Integrales

Apuntes de clase.

Profesor:
Carlos Andrés Leiton Piamba
Docente Universitario

En esta guía, exploraremos el mundo de las integrales. Desde los conceptos básicos hasta las aplicaciones en economía. Comenzaremos introduciendo el concepto de antiderivada, pasando por la definición de de integral (indefinida)definida. Luego, nos adentraremos en las técnicas de integración, como el método de integración por partes como el método de sustitución , que nos permiten resolver una amplia gama de problemas, para finalizar en interpretación geométrica como el área bajo una curva. Además, exploraremos las aplicaciones de las integrales en diversas áreas, desde la física y la ingeniería hasta la economía y las ciencias biológicas.

A lo largo de la guía, encontrarás ejemplos detallados, ejercicios prácticos y consejos útiles que te ayudarán a fortalecer tu comprensión y habilidades en el cálculo integral. ¡Esperamos que esta guía sea una herramienta valiosa en tu viaje hacia el dominio del cálculo integral!

Popayán, 8 de abril de 2025

Índice general

0.1. La integral

0.1.1. Función Antiderivada e integral indefinida

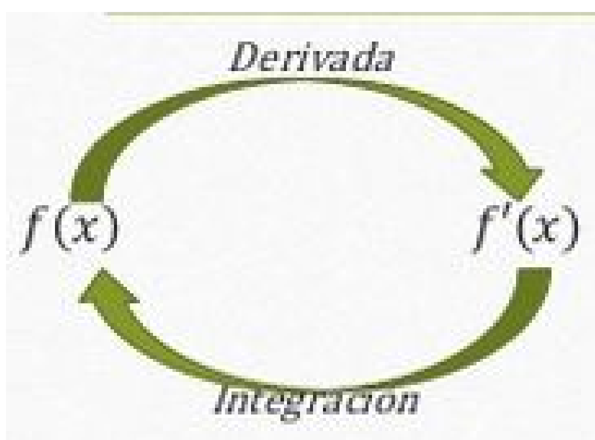
En el curso de calculo diferencial, se estudia el siguiente problema.

Dada un función $F(x)$, hallar la derivada, es decir, la función

$$f(x) = F'(x) \tag{1}$$

En este capítulo consideramos el problema inverso, dada una función $f(x)$, hallar una función $F(x)$ cuya derivada sea igual a $f(x)$, es decir

$$F'(x) = f(x)$$



Ejemplo 0.1. *Sea $F(x) = \ln(x)$, la derivada de la función $F(x)$, la cual puede ser denotada como $F'(x) = \frac{d}{dx}(F(x))$ esta dada por.*

$$F'(x) = \frac{1}{x}$$

y denotemos a $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Definición 0.1. *Si en todos los puntos del segmento [a,b] se verifica la ecuación*

$$F'(x) = f(x) \tag{2}$$

La función $F(x)$ se llama antiderivada de la función $f(x)$ sobre el segmento [a,b].

Ejemplo 0.2. *Hallar la antiderivada de la función $f(x) = x^2$.*

De la definición de antiderivada se deduce que,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^{2+1}}{3} \\ &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

dado que,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{3x^2}{3} \\ &= x^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Ejercicio 0.1. *Hallar una función antiderivada $F(x)$ de la función $f(x) = cos(x)$.*

Ejercicio 0.2. *Demostrar que la función dada por,*

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

es una antiderivada de la función $f(x) = x^n$, ¿ Existe otra antiderivada?.

Si existe una antiderivada para una función cualesquiera, esta no es única.

Observemos, en el **ejemplo 0.2**

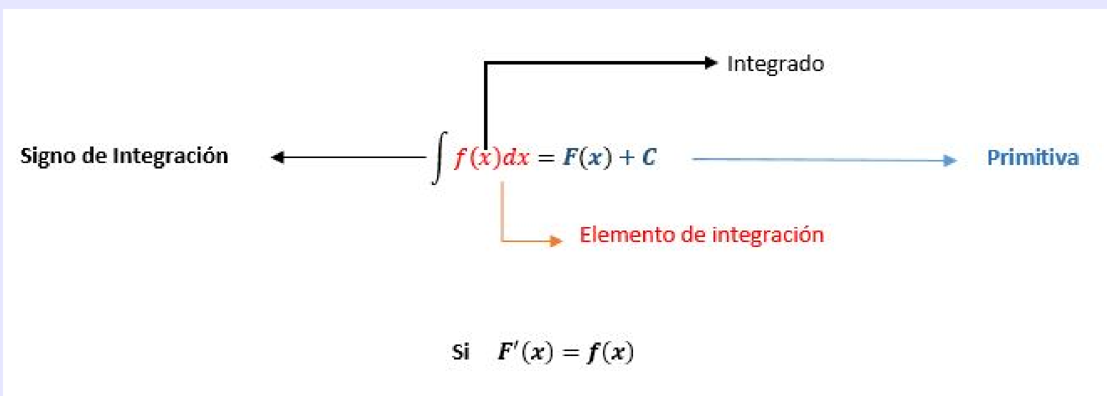
$F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 4$ es una antiderivada de $f(x) = x^2$

$F(x) = \dfrac{x^3}{3} + sen(\frac{\pi}{2} + 2\pi)$ es una antiderivada de $f(x) = x^2$

En general $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$, es una antiderivada de la función $f(x) = x^2$ donde C es una constante cualesquiera, en efecto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{d}{dx}(C). \\ &= \frac{3x^2}{3} + 0 \\ &= x^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Definición 0.2. *Si $F(x)$ es una función antiderivada de $f(x)$, la expresión $F(x) + C$ se llama integral indefinida de la función $f(x)$ y se designa mediante el símbolo $\int f(x)\, dx$. Es decir, según la definición se tiene,*



