

# Matemática Financieras

Apuntes de clase.

**Profesor:**

**Carlos Andrés Leiton Piamba**

Docente Universitario

*La Guía de Matemáticas Financieras para Administradores Públicos está orientada a enseñar los principios del interés y su aplicación en la administración de fondos gubernamentales. Los administradores públicos a menudo enfrentamos decisiones cruciales sobre cómo invertir eficientemente los recursos disponibles, que suelen ser limitados.*

*El propósito de esta guía es proporcionar herramientas que ayuden a los administradores públicos a tomar decisiones financieras más informadas y eficaces, optimizando el uso de los recursos públicos en beneficio de todos.*

Popayán, 17 de mayo de 2025

### 0.0.1. Taller Interés simple

1. ¿Durante cuánto tiempo ha de imponerse un capital de 25 000 al 5% para que se convierta en 30 000?
2. Se invierte un capital de 200 y al cabo de dos años se desea obtener 250. ¿Cuál es la tasa de interés de la inversión?
3. ¿Qué capital debe invertirse para obtener 1 500 al cabo de tres años y a una tasa de interés de 20 % anual?
4. Se prestan 45 000 y al cabo de un año, 4 meses y 15 días se reciben 52 500. Calcular la tasa de interés como porcentaje.
5. Se prestan 5 000 y al cabo de 10 meses y 15 días se reciben 5 500. Calcular la tasa de interés mensual
6. Pedro invierte 15 000 y al cabo de 14 meses recibe 20 000. Calcular la tasa de interés bimestral
7. María invierte 7238 y después de un año con 2 meses y 5 días recibe 10050. ¿Cuál es la tasa de interés semestral?
8. Hallar la tasa de interés simple al que deberá prestarse un capital para que al cabo de  $t$  años los intereses sean equivalentes a  $k$  veces el capital prestado.
9. Hallar la tasa de interés simple (como porcentaje) al que deberá prestarse un capital para que al cabo de 20 años los intereses sean equivalentes al capital prestado.
10. ¿Cuánto tiempo se debe invertir 30 000 a una tasa de 0.45 % mensual para obtener 5000 de intereses?
11. ¿En cuánto tiempo el interés será igual al triple del capital inicial colocado a una tasa de interés al 6 %?
12. Hallar el interés producido durante cinco años, por un capital de 30 000, al 6 %
13. Hallar el capital requerido para obtener un interés de 500 al 3.5 % durante año y medio

14. Calcula el capital final después de seis meses, dado un capital inicial de 10 000 y una tasa del 3.5 %
15. Juan invierte 635 a una tasa de 4.68 %. ¿Cuál será su capital final después de 8 meses?

**Tarea 1:** Se tiene una letra por valor de 1000 a una tasa de interés simple del 5 % mensual y tiene un plazo de vencimiento de 40 días. Si se cancela 10 días después de su fecha de vencimiento, calcular el interés moratorio y la cantidad total a pagar, considerando que la tasa de interés moratoria es del 8 % mensual.

**Tarea 2:** ¿En cuánto tiempo crece un 24 % un capital que se invierte con el 6.3 % de interés simple anual?

## 0.0.2. Solución taller 1: Interés Simple

### Duración de la inversión para convertir un capital de 25 000 en 30 000

1.) ¿Cuánto tiempo ha de imponerse un capital de 25,000 al 5 % para que se convierta en 30,000?

#### Datos y Fórmulas

- $P = 25,000$  (capital inicial)
- $F = 30,000$  (capital final)
- $i = 0.05$  (tasa de interés)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P(1 + i \cdot n)$$

#### Incógnita a Determinar

Queremos encontrar el tiempo  $n$ . Despejando  $t$  de la fórmula anterior:

$$30,000 = 25,000(1 + 0.05 \cdot n)$$

$$\frac{30,000}{25,000} = 1 + 0.05 \cdot n$$

$$1.2 = 1 + 0.05 \cdot t \Rightarrow 0.2 = 0.05 \cdot n$$

$$n = \frac{0.2}{0.05} = 4 \text{ años}$$

Por lo tanto, el tiempo es de 4 años.

### Duración de la inversión para convertir un capital de 25 000 en 30 000

2.) Se invierte un capital de 200 y al cabo de dos años se desea obtener 250. ¿Cuál es la tasa de interés de la inversión?

#### Datos y Fórmulas

- $P = 200$
- $F = 250$
- $n = 2$  (años)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P(1 + i \cdot n)$$

#### Incógnita a Determinar

Queremos encontrar la tasa de interés  $i$ . Despejando  $i$ :

$$250 = 200(1 + 2 \cdot i)$$

$$\frac{250}{200} = 1 + 2 \cdot i \Rightarrow 1.25 = 1 + 2 \cdot i$$

$$0.25 = 2 \cdot i \Rightarrow i = \frac{0.25}{2} = 0.125 = 12.5\%$$

Por lo tanto, la tasa de interés es del 12.5 %.

## Capital necesario para obtener 1,500 en un periodo de 3 años.

3.) ¿Qué capital debe invertirse para obtener 1,500 al cabo de tres años a una tasa de interés del 20 % anual?

### Datos y Fórmulas

- $F = 1,500$  (capital final)
- $i = 0.2$  (tasa de interés)
- $n = 3$  (años)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P(1 + i \cdot n)$$

### Incógnita a Determinar

Queremos encontrar el capital inicial  $P$ . Despejando  $P$ :

$$1,500 = P(1.6) \Rightarrow P = \frac{1,500}{1.6} = 937.50$$

Por lo tanto, el capital inicial es de 937.50.

## Cálculo de la tasa de interés

4.) Se prestan 45,000 y al cabo de un año, 4 meses y 15 días se reciben 52,500. Calcular la tasa de interés.

### Datos y Fórmulas

- $P = 45,000$
- $F = 52,500$
- $n = 1.37$  (años: 1 año + 4 meses + 15 días)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P(1 + i \cdot n)$$

### Incógnita a Determinar

Queremos encontrar la tasa de interés  $i$ . Despejando  $i$ :

$$52,500 = 45,000(1 + i \cdot 1.37)$$

$$\frac{52,500}{45,000} = 1 + i \cdot 1.37$$

$$1.1667 = 1 + 1.37 \cdot i \Rightarrow 0.1667 = 1.37 \cdot i$$

$$i = \frac{0.1667}{1.37} = 0.1217 \Rightarrow i = 12.17\%$$

Por lo tanto, la tasa de interés es del 12.17%.

