Cálculo I

Apuntes de clase.

Profesor:
Carlos Andrés Leiton Piamba
Docente Universitario

En esta guía, nos adentramos en el mundo de los límites en matemáticas. Exploramos el concepto de límite en profundidad, analizando su definición, propiedades. Nuestro objetivo es proporcionar a los estudiantes una comprensión sólida y completa de este concepto fundamental.

A lo largo del documento, abordamos ejemplos concretos y desafiantes, que ilustran cómo los límites se utilizan para comprender el comportamiento de funciones en situaciones diversas. Desde las simples funciones lineales hasta las más complejas funciones trigonométricas y exponenciales, exploramos cómo los límites nos permiten comprender mejor el comportamiento de estas funciones en puntos críticos.

Además, examinamos cómo los límites se aplican en el mundo real, desde la física y la ingeniería hasta la economía y las ciencias biológicas. Mostramos cómo los límites son una herramienta poderosa para modelar y resolver una amplia gama de problemas prácticos.

Popayán, 15 de mayo de 2024

Índice general

Índice general **1**

1. Límites **2**

1.1. Definición y límites laterales 3

1.1.1. Principio de sustitución 6

1.2. Álgebra de límites 7

1.2.1. Límites de funciones indeterminadas 8

1.2.2. Límites de funciones racionales 9

1.2.3. Límites de funciones radicales 10

1.3. Límites infinitos 11

1.4. Límites en el infinito 14

1.5. Límites en el infinito de una función racional 15

1.6. Taller 16

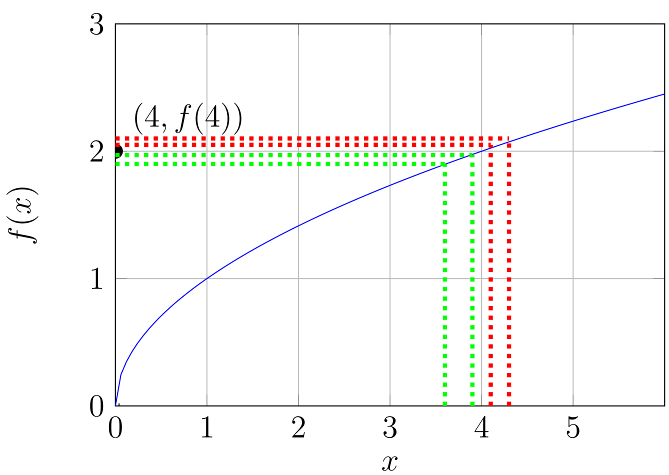
Capítulo 1

Límites

Idea intuitiva de limite: Encontrar el limite de una función significa hallar el valor al cual se aproxima $f(x)$ cuando x tiende a tomar un valor determinado. La función $f(x)$ tiende hacia el limite L cuando x tiende hacia a, esto si es posible hacer que $f(x)$ se aproxime tanto a L como se quiera, siempre y cuando x este los suficientemente cerca de a. Sin tomar el valor de a. Lo anterior se puede expresar

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{1.1}$$

y se lee el limite cuando x tiende hacia a de $f(x)$ es igual a L.



x	$f(x)$
3.9	1.97
3.99	1.99
3.999	1.999
4	2
4.001	2.001
4.01	2.002
4.1	2.05

El siguiente link te puede ayudar a explorar mejor el concepto de límite.

https://www.geogebra.org/m/sVWf5MEB

1.1. Definición y límites laterales

Definición 1.1. *La definición formal de limite se plantea de la siguiente forma:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{1.2}$$

