

Matemáticas Generales

Apuntes de clase.

Profesor:

Carlos Andrés Leiton Piamba
Docente Universitario

En este documento se encuentra una recopilación selecta de mis apuntes de Matemáticas Generales, los cuales son resultado de mi dedicación y compromiso en la enseñanza de esta materia. El objetivo es complementar la formación matemática adquirida por el estudiante durante su educación básica y media. Pues, se busca dotar al estudiante de las herramientas necesarias para abordar con solidez los conceptos fundamentales en diferentes tópicos de la matemáticas básicas.

Considero que es una guía de estudio ideal para aquellos estudiantes que deseen obtener una comprensión sólida de los conceptos matemáticos fundamentales, sin la necesidad de adentrarse en demostraciones formales y complejas. En el proceso de tener un enfoque claro y didáctico, espero que este material facilite el aprendizaje y desperte el interés por el mundo de las ciencias matemáticas.

Popayán, 10 de diciembre de 2024

Índice general

Índice general	1
1. Álgebra	4
1.1. Expresiones algebraicas	4
1.2. Operaciones con Polinomios	5
1.2.1. Adición de polinomios	5
1.2.2. Sustracción de polinomios	6
1.2.3. Multiplicación de polinomios	7
1.2.4. División de polinomios	8
1.2.5. División sintética	10
1.3. Productos y Cocientes Notables	11
1.4. Factorización	13
1.4.1. Concepto de factorización	13

1.4.2. Casos de factorización	14
1.5. Fracciones algebraicas y Simplificación expresiones algebraicas	19
1.6. Operaciones con fracciones algebraicas	20
1.6.1. Adición y sustracción de fracciones algebraicas	20
1.6.2. Multiplicación de fracciones algebraicas.	22
1.6.3. División de fracciones algebraicas.	23
1.7. Taller	24
1.8. Números complejos	32
1.9. Potencias de i	32
1.10. Representación gráfica de los números complejos	34
1.10.1. Conjugado de un número complejo	35
1.11. Operaciones con números complejos	36
1.11.1. Adiciones de complejos	36
1.11.2. Propiedades de los números complejos	37
1.11.3. Sustracción de números complejos	38
1.11.4. Multiplicación de números complejos	38
1.11.5. División de números complejos	40
1.11.6. Norma de un número complejo	41
1.12. Taller de Números complejos	43
2. Ecuaciones	46

2.1. Definición, Solución de ecuaciones lineales y cuadráticas	46
2.1.1. Procedimiento para determinar la solución a una ecuación lineal .	47
2.1.2. Ecuación y Formula cuadrática	48
2.1.3. Problemas de aplicación de ecuaciones lineales y cuadráticas . .	50
2.2. Sistemas de ecuaciones lineales	52
2.2.1. Sustitución	52
2.2.2. Igualación	54
2.2.3. Reducción	56
2.2.4. Método por determinantes	56
2.2.5. Taller-Aplicaciones	58
3. Inecuaciones	59
3.1. Inecuaciones y propiedades algebraicas	59
3.1.1. Solución de inecuaciones lineales y cuadráticas, método analítico y gráfico	61
3.2. Método analítico	68
3.2.1. Método gráfico	69
3.3. Inecuaciones con valor absoluto	70
3.3.1. Problemas de aplicación que se resuelven mediante inecuaciones .	71
3.4. Taller	72

Capítulo **1**

Álgebra

1.1. Expresiones algebraicas

Concepto

- Una **expresión algebraica** es la combinación de números y letras utilizando las diferentes operaciones como la suma, la resta, la multiplicación, la división y la potenciación. A cada expresión que se encuentra separada por un **signo** (+) o un **signo** (-) la podemos llamar **término** de la expresión algebraica.
- Una **expresión algebraica** es una combinación de números y variables mediante operaciones aritméticas. En una expresión algebraica las **variables** son letras que representan cualquier número de un determinado conjunto numérico.

Ejemplo 1.1. *Las letras x , y , z pueden ser variables que representan cualquier número real y la expresión $3x - 2y + z$ es una expresión algebraica que relaciona las variables.*

Definición 1.1. *Un **polinomio** de una variables x es una expresión algebraica de la forma*

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0.$$

*Donde, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son números reales (**Coeficientes del polinomio**) y n es un número entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces, el **polinomio es de grado n**.*

Clasificación de los polinomios según la cantidad de términos

Número de términos	Denominación(Nombre)	Ejemplos
1	Monomio	$2x^2, \frac{1}{2}xyz, \sqrt{2}x$
2	Binomio	$x^2 - 2x, \frac{4}{5}xz + 1, x^3 + \sqrt{7}z$
3	Trinomio	$2x^2 - 23xyz + x$
4 o más	Polinomio	$2x^4 + 3xy^2 - 12xy + 2$

Los **términos semejantes** de un polinomio son aquellos que tienen las mismas variables elevadas a las mismas potencias

Ejemplo 1.2. En el polinomio,

$$-7\textcolor{blue}{x}^2y + 3xy^2 + 5\textcolor{blue}{x}^2y,$$

únicamente son semejantes los términos $-7\textcolor{blue}{x}^2y$ y $5\textcolor{blue}{x}^2y$

Ejemplo 1.3. En el polinomio,

$$-\frac{2}{3}\textcolor{blue}{x}^2y + \textcolor{red}{xy}^2 + \sqrt[3]{6}\textcolor{brown}{x} + 5\textcolor{blue}{x}^2y + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\textcolor{red}{y}^2\textcolor{brown}{x} - x$$

1.2. Operaciones con Polinomios

1.2.1. Adición de polinomios

Para sumar dos o más polinomios se reducen términos semejantes.

Ejemplo 1.4. Sumar $-10mn^2 + 7m^2n + 6$ y $21m^2n - 8mn^2 - 15$

$$(-10mn^2 + 7m^2n + 6) + (21m^2n - 8mn^2 - 15)$$

Se indica la adición

$$= (-10mn^2 - 8mn^2) + (7m^2n + 21m^2n) + (6 - 15)$$

Se agrupa términos semejantes

$$= -18mn^2 + 28m^2n - 9$$

Se reducen términos semejantes

Ejercicio 1.1. Sumar $3x^2y + 8y^3 + 5xy^2$ y $7x^2y - 3y^3 + xy^2$

$$\begin{aligned}
 & (\quad) + (\quad) && \text{Se indica la adición} \\
 & = && \text{Se agrupa términos semejantes} \\
 & = && \text{Se reducen términos semejantes}
 \end{aligned}$$

1.2.2. Sustracción de polinomios

Para restar dos polinomios, se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo.

Ejemplo 1.5. Restar los siguientes polinomios donde,

$$\text{minuendo} \longrightarrow -y^2x + \frac{3}{4}x - 6x^2y$$

$$\text{sustraendo} \longrightarrow \frac{1}{3}x^3y^2 + 5x^2y + \frac{1}{2}x$$

$$\begin{aligned}
 & \left(-y^2x + \frac{3}{4}x - 6x^2y \right) - \left(\frac{1}{3}x^3y^2 + 5x^2y + \frac{1}{2}x \right) && \text{Se indica la sustracción} \\
 & = \left(-y^2x + \frac{3}{4}x - 6x^2y \right) + \left(-\frac{1}{3}x^3y^2 - 5x^2y - \frac{1}{2}x \right) && \text{Se suma el opuesto del sustraendo} \\
 & = -y^2x - \frac{1}{3}x^3y^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x \right) + (6x^2y - 5x^2y) && \text{Se agrupan términos semejantes} \\
 & = -y^2x - \frac{1}{3}x^3y^2 + \frac{1}{4}x + x^2y && \text{Se reducen términos semejantes}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2. Restar $7p^4q^3 - 3p^2q + 5p^3q^2$ de $6p^3q^2 - 8p^2q + 5p^4q^3$

$$\begin{aligned}
 & (\quad) - (\quad) && \text{Se indica la sustracción} \\
 & = && \text{Se suma el opuesto del sustraendo} \\
 & = && \text{Se agrupan términos semejantes} \\
 & = && \text{Se reducen términos semejantes}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.3. Realiza las siguientes operaciones entre polinomios.

1. $(3a^2 + 2ab + c) + (3c - 4a^2 - ab)$.
2. $(3e^2s + r^3 + 4s^5) - (3r^3 - 4s^5 + 6rs^2) + (10r^2s + 15rs^2)$.
3. $(2x^2 + 5x^3 - 3x + 4) + (3x^2 - x^3 - 7) - (2x^4 - 5x^2 - 3x^3 + +12)$

Ejercicio 1.4. (Análisis)

La pared del dibujo se piensa recubrir con tres trozos de papel de colgadura. Determinar si es suficiente la cantidad de papel para cubrir la pared de la figura.

1. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$	2. $(1, 2, -1, 0); (3, -7, 4, -2)$
3. $(7, 4); (-1, -4)$	4. $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

1.2.3. Multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes y las partes literales, teniendo en cuenta que, al multiplicar potencias de igual base, se dejan la misma base y se suman los exponentes,

Ejemplo 1.6.

$$-2\textcolor{blue}{x}^3\textcolor{red}{y} * 4\textcolor{blue}{x}^2\textcolor{red}{y}^5 = -8\textcolor{blue}{x}^5\textcolor{red}{y}^5$$

cuando se multiplican dos polinomios se aplica la propiedad distributiva, es decir, se multiplica cada uno de los términos del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo polinomio.

Ejercicio 1.5. Realizar los productos entre las siguientes expresiones algebraicas.

1. $(-4x^3y^3) \left(-\frac{3}{5}z^2x^4y \right)$
2. $\left(\frac{2}{3}x^2y^3 \right) \left(-\frac{3}{5}a^2x^4y \right)$
3. $(xy^{10}z + 2x)(xy^2 - y^{10}z)$

4. $(2x - 3x^3 + 4)(3x - 4x^3 + 4x^2)$

5. $(x - y)(x + y)$

6. $(x + y)(x + y)$

7. $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

8. $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

9. $(x + y)^3$

10. $(x - 2)(x + 3)$

1.2.4. División de polinomios

Para dividir dos monomios se dividen los coeficientes y las partes literales teniendo en cuenta las propiedades de la potenciación.

$$\begin{array}{ccc} \text{Dividendo} & & \text{Dividendo} \\ \text{Dividendo} & \xrightarrow{-6x^6y^7 \div -3x^2y^5 = 2x^4y^2} & \xleftarrow{\frac{-6x^6y^7}{-3x^2y^5} = 2x^{6-4}y^{7-5}} \\ -6x^6y^7 & \text{Divisor} & 2x^4y^2 \\ \text{Cociente} & & \text{Cociente} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Divisor} & & \text{Divisor} \end{array}$$

Ejercicio 1.6. Realizar las siguientes divisiones

1. División monomio y monomio

- $\frac{6xy^2}{2xy}$
- $\frac{-177x^2y^2}{9x}$
- $\frac{-3zx^3y^2}{6x^3z}$
- $\frac{-4a^2m^2}{-2am}$

2. División entre polinomio y monomio

- $\frac{6xy^2 + 12xy^2}{2xy}$
- $\frac{-4a^2 - 6m^2}{a^2m}$
- $\frac{-8x^4y^2 - 13xy^2 + 16x^3y^2 + 2x^2y}{2xy}$
- $\frac{21x^7y - 12xy^6}{x^3y}$

Ejemplo 1.7.

1. Multiplicar el monomio $5x$ con el polinomio $-x^3 + 3x^2 - 4x + 10$.

Primero, se aplica la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned} 5x \cdot (-x^3 + 3x^2 - 4x + 10) \\ = 5x \cdot (-x^3) + 5x \cdot (3x^2) + 5x \cdot (-4x) + 5x \cdot (10) \end{aligned}$$

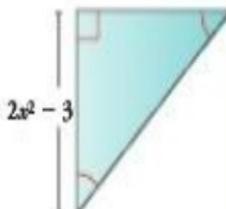
Luego, se efectúan las multiplicaciones aplicando las propiedades de la potenciación.

$$-5x^4 + 15x^3 - 20x^2 + 50x$$

Finalmente, se suman los exponentes.

$$-5x^4 + 15x^3 - 20x^2 + 50x$$

2. Hallar una expresión algebraica que represente el área del siguiente triángulo rectángulo isósceles.



El área del triángulo es igual a la mitad del producto de la base por la altura. Para hallar la expresión algebraica que representa el área del triángulo se realizan los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(2x^2 - 3)(2x^2 - 3)}{2} && \text{Se plantea la expresión algebraica.} \\ &= \frac{2x^2(2x^2 - 3) - 3(2x^2 - 3)}{2} \\ &= \frac{4x^4 - 6x^2 - 6x^2 + 9}{2} && \text{Se aplica la propiedad distributiva.} \\ &= 2x^4 - 6x^2 + \frac{9}{2} && \text{Se simplifica.} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.7. (análisis)

Demuestre que el área morada es igual a $11x + 12$

Por tanto, la expresión que representa el área del triángulo es $2x^4 - 6x^2 + \frac{9}{2}$.

3. Dividir $4a^2 + 7ab + 4b^2 - 8$ entre $2a + b$.

Primero, se ubican el dividendo y el divisor ordenándolos en forma descendente con respecto a una de las variables.

