

Matemáticas Generales

Apuntes de clase.

GUIA 3: Límites



Profesor:
Carlos Andrés Leiton Piamba
Docente Universitario

Popayán, 19 de abril de 2024

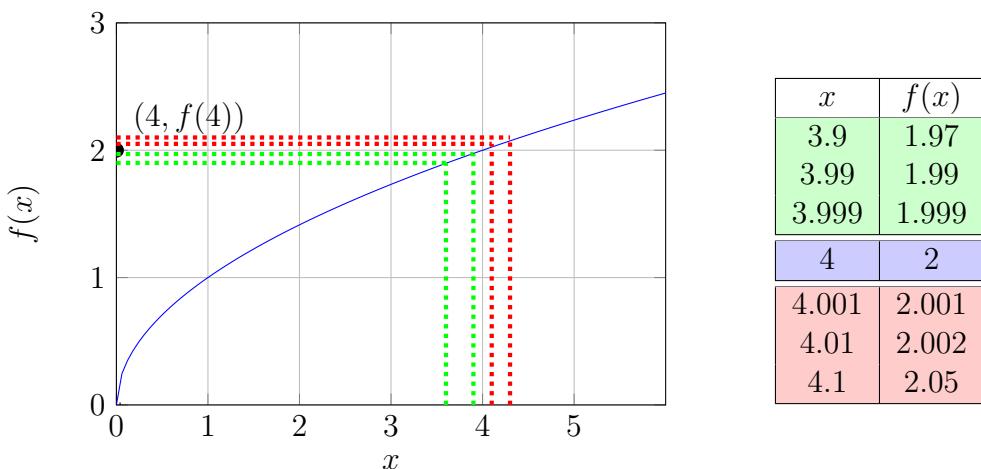
Capítulo 1

Límites

Idea intuitiva de límite: Encontrar el límite de una función significa hallar el valor al cual se aproxima $f(x)$ cuando x tiende a tomar un valor determinado. La función $f(x)$ tiende hacia el límite L cuando x tiende hacia a , esto si es posible hacer que $f(x)$ se aproxime tanto a L como se quiera, siempre y cuando x este los suficientemente cerca de a . Sin tomar el valor de a . Lo anterior se puede expresar

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (1.1)$$

y se lee el límite cuando x tiende hacia a de $f(x)$ es igual a L .



El siguiente link te puede ayudar a explorar mejor el concepto de límite.

<https://www.geogebra.org/m/sVWf5MEB>

1.1. Definición y límites laterales

Definición 1.1. La definición formal de límite se plantea de la siguiente forma:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (1.2)$$

significa que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para todo x , si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

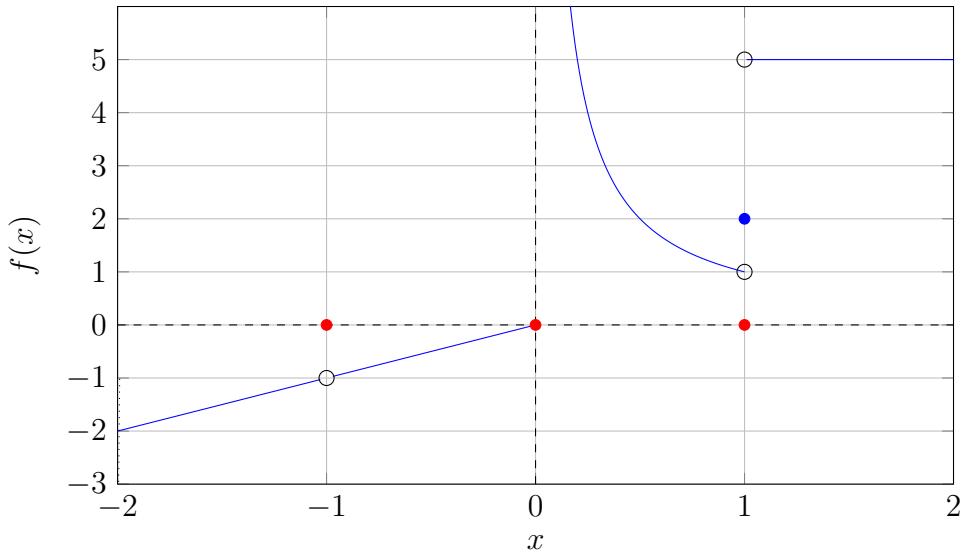


Figura 1.1: Gráfica de la función a trozos $f(x)$.

