

Derivadas

Apuntes de clase.

Profesor:

Carlos Andrés Leiton Piamba
Docente Universitario

En esta guía, exploramos el concepto de derivada en profundidad, analizando su definición, propiedades y aplicaciones. Nuestro objetivo es proporcionar a los estudiantes una comprensión sólida y completa de este concepto fundamental.

A lo largo del documento, abordamos una variedad de ejemplos concretos y desafiantes que ilustran cómo las derivadas se utilizan para comprender el comportamiento de las funciones en diversas situaciones. Desde funciones polinómicas simples hasta funciones trigonométricas y exponenciales más complejas, exploramos cómo las derivadas nos permiten analizar el cambio instantáneo y la pendiente de una curva en cualquier punto.

Además, examinamos cómo las derivadas tienen aplicaciones en el mundo real, desde la física y la ingeniería hasta la economía y las ciencias biológicas. Mostramos cómo las derivadas son una herramienta poderosa para modelar y resolver una amplia gama de problemas prácticos, como la optimización de funciones, la predicción de tendencias y la comprensión de fenómenos naturales y sociales.

Popayán, 11 de junio de 2025

Índice general

Índice general	1
1.	2
1.1. Preliminares	2
1.1.1. Derivada de una función en un punto	4
1.1.2. Recta tangente y recta normal	5
1.1.3. Variación instantánea	7
1.2. Tabla de derivadas	8
1.3. Reglas de derivación	9
1.4. Taller	13

Capítulo 1

Derivación

El concepto de **derivada de una función** está relacionado a dos problemas que llevan el mismo significado matemático: uno tiene que ver con la pendiente de la recta tangente, y el otro con la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento, de ellos hablaremos más adelante.

1.1. Preliminares

Definición 1.1. *Derivada de una función*

La derivada de una función $f(x)$, es la función definida por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1.1)$$

siempre que el límite exista.

Observaciones:

- La notación $f'(x)$ se lee “ efe prima de x”.
- Existen otras notaciones para la derivada que son: y' que se lee “ derivada de y”; $\frac{dy}{dx}$ que se lee ”derivada de y respecto a x.”
- El proceso de hallar la derivada de una función se denomina diferenciación.

Ejemplo 1.1. Determinar la derivada de la siguiente función, $f(x) = 7x + 6$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[7(x+h) + 6] - (7x + 6)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7x + 7h + 6 - 7x - 6}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 7 \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 7
 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2. Determinar la derivada de la siguiente función, $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{1}{x+h}\right] - \frac{1}{x}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{(x+h)x}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(x+h)x} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h)x} \\
 &= \frac{-1}{(x+0)x} \\
 f(x) &= -\frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

Por otro lado,

Ejemplo 1.3. Determinar la derivada de la siguiente función, $f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{[(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2]}{h [\sqrt{x+h} + \sqrt{x}]} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{[x+h-x]}{h [\sqrt{x+h} + \sqrt{x}]} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h}{h [\sqrt{x+h} + \sqrt{x}]} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}]} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

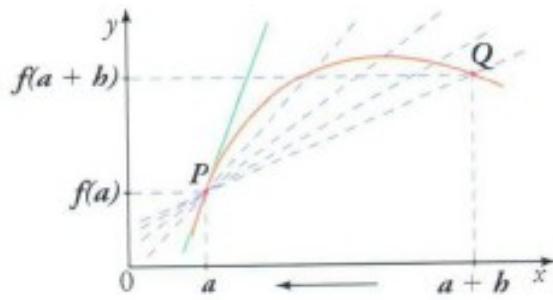
1.1.1. Derivada de una función en un punto

La **derivada de una función** $f(x)$ en un punto $x = a$, se simboliza como $f'(a)$ y está dado por:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1.2)$$

o lo que es equivalente,

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (1.3)$$



1.1.2. Recta tangente y recta normal

- La pendiente de la **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$, es

$$m = f'(a)$$

siempre que este valor exista y su ecuación es

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

- La **recta normal** es la recta perpendicular a la recta tangente que pasa por el punto $(a, f(a))$ es decir

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$$

Ejemplo 1.4. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{4}{x - 2}$$

en el punto $(4, 2)$. Luego, realizar la representación gráfica.

