Integrales

Apuntes de clase.

Profesor:
Carlos Andrés Leiton Piamba
Docente Universitario

En esta guía, exploraremos el mundo de las integrales. Desde los conceptos básicos hasta las aplicaciones en economía. Comenzaremos introduciendo el concepto de antiderivada, pasando por la definición de de integral (indefinida)definida. Luego, nos adentraremos en las técnicas de integración, como el método de integración por partes como el método de sustitución , que nos permiten resolver una amplia gama de problemas, para finalizar en interpretación geométrica como el área bajo una curva. Además, exploraremos las aplicaciones de las integrales en diversas áreas, desde la física y la ingeniería hasta la economía y las ciencias biológicas.

A lo largo de la guía, encontrarás ejemplos detallados, ejercicios prácticos y consejos útiles que te ayudarán a fortalecer tu comprensión y habilidades en el cálculo integral. ¡Esperamos que esta guía sea una herramienta valiosa en tu viaje hacia el dominio del cálculo integral!

Popayán, 5 de noviembre de 2024

Índice general

Capítulo 1

La integral

1.1. Función Antiderivada e integral indefinida

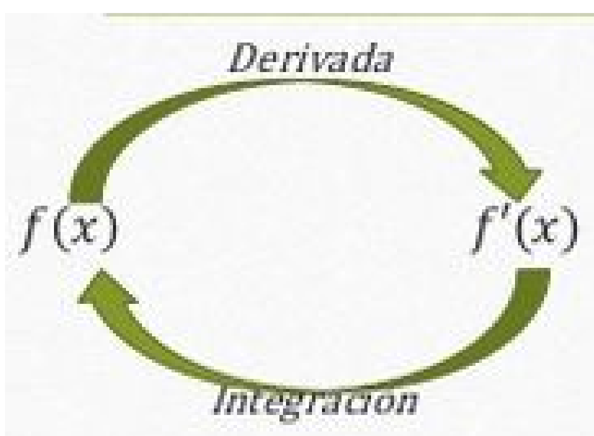
En el curso de calculo diferencial, se estudia el siguiente problema.

Dada un función $F(x)$, hallar la derivada, es decir, la función

$$f(x) = F'(x) \tag{1.1}$$

En este capítulo consideramos el problema inverso, dada una función $f(x)$, hallar una función $F(x)$ cuya derivada sea igual a $f(x)$, es decir

$$F'(x) = f(x)$$



Ejemplo 1.1. *Sea $F(x) = \ln(x)$, la derivada de la función $F(x)$, la cual puede ser denotada como $F'(x) = \frac{d}{dx}(F(x))$ esta dada por.*

$$F'(x) = \frac{1}{x}$$

y denotemos a $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Definición 1.1. *Si en todos los puntos del segmento [a,b] se verifica la ecuación*

$$F'(x) = f(x) \tag{1.2}$$

La función $F(x)$ se llama antiderivada de la función $f(x)$ sobre el segmento [a,b].

Ejemplo 1.2. *Hallar la antiderivada de la función $f(x) = x^2$.*

De la definición de antiderivada se deduce que,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^{2+1}}{3} \\ &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

dado que,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{3x^2}{3} \\ &= x^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1. *Hallar una función antiderivada $F(x)$ de la función $f(x) = cos(x)$.*

Ejercicio 1.2. *Demostrar que la función dada por,*

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

es una antiderivada de la función $f(x) = x^n$, ¿ Existe otra antiderivada?.

Si existe una antiderivada para una función cualesquiera, esta no es única.