Así, la integral indefinida representa una familia de funciones de la forma,

$$y(x) = F(x) + C$$

Ejemplo 0.3. *Hallar la integral indefinida de $cos(x)$, esto es:*

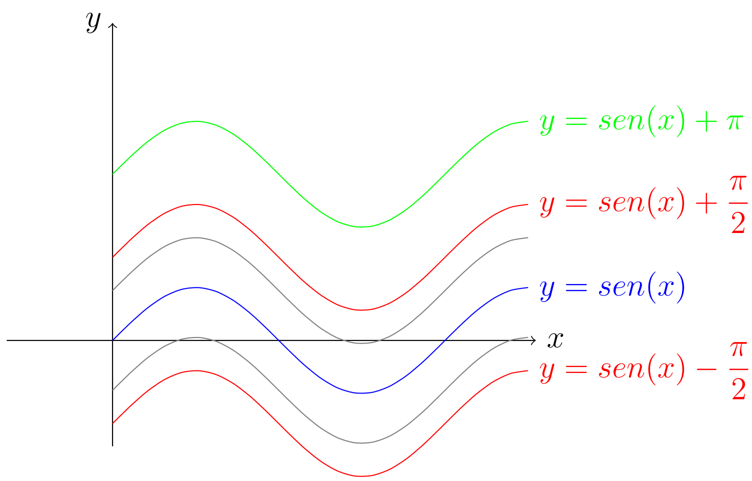
$$\int cos(x)dx = sen(x) + C, \quad con\ \ C \in \mathbb{R}$$

Es fácil verificar que la antiderivada es $F(x) = sen(x)$, dado que $F'(x) = cos(x)$.

Observación

1. La familia de funciones que representa la integral indefinida $y = F(x) + C$ con $C \in \mathbb{R}$ es un conjunto de curvas, cada una de las cuales se obtiene, mediante el desplazamiento de una curva paralelamente a sí misma hacia arriba o abajo, es decir, a lo largo del eje y.

2. En el **ejemplo0.3**, se tiene que la familia de funciones $y = sen(x) + C$ en el intervalo $(0, \infty)$ esta dada como sigue,



¿Toda función $f(x)$ tiene función antiderivada (y por consiguiente integral indefinida)? Respuesta. no,

Ejercicio 0.3. *Encontrar una función que no tenga primitiva(antiderivada).*

Taller De Refuerzo

1. Hallar la integral indefinida para cada uno de los siguientes ítem.

    a) $\displaystyle\int \, dx$

    b) $\displaystyle\int y^2 \, dx$

    c) $\displaystyle\int t^2 \, dt$

    d) $\displaystyle\int \sin t \, dt$

    e) $\displaystyle\int \frac{x^2+8}{x^2} \, dx$

    f) $\displaystyle\int e^t \, dt$

    g) $\displaystyle\int \sin^2 x \, dx$

    h) $\displaystyle\int \tan x \, dx$

Como ya se había mencionado la diferenciación y la integración son, en cierto sentido, operaciones inversas.

1. $\displaystyle\int F'(x) \, dx = F(x) + C$. Una antiderivada de la derivada de una función es, esa función más una constante.
2. $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int f(x) \, dx\right) = f(x)$. La derivada de una antiderivada de una función es esa función.

0.1.2. Propiedades de la integral indefinida

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones integrables, k una constante arbitraria.

1. $\displaystyle\int 0\,dx = C \qquad C$ es una constante

2. $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

3. $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Ejercicio 0.4. *Determinar las siguientes integrales indefinidas*

1. $\displaystyle\int \left(4x - \frac{2}{x} + 5\sin(x)\right)dx$

2. $\displaystyle\int \left(\frac{6x^3-5}{x}\right)dx$

3. $\displaystyle\int \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)dx$

4. $\displaystyle\int \left(\frac{r^2-10r+4}{r^3}\right)dr$

5. $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

Durante el cálculo de las integrales indefinidas es útil tener en cuenta las reglas siguientes:

Si

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

entonces,

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Ejercicio 0.5. *Calcular las siguientes integrales.*

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x+3}\,dx = \ln(x+3) + C$
2. $\displaystyle\int cos(7x)\,dx = \frac{1}{7}sen(7x) + C$
3. $\displaystyle\int sen(2x-6)\,dx = -\frac{1}{2}cos(2x-6) + C$
4. $\displaystyle\int e^{(2x+3)}\,dx = \frac{1}{2}e^{(2x+3)} + C$
5. $\displaystyle\int \sec^2(\pi x+3)\,dx = \frac{1}{\pi}\tan(\pi x+3) + C$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx = 2\sqrt{x+2} + C$

0.2. Sumas y notación sigma

El problema del área

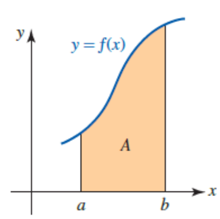


Figura 1: Área bajo la gráfica de f sobre $[a,b]$.

El problema histórico que conduce a la definición de integral definida es el problema de encontrar un área. En otras palabras

Encontrar el área A de una región acotada por el eje x y la gráfica de una función no negativa continua $y = f(x)$ definida sobre $[a, b]$.

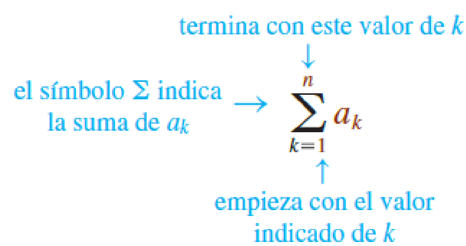
Notación: La suma de los n términos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ se denota por:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \tag{3}$$

donde k se llama **índice de la suma**, a_k es el k**-ésimo** término de la suma y los **limites inferior y superior de la suma** respectivamente son 1 y n.

Dado que Σ es la letra griega mayúscula sigma, a (3) se denomina notación sigma o notación de suma.

Así que ,



es la suma de todos los números de la forma a_k cuando k asume los valores sucesivos $k = 1$, $k = 2, \ldots,$ y termina con $k = n$.

