Derivadas

Apuntes de clase.

Profesor:
Carlos Andrés Leiton Piamba
Docente Universitario

En esta guía, exploramos el concepto de derivada en profundidad, analizando su definición, propiedades y aplicaciones. Nuestro objetivo es proporcionar a los estudiantes una comprensión sólida y completa de este concepto fundamental.

A lo largo del documento, abordamos una variedad de ejemplos concretos y desafiantes que ilustran cómo las derivadas se utilizan para comprender el comportamiento de las funciones en diversas situaciones. Desde funciones polinómicas simples hasta funciones trigonométricas y exponenciales más complejas, exploramos cómo las derivadas nos permiten analizar el cambio instantáneo y la pendiente de una curva en cualquier punto.

Además, examinamos cómo las derivadas tienen aplicaciones en el mundo real, desde la física y la ingeniería hasta la economía y las ciencias biológicas. Mostramos cómo las derivadas son una herramienta poderosa para modelar y resolver una amplia gama de problemas prácticos, como la optimización de funciones, la predicción de tendencias y la comprensión de fenómenos naturales y sociales.

Popayán, 11 de junio de 2025

Índice general

Capítulo 1

Derivación

El concepto de **derivada de una función** está relacionado a dos problemas que llevan el mismo significado matemático: uno tiene que ver con la pendiente de la recta tangente, y el otro con la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento, de ellos hablaremos más adelante.

1.1. Preliminares

Definición 1.1. ***Derivada de una función***

La derivada de una función $f(x)$, es la función definida por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.1}$$

siempre que el límite exista.

Observaciones:

- La notación $f'(x)$ se lee " efe prima de x".
- Existen otras notaciones para la derivada que son: y' que se lee " derivada de y"; $\frac{dy}{dx}$ que se lee "derivada de y respecto a x.
- El proceso de hallar la derivada de una función se denomina diferenciación.

Ejemplo 1.1. *Determinar la derivada de la siguiente función,* $f(x) = 7x + 6$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[7(x+h)+6] - (7x+6)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{7x + 7h + 6 - 7x - 6}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{7h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 7 \\
&= \lim_{h \to 0} 7
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2. *Determinar la derivada de la siguiente función,* $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\dfrac{1}{x+h}\right] - \dfrac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{x - (x+h)}{(x+h)x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{-h}{(x+h)x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(x+h)x} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h)x} \\
&= \frac{-1}{(x+0)x} \\
f(x) &= -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Por otro lado,

Ejemplo 1.3. *Determinar la derivada de la siguiente función,* $f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left[\sqrt{x+h}\right]-\sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\left[\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right]}{h} \frac{\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]}{\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\left[(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2\right]}{h\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{[x+h-x]}{h\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{h}{h\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

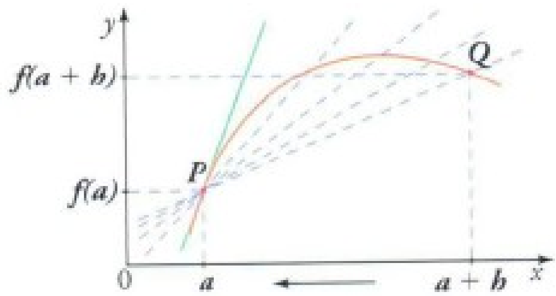
1.1.1. Derivada de una función en un punto

La **derivada de una función** $f(x)$ en un punto $x = a$, se simboliza como $f'(a)$ y está dado por:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{1.2}$$

o lo que es equivalente,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{1.3}$$