Definición 1.2. *Límites laterales* Las aproximaciones que se realizan para determinar el límite de una función se relaciona con el concepto de **límite lateral**.

Los límites laterales se representan de dos formas distintas, según si la aproximación se realiza por la izquierda o por la derecha.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad (1.3)$$

significa que el límite , cuando x tiende a a **por la derecha** es igual a L .

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad (1.4)$$

significa que el límite , cuando x tiende a a **por la izquierda** es igual a L .

La existencia o no existencia del límite de una función depende de los límites laterales, ya que si los límites laterales existen y son iguales, entonces el límite de la función existe y es igual al valor de los límites laterales. En cambio, si los límites laterales no existen o son diferentes, el límite de la función no existe. Por tanto, se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad (1.5)$$

EJEMPLOS

1. Determinar el límite indicado en cada caso a partir de la gráfica.

a. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

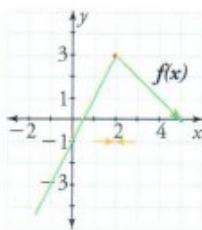
Primero, se determina el límite por la izquierda.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$$

Luego, se halla el límite para la derecha.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$$

Finalmente, se tiene que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe y es igual a 3.



b. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

Primero, se determina el límite por la izquierda.

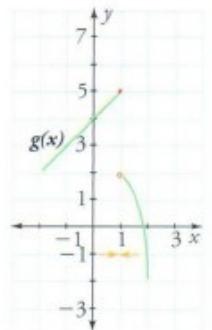
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 5$$

Luego, se halla el límite por la derecha.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$$

Finalmente, se tiene que

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ no existe porque los límites laterales son diferentes.



Por otro lado, determinemos el límite de la siguiente función a trozos

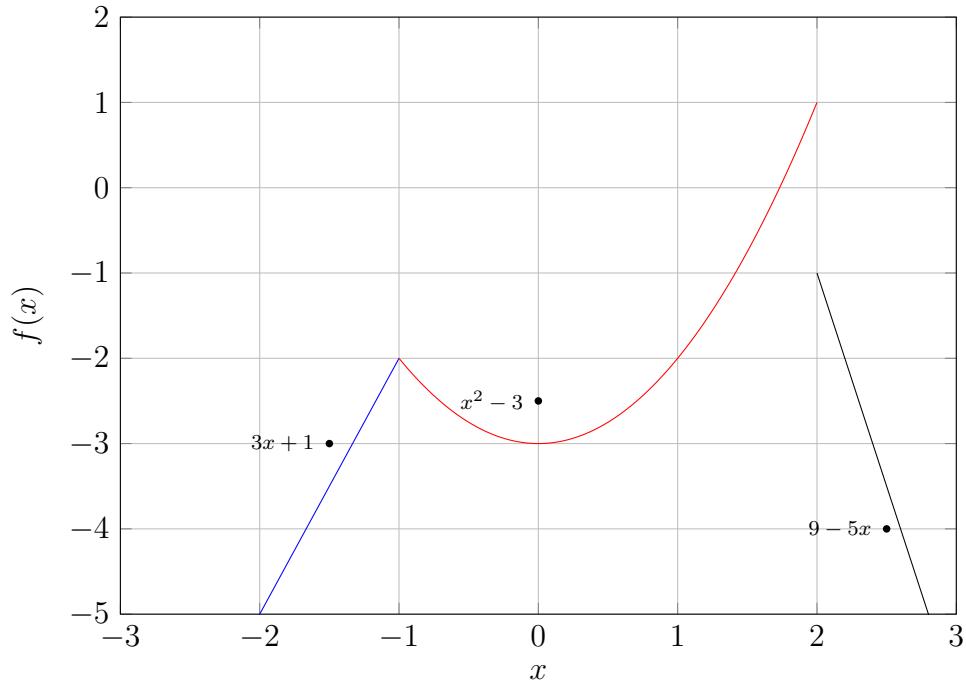
Ejemplo 1.1. Dada la función,

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 3 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 9 - 5x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Determinemos $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x))$; $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x))$