Ejemplo 0.4. *Observemos.*

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30.$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+1}{n} = \frac{1^2+1}{n} + \frac{2^2+1}{n} + \frac{3^2+1}{n} + \cdots + \frac{n^2+1}{n}.$

4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x$

Ejercicio 0.6. *Determinar la suma de los primeros 6 términos de:*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k$

0.2.1. Propiedades de la notación sigma

Teorema 5.3.1 Propiedades de la notación sigma

Para enteros positivos m y n,

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$, donde c es cualquier constante

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k,\ m < n.$

Teorema 5.3.2 Fórmulas de sumas

Para n un entero positivo y c cualquier constante,

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = nc$ *ii)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *iv)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$

Ejemplo 0.5.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{20}(k+5)^2 = \sum_{k=1}^{20}(k^2+10k+25) &= \textstyle\sum_{k=1}^{20} k^2 + 10\sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} 25 \\
&= \tfrac{20*21*41}{6} + 10\left(\tfrac{20*21}{2}\right) + 20*25 \\
&= 2870 + 2100 + 500 \\
&= 5470.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{10}(jk)^3 = k^3\sum_{j=1}^{10} j^3 &= \frac{102(11)^2}{4}k^3 \\
&= 3025k^3
\end{aligned}$$

Ahora, observemos las siguientes aproximaciones a medida que n, aumenta considerablemente.

Ejercicio 0.7. *Hallar* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{n^2}$, *para* $n = 10, 100, 1000$ *y 10000.*

y remplazar en la tabla,

n	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{n^2}$
10	
100	
1000	
10000	

En la anterior tabla, las sumas parecen tender a un límite conforme n aumenta. Aunque la discusión de límites en el infinito del curso de calculo 1, se aplica para una variable x, donde x puede ser cualquier número real. Ahora, muchos de los resultados siguen siendo válidos cuando se restringen a una variable n la cual toma valores positivos. Así, para encontrar el límite siguiente

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

0.2.2. Taller

En los ejercicios 1 a 6, utilizar la notación sigma para escribir la suma.

1. $\dfrac{1}{3(1)}+\dfrac{1}{3(2)}+\dfrac{1}{3(3)}+\ldots+\dfrac{1}{3(9)}$.
2. $\dfrac{5}{1+1}+\dfrac{5}{1+2}+\dfrac{5}{1+3}+\ldots+\dfrac{5}{1+15}$.
3. $\left[5\left(\dfrac{1}{8}\right)+3\right]+\left[5\left(\dfrac{2}{8}\right)+3\right]+\ldots+\left[5\left(\dfrac{8}{8}\right)+3\right]$.
4. $\left[\left(\dfrac{2}{n}\right)^3-\dfrac{2}{n}\right]\left(\dfrac{2}{n}\right)+\ldots+\left[\left(\dfrac{2n}{n}\right)^3-\dfrac{2n}{n}\right]\left(\dfrac{2}{n}\right)$.
5. $\left[1-\left(\dfrac{2}{n}-1\right)^2\right]\left(\dfrac{2}{n}\right)+\ldots+\left[1-\left(\dfrac{2n}{n}-1\right)^2\right]\left(\dfrac{2}{n}\right)$.
6. $\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)\sqrt{1-\left(\dfrac{0}{n}\right)^2}\right]+\ldots+\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)\sqrt{1-\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2}\right]$.

En los ejercicios 7 a 9, utilizar las formulas de suma con notación sigma para reescribir la expresión sin la notación sigma. Emplear el resultado para determinar la suma correspondiente a n=10,100,1000 y n=10000.

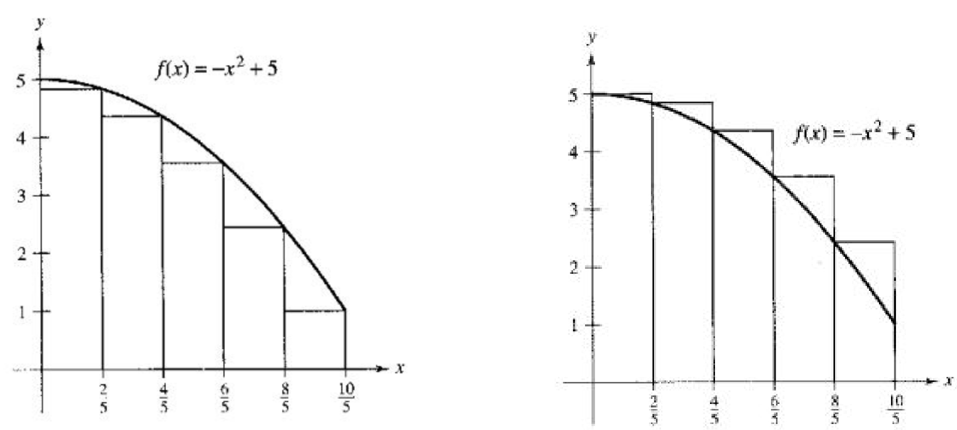
7. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{2i+1}{n^2}$

8. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{4j+3}{n^2}$

9. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2(i-1)}{n^4}$

Para los ejercicios 7 a 9 determinar el limite cuando n tiene a infinito, si este existe.

Motivación



(a) El área de una región parabólica es mayor que el área de los rectángulos.

(b) El área de una región parabólica es menor que el área de los rectángulos.

Figura 2: **Aproximación del área bajo la curva**

Emplear los cinco rectángulos de la figura(3) para determinar dos aproximaciones del área de la región que se encuentra entre la gráfica de,

$f(x) = -x^2 + 5,$

y el eje x entre $x = 0$ y $x = 2$.