## Cálculo de la tasa mensual

5.) Se prestan 5,000 y al cabo de 10 meses y 15 días se reciben 5,500. Calcular la tasa de interés mensual.

### Datos y Fórmulas

- $P = 5,000$
- $F = 5,500$
- $n = 10.5$  (meses)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P(1 + i \cdot n)$$

### Incógnita a Determinar

Queremos encontrar la tasa mensual  $i$ . Despejando  $i$ :

$$5,500 = 5,000(1 + i \cdot 10.5)$$

$$\frac{5,500}{5,000} = 1 + i \cdot 10.5$$

$$1.1 = 1 + 10.5 \cdot i \Rightarrow 0.1 = 10.5 \cdot i$$

$$i = \frac{0.1}{10.5} = 0.00952 \Rightarrow i = 0.952\%$$

Por lo tanto, la tasa de interés mensual es del 0.952 %.

## Tasa de interés bimestral para Pedro

6.) Pedro invierte 15,000 y al cabo de 14 meses recibe 20,000. Calcular la tasa de interés bimestral.

### Datos y Fórmulas

- $P = 15,000$
- $F = 20,000$
- $n = \frac{14}{2} = 7$  (bimestres)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P(1 + i \cdot n)$$

### Incógnita a Determinar

Queremos encontrar la tasa bimestral  $i$ . Despejamos:

$$20,000 = 15,000(1 + i \cdot 7)$$

$$\frac{20,000}{15,000} = 1 + 7 \cdot i$$

$$1.3333 = 1 + 7 \cdot i \Rightarrow 0.3333 = 7 \cdot i$$

$$i = \frac{0.3333}{7} = 0.0476 = 4.76\%$$

Por lo tanto, la tasa bimestral es del 4.76 %.

## Tasa de interés semestral para María

7.) María invierte 7,238 y después de un año con 2 meses y 5 días recibe 10,050. Calcular la tasa de interés semestral.

### Datos y Fórmulas

- $P = 7,238$
- $F = 10,050$
- $n = 1.37$  (años, o 2.74 semestres)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P(1 + i \cdot n)$$

### Incógnita a Determinar

Queremos encontrar la tasa semestral  $i$ . Despejamos:

$$10,050 = 7,238(1 + i \cdot 2.74)$$

$$\frac{10,050}{7,238} = 1 + 2.74 \cdot i$$

$$1.3886 = 1 + 2.74 \cdot i \Rightarrow 0.3886 = 2.74 \cdot i$$

$$i = \frac{0.3886}{2.74} = 0.1419 = 14.19\%$$

Por lo tanto, la tasa semestral es del 14.19%.

## Tasa de interés simple para intereses equivalentes a $k$ veces el capital

8.) Hallar la tasa de interés simple al que deberá prestarse un capital para que al cabo de  $t$  años los intereses sean equivalentes a  $k$  veces el capital prestado.

### Datos y Fórmulas

- $P$  (capital inicial)
- $F = P(1 + k)$  (capital final)
- $I = k \cdot P$  (interés generado)
- $n$  (años)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P(1 + i \cdot t)$$

### Incógnita a Determinar

Queremos encontrar la tasa de interés  $i$ . Despejamos:

$$P(1 + k) = P(1 + i \cdot t) \Rightarrow 1 + k = 1 + i \cdot t$$

$$k = i \cdot t \Rightarrow i = \frac{k}{t}$$

Por lo tanto, la tasa de interés es  $\frac{k}{t}$ .

## Tasa de interés simple para intereses equivalentes al capital en 20 años

9.) Hallar la tasa de interés simple (como porcentaje) al que deberá prestarse un capital para que al cabo de 20 años los intereses sean equivalentes al capital prestado.

### Datos y Fórmulas

- $P$  (capital inicial)
- $I = P$  (intereses equivalentes al capital)
- $n = 20$  (años)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P(1 + i \cdot n)$$

### Incógnita a Determinar

Queremos encontrar la tasa de interés  $i$ . Sabemos que  $F = 2P$ , entonces:

$$2P = P(1 + i \cdot 20) \Rightarrow 2 = 1 + 20 \cdot i$$

$$1 = 20 \cdot i \Rightarrow i = \frac{1}{20} = 0.05 = 5\%$$

Por lo tanto, la tasa de interés es del 5%.

## Tiempo necesario para obtener 5,000 de intereses

10.) ¿Cuánto tiempo se debe invertir 30,000 a una tasa de 0.45 % mensual para obtener 5,000 de intereses?

### Datos y Fórmulas

- $P = 30,000$
- $I = 5,000$
- $i = 0.0045$  (mensual)

La fórmula del interés simple es:

$$I = P \cdot i \cdot n$$

### Incógnita a Determinar

Queremos encontrar el tiempo  $n$ . Despejamos:

$$5,000 = 30,000 \cdot 0.0045 \cdot n$$

$$n = \frac{5,000}{30,000 \cdot 0.0045} = 37.04 \text{ meses}$$

Por lo tanto, el tiempo necesario es de aproximadamente 37 meses.

## Tiempo para que el interés sea el triple del capital

11.) ¿En cuánto tiempo el interés será igual al triple del capital inicial colocado a una tasa de interés al 6 %?

### Datos y Fórmulas

- $P$  (capital inicial)
- $I = 3P$
- $i = 0.06$  (anual)

La fórmula del interés simple es:

$$I = P \cdot i \cdot n$$

### Incógnita a Determinar

Queremos encontrar el tiempo  $n$ . Despejamos:

$$3P = P \cdot 0.06 \cdot n \Rightarrow 3 = 0.06 \cdot n$$

$$n = \frac{3}{0.06} = 50 \text{ años}$$

Por lo tanto, el tiempo necesario es de 50 años.

## Interés producido en 5 años

12.) Hallar el interés producido durante cinco años, por un capital de 30,000, al 6 %.

