Matemática Financieras

Apuntes de clase.

Profesor:
Carlos Andrés Leiton Piamba
Docente Universitario

La Guía de Matemáticas Financieras para Administradores Públicos está orientada a enseñar los principios del interés y su aplicación en la administración de fondos gubernamentales. Los administradores públicos a menudo enfrentamos decisiones cruciales sobre cómo invertir eficientemente los recursos disponibles, que suelen ser limitados.

El propósito de esta guía es proporcionar herramientas que ayuden a los administradores públicos a tomar decisiones financieras más informadas y eficaces, optimizando el uso de los recursos públicos en beneficio de todos.

Popayán, 4 de febrero de 2024

Capítulo 1

Unidad I

En esta unidad de *Matemáticas Financieras*, abordaremos los conceptos esenciales para analizar operaciones financieras, tales como el valor del dinero en el tiempo, tasas de interés, amortización de préstamos, flujos de caja y técnicas de evaluación de inversiones. A lo largo del curso, aprenderemos a resolver problemas de la vida real utilizando herramientas matemáticas, con aplicaciones en finanzas personales y corporativas.

1.1. Preliminares

Porcentaje

El porcentaje es una proporción o razón expresada como una fracción de 100. Es fundamental en las finanzas para calcular rendimientos, intereses y variaciones porcentuales. La fórmula básica es:

$$\text{Porcentaje} = \left(\frac{\text{parte}}{\text{total}}\right) \times 100$$

Es un hecho muy conocido que dinero hace dinero. **El valor del dinero** en el tiempo explica el cambio de la cantidad de dinero en el tiempo de los fondos que se poseen (invierten) o se deben (prestan).

Valor del Dinero en el Tiempo

El dinero tiene un valor temporal debido a su capacidad para generar intereses. En otras palabras, un euro hoy vale más que el mismo euro en el futuro. Las matemáticas financieras se basan en la capitalización y descuento para ajustar este valor en el tiempo.

Flujo de Caja

El flujo de caja es una serie de entradas y salidas de dinero a lo largo del tiempo. Cada flujo debe ajustarse por el valor temporal del dinero mediante una tasa de descuento.

1.2. INTERÉS

Concepto

- Es la compensación pagada o recibida por el uso del dinero tomado en préstamo. Este **concepto** constituye parte del soporte de las finanzas y tiene como **principio** el cálculo y **análisis de la variación del dinero respecto del tiempo** [3].
- El interés es la **cantidad pagada por el uso de dinero** obtenido en **préstamo** o la cantidad producida por la **inversión** del capital [1].
- El interés se **paga** cuando una persona u organización pide dinero prestado (**obtiene un préstamo**) y paga una cantidad mayor. El interés se **gana** cuando una persona u organización ahorra, invierte o presta dinero y recibe una cantidad mayor [2].

Notación

1. En este contexto, denotaremos al **Interés** con la letra **I**.
2. Si transcurrido un período de **tiempo**, una cantidad de dinero P crece hasta alcanzar un valor F, el interés acumulado se define como:

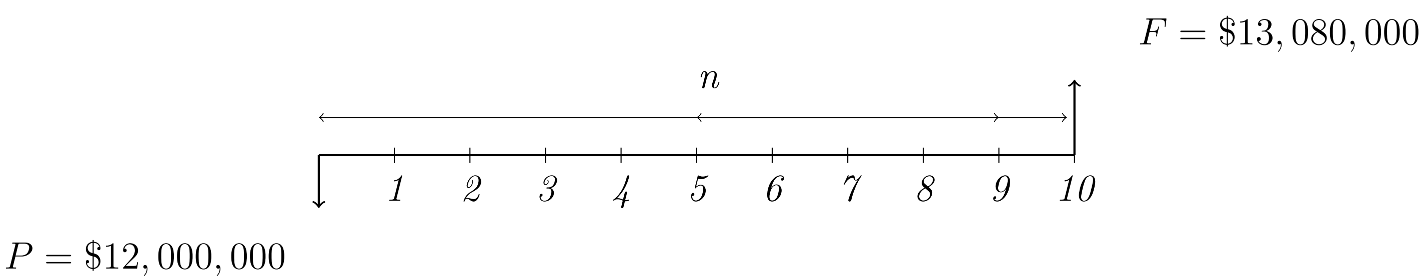
$$I = F - P \tag{1.1}$$

   donde P es el **Capital** o valor presente, y F el **valor futuro** o monto del capital.
3. Al número de días, o cualquier otra unidad de tiempo que transcurren entre las fechas inicial y final en una operación financiera se le llama **plazo o tiempo**, y se denota con la letra **n**.

Observación:

Dependiendo del caso y de las circunstancias, el capital también tiene el nombre de principal, valor presente o valor actual, De igual manera, algunos sinónimos del monto del capital son valor futuro, montante o simplemente monto [4].

Ejemplo 1.1. *Si depositamos en una fondo de inversiones* $\$12,000,000$ *y dentro de 10 meses el fondo nos entrega* $\$13,080,000$.



El capital inicial (P) *es de* $\$12,000,000$. *Después de diez meses, este capital se incrementa hasta* $\$13,080,000$, *que corresponde al valor futuro* (F). *La diferencia entre el valor futuro* (F) *y el valor presente* (P) *es lo que se denomina interés* (I). *De esta* *manera, se tiene:*

$$\begin{array}{rcccc} I &=& F &-& P \\ I &=& 13,080,000 &-& 12,000,000 \\ I &=& 1,080,000 && \end{array}$$

por tanto, el interes acumulado durante esos 10 meses es de $1,080,000 .

Tasa de interés

La tasa de interés: es la razón entre el interés acumulado I y el capital o el valor presente P por unidad de tiempo, se denota con la letra i y se define de la siguiente forma:

$$i = \left(\frac{I}{P}\right) 100\,\% \tag{1.2}$$

Ejercicio 1.1. *Investigar: ¿Cómo se determinan principalmente las tasas de interés en Colombia? En Colombia, las tasas de interés son el resultado de la interacción entre la política monetaria del Banco de la República, los niveles de inflación, la oferta y demanda de crédito, el riesgo crediticio, las regulaciones, y factores internacionales. El Banco de la República es el principal actor que determina la dirección de las tasas de interés a través de su tasa de intervención, pero las entidades financieras ajustan sus tasas según las condiciones económicas locales y globales.*

Ejemplo 1.2.
Antonio, solicita un préstamo de $1 000 000 el 1 de junio y debe pagar un total de $1 700 000 exactamente un año después. Determine el interés y la tasa de interés pagada.

Solución

Primero, vamos a calcular el ***interés*** *pagado I, para ello debemos a usar la ecuación (1.1) esto es:*

$$I = \$1\,700\,000 - \$1\,000\,000 = \$700\,000$$

La ecuación (1.2) nos permite establecer la ***tasa de interés*** *i, pagada durante un* *año.*

$$i = \left(\frac{\$700\,000}{\$1\,000\,000}\right) \times 100\,\% = 70\,\%$$

por tanto, la tasa de interés pagada en ese periodo de tiempo es de 70 % anual.

Observemos que si despejamos I en (1.2) se tiene que $I = Pi$, ahora si este valor lo remplazamos en (1.1) entonces tenemos la siguiente ecuación:

$$F = P + Pi \tag{1.3}$$

Lo anterior, es para cuando el plazo es la unidad es decir un solo periodo. En la sección siguiente trataremos para n *periodos*

Ejemplo 1.3.
a) *Calcular la cantidad depositada hace un año, si ahora se tienen $10 000 000 con una tasa de interés de 5 % anual.*

b) *Determine la cantidad por intereses ganados durante este periodo.*

Solución

a) *La cantidad total acumulada es la suma del depósito original y del interés ganado. Si P es el depósito original,*

$$\textit{Total acumulado} = \textit{depósito} + \textit{depósito} \times \textit{tasa de interés}$$

$$\begin{aligned} \$10\,000\,000 &= P + P(0.05) \\ &= P(1 + 0.05) \\ &= 1.05P \end{aligned}$$

De ahí que, el depósito original es

$$P = \frac{\$10\,000\,000}{1.05} = \$9\,523\,810$$

Por tanto, la cantidad depositada hace un año fue de aproximadamente \$9 523 810.
b) *Aplique la ecuación (1.1) para determinar el interés ganado:*

$$I = \$10\,000\,000 - \$9\,523\,810 = \$476\,190$$

Los intereses generados durante el periodo de un año ascienden a aproximadamente \$476 190, calculados a una tasa anual del 5 %.