Segundo, se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, para hallar el primer término del cociente.

$$\frac{6a^2}{2a} = 3a$$

$$\begin{array}{r} 6a^2 + 7ab + 4b^2 - 8 \\ \hline 2a + b \\ \hline 3a \end{array}$$

Tercero, se multiplica el primer término del cociente por cada término de divisor y el resultado se le resta al dividendo.

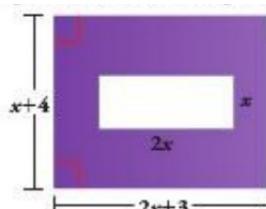
$$\begin{array}{r} 6a^2 + 7ab + 4b^2 - 8 \\ -6a^2 - 3ab \\ \hline 4ab \end{array}$$

Luego, se realiza el mismo procedimiento hasta que el residuo tenga un grado menor que el divisor.

$$\begin{array}{r} 6a^2 + 7ab + 4b^2 - 8 \\ -6a^2 - 3ab \\ \hline 4ab + 4b^2 - 8 \\ -4ab - 2b^2 \\ \hline 2b^2 - 8 \end{array}$$

Div. → 2a + b C. → 3a + 2b
R → 2b² - 8

Finalmente, se concluye que el cociente de la división es $3a + 2b$ y el residuo es $2b^2 - 8$.



1.2.5. División sintética

La **división sintética** o **regla de Ruffini** es un algoritmo que permite hallar el cociente de la división entre un polinomio de la forma $x \pm a$.

A continuación se ilustra mediante un ejemplo este procedimiento para dividir.

EJEMPLOS

- Dividir $a^4 + 6a^3 - 8a - 16$ entre $a + 2$.

Primero, se escriben los coeficientes del polinomio dividendo en su forma ordenada. Como el polinomio no presenta término cuya parte literal es a^2 , se escribe 0 como coeficiente.

$$\begin{array}{r} 1 & 6 & 0 & -8 & -16 \\ & & & & \end{array}$$

Segundo, al lado de dichos coeficientes, se escribe el término independiente del binomio divisor $a + 2$, con signo contrario (-2).

$$\begin{array}{r} 1 & 6 & 0 & -8 & -16 & | -2 \\ & & & & & \end{array}$$

Tercero, se baja el primer coeficiente del dividendo (1) y luego, se multiplica por el valor presente en el divisor (-2). El producto (-2), se escribe debajo del segundo coeficiente del dividendo (6), y se realiza la operación respectiva.

$$\begin{array}{r} 1 & 6 & 0 & -8 & -16 & | -2 \\ & -2 & & & & \\ \hline 1 & 4 & & & & \end{array}$$

Cuarto, el resultado de la operación (4) se multiplica nuevamente por el valor presente en el divisor (-2). El producto (-8), se escribe debajo del tercer coeficiente del dividendo (0), y se realiza la respectiva suma o resta.

$$\begin{array}{r} 1 & 6 & 0 & -8 & -16 & | -2 \\ & -2 & -8 & & & \\ \hline 1 & 4 & -8 & & & \end{array}$$

Quinto, se continúa el proceso hasta llegar al término independiente del polinomio dividendo.

$$\begin{array}{r} 1 & 6 & 0 & -8 & -16 & | -2 \\ & -2 & -8 & 16 & -16 & \\ \hline 1 & 4 & -8 & 8 & -32 & \end{array}$$

Finalmente, los cuatro primeros números de la parte inferior son los coeficientes del polinomio cociente, que es un grado menor al polinomio dividendo. El último resultado (-32) es el residuo de la división.

$$\begin{array}{r} 1 & 6 & 0 & -8 & -16 & | -2 \\ & -2 & -8 & 16 & -16 & \\ \hline 1 & 4 & -8 & 8 & -32 & \end{array}$$

Coefficientes del cociente Residuo

Por tanto, en la división $(a^4 + 6a^3 - 8a - 16) \div (a + 2)$ se obtiene un polinomio de grado 3, es decir:

$$a^4 + 6a^3 - 8a - 16 \div a + 2 = a^3 + 4a^2 - 8a + 8.$$

- El volumen del techo de una casa se puede expresar mediante el polinomio $2x^3 + 23x^2 + 78x + 72$. Hallar el polinomio que expresa el área de la base triangular del techo de la casa si se sabe que el largo se puede modelar mediante la expresión: $x + 6$.



Para hallar el área de la base triangular se tiene en cuenta que

$$\text{Área de la base} = \text{volumen} \div \text{largo}.$$

Luego, es necesario hacer la división

$$(2x^3 + 23x^2 + 78x + 72) \div (x + 6).$$

Se elige la regla de Ruffini para realizar la división.

Se realiza la división mediante la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r} 2 & 23 & 78 & 72 & | -6 \\ & -12 & -66 & -72 & \\ \hline 2 & 11 & 12 & 0 & \end{array}$$

Luego, el área de la base triangular del techo de la casa se expresa mediante $2x^2 + 11x + 12$.

Ejercicio 1.8. (*Análisis*)

El ciclista Nairo Quintana recorre una distancia d que corresponde a $2x^3 - 4x - 2$, llevando una velocidad constante v que se puede expresar mediante $2x + 2$.

Teniendo en cuenta que

$$\text{Velocidad constante} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$



Escriba una expresión que permita establecer el tiempo que tardó el ciclista en recorrer d .

1.3. Productos y Cocientes Notables

Los productos y cocientes notables son generalmente de multiplicaciones y divisiones de expresiones algebraicas.

Los **productos notables** resultan de generalidades ciertos casos de multiplicaciones entre polinomios.

Los productos notables que más se utilizan, se presentan en el siguiente cuadro.

Productos notables	TRIÁNGULO DE PASCAL	POTENCIA DE UNA SUMA
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1	$(a + b)^0 = 1$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	1 1	$(a + b)^1 = 1a + 1b$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	1 2 1	$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$	1 3 3 1	$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 4 6 4 1	$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	1 5 10 10 5 1	$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$
$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$		
$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$		

Ejemplo 1.8. Calculemos el siguiente producto notable.

$$\begin{aligned}(3x - \frac{y}{5})^2 &= (3x)^2 - 2(3x)\left(\frac{y}{5}\right) + \left(\frac{y}{5}\right)^2 \\ &= 9x^2 - \frac{6}{5}xy + \frac{y^2}{25}\end{aligned}$$

Ejercicio 1.9. Determinar el resultado de los siguientes binomios al cubo.

1. $(3k - \frac{1}{5}z)^3$

2. $(p - \sqrt{2})^3$

Los **cocientes notables** son divisiones exactas entre polinomios que no se necesitan efectuar para hallar sus cocientes.

Los cocientes notables que más se utilizan, se presentan en el siguiente cuadro.

- $\frac{a^n + b^n}{a - b} \rightarrow a^n + b^n$ nunca es divisible por $a - b$.
- $\frac{a^n - b^n}{a - b} \rightarrow a^n - b^n$ siempre es divisible por $a - b$, para $n \in \mathbb{Z}^+$.
- $\frac{a^n - b^n}{a + b} \rightarrow a^n - b^n$ es divisible por $a + b$ solo si n es par, para $n \in \mathbb{Z}^+$.
- $\frac{a^n + b^n}{a + b} \rightarrow a^n + b^n$ es divisible por $a + b$ solo si n es impar, para $n \in \mathbb{Z}^+$.

Cocientes notables
$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$
$\frac{x^2 - a^2}{x + a} = x - a$
$\frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2$
$\frac{x^3 + a^3}{x + a} = x^2 - ax + a^2$

Observemos en forma general,

Cociente de la forma	Potencia $n \in \mathbb{Z}^+$	Forma para Resolverlo
$\frac{x^n - a^n}{x - a}$	Pares o impares	$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}$
$\frac{x^n - a^n}{x + a}$	Pares	$\frac{x^n - a^n}{x + a} = x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots - xa^{n-2} + a^{n-1}$
$\frac{x^n + a^n}{x - a}$	Impares	$\frac{x^n + a^n}{x + a} = x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots - xa^{n-2} + a^{n-1}$

Ejemplo 1.9. Resolver el siguiente cociente notable

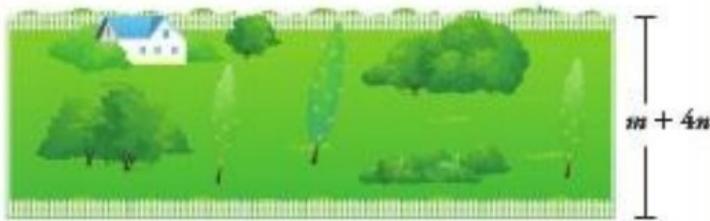
$$\frac{m^5 - y^5}{m - y} = m^4 + m^3y + m^2y^2 + my^3 + y^4$$

Ejercicio 1.10. Resolver el siguiente cociente notable

$$\frac{9w^2 - 16a^2}{3w + 4a}$$

Ejercicio 1.11. (*Análisis*)

Escribir el procedimiento que harías para hallar la longitud de la cerca si se sabe que su área es : $m^5 + 10.24n^5$ unidades cuadradas, y se conoce el ancho de la finca.



1.4. Factorización

1.4.1. Concepto de factorización

Factorizar un polinomio, significa descomponerlo en factores primos que son polinomios, diferentes a él.

Todo polinomio que no se puede expresar como producto de polinomios más simples, se le llama **polinomio primo**.

En matemáticas la **factorización** es una técnica que consiste en la descomposición en factores de una expresión algebraica (que puede ser un número, una suma o resta, una matriz, un polinomio, etc.) en forma de producto.

1.4.2. Casos de factorización

Factor común:

El **Factor común** es el producto del máximo común divisor de los coeficientes de todos los términos por las variables comunes de todos los términos con sus respectivos exponentes mínimos.

- **Primero**, se halla el factor común, considerando sus características.
- **Segundo**, se divide cada término del polinomio dado entre el factor común extraído.
- **Por último**, se escribe el factor común y, dentro de un paréntesis, se escriben los resultados de cada división.

Ejemplo 1.10. Factoriar el siguiente polinomio

$$21m^2n - 3m^2n^3 + 7m^4n^2$$

Paso 1: Determinemos el factor común, observemos $mcd(21, 3, 7) = 1$ por tanto el factor común es nm^2 , luego la factorización es:

Paso 2 y 3:

$$21m^2n - 3m^2n^3 + 7m^4n^2 = nm^2(21 - 3n^2 + 7m^2n)$$

Agrupación:

En algunos casos, en el polinomio que se busca factorizar no hay un factor común para todos sus términos, pero al agrupar estos sí se puede determinar una expresión común para cada agrupación.

$$\begin{aligned} am + bm + an + bn &= (am + an) + (bm + bn) && \text{Se agrupan los términos.} \\ &= a(m + n) + b(m + n) && \text{Se factoriza cada paréntesis por factor común.} \\ &= (m + n)(a + b) && \text{Se factoriza por factor común polinomio.} \end{aligned}$$

Por tanto, $am + bm + an + bn = (m + n)(a + b)$.

Ejemplo 1.11. Factorizar el siguiente polinomio $x^4 - y + xy - x^3$

$$\begin{aligned} x^4 - y + xy - x^3 &= x^4 - x^3 + xy - y \\ &= (x^4 - x^3) + (xy - y) \\ &= x^3(x - 1) + y(x - 1) \\ &= (x - 1)(x^3 + y) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.12. Factorizar el siguiente polinomio

$$4r^5 - 6r^4 + 2r^3 + 2r^2 - 3r + 1$$

Diferencia de Cuadrados:

La **diferencia de cuadrados** se factoriza como la suma de las raíces cuadradas de los dos términos por la diferencia de las raíces cuadradas de los dos términos

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Para identificar cuándo un binomio es la diferencia de dos cuadrados, se verifican las siguientes condiciones.

- El binomio debe tener dos términos, separados por el signo menos.
- Los dos términos deben estar elevados al cuadrado, es decir, se les puede sacar raíz exacta.

Ejemplo 1.12. Factorizar el siguiente polinomio $100m^2 - 81n^2$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 10m & = & \sqrt{100m^2} & & & & & & \\ & & \uparrow & & & & & & \\ 100m^2 & - & 81n^2 & = & (10m + 9n)(10m - 9n) & & & & \\ & & \downarrow & & & & & & \\ & & \sqrt{81n^2} & = & 9n & & & & \end{array}$$

Ejemplo 1.13. Factorizar,

Diferencia-Suma de Cubos:

La **diferencias de cubos** se descompone en dos factores, el primer factor tiene la diferencia de las raíces cúbicas de cada término y el segundo factor es un trinomio cuyos términos son el cuadrado de la primera raíz cúbica, más el producto de las raíces cúbicas, más el cuadrado de la segunda raíz cúbica, es decir,

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

La expresión de la forma $x^3 - a^3$ se denomina diferencia de cubos y en ella se identifican las siguientes características:

- Sus términos tienen diferentes signo.
- Cada uno de sus términos tienen raíz cúbica exacta.

