

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1j}-b_{1j} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2j}-b_{2j} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}-b_{i1} & a_{i2}-b_{i2} & \cdots & a_{ij}-b_{ij} & \cdots & a_{in}-b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mj}-b_{mj} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Ejemplo 0.6. *Realizar la siguiente resta entre matrices*

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de una matriz por un escalar

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de $m \times n$ y si α es un escalar, entonces la matriz $m \times n$, αA, está dada por

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1j} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2j} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{ij} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mj} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Ejemplo 0.7. *Sean $A = (a_{ij})$ una 3×3 y $\alpha = -3$ un escalar, determinar αA*

$$\alpha A = -3 \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \\ -6 & 4 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 15 & 0 \\ 3 & 18 & -18 \\ 18 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

0.3.2. Propiedades

TEOREMA 1

Sean A, B y C tres matrices de $m \times n$ y sean α y β dos escalares. Entonces:

i. $A + 0 = A$

ii. $0A = 0$

iii. $A + B = B + A$ **(ley conmutativa para la suma de matrices)**

iv. $(A + B) + C = A + (B + C)$ **(ley asociativa para la suma de matrices)**

v. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ **(ley distributiva para la multiplicación por un escalar)**

vi. $1A = A$

vii. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Nota. El cero en la parte *i*) del teorema es la matriz cero de $m \times n$. En la parte *ii*) el cero a la izquierda es un escalar mientras que el cero a la derecha es la matriz cero de $m \times n$.

0.3.3. Producto de dos matrices

Producto entre matrices

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$, y sea $B = (b_{ij})$ una matriz $n \times p$. Entonces el **producto** de A y B es una matriz $m \times p$, $C = (c_{ij})$, en donde

$$\boxed{c_{ij} = (\text{renglón } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B)} \qquad (3)$$

Es decir, el elemento ij de AB es el producto punto del renglón i de A y la columna j de B. Si esto se extiende, se obtiene

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}} \qquad (4)$$

Si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, entonces se dice que A y B son **compatibles bajo la multiplicación.**

En términos generales el proceso se puede ver de la siguiente manera.

Dos matrices se pueden multiplicar únicamente si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de renglones de la segunda. De otra modo, los vectores que forman el renglón i en A y la columna j de B no tendrán el mismo número de componentes y el producto punto en la ecuación (3) no estará definido. Dicho de otro modo, las matrices A y B serán **incompatibles** bajo la multiplicación. Para ilustrar esto se consideran las siguientes matrices de A y B:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{renglón } i \text{ de } A \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & \text{columna } j \text{ de } B & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Los vectores renglón y columna sombreados deben tener el mismo número de componentes.

Producto entre matrices

Ejemplo 0.8. *Sean A y B matrices de tamaño 3×4 y 4×2 respectivamente, determinar el producto entre AB, donde*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 10 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 4} \quad ; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 2}$$

Luego,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 10 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 2} \\ (C_{ij})_{3\times 2} &= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 22 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 2} \end{aligned}$$

donde,

$$C_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

0.4. Determinantes y técnicas para el cálculo de determinantes

0.4.1. Determinante de una matriz 2×2

Un **determinante** es un número asociado a un arreglo de números reales en igual cantidad de filas y de columnas, la notación

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Suma de matrices

El valor del determinante equivale a la diferencia entre el producto de los números de la diagonal principal y el producto de la diagonal secundaria, esto es:

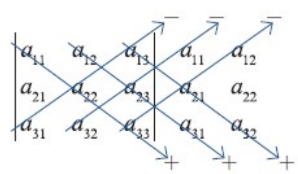
$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

0.4.2. Determinante de una matriz 3×3

Sea A una matriz de tamaño 3×3

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Se escribe A y se le adjuntan sus primeras dos columnas:



A continuación se calculan los seis productos, poniendo signo *menos* antes de los productos con flechas hacia arriba, y se suman todos. Esto da la suma de la ecuación (4).

Así,

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{31} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Menor principal

Definición 0.6. *Menor*
Sea A una matriz de $n \times ny$ sea M_{ij} la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene de A eliminando el renglón i y la columna j. A M_{ij} se llama el menor ij de A.

