Matemáticas Generales

Apuntes de clase.

GUIA 2: Funciones

Escuela Superior de Administración Pública

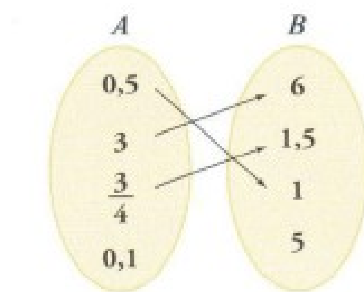
Profesor:
Carlos Andrés Leiton Piamba
Docente Universitario

Popayán, 22 de octubre de 2024

0.1. Funciones

Para la compresión del concepto de función, primero se estudia la idea de relación.

Definición 0.1. *Podemos definir una* ***relación*** *como conjunto en el cual todos sus elementos son pares ordenados. En otras palabras, una relación es una correspondencia que se establece entre los elementos de dos conjuntos.*



Al conjunto A se le denomina **conjunto de partida** y al conjunto B, **conjunto de llegada**. Para nombrar las relaciones se utilizan letras mayúsculas, por ejemplo en la gráfica anterior **3R6** indica que el elemento 3 del conjunto A, está relacionado con el elemento 6 del conjunto B. De ahí que todas las relaciones que podamos definir entre estos conjuntos se encuentran en el siguiente conjunto cartesiano

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\} \tag{1}$$

Observación 1:

Los elementos del conjunto A que tienen como imagen en B reciben el nombre de **dominio** de G; los elementos de B que son imagen de algún elemento de A reciben el nombre de **rango** de G, y el conjunto de todas las parejas ordenadas (x, y) que están relacionadas, decimos que es el **grafo** de la relación.

Definición 0.2. *Una función f es una relación que asigna a cada elemento x de un conjunto A un único elemento y de un conjunto B.*

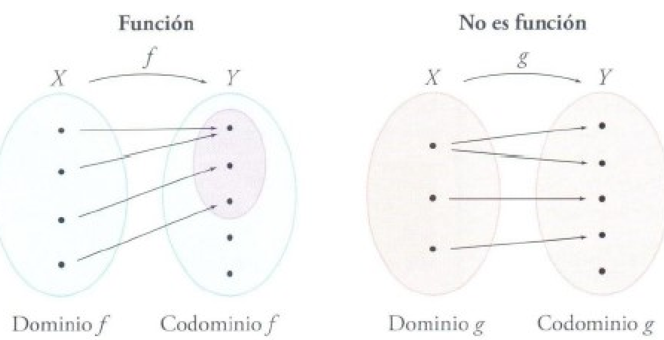
Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función f de A en B se escribe como sigue:

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \rightarrow & B \\ & x & \rightarrow & y = f(x) \end{array} \tag{2}$$

Se puede decir que todas las funciones son relaciones, pero no todas las relaciones son funciones. Para que una relación sea considerada como una función, deberá cumplir con las siguientes condiciones:

- Cada elemento del conjunto A debe estar relacionado con un elemento del conjunto B.
- Cada elemento de A no puede relacionarse con dos o más elementos de B.

Los diagramas que se muestran a continuación describen una relación que es función y una relación que no es función.



Observación 2:

- Las funciones se nombran con letras minúsculas como $f, g, h, i, \cdots$
- La notación $f(x)$ se utiliza para indicar el elemento que en el rango corresponde a x, por la función f, y se le llama *valor de la función* f en x o *imagen* de x por f.
- La expresión $f(x) = y$ se lee "f de x igual a y".

  Ejemplo 0.1. *Si* $f(x) = -5x^2 + 3$*, entonces,* f *envía* x *a* $-5x^2 + 3$*. Así, el valor de la función* $f(x)$ *cuando* $x = -1$ *es*

  $$f(-1) = -5(-1)^2 + 3 = -2$$

- Una función se puede representar de las siguientes formas:

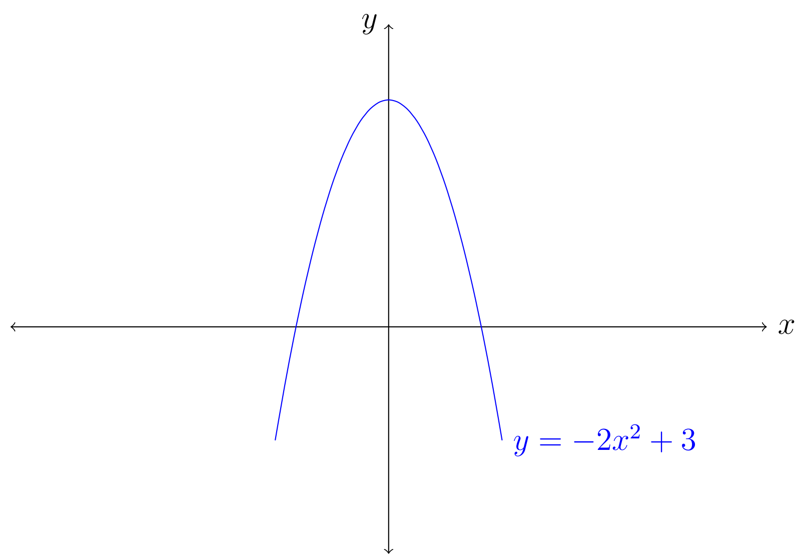
  a) Expresión algebraica.

  $$f(x) = -2x^2 + 3$$

b) Tabla de valores. (Tabulación)

x	-1	0.5	0	0.5	1
$f(x)$	1	-2.5	0	-2.5	1

c) Gráfica.