### Datos y Fórmulas

- $P = 30,000$
- $i = 0.06$  (anual)
- $n = 5$  (años)

La fórmula del interés simple es:

$$I = P \cdot i \cdot n$$

### Incógnita a Determinar

Queremos encontrar el interés  $I$ :

$$I = 30,000 \cdot 0.06 \cdot 5 = 9,000$$

Por lo tanto, el interés producido es de 9,000.

## Capital necesario para obtener 500 de interés en 1.5 años

13.) Hallar el capital requerido para obtener un interés de 500 al 3.5 % durante año y medio.

### Datos y Fórmulas

- $I = 500$
- $i = 0.035$
- $n = 1.5$  (años)

La fórmula del interés simple es:

$$I = P \cdot i \cdot n$$

### Incógnita a Determinar

Queremos encontrar el capital  $P$ . Despejamos:

$$500 = P \cdot 0.035 \cdot 1.5$$

$$P = \frac{500}{0.035 \cdot 1.5} = 9,523.81$$

Por lo tanto, el capital requerido es de 9,523.81.

## Capital final después de seis meses

14.) Calcula el capital final después de seis meses, dado un capital inicial de 10,000 y una tasa del 3.5 %.

### Datos y Fórmulas

- $P = 10,000$
- $i = 0.035$
- $n = 0.5$  (años)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P(1 + i \cdot n)$$

### Incógnita a Determinar

Queremos encontrar el valor futuro  $F$ :

$$F = 10,000(1 + 0.035 \cdot 0.5)$$

$$F = 10,000 \cdot 1.0175 = 10,175$$

Por lo tanto, el capital final será de 10,175.

## Capital final para Juan después de 8 meses

15.) Juan invierte 635 a una tasa de 4.68 %. ¿Cuál será su capital final después de 8 meses?

### Datos y Fórmulas

- $P = 635$
- $i = 0.0468$
- $n = \frac{8}{12} = 0.6667$  (años)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P(1 + i \cdot n)$$

### Incógnita a Determinar

Queremos encontrar el valor futuro  $F$ :

$$F = 635(1 + 0.0468 \cdot 0.6667)$$

$$F = 635 \cdot 1.0312 = 654.42$$

Por lo tanto, el capital final será de 654.42.

## Tarea 1

Se tiene una letra por valor de 1,000 a una tasa de interés simple del 5 % mensual y tiene un plazo de vencimiento de 40 días. Si se cancela 10 días después de su fecha de vencimiento, calcular el interés moratorio y la cantidad total a pagar, considerando que la tasa de interés moratoria es del 8 % mensual.

### Datos y Fórmulas

- Valor de la letra:  $P = 1,000$
- Tasa de interés simple:  $i = 0.05$  (mensual)
- Plazo de vencimiento:  $n = \frac{40}{30} = 1.33$  (meses)
- Interés moratorio:  $i_m = 0.08$  (mensual)
- Días de retraso:  $n_m = \frac{10}{30} = 0.33$  (meses)

La fórmula del interés simple es:

$$I = P \cdot i \cdot n$$

### Solución

1. Primero, Calculemos el **interés generado en el plazo inicial**:

$$I = (1,000)(0.05)(1.33) \approx 66.7$$

La cantidad total a pagar al vencimiento es:

$$F_I = 1,000 + 66.7 \approx 1,066.7$$

2. Después, Debemos calcular el **interés moratorio** por los 10 días de retraso:

$$I_m = (1,066.7)(0.08)(0.33) \approx 26.7$$

3. Finalmente, la **cantidad total a pagar**, incluyendo el interés moratorio, es:

$$F_T = 1,066.7 + 26.7 \approx 1,093.4$$

Por lo tanto, la cantidad total a pagar es 1,093.4.

## Tarea 2

¿En cuánto tiempo crece un 24 % un capital que se invierte con el 6.3 % de interés simple anual?

### Datos y Fórmulas

- Crecimiento del capital: = 0.24 (24 %)
- Tasa de interés anual:  $i = 0.063$  (anual)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P(1 + i \cdot n)$$

Observemos que

$$F = P(1 + k) = 1.24 * P$$

Al remplazar en la formula se tiene que,

$$1.24 * P = P(1 + i \cdot n)$$

### Incógnita a Determinar

Ahora, queremos encontrar el tiempo  $n$  en años. pero sabemos que:

$$1.24 * P = P(1 + i \cdot n)$$

Resta, remplazar los datos y despejar la variable  $n$ , esto es:

$$1.24 = 1 + (0.063) \cdot n \Rightarrow 0.24 = (0.063) \cdot n$$

Finalmente,

$$n = \frac{0.24}{0.063} \approx 3.81 \text{ años}$$

Por lo tanto, el capital crece un 24 % en aproximadamente 3.81 años.

Capítulo **1**

## Unidad II

Como vimos en la sección anterior, el interés simple mantiene el capital inicial constante, generando interés solo sobre este.

Ahora, exploraremos el interés compuesto, en el cual los intereses se suman al capital original al final de cada periodo, generando un nuevo interés adicional en el siguiente periodo. Esta capitalización permite que el capital crezca de manera exponencial a lo largo del tiempo, siendo ideal para inversiones a largo plazo.

### 1.1. Interés Compuesto

#### Concepto

En el esquema de interés compuesto, el interés generado en cada periodo se calcula con base en la cantidad total al final del periodo anterior. Esta cantidad total incluye el capital original más el interés acumulado que se ha dejado en la cuenta.

## Interés compuesto

A medida que los intereses se generan de forma recurrente, el valor acumulado total, o monto  $F$ , después de  $n$  periodos se calculará como sigue:

$$F = P(1 + i)^n \quad (1.1)$$

### Observación:

- El interés puede ser convertido en capital anual, semestral, trimestral y mensual, etc. A dicho periodo se le da el nombre de “periodo de capitalización”. Al número de veces que el interés se capitaliza durante un año se le denomina frecuencia de conversión.
- Es muy importante que, para la solución de cualquier problema de interés compuesto, el interés anual sea convertido a la tasa que corresponda de acuerdo con el periodo de capitalización que se establezca; si el interés se capitaliza mensualmente el interés anual debe transformarse en interés mensual; si es trimestralmente, a interés trimestral, etcétera.

