Cálculo I

Apuntes de clase.

Profesor:
Carlos Andrés Leiton Piamba
Docente Universitario

En esta guía, nos adentramos en el mundo de los límites en matemáticas. Exploramos el concepto de límite en profundidad, analizando su definición, propiedades. Nuestro objetivo es proporcionar a los estudiantes una comprensión sólida y completa de este concepto fundamental.

A lo largo del documento, abordamos ejemplos concretos y desafiantes, que ilustran cómo los límites se utilizan para comprender el comportamiento de funciones en situaciones diversas. Desde las simples funciones lineales hasta las más complejas funciones trigonométricas y exponenciales, exploramos cómo los límites nos permiten comprender mejor el comportamiento de estas funciones en puntos críticos.

Además, examinamos cómo los límites se aplican en el mundo real, desde la física y la ingeniería hasta la economía y las ciencias biológicas. Mostramos cómo los límites son una herramienta poderosa para modelar y resolver una amplia gama de problemas prácticos.

Popayán, 3 de octubre de 2024

Índice general

Índice general 1

1. Derivadas 3

1.0.1. Derivada de una función en un punto 5

1.1. Recta tangente y recta normal 6

1.1.1. Variación instantánea 8

1.2. Reglas de derivación 9

1.2.1. Derivada de la función constante 10

1.2.2. Derivada de la función idéntica 10

1.2.3. Derivada de una potencia 10

1.2.4. Derivada del múltiplo constante 10

1.2.5. Derivada de la suma de funciones 10

1.2.6. Derivada de funciones trigonométricas, logarítmicas, exponenciales 10

1.2.7. Regla del producto y cociente para derivadas 10

1.2.8. Regla de la cadena 10

1.3. Taller 10

Capítulo 1

Derivadas

El concepto de **derivada de una función** está relacionado a dos problemas que llevan el mismo significado matemático: uno tiene que ver con la pendiente de la recta tangente, y el otro con la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento, de ellos hablaremos más adelante.

Definición 1.1. ***Derivada de una función***

La derivada de una función $f(x)$, es la función definida por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.1}$$

siempre que el límite exista.

Observaciones:

- La notación $f'(x)$ se lee " efe prima de x".
- Existen otras notaciones para la derivada que son: y' que se lee " derivada de y"; $\frac{dy}{dx}$ que se lee "derivada de y respecto a x.
- El proceso de hallar la derivada de una función se denomina diferenciación.

Ejemplo 1.1. *Determinar la derivada de la siguiente función,* $f(x) = 7x + 6$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[7(x+h)+6] - (7x+6)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{7x + 7h + 6 - 7x - 6}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{7h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 7 \\
&= \lim_{h\to 0} 7
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2. *Determinar la derivada de la siguiente función,* $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left[\frac{1}{x+h}\right] - \frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(x+h)x} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} \\
&= \frac{-1}{(x+0)x} \\
f(x) &= -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Por otro lado,

Ejemplo 1.3. *Determinar la derivada de la siguiente función,* $f(x) = \sqrt{x}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left[\sqrt{x+h}\right] - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\left[\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right]}{h} \frac{\left[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right]}{\left[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right]} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\left[(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2\right]}{h\left[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right]} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{[x+h-x]}{h\left[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right]} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{h}{h\left[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right]} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{\left[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right]} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

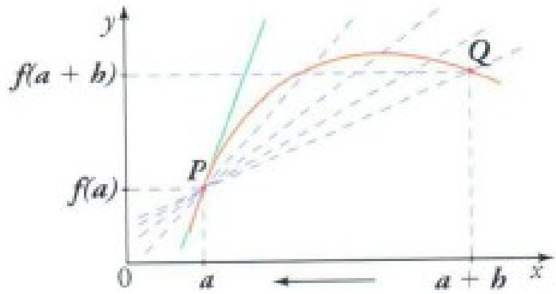
1.0.1. Derivada de una función en un punto

La **derivada de una función** $f(x)$ en un punto $x = a$, se simboliza como $f'(a)$ y está dado por:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1.2}$$

o lo que es equivalente,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{1.3}$$



1.1. Recta tangente y recta normal

- La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$, es

$$m = f'(a)$$

siempre que este valor exista y su ecuación es

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

- La recta norma es la recta perpendicular a la recta tangente que pasa por el punto $(a, f(a))$ es decir