- **Primero,** se halla la pendiente de la recta tangente, así:

$$\begin{aligned}
 m &= f'(4) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(4+h) - f(4)}{h} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{4}{(4+h)-2} - \frac{4}{(4)-2}}{h} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{4}{h+2} - \frac{4}{2}}{h} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{4}{h+2} - 2}{h} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{4-2(2+h)}{h-2}}{h} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{4-4-2h}{(h-2)h} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{-2h}{(h-2)h} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{-2}{h+2} \right) \\
 &= \frac{-2}{2} \\
 m &= -1
 \end{aligned}$$

- La pendiente de la recta tangente en $(4, 2)$ es -1 , y por tanto de la recta tangente es:

$$y = -(x - 4) + 2$$

es decir,

$$y = -x + 6$$

por otro lado, la recta normal tiene pendiente 1. luego, al remplazar en la ecuación

de la recta normal se tiene.

$$y = (x - 4) + 2$$

es decir,

$$y = x - 2$$

Ejercicio 1.1. Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función f en el punto indicado.

- $f(x) = (x + 2)^2$ en $(0, 4)$
- $f(x) = \sin(x + \pi)$ en $(\frac{\pi}{2}, -1)$

1.1.3. Variación instantánea

Si se desea conocer la tasa de variación de una función en un instante dado, se debe considerar h cada vez más pequeño, por tanto, la tasa de variación instantánea de una función en $x = a$ se define como:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (1.4)$$

Ejemplo 1.5. Una barra de hierro se calienta durante un período determinando, de modo que su temperatura $c(t)$, en grados Celsius, se ha incrementado como una función del tiempo t en minutos, de acuerdo con la función $c(t) = t^3$. Calcular la tasa de variación puntual(tasa instantánea) de la temperatura en relación con el tiempo en $t = 5$.

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5 + h) - f(5)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5 + h)^3 - 5^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5^3 + 75h + 15h^2 + h^3 - 5^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{75h + 15h^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 75 + 15h + h^2 \\ &= 75 \end{aligned}$$

Finalmente, la tasa de variación instantánea es 75 grados Celsius por minuto.

1.2. Tabla de derivadas

A partir de la definición de derivada se pueden deducir algunas reglas generales de derivación, las cuales permiten calcular, de una forma más sencilla, la derivada de ciertas funciones.

Función	Derivada
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln(a)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_b(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln(b)}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \sec^2(x)$
$f(x) = \cot(x)$	$f'(x) = -\csc^2(x)$
$f(x) = \sec(x)$	$f'(x) = \sec(x) \tan(x)$
$f(x) = \csc(x)$	$f'(x) = -\csc(x) \cot(x)$
$f(x) = \arcsin(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$
$f(x) = \text{arccot}(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2+1}$
$f(x) = \text{arcsec}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$f(x) = \text{arccsc}(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

1.3. Reglas de derivación

Regla de la Suma(Resta)

Sea $f(x) = g(x) \pm h(x)$,

entonces $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

Ejemplo 1.6. Sea $f(x) = x^2 + x + 5$ entonces,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)' + (x)' + (5)' \\ &= 2x^1 + 1 + 0 \\ &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2. Usando las propiedades y reglas de derivación, hallar las siguientes derivadas

1.) $g(x) = \sin(x) - \tan(x) + e^x$

2.) $f(x) = x^5 + 3x + 5$

Regla constante por una función

Sea $f(x) = Kg(x)$,

entonces $f'(x) = Kg'(x)$.