Observemos, en el **ejemplo 1.2**

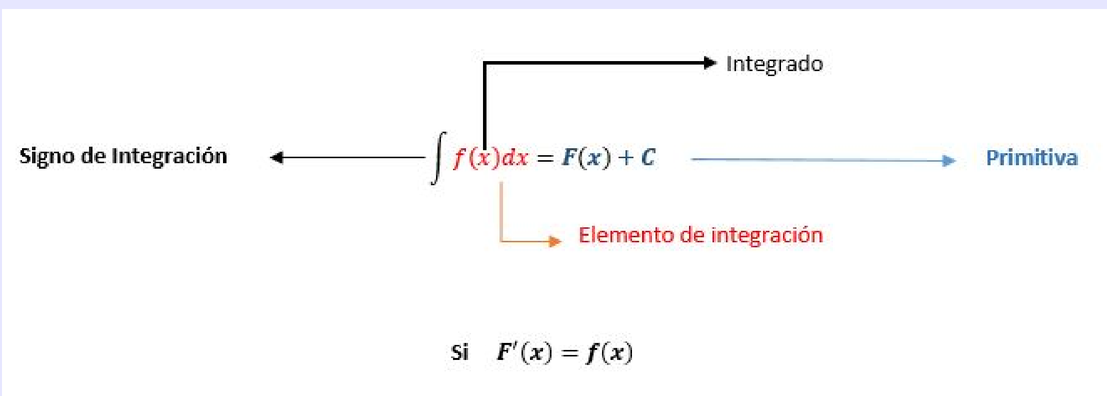
$F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 4$ es una antiderivada de $f(x) = x^2$

$F(x) = \dfrac{x^3}{3} + sen(\frac{\pi}{2} + 2\pi)$ es una antiderivada de $f(x) = x^2$

En general $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$, es una antiderivada de la función $f(x) = x^2$ donde C es una constante cualesquiera, en efecto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{d}{dx}(C). \\ &= \frac{3x^2}{3} + 0 \\ &= x^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Definición 1.2. *Si $F(x)$ es una función antiderivada de $f(x)$, la expresión $F(x) + C$ se llama integral indefinida de la función $f(x)$ y se designa mediante el símbolo $\int f(x)\,dx$. Es decir, según la definición se tiene,*



Así, la integral indefinida representa una familia de funciones de la forma,

$$y(x) = F(x) + C$$

Ejemplo 1.3. *Hallar la integral indefinida de* $cos(x)$*, esto es:*

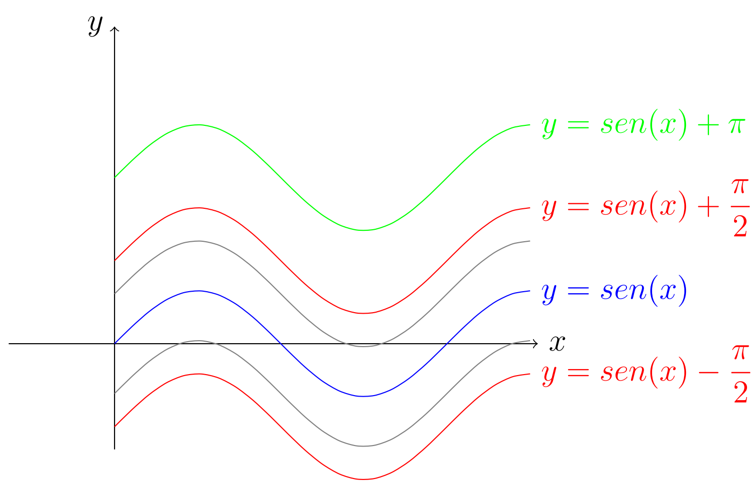
$$\int cos(x)dx = sen(x) + C, \quad con \ C \in \mathbb{R}$$

Es fácil verificar que la antiderivada es $F(x) = sen(x)$, dado que $F'(x) = cos(x)$.

Observación

1. La familia de funciones que representa la integral indefinida $y = F(x) + C$ con $C \in \mathbb{R}$ es un conjunto de curvas, cada una de las cuales se obtiene, mediante el desplazamiento de una curva paralelamente a sí misma hacia arriba o abajo, es decir, a lo largo del eje y.