**Ejemplo 1.1.** Desembolsamos un préstamo por \$30'000.000 a una tasa de interés del 2% mensual durante cuatro meses, con la condición de no desembolsar los intereses al final de cada mes sino de capitalizarnos hasta el final. ¿Cuánto cancelamos por el préstamo?

### Solución

#### Datos y Fórmulas

- Desembolso del Préstamo: \$30'000.000
- Tasa de interés Compuesto:  $i = 0.02$  (mensual)
- Plazo de vencimiento:  $n = 4$  (meses)

La fórmula del interés compuesto es:

$$F = P(1 + i)^n$$

#### Incógnita a Determinar

Queremos encontrar el valor futuro  $F$ :

$$\begin{aligned} F &= P(1 + i)^n \\ F &= 30'000.000(1 + 0.02)^4 \\ &= 30'000.000(1,02)^4 \\ &\approx 30'000.000(1,0824) \\ &\approx 32'472.965 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la cantidad total a pagar es \$32'472.965.

**Ejemplo 1.2.** Suponga que usted deposita \$1000 en una cuenta de ahorros que paga intereses a una tasa del 8% anual. Suponga que no retira el interés generado al final de cada periodo (año), sino que deja que se acumule.

- a) ¿Cuánto tendría al final del tercer año con un interés simple?
- b) ¿Cuánto tendría al final del tercer año con un interés compuesto?

Año	Monto a interés simple	Monto a interés compuesto
0	1000	1000
1	$1000 \times (1 + 0.08 \times 1) = 1080$	$1000 \times (1 + 0.08)^1 = 1080$
2	$1000 \times (1 + 0.08 \times 2) = 1160$	$1000 \times (1 + 0.08)^2 \approx 1166.40$
3	$1000 \times (1 + 0.08 \times 3) = 1240$	$1000 \times (1 + 0.08)^3 \approx 1259.71$

Tabla 1.1: Comparación entre el monto a interés simple y a interés compuesto

### Ejemplo 1.3.

- Hallar el interés compuesto sobre \$1000 por tres años si el interés de 5% se convertible anualmente en capital.

Basta remplazar los datos que se tienen en la formula (1.1) esto es:

$$\begin{aligned}
 F &= P(1 + i)^n \\
 &= 1000(1 + 0.05)^3 \\
 &= 1000(1.05)^3 \\
 &\approx 1157,63
 \end{aligned}$$

donde el interés compuesto estaría dado como,

$$I = 1157,63 - 1000 = 157,63$$

- Hallar el interés compuesto producido durante cinco años, por un capital de 30 000, al 6%.

Reemplazamos los valores:

$$\begin{aligned}
 F &= 30.000(1 + 0.06)^5 \\
 &= 30.000 \times (1.3382) \\
 &\approx 40,146
 \end{aligned}$$

Luego, el interés compuesto está dado como sigue:

$$\begin{aligned} I &= M - C \\ &= 40.146 - 30.000 \\ &= 10,146 \end{aligned}$$

El interés compuesto producido en cinco años es de 10,146.

## Formulas de interés compuesto

Ahora apartir de la ecuación (1.1) se tiene los siguientes formulas para el interés compuesto.

$$P = F(1 + i)^{-n} \quad \text{Valor presente}$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{F}{P}\right)}{\log(1 + i)} \quad \text{Número de periodos}$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1 \quad \text{Tasa de interés}$$

$$I = P [(1 + i)^n - 1] \quad \text{Interés}$$

**Ejemplo 1.4.** Resolver cada uno de los siguientes problemas, a partir de las anteriores ecuaciones.

1. Qué capital debe invertirse ahora al 12.69 % anual capitalizable por año para tener \$40,000 en 10 años?, ¿A cuánto ascienden los intereses?.

### Capital e Interés Compuesto acumulado

#### Datos y Fórmulas

- $F = \$40.000$
- $n = 10$  (*años*)
- $i = 0.1269$  (*Capitalizable cada año*)

*La fórmula del valor Presente es:*

$$P = F (1 + i)^{-n}$$

#### Incógnita a Determinar

*Queremos determinar el Capital  $P$ . Esto es:*

$$\begin{aligned} P &= 40.000 (1 + 0.1269)^{-10} \\ &= 40.000 (1.1269)^{-10} \\ &= 40.000 (3.3106)^{-1} \\ &\approx 12.084,35 \end{aligned}$$

*Por lo tanto, el capital que se debe invertir ahora es de \$12.084,35. Los intereses al cabo de 10 años ascienden a \$27.915,65.*

El monto acumulado  $M$  de un capital inicial  $P$  depende de; la tasa de interés anual, la frecuencia de capitalización y el periodo de inversión. A continuación, se presenta el Teorema, que establece la relación entre estos factores y permite calcular el monto total acumulado al final de un periodo determinado.

### Teorema

El monto acumulado  $F$  de un capital  $P$  al final de  $nm$  periodos se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$F = P \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n \times m} \quad (1.2)$$

donde:

- $n$  es el plazo en años.
- $n \times m$  es el número total de periodos, definido como el producto de  $n$  (*años*) y  $m$  (*número de periodos por año*).
- $i$  es la tasa de interés anual capitalizable, que se divide entre  $m$  para determinar el interés correspondiente a cada periodo.

Ejemplo 1.5.

### Ejemplo tasa de interés

¿Con qué tasa de interés anual capitalizable por bimestre se duplica un capital en 3 años?

#### Datos y Fórmulas

- $P$  Capital inicial
- $F = 2P$  Monto final
- $n = 3$  años (plazo)
- $m = 6$  bimestres por año (frecuencia de capitalización)
- Número de periodos bimestrales:  
 $nm = 18$

La fórmula para el interés compuesto es:

$$F = P \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}$$

despejando la variable  $i$  se tiene que

$$i = m \left( \sqrt[nm]{\frac{F}{P}} - 1 \right)$$

#### Incógnita a Determinar

Queremos encontrar la tasa de interés anual  $i$  capitalizable por bimestres.

Sustituyendo los valores en la fórmula:

$$\begin{aligned} i &= 6 \left( \sqrt[18]{\frac{2P}{P}} - 1 \right) \\ &= 6 \left( \sqrt[18]{2} - 1 \right) \\ &= 6 (1.0392 - 1) \\ &= 6 (0.0393) \\ &= 0.2356 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la tasa de interés anual es de aproximadamente 23.56 %, capitalizable por bimestres.