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$$

Ejemplo 1.4. *Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función*

$$f(x) = \frac{4}{x - 2}$$

en el punto $(4, 2)$*. Luego, realizar la representación gráfica.*

- ***Primero,*** *se halla la pendiente de la recta tangente, así:*

$$\begin{aligned}
m &= f'(4)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(4+h)-f(4)}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\dfrac{4}{(4+h)-2}-\dfrac{4}{(4)-2}}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\dfrac{4}{h+2}-\dfrac{4}{2}}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\dfrac{4}{h+2}-2}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\dfrac{4-2(2+h)}{h-2}}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{4-4-2h}{(h-2)h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{-2h}{(h-2)h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{-2}{h+2}\right)\\
&= \frac{-2}{2}\\
m &= -1
\end{aligned}$$

- *La pendiente de la recta tangente en* $(4,2)$ *es* -1*, y por tanto de la recta tangente es:*

$$y=-(x-4)+2$$

es decir,

$$y=-x+6$$

por otro lado, la recta normal tiene pendiente 1*. luego, al remplazar en la ecuación de la recta normal se tiene.*

$$y = (x - 4) + 2$$

es decir,

$$y = x - 2$$

Ejercicio 1.1. *Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función f en el punto indicado.*

- $f(x) = (x + 2)^2$ *en* $(0, 4)$
- $f(x) = \sin(x + \pi)$ *en* $(\frac{\pi}{2}, -1)$

1.1.1. Variación instantánea

Si se desea conocer la tasa de variación de una función en un instante dado, se debe considerar h cada vez más pequeño, por tanto, la tasa de variación instantánea de una función en $x = a$ se define como:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \tag{1.4}$$

Ejemplo 1.5. *Una barra de hierro se calienta durante un período determinando, de modo que su temperatura $c(t)$, en grados Celsius, se ha incrementado como una función del tiempo t en minutos, de acuerdo con la función $c(t) = t^3$. Calcular la tasa de variación* *puntual(tasa instantánea) de la temperatura en relación con el tiempo en* $t = 5$.

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(5+h)^3 - 5^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{5^3 + 75h + 15h^2 + h^3 - 5^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{75h + 15h^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 75 + 15h + h^2 \\ &= 75 \end{aligned}$$

Finalmente, la tasa de variación instantánea es 75 *grados Celsius por minuto.*

1.2. Reglas de derivación

A patir de la definición de derivada se pueden deducir algunas reglas generales de derivación, la cuales permiten calcular, de una forma más sencilla, la derivada de ciertas funciones.

1.2.1. Derivada de la función constante

1.2.2. Derivada de la función idéntica

1.2.3. Derivada de una potencia

1.2.4. Derivada del múltiplo constante

1.2.5. Derivada de la suma de funciones

1.2.6. Derivada de funciones trigonométricas, logarítmicas, exponenciales

1.2.7. Regla del producto y cociente para derivadas

1.2.8. Regla de la cadena

1.3. Taller

1.) Definición de derivadas.

a) Usando la definición de derivada, hallar las derivadas de las siguientes funciones:

- $f(x) = 100$
- $f(x) = \frac{1}{3}x$
- $g(x) = -3x + 2$
- $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$
- $h(x) = \frac{1}{2x}$
- $h(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = \sqrt{x+1}$
- $m(x) = x^3 - 8$

2.) Usando las propiedades y reglas de derivación, hallar las siguientes derivadas.

- $f(x) = 100$
- $f(x) = \frac{1}{3}x$
- $g(x) = -3x + 2$
- $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$
- $h(x) = \frac{1}{2x}$
- $f(x) = \sqrt{x+1}$
- $m(x) = x^3 - 8$

3.) Derivada del Producto-(División) de dos funciones.