Para resolver este problema, vamos a seguir los siguientes pasos. Si bien existen varias formas de abordarlo, profundizaremos en el concepto de límite visualizando la gráfica de la función. Esto nos permitirá comprender mejor cómo se comporta la función en torno al punto en cuestión y cómo se aproximan sus valores a medida que nos acercamos a dicho punto.

- *Primero, trazar la gráfica de la función $f(x)$.*



- *Luego, calcular los límites laterales en cada punto.*

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x + 1 = -2; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 3 = -2$$

por otro lado,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 3 = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 9 - 5x = -1$$

- *Finalmente, se tiene que*

- *El $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x))$ existe y además $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x)) = -2$, dado que los límites laterales son iguales.*
- *El $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x))$ no existe, porque los límites laterales son diferentes.*

Principio de sustitución Otra propiedad importante de los límites es el principio de sustitución, en el cual se establece que:

$$\lim_{x \rightarrow \underline{a}} f(x) = f(\underline{a}) \quad (1.6)$$

siempre y cuando no produzca una indeterminación.

Ejemplo 1.2. Determinar el siguiente límite usando el principio de sustitución.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) &= \lim_{x \rightarrow \underline{2}} (\underline{3x} - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (3(\underline{2}) - 1) \\ &= 6 - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3. Determinar el siguiente límite usando el principio de sustitución.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} (3x - 1) &= \lim_{x \rightarrow \underline{-2}} (\underline{3x} - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (3(\underline{-2}) - 1) \\ &= -6 - 1 \\ &= -7 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4. Determinar el siguiente límite usando el principio de sustitución.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1) &= \lim_{x \rightarrow \underline{1}} (\underline{x^2} - 2\underline{x} + 1) \\ &= ((\underline{1})^2 - 2(\underline{1}) + 1) \\ &= 1 - 2 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1. Determinar el siguiente límite usando el principio de sustitución.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{x}{7} + 3x - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow \underline{7}} \left(\frac{\underline{x}}{7} + 3\underline{x} - 1 \right) \\ &= (\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad}) \\ &= \end{aligned}$$

1.2. Álgebra de límites

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones tales que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$$

y k una constante real, entonces se cumplen las siguientes propiedades.

1.	Límite de un constante
	$\lim_{x \rightarrow a} k = k$
2.	Límite de una constante por un función
	$\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kL$
3.	Límite de una suma o de una diferencia de funciones
	$\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kL$
4.	Límite de un producto de funciones
	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \pm M$
5.	Límite de un cociente de funciones
	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = LM$
6.	Límite de una función compuesta
	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$
7.	Límite de la potencia de una función
	$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n$
8.	Límite de una función Radical
	$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$
9.	Límite de una función Logarítmica
	$\lim_{x \rightarrow a} [\log_b f(x)] = \log_b \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \quad L > 0$

Ejemplo 1.5. Determinar los siguientes límites:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3}{4}x \right) - \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2} \right) & \bullet \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{5}{4}x^3 - x \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{5}{4}x^3 \right) - \lim_{x \rightarrow 2} (x) \\
 &= \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 2} (x) - \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2} \right) & &= \frac{5}{4} \lim_{x \rightarrow 2} (x^3) - \lim_{x \rightarrow 2} (x) \\
 &= \frac{3}{4} (2) - \left(\frac{1}{2} \right) & &= \frac{3}{4} (2^3) - (2) \\
 &= \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2} \right) & &= \frac{3 * 8}{4} - (2) \\
 &= 1 & &= 6 - 2 \\
 & & &= 4
 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2. Determinar los siguientes límites, usando el principio de sustitución y el álgebra de límites.