Trinomio cuadrado perfecto:

Ejemplo 1.14. Factorizar el siguiente polinomio $125x^3 - y^3$.

$$\begin{array}{rcl} 5x = & \sqrt[3]{125x^3} \\ & \uparrow \\ 125x^3 & - & y^3 \\ & \downarrow \\ \sqrt[3]{y^3} = & y \end{array} = (5x - y)((5x)^2 + 5xy + (y)^2)$$

por tanto,

$$125x^3 - y^3 = (5x - y)(25x^2 + 5xy + y^2)$$

La **suma de cubos** se descompone en dos factores, el primer factor contiene la suma de las raíces cúbicas de cada término y el segundo factor es un trinomio cuyos términos son el cuadrado de la primera raíz cúbica, menos el producto de las raíces cúbicas, más el cuadrado de la segunda raíz cúbica, es decir.

$$x^3 + a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

el problema es análogo al anterior caso de factorización.

Ejemplo 1.15. Factorizar el siguiente binomio.

$$\begin{array}{rcl} 5x = & \sqrt[3]{125x^3} \\ & \uparrow \\ 125x^3 & + & y^3 \\ & \downarrow \\ \sqrt[3]{y^3} = & y \end{array} = (5x + y)((5x)^2 - 5xy + (y)^2)$$

Trinomio cuadrado perfecto $x^2 + 2xy + y^2$ o $x^2 - 2xy + y^2$

Un trinomio ordenado respecto a una de sus variables es cuadrado perfecto cuando:

- El primer y el tercer término son cuadrados perfectos, es decir, tienen raíz cuadrada exacta.
- El segundo término es el doble producto de las raíces cuadradas del primer y tercer término.
- El primer y tercer término siempre son positivos, el segundo término puede ser positivo o negativo.

El trinomio cuadrado perfecto, cuando está ordenado se factoriza así:

- Si el segundo término es positivo, se eleva al cuadrado la suma de las raíces cuadradas del primer y tercer términos.
- Si el segundo término es negativo, se eleva al cuadrado la diferencia de las raíces cuadradas del primer y tercer términos.

Ejemplo 1.16. Factorizar el siguiente polinomio

$$\frac{1}{81}x^2 + \frac{8}{9}x + 16$$

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{81}x^2 & + & \frac{8}{9}x & + & 16 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \frac{1}{9}x & & & & 4 & & \\ & \searrow & & & \swarrow & & \\ & & \frac{8}{9}x & & & & \end{array}$$

por tanto,

$$\frac{1}{81}x^2 + \frac{8}{9}x + 16 = \left(\frac{1}{9}x + 4\right)^2$$

Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Las características de los términos del trinomio ordenado de la forma $x^2 + bx + c$:

- El primer término tiene coeficiente 1 y es un cuadrado perfecto.
- El segundo término contiene la misma variable que el primer término, elevado a la mitad del exponente que tiene el primer término.
- El tercer término es un término independiente.

factorizar el siguiente trinomio

$$x^2 + 9x + 14 = (\textcolor{blue}{x} + 7)(\textcolor{blue}{x} + 2)$$

factorizar el siguiente trinomio

$$y^6 - 2y^3 - 48 = (\textcolor{blue}{y}^3 - 8)(\textcolor{blue}{y}^3 + 6)$$

Para factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$, se realiza el siguiente proceso.

- #: **Primero**, se halla la raíz cuadrada del primer término y se escribe en dos paréntesis.
- #: **Luego**, se buscan dos números tales que su producto sea el término independiente c y su suma el coeficiente b del segundo término.
- #: **Finalmente**, se expresa el producto en dos factores de tal forma que en cada uno se ubique la suma de la raíz cuadrada del primer término con los números r y s . Así:

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Las características de los términos del trinomio ordenado de la forma $ax^2 + bx + c$:

- El primer término tiene coeficiente diferente a 1.
- El segundo término contiene la raíz cuadrada de la variable del primer término.
- El tercer término es un término independiente.

factorizar el siguiente trinomio

$$\begin{aligned}
 15x^4 - 23x^2 + 4 &= \frac{(15x^2)^2 - 23(15x^2) + 60}{15} \\
 &= \frac{(15x^2 - 20)(15x^2 - 3)}{15} \\
 &= \frac{5(3x^2 - 20)3(5x^2 - 1)}{15} \\
 &= \frac{5(3x^2 - 4)3(5x^2 - 1)}{15} \\
 &= (3x^2 - 4)(5x^2 - 1)
 \end{aligned}$$

Fórmulas de factorización de polinomios	
Factor común	$ax + bx = x(a + b)$
Factor común por agrupación de términos	$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$
Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Trinomio cuadrado perfecto	$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$
Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
Trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$	$x^{2n} + bx^n + c = (x^n + M)(x^n + m)$ donde $b = M + m$; $c = M \times m$.
Trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$	$ax^{2n} + bx^n + c = (px^n + r)(qx^n + s)$ donde $a = p \times q$, $b = ps + rq$ y $c = r \times s$.
Cubo perfecto	$x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3 = (x \pm y)^3$

1.5. Fracciones algebraicas y Simplificación expresiones algebraicas

Una **fracción algebraica** es el cociente indicado de dos polinomios, donde el divisor es diferente de cero.

Ejemplo 1.17.

$$\frac{27x^2y^6}{12x^3y^4}, \quad \frac{3x^2 + x + 1}{2x^4 + 7}$$

Simplificar una fracción significa transformarla de una fracción reducible a una frac-

ción irreducible. Mediante la factorización de polinomio se simplifican los factores comunes.

Ejemplo 1.18. Simplificar cada fracción algebraica. $\frac{15x^2y^3}{21x^3y^2}$

$$\begin{aligned}\frac{15x^2y^3}{21x^3y^2} &= \frac{5x^2y^3}{7x^3y^2} && \text{Se simplifica por 3} \\ &= \frac{5}{7}x^{2-3}y^{3-2} && \text{Prop. Potenciación} \\ &= \frac{5}{7}x^{-1}y^1 && \text{Se relaiza las restas} \\ &= \frac{5y}{7x} && \text{Se presenta con exponentes positivos}\end{aligned}$$

Ejemplo 1.19. Simplificar cada fracción algebraica. $\frac{x^2 - 9x + 8}{2x^2 - x - 1}$

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 9x + 8}{2x^2 - x - 1} &= \frac{(x - 8)(x - 1)}{(2x + 1)(x - 1)} && \text{Se factoriza el numerador y denominador} \\ &= \frac{(x - 8)}{(2x + 1)} && \text{Se simplifica}\end{aligned}$$

1.6. Operaciones con fracciones algebraicas

1.6.1. Adición y sustracción de fracciones algebraicas

Para sumar o restar fracciones algebraicas se deben tener en cuenta dos casos:

Caso 1: Las fracciones tienen el mismo denominador.

Para sumar o restar fracciones algebraicas con igual denominador se suman o se restan los numeradores y se deja el denominador común. Luego, si es posible, se simplifica el resultado.

Ejemplo 1.20. Realizar la siguiente adición :

$$\begin{aligned} \frac{6m-n}{5n} + \frac{2m-7n}{5n} + \frac{23n-8m}{5n} \\ \frac{6m-n}{5n} + \frac{2m-7n}{5n} + \frac{23n-8m}{5n} &= \frac{(6m-n) + (2m-7n) + (23n-8m)}{5n} \\ &= \frac{0m-15n}{5n} \\ &= 3 \end{aligned}$$

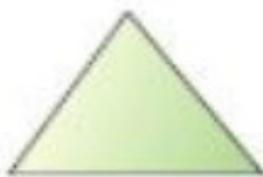
Caso 2: Las fracciones tienen distinto denominador.

Para sumar o restar fracciones algebraicas con diferente denominador, se realizan los siguientes pasos:

- Se halla el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores.
- Se simplifican las fracciones de tal forma que el denominador de cada fracción sea igual al mcm de los denominadores.
- Se suman los numeradores y se deja el denominador común.

Ejemplo 1.21. El siguiente ejemplo, nos permite identificar el proceso para fracciones algebraicas en los cuales sus denominadores son distintos.

- 2. Hallar una expresión algebraica que represente la diferencia entre el área del triángulo (A_T) y el área del pentágono (A_p).**



$$A_T = \frac{m - 1}{m^2 + 3m + 2}$$



$$A_p = \frac{m}{m^2 - 1}$$

Para hallar la diferencia entre las áreas se realizan los siguientes pasos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{m - 1}{m^2 + 3m + 2} - \frac{m}{m^2 - 1} && \text{Se plantea la resta.} \\
 &= \frac{m - 1}{(m + 1)(m + 2)} - \frac{m}{(m + 1)(m - 1)} && \text{Se factorizan los denominadores.} \\
 &= \frac{(m - 1)(m - 1) - (m)(m + 2)}{(m + 1)(m + 2)(m - 1)} && \text{Se simplifica cada fracción y se indica la resta.} \\
 &= \frac{(m^2 - 2m + 1) - (m^2 + 2m)}{(m + 1)(m + 2)(m - 1)} && \text{Se efectúan las multiplicaciones.} \\
 &= \frac{1 - 4m}{(m + 1)(m + 2)(m - 1)} && \text{Se simplifica el numerador.}
 \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que la diferencia entre las áreas es:

$$A_T - A_p = \frac{1 - 4m}{m^3 + 2m^2 - m - 2}$$

1.6.2. Multiplicación de fracciones algebraicas.

Para multiplicar fracciones algebraicas se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí. Luego, se simplifica al fracción resultante si es posible.(multiplicación Directo)

Ejemplo 1.22. Multiplicar la siguientes fracciones algebraicas.

$$\begin{aligned}
 \frac{y}{y-2} * \frac{y^2 - 5y + 6}{y^2 - 4y + 3} * \frac{2y - 4}{6y} &= \frac{y}{y-2} * \frac{(y-2)(y-3)}{(y-1)(y-3)} * \frac{2(y-2)}{6y} \\
 &= \frac{y(y-2)(y-3)2(y-2)}{(y-2)(y-1)(y-3)6y} \\
 &= \frac{(y-2)}{3(y-1)}
 \end{aligned}$$

1.6.3. División de fracciones algebraicas.

Para dividir fracciones algebraicas se multiplica la primera fracción por el inverso multiplicativo de la segunda fracción.(multiplicación en cruz)

Ejemplo 1.23.

$$\begin{aligned}
 \frac{b^2 - 5b + 6}{6bk} \div \frac{2b - 6}{3b^2k} &= \frac{(b-3)(b-2)}{6bk} \div \frac{2(b-3)}{3b^2k} \\
 &= \frac{(b-3)(b-2)}{6bk} * \frac{3b^2k}{2(b-3)} \\
 &= \frac{(b-3)(b-2)3b^2k}{2(b-3)6bk} \\
 &= \frac{b(b-2)}{4}
 \end{aligned}$$

1.7. Taller

1.) Reducción de más de dos términos semejantes de signos distintos.

- a) $-a^{x+1} - 7a^{x+1} - 11a^{x+1} - 20a^{x+1} + 26a^{x+1}$
- b) $21ab + 52ab - 60ab + 84ab - 31ab - ab - 23ab$
- c) $\frac{5}{6}a^3b^2 + \frac{2}{3}a^3b^2 - \frac{1}{4}a^3b^2$
- d) $84m^2x - 501m^2x - 715m^2x + 231m^2x + 165m^2x$
- e) $\frac{3}{25}a^{m-1} - \frac{7}{50}b^{m-2} + \frac{3}{5}a^{m-1} - \frac{1}{25}b^{m-2} - \frac{1}{5}a^{m-1} + \frac{1}{5}b^{m-2}$
- f) $x^4y - x^3y^2 + x^2y - 8x^4y - x^2y - 10 + x^3y^2 - 9 + 21x^4y - y^3 + 50$

2.) Suma y resta de expresiones algebraicas (Polinomios).

1. Hallar la suma de las siguientes expresiones algebraicas.

- a) $a + b - c + d; a - b + c - d; -2a + 3b - 2c + d; -3a - 3b - 4c - d$
- b) $7x + 2y - 4; 9y - 6z + 5; -y + 3z - 6; -5 + 8x - 3y$
- c) $-2m + 3n - 6; 3m - 8n + 8; -5m + n - 10$
- d) $5ab - 3bc + 4cd; 2bc + 2cd - 3de; 4bc - 2ab + 3de; -3bc - 6cd - ab$
- e) $p + q + r; -2p - 6q + 3r; p + 5q - 8r$
- f) $6m^{a+1} - 7m^{a+2} - 5m^{a+3}; 4m^{a+1} - 7m^{m+2} - m^{a+3}; -5m^{a+1} + 3m^{a+2} + 12^{a+3}$
- g) $(-3x^2 + 12x - 7) + (2 - 3x + 4x^2) + \left(\frac{2}{4}x^2 + \frac{1}{2} + \frac{5}{3}x\right)$

2. Restar:

- a) $x^6 - \frac{7}{9}x^4y^2 + \frac{1}{11}x^2y^4 - y^6 + xy^5$ de $-\frac{7}{9}x^5y + \frac{2}{3}x^4y^2 - \frac{1}{8}x^3y^3 - x^2y^4 + xy^5 + \frac{2}{13}y^6$
- b) $a^2 - ab$ de $3ab + b^2$
- c) $a^3 + b^3$ de $5a^2b + 6ab^2 - 2b^3$
- d) $x^4 - 18x^2y^2 + 15y^4$ de $-16x^3y - 6xy^3 - 9y^4$

3. Simplificar las siguientes expresiones

- a) $3a + \{-5x - [-a + (9x - a - x)]\}$
- b) $8x^2 + [-2xy + y^2] - \{-x^2 + xy - 3y^2\} - (x^2 - 3xy)$
- c) $-\{-[-(a + b - c)]\} - \{-\{(c - a + b)\}\} + \{-\{-a + (-b)\}\}$
- d) $x^2 - \{-7xy + [-y^2 + (-x^2 + 3xy - 3y^2)]\}$

3.) Producto de expresiones algebraicas (Polinomios).

a) $\left(\frac{2}{3}a^2b\right) \left(-\frac{3}{4}a^3m\right)$

- b) $\left(-\frac{5}{6}x^2y^3\right)\left(-\frac{3}{10}x^my^{n+1}\right)$
c) $\left(\frac{1}{2}a^2\right)\left(-\frac{4}{5}a^3b\right)$
d) $\left(-\frac{2}{11}a^{x+1}b^{x-3}c^2\right)\left(-\frac{44}{7}a^{x-3}b^2\right)$
e) $(2a)(-3a^2b)(-ab^3)$
f) $(3x^2)(-x^3y)(-y^2x)$
g) $(4x^2)(-5x^3y^2)(4yx)(-x)$
h) $\left(-\frac{3}{5}m^3\right)\left(-\frac{1}{10}a^xm^t\right)(-5a^2x)$
i) $(3x^3 - x^2)(-2x)$
j) $(3ab)(a^3 - 4a^2)$
k) $-3a^2x^3(x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 7x + 5)$
l) $\left(\frac{2}{3}a^2x^3y^2\right)\left(\frac{2}{3}x^4 + y^2 - \frac{3}{5}x^2y^4 + \frac{5}{6}y^6\right)$
m) $\left(\frac{5}{3}x^2 - 4y^4\right)\left(\frac{4}{7}x^4 + y^2 - \frac{9}{25}x^2y^4 - \frac{2}{6}y^6\right)$
n) $(3x^2 - 12x + 2)(1 + 3x^3 - 3x^2)$

4.) División entre expresiones algebraicas. (Polinomios).