0.5. Propiedades de determinantes

Determinante usando cofactores

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces el determinante de A, denotado por $det(A)$ o $|A|$, está dado por

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|, \qquad \text{para algún} \quad j = 1, 2, 3 \cdots n \tag{10}$$

La expresión en el lado derecho de (10) se llama expansión por cofactores.

Ejemplo 0.9. *Observemos el siguiente ejemplo y el paso a paso para hallar el determinante de la matriz A.*

Calcule det A, de donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-92) - 3(-70) + 5(2) - 2(-16) = 160$$

0.6. Taller

0.6.1. Vectores

1. En los problemas 1 a 8 calcule el producto escalar de los dos vectores.

1. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. $(1, 2, -1, 0); (3, -7, 4, -2)$

3. $(7, 4); (-1, -4)$

4. $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Operaciones con vectores

En los problemas 11 a 17 realice las operaciones indicadas con $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

11. $(2\mathbf{a}) \cdot (3\mathbf{b})$

12. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

13. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

14. $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$

15. $(2\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{c} - 5\mathbf{a})$

16. $(\mathbf{a} |- \mathbf{c}) \cdot (3\mathbf{b} - 4\mathbf{a})$

17. $(3\mathbf{b} - 4\,\mathbf{a}) \cdot (4\mathbf{c} + 2\mathbf{b} - \mathbf{a})$

3. Dados los vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ determinar las siguientes operaciones.

   a) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$
   b) $\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$
   c) $\frac{1}{3}\mathbf{v}+\frac{2}{5}\mathbf{u}+\mathbf{w}$
   d) $\mathbf{w}\bullet [\mathbf{w} + \mathbf{v}]$
   e) $(\mathbf{w} \bullet \mathbf{v})+\frac{2}{3}(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})$

0.6.2. Matrices

4. En los siguientes problemas, realice los cálculos indicados.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ -6 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

n) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

5. Dadas las matrices A, B, C y D, identifique las expresiones matriciales que están bien definidas y calcúlelas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) $2(A - B) + 3A + 2B$

b) $-3(A + B - C) - 2D$

c) $-2(ACB + DCB)$

d) $3[-5(A + 2B - D)] - 2[1/2(A + 2B - D)]$

e) $A^T B + A^T D + C^T D$

6. Sean J y N las matrices que resumen la información de las ventas realizadas por Juliana y Nathalie, respectivamente, durante 1 mes (4 semanas).

	Juliana (J)				**Nathalie (N)**			
	Semana				**Semana**			
Producto	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**
a	17	3	10	0	40	13	17	23
b	4	5	8	2	8	2	5	0
c	25	15	30	10	3	5	0	6

Sea C la matriz que resumen las comisiones (en efectivo y en especie) por articulo vendido durante cada una de las 4 semanas del mes.

	Comisión por artículo vendido	
Semana	**En efectivo**	**En especie**
	(Miles de \$)	(No. de Unidades)
1	12,50	2
2	20,00	3
3	27,50	1
4	9,50	5.

- El total de las ventas realizadas por las dos vendedoras estará dado por $J+M$, determinar la matriz de ventas.
- Si Juliana repite su esquema de ventas durante 6 meses, el total de ventas de Juliana para este período estará dado por?
- La distribución, por tipo de producto, de la comisión devengada por Nathalie durante 1 mes estará dado por

$$NC = \begin{pmatrix} 40 & 13 & 17 & 23 \\ 8 & 2 & 5 & 0 \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{12{,}50} & 2 \\ \mathbf{20{,}00} & 3 \\ \mathbf{27{,}50} & 1 \\ \mathbf{9{,}50} & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.436{,}50 & 251 \\ & \\ & \end{pmatrix},$$

0.6.3. Determinantes

7. Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

- $|2A + B|$
- $|C - 2A|$
- $|B^2|$
- $|AC|$

0.7. Sistemas de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto formado por dos o más ecuaciones lineales , cada una de ellas con dos o más incógnitas.

Sistemas de ecuaciones lineales 2×2
Son un conjunto de ecuaciones formado por dos conjuntos lineales con dos incógnitas.