Clases de interés

Las dos clases de interés que más comúnmente se utilizan son el interés simple y el compuesto [4], para otras clases de interés ver el anexo 1.

1. **Interés Simple:** cuando sólo el capital gana intereses.
2. **Interés Compuesto:** si a intervalos de tiempo preestablecidos, el interés vencido se agrega al capital. Por lo que éste también genera intereses.

1.2.1. Interés simple

El interés simple es un propiedad básica para calcular el costo o rendimiento de un capital durante un periodo determinado. Este tipo de interés, que es proporcional al capital, al plazo y a la tasa de interés, se puede formalizar a través del siguiente teorema.

Interés simple

Teorema 1.1. *Los intereses que produce un capital P con una tasa de interés simple anual i, durante n años están dados por* [a]*:*

$$I = (P)(i)(n) \tag{1.4}$$

[a] Interés = (principal) (tasa de interés) (número de periodos)

Observación:

- El interés depende de tres variables: **El tiempo** (o periodo) (n), **la tasa de interés** (i) y el **capital** (P).

- Si el interés compuesto se capitaliza una vez al año ($n = 1$), entonces el monto total al final del año será equivalente al del interés simple. Sin embargo, si el interés compuesto se capitaliza más frecuentemente (por ejemplo, trimestral o mensualmente), entonces el interés compuesto generará más intereses que el interés simple en el transcurso de un año, esto se profundizará en la siguiente unidad.

Ejemplo 1.4. *Tasa de interés simple en un préstamo*
¿Cuál es la tasa de interés simple anual, si con $F = 56\,385$ se liquida un préstamo de $P = 45\,000$ en un plazo de 6 meses?

Datos y Fórmulas

- *Valor futuro del préstamo:* $F = 56,385$
- *Valor presente del préstamo:* $P = 45,000$
- *Plazo del préstamo: 6 meses* $\left(n = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ años}\right)$
- *Fórmula para el interés acumulado (1.1):*

$$I = F - P$$

$$\begin{aligned} I &= 56,385 - 45,000 \\ &= 11,385 \end{aligned}$$

- *Fórmula para el interés simple (1.4):*

$$I = P \cdot i \cdot n$$

Incógnita a Determinar

A

Queremos encontrar la tasa de interés anual i. Despejando i de la ecuación:

$$i = \frac{I}{P \cdot n}$$

$$\begin{aligned} i &= \frac{11,385}{45,000 * 0.5} \\ &= \frac{11,385}{22,500} \\ &= 0.506 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la tasa de interés anual es $i = 0.506$, o bien lo que es equivalente, 50.6 % anual.

partir de la ecuación (1.1) se tiene que

$$\begin{aligned} I &= 56\,385 - 45\,000 \\ &= 11\,385 \end{aligned}$$

Por otro lado, como el plazo es en años, se tiene que hacer la conversión de meses años:

$$n = \frac{1}{2} = 0.5$$

La tasa anual i, se despeja de la siguiente ecuación (1.4), esto es:

$$\begin{aligned} i &= \frac{I}{Pn} \\ &= \frac{11\,385}{45\,000 * 0.5} \\ &= \frac{11,385}{22,500} \\ &= 0.506 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la tasa anual es:

$$i = 0.506 \quad \textit{o bien,} \quad 50.6\,\%\ \textit{anual.}$$

Ejercicio 1.2. *¿Cuál es la tasa de interés simple anual, si con 14 644 €, se liquida un préstamo de 14 000 €, esto en un plazo de 6 meses?*

La unidad de tiempo para la tasa de interés puede no ser sólo anual, sino también mensual, diaria, trimestral o de cualquier otra unidad de tiempo. Sin embargo, en cualquier caso es importante hacer coincidirla con las unidades de tiempo del plazo; por ejemplo, si la tasa de interés es semanal entonces el plazo debe expresarse y manejarse en semanas.

	Día	Mes	Bimestre	Trimestre	Semestre	Año
1 día	1	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{180}$	$\frac{1}{360}$
1 mes	30	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
1 bimestre	60	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1 trimestre	90	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1 semestre	180	6	3	2	1	$\frac{1}{2}$
1 año	360	12	6	4	2	1

Valor futuro a partir del interés simple (Monto Simple)

El valor acumulado o valor futuro F de un capital o valor presente P que devenga intereses con la tasa de interés simple anual [a] i, al final de n periodos anuales es:

$$F = P(1 + in) \tag{1.5}$$

[a] Si no se dice otra cosa con respecto a la tasa de interés, ésta se considerará como simple anual.

Ejemplo 1.5. *Monto acumulado en cuenta bancaria*
¿Cuánto acumula en 2 años en su cuenta bancaria el señor Morales, si invierte $28,000$ €, ganando intereses del 7.3 % simple anual?

Datos y Fórmulas

- $P = 28,000$ *(el capital o valor presente)*
- $n = 2$ *(el plazo en años)*
- $i = 0.073$ *(la tasa de interés simple anual)*

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P\,(1 + i \cdot n)$$

Incógnita a Determinar

Queremos encontrar el valor futuro F. Sustituyendo los valores, en la formula anterior:

$$F = 28,000\,[1 + (0.073 * 2)]$$

$$F = 28,000\,[1.146]$$

Por lo tanto, monto acumulado en la cuenta bancaria del señor Morales será de $32,088$ €.

Formulas

Ahora apartir de la ecuación (1.5) se tiene los siguientes formulas para el interés simple.

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{F}{1+i(n)} && \text{Valor presente} \\
i &= \frac{\frac{F}{P}-1}{n} && \text{Tasa de interes} \\
n &= \frac{\frac{F}{P}-1}{i} && \text{Número de periodos}
\end{aligned}
$$

Es importante recordar que la anterior fórmula (1.5), o de cualquier otra, puede determinarse una de las variables que en ella aparecen. Para despejar una cualquiera, es recomendable hacerlo hasta después de haber reemplazado los valores que son conocidos, es decir, los datos.

1.2.2. Concepto Interes comercial e Interes Real

El mundo financiero tiene diferentes formas de calcular intereses para adaptarse a diversas situaciones y acuerdos entre las partes. Dos de los métodos más utilizados son el **interés simple exacto** y el **interés simple comercial**, cada uno con sus particularidades y aplicaciones. A continuación, se explica en qué consiste cada uno, su razón de ser, y los beneficios que ofrecen a las partes involucradas.

Valor futuro a partir del interés simple

- El **interés simple real**[a], también llamado **interés exacto**se calcula considerando el número real de días que transcurren entre la fecha de inicio y la fecha final de una operación financiera. En este caso, el año se considera de 365 días (o 366 si es año bisiesto).
- El **interés simple comercial**[b], también llamado **interés ordinario**, utiliza un año comercial estándar de 360 días, donde cada mes se considera de 30 días.

[a]Este método es más común en escenarios financieros complejos, como en litigios administrativos o cuando se desea precisión en la liquidación de una deuda.

[b]El interés comercial es más común en contratos de corto plazo o en situaciones donde se busca simplicidad en los cálculos financieros.

Cuándo se utiliza el interés Real

- **Para el acreedor**: Es más preciso en términos de tiempo y refleja con mayor exactitud el crecimiento del interés sobre el capital.
- **Para el deudor**: Al estar ajustado al tiempo real, el deudor puede beneficiarse en períodos cortos, porque el cálculo es más detallado y evita cargos adicionales por días “extras”.

Cuándo se utiliza el interés Comercial

- **Para el acreedor**: Simplifica los cálculos y puede resultar en un interés ligeramente mayor debido a la reducción del año a 360 días.
- **Para el deudor**: Es más fácil de calcular y entender, especialmente en operaciones más simples.

Beneficios al utilizar el interés Real

- **Acreedor**: Beneficioso en el sentido de que puede reflejar mejor los días que transcurrieron realmente. Sin embargo, si el plazo es corto, la diferencia no siempre es significativa.
- **Deudor**: Al calcular los días exactos, el deudor paga el interés basado en el tiempo real, lo que evita cargos adicionales.

Beneficios al utilizar el interés Comercial

- **Acreedor**: Al tener un año de 360 días, cada día tiene un valor mayor, lo que incrementa la cantidad de interés cobrado.
- **Deudor**: Aunque el interés puede ser mayor, este método es más predecible y facilita el manejo de cálculos financieros.