significa que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

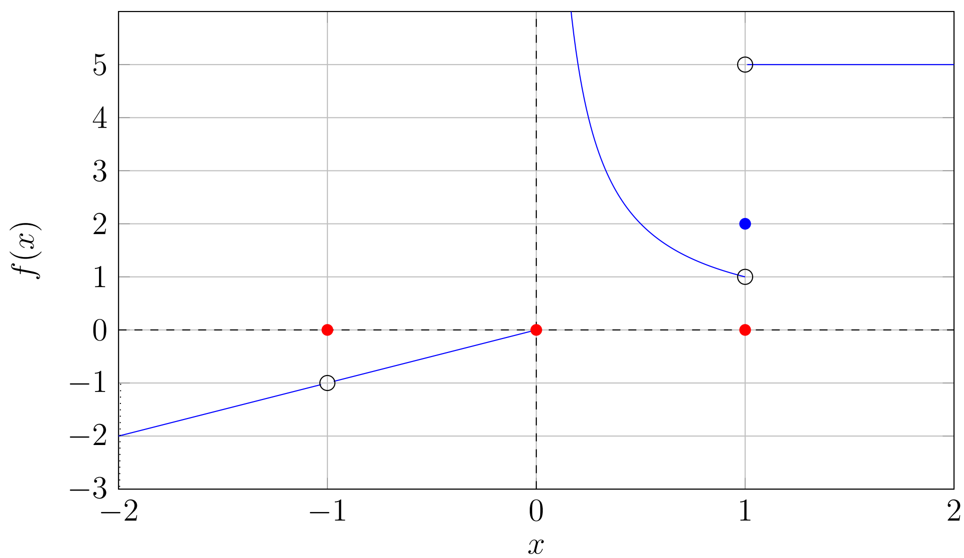


Figura 1.1: Gráfica de la función a trozos $f(x)$.

Definición 1.2. *Limites laterales Las aproximaciones que se realizan para determinar el limite de una función se relaciona con el concepto de **límite lateral**.*

Los limites laterales se representan de dos formas distintas, según si la aproximación se realiza por la izquierda o por la derecha.

- $$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \tag{1.3}$$

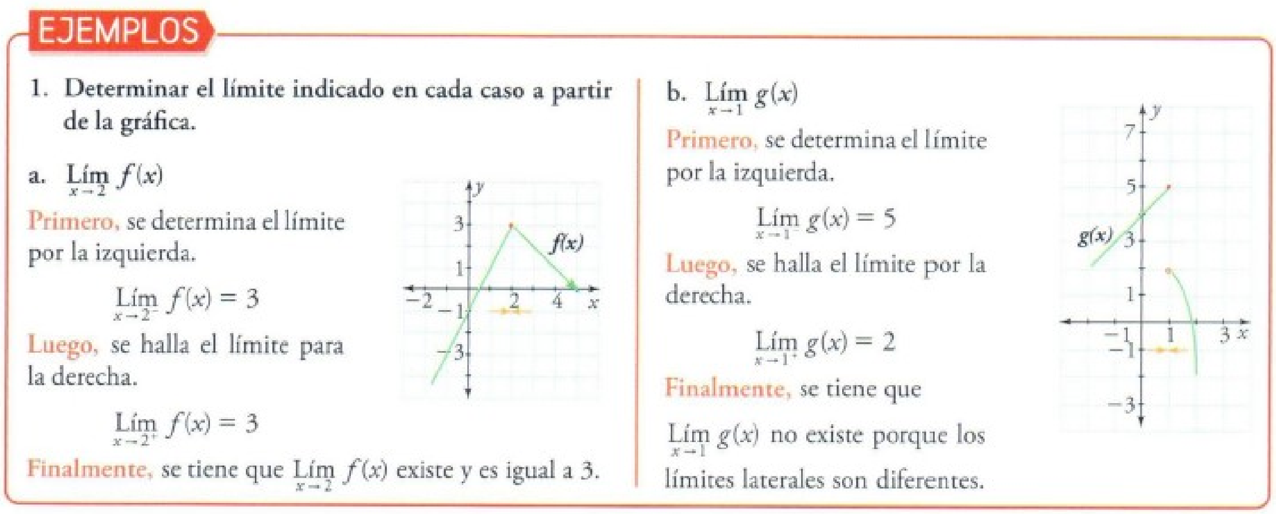
  *significa que el limite , cuando x tiende a a **por la derecha** es igual a L.*

- $$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \tag{1.4}$$

  *significa que el limite , cuando x tiende a a **por la izquierda** es igual a L.*

La existencia o no existencia del límite de una función depende de los limites laterales, ya que si los límites laterales existen y son iguales, entonces el limite de la función existe y es igual al valor de los limites laterales. En cambio, si los limites laterales no existen o son diferentes, entonces, el límite de la función no existe. Por tanto, se tiene que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = L \tag{1.5}$$



EJEMPLOS

1. Determinar el límite indicado en cada caso a partir de la gráfica.

a. $\lim_{x\to 2} f(x)$

Primero, se determina el límite por la izquierda.

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$

Luego, se halla el límite para la derecha.