**Ejercicio 1.1.*****Ejemplo tasa de interés***

¿Con qué tasa de interés anual capitalizable por bimestre se duplica un capital en 3 años? ¿Qué día deberá invertir \$10.000 el matemático Gutiérrez para disponer de \$10.512 el 11 de mayo? Suponga que la inversión genera intereses del 13% compuesto por semana.

**Datos y Fórmulas**

- $P = 10,000$  (Capital inicial)
- $F = 10,512$  (Monto final)
- $i = 0.13/52$  (Tasa de interés semanal, ya que el 13% anual se divide entre 52 semanas)
- $n$  es el número de semanas hasta el 11 de mayo.

La fórmula para el valor futuro con interés compuesto es:

$$F = P(1 + i)^n$$

**Incógnita a Determinar**

Queremos encontrar el número de semanas  $n$  antes del 11 de mayo en las que se debe realizar la inversión. Para ello, despejamos  $n$  de la fórmula:

$$10,512 = 10,000(1 + 0.13/52)^t$$

Dividimos ambos lados entre 10,000:

$$1.0512 = (1 + 0.0025)^t$$

Calculamos el logaritmo natural de ambos lados:

$$\ln(1.0512) = t \ln(1.0025)$$

Despejamos  $t$ :

$$t = \frac{\ln(1.0512)}{\ln(1.0025)}$$

$$t \approx 20.41 \text{ semanas}$$

Esto indica que debe invertir su capital **20 semanas antes del 11 de mayo**, es decir, aproximadamente el **19 de diciembre del año anterior**.

Es importante mencionar que en el interés compuesto hay dos tasas de interés. **Tasa de interés Nominal y Tasa de Interés Efectiva.**

## 1.2. Tasa nominal y tasa efectiva

### Tasa de interés Nominal

Es la **tasa anual** que capitaliza más de una vez al año. Hablar de tasa nominal equivale a hablar de **tasa capitalizable**.[1]

#### Observación:

La tasa nominal se representa con  $j$ , y el número de veces que el interés se convierte en capital se denomina capitalización y se simboliza con  $m$ .

- $j = 24\% N.M$ : Una tasa del 24% nominal mensual, o capitalizable mensualmente. Aquí  $m = 12$ .
- $j = 30\% N.T$ : Una tasa anual del 30% nominal trimestral o capitalizable trimestralmente. Aquí  $m = 4$ .
- $j = 25\% N.B$ : nominal bimestral, con  $m = 6$ .
- $j = 24\% N.D$ : nominal diaria, con  $m = 360$ .

### Tasa de interés Efectiva

Es aquella que realmente **opera sobre el capital en un periodo**. El periodo puede ser un año, un mes, un semestre, un trimestre, un bimestre, un día o una semana [1].

**Ejemplo 1.6.** *Un banco nos concede un préstamo y nos cobra una tasa de interés del 28% N.T. ¿Cuál es la tasa efectiva trimestral que nos cobra la entidad financiera?*

La tasa que nos cobra el banco es una tasa anual (Nominal). Durante el año, se convierte en capital 4 veces (el año tiene 4 trimestres). Para calcular la tasa de interés trimestral, dividimos la tasa nominal entre el número de capitalizaciones:

$$i = \frac{j}{m} = \frac{28\%}{4} = 7\%$$

Al dividir la tasa nominal (28 %) entre el número de capitalizaciones, obtenemos una tasa del 7 %, que es la tasa de periodo o tasa efectiva trimestral.

**Ejemplo 1.7.** *Conseguimos un préstamo y nos cobran una tasa de interés del 32 % N.T (Nominal Trimestral). ¿Qué tasa efectiva debemos pagar?*

Dado que  $J = 32\% \text{ N.T} = 0.32 \text{ N.T}$ , durante el año hay cuatro capitalizaciones ( $m = 4$ ). La tasa de periodo o efectiva es:

$$i = \frac{j}{m} = \frac{0.32}{4} = 8\%$$

Es decir, la tasa efectiva trimestral o de periodo trimestral es 8 %.

### 1.3. Valor Futuro

**Ejemplo 1.8.** *Si depositamos un millón de pesos con una tasa de interés nominal trimestral del 28 % (N.T.) ¿cuánto recibimos al finalizar el año?*

#### Capital e Interés Compuesto acumulado

##### Datos y Fórmulas

- $P = \$1\,000\,000$
- $n = 1$  (Años)
- $j = 0.28$  (Capitalizable cada trimestre)
- $m = 4$  (Trimestres en el año)

La fórmula del valor Presente es:

$$F = P \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm}$$

##### Incógnita a Determinar

Queremos determinar el Capital  $F$ . Esto es:

$$\begin{aligned} F &= 1\,000\,000 \left(1 + \frac{0.28}{4}\right)^4 \\ &= 1\,000\,000 (1 + 0.07)^4 \\ &= 1\,000\,000 (1.07)^4 \\ &\approx 1\,310\,796.01 \end{aligned}$$

Por lo tanto, al finalizar el año, el monto final a recibir es de aproximadamente \$1 310 796.01.

**Ejemplo 1.9.** Consignamos \$10,000,000 en una corporación durante 2 años, y nos pagan una tasa de interés del 12 % N.M (Nominal Mensual). ¿Cuánto dinero retiramos dentro de 2 años?

**Ejemplo 1.10.** Por un préstamo de \$25 000 pesos pagamos una tasa del interés del 18 % N.B durante un año. ¿Cuánto debemos pagar por el préstamo?

#### 1.4. Valor Presente

**Ejemplo 1.11.** Dentro de 8 meses recibo \$12,000,000. ¿A cuánto dinero en pesos de hoy equivalen los \$12,000,000 si la tasa de interés es del 1.5 % efectiva mensual.

##### Capital e Interés Compuesto acumulado

###### Datos y Fórmulas

- $P = \$12\,000\,000$
- $n = 8$  (meses)
- $i = 0.015$  (Capitalizable cada trimestre)

La fórmula del valor Presente es:

$$P = \frac{F}{(1 + i)^n}$$

###### Incógnita a Determinar

Queremos determinar el Capital  $F$ . Esto es:

$$\begin{aligned} P &= \frac{12\,000\,000}{(1 + 0.015)^8} \\ &\approx 10\,241\,884.45 \end{aligned}$$

## 1.5. Tasas Equivalentes

### Definición de Tasas Equivalentes

Se dice que dos tasas de interés son equivalentes si, con diferentes períodos de capitalización, producen el mismo monto en el mismo plazo.