1.1.2. Recta tangente y recta normal

- La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$, es

  $$m = f'(a)$$

  siempre que este valor exista y su ecuación es

  $$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

- La recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente que pasa por el punto $(a, f(a))$ es decir

  $$y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$$

Ejemplo 1.4. *Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función*

$$f(x) = \frac{4}{x - 2}$$

en el punto $(4, 2)$*. Luego, realizar la representación gráfica.*

- ***Primero,*** *se halla la pendiente de la recta tangente, así:*

$$
\begin{aligned}
m &= f'(4) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(4+h)-f(4)}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\dfrac{4}{(4+h)-2}-\dfrac{4}{(4)-2}}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\dfrac{4}{h+2}-\dfrac{4}{2}}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\dfrac{4}{h+2}-2}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\dfrac{4-2(2+h)}{h-2}}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{4-4-2h}{(h-2)h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{-2h}{(h-2)h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{-2}{h+2}\right) \\
&= \frac{-2}{2} \\
m &= -1
\end{aligned}
$$

- *La pendiente de la recta tangente en* $(4,2)$ *es* -1*, y por tanto de la recta tangente es:*

$$y = -(x-4)+2$$

es decir,

$$y = -x+6$$

por otro lado, la recta normal tiene pendiente 1*. luego, al remplazar en la ecuación* *de la recta normal se tiene.*

$$y = (x - 4) + 2$$

es decir,

$$y = x - 2$$

Ejercicio 1.1. *Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función f en el punto indicado.*

- $f(x) = (x + 2)^2$ *en* $(0, 4)$
- $f(x) = \sin(x + \pi)$ *en* $(\frac{\pi}{2}, -1)$

1.1.3. Variación instantánea

Si se desea conocer la tasa de variación de una función en un instante dado, se debe considerar h cada vez más pequeño, por tanto, la tasa de variación instantánea de una función en $x = a$ se define como:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \tag{1.4}$$

Ejemplo 1.5. *Una barra de hierro se calienta durante un período determinando, de modo que su temperatura $c(t)$, en grados Celsius, se ha incrementado como una función del tiempo t en minutos, de acuerdo con la función $c(t) = t^3$. Calcular la tasa de variación puntual(tasa instantánea) de la temperatura en relación con el tiempo en $t = 5$.*

$$\begin{aligned}
f'(5) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(5 + h) - f(5)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(5 + h)^3 - 5^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{5^3 + 75h + 15h^2 + h^3 - 5^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{75h + 15h^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 75 + 15h + h^2 \\
&= 75
\end{aligned}$$

Finalmente, la tasa de variación instantánea es 75 grados Celsius por minuto.

1.2. Tabla de derivadas

A patir de la definición de derivada se pueden deducir algunas reglas generales de derivación, la cuales permiten calcular, de una forma más sencilla, la derivada de ciertas funciones.

Función	Derivada
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln(a)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_b(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln(b)}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \sec^2(x)$
$f(x) = \cot(x)$	$f'(x) = -\csc^2(x)$
$f(x) = \sec(x)$	$f'(x) = \sec(x)\tan(x)$
$f(x) = \csc(x)$	$f'(x) = -\csc(x)\cot(x)$
$f(x) = \arcsin(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arc\cos(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
$f(x) = arccot(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2+1}$
$f(x) = arcsec(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$f(x) = arccsc(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

1.3. Reglas de derivación

Regla de la Suma(Resta)

$$\text{Sea } f(x) = g(x) \pm h(x),$$

$$\text{entonces } f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

Ejemplo 1.6. *Sea* $f(x) = x^2 + x + 5$ *entonces,*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)' + (x)' + (5)' \\ &= 2x^1 \quad + 1 \quad + 0 \\ &= 2x \quad + 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2. *Usando las propiedades y reglas de derivación, hallar las siguientes derivadas*

1.) $g(x) = \sin(x) - tan(x) + e^x$

2.) $f(x) = x^5 + 3x + 5$

Regla constante por una función

$$\text{Sea } f(x) = Kg(x),$$

$$\text{entonces } f'(x) = Kg'(x).$$

Ejemplo 1.7. *Sea* $f(x) = 2x^4 - 3\ln(x)$ *entonces,*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2 * 4)x^3 - 3\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 8x^3 - \frac{3}{x} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.3. *Usando las propiedades y reglas de derivación, hallar las siguientes derivadas*