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$

Finalmente, se tiene que $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe y es igual a 3.

b. $\lim_{x\to 1} g(x)$

Primero, se determina el límite por la izquierda.

$\lim_{x\to 1^-} g(x) = 5$

Luego, se halla el límite por la derecha.

$\lim_{x\to 1^+} g(x) = 2$

Finalmente, se tiene que

$\lim_{x\to 1} g(x)$ no existe porque los límites laterales son diferentes.

Por otro lado, determinemos el limite de la siguiente función a trozos

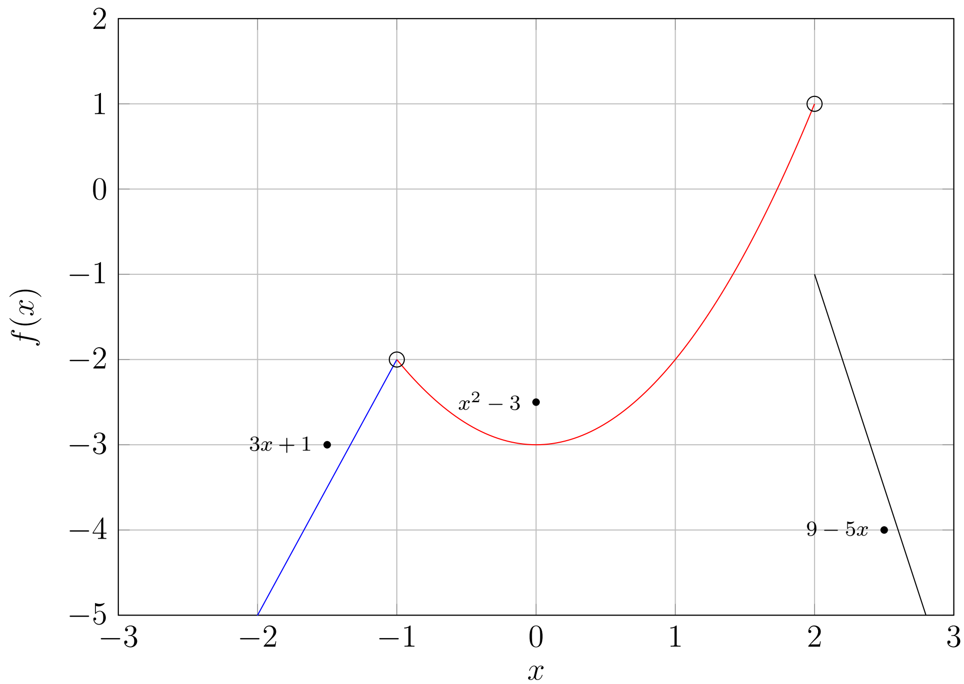
Ejemplo 1.1. *Dada la función,*

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & si \quad x < -1 \\ x^2 - 3 & si \quad -1 < x < 2 \\ 9 - 5x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Determinemos $\lim_{x\to -1} (f(x))\,; \qquad \lim_{x\to 2} (f(x))$

Para resolver este problema, vamos a seguir los siguientes pasos. Si bien existen varias formas de abordarlo, profundizaremos en el concepto de límite visualizando la gráfica de la función. Esto nos permitirá comprender mejor cómo se comporta la función en torno al punto en cuestión y cómo se aproximan sus valores a medida que nos acercamos a dicho punto.

- *Primero, trazar la gráfica de la función $f(x)$.*



- *Luego, calcular los límites laterales en cada punto.*

$$\lim_{x \to 1^-} (f(x)) = \lim_{x \to 1^-} 3x + 1 = -2; \qquad \lim_{x \to 2^+} (f(x)) = \lim_{x \to 2^+} x^2 - 3 = -2$$

por otro lado,

$$\lim_{x \to 2^-} (f(x)) = \lim_{x \to 1^-} x^2 - 3 = 1 \qquad \lim_{x \to 2^+} (f(x)) = \lim_{x \to 1^+} 9 - 5x = -1$$

- *Finalmente, se tiene que*
  - *El* $\lim_{x \to -1} (f(x))$ *existe y además* $\lim_{x \to -1} (f(x)) = -2$, *dado que los limites laterales son iguales.*
  - *El* $\lim_{x \to 2} (f(x))$ *no existe, porque los limites laterales son diferentes.*

1.1.1. Principio de sustitución

Otra propiedad importante de los límites es el principio de sustitución, en el cual se establece que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{1.6}$$

siempre y cuando no produzca una indeterminación.