- La tasa anual compuesta  $i$ , convertible una vez al año ( $n = 1$ ), equivalente a la tasa nominal  $j$ , capitalizable  $m$  veces al año, se denomina **tasa efectiva**.

### Teorema

La tasa efectiva  $i$ , equivalente a una tasa nominal  $j$ , capitalizable  $m$  veces por año, está dada por:

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$$

#### Ejemplo 1.12. *Tasa equivalente*

Calcular la tasa efectiva anual equivalente a una tasa nominal del 11.8 % capitalizable trimestralmente.

$$j = 0.118, \quad m = 4$$

Aplicamos el teorema:

$$i = \left(1 + \frac{0.118}{4}\right)^4 - 1$$

al remplazar se tiene lo siguiente,

$$i = (1 + 0.0295)^4 - 1 = 0.1233 \text{ o } 12.33\%$$

Esto indica que una inversión al 11.8 % anual compuesto trimestralmente es equivalente a una tasa efectiva anual del 12.33 %.

## 1.6. Problemas de Comparación de Tasas

**Ejercicio 1.2.** ¿Qué es más conveniente para una institución bancaria: prestar dinero al 20.28 % anual compuesto semanalmente o al 21.29 % capitalizable semestralmente?

Para resolver, calculamos ambas tasas como tasas efectivas anuales y comparamos:

- **Opción 1:**  $j = 20.28\%$ ,  $m = 52$  (semanal)

$$i = \left(1 + \frac{0.2028}{52}\right)^{52} - 1 = 22.43\%$$

- **Opción 2:**  $j = 21.29\%$ ,  $m = 2$  (semestral)

$$i = \left(1 + \frac{0.2129}{2}\right)^2 - 1 = 22.42\%$$

**Ejemplo 1.13.** Si un banco nos cobra por un préstamo una tasa de interés del 5 % efectivo trimestral, ¿qué tasa efectiva anual nos cobra el banco?

Para calcular la tasa efectiva anual:

$$(1 + i)^4 = (1 + 0.05)^4 - 1$$

Entonces,

$$i = (1.05)^4 - 1 = 0.2155 \text{ o } 21.55\% \text{ efectiva anual}$$

## 1.7. Tasas Nominales

La tasa nominal se simboliza con  $j$ , y para equivalencias se representa como  $(1 + \frac{j}{m})^m$ .

**Ejemplo 1.14.** *Un banco cobra una tasa de interés del 36% N.M (nominal mensual). ¿Cuál es la tasa efectiva anual?*

### Solución

$$\left(1 + \frac{0.36}{12}\right)^{12} - 1 = 0.4257 \text{ o } 42.57\% \text{ efectiva anual}$$

**Ejercicio 1.3.** *¿Cuál es la tasa efectiva equivalente al 11.8% anual compuesto por trimestres?*

### Cálculo de Tasas Nominales y Efectivas

#### Datos y Fórmulas

- $j = 0.118$  (Tasa nominal anual capitalizable por trimestres)
- $m = 4$  (Número de trimestres por año)

La fórmula de la tasa efectiva anual es:

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$$

#### Cálculos

Sustituimos los valores en la fórmula:

$$i = \left(1 + \frac{0.118}{4}\right)^4 - 1$$

$$i = (1 + 0.0295)^4 - 1$$

$$i = (1.0295)^4 - 1$$

$$i \approx 1.123324947 - 1$$

$$i \approx 0.123324947$$

Por lo tanto, la tasa efectiva anual es del 12.3324947%.

Una inversión al 11.8% nominal anual compuesto por trimestres es tan productiva como un 12.3324947% capitalizable anualmente. La tasa efectiva trimestral ( $j/m$ ) es

del 2.95 %, pero la tasa efectiva anual resulta ser del 12.33 %.

**Ejemplo 1.15.** Para una inversión de \$1000:

$$1000 \cdot (1 + 0.0295)^4 \approx 1123.324947$$

$$1000 \cdot (1 + 0.123324947)^1 \approx 1123.324947$$

Esto demuestra la equivalencia:

- Tasa nominal: 11.8 % Nominal Trimestral
- Tasa efectiva trimestral: 2.95 %
- Tasa efectiva anual: 12.33 %

**Ejemplo 1.16.** Conocida una tasa del 24 % N.T (nominal trimestral), hallar la tasa efectiva mensual equivalente.

*Solución*

Usamos la fórmula de tasas equivalentes:

$$\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m = (1 + i)^n$$

Dado que  $j = 0.24$ ,  $m = 4$  (trimestral) y  $n = 12$  (mensual), entonces:

$$\left(1 + \frac{0.24}{4}\right)^{12/4} - 1 = 0.0196 \text{ o } 1.96 \% \text{ efectiva mensual}$$

## Algunas Aclaraciones

### Formulas Y Definiciones

Interés compuesto con tasa efectiva:

$$F = P(1 + i)^n$$

- $F$ : Valor Futuro, Monto o Saldo Final.
- $P$ : Valor Presente, Capital o Inversión.
- $i$ : Tasa efectiva de interés compuesto.
- $n$ : Tiempo (en unidades consistentes con  $i$ ).

### Formulas y Definiciones

Interés compuesto con tasa nominal:

$$F = P \left(1 + \frac{j}{m}\right)^n$$

- $F$ : Valor Futuro, Monto o Saldo Final.
- $P$ : Valor Presente, Capital o Inversión.
- $j$ : Tasa nominal (puede ser convertible o capitalizable).
- $m$ : Número de periodos de conversión por año.

**Ejemplo 1.17. Interés compuesto con tasa efectiva** Calcular el monto que se obtendrá de invertir \$15,000 durante 3 años ( $n = 3$ ) a una tasa efectiva anual del 3% ( $i = 0.03$ ) de interés compuesto.