Ejemplo 1.7. Sea $f(x) = 2x^4 - 3\ln(x)$ entonces,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2 * 4)x^3 - 3\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 8x^3 - \frac{3}{x} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.3. Usando las propiedades y reglas de derivación, hallar las siguientes derivadas

$$1.) \ g(x) = -2\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^3}$$

$$2.) \ f(x) = 2x^2 + 3x + 5$$

Regla del producto

Sea $f(x) = g(x) \cdot h(x)$,

entonces $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Ejemplo 1.8. Hallar la derivada de la siguiente función $f(x) = \sqrt{x}(x^2 + 2x)$, aplicando la regla del producto

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{x})' (x^2 + 2x) + \sqrt{x}(x^2 + 2x)' \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) (x^2 + 2x) + \sqrt{x}(2x + 2) \\ &= \frac{(x^2 + 2x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}2x + \sqrt{x}2 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.4. Usando las propiedades y reglas de derivación, hallar las siguientes derivadas

$$1.) \ f(x) = 16x \left(x + \frac{1}{16} \right)$$

$$2.) \ g(x) = (-3x + 2) (\sqrt{x+1})$$

$$3.) \ g(x) = \left(\frac{7}{4} \sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{4} \sqrt{x} \right) \left(\frac{1}{x^3} + 4 \right)$$

Regla del cociente

Sea $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, con $h(x) \neq 0$,

entonces $f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$

Ejemplo 1.9. Hallar la derivada de la siguiente función $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos(x))' \sin(x) - \cos(x) (\sin(x))'}{(\sin(x))^2} \\ &= \frac{-\sin(x) \sin(x) - \cos(x) \cos(x)}{(\sin(x))^2} \\ &= \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} \\ &= \frac{1}{\sin^2(x)} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.10. Hallar la derivada de la siguiente función $f(x) = \frac{x^2 - 8x}{x + 2}$, aplicando la regla del producto

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\textcolor{blue}{x^2 - 8x})'(x+2) - (x^2 - 8x)(\textcolor{blue}{x+2})'}{(x+2)^2} \\ &= \frac{(2x-8)(x+2) - (x^2 - 8x)(1)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 8x + 4x - 16 - x^2 + 8x}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 4x - 16}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Regla de la cadena

Sea $f(x) = \textcolor{blue}{h(g(x))}$, una composición de funciones
entonces $f'(x) = \textcolor{blue}{h'(g(x))} \textcolor{red}{g'(x)}$

Ejemplo 1.11. Hallar la derivada de la siguiente función $f(x) = \sqrt{\textcolor{red}{x^2 - 2x + 1}}$, apli-

cando la regla del producto

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x + 1}} (x^2 - 2x + 1)' \\&= \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x + 1}} (2x - 2) \\&= \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 1}} \\&= \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}\end{aligned}$$

1.4. Taller

1.) Definición de derivadas.

a) Usando la definición de derivada, hallar las derivadas de las siguientes funciones:

- $f(x) = 100$
- $f(x) = \frac{1}{3}x$
- $g(x) = -3x + 2$
- $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$
- $h(x) = \frac{1}{2x}$
- $h(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = \sqrt{x+1}$
- $m(x) = x^3 - 8$

2.) Usando las propiedades y reglas de derivación, hallar las siguientes derivadas.

- $f(x) = 100$
- $f(x) = \frac{1}{3}x$
- $g(x) = -3x + 2$
- $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$
- $h(x) = \frac{1}{2x}$
- $f(x) = \sqrt{x+1}$
- $m(x) = x^3 - 8$

3.) Derivada del Producto-(División) de dos funciones.

- Determinar la derivada usando la regla del producto.

•

$$(x^2 + 1)(x^3 - 1)$$

•

$$f(x) = \sqrt{x}(x^2 + 2x)$$

•

$$f(x) = 16x \left(x + \frac{1}{16} \right)$$

•

$$g(x) = (-3x + 2) \left(\sqrt{x+1} \right)$$

•

$$g(x) = \left(\frac{7}{4} \sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{4} \sqrt{x} \right) \left(\frac{1}{x^3} + 4 \right)$$

•

$$s(x) = (x - 3)(x + 1)(x^2 + 2)$$

- Determinar la derivadas usando la regla del cociente.