Solución

(a) Los puntos terminales de la derecha de los cinco intervalos son $\frac{2i}{5}$ donde $i = 1, 2, 3, 4, 5$. El ancho de cada rectángulo es $\frac{2}{5}$, y la altura de cada rectángulo se puede obtener al hallar f en el punto terminal derecho de cada intervalo.

$$\left[0, \frac{2}{5}\right], \left[\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right], \left[\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right], \left[\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right] \left[\frac{8}{5}, \frac{10}{5}\right]$$

La suma de las áreas de los cinco rectángulos es,

$$\sum_{i=1}^{5} f\left(\frac{2i}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \sum_{i=1}^{5}\left[-\left(\frac{2i}{5}\right)^2 + 5\right]\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{162}{25} = 6.48$$

(b) Los puntos terminales izquierdos de los cinco intervalos son $\frac{2}{5}(i-1)$ donde $i = 1, 2, 3, 4, 5$. El ancho de cada rectángulo es $\frac{2}{5}$, y la altura de cada rectángulo se puede obtener al evaluar f en el punto terminal izquierdo de cada intervalo.

La suma de las áreas de los cinco rectángulos es,

$$\sum_{i=1}^{5} f\left(\frac{2i-2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \sum_{i=1}^{5}\left[-\left(\frac{2i-2}{5}\right)^2 + 5\right]\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{202}{25} = 8.08$$

Combinando los resultados de los apartados (a) y (b), es posible concluir que

$$6.48 < (\text{Área de la región}) < 8.08.$$

¿Qué pasará si se aumenta el número de rectángulos?

Observación

Cuando la función f es continua, como en la figura (3), el teorema del valor extremo garantiza la existencia de un máximo y mínimo de $f(x)$ en cada intervalo.

$f(m_i)$=: Valor mínimo de $f(x)$ en el $i-ésimo$ subintervalo.

$f(M_i)$=: Valor máximo de $f(x)$ en el $i-ésimo$ subintervalo.

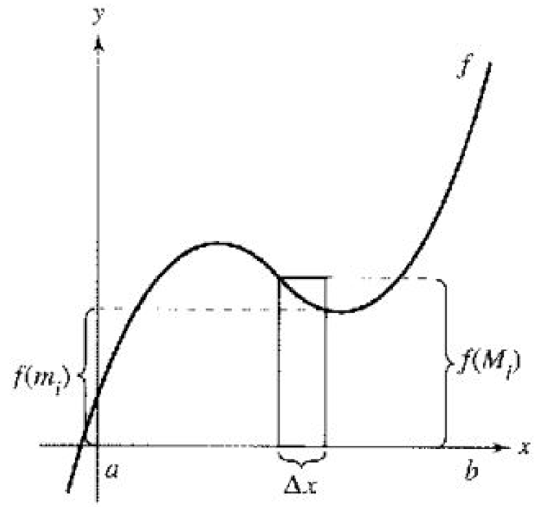


Figura 3: El intercalo [a,b] se divide en n subintervalos de ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

De ahí que, se define el rectángulo inscrito que se encuentra dentro de la $i-ésima$ subregión y un rectángulo circunscrito que se extiende fuera de la $i-ésima$ región. La altura del $i-ésimo$ rectángulo inscrito es $f(m_i)$ y la altura del $i-ésimo$ rectángulo circunscrito es $f(M_i)$. Para cada i, el área del rectángulo inscrito es menor que o igual que el área del rectángulo circunscrito.

$$\left(\begin{array}{c}\text{Área del rectángulo}\\ \text{inscrito}\end{array}\right) = f(m_i)\Delta x \leq f(M_i)\Delta x = \left(\begin{array}{c}\text{Área del rectángulo}\\ \text{circunscrito}\end{array}\right)$$

La suma de las áreas de los rectángulos inscritos recibe el nombre de **suma inferior**, y la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos se conoce como **suma superior.**

Suma inferior:=$s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x$

Suma superior:= $S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x$

Donde no es muy difícil ver que la suma inferior $s(n)$ es menor o igual que la suma superior $S(n)$, además, el área real de la región se encuentra entre estas dos sumas, esto es:

$$s(n) \leq (\text{Área de región}) \leq S(n)$$

Ejercicio 0.8. *Determinar la suma superior e inferior de la región delimitada por la gráfica de $f(x) = x^2$ y el eje x entre $x = 0$ y $x = 2$.*

Teorema 0.1. *Sea f una función continua y no negativa en el intervalo [a,b]. Los límites cuando $n \longrightarrow \infty$ de las sumas inferior y superior existen y son iguales entre sí. es decir*

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} S(n)$$

Área de un triángulo: Supongamos que deseamos hallar el área del triángulo rectángulo de la Figura 4,

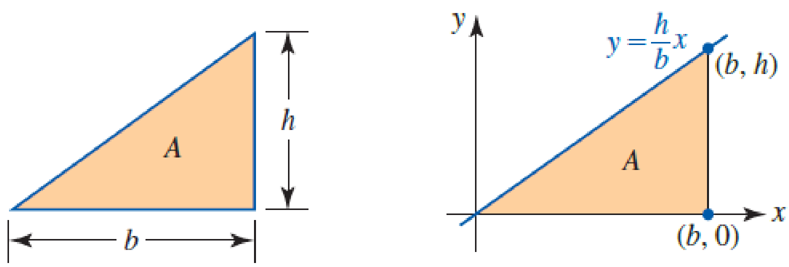


Figura 4: Triángulo rectángulo

Una estrategia para calcular su área es dividirla en rectángulos de la misma base como lo indica la Figura(5)

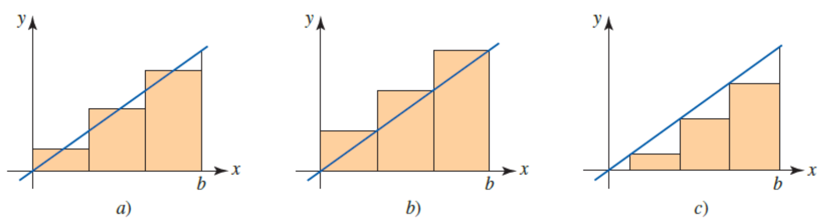


Figura 5: Aproximación del área A

En general, podemos dividir el área en n rectágulos, cuya base es $\Delta x = \frac{b}{n}$ ¿por qué?.