Ejemplo 1.6. *Supongamos que tienes un préstamo de \$10,000 con una tasa de interés del 8 % anual y lo quieres calcular en 180 días.*

Interés Simple Real

$$I_{real} = 10,000 \times 0.08 \times \frac{180}{365} \approx 394.52$$

Interés Simple Comercial

$$I_{comercial} = 10,000 \times 0.08 \times \frac{180}{360} = 400$$

Aquí se puede observar que el interés comercial genera más intereses (\$400) que el interés exacto (\$394.52), debido a la reducción del año a 360 días.

1.2.3. Ejercicios de Refuerzo en Clase

1. Una persona obtiene un préstamo de \$50000 y acepta liquidarlo año y medio después. Acuerda que mientras exista el adeudo pagará un interés simple mensual de 1.5 %. ¿Cuánto deberá pagar de interés cada mes?.
2. Una persona compra un reproductor de discos compactos que cuesta \$1500. Paga un enganche de \$800 y acuerda pagar otros \$750 tres meses después. ¿Qué tipo de interés simple pagó?
3. Una persona compró un automóvil el 1 de enero en \$195000 y lo vendió 17 meses después en \$256000. ¿Qué tasa de interés simple anual le rindió su inversión?
4. ¿En cuánto tiempo se duplica un capital invertido a una tasa de 19 % de interés anual simple?
5. ¿En cuánto tiempo se acumularían \$5000 si se depositaran hoy \$3000 en un fondo que paga 1.2 % simple mensual?
6. ¿Cuál será el monto el 24 de diciembre de un capital de \$10000 depositado el 15 de mayo del mismo año en una cuenta de ahorros que paga 19 % anual simple?
7. El 11 de julio se firmó un pagaré por \$1700 con 18 % de interés. ¿En qué fecha los intereses llegarán a \$150?
8. ¿A qué tasa de interés se invirtió un capital de \$475000 que se convirtió en un monto de\$700625 al cabo de 9 meses y medio?
9. ¿Durante cuánto tiempo estuvo invertido un capital de \$850 que se convirtió en un monto de \$983 a 27 % anual simple?
10. ¿Cuál es el valor actual de \$1350 cobrables dentro de 4 meses con 35 % anual simple de interés?

1.2.4. Taller Interés simple

1. ¿Durante cuánto tiempo ha de imponerse un capital de 25 000 al 5 % para que se convierta en 30 000?
2. Se invierte un capital de 200 y al cabo de dos años se desea obtener 250. ¿Cuál es la tasa de interés de la inversión?
3. ¿Qué capital debe invertirse para obtener 1 500 al cabo de tres años y a una tasa de interés de 20 % anual?
4. Se prestan 45 000 y al cabo de un año, 4 meses y 15 días se reciben 52 500. Calcular la tasa de interés como porcentaje.
5. Se prestan 5 000 y al cabo de 10 meses y 15 días se reciben 5 500. Calcular la tasa de interés mensual
6. Pedro invierte 15 000 y al cabo de 14 meses recibe 20 000. Calcular la tasa de interés bimestral
7. María invierte 7238 y después de un año con 2 meses y 5 días recibe 10050. ¿Cuál es la tasa de interés semestral?
8. Hallar la tasa de interés simple al que deberá prestarse un capital para que al cabo de t años los intereses sean equivalentes a k veces el capital prestado.
9. Hallar la tasa de interés simple (como porcentaje) al que deberá prestarse un capital para que al cabo de 20 años los intereses sean equivalentes al capital prestado.
10. ¿Cuánto tiempo se debe invertir 30 000 a una tasa de 0.45 % mensual para obtener 5000 de intereses?
11. ¿En cuánto tiempo el interés será igual al triple del capital inicial colocado a una tasa de interés al 6 %?
12. Hallar el interés producido durante cinco años, por un capital de 30 000, al 6 %
13. Hallar el capital requerido para obtener un interés de 500 al 3.5 % durante año y medio

14. Calcula el capital final después de seis meses, dado un capital inicial de 10 000 y una tasa del 3.5 %
15. Juan invierte 635 a una tasa de 4.68 %. ¿Cuál será su capital final después de 8 meses?

Tarea 1: Se tiene una letra por valor de 1000 a una tasa de interés simple del 5 % mensual y tiene un plazo de vencimiento de 40 días. Si se cancela 10 días después de su fecha de vencimiento, calcular el interés moratorio y la cantidad total a pagar, considerando que la tasa de interés moratoria es del 8 % mensual.

Tarea 2: ¿En cuánto tiempo crece un 24 % un capital que se invierte con el 6.3 % de interés simple anual?

1.2.5. Solución taller 1: Interés Simple

Duración de la inversión para convertir un capital de 25 000 en 30 000

1.)¿Cuánto tiempo ha de imponerse un capital de $25,000$ al $5\,\%$ para que se convierta en $30,000$?

Datos y Fórmulas

- $P = 25,000$ (capital inicial)
- $F = 30,000$ (capital final)
- $i = 0.05$ (tasa de interés)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P\,(1 + i \cdot n)$$

Incógnita a Determinar

Queremos encontrar el tiempo n. Despejando t de la fórmula anterior:

$$30,000 = 25,000\,(1 + 0.05 \cdot n)$$

$$\frac{30,000}{25,000} = 1 + 0.05 \cdot n$$

$$1.2 = 1 + 0.05 \cdot t \quad \Rightarrow \quad 0.2 = 0.05 \cdot n$$

$$n = \frac{0.2}{0.05} = 4 \text{ años}$$

Por lo tanto, el tiempo es de 4 años.

Duración de la inversión para convertir un capital de 25 000 en 30 000

2.)Se invierte un capital de 200 y al cabo de dos años se desea obtener 250. ¿Cuál es la tasa de interés de la inversión?

Datos y Fórmulas

- $P = 200$
- $F = 250$
- $n = 2$ (años)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P\,(1 + i \cdot n)$$

Incógnita a Determinar

Queremos encontrar la tasa de interés i. Despejando i:

$$250 = 200\,(1 + 2 \cdot i)$$

$$\frac{250}{200} = 1 + 2 \cdot i \quad \Rightarrow \quad 1.25 = 1 + 2 \cdot i$$

$$0.25 = 2 \cdot i \quad \Rightarrow \quad i = \frac{0.25}{2} = 0.125 = 12.5\,\%$$

Por lo tanto, la tasa de interés es del $12.5\,\%$.

Capital necesario para obtener 1,500 en un periodo de 3 años.

3.) ¿Qué capital debe invertirse para obtener $1,500$ al cabo de tres años a una tasa de interés del $20\,\%$ anual?

Datos y Fórmulas

- $F = 1,500$ (capital final)
- $i = 0.2$ (tasa de interés)
- $n = 3$ (años)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P\,(1 + i \cdot n)$$

Incógnita a Determinar

Queremos encontrar el capital inicial P. Despejando P:

$$1,500 = P\,(1.6) \quad \Rightarrow \quad P = \frac{1,500}{1.6} = 937.50$$

Por lo tanto, el capital inicial es de 937.50.

Cálculo de la tasa de interés

4.) Se prestan $45,000$ y al cabo de un año, 4 meses y 15 días se reciben $52,500$. Calcular la tasa de interés.

Datos y Fórmulas

- $P = 45,000$
- $F = 52,500$
- $n = 1.37$ (años: 1 año + 4 meses + 15 días)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P\,(1 + i \cdot n)$$

Incógnita a Determinar

Queremos encontrar la tasa de interés i. Despejando i:

$$52,500 = 45,000\,(1 + i \cdot 1.37)$$

$$\frac{52,500}{45,000} = 1 + i \cdot 1.37$$

$$1.1667 = 1 + 1.37 \cdot i \quad \Rightarrow \quad 0.1667 = 1.37 \cdot i$$

$$i = \frac{0.1667}{1.37} = 0.1217 \quad \Rightarrow \quad i = 12.17\,\%$$

Por lo tanto, la tasa de interés es del $12.17\,\%$.

Cálculo de la tasa mensual

5.) Se prestan $5,000$ y al cabo de 10 meses y 15 días se reciben $5,500$. Calcular la tasa de interés mensual.