- $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^3 - 8}{x + 2} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{10 + \sqrt{x}}{3 + \sqrt{2x + 1}} \right)$

Ejercicio 1.3. Ejercicios para practicar

1.) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{\ln(x^2)}{x-1} \right)$	5.) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\log_3(x^3+1)}{x+1} \right)$
2.) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln(x+1))$	6.) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^3-8}{x-2} \right)$
3.) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2-2x-8}{x-4} \right)$	7.) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4^x+1}{x+1} \right)$
4.) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\ln \left(\frac{e^{x^2}-e}{2x+2^x} + 1 \right) \right]$	8.) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3^x-3}{x-1} \right)$

1.2.1. Límites de funciones indeterminadas

En algunos casos, al aplicar la sustitución directa para calcular un límite, el resultado puede ser que no existe el límite, o también resultar una indeterminación

1.2.2. Límites de funciones racionales

Cuando la indeterminación se obtiene en una función racional. Es decir, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} =: \frac{0}{0}$$

la indeterminación se evita, factorizando el numerador $P(x)$ y el denominador $Q(x)$, de tal forma que el binomio $(x - a)$ se simplifica así:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)P_1(x)}{(x - a)Q_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Ejercicio 1.4. Observemos el siguiente ejemplo:

EJEMPLOS

1. Determinar el valor de los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x-1)}{(x+2)(x-2)} \text{ Se factoriza.} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-1}{x-2} \quad \text{Se simplifica.} \\ &= \frac{2(-2)-1}{-2-2} = \frac{5}{4} \quad \text{Se calcula el límite.} \end{aligned}$$

$$\text{Finalmente, } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4} = \frac{5}{4}$$

b. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 - 17x + 21}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 - 17x + 21} &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(x+5)}{(2x-3)(x-7)} \text{ Se factoriza.} \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x+5}{2x-3} \quad \text{Se simplifica.} \\ &= \frac{7+5}{2(7)-3} = \frac{12}{11} \end{aligned}$$

Finalmente, $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 - 17x + 21} = \frac{12}{11}$

2. Calcular $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} &\text{ tiene la forma } \frac{0}{0} \quad \text{Se verifica la indeterminación.} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h} \quad \text{Se desarrolla el cubo.} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \quad \text{Se suma.} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \quad \text{Se factoriza.} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \quad \text{Se simplifica.} \\ &= 3x^2 + 3x(0) + (0)^2 \quad \text{Se aplica sustitución directa.} \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2.$$

En este ejemplo, se aprecia que la variable es h y x es un parámetro el cual se considera como una constante.

1.2.3. Límites de funciones radicales

Cuando la indeterminación se obtiene en una función racional radical. Es decir Si $P(x)$ o $Q(x)$ son funciones radicales y se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} =: \frac{0}{0},$$

entonces, es posible eliminar la indeterminación, racionalizando el numerador o el denominador o ambos y por último se simplifica la expresión resultante.

Ejemplo 1.6. Observemos el proceso para realizar, para determinar el siguiente límite;

$$\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+3}{4 - \sqrt{2x+22}} \right)$$

- *Verificar la indeterminación*

$$\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+3}{4 - \sqrt{2x+22}} \right) : \frac{0}{0}$$

- *Racionalizar (Usar el conjugado del denominador)*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+3}{4 - \sqrt{2x+22}} \right) &= \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+3}{4 - \sqrt{2x+22}} \right) \left(\frac{4 + \sqrt{2x+22}}{4 + \sqrt{2x+22}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{(x+3)(4 + \sqrt{2x+22})}{(4)^2 - (\sqrt{2x+22})^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{(x+3)(4 + \sqrt{2x+22})}{16 - (2x+22)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{(x+3)(4 + \sqrt{2x+22})}{16 - 2x - 22} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{(x+3)(4 + \sqrt{2x+22})}{-2x - 6} \right) \end{aligned}$$

■ *Factorizar y simplificar*

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+3}{4 - \sqrt{2x+22}} \right) &= \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{(x+3)(4 + \sqrt{2x+22})}{-2(x+3)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{4 + \sqrt{2x+22}}{-2} \right)\end{aligned}$$