•

$$\frac{3x^2}{x+2}$$

•

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x}$$

•

$$f(x) = \frac{5x^2 - 1}{\sqrt[3]{x}}$$

•

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{2x - 5}$$

•

$$g(x) = \frac{x^2 - 8x}{x + 2}$$

•

$$h(x) = \left(\frac{x^6 + \frac{4}{5}x^5}{6x - 2} \right)$$

•

$$f(x) = \frac{x(\sqrt{x})}{2x^3}$$

- 4.) Encontrar la derivada de la función:

a) $y = (2x - 7)^3$

b) $f(x) = x^2(x - 2)^4$

c) $g(x) = (9t + 2)^{\frac{2}{3}}$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2\sqrt{x^4 + 4}$

e) $h(v) = \left(\frac{1 - 2v}{1 + v} \right)^3$

f) $h(t) = \sqrt{\frac{1}{t^2 - 2}}$

g) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

5.) Hallar la derivada de las siguientes funciones (Reducirla hasta su máxima expresión).

- $y = \frac{\sqrt{x} + 1}{x^2 + 1}$

- $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{1-x}}$

- $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}$

Derivadas logarítmicas (Regla de la cadena)

6.) Encontrar la derivada de la función.

a)

$$f(x) = \ln([x^2 + 1][x^3 - 1])$$

b)

$$f(x) = \log(x^2 + 2x - 10)$$

c)

$$f(x) = \left[\log \left(x - \frac{1}{16}x^2 \right) \right]^4$$

d)

$$g(x) = \log(\sqrt{x^2 + 3x - 3})$$

e)

$$g(x) = \left[\log \left(\frac{x-3}{x^2+1} \right) \right]^3$$

7.) Determinar la derivadas usando la regla del cociente.

■

$$\frac{3x^2}{x+2}$$

■

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x}$$

- $f(x) = \frac{5x^2 - 1}{\sqrt[3]{x}}$
- $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{2x - 5}$
- $g(x) = \frac{x^2 - 8x}{x + 2}$
- $h(x) = \left(\frac{x^6 + \frac{4}{5}x^5}{6x - 2} \right)$
- $f(x) = \frac{x(\sqrt{x})}{2x^3}$

8.) Encontrar la derivada de la función

- a) $y = e^{-x^4} + 2^{4x}$
- b) $f(x) = e^{(x^3-x)(7-x)}$
- c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2-3x}$.

9.) Hallar la derivada de las siguientes (funciones exponenciales-Logarítmicas)

- $y = \frac{e^x}{\ln(x)}$
- $f(x) = \sqrt{\log_2(xe^{3x})}$
- $f(x) = \sqrt[3]{\frac{5x^2}{e^x}}$

Derivadas trigonométricas(Regla de la cadena)

10.) Encontrar la derivada de la función.

- a)

$$f(x) = \cos(3x) + 3 \sin(x) - \frac{5}{2} \tan(x)$$
- b)

$$f(x) = \sec(x^2 + 2x - 10)$$

c)

$$f(x) = \left[\csc \left(x - \frac{1}{16}x^2 \right) \right]^4$$

d)

$$g(x) = \cot \left(\sqrt{x^2 + 3x - 3} \right)$$

e)

$$g(x) = \left[\sec \left(\frac{x-3}{x^2+1} \right) \right]^3$$

f)

$$r(x) = \sec(3x) \cos(3x)$$

g)

$$f(x) = \cos(x) \sin(3-x)$$

Derivadas de funciones inversas-trigonométricas (Regla de la cadena)

11.) Encontrar la derivada de la función.

a)

$$h(x) = 3 \sin^{-1}(x) - 2 \cos^{-1}(x) - \frac{3}{2} \cos^{-1}(x)$$

b)

$$f(x) = \arctan(3x - 2)$$

c)

$$f(x) = \arccos(2x - 2)$$

d)

$$f(x) = (\arcsin(2x) - 3x^2)^4$$

e)

$$g(x) = \csc^{-1}(x) \sec^{-1}(x)$$

f)

$$g(x) = \left[\log \left(\frac{x-3}{x^2+1} \right) \right]^3$$

g)

$$h(x) = 3 \sin^{-1}(x) - 2 \cos^{-1}(x) - \frac{3}{2} \cos^{-1}(x)$$

BIBLIOGRAFÍA

- Santillana. **Los caminos del saber 8 y 9**
- Carlo B. Allendoerfer **Matematicas Universitarias.**
- Jiménez Murillo J. **Matemáticas para la Computación**