Datos y Fórmulas

- $P = 5,000$
- $F = 5,500$
- $n = 10.5$ (meses)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P\,(1 + i \cdot n)$$

Incógnita a Determinar

Queremos encontrar la tasa mensual i. Despejando i:

$$5,500 = 5,000\,(1 + i \cdot 10.5)$$

$$\frac{5,500}{5,000} = 1 + i \cdot 10.5$$

$$1.1 = 1 + 10.5 \cdot i \quad \Rightarrow \quad 0.1 = 10.5 \cdot i$$

$$i = \frac{0.1}{10.5} = 0.00952 \quad \Rightarrow \quad i = 0.952\,\%$$

Por lo tanto, la tasa de interés mensual es del $0.952\,\%$.

Tasa de interés bimestral para Pedro

6.) Pedro invierte $15,000$ y al cabo de 14 meses recibe $20,000$. Calcular la tasa de interés bimestral.

Datos y Fórmulas

- $P = 15,000$
- $F = 20,000$
- $n = \frac{14}{2} = 7$ (bimestres)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P\,(1 + i \cdot n)$$

Incógnita a Determinar

Queremos encontrar la tasa bimestral i. Despejamos:

$$20,000 = 15,000\,(1 + i \cdot 7)$$

$$\frac{20,000}{15,000} = 1 + 7 \cdot i$$

$$1.3333 = 1 + 7 \cdot i \quad \Rightarrow \quad 0.3333 = 7 \cdot i$$

$$i = \frac{0.3333}{7} = 0.0476 = 4.76\,\%$$

Por lo tanto, la tasa bimestral es del $4.76\,\%$.

Tasa de interés semestral para María

7.) María invierte $7,238$ y después de un año con 2 meses y 5 días recibe $10,050$. Calcular la tasa de interés semestral.

Datos y Fórmulas

- $P = 7,238$
- $F = 10,050$
- $n = 1.37$ (años, o 2.74 semestres)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P\,(1 + i \cdot n)$$

Incógnita a Determinar

Queremos encontrar la tasa semestral i. Despejamos:

$$10,050 = 7,238\,(1 + i \cdot 2.74)$$

$$\frac{10,050}{7,238} = 1 + 2.74 \cdot i$$

$$1.3886 = 1 + 2.74 \cdot i \quad \Rightarrow \quad 0.3886 = 2.74 \cdot i$$

$$i = \frac{0.3886}{2.74} = 0.1419 = 14.19\,\%$$

Por lo tanto, la tasa semestral es del $14.19\,\%$.

Tasa de interés simple para intereses equivalentes a k veces el capital

8.) Hallar la tasa de interés simple al que deberá prestarse un capital para que al cabo de t años los intereses sean equivalentes a k veces el capital prestado.

Datos y Fórmulas

- P (capital inicial)
- $F = P(1 + k)$ (capital final)
- $I = k \cdot P$ (interés generado)
- n (años)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P\,(1 + i \cdot t)$$

Incógnita a Determinar

Queremos encontrar la tasa de interés i. Despejamos:

$$P(1 + k) = P\,(1 + i \cdot t) \quad \Rightarrow \quad 1 + k = 1 + i \cdot t$$

$$k = i \cdot t \quad \Rightarrow \quad i = \frac{k}{t}$$

Por lo tanto, la tasa de interés es $\frac{k}{t}$.

Tasa de interés simple para intereses equivalentes al capital en 20 años

9.) Hallar la tasa de interés simple (como porcentaje) al que deberá prestarse un capital para que al cabo de 20 años los intereses sean equivalentes al capital prestado.

Datos y Fórmulas

- P (capital inicial)
- $I = P$ (intereses equivalentes al capital)
- $n = 20$ (años)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P\,(1 + i \cdot n)$$

Incógnita a Determinar

Queremos encontrar la tasa de interés i. Sabemos que $F = 2P$, entonces:

$$2P = P\,(1 + i \cdot 20) \quad \Rightarrow \quad 2 = 1 + 20 \cdot i$$

$$1 = 20 \cdot i \quad \Rightarrow \quad i = \frac{1}{20} = 0.05 = 5\,\%$$

Por lo tanto, la tasa de interés es del $5\,\%$.

Tiempo necesario para obtener 5,000 de intereses

10.) ¿Cuánto tiempo se debe invertir $30,000$ a una tasa de $0.45\,\%$ mensual para obtener $5,000$ de intereses?

Datos y Fórmulas

- $P = 30,000$
- $I = 5,000$
- $i = 0.0045$ (mensual)

La fórmula del interés simple es:

$$I = P \cdot i \cdot n$$

Incógnita a Determinar

Queremos encontrar el tiempo n. Despejamos:

$$5,000 = 30,000 \cdot 0.0045 \cdot n$$

$$n = \frac{5,000}{30,000 \cdot 0.0045} = 37.04 \text{ meses}$$

Por lo tanto, el tiempo necesario es de aproximadamente 37 meses.

Tiempo para que el interés sea el triple del capital

11.) ¿En cuánto tiempo el interés será igual al triple del capital inicial colocado a una tasa de interés al 6 %?

Datos y Fórmulas

- P (capital inicial)
- $I = 3P$
- $i = 0.06$ (anual)

La fórmula del interés simple es:

$$I = P \cdot i \cdot n$$

Incógnita a Determinar

Queremos encontrar el tiempo n. Despejamos:

$$3P = P \cdot 0.06 \cdot n \quad \Rightarrow \quad 3 = 0.06 \cdot n$$

$$n = \frac{3}{0.06} = 50 \text{ años}$$

Por lo tanto, el tiempo necesario es de 50 años.

Interés producido en 5 años

12.) Hallar el interés producido durante cinco años, por un capital de $30,000$, al 6 %.

Datos y Fórmulas

- $P = 30,000$
- $i = 0.06$ (anual)
- $n = 5$ (años)

La fórmula del interés simple es:

$$I = P \cdot i \cdot n$$

Incógnita a Determinar

Queremos encontrar el interés I:

$$I = 30,000 \cdot 0.06 \cdot 5 = 9,000$$

Por lo tanto, el interés producido es de $9,000$.

Capital necesario para obtener 500 de interés en 1.5 años

13.) Hallar el capital requerido para obtener un interés de 500 al 3.5 % durante año y medio.

Datos y Fórmulas

- $I = 500$
- $i = 0.035$
- $n = 1.5$ (años)

La fórmula del interés simple es:

$$I = P \cdot i \cdot n$$

Incógnita a Determinar

Queremos encontrar el capital P. Despejamos:

$$500 = P \cdot 0.035 \cdot 1.5$$

$$P = \frac{500}{0.035 \cdot 1.5} = 9,523.81$$

Por lo tanto, el capital requerido es de $9,523.81$.

Capital final después de seis meses

14.) Calcula el capital final después de seis meses, dado un capital inicial de $10,000$ y una tasa del 3.5 %.

Datos y Fórmulas

- $P = 10,000$
- $i = 0.035$
- $n = 0.5$ (años)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P\,(1 + i \cdot n)$$

Incógnita a Determinar

Queremos encontrar el valor futuro F:

$$F = 10,000\,(1 + 0.035 \cdot 0.5)$$

$$F = 10,000 \cdot 1.0175 = 10,175$$

Por lo tanto, el capital final será de $10,175$.

Capital final para Juan después de 8 meses

15.) Juan invierte 635 a una tasa de 4.68 %. ¿Cuál será su capital final después de 8 meses?

Datos y Fórmulas

- $P = 635$
- $i = 0.0468$
- $n = \frac{8}{12} = 0.6667$ (años)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P\,(1 + i \cdot n)$$

Incógnita a Determinar

Queremos encontrar el valor futuro F:

$$F = 635\,(1 + 0.0468 \cdot 0.6667)$$

$$F = 635 \cdot 1.0312 = 654.42$$

Por lo tanto, el capital final será de 654.42.

Tarea 1

Se tiene una letra por valor de $1,000$ a una tasa de interés simple del 5 % mensual y tiene un plazo de vencimiento de 40 días. Si se cancela 10 días después de su fecha de vencimiento, calcular el interés moratorio y la cantidad total a pagar, considerando que la tasa de interés moratoria es del 8 % mensual.