2. En el **ejemplo1.3**, se tiene que la familia de funciones $y = sen(x) + C$ en el intervalo $(0, \infty)$ esta dada como sigue,



¿Toda función $f(x)$ tiene función antiderivada (y por consiguiente integral indefinida)? Respuesta. no,

Ejercicio 1.3. *Encontrar una función que no tenga primitiva(antiderivada).*

Taller De Refuerzo

1. Hallar la integral indefinida para cada uno de los siguientes ítem.

   a) $\displaystyle\int dx$

   b) $\displaystyle\int y^2\, dx$

   c) $\displaystyle\int t^2\, dt$

   d) $\displaystyle\int \sin t\, dt$

   e) $\displaystyle\int \frac{x^2+8}{x^2}\, dx$

   f) $\displaystyle\int e^t\, dt$

   g) $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx$

   h) $\displaystyle\int \tan x\, dx$

Como ya se había mencionado la diferenciación y la integración son, en cierto sentido, operaciones inversas.

1. $\displaystyle\int F'(x)\, dx = F(x) + C$. Una antiderivada de la derivada de una función es, esa función más una constante.
2. $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\, dx\right) = f(x)$. La derivada de una antiderivada de una función es esa función.

1.1.1. Propiedades de la integral indefinida

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones integrables, k una constante arbitraria.

1. $\displaystyle\int 0\,dx = C \qquad C$ es una constante
2. $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Ejercicio 1.4. *Determinar las siguientes integrales indefinidas*

1. $\displaystyle\int \left(4x - \frac{2}{x} + 5\sin(x)\right) dx$
2. $\displaystyle\int \left(\frac{6x^3 - 5}{x}\right) dx$
3. $\displaystyle\int \left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right) dx$
4. $\displaystyle\int \left(\frac{r^2 - 10r + 4}{r^3}\right) dr$
5. $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

Durante el cálculo de las integrales indefinidas es útil tener en cuenta las reglas siguientes:

Si

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

entonces,

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Ejercicio 1.5. *Calcular las siguientes integrales.*

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x+3}\, dx = \ln(x+3) + C$
2. $\displaystyle\int cos(7x)\, dx = \frac{1}{7} sen(7x) + C$
3. $\displaystyle\int sen(2x-6)\, dx = -\frac{1}{2} cos(2x-6) + C$
4. $\displaystyle\int e^{(2x+3)}\, dx = \frac{1}{2} e^{(2x+3)} + C$
5. $\displaystyle\int \sec^2(\pi x+3)\, dx = \frac{1}{\pi} \tan(\pi x+3) + C$

1.2. Integral Definida

Al resolver problemas de cálculo, uno de los conceptos fundamentales que encontramos es el de la integral definida. La integral definida nos permite calcular el área bajo una curva en un intervalo dado, así como realizar diversas aplicaciones en física, ingeniería, economía y otras áreas.

Antes de profundizar en las propiedades de la integral definida, es importante comprender su significado y su relación con el concepto de función integrable. En esta sección, exploraremos algunas propiedades clave que nos ayudarán a manipular y entender mejor las integrales definidas en diferentes contextos.

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y sea $F(x)$ cualquier función primitiva de $f(x)$, es decir, una función tal que $F'(x) = f(x)$ para todo x en $[a, b]$. Entonces, la integral definida de $f(x)$ de a a b es igual a $F(b)$ menos $F(a)$, es decir:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{1.3}$$

El anterior enunciado se le conoce como el **Teorema Fundamental del cálculo.**

A continuación, presentamos algunas propiedades esenciales de la integral definida que nos permiten simplificar cálculos y resolver problemas con mayor éxito.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones integrables, k una constante arbitraria, y a y b números reales.

1. $\displaystyle\int_a^b 0\,dx = 0$

2. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

3. $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\;dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

Otras propiedades que es importante tener en consideración son las siguientes:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones integrables, y a, b y c números reales.