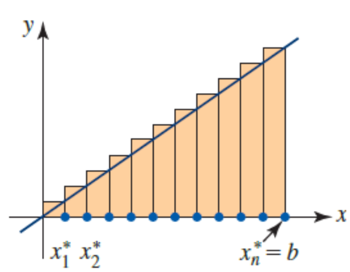


Figura 6: n rectángulos

observe además, que los puntos x_k^* están dados por:

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= \Delta x = \frac{b}{n} \\
x_2^* &= 2\Delta x = 2\left(\frac{b}{n}\right) \\
x_3^* &= 3\Delta x = 3\left(\frac{b}{n}\right) \\
&\vdots \\
x_n^* &= n\Delta x = n\left(\frac{b}{n}\right) = b.
\end{aligned}
$$

Un rectágulo general, de la la Figura (6) tiene área $A_k = f(x_k^*)\Delta x$ ¿Por qué?

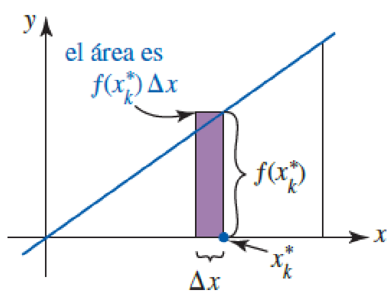


Figura 7: Área de un rectángulo general

La suma del área de los n rectágulos es una aproximación al área A, es decir

$$A \approx f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x.$$

Si deseamos mejorar la aproximación del área A, es natural pensar en hacer que los rectángulos sean cada vez más finos, esto lo logramos haciendo tender n al infinito ¿por qué?.

Para nuestro ejemplo tenemos los siguiente ¿por qué?

$$f(x) = \frac{h}{b}x, \quad x_k^* = k\left(\frac{b}{n}\right), \quad f(x_k^*) = \frac{h}{n}k, \quad y \quad \Delta x = \frac{b}{n},$$

de modo que:

$$A \approx \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{h}{n}k\right)\frac{b}{n} = \frac{bh}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{bh}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{bh}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{bh}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Finalmente, haciendo tender n a infinito, obtenemos el área A

$$A = \frac{1}{2}bh\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{2}bh$$

para el intervalo [0,b] se puede hacer la siguiente partición,

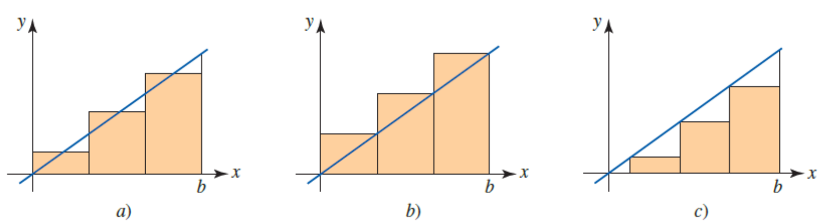


Figura 8: Aproximación del área A

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

donde los puntos terminales para la figura (8) están dados de la siguiente manera

a) $x_i^* = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$ para $i = 1, 2, \ldots, n.$

b) $x_i^* = x_0 + i\dfrac{(b-0)}{n}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

c) $x_i^* = x_0 + (i-1)\dfrac{(b-0)}{n}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

0.3. Sumas de Riemann

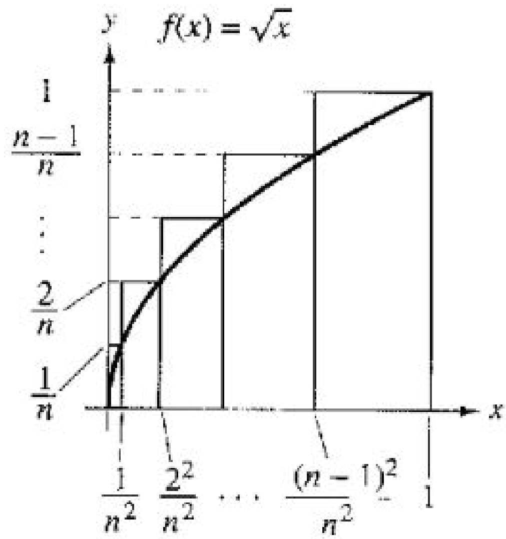


Figura 9: Los subintervalos no tienen anchos iguales

En la sección anterior, para la definición de área se usaron particiones que tenían subintervalos de igual ancho. Esto se hizo por conveniencia de cálculo, ahora consideremos el siguiente ejemplo que nos ilustra una forma de aproximar el área sin usar subintervalos de igual ancho.

Ejemplo 0.6. *Considerar la región acotada por la grafia de* $f(x) = \sqrt{x}$ *y el eje* x *para* $0 \leq x \leq 1$*, como se muestra en la* figura (3)*. Hallar el limite*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

donde c_i *es el punto terminal derecho de la partición dada por*

$$c_i = \frac{i^2}{n^2}$$

y $\Delta x_i = c_i - c_{i-1}$ *es el ancho del intervalo.*

Solución *El ancho del $i-$ésimo subintervalo esta dado por*

$$\begin{aligned}
\Delta x_i &= c_i - c_{i-1} \\
&= \frac{i^2}{n^2} - \frac{(i-1)^2}{n^2} \\
&= \frac{i^2 - i^2 + 2i - 1}{n^2} \\
&= \frac{2i-1}{n^2}
\end{aligned}$$

Luego, se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i &= \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i^2}{n^2}} \left(\frac{2i-1}{n^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \left(\frac{2i-1}{n^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \textstyle\sum_{i=1}^{n} \left(2i^2 - i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \left[2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6n^3} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Definición 0.3. *Sea f definida en el intervalo cerrado [a,b], y sea Δ una partición dada por*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