1.) $g(x) = -2\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^3}$

2.) $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$

Regla del producto

$$\text{Sea } f(x) = g(x) \cdot h(x),$$

$$\text{entonces } f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Ejemplo 1.8. *Hallar la derivada de la siguiente función* $f(x) = \sqrt{x}(x^2 + 2x)$*, aplicando la regla del producto*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sqrt{x}\right)' (x^2 + 2x) + \sqrt{x}(x^2 + 2x)' \\
&= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x^2 + 2x) + \sqrt{x}(2x + 2) \\
&= \frac{(x^2 + 2x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}2x + \sqrt{x}2
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.4. *Usando las propiedades y reglas de derivación, hallar las siguientes derivadas*

1.) $f(x) = 16x\left(x + \dfrac{1}{16}\right)$

2.) $g(x) = (-3x + 2)\left(\sqrt{x + 1}\right)$

3.) $g(x) = \left(\dfrac{7}{4}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{3}{4}\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{1}{x^3} + 4\right)$

Regla del cociente

$$\text{Sea } f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \text{ con } h(x) \neq 0,$$

$$\text{entonces } f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Ejemplo 1.9. *Hallar la derivada de la siguiente función* $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\cos(x))'\sin(x) - \cos(x)\,(\sin(x))'}{(\sin(x))^2} \\
&= \frac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x)}{(\sin(x))^2} \\
&= \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} \\
&= \frac{1}{\sin^2(x)}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.10. *Hallar la derivada de la siguiente función* $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x}{x+2}$, *aplicando la regla del producto*

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x^2-8x)'(x+2) - (x^2-8x)(x+2)'}{(x+2)^2} \\
&= \frac{(2x-8)(x+2) - (x^2-8x)(1)}{(x+2)^2} \\
&= \frac{2x^2 - 8x + 4x - 16 - x^2 + 8x}{(x+2)^2} \\
&= \frac{x^2 + 4x - 16}{(x+2)^2}
\end{aligned}
$$

Regla de la cadena

$$
\begin{aligned}
\text{Sea } f(x) &= h(g(x)), \text{ una composición de funciones} \\
\text{entonces } f'(x) &= h'(g(x))g'(x)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.11. *Hallar la derivada de la siguiente función* $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$, *apli-*

cando la regla del producto

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x+1}}\left(x^2-2x+1\right)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x+1}}(2x-2) \\
&= \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+1}} \\
&= \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}}
\end{aligned}
$$

1.4. Taller

1.) Definición de derivadas.

a) Usando la definición de derivada, hallar las derivadas de las siguientes funciones:

- $f(x) = 100$
- $f(x) = \frac{1}{3}x$
- $g(x) = -3x + 2$
- $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$
- $h(x) = \frac{1}{2x}$
- $h(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = \sqrt{x+1}$
- $m(x) = x^3 - 8$

2.) Usando las propiedades y reglas de derivación, hallar las siguientes derivadas.

- $f(x) = 100$
- $f(x) = \frac{1}{3}x$
- $g(x) = -3x + 2$
- $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$
- $h(x) = \frac{1}{2x}$
- $f(x) = \sqrt{x+1}$
- $m(x) = x^3 - 8$

3.) Derivada del Producto-(División) de dos funciones.

- Determinar la derivada usando la regla del producto.
  - $$(x^2 + 1)(x^3 - 1)$$
  - $$f(x) = \sqrt{x}(x^2 + 2x)$$
  - $$f(x) = 16x\left(x + \frac{1}{16}\right)$$

- $$g(x) = (-3x+2)\left(\sqrt{x+1}\right)$$
- $$g(x) = \left(\frac{7}{4}\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{4}\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{x^3} + 4\right)$$
- $$s(x) = (x-3)(x+1)(x^2+2)$$

- Determinar la derivadas usando la regla del cociente.
  - $$\frac{3x^2}{x+2}$$
  - $$f(x) = \frac{x^2+2}{2x}$$
  - $$f(x) = \frac{5x^2-1}{\sqrt[3]{x}}$$
  - $$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{2x-5}$$
  - $$g(x) = \frac{x^2-8x}{x+2}$$
  - $$h(x) = \left(\frac{x^6 + \frac{4}{5}x^5}{6x-2}\right)$$
  - $$f(x) = \frac{x(\sqrt{x})}{2x^3}$$