■ *Usar principio de sustitución*

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+3}{4 - \sqrt{2x+22}} \right) &= \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{(4 + \sqrt{2x+22})}{-2} \right) \\ &= \left(\frac{4 + \sqrt{2(-3)+22}}{-2} \right) \\ &= \frac{4 + \sqrt{2(-3)+22}}{-2} \\ &= \frac{4+4}{-2} \\ &= \frac{8}{-2} \\ &= -4\end{aligned}$$

1.2.4. Límites infinitos

En algunos casos, cuando se evalúa el límite de una función , para un valor dado en particular, nos encontramos que la función crece o decrece sin cota, estamos interesados en esta sección a donde tiende ese tipo de límites, si bien sabemos que no existen.

Observación

- Para expresar que los valores de $f(x)$ crece sin cota, cuando x tiende a un valor c , usaremos la siguiente notación.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

- Para expresar que los valores de $f(x)$ decrece sin cota, cuando x tiende a un valor

c , usaremos la siguiente notación.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

- Supongamos que $f(x) = \left(\frac{k}{x^r}\right)$, donde $r \in \mathbb{Z}^+$ y $k \in \mathbb{R}^+$

1. **Caso 1:** si $r = 1$ o r es par entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{k}{x^r}\right) =: \frac{k}{0^+} = \infty$$

2. **Caso 2:** si $r = 1$ o r es impar entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{k}{x^r}\right) =: \frac{k}{0^-} = -\infty$$

- Supongamos que $f(x) = \left(\frac{k}{x-a}\right)$, donde $k \in \mathbb{R}^+$

1. **Caso 2:** Evaluaremos usando el siguiente acuerdo en la notación.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left(\frac{k}{a^+ - a}\right) =: \frac{k}{0^+} = \infty$$

2. **Caso 3:** Evaluaremos usando el siguiente acuerdo en la notación.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \left(\frac{k}{a^- - a}\right) =: \frac{k}{0^-} = -\infty$$

Ejemplo 1.7.