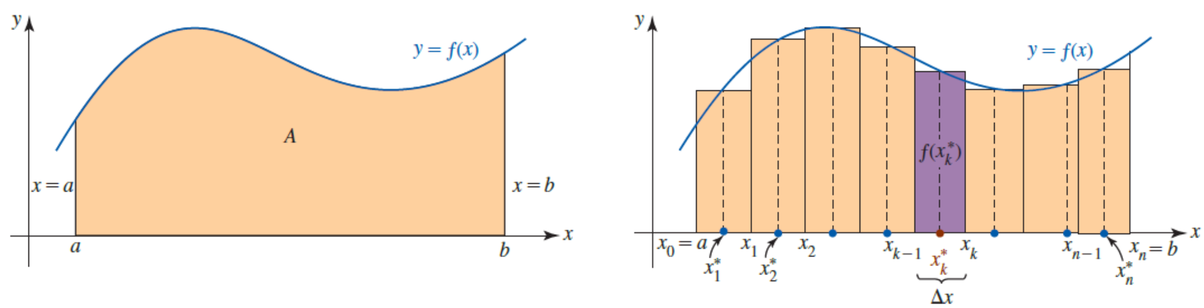
donde Δx_i es el ancho del $i-$ésimo subintervalo. Si c_i es cualquier punto en el $i-$ésimo subintervalo entonces la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \qquad x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

Se denomina una ***Suma de Riemann*** *de f para la partición Δ.*

Problema general

Ahora pasaremos del ejemplo precedente específico al problema general de encontrar el área A bajo la gráfica de una función $y = f(x)$ que es continua sobre un intervalo $[a, b]$. Como se muestra en la Figura(10), también suponemos que $f(x) \geq 0$, para toda x en el intervalo $[a, b]$.



a) Área *A* bajo la gráfica *b*) *n* rectángulos

Figura 10: Área A bajo la gráfca de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$

Definición 5.3.1 Área bajo una gráfica

Sea f continua sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo. El **área A bajo la gráfica** de f sobre el intervalo se define como

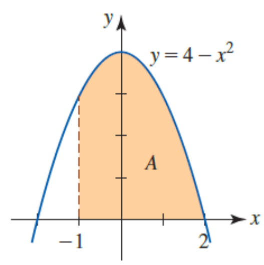
$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \Delta x. \qquad (6)$$

Guía para calcular el área bajo la curva de una función, $f \geq 0$, en un intervalo $[a, b]$

1. Defina $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$
2. Calcule $x_k^* = a + k\frac{b-a}{n}$
3. Reemplazar en la defunción de área, es decir,

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Ejemplo 0.7. *Encuentre el área A bajo la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ sobre el intervalo* $[-1, 2]$.



Solución:

I. $\Delta x = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n}$.

II. $x_k^* = -1 + k\frac{3}{n}$

III.

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(-1+k\frac{3}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[4-\left(-1+k\frac{3}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{3}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+6\frac{k}{n}-9\frac{k^2}{n^2}\right)\cdot\frac{3}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}3+\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\cdot\left[3n+\frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[9+9\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right]\\
&= 9+9-9=9
\end{aligned}
$$

Ejercicio 0.9. *Encuentre el área bajo la gráfica de la función dada sobre el intervalo indicado.*

1. $f(x)=2x$ *en* $[1,3]$.
2. $f(x)=x^2$ *en* $[-2,1]$.
3. $f(x)=x^2+2x$ *en* $[1,2]$.

0.4. La integral definida

En la sección anterior, se estudió el concepto de área bajo la gráfica de una función continua $f \geq 0$, en un intervalo $[a, b]$. En está sección se estudia el mismo proceso para encontrar área, pero para una función que puede tener partes negativas, es decir como la mostrada en la Figura (11).

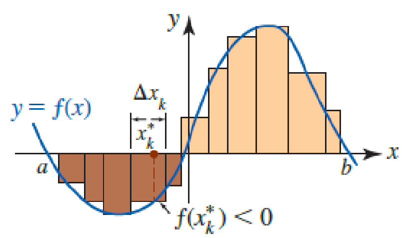


Figura 11: Función con parte negativa y negativa en $[a, b]$

Definición 5.4.1 La integral definida

Sea f una función definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces la **integral definida de f de a a b**, que se denota por $\int_a^b f(x)\,dx$, se define como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \Delta x_k. \qquad (4)$$

Si el límite en (4) existe, se dice que la función f es integrable sobre el intervalo. Los números a y b en la definición precedente se denominan límite inferior y límite superior de integración, respectivamente. La función f se denomina integrando. El símbolo integral según lo usaba Leibniz, es una S alargada que representa la palabra suma. Cabe resaltar dos preguntas que surgen de manera inmediata:

- ¿Cuál es la diferencia entre la definición de integral definida y área?.
- ¿Siempre existe la integral definida?.

Bien, la respuesta al primer interrogante se deja como ejercicio al lector. En cuanto al segundo interrogante, los siguientes teoremas nos dan luz para dar respuesta:

Teorema 5.4.1 Continuidad implica integrabilidad

Si f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ existe; es decir, f es integrable sobre el intervalo.

Teorema 5.4.2 Condiciones suficientes para integrabilidad

Si una función f está acotada sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, es decir, si existe una constante positiva B tal que $-B \leq f(x) \leq B$ para toda x en el intervalo y tiene un número finito de discontinuidades en $[a, b]$, entonces f es integrable sobre el intervalo.

Nota: La guía para calcular el área bajo la gráfica de una función f en un intervalo cerrado, también puede ser utilizada para encontrar la integral definida en un intervalo cerrado.

Para acabar de atar cabos, hace falta evidenciar la relación entre el concepto de área e integral definida, para ello, veamos el siguiente resultado:

Ejercicio: Evalúe $\displaystyle\int_{-2}^{1} x^3 dx$.