Datos y Fórmulas

- Valor de la letra: $P = 1,000$
- Tasa de interés simple: $i = 0.05$ (mensual)
- Plazo de vencimiento: $n = \frac{40}{30} = 1.33$ (meses)
- Interés moratorio: $i_m = 0.08$ (mensual)
- Días de retraso: $n_m = \frac{10}{30} = 0.33$ (meses)

La fórmula del interés simple es:

$$I = P \cdot i \cdot n$$

Solución

1. Primero, Calculemos el **interés generado en el plazo inicial**:

$$I = (1,000)(0.05)(1.33) \approx 66.7$$

La cantidad total a pagar al vencimiento es:

$$F_I = 1,000 + 66.7 \approx 1,066.7$$

2. Después, Debemos calcular el **interés moratorio** por los 10 días de retraso:

$$I_m = (1,066.7)(0.08)(0.33) \approx 26.7$$

3. Finalmente, la **cantidad total a pagar**, incluyendo el interés moratorio, es:

$$F_T = 1,066.7 + 26.7 \approx 1,093.4$$

Por lo tanto, la cantidad total a pagar es $1,093.4$.

Tarea 2

¿En cuánto tiempo crece un 24 % un capital que se invierte con el 6.3 % de interés simple anual?

Datos y Fórmulas

- Crecimiento del capital: $= 0.24$ (24 %)
- Tasa de interés anual: $i = 0.063$ (anual)

La fórmula del valor futuro es:

$$F = P\,(1 + i \cdot n)$$

Observemos que

$$F = P(1 + k) = 1.24 * P$$

Al remplazar en la formula se tiene que,

$$1.24 * P = P\,(1 + i \cdot n)$$

Incógnita a Determinar

Ahora, queremos encontrar el tiempo n en años. pero sabemos que:

$$1.24 * P = P\,(1 + i \cdot n)$$

Resta, remplazar los datos y despejar la variable n, esto es:

$$1.24 = 1 + (0.063) \cdot n \quad \Rightarrow \quad 0.24 = (0.063) \cdot n$$

Finalmente,

$$n = \frac{0.24}{0.063} \approx 3.81 \text{ años}$$

Por lo tanto, el capital crece un 24 % en aproximadamente 3.81 años.

Capítulo 2

Unidad II

Como vimos en la sección anterior, el interés simple mantiene el capital inicial constante, generando interés solo sobre este.

Ahora, exploraremos el interés compuesto, en el cual los intereses se suman al capital original al final de cada periodo, generando un nuevo interés adicional en el siguiente periodo. Esta capitalización permite que el capital crezca de manera exponencial a lo largo del tiempo, siendo ideal para inversiones a largo plazo.

2.1. Interés Compuesto

Concepto

En el esquema de interés compuesto, el interés generado en cada periodo se calcula con base en la cantidad total al final del periodo anterior. Esta cantidad total incluye el capital original más el interés acumulado que se ha dejado en la cuenta.

Interés compuesto

A medida que los intereses se generan de forma recurrente, el valor acumulado total, o monto F, después de n periodos se calculará como sigue:

$$F = P(1+i)^n \tag{2.1}$$

Observación:

- El interés puede ser convertido en capital anual, semestral, trimestral y mensual, etc. A dicho periodo se le da el nombre de "periodo de capitalización". Al número de veces que el interés se capitaliza durante un año se le denomina frecuencia de conversión.
- Es muy importante que, para la solución de cualquier problema de interés compuesto, el interés anual sea convertido a la tasa que corresponda de acuerdo con el periodo de capitalización que se establezca; si el interés se capitaliza mensualmente el interés anual debe transformarse en interés mensual; si es trimestralmente, a interés trimestral, etcétera.

Ejemplo 2.1. *Desembolsamos un préstamo por* $30'000.000 *a una tasa de interés del 2 % mensual durante cuatro meses, con la condición de no desembolsar los intereses al final de cada mes sino de capitalizarnos hasta el final. ¿Cuánto cancelamos por el préstamo?*

Solución

Datos y Fórmulas

- Desembolso del Préstamo: $30'000.000
- Tasa de interés Compuesto: $i = 0.02$ (mensual)
- Plazo de vencimiento: $n = 4$ (meses)

La fórmula del interés compuesto es:

$$F = P(1+i)^n$$

Incógnita a Determinar

Queremos encontrar el valor futuro F:

$$\begin{aligned} F &= P(1+i)^n \\ F &= 30'000.000(1+0.02)^4 \\ &= 30'000.000(1,02)^4 \\ &\approx 30'000.000(1,0824) \\ &\approx 32'472.965 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la cantidad total a pagar es $32'472.965.

Ejemplo 2.2. *Suponga que usted deposita* $1000 *en una cuenta de ahorros que paga intereses a una tasa del 8 % anual. Suponga que no retira el interés generado al final de cada periodo (año), sino que deja que se acumule.*

a) ¿Cuánto tendría al final del tercer año con un interés simple?

b) ¿Cuánto tendría al final del tercer año con un interés compuesto?

Año	**Monto a interés simple**	**Monto a interés compuesto**
0	1000	1000
1	$1000 \times (1 + 0.08 \times 1) = 1080$	$1000 \times (1 + 0.08)^1 = 1080$
2	$1000 \times (1 + 0.08 \times 2) = 1160$	$1000 \times (1 + 0.08)^2 \approx 1166.40$
3	$1000 \times (1 + 0.08 \times 3) = 1240$	$1000 \times (1 + 0.08)^3 \approx 1259.71$

Tabla 2.1: Comparación entre el monto a interés simple y a interés compuesto

Ejemplo 2.3.

1. *Hallar el interés compuesto sobre* $1000 *por tres años si el interés de* 5 % *se convertible anualmente en capital.*
   Basta remplazar los datos que se tienen en la formula (2.1) esto es:

$$\begin{aligned} F &= P(1+i)^n \\ &= 1000(1+0.05)^3 \\ &= 1000(1.05)^3 \\ &\approx 1157,63 \end{aligned}$$

   donde el interés compuesto estaría dado como,

$$I = 1157,63 - 1000 = 157,63$$

2. *Hallar el interés compuesto producido durante cinco años, por un capital de 30 000, al 6 %.*

   Reemplazamos los valores:

$$\begin{aligned} F &= 30.000\,(1+0.06)^5 \\ &= 30.000 \times (1.3382) \\ &\approx 40,146 \end{aligned}$$

Luego, el interés compuesto está dado como sigue:

$$\begin{aligned} I &= M - C \\ &= 40.146 - 30.000 \\ &= 10,146 \end{aligned}$$

El interés compuesto producido en cinco años es de 10,146.

Formulas de interés compuesto

Ahora apartir de la ecuación (2.1) se tiene los siguientes formulas para el interés compuesto.

$$\begin{aligned} P &= F(1+i)^{-n} && \text{Valor presente} \\ n &= \frac{\log\left(\frac{F}{P}\right)}{\log(1+i)} && \text{Número de periodos} \\ i &= \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1 && \text{Tasa de interés} \\ I &= P\left[(1+i)^n - 1\right] && \text{Interés} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4. *Resolver cada uno de los siguientes problemas, a partir de las anteriores ecuaciones.*

1. *Qué capital debe invertirse ahora al 12.69 % anual capitalizable por año para tener \$40,000 en 10 años?, ¿A cuánto ascienden los intereses?.*

Capital e Interés Compuesto acumulado

Datos y Fórmulas

- $F = \$40.000$
- $n = 10$ *(años)*
- $i = 0.1269$ *(Capitalizable cada año)*

La fórmula del valor Presente es:

$$P = F\,(1+i)^{-n}$$

Incógnita a Determinar

Queremos determinar el Capital P. Esto es:

$$\begin{aligned} P &= 40.000\,(1+0.1269)^{-10} \\ &= 40.000\,(1.1269)^{-10} \\ &= 40.000\,(3.3106)^{-1} \\ &\approx 12.084,35 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el capital que se debe invertir ahora es de $\$12.084,35$. Los intereses al cabo de 10 años ascienden a $\$27.915,65$.

El monto acumulado M de un capital inicial P depende de; la tasa de interés anual, la frecuencia de capitalización y el periodo de inversión. A continuación, se presenta el Teorema, que establece la relación entre estos factores y permite calcular el monto total acumulado al final de un periodo determinado.

Teorema

El monto acumulado F de un capital P al final de nm periodos se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$F = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n\times m} \tag{2.2}$$

donde:

- n es el plazo en años.
- $n \times m$ es el número total de periodos, definido como el producto de n (años) y m (número de periodos por año).
- i es la tasa de interés anual capitalizable, que se divide entre m para determinar el interés correspondiente a cada periodo.

Ejemplo 2.5.

Ejemplo tasa de interés

¿Con qué tasa de interés anual capitalizable por bimestre se duplica un capital en 3 años?