Ejemplo 1.2. *Determinar el siguiente límite usando el principio de sustitución.*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} (3x - 1) &= \lim_{x \to 2} (\underline{3x} - 1) \\ &= \lim_{x \to 2} (3(2) - 1) \\ &= 6 - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3. *Determinar el siguiente límite usando el principio de sustitución.*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} (3x - 1) &= \lim_{x \to -2} (\underline{3x} - 1) \\ &= \lim_{x \to -2} (3(-2) - 1) \\ &= -6 - 1 \\ &= -7 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4. *Determinar el siguiente límite usando el principio de sustitución.*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} (x^2 - 2x + 1) &= \lim_{x \to 1} (\underline{x^2} - 2x + 1) \\ &= ((1)^2 - 2(1) + 1) \\ &= 1 - 2 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1. *Determinar el siguiente límite usando el principio de sustitución.*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 7} \left(\frac{x}{7} + 3x - 1 \right) &= \lim_{x \to 7} \left(\frac{x}{7} + 3x - 1 \right) \\ &= (\quad + \quad + \quad) \\ &= \end{aligned}$$

1.2. Álgebra de límites

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones tales que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

y k una constante real, entonces se cumplen las siguientes propiedades.

1.	Límite de un constante
	$\lim_{x\to a} k = k$
2.	Límite de una constante por un función
	$\lim_{x\to a} kf(x) = k \lim_{x\to a} f(x) = kL$
3.	Límite de una suma o de una diferencia de funciones
	$\lim_{x\to a} kf(x) = k \lim_{x\to a} f(x) = kL$
4.	Límite de un producto de funciones
	$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm M$
5.	Límite de un cociente de funciones
	$\lim_{x\to a}(f(x) \times g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = LM$
6.	Límite de una función compuesta
	$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}, \qquad M \neq 0$
7.	Límite de la potencia de una función
	$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$
8.	Límite de una función Radical
	$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$
9.	Límite de una función Logarítmica
	$\lim_{x\to a}[\log_b f(x)] = \log_b \left[\lim_{x\to a} f(x)\right] \quad L > 0$

Ejemplo 1.5. *Determinar los siguientes limites:*

- $$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right) &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{3}{4}x\right)-\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{3}{4}\lim_{x\to 2}(x)-\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{3}{4}(2)-\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(\frac{5}{4}x^3-x\right) &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{5}{4}x^3\right)-\lim_{x\to 2}(x)\\ &= \frac{5}{4}\lim_{x\to 2}(x^3)-\lim_{x\to 2}(x)\\ &= \frac{3}{4}(2^3)-(2)\\ &= \frac{3*8}{4}-(2)\\ &= 6-2\\ &= 4\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2. *Determinar los siguientes límites, usando el principio de sustitución y el álgebra de límites.*

- $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{x^3-8}{x+2}\right)$
- $\lim_{x\to 4}\left(\dfrac{10+\sqrt{x}}{3+\sqrt{2x+1}}\right)$

Ejercicio 1.3. *Ejercicios para practicar*

1.) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{\ln(x^2)}{x-1}\right)$	*5.)* $\lim_{x\to 2}\left(\frac{\log_3(x^3+1)}{x+1}\right)$
2.) $\lim_{x\to 0}(x\ln(x+1))$	*6.)* $\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^3-8}{x-2}\right)$
3.) $\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2-2x-8}{x-4}\right)$	*7.)* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{4^x+1}{x+1}\right)$
4.) $\lim_{x\to 1}\left[\ln\left(\frac{e^{x^2}-e}{2x+2^x}+1\right)\right]$	*8.)* $\lim_{x\to 1}\left(\frac{3^x-3}{x-1}\right)$

1.2.1. Límites de funciones indeterminadas

En algunos casos, al aplicar la sustitución directa para calcular un límite, el resultado puede ser que no existe el límite, o también resultar una indeterminación

1.2.2. Límites de funciones racionales

Cuando la indeterminación se obtiene en una función racional. Es decir, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} =: \frac{0}{0}$$

la indeterminación se evita, factorizando el numerador $P(x)$ y el denominador $Q(x)$, de tal forma que el binomio $(x-a)$ se simplifica así:

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)Q_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Ejercicio 1.4. *Observemos el siguiente ejemplo:*

EJEMPLOS

1. **Determinar el valor de los siguientes límites.**

a. $\displaystyle \text{Lím}_{x\to -2} \frac{2x^2+3x-2}{x^2-4}$

$$\text{Lím}_{x\to -2} \frac{2x^2+3x-2}{x^2-4} = \text{Lím}_{x\to -2} \frac{(x+2)(2x-1)}{(x+2)(x-2)} \quad \text{Se factoriza.}$$

$$= \text{Lím}_{x\to -2} \frac{2x-1}{x-2} \quad \text{Se simplifica.}$$

$$= \frac{2(-2)-1}{-2-2} = \frac{5}{4} \quad \text{Se calcula el límite.}$$

Finalmente, $\displaystyle \text{Lím}_{x\to -2} \frac{2x^2+3x-2}{x^2-4} = \frac{5}{4}$

b. $\displaystyle \text{Lím}_{x\to 7} \frac{x^2-2x-35}{2x^2-17x+21}$

$$\text{Lím}_{x\to 7} \frac{x^2-2x-35}{2x^2-17x+21} = \text{Lím}_{x\to 7} \frac{(x-7)(x+5)}{(2x-3)(x-7)} \quad \text{Se factoriza.}$$

$$= \text{Lím}_{x\to 7} \frac{x+5}{2x-3} \quad \text{Se simplifica.}$$

$$= \frac{7+5}{2(7)-3} = \frac{12}{11}$$

Finalmente, $\displaystyle \text{Lím}_{x\to 7} \frac{x^2-2x-35}{2x^2-17x+21} = \frac{12}{11}$

2. **Calcular** $\displaystyle \text{Lím}_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

$$\text{Lím}_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} \text{ tiene la forma } \frac{0}{0} \quad \text{Se verifica la indeterminación.}$$

$$= \text{Lím}_{h\to 0} \frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h} \quad \text{Se desarrolla el cubo.}$$

$$= \text{Lím}_{h\to 0} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} \quad \text{Se suma.}$$

$$= \text{Lím}_{h\to 0} \frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} \quad \text{Se factoriza.}$$

$$= \text{Lím}_{h\to 0} (3x^2+3xh+h^2) \quad \text{Se simplifica.}$$

$$= 3x^2+3x(0)+(0)^2 \quad \text{Se aplica sustitución directa.}$$

$$= 3x^2$$

Finalmente,

$$\text{Lím}_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = 3x^2.$$

En este ejemplo, se aprecia que la variable es h y x es un parámetro el cual se considera como una constante.

1.2.3. Límites de funciones radicales

Cuando la indeterminación se obtiene en una función racional radical. Es decir Si $P(x)$ o $Q(x)$ son funciones radicales y se tiene que:

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} =: \frac{0}{0},$$

entonces, es posible eliminar la indeterminación, racionalizando el numerador o el denominador o ambos y por último se simplifica la expresión resultante.

Ejemplo 1.6. *Observemos el proceso para realizar, para determinar el siguiente límite;*

$$\lim_{x \to -3} \left(\frac{x+3}{4-\sqrt{2x+22}} \right)$$

.

- *Verificar la indeterminación*

$$\lim_{x \to -3} \left(\frac{x+3}{4-\sqrt{2x+22}} \right) : \frac{0}{0}$$

- *Racionalizar (Usar el conjugado del denominador)*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -3} \left(\frac{x+3}{4-\sqrt{2x+22}} \right) &= \lim_{x \to -3} \left(\frac{x+3}{4-\sqrt{2x+22}} \right) \left(\frac{4+\sqrt{2x+22}}{4+\sqrt{2x+22}} \right) \\
&= \lim_{x \to -3} \left(\frac{(x+3)(4+\sqrt{2x+22})}{(4)^2-(\sqrt{2x+22})^2} \right) \\
&= \lim_{x \to -3} \left(\frac{(x+3)(4+\sqrt{2x+22})}{16-(2x+22)} \right) \\
&= \lim_{x \to -3} \left(\frac{(x+3)(4+\sqrt{2x+22})}{16-2x-22} \right) \\
&= \lim_{x \to -3} \left(\frac{(x+3)(4+\sqrt{2x+22})}{-2x-6} \right)
\end{aligned}$$