Veamos ahora algunas propiedades de la integral definida:

Teorema 5.4.3 El área como integral definida

Si f es una función continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo, entonces el **área A bajo la gráfica** sobre $[a, b]$ es

$$A = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{6}$$

Definición 5.4.2 Límites de integración

i) **Igualdad de límites** Si a está en el dominio de f, entonces

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0. \tag{7}$$

ii) **Inversión de límites** Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx. \tag{8}$$

Teorema 5.4.4 Propiedades de la integral definida

Si f y g son funciones integrables sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

i) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx$, donde k es cualquier constante

ii) $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx.$

Ejemplos:

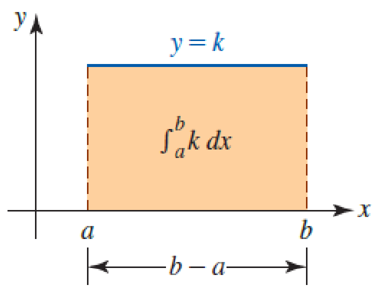
1. $\displaystyle\int_1^1 (x^3 + 3x)\, dx = 0$

2. El lector debe comprobar que $\displaystyle\int_{-2}^1 x^3 dx = -\frac{15}{4}$ por tanto $\int_1^{-2} x^3 dx = \frac{15}{4}$.

Teorema 5.4.6 Integral definida de una constante

Para cualquier constante k,

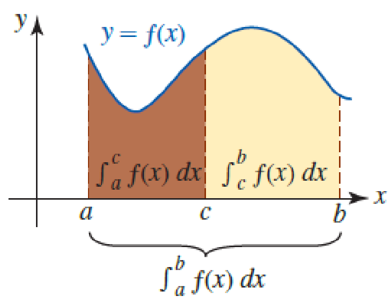
$$\int_a^b k\,dx = k\int_a^b dx = k(b-a).$$



Teorema 5.4.5 Propiedad aditiva del intervalo

Si f es una función integrable sobre un intervalo cerrado que contiene a los números a, b y c, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad (10)$$



3. $\displaystyle\int_2^8 5\,dx = 5(8-2) = 30.$

4. $\displaystyle\int_{-2}^1 (x^3+5)\,dx = \int_{-2}^1 x^3\,dx + \int_{-2}^1 5\,dx = -\frac{15}{4} + 15 = \frac{45}{4}$

Teorema 5.4.7 Propiedades de comparación

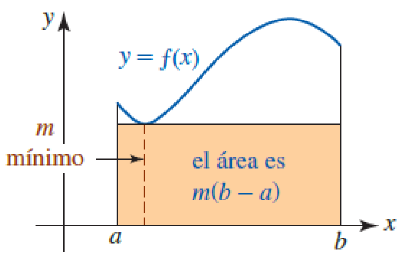
Sean f y g funciones integrables sobre el intervalo cerrado $[a, b]$.

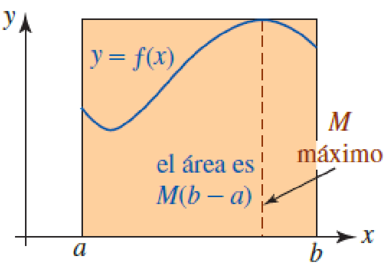
i) Si $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

ii) Si $m \leq f(x) \leq M$ para toda x en el intervalo, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$





0.4.1. Área neta con signo

Debido a que la función f en la Figura (12) asume valores tanto positivos como negativos sobre $[a, b]$, la integral definida no representa área bajo la gráfica de f sobre el intervalo. Por el teorema 5.4.5, la propiedad aditiva del intervalo,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx \qquad (4)$$

Debido a que $f(x) \geq 0$ sobre $[a, c_1]$ y $[c_2, b]$ tenemos

$$\int_a^{c_1} f(x)\,dx = A_1 \text{ y } \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx = A_3$$

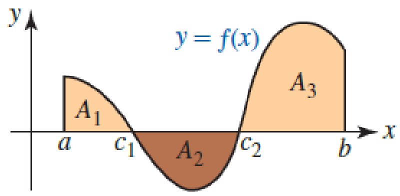


Figura 12: Función con valores positivos y negativos en $[a, b]$

donde A_1 y A_3 denotan las áreas bajo la gráfica de f sobre los intervalos $[a, c_1]$ y $[c_2, b]$, respectivamente. Pero puesto que $f(x) \leq 0$ sobre $[c_1, c_2]$ tenemos $\displaystyle\int_{c_1}^{c_2} f(x)\ dx \leq 0$ y así $\displaystyle\int_{c_1}^{c_2} f(x)\ dx$ no representa área. No obstante, el valor de $\displaystyle\int_{c_1}^{c_2} f(x)\ dx$ es el negativo del área verdadera A_2 acotada entre la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo $[c_1, c_2]$. Es decir, $\displaystyle\int_{c_1}^{c_2} f(x)\ dx = -A_2$. Por tanto, (4) es

$$\int_a^b f(x)\ dx = A_1 - A_2 + A_3$$

0.5. Teorema fundamental del Cálculo

En las secciones anteriores, se indicó que existe una forma más fácil de calcular una integral definida, sin tener que recurrir a la definición. Esta "manera más sencilla" se logra por medio del **teorema fundamental del cálculo**. En esta sección verá que hay dos formas de este importante teorema: la primera forma, que se presenta a continuación, permite evaluar muchas integrales definidas.

Teorema 5.5.1 Teorema fundamental del cálculo: forma de antiderivada

Si f es una función continua sobre un intervalo $[a, b]$ y F es una antiderivada de f sobre el intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Ejemplos:

1. $\displaystyle\int_{-2}^{1} x^3\,dx$
2. $\displaystyle\int_{1}^{3} x\,dx.$
3. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi} \cos x\,dx.$
4. $\displaystyle\int_{-2}^{1} (3x^2 - x + 1)\,dx.$

Teorema fundamental del cálculo: segunda forma

Suponga que f es continua sobre un intervalo [a,b] por lo que se sabe que la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, existe. Para toda x en el intervalo $[a,b]$, la integral definida

$$\int_a^x f(t)\,dt \tag{5}$$

representa un solo número. De esta forma, se ve que (5) es una función con dominio $[a,b]$. En la Figura (13) se muestra que f es una función positiva sobre $[a,b]$ y así cuando x varía a través del intervalo es posible interpretar $g(x)$ como un área bajo la gráfica sobre el intervalo $[a,x]$. En la segunda forma del teorema fundamental del cálculo se demostrará que $g(x)$ definida en (5) es una función diferenciable.