- $a^2 + 2a - 3 \div a + 3$
- $a^2 - 2a - 3 \div a + 1$
- $5a^2 + 8ab - 21b^2 \div a + 3b$
- $5a^2 + 8ab - 21b^2 \div a + 3b$
- $x^2 - 8x + 1 \div -x + 3$
- $x^4 - 9x^2 + x + 3 \div x + 3$
- $\frac{a^4 + a}{a + 1}$
- $\frac{2x^4 - x^3 + 7x - 3}{2x + 3}$
- $x^4 - x^2 - 2x - 1 \div x^2 - x - 1$
- $x^6 - 2x^5 + 6x^3 - 7x^2 - 4x + 6 \div^4 -3x^2 + 2$

5.) División entre expresiones algebraicas $P(x)$ entre $(x - a)$ (División sintética).

- $$\frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$$
- $$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x + 3}$$
- $$\frac{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}{x + 3}$$

6.) Casos de factorización.

a) Factor común

- $a^3 + a^2 + a$
- $4x^2 - 8x$
- $2a^2x + 2ax - 3ax$
- $34ax^2 + 51a^2y - 68ay^2$
- $93a^3x^2y - 62a^2x^3y^3 - 124a^2x$
- $a^6 - 3a^4 + 8a - 4a^2$
- $a^20 - a^16 + a^12 - a^8 + a^4 - a^2$
- $12m^2n + 24m^3n^2 - 36m^4n^3 + 48m^5n^4$
- $3a^2b + 6ab - 5a^3b^2 + 8a^2bx + 4ab^2m$
- $x^3 + x^5 - x^7$
- $(x^2 + 2)(m - n) + 2(m - n)$
- $(x - 3)(x - 4) + (x - 3)(x + 4)$
- $(a + b - 1)(a^2 + 1) - a^2 - 1$
- $(3x + 2)(x + y - z) - (3x + 2) - (x + y - 1)(3x + 2)$
- $\frac{1}{4}x^3b - \frac{2}{16}xa$
- $\frac{x^4}{4} + \frac{2}{8}x + \frac{7}{4}x^3y$

b) Agrupación

- $a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2$
- $3a - b^2 + 2b^2x - 6ax$
- $x + x^2 - xy^2 - y^2$
- $6ax + 3a + 1 + 2x$
- $3m - 2n - 2nx^4 + 3mx^4$
- $3a^2 - 7b^2x + 3ax - 7ab^2$
- $a^3 + a^2 + a + 1$

- $2x^3 - nx^2 + 2xz^2 - nz - 3ny^2 + 6xy^2$
- $a^3 + a + a^2 + 1 + x^2 + a^2x^2$

c) Diferencia de cuadrados

- $1 - x^2$
- $\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{9}$
- $a^{2n} - 9b^{4m}$
- $\frac{1}{121} + a^{10n}6d^8$
- $100 - x^2y^6$
- $1 - 9a^2b^4c^6d^8$
- $4a^2 - 9$
- $196x^2y^4 - 225z^{12}$
- $a^{10} - 49b^{12}$
- $4x^2 - 8181y^4$
- $100m^2n^4 - \frac{1}{16}x^6$
- $16x^{6m} - \frac{y^{2n}}{49}$
- $4x^2 - (x + y)^2$
- $(a + x)^2 - (x + 2)^2$
- $4 - (a + 1)^2$
- $36(m + n)^2 - 121(m - n)^2$

d) Diferencias(Suma) de cubos

- 1) $27 - 125x^3$
- 2) $8x^6 + 64n^9$
- 3) $8x^3 + y^3$
- 4) $y^3 + 1$
- 5) $1 - 216m^3$
- 6) $512 + 27a^9$
- 7) $1 - 8x^3$
- 8) $1 + 729x^6$
- 9) $27m^6 + 343n^3$
- 10) $8x^6 + 729$
- 11) $1 + (x + y)^3$
- 12) $(x + 2y)^3 + 1$
- 13) $(m - 2)^3 + (m + n)^3$

14) $64(m+n)^3 - 125$

e) Trinomio cuadrado perfecto

1) $4x^2 - 20xy + 20xy$

2) $1 - 16ax^2 + 64a^2x^4$

3) $1 + a^{10} - 2a^5$

4) $9 - 6x + x^2$

5) $a^2 - 24am^2x^2 + 144m^4x^4$

6) $\frac{n^2}{9} + 2mn + 9m^2$

7) $\frac{1}{4} - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{9}$

8) $y^4 + 1 + 2y^2$

9) $16 - 104x^2 + 169x^4$

f) Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

1) $x^2 + 5x + 6$

2) $x^2 - 7x + 12$

3) $x^2 - 5x - 14$

4) $n^2 + 28n - 29$

5) $x^2 + 6x - 216$

6) $x^2 + 7x + 10$

7) $a^2 + 7a + 6$

8) $y^2 - 9y + 20$

9) $a + 33 - 14a$

10) $x^2 - 7x - 30$

11) $m^2 - 20m - 300$

12) $x^2 + 8x - 180$

13) $n^2 + 43n + 432$

14) $m^2 - 8m - 1008$

15) $x^6 + 7x^3 - 44$

16) $a^2b^2 - ab - 42$

17) $(5x)^2 - 9(5x) + 8$

18) $x^2 - 5ax - 36a^2$

19) $m^2 + mn - 56n^2$

20) $x^4y^4 + x^2y^2 - 132$

g) Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

1) $6x^4 + 5x^2 - 6$

- 2) $5x^6 + 4x^2 - 6$
- 3) $20x^2y^2 + 9xy - 20$
- 4) $21x^2 - 29xy - 72y^2$
- 5) $12 - 7x - 10x^2$
- 6) $6x^2 + 5x - 21$
- 7) $-8x^4 + 2x^2 + 15$

h) Combinación de casos (Doble factorización)

- 1) $5a^2 - 5$
- 2) $x^4 - y^4$
- 3) $8x^3 + 8$
- 4) $x^3 - 6x^2 - 7x$
- 5) $2a^3 - 2$
- 6) $a^4 - (a + 2)^2$
- 7) $81x^4y + 3xy^4$
- 8) $16x^3 - 48x^2y + 36xy^2$
- 9) $7x^6 + 32a^2x^4 - 15a^4x^2$
- 10) $30x^2 - 9a^3 - ax^2$

7.) Miscelánea de ejercicios (factorizar las siguientes expresiones)

- a) $x^2 - 9x + 8$
- b) $2x^2 - x - 1$
- c) $m^2 + 3m + 2$
- d) $x^2 - 4x + 3$
- e) $y^2 - 5y + 6$
- f) $4x^2 - 25$
- g) $x^2 + 11x + 18$
- h) $6x^2 - x - 1$
- i) $2x^2 - 3x - 5$
- j) $2x^2 + 3x - 2$
- k) $x^2 - 4$
- l) $x^2 - 2x - 35$
- m) $2x^2 - 17x + 21$
- n) $6x^3 - 7x$

- n)* $8x^2 + 9x$
o) $x^2 - 16$
p) $x^2 + 2x - 3$

8.) Simplificación de fracciones algebraicas.

- $\frac{4a^2b^5}{6a^3b^3m}$
- $\frac{17x^3y^4z^6}{34x^7y^8z^{10}}$
- $\frac{2a^2}{4a^2 - 4ab}$
- $\frac{x^2 - 5x + 6}{2ax - 6a}$
- $\frac{2xy - 2x + 3 - 3y}{18x^3 + 15x^2 - 63x}$
- $\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$
- $\frac{x^3 + y^3}{x + y}$
- $\frac{a^2 - ab - 6b^2}{a^3x - 6a^2bx + 9ab^2x}$
- $\frac{x^3 + 4x^2 - 21x}{x^3 - 9x}$

9.) Suma y resta de fracciones algebraicas.

- a) $\frac{x-2}{4} + \frac{2x+2}{6}$
- b) $\frac{2}{5a^2} + \frac{1}{3ab}$
- c) $\frac{n}{m^2} + \frac{3}{mn} + \frac{2}{m}$
- d) $\frac{1}{3x+3} + \frac{1}{2x-2} + \frac{1}{x^2-1}$
- e) $\frac{a-1}{a^2-4} + \frac{a-2}{a^2-a-6} + \frac{a+6}{a^2-5a+6}$
- f) $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x+1}{(x-1)^2}$

$$g) \frac{2}{a^2 - ab} + \frac{2}{ab + b}$$

$$h) \frac{3}{a} + \frac{2}{5a - 3} + \frac{1 - 85a}{25a^2 - 9}$$

$$i) \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)(x - 2)} + \frac{x + 1}{(x - 1)(x + 2)(x + 3)}$$

$$j) \frac{x - 3}{4} - \frac{x - 2}{8}$$

$$k) \frac{a + 5b}{a^2} - \frac{b - 3}{ab}$$

$$l) \frac{2}{3mn^2} - \frac{1}{2m^2n}$$

$$m) \frac{1}{a^2 - ab} + \frac{1}{ab} + \frac{a^2 + b^2}{a^3b - ab^3}$$

10.) Multiplicación y división de expresiones algebraicas.

$$a) \left(\frac{2a^2}{6b^2} \right) \left(\frac{6b^2}{4a} \right)$$

$$b) \left(\frac{5x + 25}{14} \right) \left(\frac{7x + 7}{10x + 50} \right)$$

$$c) \left(\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 16} \right) \left(\frac{x^2 - 2x - 8}{x^3 + x^2} \right) \left(\frac{x^2 + 4x}{x^2 + 4x + 4} \right)$$

$$d) \left(\frac{a^2 - 5a + 6}{3a - 15} \right) \left(\frac{6a}{a^2 - a - 30} \right) \left(\frac{a^2 - 25}{2a - 4} \right)$$

$$e) \left(\frac{x^2 + 4ax + 4a^2}{3ax - 6a^2} \right) \left(\frac{2ax - 4a^2}{ax + a} \right) \left(\frac{6a + 6x}{x^2 + 3ax + 2a} \right)$$

$$f) \left(\frac{x^2}{3y^2} \right) \div \left(\frac{2x}{y^3} \right)$$

$$g) \left(\frac{ax^2 - 30x}{15x^3 + 15x^2} \right) \div \left(\frac{4x - 6}{x + 1} \right)$$

$$h) \left(\frac{x^3 - 121x}{x^2 - 29} \right) \div \left(\frac{x^2 - 11x}{x + 7} \right)$$

$$i) \left(\frac{a^2 - 6a + 5}{a^2 - 15a + 56} \right) \div \left(\frac{a^2 + 2a - 35}{a^2 - 5a - 24} \right)$$

$$j) \left(\frac{15x^2 + 7x - 2}{25x^3 - x} \right) \div \left(\frac{6x^2 + 13x + 16}{25x^2 + 10x + 1} \right)$$

1.8. Números complejos

Números imaginarios:

Los números imaginarios tienen variadas aplicaciones en diferentes campos. En electrónica para procesar, restaurar y optimizar señales, entre otros.

$$x^2 + a = 0$$

donde a es un número entero positivo, la anterior ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales.

Para dar solución a dicha ecuación, se generó un nuevo conjunto numérico denominado **números imaginarios**.

La unidad principal o unidad imaginaria se representa con la letra i y cumple la siguientes propiedades.

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = 1$$

Ejemplo 1.24. Escribir las siguientes raíces como números imaginarios puros.