Para ello, a partir de la formula se tiene que:

$$\begin{aligned} F &= P(1 + i)^n \\ F &= 15,000(1 + 0.03)^3 \\ F &= 15,000(1.03)^3 \\ F &\approx 15,000(1.092727) \\ F &\approx 16,391 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el monto obtenido será de \$16,391.

**Ejemplo 1.18.** Calcular el interés compuesto que generará un capital de \$22,000 durante 4 meses ( $n = 4$ ) al 24% ( $j = 0.24$ ) convertible mensualmente ( $m = 12$ ).

$$\begin{aligned} F &= P \left(1 + \frac{j}{m}\right)^n \\ F &= 22,000 \left(1 + \frac{0.24}{12}\right)^4 \\ F &= 22,000 (1 + 0.02)^4 \\ F &= 22,000(1.02)^4 \\ F &\approx 22,000(1.08243216) \\ F &\approx 23,813.51 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el monto futuro será de \$23,813.51.

### Tasas de interés equivalentes

#### Definición: Tasas de interés equivalentes

Las Tasas equivalentes son aquellas que producen la misma tasa efectiva anual bajo diferentes condiciones. Las tasas de interés pueden ser **vencidas** (aplicadas al final del periodo) o **anticipadas** (aplicadas al inicio del periodo).

## Conversiones de unidades

Efectiva a efectiva $(1 + i)^n = (1 + i)^n$	Nominal a Efectiva $(1 + \frac{j}{m})^m = (1 + i)^n$
Nominal a Nominal $(1 + \frac{j}{m})^m = (1 + \frac{j}{m})^m$	Efectiva a Nominal $(1 + i)^n = (1 + \frac{j}{m})^m$

### Ejemplo 1: Efectiva a efectiva

Calcular la tasa efectiva mensual equivalente a una tasa efectiva anual del 27 %.

$$\begin{aligned} (1 + i)^{12} &= (1 + 0.27)^1 \\ i + 1 &= \sqrt[12]{1.27} \\ i &= \sqrt[12]{1.27} - 1 \\ i &\approx 0.0201177635 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la tasa efectiva mensual es del 2.01177635 %.

### Ejemplo 2: Efectiva trimestral a efectiva anual

Si un banco cobra una tasa del 5 % efectiva trimestral, calcular la tasa efectiva anual.

$$\begin{aligned} (1 + i)^1 &= (1 + 0.05)^4 \\ i &= (1 + 0.05)^4 - 1 \\ i &= 1.21550625 - 1 \\ i &= 0.21550625 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la tasa efectiva anual es del 21.550625 %.

### Ejemplo 3: Efectiva semestral a efectiva trimestral

Un banco cobra una tasa del 11 % efectiva semestral. Calcular la tasa efectiva trimestral.

$$\begin{aligned}(1 + i)^2 &= (1 + 0.11)^4 \\ i + 1 &= \sqrt[4]{1.11} \\ i &= \sqrt[4]{1.11} - 1 \\ i &\approx 0.05356537529\end{aligned}$$

Por lo tanto, la tasa efectiva trimestral es del 5.356537529 %.

Expresión	Descripción
$(1 + i)^1$	Tasa efectiva anual
$(1 + i)^2$	Tasa efectiva semestral
$(1 + i)^4$	Tasa efectiva trimestral
$(1 + i)^6$	Tasa efectiva bimestral
$(1 + i)^{12}$	Tasa efectiva mensual
$(1 + i)^{48}$	Tasa efectiva semanal (1)
$(1 + i)^{52}$	Tasa efectiva semanal (2)
$(1 + i)^{360}$	Tasa efectiva diaria (1)
$(1 + i)^{365}$	Tasa efectiva diaria (2)

Tabla 1.2: Relación entre tasas efectivas y sus períodos.

### Ejemplo 1: De efectiva anual a efectiva mensual

Una corporación financiera nos concede un préstamo y nos cobra una tasa de interés del 27 % efectiva anual. Hallar el valor de la tasa efectiva mensual.

**Solución**

Conocida:

$$(1 + 0.27)^1 \text{ efectiva anual.}$$

Desconocida:

$$(1 + i)^{12} \text{ efectiva mensual.}$$

$$\begin{aligned}(1 + i)^{12} &= (1 + 0.27)^1 \\ 1 + i &= \sqrt[12]{1 + 0.27} \\ i &= \sqrt[12]{1 + 0.27} - 1 \\ i &= 0.0201177635\end{aligned}$$

Luego, la tasa efectiva mensual es:

$$i = 2.01177635 \%$$

Esto es equivalente al 27 % efectivo anual.

**Ejemplo 2: De efectiva trimestral a efectiva anual**

Si un banco nos cobra por un préstamo una tasa de interés del 5 % efectivo trimestral, ¿qué tasa efectiva anual nos cobra el banco?

**Solución**

Conocida:

$$(1 + 0.05)^4 \text{ efectiva trimestral.}$$

Desconocida:

$$(1 + i)^1 \text{ efectiva anual.}$$

$$(1 + i)^1 = (1 + 0.05)^4$$

$$i = (1 + 0.05)^4 - 1$$

$$i = 1.21550625 - 1 = 0.21550625$$

Por lo tanto, la tasa efectiva anual es:

$$i = 21.550625 \%$$

### Ejemplo 3: Efectiva anual a efectiva diaria

Calcular la tasa efectiva diaria ( $n = 360$ ) equivalente a una tasa efectiva anual del 42 %.

$$(1 + i)^{360} = (1 + 0.42)^1$$

$$i + 1 = \sqrt[360]{1.42}$$

$$i = \sqrt[360]{1.42} - 1$$

$$i \approx 0.0009745214$$

Por lo tanto, la tasa efectiva diaria es del 0.09745214 %.