Datos y Fórmulas

- P *Capital inicial*
- $F = 2P$ *Monto final*
- $n = 3$ *años (plazo)*
- $m = 6$ *bimestres por año (frecuencia de capitalización)*
- *Número de periodos bimestrales:* $nm = 18$

La fórmula para el interés compuesto es:

$$F = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}$$

despejando la variable i *se tiene que*

$$i = m\left(\sqrt[nm]{\frac{F}{P}} - 1\right)$$

Incógnita a Determinar

Queremos encontrar la tasa de ***interés anual*** i ***capitalizable por bimestres****.*

Sustituyendo los valores en la fórmula:

$$\begin{aligned} i &= 6\left(\sqrt[18]{\frac{2P}{P}} - 1\right) \\ &= 6\left(\sqrt[18]{2} - 1\right) \\ &= 6\,(1.0392 - 1) \\ &= 6\,(0.0393) \\ &= 0.2356 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la tasa de interés anual es de aproximadamente $23.56\,\%$*, capitalizable por bimestres.*

Ejercicio 2.1.

Ejemplo tasa de interés

¿Con qué tasa de interés anual capitalizable por bimestre se duplica un capital en 3 años? ¿Qué día deberá invertir \$10.000 *el matemático Gutiérrez para disponer de* \$10.512 *el 11 de mayo? Suponga que la inversión genera intereses del* 13 % *compuesto por semana.*

Datos y Fórmulas

- $P = 10,000$ *(Capital inicial)*
- $F = 10,512$ *(Monto final)*
- $i = 0.13/52$ *(Tasa de interés semanal, ya que el 13 % anual se divide entre 52 semanas)*
- n *es el número de semanas hasta el 11 de mayo.*

La fórmula para el valor futuro con interés compuesto es:

$$F = P(1+i)^n$$

Incógnita a Determinar

Queremos encontrar el número de semanas n *antes del 11 de mayo en las que se debe realizar la inversión. Para ello, despejamos* n *de la fórmula:*

$$10,512 = 10,000(1 + 0.13/52)^t$$

Dividimos ambos lados entre 10,000:

$$1.0512 = (1 + 0.0025)^t$$

Calculamos el logaritmo natural de ambos lados:

$$\ln(1.0512) = t \ln(1.0025)$$

Despejamos t*:*

$$t = \frac{\ln(1.0512)}{\ln(1.0025)}$$

$$t \approx 20.41\,\textit{semanas}$$

Esto indica que debe invertir su capital ***20 semanas antes del 11 de mayo****, es decir, aproximadamente el* ***19 de diciembre del año anterior****.*

Es importante mencionar que en el interés compuesto hay dos tasas de interés. **Tasa de interés Nominal y Tasa de Interés Efectiva.**

2.2. Tasa nominal y tasa efectiva

Tasa de interés Nominal

Es la **tasa anual** que capitaliza más de una vez al año. Hablar de tasa nominal equivale a hablar de **tasa capitalizable.**[3]

Observación:

La tasa nominal se representa con j, y el número de veces que el interés se convierte en capital se denomina capitalización y se simboliza con m.

- $j = 24\,\%\,N.M$: Una tasa del $24\,\%$ nominal mensual, o capitalizable mensualmente. Aquí $m = 12$.
- $j = 30\,\%\,N.T$: Una tasa anual del $30\,\%$ nominal trimestral o capitalizable trimestralmente. Aquí $m = 4$.
- $j = 25\,\%\,N.B$: nominal bimestral, con $m = 6$.
- $j = 24\,\%\,N.D$: nominal diaria, con $m = 360$.

Tasa de interés Efectiva

Es aquella que realmente **opera sobre el capital en un periodo**. El periodo puede ser un año, un mes, un semestre, un trimestre, un bimestre, un día o una semana [3].

Ejemplo 2.6. *Un banco nos concede un préstamo y nos cobra una tasa de interés del 28 % N.T. ¿Cuál es la tasa efectiva trimestral que nos cobra la entidad financiera?*

La tasa que nos cobra el banco es una tasa anual (Nominal). Durante el año, se convierte en capital 4 veces (el año tiene 4 trimestres). Para calcular la tasa de interés trimestral, dividimos la tasa nominal entre el número de capitalizaciones:

$$i = \frac{j}{m} = \frac{28\,\%}{4} = 7\,\%$$

Al dividir la tasa nominal (28 %) entre el número de capitalizaciones, obtenemos una tasa del 7 %, que es la tasa de periodo o tasa efectiva trimestral.

Ejemplo 2.7. *Conseguimos un préstamo y nos cobran una tasa de interés del 32 % N.T (Nominal Trimestral). ¿Qué tasa efectiva debemos pagar?*

Dado que $J = 32\,\%\, N.T = 0.32\, N.T$*, durante el año hay cuatro capitalizaciones* ($m = 4$)*. La tasa de periodo o efectiva es:*

$$i = \frac{j}{m} = \frac{0.32}{4} = 8\,\%$$

Es decir, la tasa efectiva trimestral o de periodo trimestral es 8 %.

2.3. Valor Futuro

Ejemplo 2.8. *Si depositamos un millón de pesos con una tasa de interés nominal trimestral del 28 % (N.T.) ¿cuánto recibimos al finalizar el año?*

Capital e Interés Compuesto acumulado

Datos y Fórmulas

- $P = \$1\,000\,000$
- $n = 1$ (Años)
- $j = 0.28$ (Capitalizable cada trimestre)
- $m = 4$ (Trimestres en el año)

La fórmula del valor Presente es:

$$F = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm}$$

Incógnita a Determinar

Queremos determinar el Capital F. Esto es:

$$\begin{aligned} F &= 1\,000\,000\left(1 + \tfrac{0.28}{4}\right)^4 \\ &= 1\,000\,000\,(1 + 0.07)^4 \\ &= 1\,000\,000\,(1.07)^4 \\ &\approx 1\,310\,796.01 \end{aligned}$$

Por lo tanto, al finalizar el año, el monto final a recibir es de aproximadamente $\$1\,310\,796.01$.

Ejemplo 2.9. *Consignamos \$10,000,000 en una corporación durante 2 años, y nos pagan una tasa de interés del 12 % N.M (Nominal Mensual). ¿Cuánto dinero retiramos dentro de 2 años?*

Ejemplo 2.10. *Por un préstamo de* $\$25\,000$ *pesos pagamos una tasa del interés del 18 % N.B durante un año. ¿Cuánto debemos pagar por el préstamo?*

2.4. Valor Presente

Ejemplo 2.11. *Dentro de 8 meses recibo \$12,000,000. ¿A cuánto dinero en pesos de hoy equivalen los \$12,000,000 si la tasa de interés es del 1.5 % efectiva mensual.*

Capital e Interés Compuesto acumulado

Datos y Fórmulas

- $P = \$12\,000\,000$
- $n = 8$ *(meses)*
- $i = 0.015$ *(Capitalizable cada trimestre)*

La fórmula del valor Presente es:

$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$

Incógnita a Determinar

Queremos determinar el Capital F. Esto es:

$$\begin{aligned} P &= \frac{12\,000\,000}{(1+0.015)^8} \\ &\approx 10\,241\,884.45 \end{aligned}$$

2.5. Tasas Equivalentes

Definición de Tasas Equivalentes

Se dice que dos tasas de interés son equivalentes si, con diferentes periodos de capitalización, producen el mismo monto en el mismo plazo.

- La tasa anual compuesta i, convertible una vez al año ($n = 1$), equivalente a la tasa nominal j, capitalizable m veces al año, se denomina **tasa efectiva**.

Teorema

La tasa efectiva i, equivalente a una tasa nominal j, capitalizable m veces por año, está dada por:

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$$

Ejemplo 2.12. ***Tasa equivalente***
Calcular la tasa efectiva anual equivalente a una tasa nominal del 11.8 % capitalizable trimestralmente.

$$j = 0.118, \quad m = 4$$

Aplicamos el teorema:

$$i = \left(1 + \frac{0.118}{4}\right)^4 - 1$$

al remplazar se tiene lo siguiente,

$$i = (1 + 0.0295)^4 - 1 = 0.1233 \text{ o } 12.33\,\%$$

Esto indica que una inversión al 11.8 % anual compuesto trimestralmente es equivalente a una tasa efectiva anual del 12.33 %.