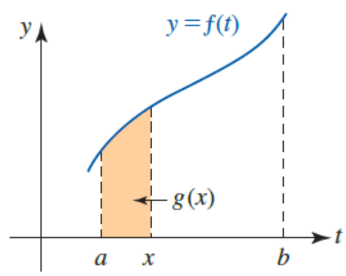


Figura 13: $g(x)$ como área

Teorema 5.5.2 Teorema fundamental del cálculo: forma de derivada

Sea f continua sobre $[a, b]$ y sea x cualquier número en el intervalo. Entonces $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b) y

$$g'(x) = f(x). \tag{5}$$

Ejemplos:

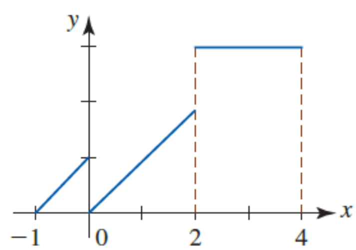
1. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-2}^{x} t^3\,dt$

2. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{1}^{x} \sqrt{t^2+1}\,dt$

3. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\pi}^{x^3} \cos t\,dt$

4. Evaluar $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ donde

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < 2 \\ 3, & 2 \le x \le 4. \end{cases}$$



Definición 0.4. *Una función $f : A \longrightarrow B$ es **par** si*

$$f(-x) = f(x) \qquad \text{para todo } x \in A$$

*Una función $f : A \longrightarrow B$ es **impar** si*

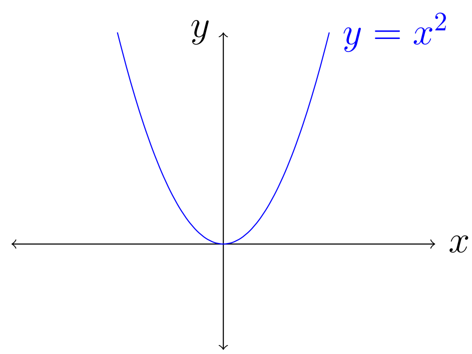
$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{para todo } x \in A$$

Ejemplo 0.8. *La función $f(x) = x^2$ es par puesto que*

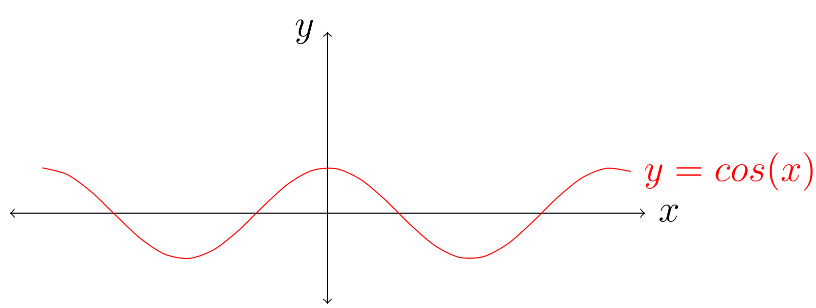
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f(-x) &= (-x)^2 = x^2 \end{aligned}$$

por tanto,

$$f(x) = f(-x)$$



La función coseno, es una función par (verificar).

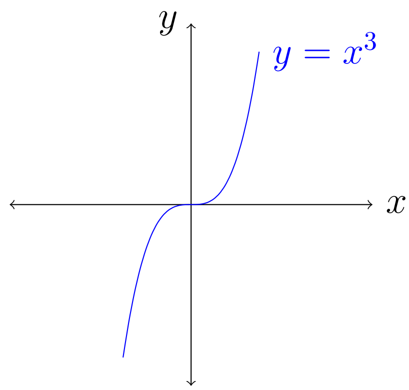


Ejemplo 0.9. *La función $f(x) = x^3$ es impar puesto que*

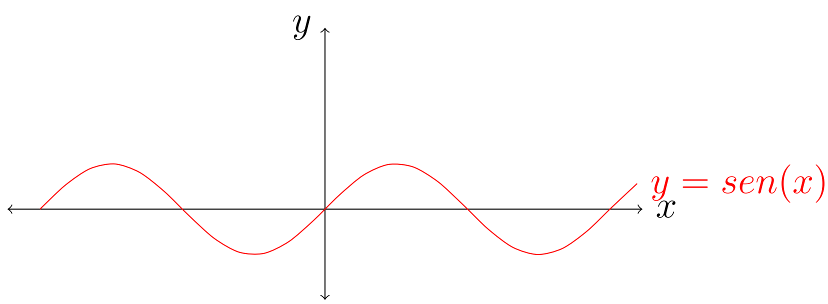
$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x^3 \\ f(-x) & = & (-x)^3 = -x^3 \end{array}$$

por tanto,

$$f(x) = -f(x)$$



La función seno, es una función impar (verificar).

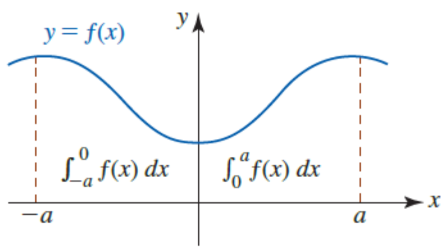


Propiedades de la integral definida para funciones especiales

Teorema 5.5.4 Regla de la función par

Si f es una función par integrable sobre $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx. \tag{13}$$



Ejemplos:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^4 + x^2)\, dx$
2. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\, dx$

Ejercicio 0.10. *Determinar las siguientes integrales:*

- $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\beta); d\beta$

- $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\beta)\, d\beta$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} |t|\, dt$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+3x^2}\, dt$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^5 \sin t^2\, dt$