## 1.8. Ejercicios prácticos

### Ejemplo 3

Conocida una tasa del 24 % N.T, hallar la tasa efectiva mensual equivalente.

$$(1 + i)^{12} = \left(1 + \frac{0.24}{4}\right)^4$$

$$i = (1 + 0.06)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$i = 1.96 \% \quad \text{efectiva mensual.}$$

### Ejemplo 4

Si una corporación nos cobra una tasa de interés del 2.4% efectiva mensual, hallar la tasa nominal trimestral equivalente.

$$(1 + J)^4 = (1 + 0.024)^{12}$$

$$J = 4 \left[ (1.024)^4 - 1 \right]$$

$$J = 39.8 \% \quad \text{Nominal Trimestral Vencida.}$$

**Ejemplo 5**

Si una corporación nos cobra una tasa del 3% efectiva mensual (E.M.), ¿cuál es la tasa nominal trimestral equivalente?

$$(1 + 0.03)^4 = (1 + i)^1$$

$$i = (1.03)^{\frac{1}{4}} - 1$$

$$i = 0.0799 \times 100\%$$

$$i = 17.75\% \quad \text{E.A. (efectiva anual).}$$

Para un período de  $n = 14.35$  meses:

$$(1 + J)^4 = (1 + 0.03)^{12}$$

$$J = 4 \left[ (1.03)^3 - 1 \right]$$

$$J = 37.0\% \quad \text{Nominal Trimestral.}$$

**Ejemplo 6**

El Banco Agrario concede préstamos a una tasa de interés del 18 % nominal mensual (N.M.). ¿Cuál es la tasa nominal trimestral equivalente?

$$\left(1 + \frac{J}{12}\right)^{12} = \left(1 + \frac{J}{4}\right)^4$$

$$\left(1 + \frac{0.015}{12}\right)^{12} = \left(1 + \frac{J}{4}\right)^4$$

Resolviendo:

$$J = 4 \left[ (1.015)^4 - 1 \right]$$

$$J = 18.27 \% \quad \text{Nominal Trimestral.}$$

## Tasas Anticipadas

### Definición

La **tasa de interés anticipada** es aquella que opera al principio del período. Por ejemplo, si solicitamos un préstamo por \$10.000.000 y el banco nos cobra una tasa del 2.5 % mensual, pueden ocurrir dos situaciones:

1. El banco nos entrega los \$10.000.000 y nos cobra intereses al final del mes:

$$10.000.000 \times 0.025 = 250.000.$$

2. El banco nos cobra el interés por adelantado; en este caso, recibiríamos:

$$10.000.000 - 250.000 = 9.750.000.$$

Este descuento de \$250.000 por concepto de intereses se denomina **interés anticipado**.

### Tipos de Tasas Anticipadas

Las tasas anticipadas pueden ser:

- **Nominales:** Capitalizadas más de una vez al año.
- **Del período:** Calculadas para un período específico.

#### Ejemplos de Tasas Nominales Anticipadas

- Una tasa del 24 % N.M.A (*Nominal Mes Anticipado*).
- Una tasa del 32 % N.T.A (*Nominal Trimestral Anticipado*).
- Una tasa del 18 % N.B.A (*Nominal Bimestral Anticipado*).

Si dividimos la tasa nominal anticipada ( $J$ ) entre el número de capitalizaciones ( $m$ ),

obtenemos la **tasa anticipada de período**, simbolizada como  $d$ :

$$d = \frac{J}{m}.$$

#### Ejemplos de Cálculo de la tasa anticipada

- Para  $J = 32\%$  N.T.A ( $m = 4$ ):

$$d = \frac{0.32}{4} = 0.08 \quad (\text{Tasa anticipada trimestral}).$$

- Para  $J = 18\%$  N.B.A ( $m = 6$ ):

$$d = \frac{0.18}{6} = 0.03 \quad (\text{Tasa anticipada bimestral}).$$

#### Conversión entre Tasas Anticipadas y Vencidas

Para convertir una tasa anticipada ( $d$ ) a una tasa vencida ( $i$ ), usamos la fórmula:

$$i = \frac{d}{1 - d}.$$

#### Ejemplo

Dada  $J = 30\%$  N.M.A ( $m = 12$ ):

- Calculamos  $d$ :

$$d = \frac{0.30}{12} = 0.025 \quad (\text{Anticipada mensual}).$$

- Hallamos  $i$ :

$$i = \frac{0.025}{1 - 0.025} = 0.02564 \quad (\text{Vencida mensual}).$$

### Equivalentes entre Tasas

Para calcular la tasa efectiva anual ( $E.A$ ) a partir de una tasa mensual vencida ( $i$ ):

$$E.A = (1 + i)^{12} - 1.$$

#### Ejemplo

Para  $i = 0.02564$ :

$$E.A = (1 + 0.02564)^{12} - 1 = 0.35436 \quad (35.436\%).$$

### Conversión de Tasas Nominales

Si conocemos una tasa nominal anticipada ( $J$ ) y deseamos convertirla a otro tipo de tasa, seguimos estos pasos:

1. Calculamos la tasa anticipada de período ( $d$ ):

$$d = \frac{J}{m}.$$

2. Convertimos  $d$  a  $i$  (vencida):

$$i = \frac{d}{1 - d}.$$

3. Usamos  $i$  para calcular otras tasas efectivas según el período deseado.

#### Ejemplo

Dada  $J = 24\% \text{ N.M.A}$  ( $m = 12$ ):

1. Calculamos  $d$ :

$$d = \frac{0.24}{12} = 0.02 \quad (\text{Anticipada mensual}).$$

2. Hallamos  $i$ :

$$i = \frac{0.02}{1 - 0.02} = 0.0204 \quad (\text{Vencida mensual}).$$

3. Calculamos la  $E.T$  (efectiva trimestral):

$$(1 + 0.0204)^3 = 1.0624 \quad \Rightarrow \quad E.T = 0.0624 \quad (6.24\%).$$

### Ejemplo Práctico

Una corporación ofrece un crédito con  $J = 32\%$  N.T.A ( $m = 4$ ):

1. Calculamos  $d$ :

$$d = \frac{0.32}{4} = 0.08.$$

2. Convertimos a  $i$ :

$$i = \frac{0.08}{1 - 0.08} = 0.08695 \quad (\text{Vencida trimestral}).$$

3. Calculamos la  $E.A$ :

$$E.A = (1 + 0.08695)^4 - 1 = 0.3958 \quad (39.58\%).$$

## Bibliografía

- [1] PROGRAMA DE TECNOLOGÍA EN GESTIÓN PÚBLICA, JOSÉ ABDENAGO AREVALO, ELVIA NANCY OSPINA DÍAZ, and ESCUELA SUPERIOR DE ADMINISTRACIÓN PÚBLICA, *Matemáticas financieras*.