1. **Igualdad de los límites de integración:**

   $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

2. **inversión de los límites de integración:**

   $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

3. **Propiedad aditiva del intervalo:**

   $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

4. **Propiedad de la inmersión:**

   Si $f(x) \leq g(x)$ para todo x en el intervalo $[a, b]$, entonces

   $$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

1.3. Técnicas de integración

1.3.1. Integración por sustitución

En esta sección se analiza la "reversa de la regla de la cadena". En este análisis, el concepto de diferencial de una función desempeña un papel importante.

Recuerde que si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces su diferencial es

$$du = g'(x)dx.$$

Ejemplo 1.4. *Sea* $u = \sqrt{z^2+4}$ *entonces aplicando regla de la cadena se tiene que,*

$$du = \frac{z}{\sqrt{z^2+4}}dz$$

Ejemplo 1.5. *Sea* $u = 4x^2 + 3$ *entonces,*

$$\begin{aligned} du &= 8xdx \\ \frac{du}{8} &= xdx \end{aligned}$$

Observación

Sea $H(x) = F(g(x))$ una función antiderivada de de $h(x)$ y F una antiderivada de la función f, Nosotros vamos a suponer sin perdida de generalidad que están definidas en el intervalo I, además si g es diferenciable en I, se puede derivar la función H aplicando regla de la cadena, esto es:

$$\begin{aligned} H'(x) &= F'(g(x))g'(x), \quad && \text{dado que } F \text{ es antiderivada de } f, \\ &= f(g(x))g'(x), && \text{dado que } H \text{ es antiderivada de } h, \\ &= h(x). \end{aligned}$$

Ahora, nosotros podemos ver la equivalencia entre las siguientes integrales, es decir

$$\int h(x)\, dx = H(x) + C$$

es de la siguiente forma,

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

La siguiente propiedad nos formaliza esta observación.

Propiedad Si $u = g(x)$ es una función diferenciable cuyo rango es un intervalo I, f es una función continua sobre I y F es una antiderivada de f sobre I, se desea calcular la integral

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx.$$

se sugiere hacer un cambio de variable $u = g(x)$, de la siguiente manera

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = \int f(u)\, du = F(u) + C = F(g(x)) + C.$$

Directrices para efectuar una sustitución u:

1. En la integral $\displaystyle\int f(g(x))g'(x)\, dx$ identifique las funciones $g(x)$ y $g'(x)dx$.
2. Exprese la integral ***totalmente*** en términos del símbolo u, al sustituir u y du por $g(x)$ y $g'(x)dx$ respectivamente. En su sustitución no debe haber variables x.
3. Efectúe la integración con respecto a la variable u.
4. Finalmente, vuelva a sustituir $g(x)$ por el símbolo u.

Ejemplo 1.6. *Usar el método de sustitución para calcular la siguiente integral indefinida.*

$$\int \frac{x}{(4x^2+3)^6}\, dx$$

Usemos la siguiente sustitución $u = 4x^2 + 3$ *entonces* $du = 8xdx$*, observemos que si pasamos a dividir el 8, esto* $\dfrac{du}{8} = xdx$*, se obtiene la parte del numerador.*

De ahí que, al hacer la sustitución $u = 4x^2 + 3$ *y* $\dfrac{du}{8} = xdx$ *se tiene lo siguiente,*

$$\int \frac{x}{(4x^2+3)^6}\,dx = \int \frac{1}{8u^6}\,du.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{8u^6}\,du &= \frac{1}{8}\int \frac{1}{u^6}\,du \\ &= \frac{1}{8}\int u^{-6}\,du \\ &= \frac{1}{8}\left[\frac{u^{-5}}{-5} + C\right] \\ &= \frac{1}{8}\left[C - \frac{1}{5u^5}\right]\end{aligned}$$

Se hace el remplazo,

$$\int \frac{x}{(4x^2+3)^6}\,dx = \frac{1}{8}\left[C - \frac{1}{5(4x^2+3)^5}\right]$$