2.6. Problemas de Comparación de Tasas

Ejercicio 2.2. *¿Qué es más conveniente para una institución bancaria: prestar dinero al 20.28 % anual compuesto semanalmente o al 21.29 % capitalizable semestralmente?*

Para resolver, calculamos ambas tasas como tasas efectivas anuales y comparamos:

- **Opción 1:** $j = 20.28\,\%$, $m = 52$ (semanal)

$$i = \left(1 + \frac{0.2028}{52}\right)^{52} - 1 = 22.43\,\%$$

- **Opción 2:** $j = 21.29\,\%$, $m = 2$ (semestral)

$$i = \left(1 + \frac{0.2129}{2}\right)^{2} - 1 = 22.42\,\%$$

Ejemplo 2.13. *Si un banco nos cobra por un préstamo una tasa de interés del 5 % efectivo trimestral, ¿qué tasa efectiva anual nos cobra el banco?*

Para calcular la tasa efectiva anual:

$$(1 + i)^4 = (1 + 0.05)^4 - 1$$

Entonces,

$$i = (1.05)^4 - 1 = 0.2155 \text{ } o \text{ } 21.55\,\% \text{ } \textit{efectiva anual}$$

2.7. Tasas Nominales

La tasa nominal se simboliza con j, y para equivalencias se representa como $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$.

Ejemplo 2.14. *Un banco cobra una tasa de interés del 36 % N.M (nominal mensual). ¿Cuál es la tasa efectiva anual?*

Solución

$$\left(1+\frac{0.36}{12}\right)^{12}-1=0.4257 \text{ o } 42.57\,\% \text{ efectiva anual}$$

Ejercicio 2.3. *¿Cuál es la tasa efectiva equivalente al 11.8 % anual compuesto por trimestres?*

Cálculo de Tasas Nominales y Efectivas

Datos y Fórmulas

- $j = 0.118$ (Tasa nominal anual capitalizable por trimestres)
- $m = 4$ (Número de trimestres por año)

La fórmula de la tasa efectiva anual es:

$$i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1$$

Cálculos

Sustituimos los valores en la fórmula:

$$i=\left(1+\frac{0.118}{4}\right)^4-1$$

$$i=(1+0.0295)^4-1$$

$$i=(1.0295)^4-1$$

$$i\approx 1.123324947-1$$

$$i\approx 0.123324947$$

Por lo tanto, la tasa efectiva anual es del 12.3324947 %.

Una inversión al 11.8 % nominal anual compuesto por trimestres es tan productiva como un 12.3324947 % capitalizable anualmente. La tasa efectiva trimestral (j/m) es del 2.95 %, pero la tasa efectiva anual resulta ser del 12.33 %.

Ejemplo 2.15. *Para una inversión de* \$1000*:*

$$1000 \cdot (1 + 0.0295)^4 \approx 1123.324947$$

$$1000 \cdot (1 + 0.123324947)^1 \approx 1123.324947$$

Esto demuestra la equivalencia:

- *Tasa nominal:* 11.8 % *Nominal Trimestral*
- *Tasa efectiva trimestral:* 2.95 %
- *Tasa efectiva anual:* 12.33 %

Ejemplo 2.16. *Conocida una tasa del 24 % N.T (nominal trimestral), hallar la tasa efectiva mensual equivalente.*

Solución

Usamos la fórmula de tasas equivalentes:

$$\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m = (1 + i)^n$$

Dado que $j = 0.24$*,* $m = 4$ *(trimestral) y* $n = 12$ *(mensual), entonces:*

$$\left(1 + \frac{0.24}{4}\right)^{12/4} - 1 = 0.0196 \text{ o } 1.96\,\% \text{ efectiva mensual}$$

Algunas Aclaraciones

Formulas Y Definiciones

Interés compuesto con tasa efectiva:

$$F = P(1+i)^n$$

- F: Valor Futuro, Monto o Saldo Final.
- P: Valor Presente, Capital o Inversión.
- i: Tasa efectiva de interés compuesto.
- n: Tiempo (en unidades consistentes con i).

Formulas y Definiciones

Interés compuesto con tasa nominal:

$$F = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^n$$

- F: Valor Futuro, Monto o Saldo Final.
- P: Valor Presente, Capital o Inversión.
- j: Tasa nominal (puede ser convertible o capitalizable).
- m: Número de periodos de conversión por año.

Ejemplo 2.17. ***Interés compuesto con tasa efectiva*** *Calcular el monto que se obtendrá de invertir \$15,000 durante 3 años ($n = 3$) a una tasa efectiva anual del $3\,\%$ ($i = 0.03$) de interés compuesto.*

Para ello, a partir de la formula se tiene que:

$$
\begin{aligned}
F &= P(1+i)^n \\
F &= 15,000(1+0.03)^3 \\
F &= 15,000(1.03)^3 \\
F &\approx 15,000(1.092727) \\
F &\approx 16,391
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el monto obtenido será de $16,391.

Ejemplo 2.18. *Calcular el interés compuesto que generará un capital de $22,000 durante 4 meses* $(n = 4)$ *al* $24\,\%$ $(j = 0.24)$ *convertible mensualmente* $(m = 12)$*.*

$$
\begin{aligned}
F &= P\left(1+\frac{j}{m}\right)^n \\
F &= 22,000\left(1+\frac{0.24}{12}\right)^4 \\
F &= 22,000\,(1+0.02)^4 \\
F &= 22,000(1.02)^4 \\
F &\approx 22,000(1.08243216) \\
F &\approx 23,813.51
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el monto futuro será de $23,813.51.

Tasas de interés equivalentes

Definición: Tasas de interés equivalentes

Las Tasas equivalentes son aquellas que producen la misma tasa efectiva anual bajo diferentes condiciones. Las tasas de interés pueden ser **vencidas** (aplicadas al final del periodo) o **anticipadas** (aplicadas al inicio del periodo).

Conversiones de unidades

Efectiva a efectiva	Nominal a Efectiva
$(1+i)^n = (1+i)^n$	$\left(1+\frac{j}{m}\right)^m = (1+i)^n$
Nominal a Nominal	Efectiva a Nominal
$\left(1+\frac{j}{m}\right)^m = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m$	$(1+i)^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m$

Ejemplo 1: Efectiva a efectiva

Calcular la tasa efectiva mensual equivalente a una tasa efectiva anual del 27 %.

$$\begin{aligned}
(1+i)^{12} &= (1+0.27)^1 \\
i+1 &= \sqrt[12]{1.27} \\
i &= \sqrt[12]{1.27}-1 \\
i &\approx 0.0201177635
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la tasa efectiva mensual es del 2.01177635 %.

Ejemplo 2: Efectiva trimestral a efectiva anual

Si un banco cobra una tasa del 5 % efectiva trimestral, calcular la tasa efectiva anual.

$$\begin{aligned}
(1+i)^1 &= (1+0.05)^4 \\
i &= (1+0.05)^4-1 \\
i &= 1.21550625-1 \\
i &= 0.21550625
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la tasa efectiva anual es del 21.550625 %.

Ejemplo 3: Efectiva semestral a efectiva trimestral

Un banco cobra una tasa del 11 % efectiva semestral. Calcular la tasa efectiva trimestral.

$$\begin{aligned}(1+i)^2 &= (1+0.11)^4 \\ i+1 &= \sqrt[4]{1.11} \\ i &= \sqrt[4]{1.11}-1 \\ i &\approx 0.05356537529\end{aligned}$$

Por lo tanto, la tasa efectiva trimestral es del 5.356537529 %.

Expresión	Descripción
$(1+i)^1$	Tasa efectiva anual
$(1+i)^2$	Tasa efectiva semestral
$(1+i)^4$	Tasa efectiva trimestral
$(1+i)^6$	Tasa efectiva bimestral
$(1+i)^{12}$	Tasa efectiva mensual
$(1+i)^{48}$	Tasa efectiva semanal (1)
$(1+i)^{52}$	Tasa efectiva semanal (2)
$(1+i)^{360}$	Tasa efectiva diaria (1)
$(1+i)^{365}$	Tasa efectiva diaria (2)

Tabla 2.2: Relación entre tasas efectivas y sus periodos.

Ejemplo 1: De efectiva anual a efectiva mensual

Una corporación financiera nos concede un préstamo y nos cobra una tasa de interés del 27 % efectiva anual. Hallar el valor de la tasa efectiva mensual.