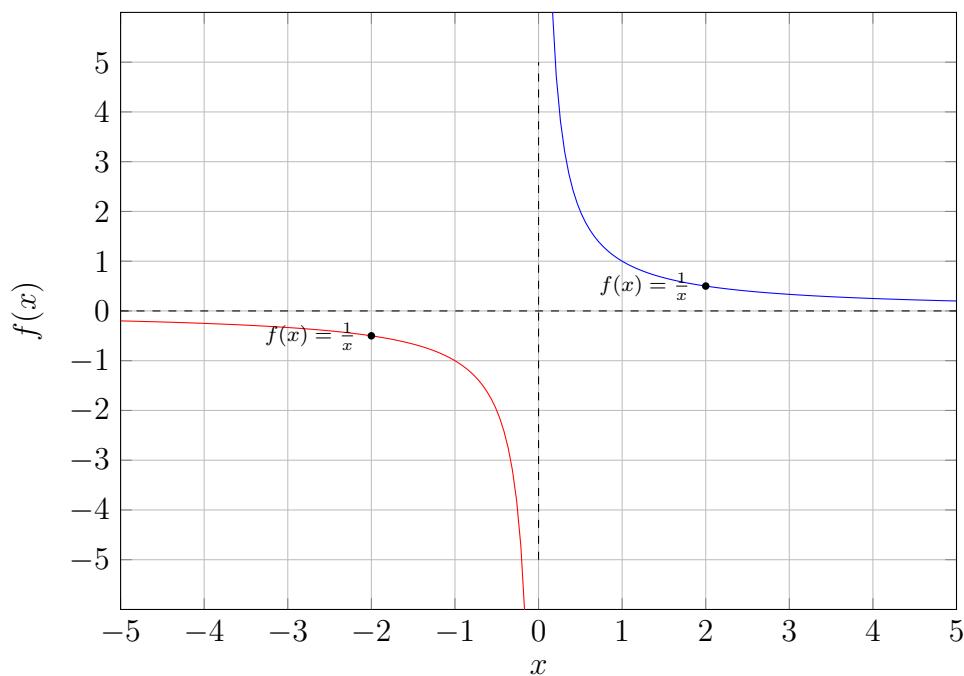
Determinemos los siguientes límites

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{3}{x^2 - 9}\right) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{3}{(3^+)^2 - 9}\right) \\ &= \frac{3}{9^+ - 9} \\ &= \frac{3}{0^+} \\ &= \infty \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{3}{x^2 - 9} \right) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{3}{(3^-)^2 - 9} \right) \\
 &= \frac{3}{9^- - 9} \\
 &= \frac{3}{0^-} \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

Gráficamente podemos observar el comportamiento de la gráfica cuando x tiende a cero.



1.2.5. Límites en el infinito

Si la variable x decrece sin cota (x tiende al infinito) y la función $f(x)$ se aproxima a los valores L y M (o tiende a ∞). Respectivamente, estos límites los podemos escribir de la siguiente forma.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = M; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Ejemplo 1.8. Observemos los siguientes casos para calcular límites en el infinito.

1. Supongamos que $f(x) = \left(\frac{k}{x^r}\right)$, donde $r \in \mathbb{Z}^+$ y $k \in \mathbb{R}$

a) Caso 1:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{x^r}\right) =: \frac{k}{\infty} = 0$$

b) Caso 2:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{k}{x^r}\right) =: \frac{k}{-\infty} = 0$$

2. Supongamos que $f(x) = (kx^r)$, donde $r \in \mathbb{Z}^+$ y $k \in \mathbb{R}^+$

a) si r es par

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (kx^r) = \infty$$

b) si r es impar

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (kx^r) = -\infty$$

Ejemplo 1.9. Determinar siguiente límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} &= \frac{2}{-\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La siguiente figura nos permite visualizar el comportamiento de la gráfica cuando x tiende al infinito (positivo y negativo).

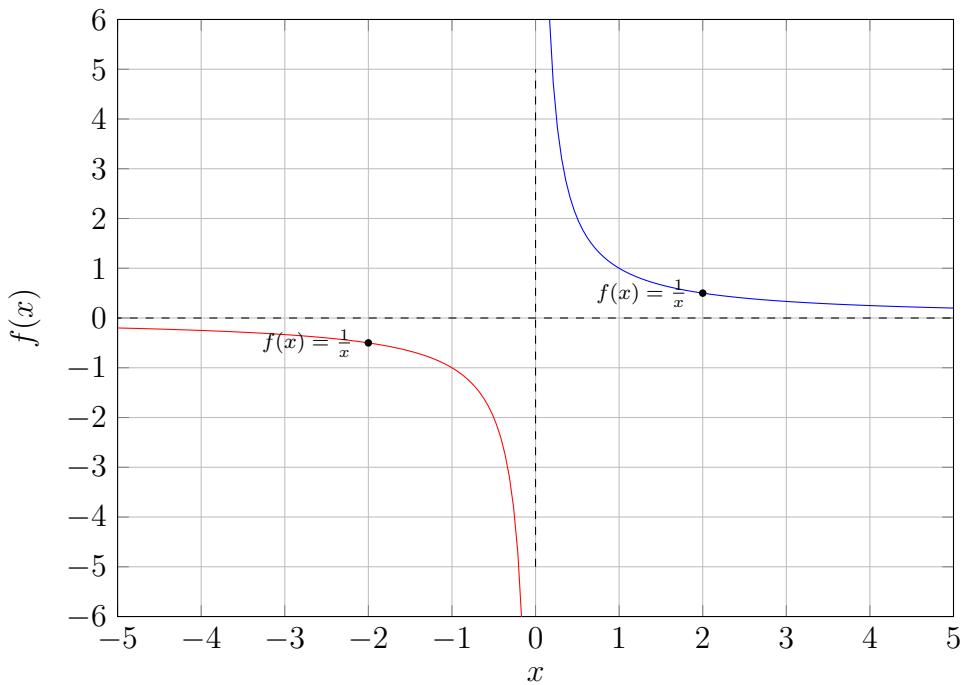


Figura 1.2: Gráfica de funciones con límites cuando x tiende a infinito y menos infinito.