Es importante recordar que en el desarrollo del álgebra y la trigonométrica se han trabajado con diferentes funciones de variable real, tales como:

Tipo de función	Expresión algebraica	Gráfica
Función Lineal	$y = f(x) = mx + b$	
Función Cuadrática	$y = f(x) = ax^2 + bx + c$	
Función Cubica	$y = f(x) = x^3$	
Función Racional	$y = f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	
Función Radical	$y = \sqrt{x}$	
Función trigonométrica	$y = f(x) = \cos(x)$	
Función Exponencial	$y = f(x) = e^{ax}$	
Función Logarítmica	$y = f(x) = \log(x)$	
Función inversa	$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$	

0.1.1. Dominio y Rango

Para determinar el dominio y rango de dos funciones primero

$$\begin{array}{ccc|lcl} y & = & f(x) & & & \\ \downarrow & & \downarrow & y & \rightarrow & \text{Rango de la función} \\ \begin{array}{c}\text{Variable}\\ \text{dependiente}\end{array} & & \begin{array}{c}\text{Variable}\\ \text{independiente}\end{array} & x & \rightarrow & \text{Dominio de la función} \end{array}$$

Podemos decir que el dominio de la función, es el conjunto de puntos donde la expresión algebraica $f(x)$ este bien definida, y rango no es nada más que el conjunto de las imágenes de x mediante la función f.

Para determinar el dominio de una función se despeja la variable y, y se busca las restricciones que tiene x. Del mismo modo, para hallar el rango se despeja la variable x y se buscan las restricciones de y.

EJEMPLOS

1. **Encontrar el dominio de cada función.**

a. $h(x) = \sqrt{3x + 2}$

Como las cantidades subradicales de raíces con índice par deben ser positivas o cero, se tiene que:

$3x + 2 \geqslant 0$

$3x \geqslant -2$

$x \geqslant -\frac{2}{3}$

Por tanto, Dom $h = \left[-\frac{2}{3}, \infty\right)$.

b. $g(x) = \text{Log}_3\,(x - 5)$

Como los logaritmos están definidos para valores positivos, se realiza:

$x - 5 > 0$

$x > 5$

Por tanto, Dom $g = (5, \infty)$.

2. **Hallar el rango de la función** $f(x) = \frac{3x - 2}{x + 3}$.

Para hallar el rango, se despeja x, así:

$y = \frac{3x - 2}{x + 3}$

$y(x + 3) = 3x - 2$

$xy + 3y = 3x - 2$

$xy - 3x = -2 - 3y$

$x(y - 3) = -2 - 3y$

$x = \frac{-2 - 3y}{y - 3}$

Como $y - 3 \neq 0$, entonces, y no debe ser 3. Por tanto, Ran $f = R - \{3\}$.

3. **Hallar el dominio y el rango de la función**

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}.$$

Como el denominador de la expresión racional debe ser diferente de cero, se tiene que:

Como $x^2 - 1 = 0$ cuando $x = 1$ o $x = -1$, entonces, la función $f(x)$ no está definida en estos valores.

Por tanto, Dom $f = \mathbb{R} - \{1, -1\}$.

Para hallar el rango se despeja x en $y = \frac{2}{x^2 - 1}$.

$y = \frac{2}{x^2 - 1}$

$yx^2 - y = 2$

$yx^2 = 2 + y$

$x^2 = \frac{2 + y}{y}$

Entonces, $x = \pm\sqrt{\frac{2 + y}{y}}$.

Ahora, se resuelve $\frac{2 + y}{y} \geqslant 0$ utilizando la forma gráfica para solucionar desigualdades.

$2 + y = 0$, de donde $y = -2$

$y = 0$

Como $\frac{2 + y}{y} \geqslant 0$, entonces, la solución de la desigualdad es: $S = (-\infty, -2] \cup (0, \infty)$.

Por tanto, Ran $f = (-\infty, -2] \cup (0, \infty) = \mathbb{R} - (-2, 0]$.

Ejercicio 0.1. *Tarea Investigativa*

1. *Como hallar los puntos de cortes con los ejes coordenados.*

2. *Dar un ejemplo particular para cada función, donde se vea en forma explicita la función en forma de : Expresión algebraica, tabulación (mínimo 4 valores) y su gráfica (Puede usar una graficadora).*

0.2. Taller

Para las funciones

Tipo de función	Expresión algebraica	Gráfica
Función Lineal	$f(x) = -3x + 2$	
Función Cuadrática	$f(x) = -2x^2 + 3x + 2$	
Función Cubica	$f(x) = -x^3$	
Función Racional	$f(x) = \dfrac{x + 2x}{x - 2}$	
Función Radical	$y = \sqrt{x + 1}$	
Función trigonométrica	$f(x) = 2\cos(x)$	
Función Exponencial	$f(x) = e^{2x}$	
Función Logarítmica	$f(x) = \log(x)$	
Función inversa	$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$	

Determinar

- Dominio y rango de funciones
- Puntos de cortes, con los ejes coordenados.
- Gráficas