- *Factorizar y simplicar*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -3}\left(\frac{x+3}{4-\sqrt{2x+22}}\right) &= \lim_{x\to -3}\left(\frac{(x+3)(4+\sqrt{2x+22})}{-2(x+3)}\right)\\
&= \lim_{x\to -3}\left(\frac{4+\sqrt{2x+22}}{-2}\right)
\end{aligned}$$

- *Usar principio de sustitución*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -3}\left(\frac{x+3}{4-\sqrt{2x+22}}\right) &= \lim_{x\to -3}\left(\frac{(4+\sqrt{2x+22})}{-2}\right)\\
&= \left(\frac{4+\sqrt{2(-3)+22}}{-2}\right)\\
&= \frac{4+\sqrt{2(-3)+22}}{-2}\\
&= \frac{4+4}{-2}\\
&= \frac{8}{-2}\\
&= -4
\end{aligned}$$

1.3. Límites infinitos

En algunos casos, cuando se evalúa el límite de una función , para un valor dado en particular, nos encontramos que la función crece o decrece sin cota, estamos interesados en esta sección a donde tiende ese tipo de limites, si bien sabemos que no existen.
Observación

- Para expresar que los valores de $f(x)$ crece sin cota, cuando x tiende a un valor c, usaremos la siguiente notación.

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

- Para expresar que los valores de $f(x)$ decrece sin cota, cuando x tiende a un valor

c, usaremos la siguiente notación.

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

- Supongamos que $f(x) = \left(\dfrac{k}{x^r}\right)$, donde $r \in \mathbb{Z}^+$ y $k \in \mathbb{R}^+$

  1. Caso 1: si $r = 1$ o r es par entonces

  $$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{k}{x^r}\right) =: \frac{k}{0^+} = \infty$$

  2. Caso 2: si $r = 1$ o r es impar entonces

  $$\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{k}{x^r}\right) =: \frac{k}{0^-} = -\infty$$

- Supongamos que $f(x) = \left(\dfrac{k}{x-a}\right)$, donde $k \in \mathbb{R}^+$

  1. Caso 2: Evaluaremos usando el siguiente acuerdo en la notación.

  $$\lim_{x\to a^+} \left(\frac{k}{a^+ - a}\right) =: \frac{k}{0^+} = \infty$$

  2. Caso 3: Evaluaremos usando el siguiente acuerdo en la notación.

  $$\lim_{x\to a^-} \left(\frac{k}{a^- - a}\right) =: \frac{k}{0^-} = -\infty$$

Ejemplo 1.7.