1.2.6. Límites en el infinito de una función racional

Sea $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde el grado $P(x)$ es n y el grado de $Q(x)$ es m entonces para determinar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

tenemos los siguientes 3 casos.

1. **Caso 1:** Si $n > m$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty$$

2. **Caso 2:** Si $n < m$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

3. **Caso 3:** Si $n = m$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{b}$$

donde a es el coeficiente de la expresión de mayor grado x^n en el numerador y b es el coeficiente de la expresión de mayor grado x^m en el denominador

Ejemplo 1.10. Observemos los siguientes ejemplos

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^5 + 2x^2 + 3}{6x^4 - 2x + 3x^2} = \infty$$

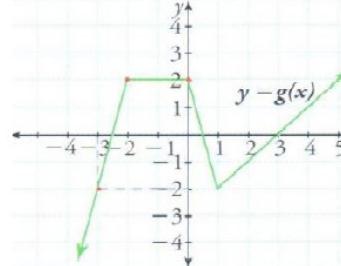
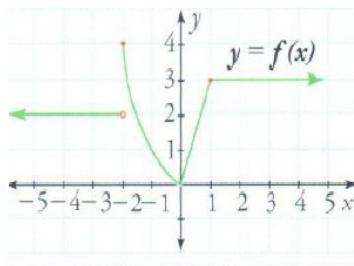
$$\text{b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{2}x^5 - 3x^2 + 3x}{12x^7 - 12x + x^2} = 0$$

$$\text{c)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2}x^3 - 3x^6 + x}{7x^3 - x + 2x^2} = -\frac{3}{7}$$

1.2.7. Taller

1.) Concepto de límites laterales.

a) Determinar el valor de los límites de acuerdo con las siguientes gráficas.



- $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x))$
- $\lim_{x \rightarrow -3^+} (g(x))$
- $\lim_{x \rightarrow -3^-} (f(x))$
- $\lim_{x \rightarrow -3^-} (3f(x) + g(x))$

b) Determinar la existencia o no existencia de los siguientes límites.

Para la función,

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ x^2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

- $\lim_{x \rightarrow -4} (f(x))$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x))$

c) Determinar la existencia o no existencia de los siguientes límites.

Para la función,

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x))$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x))$

2.) Álgebra de límites y principio de sustitución.

- $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 5x + 4)$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^3 - 8}{x + 2} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{3 - 2x^2 + x^2})$

3.) Límites de funciones indeterminadas

a) Funciones racionales.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6x^3 - 7x}{8x^2 + 9x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x^2 - 16}{x^2 - x - 12} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 2x - 3} \right)$

b) Funciones radicales

- $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x - 4}{\sqrt{x + 5} - 3} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1 - \sqrt{x - 1}}{x - 2} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x + 1}} \right)$

4.) Límites infinitos

■ $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 + 1}{x - 5}$

■ $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x + 5}{\sqrt{x^2 - 9}}$

■ $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x + 1}{\sqrt{x - 2}}$

5.) Límites en el infinito

■ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 5x^3 + 12}{x^4 - 8x^5 + 6x}$

■ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 5x^2 + 12}{x^4 - 2x^3 + 6x^2}$

■ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 5x^2 + 12}{4x^5 - 4x^4 + 7x}$

6.) Límites exponenciales y Logarítmicos

■ $\lim_{x \rightarrow \pi} [\sin(x) + \tan(x)]^{-\cos(x)}$

■ $\lim_{x \rightarrow 0} 2e^{x^2 + 2x + 7}$

■ $\lim_{x \rightarrow 0} \log(\sqrt{x^2 - 2x + 10000})$

BIBLIOGRAFÍA

- Santillana. **Los caminos del saber 8 y 9**
- Carlo B. Allendoerfer **Matematicas Universitarias**.
- Jiménez Murillo J. **Matemáticas para la Computación**