- $\sqrt{-49} = \sqrt{49}i = 7i$
- $4\sqrt{-180} = 4\sqrt{180} = 4\sqrt{2^2 * 3^2 * 5}i = 4 * 2 * 3\sqrt{5}i = 24\sqrt{5}i$
- $\sqrt{-9} = 3i$

1.9. Potencias de i

Las potencias de la **unidad imaginaria** i se obtienen aplicando las propiedades de la potenciación y la definición de i, i^2 , así:

- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$

- $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$

En general, para determinar una potencia de i , con exponente entero, se procede así:

- Se expresa el exponente de la forma $4n + r$, donde n es un número entero y r es un número entero positivo o cero.
- Se determina la potencia aplicando las propiedades de la potenciación y las potencias básicas de i .

Ejemplo 1.25. Hallar i^{21} .

$$\begin{aligned} i^{21} &= i^{20} \cdot i \\ &= (i^4)^5 \cdot i \\ &= (1)^5 \cdot i \\ &= i \end{aligned}$$

Ejemplo 1.26. Hallar i^{2021} .

$$\begin{aligned} i^{2021} &= i^{4*505} \cdot i \\ &= (i^4)^{505} \cdot i \\ &= (1)^{505} \cdot i \\ &= i \end{aligned}$$

El conjunto de los números complejos Está formado por los números de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales. Este conjunto se simboliza con la letra \mathbb{C} , y se define como sigue:

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

En todo número complejo $a + bi$ se distinguen dos partes: la **parte real** a y la parte: la **parte imaginaria** bi .

Ejemplo 1.27. En el complejo $-2 + \sqrt{3}i$ la parte real es -2 y la parte imaginaria es $\sqrt{3}$

Todo número complejo se puede expresar de dos formas, así:

- **Forma binomial**, como se expresa por definición, es decir, de la forma $a + bi$

Ejemplo 1.28.

$$z = 2 - i, \quad w = 8 - 2i$$

- **Forma cartesiana,** Como pareja ordenada donde la primera componente es la parte real y la segunda componente es el coeficiente de la parte imaginaria, es decir, todo numero de la forma $a + bi$ se puede expresar de la forma cartesiana como (a, b) .

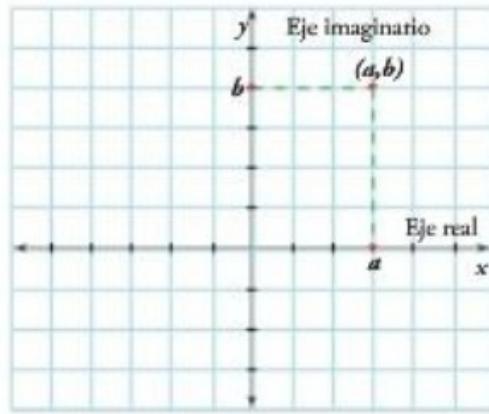
Ejemplo 1.29.

$$z = 2 - i \longrightarrow (2, -1), \quad w = 8 - 2i \longrightarrow (8, -2)$$

1.10. Representación gráfica de los números complejos

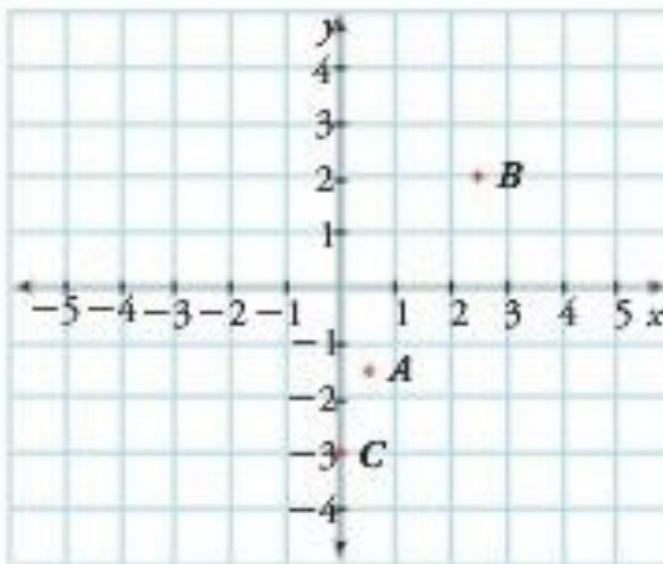
Todo número complejo se puede representar geográficamente sobre el **plano complejo**. El Plano complejo es un sistema de coordenadas rectangulares, en el cual el eje horizontal es el **eje real** y el eje vertical es el **eje imaginario**.

Así, para representar el número $a + bi$ se usa su forma cartesiana (a, b) donde la primera componente a se ubica sobre el eje real, y la segunda componente b se ubica sobre el eje imaginario.



Ejemplo 1.30. Representar en el plano complejo los siguientes números complejos

$$A = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i, \quad B = \frac{5}{2} + 2i, \quad C = -3i$$

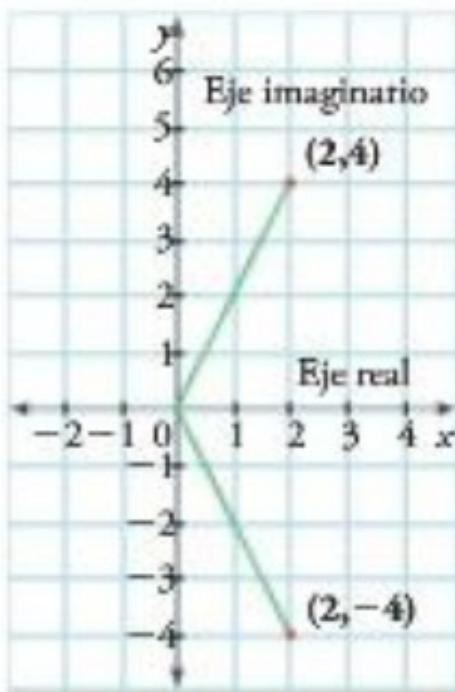


1.10.1. Conjugado de un número complejo

El **conjugado de un número complejo** es un número que se diferencia del anterior en el signo de la parte imaginaria.

El conjugado de un número complejo z se simboliza con \bar{z}

Si $z = a + bi$, entonces, $\bar{z} = a - bi$. Un número complejo z y su conjugado \bar{z} se ubican en forma simétrica respecto al eje real del plano complejo.



Ejemplo 1.31. Observemos los siguientes ejemplos

- Si $z = 3 + 2i$, entonces, $\bar{z} = 3 - 2i$
- Si $z = -1 - 2i$, entonces, $\bar{z} = -1 + 2i$
- Si $z = -2i$, entonces, $\bar{z} = 2i$
- Si $z = 3i + 3$, entonces, $\bar{z} = 3 - 3i$

1.11. Operaciones con números complejos

1.11.1. Adiciones de complejos

Para sumar dos o más números complejos se suman, respectivamente, las partes imaginarias.

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$, entonces,

$$\begin{aligned} z + w &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (a + c) + (b + d)i \end{aligned}$$

Ejemplo 1.32. Si $z = -3 + 2i$ y $w = -1 - 3i$, entonces,

$$\begin{aligned} z + w &= (-3 + 2i) + (-1 - 3i) \\ &= (-3 - 1) + (2 - 3)i \\ &= -4 - i \end{aligned}$$

por otro lado,

Ejemplo 1.33. Si $z = -\frac{3}{2} + 2i$ y $w = -1 - \frac{2}{5}i$, entonces,

$$\begin{aligned} z + w &= \left(-\frac{3}{2} + 2i\right) + \left(-1 - \frac{2}{5}i\right) \\ &= \left(-\frac{3}{2} - 1\right) + \left(2 - \frac{2}{5}\right)i \\ &= \left(-\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{8}{5}\right)i \\ &= -\frac{5}{2} + \frac{8}{5}i \end{aligned}$$

Ejemplo 1.34. Si $z = -\frac{1}{2} - i$ y $w = \frac{2}{5} - 3i$, entonces,

$$\begin{aligned} z + w &= \left(-\frac{1}{2} - i\right) + \left(\frac{2}{5} - 3i\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right) + (-1 - 3)i \\ &= \left(-\frac{1}{10}\right) + (-4)i \\ &= -\frac{1}{10} - 4i \end{aligned}$$

1.11.2. Propiedades de los números complejos

Sean $z, w, y \in \mathbb{C}$ entonces se cumple

1. Prop. Clausurativa

$$z + w \in \mathbb{C}$$

2. Prop. Comutativa

$$z + w = w + z$$

3. Prop. Asociatividad

$$z + (w + y) = (z + w) + y$$

4. Prop. Neutro aditivo(modulativa)

$$z + (0) = z$$

5. Prop. Opuesto aditivo(invertiva)

$$z + (-z) = 0$$

1.11.3. Sustracción de números complejos

Para restar dos o más números complejos se restan, respectivamente, las partes imaginarias. Si $z = a + bi$ y $w = c + di$, entonces,

$$\begin{aligned} z - w &= (a + bi) - (c + di) \\ &= (a + bi) + (-c - di) \\ &= (a - c) + (b - d)i \end{aligned}$$

Ejemplo 1.35. Si $z = -3 + 2i$ y $w = -1 - 3i$, entonces,

$$\begin{aligned} z - w &= (-3 + 2i) - (-1 - 3i) \\ &= (-3 + 2i) + (1 + 3i) \\ &= (-3 + 1) + (2 + 3)i \\ &= -2 + 5i \end{aligned}$$

1.11.4. Multiplicación de números complejos

Para multiplicar dos números complejos se realizan los siguientes pasos:

- **Primero:** se aplica la propiedad distributiva.

- Luego, se resuelven las potencias de i .
- Finalmente, se reducen términos semejantes.

En la multiplicación se dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
 z * w &= (a + bi)(c + di) \\
 &= ac + adi + bci + dbi^2 \\
 &= ac + adi + bci + db(-1) \\
 &= (ac - bd) + (ad + bc)i
 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.36. Sean $z = 3 + 2i$ y $w = 4 + 5i$ Determinar los siguientes productos.

- $z * w$, en efecto

$$\begin{aligned}
 z * w &= (3 + 2i)(4 + 5i) \\
 &= 12 + 15i + 8i + 10i^2 \\
 &= 12 + 15i + 8i - 10 \\
 &= (12 - 10) + (15 + 8)i \\
 &= 2 + 23i
 \end{aligned}$$

- $w * \bar{w}$, en efecto

$$\begin{aligned}
 w * \bar{w} &= (4 + 5i)(4 - 5i) \\
 &= (16 - (-25)) + (-20 + 20)i \\
 &= 16 + 25 + 0i \\
 &= 41
 \end{aligned}$$

- $2w * \bar{z}$, en efecto

$$\begin{aligned}
 2w * \bar{z} &= (8 + 10i)(3 - 2i) \\
 &= (24 - (-20)) + (-16 + 30)i \\
 &= (24 + 20) + (14)i \\
 &= 44 + 14i
 \end{aligned}$$

1.11.5. División de números complejos

Para dividir dos números complejos se multiplican el dividendo y divisor por el conjugado del divisor. Luego, se realizan las operaciones indicadas. En la división se dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \frac{z}{w} &= \frac{z * \bar{w}}{w * \bar{w}} \\
 &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \\
 &= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.37. Realizar las siguiente división entre los números complejos $z = -2 + 3i$ y $w = 4 - 2i$, se tiene que:

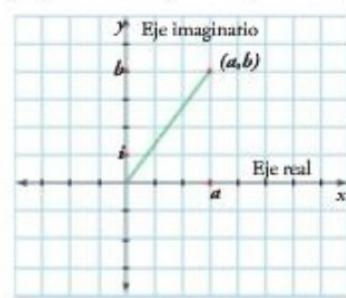
$$\begin{aligned}
 \frac{z}{w} &= \frac{z * \bar{w}}{w * \bar{w}} \\
 &= \frac{(-2 + 3i)(4 + 2i)}{(4 - 2i)(4 + 2i)} \\
 &= \frac{(-8 - 6) + (-4 + 12)i}{4^2 + 2^2} \\
 &= \frac{(-14) + (8)i}{16 + 4} \\
 &= \frac{(-14) + (8)i}{20} \\
 &= -\frac{7}{10} + \frac{2}{5}i
 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.13. Realizar la siguiente división

$$\frac{1}{2+3i}$$

1.11.6. Norma de un número complejo

La **norma de un número complejo** es la distancia del punto que respresenta al número complejo hasta el origen del plano complejo.



En la figura se representa el número complejo $z = a + bi$ y la distancia del punto (a, b) al origen.