4.) Encontrar la derivada de la función:

a) $y = (2x-7)^3$

b) $f(x) = x^2(x-2)^4$

c) $g(x) = (9t+2)^{\frac{2}{3}}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2\sqrt{x^4+4}$

e) $h(v) = \left(\dfrac{1-2v}{1+v}\right)^3$

f) $h(t) = \sqrt{\dfrac{1}{t^2-2}}$

g) $y = \sqrt{x^2-2x+1}$

5.) Hallar la derivada de la siguientes funciones(Reducirla hasta su máxima expresión).

- $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x^2+1}$
- $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x}{1-x}}$
- $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}$

Derivadas logarítmicas(Regla de la cadena)

6.) Encontrar la derivada de la función.

a)
$$f(x) = ln([x^2+1][x^3-1])$$

b)
$$f(x) = \log(x^2+2x-10)$$

c)
$$f(x) = \left[\log\left(x - \frac{1}{16}x^2\right)\right]^4$$

d)
$$g(x) = \log(\sqrt{x^2+3x-3})$$

e)
$$g(x) = \left[\log\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right)\right]^3$$

7.) Determinar la derivadas usando la regla del cociente.

- $$\frac{3x^2}{x+2}$$
- $$f(x) = \frac{x^2+2}{2x}$$

- $$f(x) = \frac{5x^2 - 1}{\sqrt[3]{x}}$$
- $$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{2x - 5}$$
- $$g(x) = \frac{x^2 - 8x}{x + 2}$$
- $$h(x) = \left(\frac{x^6 + \frac{4}{5}x^5}{6x - 2}\right)$$
- $$f(x) = \frac{x(\sqrt{x})}{2x^3}$$

8.) Encontrar la derivada de la función

a) $y = e^{-x^4} + 2^{4x}$
b) $f(x) = e^{(x^3 - x)(7 - x)}$
c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2 - 3x}$.

9.) Hallar la derivada de la siguientes (funciones exponenciales-Logarítmicas)

- $y = \frac{e^x}{\ln(x)}$
- $f(x) = \sqrt{\log_2(xe^{3x})}$
- $f(x) = \sqrt[3]{\frac{5x^2}{e^x}}$

Derivadas trigonométricas(Regla de la cadena)

10.) Encontrar la derivada de la función.

a)
$$f(x) = \cos(3x) + 3\sin(x) - \frac{5}{2}\tan(x)$$

b)
$$f(x) = \sec(x^2 + 2x - 10)$$

c)
$$f(x) = \left[\csc\left(x - \frac{1}{16}x^2\right)\right]^4$$

d)
$$g(x) = \cot\left(\sqrt{x^2 + 3x - 3}\right)$$

e)
$$g(x) = \left[\sec\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right)\right]^3$$

f)
$$r(x) = \sec(3x)\cos(3x)$$

g)
$$f(x) = \cos(x)\sin(3 - x)$$

Derivadas de funciones inversas-trigonométricas(Regla de la cadena)

11.) Encontrar la derivada de la función.

a)
$$h(x) = 3\sin^{-1}(x) - 2\cos^{-1}(x) - \frac{3}{2}\cos^{-1}(x)$$

b)
$$f(x) = \arctan(3x - 2)$$

c)
$$f(x) = \arc\cos(2x - 2)$$

d)
$$f(x) = \left(\arcsin(2x) - 3x^2\right)^4$$

e)
$$g(x) = \csc^{-1}(x)\sec^{-1}(x)$$

f)
$$g(x) = \left[\log\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right)\right]^3$$

g)
$$h(x) = 3\sin^{-1}(x) - 2\cos^{-1}(x) - \frac{3}{2}\cos^{-1}(x)$$

Bibliografía

- Santillana. **Los caminos del saber 8 y 9**
- Carlo B. Allendoerfer **Matematicas Universitarias**.
- Jiménez Murillo J. **Matemáticas para la Computación**