Ejemplo 0.10.

$$\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$$

0.7.1. Sustitución

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por el **método de sustitución**, se realiza los siguientes pasos:

- Primero, se despeja una de las variables en cualquiera de las ecuaciones lineales.
- Segundo, se remplaza la expresión obtenida en el primer paso en la otra ecuación y se resuelve.
- Tercero, se encuentra el valor de la otra variable remplazando, en cualquiera de las ecuaciones del sistema, el valor de la variable que se halló en el segundo paso.
- Por último, se verifican las soluciones.

Ejercicio 0.1. *Resolvamos el sistema propuesto en el ejemplo 0.10.*

- *Primero, En la ecuación (1) despejamos la variables x, esto es:*

$$\begin{aligned} 2x &= 5+4y \\ x &= \frac{5+4y}{2} \qquad (3) \end{aligned}$$

- *Segundo, Remplazamos la ecuación (3) en la ecuación (2).*

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{5+4y}{2}\right)+6y &= 2 \\ \frac{15}{2}+6y+6y &= 2 \\ 12y &= 2-\frac{15}{2} \\ 12y &= -\frac{11}{2} \\ y &= -\frac{11}{24} \end{aligned}$$

- *Tercero, El valor de la variable y la remplazamos en la ecuación (3).*

$$\begin{aligned} 2x &= 5+4y \\ x &= \frac{5+4\left(-\frac{11}{24}\right)}{2} \\ x &= \frac{5+\left(-\frac{11}{6}\right)}{2} \\ x &= \frac{\frac{30-11}{6}}{2} \\ x &= \frac{\frac{19}{6}}{2} \\ x &= \frac{19}{12} \end{aligned}$$

- *Por último, se verifican las soluciones.*

0.7.2. Igualación

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de igualación se llevan a cabo los siguientes pasos:

- Primero, se despeja la misma variable en las ecuaciones lineales dadas.
- Segundo, se igualan las expresiones obtenidas en el primer paso y se despeja la variable que queda.
- Tercero, se determina el valor de la otra variable remplazando en alguna de las ecuaciones despejadas, el valor de la variable encontrada en el segundo paso.
- Por último, se verifican las soluciones.

Ejercicio 0.2. *Resolvamos el sistema propuesto en el ejemplo 0.10, esto es,*

$$\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$$

- *Primero, En la ecuación (1) despejamos la variables x, esto es:*

$$\begin{aligned} 2x &= 5 + 4y \\ x &= \frac{5 + 4y}{2} \qquad (3) \end{aligned}$$

- *Segundo, En la ecuación (2) despejamos la variables x, esto es:*

$$\begin{aligned} 3x + 6y &= 2 \\ 3x &= 2 - 6y \\ x &= \frac{2 - 6y}{3} \qquad (4) \end{aligned}$$

- *Tercero, igualamos la ecuación (3) y (4).*

$$\begin{aligned}
\frac{5+4y}{2} &= \frac{2-6y}{3} \\
3(5+4y) &= 2(2-6y) \\
15+12y &= 4-12y \\
12y+12y &= 4-15 \\
24y &= -11 \\
y &= -\frac{11}{24}
\end{aligned}$$

- *Cuarto, remplazamos el valor de y, en la ecuación (4).*

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2-6\left(\frac{-11}{24}\right)}{3} \\
x &= \frac{2+\frac{11}{4}}{3} \\
x &= \frac{\frac{8+11}{4}}{3} \\
x &= \frac{19}{12}
\end{aligned}$$

- *Por último, se verifican las soluciones.*

0.7.3. Reducción

En el **método de reducción** se combinan las ecuaciones del sistema con el fin de reducir las dos ecuaciones del sistema a una sola, realizando los siguientes pasos:

- Primero, se multiplican los términos de una o ambas ecuaciones por números reales, de tal manera que los coeficientes de una de las variables en las dos ecuaciones, se diferencie únicamente en el signo.
- Segundo, se suman las dos ecuaciones transformadas de tal manera que se elimine una variable y se despeja la otra variable.
- Por último, se calcula el valor de la incógnita que falta sustituyendo en una de las ecuaciones originales.