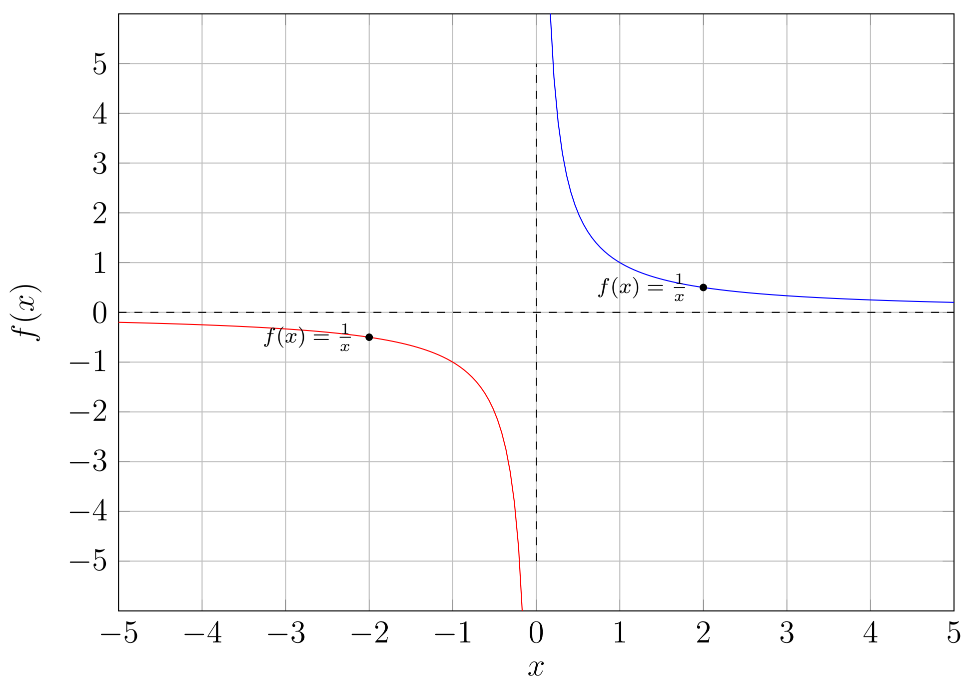
Determinemos los siguientes límites

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{3}{x^2-9}\right) &= \lim_{x\to 3}\left(\frac{3}{(3^+)^2-9}\right)\\
&= \frac{3}{9^+-9}\\
&= \frac{3}{0^+}\\
&= \infty
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{3}{x^2-9}\right) &= \lim_{x\to 3}\left(\frac{3}{(3^-)^2-9}\right)\\
&= \frac{3}{9^--9}\\
&= \frac{3}{0^-}\\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Gráficamente podemos observar el comportamiento de la gráfica cuando x tiende a cero.



1.4. Límites en el infinito

Si la variable x decrece sin cota (x tiende al infinito) y la función $f(x)$ se aproxima a los valores L y M (o tiende a ∞). Respectivamente, estos límites los podemos escribir de la siguiente forma.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L; \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = M; \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Ejemplo 1.8. *Observemos los siguientes casos para calcular límites en en el infinito.*

1. Supongamos que $f(x) = \left(\frac{k}{x^r}\right)$, donde $r \in \mathbb{Z}^+$ y $k \in \mathbb{R}$

   a) Caso 1:
   $$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{k}{x^r}\right) =: \frac{k}{\infty} = 0$$

   b) Caso 2:
   $$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{k}{x^r}\right) =: \frac{k}{-\infty} = 0$$

2. Supongamos que $f(x) = (kx^r)$, donde $r \in \mathbb{Z}^+$ y $k \in \mathbb{R}^+$

   a) si r es par
   $$\lim_{x\to\pm\infty} (kx^r) = \infty$$

   b) si r es impar
   $$\lim_{x\to\pm\infty} (kx^r) = -\infty$$

Ejemplo 1.9. *Determinar siguiente límite.*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} &= \frac{2}{-\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La siguiente figura nos permite visualizar el comportamiento de la gráfica cuando x tiende al infinito (positivo y negativo).

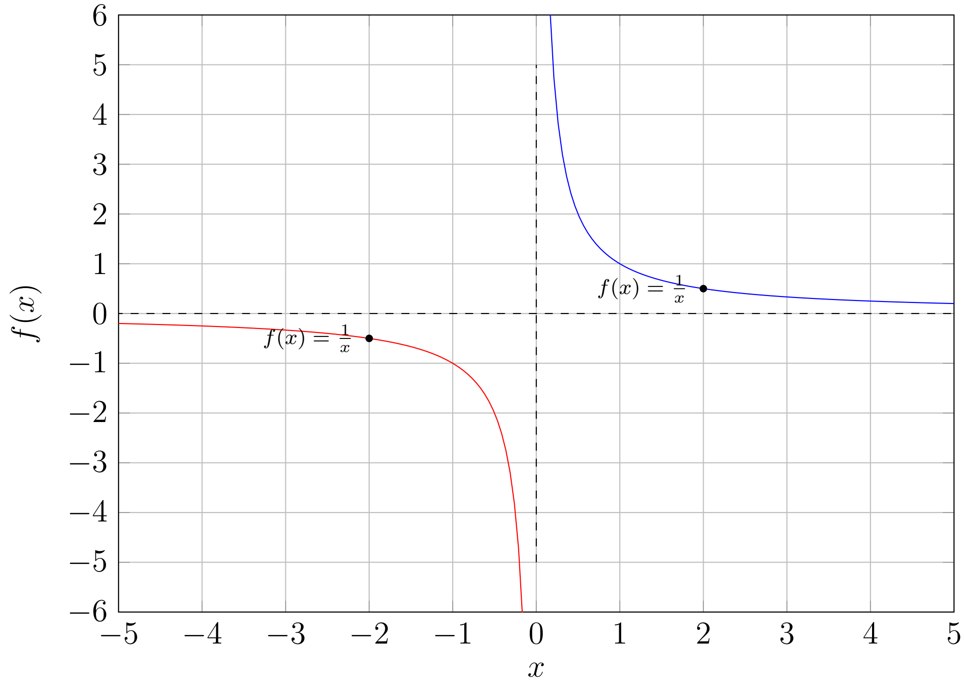


Figura 1.2: Gráfica de funciones con límites cuando x tiende a infinito y menos infinito.