En términos generales, la norma del número complejo $z = a + bi$, que se simboliza $|z|$, es

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1.1)$$

Ejemplo 1.38. Sea $z = 2 + 3i$, entonces se tiene que

$$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Ejemplo 1.39. Sea $z = -3 + 2i$, entonces se tiene que

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Ejemplo 1.40. Sea $z = -3 + 2i$ y $w = 3 + 4i$, determinar $|2z + w|$, en efecto se tiene que:

$$\begin{aligned}|2z + w| &= |(-6 + 4i) + (3 + 4i)| \\&= |(-6 + 3) + (4 + 4)i| \\&= |-3 + 8i| \\&= \sqrt{(-3)^2 + 8^2} \\&= \sqrt{9 + 64} \\&= \sqrt{73}\end{aligned}$$

1.12. Taller de Números complejos

1. Realizar las siguientes adiciones:

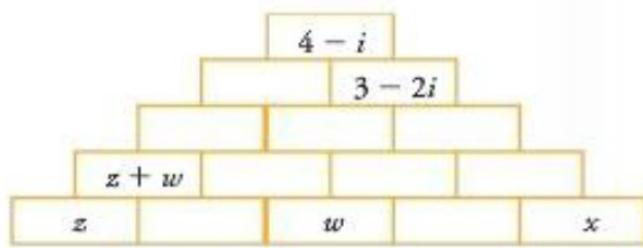
- $(-4 + 5i) + (2 + 7i)$
- $\left(\frac{3}{2} + 4i\right) + \left(-10 + \frac{2}{3}i\right)$
- $\left(\frac{15}{4} - \frac{i}{2}\right) + \left(\frac{8}{5} - \frac{i}{3}\right) + \left(\frac{29}{12}i - 30\right)$

2. Resuelve las siguientes operaciones

- $(4.6 + 8.1i) - (3.8 + 1.2i)$
- $\left(\frac{7}{2} + i\right) + \left(-1 + \frac{1}{5}i\right)$
- $\left(\frac{\sqrt{-72}}{5} + \frac{8}{3}\right) + \left(\frac{3}{10}i - \frac{41}{12}\right) - \left(\frac{1}{2} + i\right)$

3. Observa la forma como se construye la siguiente pirámide. cada ladrillo en la pirámide se obtiene al sumar el valor de los dos que lo sostienen.

Si $z = 8 + 3iy$ $w = -10 + i$ determinar el valor del número complejo x .



4. Resolver las siguientes productos

- $(4 + 5i)(8 - 3i)$
- $(3 - 2i)(6i)$
- $\sqrt{-12} * \sqrt{18} * \sqrt{-75}$
- $(9 - 5i)(8 + 3i)$
- $(1 + 8i)(-6i)$
- $\left(\frac{3}{5} - 2i\right)\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}i\right)$

$$g) -\frac{8}{7}i \left(\frac{1}{2} - \frac{6}{5} \right)$$

$$h) -\frac{3}{5}i \left(\frac{3}{4} - \frac{8}{2} \right)$$

$$i) \frac{45}{7}i \left(\frac{3}{9} - \frac{15}{5} \right)$$

$$j) \left(\frac{2}{7}i - \frac{8}{2} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5}i \right)$$

5. Resolver los siguientes cocientes

$$a) \frac{12 - 2i}{20 + 6i}$$

$$b) \frac{3 + 7i}{i}$$

$$c) \frac{3 - 2i}{2 + i}$$

$$d) \frac{2 - 4i}{1 + i}$$

$$e) \frac{i^7}{i^2}$$

$$f) \frac{-5 + 7i}{-2 + 5i}$$

$$g) \frac{11 - 3i}{1 + 4i}$$

$$h) \frac{5 - 4i}{i + 1}$$

$$i) \frac{15 - 4i}{i^2 + i}$$

6. Sea $z = 2 - 3i$, $w = 4 + 5i$ y $v = -3i - 2i$ realizar las siguientes operaciones.

$$a) (2z + 3w)(4w - 5v).$$

$$b) \frac{\bar{z}}{(w + v)z}.$$

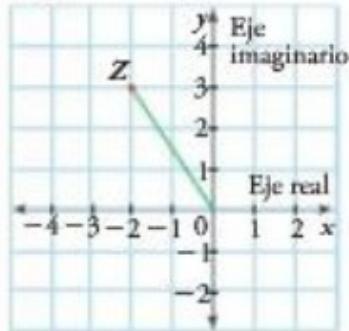
$$c) \frac{z + (\bar{4}i + 2)}{(w - v)}.$$

$$d) \overline{(w - 3z + 5v)}.$$

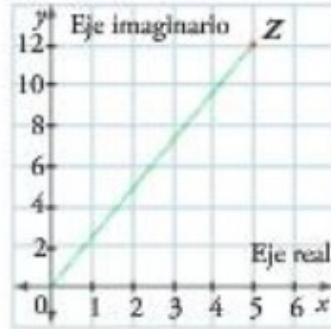
7. Determinar las siguientes normas

 Halla la norma de los números complejos que están representados en cada plano.

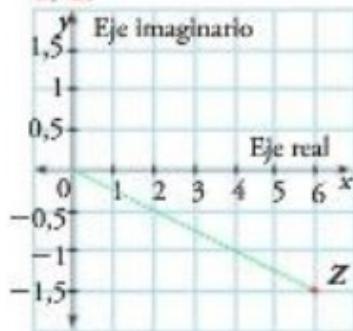
169.



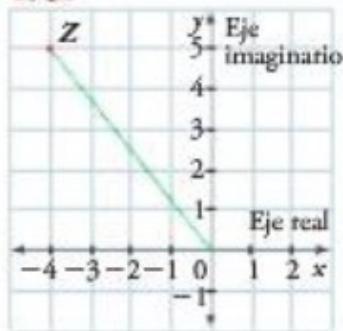
172.



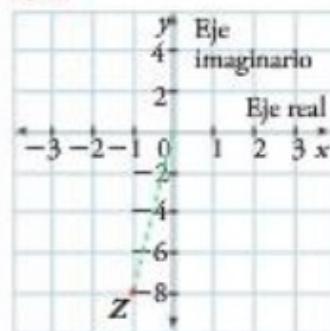
170.



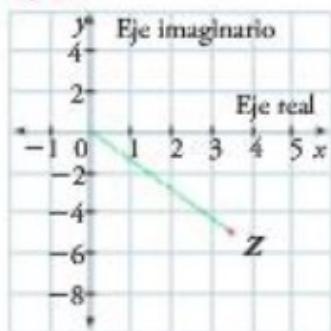
173.



171.



174.



Capítulo **2**

Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad que contiene una o más cantidades, denominadas incógnitas, en la siguiente sección se resolverá ecuaciones lineales y cuadráticas, de una o dos variables, además se utilizará la solución de una ecuación para resolver problemas de aplicación

Ejemplo 2.1. A continuación se presenta varios tipos de ecuaciones, dependiendo de el tipo de expresiones que se encuentran en los miembros de la igualdad se clasifica la ecuación.

- $x + 5 = 2$
- $\sin(x - 2) = 3$
- $3x^2 + 5x - 1 = 13$

2.1. Definición, Solución de ecuaciones lineales y cuadráticas

Una ecuación lineal de una variable tiene la forma corriente de:

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números reales y $a \neq 0$. Se llama lineal porque el exponente de x es uno.

2.1.1. Procedimiento para determinar la solución a una ecuación lineal

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento usual para encontrar la solución de una ecuación de primer grado.

$$\begin{array}{lcl} 4x+3 & = & 10 & \text{Despajamos la variable } x \\ 4x & = & 10-3 & \text{el término que está sumando pasa} \\ & & & \text{a restar al otro lado de la igualdad.} \\ x & = & \frac{7}{4} & \text{el término que está multiplicando pasa} \\ & & & \text{a dividir al otro lado de la igualdad.} \end{array}$$

En la siguiente figura se realiza los procedimientos básicos para realizar el despeje de una variable.

m2m

Despejes

Las 4 reglas básicas		
<p>1 Lo que está sumando pasa restando al otro lado de la igualdad.</p> $ax + b = c \rightarrow ax = c - b$	<p>2 Lo que está restando pasa sumando.</p> $mx - w = z \rightarrow mx = z + w$	
<p>3 Lo que está multiplicando pasa dividiendo.</p> $ax = b \rightarrow x = \frac{b}{a}$	<p>4 Lo que está dividiendo pasa multiplicando.</p> $\frac{cx}{d} = e \rightarrow cx = ed$	
Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
<p>Despejar "x"</p> $2x - 7 = 11$ <p>Pasamos el 7 sumando al otro lado:</p> $2x = 11 + 7 = 18$ <p>Pasamos el 2 dividiendo:</p> $x = \frac{18}{2} = 9$ 	<p>Despejar "m"</p> $2m - 8 = -3m + 12$ <p>Pasando las "m" a un lado y los enteros al otro lado:</p> $2m + 3m = 12 + 8$ $5m = 20$ $m = \frac{20}{5} = 4$	<p>Despejar "y"</p> $axy + 3 = -8 + z$ <p>Pasando el al otro lado de la ecuación:</p> $axy = -8 + z - 3$ $axy = z - 11$ <p>Pasando a dividir "ax":</p> $y = \frac{z - 11}{ax}$

2.1.2. Ecuación y Formula cuadrática

Una ecuación cuadrática es una expresión de segundo grado, cuya formula estándar es: $ax^2 + bx + c$ donde a , b y c son reales y $a \neq 0$. Si a es igual a cero desaparece el término en x^2 y la ecuación ya no es de segundo grado.

Ejemplo 2.2. Son ecuaciones cuadráticas de segundo grado.

- $x^2 + 5x + 6 = 0$
- $x^2 - 1 = 0$

- $(2x + 1)^2 = x(x + \frac{1}{2})$

Para resolver ecuaciones cuadráticas se utilizan varios métodos; aquí estudiaremos los siguientes:

Solución de una ecuación cuadrática usando factorización:

Ejemplo 2.3. Resolver la ecuación $x^2 + 10x + 16 = 0$. Esta ecuación se puede escribir como una ecuación equivalente pero factorizada.

$$x^2 + 10x + 16 = (x + 8)(x + 2)$$

Ahora, como el producto de dos números reales es cero si, y solamente si, al menos uno de ellos es cero entonces, $x + 8 = 0$ o $x + 2 = 0$ Lo anterior, significa que la ecuación tiene dos soluciones.

Solución de una ecuación usando formula cuadrática:

Dada una ecuación cuadrática, $ax^2 + bx + c = 0$ a la siguiente expresión se le conoce como formula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

la cual me determina las soluciones reales (complejas) para la ecuación.

Ejemplo 2.4. Resolver la ecuación $x^2 - 10x + 25 = 0$,

$$a = 1, \quad b = -10, \quad c = 25$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(10)^2 - 4(25)(1)}}{2(1)} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} \\ &= \frac{10 \pm 0}{2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Nota: la expresión $b^2 - 4ac$ se le conoce como discriminante, y se puede concluir que:

- Si $b^2 - 4ac > 0$, existen dos raíces (Soluciones) reales.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, existen una raíz (Solución) real.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, no existen raíces (Soluciones) reales, solo complejas.

Casos especiales de ecuaciones:

Ejemplo 2.5. $\frac{7}{x-1} - \frac{6}{x-1} = 5$

Ejemplo 2.6. $2\sqrt{x+4} - x = 1$

2.1.3. Problemas de aplicación de ecuaciones lineales y cuadráticas

Lenguaje algebraico

Traducciones más comunes			
Suma	Resta	Multiplicación	División
Aumentar	Menos	Producto	Cociente
Mayor que	Diferencia	Múltiplo	Dividido
Más	Disminuir	Veces	Entre
Incrementar	Perder	Doble, triple, etc.	Razón. Mitad, tercera, cuarta, etc.

Ejemplo 1	Ejemplo 2
El triple del cuadrado de un número. $3x^2$	El doble de la suma de dos cantidades. $2(x + y)$

Ejemplo 3	Ejemplo 4
El doble de un número más otro. $2x + y$	La suma de los cuadrados de dos números. $x^2 + y^2$

No hay una regla general para resolver problemas de aplicación, ya que hay diferentes tipos, sin embargo, podemos establecer las siguientes estrategias o pasos para su solución:

- a) Leer detenidamente la situación que plantea el problema hasta familiarizarse con ella.
- b) Hacer un esquema o dibujo, si tiene sentido hacerlo, que aclare la situación.
- c) Hacer una lista de los datos conocidos y otra de los datos que se quieren determinar.
- d) Representar el término desconocido por medio de una variable, por ejemplo x .
- e) Expresar todas las demás cantidades en términos de x .
- f) Expresar la situación descrita en el problema en símbolos matemáticos; esto es, plantear la o las ecuaciones.
- g) Resolver la ecuación según los métodos aprendidos.
- h) Comprobar si la solución hallada se ajusta a la situación descrita en el problema.

Ejercicio 2.1. Resolver los siguientes problemas,

1. La suma de los $\frac{2}{3}$ de un número con los $\frac{3}{4}$ del mismo número es 17. Hallar el número.
2. Si sumamos 12 a la mitad de un número obtenemos 27. ¿Cuál es el número?
3. La diferencia de dos números es 16 y el número menor menos 2 unidades es igual a los $\frac{3}{4}$ del número mayor. Hallar los números.
4. La finca de Luis tiene 30 árboles más que la mitad de los árboles de la finca de Juan. Si los árboles de las dos fincas son en total 300, cuántos árboles tiene cada una?.
5. El doble de la edad de Tere más 15 años es igual a la edad de Don Pepe que es 8 años menos que el triple de la edad de Tere. ¿Cuál son las edades de Tere y de Don Pepe?
6. Determinar el valor de x en la ecuación lineal.
 - $5x - 10 = 10$
 - $4y - 5 = 3y + 1$

- $2(2x - 3) = 2x - 10$
- $\frac{3x}{2} + 4 = 2x + 5$
- $\frac{x+6}{3} + 4 = \frac{3x-5}{2} + 2x - 1$

7. Determinar las soluciones para la ecuación dada:

- $5x^2 - 10 = 10^2$
- $4y - 5 = 3y + 1$
- $2(2x - 3) = \frac{1}{x}$
- $\frac{3x^2 + 2x}{2} + 4 = 2x + 5$
- $\frac{x^2 + 6}{3} + 4 = \frac{3x^2 - 5}{2} + 2x - 1$

2.2. Sistemas de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto formado por dos o más ecuaciones lineales , cada una de ellas con dos o más incógnitas.