0.7.4. Método por determinantes

Un **determinante** es un número asociado a un arreglo de números reales en igual cantidad de filas y de columnas, la notación

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

corresponde a un determinante 2×2 o de orden dos, asociado a un arreglo de dos filas y dos columnas. En el determinante, a y d forman la diagonal principal; y c y b forman la diagonal secundaria.

El valor del determinante equivale a la diferencia entre el producto de los números de la diagonal principal y el producto de la diagonal secundaria, esto es:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Regla de Cramer: Es posible resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando determinantes mediante un método llamado **Regla de Cramer**. A partir del sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

se pueden formar tres determinantes,

Determinante del sistema

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd$$

formado por los coeficientes de x y de y.

Determinante para x

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - fb$$

formado por los términos independientes y los coeficientes de y.

Determinante para y

$$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - cd$$

formado por los coeficientes de x y los términos independientes.

Para solucionar sistemas 2×2 se utilizan los anteriores determinantes, aplicando la regla de Cramer, así.

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D}, \quad D \neq 0$$

Sistemas de ecuaciones lineales 3×3**:** Son un conjunto de ecuaciones formado por tres conjuntos lineales con tres incognitas.

Ejemplo 0.11.

$$\begin{cases} x - 4y + z = 15 \\ 2x - 4y - 2z = 5 \\ 3x + 6y + 4z = 2 \end{cases}$$

El proceso, es para resolver este sistema puede ser utilizando regla de Cramer para sistemas tres por tres.

0.7.5. Taller-Aplicaciones

1. En un examen de 100 preguntas Ana ha dejado sin contestar 9 y ha obtenido 574 puntos. Si por cada respuesta correcta se suman 10 puntos y por cada respuesta incorrecta se restan 2 puntos , ¿Cuántas ha contestado bien y cuántas mal?
2. En un curso hay 70 alumnos matriculados. en el último examen de Matemáticas han aprobado 39 alumnos , el 70 % de las chicas y el 50 % de los chicos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en el curso?
3. Al dividir un número entre otro el cociente es 2 y el resto es dos. Si la diferencia entre el dividendo y el divisor es 54, ¿De qué números se tratan?.
4. Hallar dos números sabiendo que el mayor más seis veces el menos es igual a 62 y el menor más cinco veces el mayor es igual a 78.

5. Dos números suman 241 y su diferencia es 99. ¿Qué números son?
6. En un hotel hay 67 habitaciones entre dobles y sencillas. Si el número total de camas es 92, ¿Cuántas habitaciones hay de cada tipo?
7. Dos kilos de plátanos y tres de peras cuestan 780 pesos. Cinco kilos de plátanos y cuanto de peras cuestan 1320 pesos.¿A cómo está el kilo de plátanos y el de peras?
8. La edad de Elsa es la mitad de la de Pablo:la edad de José es el triple de la edad de Elsa y la edad de Andrea es el doble de la de José. Si las cuatro edades suman 132 años, ¿Cuál es la edad de la persona mayor?
9. En un corral hay gallinas y conejos. En total hay 15 Cabezas y 40 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay en el corral?
10. Un examen tipo text consta de preguntas y hay que contestar a todas . Por cada acierto obtiene un punto y por cada fallo se restan 0.5 puntos. Si mi nota ha sido 24.5, ¿Cuántos aciertos y cuántos fallos he tenido?
11. Si Alvaro regala a Rita 4 de sus discos, ella tendrá el doble que él . Si Rita da 6 de sus discos a Alvaro , entonces será él el que tenga el doble que ella. ¿Cuántos discos tiene cada uno?
12. He pagado 55.77 dolares por una camiseta y un patalón que costaban 70 dolares entre los dos. En la camiseta me han hecho un 18 % de descuento, y en el pantalón, un 22 % ¿Cuál era el precio original de cada articulo?

Bibliografía

- DENNIS ZILL. **Cálculo Trascendentes tempranas. Cuarta edición**
- LARSON, Roland E. Cálculo y Geometría Analítica, Volumen I, 6ª Edición.
- THOMAS. Cálculo de una variable. Undécima edición.