Ejemplo 1.7. *Usar el método de sustitución para calcular la siguiente integral indefinida.*

$$\int \tan(x)\sec^2(x)\,dx$$

Usemos la siguiente sustitución $u = \tan(x)$ *entonces* $du = \sec^2(x)dx$*.*

De ahí que, al hacer la sustitución $u = \tan(x)$ *y* $du = \sec^2(x)dx$*. se tiene lo siguiente,*

$$\int \tan(x)\sec^2(x)\,dx = \int u\,du.$$

Luego,

$$\int u\, du \;=\; \frac{u^2}{2} + C$$

Luego se hace el remplazo $\tan(x) = u$ *y se concluye.*

$$\int \tan(x)\sec^2(x)\, dx \;=\; \frac{\tan^2(x)}{2} + C$$

Ejercicio 1.6. *Hallar las siguientes integrales usando la técnica de integración (sustitución).*

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(2x-5)^{11}}\, dx$
2. $\displaystyle\int_0^2 cos(\pi x)\, dx$
3. $\displaystyle\int_\pi^\pi sen(x)\, dx$
4. $\displaystyle\int cos^4(x) sen(x)\, dx$
5. $\displaystyle\int \frac{e^{4/x}}{x^2}\, dx$
6. $\displaystyle\int \frac{(arctan(x))^2}{x^2+1}\, dx$
7. $\displaystyle\int \frac{-2x}{\sqrt{100-x^2}}\, dx$

1.3.2. Integración por partes

En esta sección desarrollaremos una fórmula importante que puede usarse a menudo para integrar el producto de dos funciones. Para aplicar la fórmula es necesario identificar una de las funciones en el producto como una diferencial.

Integración de productos. Puesto que deseamos integrar un producto, parece razonable empezar con la regla de diferenciación del producto. Si $u = f(x)$ y $y = g(x)$ son funciones diferenciables, entonces la derivada de $f(x)g(x)$ es

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Integrando en ambos lados respecto a x se tiene que

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx$$

Equivalentemente,

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

La fórmula anterior suele escribirse en términos de las diferenciales $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

La expresión anterior se denomina **integración por partes**. Una forma de recordar la formula es con una particular frase:

"*u*n *d*ía *v*i *u*na *v*aca *v*estida *d*e *u*niforme"

Ahora nuestro interés es determinar quien es u y dv que se encuentran en la parte izquierda de la formula.

Ejemplo 1.8. *El siguiente ejemplo determinemos quien es u y dv.*

a) $\int \arctan t\,dt$

b) $\int xe^{-x/2}\,dx$

c) $\int e^x \cos x\,dx$

¿Cómo elegir una sustitución adecuada?

Bien, la respuesta a esta pregunta no es sencilla, pero puede utilizar una estrategia, que funciona la mayoría de las veces.

ILATE

- I: funciones inversas.
- L: funciones logarítmicas.
- A: funciones algebraicas.
- T: funciones trigonométricas.
- E: funciones exponenciales.

Ejemplos:

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$
2. $\displaystyle\int x^3 \ln x\; dx$
3. $\displaystyle\int x \arctan x\; dx$

Integraciones sucesivas: Algunas veces es necesario aplicar el método de integración por partes varias veces. Esto suele pasar en integrales de la forma:

$$\int p(x)\sin kx\; dx, \qquad \int p(x)\cos kx\; dx, \qquad \int p(x)e^{kt}\; dx \qquad \text{y} \qquad \int x^k(\ln x)^k\; dx$$

Ejemplos:

1. $\displaystyle\int x^2 \cos x \, dx$

2. $\displaystyle\int x^4 e^{-2x} \, dx$

Despeje de integrales: Para ciertas integrales, una o más aplicaciones de la integración por partes puede resultar en una situación en que la integral original aparece en el miembro derecho. En este caso el problema de evaluar la integral se completa al despejar la integral original. El siguiente ejemplo ilustra la técnica.