Sistemas de ecuaciones lineales 2×2

Son un conjunto de ecuaciones formado por dos conjuntos lineales con dos incógnitas.

Ejemplo 2.7.

$$\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$$

2.2.1. Sustitución

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por el **método de sustitución**, se realiza los siguientes pasos:

- **Primero**, se despeja una de las variables en cualquiera de las ecuaciones lineales.

- **Segundo**, se remplaza la expresión obtenida en el primer paso en la otra ecuación y se resuelve.
- **Tercero**, se encuentra el valor de la otra variable remplazando, en cualquiera de las ecuaciones del sistema, el valor de la variable que se halló en el segundo paso.
- **Por último**, se verifican las soluciones.

Ejercicio 2.2. Resolvamos el sistema propuesto en el ejemplo 2.7.

- **Primero**, En la ecuación (1) despejamos la variables x , esto es:

$$\begin{aligned} 2x &= 5 + 4y \\ x &= \frac{5 + 4y}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

- **Segundo**, Remplazamos la ecuación (3) en la ecuación (2).

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{5 + 4y}{2}\right) + 6y &= 2 \\ \frac{15}{2} + 6y + 6y &= 2 \\ 12y &= 2 - \frac{15}{2} \\ 12y &= -\frac{11}{2} \\ y &= -\frac{11}{24} \end{aligned}$$

- **Tercero**, El valor de la variable y la remplazamos en la ecuación (3).

$$\begin{aligned}
 2x &= 5 + 4y \\
 x &= \frac{5 + 4\left(-\frac{11}{24}\right)}{2} \\
 x &= \frac{5 + \left(-\frac{11}{6}\right)}{2} \\
 x &= \frac{30 - 11}{12} \\
 x &= \frac{19}{12}
 \end{aligned}$$

- *Por último, se verifican las soluciones.*

2.2.2. Igualación

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de igualación se llevan a cabo los siguientes pasos:

- **Primero**, se despeja la misma variable en las ecuaciones lineales dadas.
- **Segundo**, se igualan las expresiones obtenidas en el primer paso y se despeja la variable que queda.
- **Tercero**, se determina el valor de la otra variable remplazando en alguna de las ecuaciones despejadas, el valor de la variable encontrada en el segundo paso.
- **Por último**, se verifican las soluciones.

Ejercicio 2.3. Resolvamos el sistema propuesto en el ejemplo 2.7, esto es,

$$\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$$

- *Primero, En la ecuación (1) despejamos la variables x, esto es:*

$$\begin{aligned} 2x &= 5 + 4y \\ x &= \frac{5 + 4y}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

- *Segundo,* En la ecuación (2) despejamos la variables x , esto es:

$$\begin{aligned} 3x + 6y &= 2 \\ 3x &= 2 - 6y \\ x &= \frac{2 - 6y}{3} \end{aligned} \quad (4)$$

- *Tercero,* igualamos la ecuación (3) y (4).

$$\begin{aligned} \frac{5 + 4y}{2} &= \frac{2 - 6y}{3} \\ 3(5 + 4y) &= 2(2 - 6y) \\ 15 + 12y &= 4 - 12y \\ 12y + 12y &= 4 - 15 \\ 24y &= -11 \\ y &= -\frac{11}{24} \end{aligned}$$

- *Cuarto,* remplazamos el valor de y , en la ecuación (4).

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 - 6\left(-\frac{11}{24}\right)}{3} \\ x &= \frac{2 + \frac{11}{4}}{3} \\ x &= \frac{\frac{8+11}{4}}{3} \\ x &= \frac{19}{12} \end{aligned}$$

- *Por último,* se verifican las soluciones.

2.2.3. Reducción

En el **método de reducción** se combinan las ecuaciones del sistema con el fin de reducir las dos ecuaciones del sistema a una sola, realizando los siguientes pasos:

- **Primero**, se multiplican los términos de una o ambas ecuaciones por números reales, de tal manera que los coeficientes de una de las variables en las dos ecuaciones, se diferencie únicamente en el signo.
- **Segundo**, se suman las dos ecuaciones transformadas de tal manera que se elimine una variable y se despeja la otra variable.
- **Por último**, se calcula el valor de la incógnita que falta sustituyendo en una de las ecuaciones originales.

2.2.4. Método por determinantes

Un **determinante** es un número asociado a un arreglo de números reales en igual cantidad de filas y de columnas, la notación

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

corresponde a un determinante 2×2 o de orden dos, asociado a un arreglo de dos filas y dos columnas. En el determinante, a y d forman la diagonal principal; y c y b forman la diagonal secundaria.

El valor del determinante equivale a la diferencia entre el producto de los números de la diagonal principal y el producto de la diagonal secundaria, esto es:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Regla de Cramer: Es posible resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando deter-

minantes mediante un método llamado **Regla de Cramer**. A partir del sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

se pueden formar tres determinantes,

Determinante del sistema

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd$$

formado por los coeficientes de x y de y .

Determinante para x

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - fb$$

formado por los términos independientes y los coeficientes de y .

Determinante para y

$$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - cd$$

formado por los coeficientes de x y los términos independientes.

Para solucionar sistemas 2×2 se utilizan los anteriores determinantes, aplicando la regla de Cramer, así.

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad D \neq 0$$

Sistemas de ecuaciones lineales 3×3 : Son un conjunto de ecuaciones formado por tres conjuntos lineales con tres incógnitas.

Ejemplo 2.8.

$$\begin{cases} x - 4y + z = 15 \\ 2x - 4y - 2z = 5 \\ 3x + 6y + 4z = 2 \end{cases}$$

El proceso, es para resolver este sistema puede ser utilizando regla de Cramer para sistemas tres por tres.

2.2.5. Taller-Aplicaciones

1. En un examen de 100 preguntas Ana ha dejado sin contestar 9 y ha obtenido 574 puntos. Si por cada respuesta correcta se suman 10 puntos y por cada respuesta incorrecta se restan 2 puntos , ¿Cuántas ha contestado bien y cuántas mal?
2. En un curso hay 70 alumnos matriculados. en el último examen de Matemáticas han aprobado 39 alumnos , el 70 % de las chicas y el 50 % de los chicos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en el curso?
3. Al dividir un número entre otro el cociente es 2 y el resto es dos. Si la diferencia entre el dividendo y el divisor es 54, ¿De qué números se tratan?.
4. Hallar dos números sabiendo que el mayor más seis veces el menor es igual a 62 y el menor más cinco veces el mayor es igual a 78.
5. Dos números suman 241 y su diferencia es 99. ¿Qué números son?
6. En un hotel hay 67 habitaciones entre dobles y sencillas. Si el número total de camas es 92, ¿Cuántas habitaciones hay de cada tipo?
7. Dos kilos de plátanos y tres de peras cuestan 780 pesos. Cinco kilos de plátanos y cuantos de peras cuestan 1320 pesos.¿A cómo está el kilo de plátanos y el de peras?
8. La edad de Elsa es la mitad de la de Pablo:la edad de José es el triple de la edad de Elsa y la edad de Andrea es el doble de la de José. Si las cuatro edades suman 132 años, ¿Cuál es la edad de la persona mayor?
9. En un corral hay gallinas y conejos. En total hay 15 Cabezas y 40 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay en el corral?
10. Un examen tipo text consta de preguntas y hay que contestar a todas . Por cada acierto obtiene un punto y por cada fallo se restan 0.5 puntos. Si mi nota ha sido 24.5, ¿Cuántos aciertos y cuántos fallos he tenido?
11. Si Alvaro regala a Rita 4 de sus discos, ella tendrá el doble que él . Si Rita da 6 de sus discos a Alvaro , entonces será él el que tenga el doble que ella. ¿Cuántos discos tiene cada uno?
12. He pagado 55.77 dolares por una camiseta y un pantalón que costaban 70 dolares entre los dos. En la camiseta me han hecho un 18 % de descuento, y en el pantalón, un 22 % ¿Cuál era el precio original de cada articulo?

Capítulo 3

Inecuaciones

En este capítulo nos dedicaremos a las desigualdades y las inecuaciones , las propiedades de las desigualdades, los diversos métodos de solucionar y escribir respuestas de las inecuaciones.

El manejo claro y eficiente de las desigualdades e inecuaciones es importante para temas como cálculo, programación lineal entre otros

3.1. Inecuaciones y propiedades algebraicas

De la misma forma que se utiliza el símbolo ($=$) para establecer igualdades y ecuaciones, los símbolos mayor que ($>$) y menor que ($<$) se utilizan para plantear desigualdades e inecuaciones.

Nota: el simbolo ($a \leq b$) denota que $a < b$ o $a = b$, donde la .º.es inclusiva, es decir solo se cumple una condición, lo mismo ocurre para ($a \geq b$).

Definición 3.1. Una **desigualdad** es una expresión que establece una relación matemática de orden entre dos cantidades, es decir, que indica que una cantidad es mayor o menor que otra.

Ejemplo 3.1.

$$5 < 7, \quad 23 > 3, \quad -5 < 0, \quad 10 \leq 17$$

Nota:

- Decimos que a es mayor que b , y escribimos $a > b$, si $a - b$ es positivo; esto es $a - b > 0$.
- Decimos que a es menor que b , y escribimos $a < b$, si $a - b$ es negativo; esto es $a - b < 0$.
- Es equivalente las siguientes desigualdades:

$$a > b \longleftrightarrow b < a$$

Propiedades: Sean $a, b \in \mathbb{R}$, en una desigualdad se cumplen las siguientes propiedades:

- Si $a > b$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$a + c > b + c \quad \text{y} \quad a - c > b - c$$

Ejemplo 3.2. Sea $15 > 10$ y además $c = 3$, entonces

$$15 + 3 > 10 + 3 \quad \text{y} \quad 15 - 3 > 10 - 3$$

- Si $a > b$ y $c \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$ac > bc \quad \text{y} \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

Ejemplo 3.3. Sea $3 > 2$ y además $c = 5$, entonces

$$3 \times 5 > 2 \times 5 \quad \text{y} \quad \frac{3}{5} > \frac{2}{5}$$

- Si $a > b$ y $c \in \mathbb{R}^-$, entonces

$$ac < bc \quad \text{y} \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

Ejemplo 3.4. Sea $3 > 2$ y además $c = -5$, entonces

$$3 \times -5 < 2 \times -5 \quad \text{y} \quad \frac{3}{-5} < \frac{2}{-5}$$

- Si $a > b$ y $b > c$ entonces

$$a > c$$

Ejemplo 3.5. Si $25 > 16$ y $16 > 8$ entonces

$$25 > 8$$

- Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$

Ejemplo 3.6. Si $a = -4$ entonces $(-4)^2 > 0$

- Si $a \times b > 0$ si, y solamente si ($a > 0$ y $b > 0$) o ($a < 0$ y $b < 0$)

Ejemplo 3.7. Como $(3 \times 8) > 0$ entonces $8 > 0$ y $3 > 0$

Definición 3.2. *Inecuaciones*

Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas que solo se cumple para determinados valores de la variable o variables que se presenten.

Ejemplo 3.8. La desigualdad $2x - 6 < 5x$ es una inecuación de primer grado con una incógnita, porque el mayor exponente de x es 1.

Ejemplo 3.9. La desigualdad $2x^2 - 6x + 2 \leq 0$ es una inecuación de segundo grado con una incógnita, porque el mayor exponente de x es 2.

3.1.1. Solución de inecuaciones lineales y cuadráticas, método analítico y gráfico

Resolver una inecuación es hallar los valores de la incógnita que satisfacen la inecuación dada. Para esto, se aplican las propiedades de las desigualdades.

La solución de una inecuación se presenta en forma de intervalo como se muestra en la siguiente tabla.

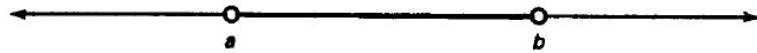
Solución	Lectura	Intervalo	Representación de la recta
$x > a$	Números mayores que a	(a, ∞)	
$x < a$	Números menores que a	$(-\infty, a)$	
$x \geq a$	Números mayores o iguales que a	$[a, \infty)$	
$x \leq a$	Números menores o iguales que a	$(-\infty, a]$	

los anteriores intervalos se les conoce como intervalos no acotados, otro tipo de intervalos que puede dar la solución de una inecuación son:

Intervalo abierto acotado

Solución	Lectura	Intervalo
$a < x < b$	Números mayores que a y menores que b	(a, b)

y su representación gráfica es:



Intervalo cerrado acotado

Solución	Lectura	Intervalo
$a \leq x \leq b$	Números mayores o iguales que a y menores o iguales que b	$[a, b]$

y su representación gráfica es:



Intervalo semiabierto acotado

Solución	Lectura	Intervalo
$a \leq x < b$	Números mayores o iguales que a y menores que b	$[a, b)$

y su representación gráfica es:



Intervalo semiabierto acotado

Solución	Lectura	Intervalo
$a < x \leq b$	Números mayores que a y menores o iguales que b	$(a, b]$

y su representación gráfica es:



Ejemplos y ejercicios para resolver inecuaciones de primer grado.