Solución

Conocida:

$$(1+0.27)^{1} \quad \text{efectiva anual.}$$

Desconocida:

$$(1+i)^{12} \quad \text{efectiva mensual.}$$

$$\begin{aligned}
(1+i)^{12} &= (1+0.27)^{1} \\
1+i &= \sqrt[12]{1+0.27} \\
i &= \sqrt[12]{1+0.27}-1 \\
i &= 0.0201177635
\end{aligned}$$

Luego, la tasa efectiva mensual es:

$$i = 2.01177635\,\%$$

Esto es equivalente al 27 % efectivo anual.

Ejemplo 2: De efectiva trimestral a efectiva anual

Si un banco nos cobra por un préstamo una tasa de interés del 5 % efectivo trimestral, ¿qué tasa efectiva anual nos cobra el banco?

Solución

Conocida:

$$(1+0.05)^{4} \quad \text{efectiva trimestral.}$$

Desconocida:

$$(1+i)^1 \quad \text{efectiva anual.}$$

$$\begin{aligned}(1+i)^1 &= (1+0.05)^4\\ i &= (1+0.05)^4-1\\ i &= 1.21550625-1=0.21550625\end{aligned}$$

Por lo tanto, la tasa efectiva anual es:

$$i = 21.550625\,\%$$

Ejemplo 3: Efectiva anual a efectiva diaria

Calcular la tasa efectiva diaria ($n = 360$) equivalente a una tasa efectiva anual del 42 %.

$$\begin{aligned}(1+i)^{360} &= (1+0.42)^1\\ i+1 &= \sqrt[360]{1.42}\\ i &= \sqrt[360]{1.42}-1\\ i &\approx 0.0009745214\end{aligned}$$

Por lo tanto, la tasa efectiva diaria es del 0.09745214 %.

2.8. Ejercicios prácticos

Ejemplo 3

Conocida una tasa del 24 % N.T, hallar la tasa efectiva mensual equivalente.

$$(1+i)^{12} = \left(1 + \frac{0.24}{4}\right)^4$$

$$i = (1+0.06)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$i = 1.96\,\% \quad \text{efectiva mensual.}$$

Ejemplo 4

Si una corporación nos cobra una tasa de interés del 2.4 % efectiva mensual, hallar la tasa nominal trimestral equivalente.

$$(1+J)^4 = (1+0.024)^{12}$$

$$J = 4\left[(1.024)^4 - 1\right]$$

$$J = 39.8\,\% \quad \text{Nominal Trimestral Vencida.}$$

Ejemplo 5

Si una corporación nos cobra una tasa del 3 % efectiva mensual (E.M.), ¿cuál es la tasa nominal trimestral equivalente?

$$(1 + 0.03)^4 = (1 + i)^1$$

$$i = (1.03)^{\frac{1}{4}} - 1$$

$$i = 0.0799 \times 100\,\%$$

$$i = 17.75\,\% \quad \text{E.A. (efectiva anual).}$$

Para un período de $n = 14.35$ meses:

$$(1 + J)^4 = (1 + 0.03)^{12}$$

$$J = 4\left[(1.03)^3 - 1\right]$$

$$J = 37.0\,\% \quad \text{Nominal Trimestral.}$$

Ejemplo 6

El Banco Agrario concede préstamos a una tasa de interés del 18 % nominal mensual (N.M.). ¿Cuál es la tasa nominal trimestral equivalente?

$$\left(1+\frac{J}{12}\right)^{12}=\left(1+\frac{J}{4}\right)^{4}$$

$$\left(1+\frac{0.015}{12}\right)^{12}=\left(1+\frac{J}{4}\right)^{4}$$

Resolviendo:

$$J=4\left[(1.015)^{4}-1\right]$$

$$J=18.27\,\% \quad \text{Nominal Trimestral.}$$

Tasas Anticipadas

Definición

La **tasa de interés anticipada** es aquella que opera al principio del período. Por ejemplo, si solicitamos un préstamo por $10.000.000 y el banco nos cobra una tasa del 2.5 % mensual, pueden ocurrir dos situaciones:

1. El banco nos entrega los $10.000.000 y nos cobra intereses al final del mes:

$$10.000.000 \times 0.025 = 250.000.$$

2. El banco nos cobra el interés por adelantado; en este caso, recibiríamos:

$$10.000.000 - 250.000 = 9.750.000.$$

   Este descuento de $250.000 por concepto de intereses se denomina **interés anticipado**.

Tipos de Tasas Anticipadas

Las tasas anticipadas pueden ser:

- **Nominales:** Capitalizadas más de una vez al año.
- **Del período:** Calculadas para un período específico.

Ejemplos de Tasas Nominales Anticipadas

- Una tasa del 24 % N.M.A (*Nominal Mes Anticipado*).
- Una tasa del 32 % N.T.A (*Nominal Trimestral Anticipado*).
- Una tasa del 18 % N.B.A (*Nominal Bimestral Anticipado*).

Si dividimos la tasa nominal anticipada (J) entre el número de capitalizaciones (m), obtenemos la **tasa anticipada de período**, simbolizada como d:

$$d = \frac{J}{m}.$$

Ejemplos de Cálculo de la tasa anticipada$d$

1. Para $J = 32\,\%$ N.T.A $(m = 4)$:
$$d = \frac{0.32}{4} = 0.08 \quad \text{(Tasa anticipada trimestral).}$$
2. Para $J = 18\,\%$ N.B.A $(m = 6)$:
$$d = \frac{0.18}{6} = 0.03 \quad \text{(Tasa anticipada bimestral).}$$

Conversión entre Tasas Anticipadas y Vencidas

Para convertir una tasa anticipada (d) a una tasa vencida (i), usamos la fórmula:

$$i = \frac{d}{1 - d}.$$

Ejemplo

Dada $J = 30\,\%$ N.M.A $(m = 12)$:

1. Calculamos d:
$$d = \frac{0.30}{12} = 0.025 \quad \text{(Anticipada mensual).}$$
2. Hallamos i:
$$i = \frac{0.025}{1 - 0.025} = 0.02564 \quad \text{(Vencida mensual).}$$

Equivalencias entre Tasas

Para calcular la tasa efectiva anual ($E.A$) a partir de una tasa mensual vencida (i):

$$E.A = (1 + i)^{12} - 1.$$

Ejemplo

Para $i = 0.02564$:

$$E.A = (1 + 0.02564)^{12} - 1 = 0.35436 \quad (35.436\,\%).$$

Conversión de Tasas Nominales

Si conocemos una tasa nominal anticipada (J) y deseamos convertirla a otro tipo de tasa, seguimos estos pasos:

1. Calculamos la tasa anticipada de período (d):
$$d = \frac{J}{m}.$$
2. Convertimos d a i (vencida):
$$i = \frac{d}{1 - d}.$$
3. Usamos i para calcular otras tasas efectivas según el período deseado.

Ejemplo

Dada $J = 24\,\%$ N.M.A ($m = 12$):

1. Calculamos d:
$$d = \frac{0.24}{12} = 0.02 \quad \text{(Anticipada mensual).}$$
2. Hallamos i:
$$i = \frac{0.02}{1 - 0.02} = 0.0204 \quad \text{(Vencida mensual).}$$
3. Calculamos la $E.T$ (efectiva trimestral):
$$(1 + 0.0204)^3 = 1.0624 \quad \Rightarrow \quad E.T = 0.0624 \quad (6.24\,\%).$$

Ejemplo Práctico

Una corporación ofrece un crédito con $J = 32\,\%$ N.T.A ($m = 4$):

1. Calculamos d:
$$d = \frac{0.32}{4} = 0.08.$$
2. Convertimos a i:
$$i = \frac{0.08}{1 - 0.08} = 0.08695 \quad \text{(Vencida trimestral).}$$
3. Calculamos la $E.A$:
$$E.A = (1 + 0.08695)^4 - 1 = 0.3958 \quad (39.58\,\%).$$

Bibliografía

[1] Frank Ayres, Fernando Ocampo Compean, et al., *Matemáticas financieras*, (1991).

[2] Leland T Blank, Anthony J Tarquin, and María Isabel Valiñas Coalla, *Ingeniería económica*, no. 658, McGraw-Hill, 2012.

[3] PROGRAMA DE TECNOLOGÍA EN GESTIÓN PÚBLICA, JOSÉ ABDENAGO AREVALO, ELVIA NANCY OSPINA DÍAZ, and ESCUELA SUPERIOR DE ADMINISTRACIÓN PÚBLICA, *Matemáticas financieras*.

[4] José Luis Villalobos, *Matemáticas financieras*, (2001).