Ejemplo:

1. $\displaystyle\int e^{2x} \cos 3x \, dx$

Ejercicios

1. Use integración por partes para evaluar

   a) $\displaystyle\int x\sqrt{x+3} \, dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{\ln t}{t^2} \, dt$

   c) $\displaystyle\int t e^{3t} \, dt$

   d) $\displaystyle\int x^2 \sin x \, dx$

   e) $\displaystyle\int e^z \sin(z) \, dz$

   f) $\displaystyle\int e^{-2t} \cos t \, dt$

Capítulo 2

Aplicaciones de la integral definida

En la sección anterior de vio que si una función toma tanto valores positivos como negativos sobre un intervalo cerrado, entonces la integral definida en ese intervalo no representa el área bajo la gráfica de f sobre el intervalo. En esta sección investigaremos dos problemas de área:

- Encontrar el **área total** de una región acotada por las gráficas de f y el eje x sobre un intervalo $[a, b]$.
- Encontrar el **área de la región** acotada entre dos gráficas sobre un intervalo $[a, b]$.

2.1. Área de una región plana

2.1.1. Área Total

El **área total** es la área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ como lo indica la en la **Figura (2.1)**.

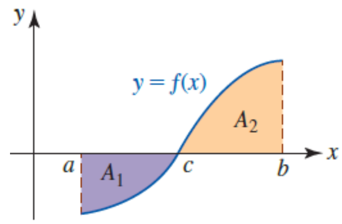


Figura 2.1: La integral definida de f sobre $[a, b]$ no es área

Para este propósito, consideramos el valor absoluto de la función f, es decir $y = |f(x)|$. La gráfica de esta nueva función es:

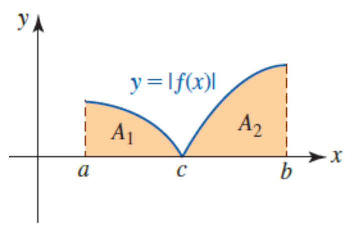


Figura 2.2: La integral definida de $|f|$ sobre $[a, b]$ será el **Área total**

Usando la propiedad de valor absoluto y de integral definida, podemos calcular el **Área neta** de la función de la **Figura (2.1)** de la siguiente manera:

$$A_T = \int_a^b |f(x)|\, dx = \int_a^c -f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Definición 6.2.1 Área total

Si $y = f(x)$ es continua sobre $[a, b]$, entonces el **área total** A acotada por su gráfica y el eje x sobre el intervalo está dada por

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx. \qquad (2)$$

Ejemplos:

1. Hallar el área neta de la figura acotada por la gráfica $y = x^3$ y el eje x sobre $[-1, 2]$.

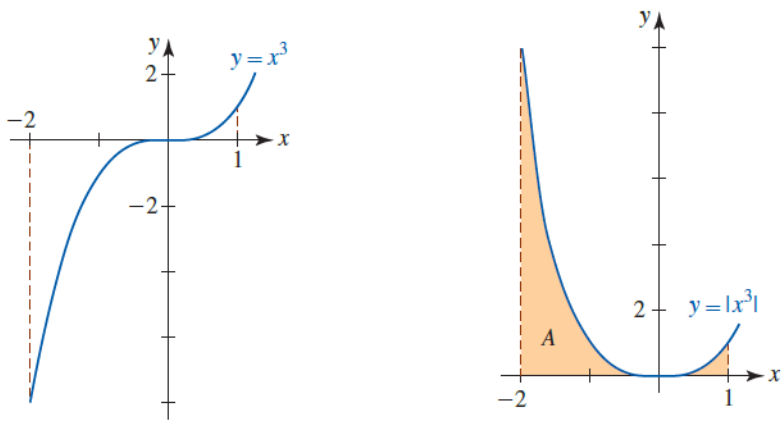


Figura 2.3: gráfica de la función $y = x^3$

2. Encontrar el área total acotada por la gráfica de $y = x^2 + 2x$ y el eje y sobre el intervalo $[-2, 2]$.

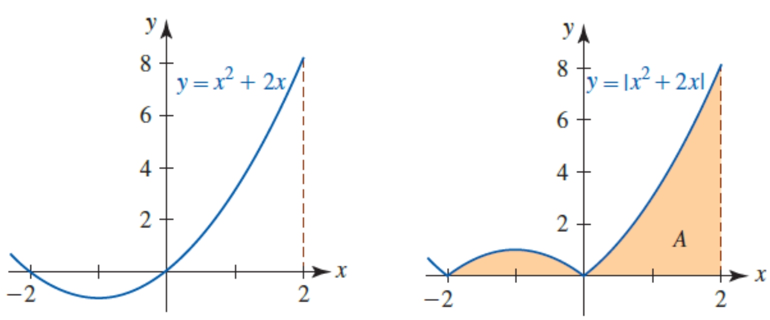


Figura 2.4: gráfica de la función $y = x^2 + 2x$

2.1.2. Área entre dos curvas

En esta ocasión, deseamos calcular el área de la región acotada entre dos gráficas de funciones f y g, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$, como se indica en la figura (2.5)

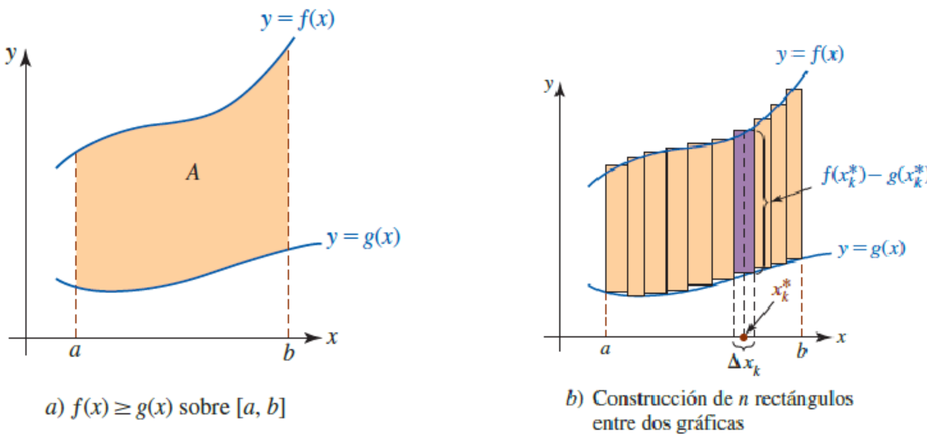


Figura 2.5: Área A acotada entre dos gráficas

Usando la construcción de integral definida se encuentra que el Área, A, se puede calcular mediante la integral:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

En general, para calcular el área entre dos curvas, sin importar si las funciones tienen cambios de signos positivos y negativos, es dado por la siguiente definición:

Definición 6.2.2 Área acotada por dos gráficas

Si f y g son funciones continuas sobre un intervalo $[a, b]$, entonces el **área A de la región** acotada por sus gráficas sobre el intervalo está dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx. \qquad (4)$$

Nota: Una forma práctica para quitar el valor absoluto es colocar en el integrando:

$$\boxed{A = \int_a^b [(\text{gráfica superior}) - (\text{gráfica inferior})]\, dx}$$

Por ejemplo, si se quiere calcular el área A como lo indica la Figura (2.6) se procede de la siguiente manera:

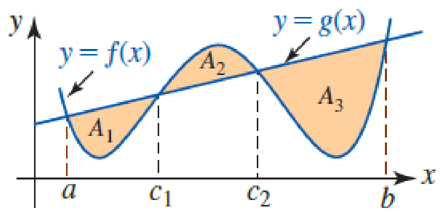


Figura 2.6: Las gráficas de f y g se cortan entre sí sobre $[a, b]$

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \\ &= \int_a^{c_1} |f(x) - g(x)|\, dx + \int_{c_1}^{c_2} |f(x) - g(x)|\, dx + \int_{c_2}^{b} |f(x) - g(x)|\, dx \\ &= \int_a^{c_1} \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ es la gráfica superior}}}{[g(x) - f(x)]}\, dx + \int_{c_1}^{c_2} \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ es la gráfica superior}}}{[f(x) - g(x)]}\, dx + \int_{c_2}^{b} \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ es la gráfica superior}}}{[g(x) - f(x)]}\, dx. \end{aligned}$$

Ejemplos:

1. Encuentre el área acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$.

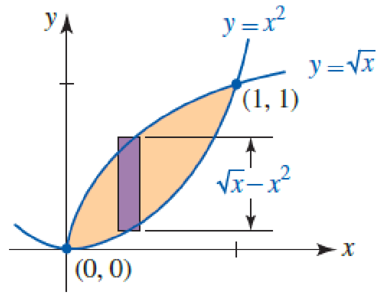


Figura 2.7: Área del ejemplo 1

2. Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 2x$ y $y = -x + 4$ sobre el intervalo $[-4, 2]$.

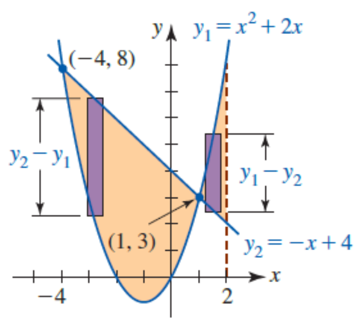


Figura 2.8: Área en el ejemplo 2

3. Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de $y^2 = 1 - x$ y $2y = x + 2$.

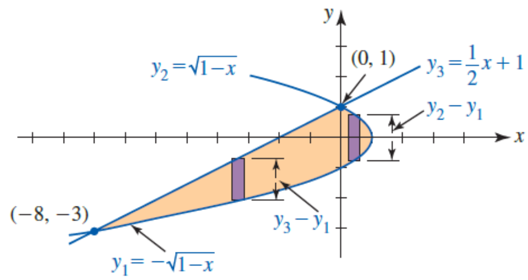


Figura 2.9: Área del ejemplo 3

4. **Solución alternativa al ejemplo 3**. La necesidad de usar dos integrales en el ejemplo 3 para encontrar el área se evita al construir rectángulos horizontales y usar a y como variable independiente. Si definimos $x_2 = 1 - y^2$ y $x_1 = 2y - 2$ entonces, como se muestra en la Figura (2.10), el área del elemento horizontal es

$$A_k = [(\text{gráfica derecha}) - (\text{gráfica izquierda})] \cdot \textit{ancho} \tag{2.1}$$

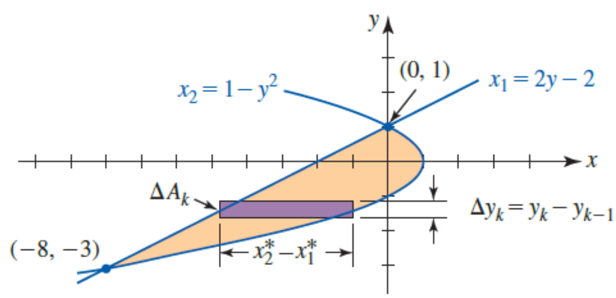


Figura 2.10

Es decir, podemos calcular el área entre las dos curvas utilizando la formula:

$$\boxed{A = \int_c^d [(\text{gráfica derecha}) - (\text{gráfica izquierda})]\, dy}$$

Bibliografía

- Santillana. **Los caminos del saber 8 y 9**
- Carlo B. Allendoerfer **Matematicas Universitarias**.
- Jiménez Murillo J. **Matemáticas para la Computación**