Ejemplo 3.10. Resolver la siguiente inecuación $2x - 3 > 45 - 6x$, en efecto.

$$2x - 3 > 45 - 6x$$

$$2x + 6x > 45 + 3$$

$$8x > 48$$

$$x > \frac{48}{8}$$

$$x > 6$$

Por tanto, la solución es un conjunto de puntos, el cual definiremos por medio de un intervalo llamado I y esta dado por

$$I = (6, \infty)$$

Ejemplo 3.11. *Resolver la inecuación*

$$3x - 4 \leq 6$$

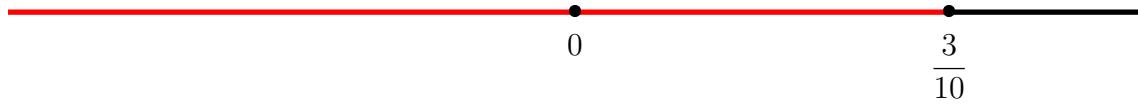
y representar la solución en la recta numérica.

$$\begin{aligned} 3x - 4 &\leq 6 \\ 3x &\leq 6 + 4 \\ 3x &\leq 10 \\ x &\leq \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución es un conjunto de puntos, el cual definiremos por medio de un intervalo llamado I y esta dado por

$$I = \left(-\infty, \frac{10}{3}\right]$$

su representación gráfica es:



Es importante aclarar, que la solución a una inecuación es un conjunto de puntos, por ello, el intervalo I para el ejemplo anterior lo podemos expresar de la siguiente forma:

$$\left(-\infty, \frac{10}{3}\right] = I = \left\{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{10}{3}\right\}$$

El siguiente ejemplo ilustra el paso a paso, de como resolver una inecuación y además representamos la solución en la recta numérica.

2. Representar la desigualdad $x \geq -5$ en la recta numérica.

La desigualdad $x \geq -5$ corresponde al intervalo $[-5, \infty)$. Por tanto, su representación en la recta numérica es:

**3. Resolver la inecuación $x + 3(x - 5) < 6 - 4(2 - 3x)$.**

Se realizan los siguientes pasos:

$$x + 3(x - 5) < 6 - 4(2 - 3x) \quad \text{Inecuación.}$$

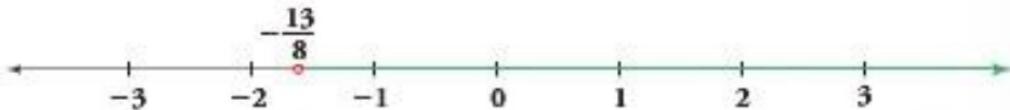
$$x + 3x - 15 < 6 - 8 + 12x \quad \text{Se aplica la propiedad distributiva.}$$

$$x + 3x - 12x < 6 - 8 + 15 \quad \text{Se resta } 12x \text{ y se suma } 15.$$

$$-8x < 13 \quad \text{Se reducen términos semejantes.}$$

$$x > -\frac{13}{8} \quad \text{Se divide entre } -8 \text{ y se cambia el sentido de la desigualdad.}$$

Por tanto, la solución de la inecuación es el conjunto de números reales mayores que $-\frac{13}{8}$ que corresponde al intervalo $(-\frac{13}{8}, \infty)$ y se representa así:

**Ejercicio 3.1. Resolver la inecuación**

$$4 - \frac{3}{5}x \leq \frac{6}{7}x + \frac{2}{4}$$

y representar la solución en la recta numérica.

Ejercicio 3.2. Resolver las siguientes inecuaciones.

$$1. \ 4x \leq 3x + 4$$

$$2. \ 3x + 4 \leq x + 10$$

$$3. \ 10x + 20 > 530$$

4. $4y - 8 < 3y - 11$

5. $9y - 5 \geq 8y - 6$

6. $11 - 5x \geq -19$

7. $5y - 3 < 4y - 6$

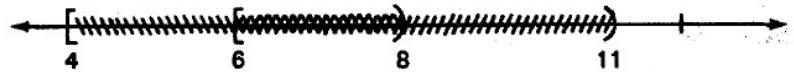
8. $17 - 3y < -2y - 3$

Operaciones entre intervalos Dado que los intervalos son conjuntos, las operaciones entre conjuntos se aplican de igual forma para intervalos, para ello ilustramos los siguientes ejemplos en la recta real.

Ejemplo 3.12. Hallar

$$[4, 8) \cap [6, 11)$$

la solución se puede obtener fácilmente en forma gráfica.



por tanto,

$$[4, 8) \cap [6, 11) = [6, 8)$$

Ejemplo 3.13. Hallar

$$\left[-\frac{1}{2}, 5\right) \cup \{[4, 6) \cup [3, 8)\}$$

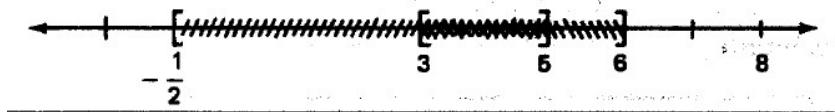
resolvemos primero la operación indicada en las llaves, $[4, 6) \cup [3, 8)$



de ahí que,

$$[4, 6) \cap [3, 8) = [3, 6]$$

luego, realizamos la operación $\left[-\frac{1}{2}, 5\right) \cup [3, 6]$



por tanto la solución es

$$\left(-\frac{1}{2}, 5\right) \cup [3, 6] = \left[-\frac{1}{2}, 6\right]$$

Ejemplo 3.14.

$$-6 < \frac{3x + 5}{2} \leq 4$$

En este caso, la anterior desigualdad se puede representar por la siguientes desigualdades:

$$-6 < \frac{3x + 5}{2} \quad y \quad \frac{3x + 5}{2} \leq 4$$

luego,

$$\begin{array}{rcl} -12 & < & 3x + 5 \\ -12 - 5 & < & 3x \\ -17 & < & 3x \quad y \quad x & \leq & \frac{3}{3} \\ \frac{-17}{3} & < & x & \leq & 1 \end{array}$$

$$x > \frac{-17}{3} \quad y \quad x \leq 1$$



en forma de intervalo, la solución corresponderá a

$$\left(-\frac{17}{3}, \infty\right) \cap (-\infty, 1] = \left(-\frac{17}{3}, 1\right]$$

Lo anterior, nos permite concluir que el método para resolver inecuaciones es muy semejantes al empleado para resolver ecuaciones.

3.2. Método analítico

Resolver la siguiente inecuación

$$(x - 3)(x + 8) > 0$$

se tiene que,

$$(x - 3) > 0 \quad \text{y} \quad (x + 8) > 0$$

$$x > 3 \quad \text{y} \quad x > -8$$

es decir,

$$(3, \infty) \cap (-8, \infty) = (3, \infty)$$

o

$$(x - 3) < 0 \quad \text{y} \quad (x + 8) < 0$$

$$x < 3 \quad \text{y} \quad x < -8$$

es decir,

$$(-\infty, 3) \cap (-\infty, -8) = (-\infty, -8)$$

por último, $(3, \infty) \cup (-\infty, -8) = (-\infty, -8) \cup (3, \infty)$

3.2.1. Método gráfico

Utilizando este método obtenemos aquellos valores en donde cada uno de los factores que conforman la inecuación.

- Se factoriza el polinomio
- Se organizan los factores de tal modo que la incógnita quede escrita en la parte izquierda de cada paréntesis y con signo positivo
- Se traza una recta real por cada factor y una recta real adicional para el resultado
- Se calculan las raíces contenidas en cada factor
- Se ubican en cada recta real las respectivas raíces calculadas en el paso anterior
- Se trazan rectas verticales por cada punto-raíz
- A la izquierda de cada raíz ubicada en su respectiva recta, se señala con un signo menos y a la derecha con un signo más
- Aplicando la "Ley de los signos" se halla el resultado de multiplicar los signos de cada columna, dicho resultado se escribe en el lugar correspondiente de la recta real de resultados
- Si el sentido de la inecuación es $>$, la solución estará constituida por todos los intervalos, en la recta resultado, señalados con el signo más; en cambio si el sentido de la inecuación es $<$, la solución será la unión de los intervalos señalados con el signo menos.

Ejemplo 3.15. *Resolver la siguiente inecuación*

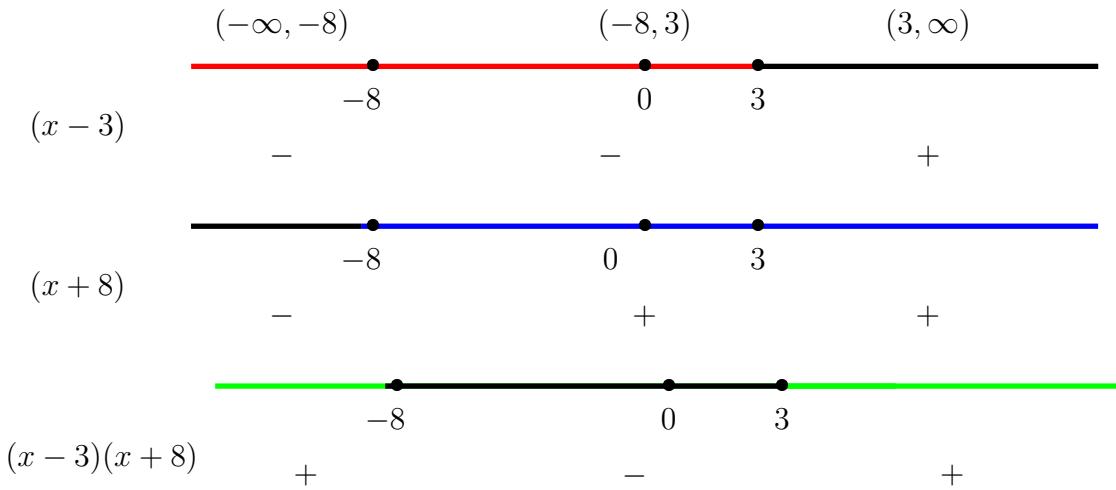
$$(x - 3)(x + 8) > 0$$

Para ello, usaremos el método gráfico (Ley del cementerio).

Raíces del polinomio esto es,

$$x - 3 = 0 \quad o \quad x + 8 = 0$$

$$x = 3 \quad o \quad x = -8$$



por tanto,

$$I = (-\infty, -8) \cup (3, \infty)$$

3.3. Inecuaciones con valor absoluto

- **Definición:** $|x| = a$ si y solo si $x = a \vee x = -a$

también se suele escribir de la siguiente forma

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- **Inecuaciones de la forma** $|x| \leq a$ En general para cualquier $a \in \mathbb{R}^+$

Si $|x| \leq a$ implica que $-a \leq x \leq a$

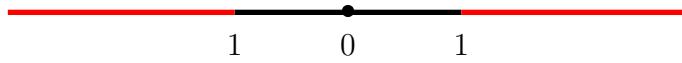


Ejemplo 3.16. Si $|x| < 1$ implica que $-1 < x < 1$, gráficamente se tiene

- **Inecuaciones de la forma** $|x| > a$

Si $|x| \geq a$ implica que $x \leq a$ o $x \leq -a$

Ejemplo 3.17. Si $|x| < 1$ implica que $-1 < x < 1$, gráficamente se tiene



3.3.1. Problemas de aplicación que se resuelven mediante inecuaciones

Ejemplo 3.18. Cristina gana por hora el doble de lo que gana Daniela. Si Cristina trabaja 6 horas y Daniela, 5 horas, y juntas ganan menos de \$126.000. MÁXIMO, ¿cuánto podrá ganar Daniela por hora?

3.4. Taller

1. Relaciona cada inecuación con su respectivo conjunto solución.

$$1) \quad x + 4 < 3 \quad a) \quad \left(\frac{13}{6}, \infty \right)$$

$$2) \quad x + 2 \geq x - 3 \quad b) \quad (-\infty, \infty)$$

$$3) \quad 3x - \frac{1}{2} > 6 \quad c) \quad \left[\frac{2}{5}, \infty \right)$$

$$4) \quad \frac{5}{9}x + 2 < \frac{3}{5}x - 3 \quad d) \quad (-\infty, -1)$$

$$5) \quad \frac{5x + 1}{3} < 7 \quad e) \quad (-\infty, 4)$$

$$6) \quad \frac{7x - 1}{3} \geq \frac{x + 21}{4} \quad f) \quad \left(\frac{225}{2}, \infty \right)$$

2. Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones cuadráticas.

$$a) \quad 4x^2 - 25 \leq 0$$

$$b) \quad x^2 + 11x < -18$$

$$c) \quad 15x^2 - 2 \geq 7x$$

3. Determinar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones. Luego, representar la solución en la recta numérica.

$$a) \quad \left| \frac{2}{3}x > \frac{17}{2} \right| > \frac{17}{2}$$

$$b) \quad |4x + 9| \geq 5x$$

$$c) \quad \frac{6x^2 - x - 1}{2x^2 - 3x - 5} \geq 0$$

$$d) \quad |4 - 3x| < 2$$

$$e) \quad \frac{(x - 2)(x + \frac{1}{2})}{x + 2} < 0$$

- Santillana. **Los caminos del saber 8 y 9**
- Carlo B. Allendoerfer **Matematicas Universitarias.**
- Jiménez Murillo J. **Matemáticas para la Computación**