1.5. Límites en el infinito de una función racional

Sea $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde el grado $P(x)$ es n y el grado de $Q(x)$ es m entonces para determinar

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

tenemos los siguientes 3 casos.

1. Caso 1: Si $n > m$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty$$
2. Caso 2: Si $n < m$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$
3. Caso 3: Si $n = m$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{b}$$

donde a es el coeficiente de la expresión de mayor grado x^n en el numerador y b es el coeficiente de la expresión de mayor grado x^m en el denominador

Ejemplo 1.10. *Observemos los siguientes ejemplos*

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x^5+2x^2+3}{6x^4-2x+3x^2} = \infty$

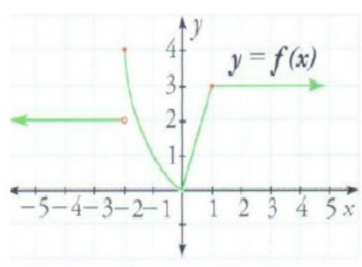
b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-\frac{1}{2}x^5-3x^2+3x}{12x^7-12x+x^2} = 0$

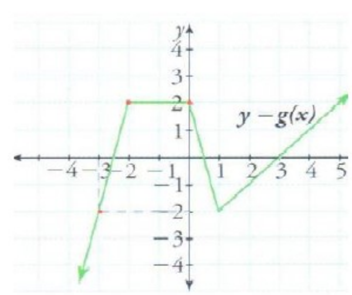
c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{3}{2}x^3-3x^6+x}{7x^3-x+2x^2} = -\frac{3}{7}$

1.6. Taller

1.) Concepto de limites laterales.

a) Determinar el valor de los límites de acuerdo con las siguientes gráficas.





- $\lim\limits_{x\to 1} (f(x))$
- $\lim\limits_{x\to -3} (g(x))$
- $\lim\limits_{x\to -3} (f(x))$
- $\lim\limits_{x\to -3} (3f(x)+g(x))$

b) Determinar la existencia o no existencia de los siguientes limites.
Para la función,

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

- $\lim_{x\to -4} (f(x))$
- $\lim_{x\to 1} (f(x))$

c) Determinar la existencia o no existencia de los siguientes limites.
Para la función,

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2 + 2 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ x + 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

- $\lim_{x\to -1} (f(x))$
- $\lim_{x\to 1} (f(x))$

2.) Álgebra de limites y principio de sustitución.

- $\lim_{x\to 1} (3x^2 - 5x + 4)$
- $\lim_{x\to 2} \left(\dfrac{x^3 - 8}{x + 2}\right)$
- $\lim_{x\to 1} \left(\sqrt{3 - 2x^2 + x^2}\right)$

3.) Limites de funciones racionales y radicales

a) Funciones racionales.

- $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{6x^3 - 7x}{8x^2 + 9x}\right)$
- $\lim_{x\to -1} \left(\dfrac{x^2 - 16}{x^2 - x - 12}\right)$
- $\lim_{x\to -1} \left(\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 2x - 3}\right)$

b) Funciones radicales

- $\lim_{x\to -4} \left(\dfrac{x - 4}{\sqrt{x + 5} - 3}\right)$
- $\lim_{x\to 2} \left(\dfrac{1 + \sqrt{x - 1}}{x + 2}\right)$
- $\lim_{x\to 4} \left(\dfrac{2 - \sqrt{x}}{3 + \sqrt{2x + 1}}\right)$

4.) Límites infinitos

- $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2+1}{x-5}$
- $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x+5}{\sqrt{x^2-9}}$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{4x+1}{\sqrt{x-2}}$

5.) Límites en el infinito

- $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^5+5x^3+12}{x^4-8x^5+6x}$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^5+5x^2+12}{x^4-2x^3+6x^2}$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^3+5x^2+12}{4x^5-4x^4+7x}$

Bibliografía

- Santillana. **Los caminos del saber 8 y 9**
- Carlo B. Allendoerfer **Matematicas Universitarias**.
- Jiménez Murillo J. **Matemáticas para la Computación**