- Determinar la derivada usando la regla del producto.
  - $$(x^2 + 1)(x^3 - 1)$$
  - $$f(x) = \sqrt{x}(x^2 + 2x)$$
  - $$f(x) = 16x\left(x + \frac{1}{16}\right)$$
  - $$g(x) = (-3x + 2)\left(\sqrt{x+1}\right)$$
  - $$g(x) = \left(\frac{7}{4}\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{4}\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{x^3} + 4\right)$$
  - $$s(x) = (x - 3)(x + 1)(x^2 + 2)$$
- Determinar la derivadas usando la regla del cociente.
  - $$\frac{3x^2}{x+2}$$
  - $$f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x}$$
  - $$f(x) = \frac{5x^2 - 1}{\sqrt[3]{x}}$$

- $$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{2x-5}$$
- $$g(x) = \frac{x^2-8x}{x+2}$$
- $$h(x) = \left(\frac{x^6+\frac{4}{5}x^5}{6x-2}\right)$$
- $$f(x) = \frac{x(\sqrt{x})}{2x^3}$$

4.) Encontrar la derivada de la función:

a) $y = (2x-7)^3$

b) $f(x) = x^2(x-2)^4$

c) $g(x) = (9t+2)^{\frac{2}{3}}$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2\sqrt{x^4+4}$

e) $h(v) = \left(\frac{1-2v}{1+v}\right)^3$

f) $h(t) = \sqrt{\frac{1}{t^2-2}}$

g) $y = \sqrt{x^2-2x+1}$

5.) Hallar la derivada de la siguientes funciones(Reducirla hasta su máxima expresión).

- $y = \frac{\sqrt{x}+1}{x^2+1}$
- $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{1-x}}$
- $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}$

Derivadas logarítmicas(Regla de la cadena)

6.) Encontrar la derivada de la función.

a)
$$f(x) = ln([x^2+1][x^3-1])$$

b)
$$f(x) = \log(x^2+2x-10)$$

c)
$$f(x) = \left[\log\left(x - \frac{1}{16}x^2\right)\right]^4$$

d)
$$g(x) = \log(\sqrt{x^2+3x-3})$$

e)
$$g(x) = \left[\log\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right)\right]^3$$

7.) Determinar la derivadas usando la regla del cociente.

- $$\frac{3x^2}{x+2}$$
- $$f(x) = \frac{x^2+2}{2x}$$
- $$f(x) = \frac{5x^2-1}{\sqrt[3]{x}}$$
- $$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{2x-5}$$
- $$g(x) = \frac{x^2-8x}{x+2}$$
- $$h(x) = \left(\frac{x^6 + \frac{4}{5}x^5}{6x-2}\right)$$
- $$f(x) = \frac{x(\sqrt{x})}{2x^3}$$

8.) Encontrar la derivada de la función:

a) $y = e^{-x^4} + 2^{4x}$

b) $f(x) = e^{(x^3-x)(7-x)}$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2-3x}$.

9.) Hallar la derivada de la siguientes (funciones exponenciales-Logarítmicas)

- $y = \dfrac{e^x}{\ln(x)}$
- $f(x) = \sqrt{\log_2(xe^{3x})}$
- $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{5x^2}{e^x}}$

Derivadas trigonométricas(Regla de la cadena)

10.) Encontrar la derivada de la función.

a)
$$f(x) = \cos(3x) + 3\sin(x) - \frac{5}{2}\tan(x)$$

b)
$$f(x) = \sec(x^2 + 2x - 10)$$

c)
$$f(x) = \left[\csc\left(x - \frac{1}{16}x^2\right)\right]^4$$

d)
$$g(x) = \cot\left(\sqrt{x^2 + 3x - 3}\right)$$

e)
$$g(x) = \left[\sec\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right)\right]^3$$

f)
$$r(x) = \sec(3x)\cos(3x)$$

g)
$$f(x) = \cos(x)\sin(3-x)$$

Derivadas de funciones inversas-trigonométricas(Regla de la cadena)

11.) Encontrar la derivada de la función.

a)
$$h(x) = 3\sin^{-1}(x) - 2\cos^{-1}(x) - \frac{3}{2}\cos^{-1}(x)$$

b)
$$f(x) = \arctan(3x - 2)$$

c)
$$f(x) = \arccos(2x - 2)$$

d)
$$f(x) = \left(\arcsin(2x) - 3x^2\right)^4$$

e)
$$g(x) = \csc^{-1}(x)\sec^{-1}(x)$$

f)
$$g(x) = \left[\log\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right)\right]^3$$

g)
$$h(x) = 3\sin^{-1}(x) - 2\cos^{-1}(x) - \frac{3}{2}\cos^{-1}(x)$$

Bibliografía

- Santillana. **Los caminos del saber 8 y 9**
- Carlo B. Allendoerfer **Matematicas Universitarias**.
- Jiménez Murillo J. **Matemáticas para la Computación**