Derivadas

Apuntes de clase.

Profesor:
Carlos Andrés Leiton Piamba
Docente Universitario

En esta guía, exploramos el concepto de derivada en profundidad, analizando su definición, propiedades y aplicaciones. Nuestro objetivo es proporcionar a los estudiantes una comprensión sólida y completa de este concepto fundamental.

A lo largo del documento, abordamos una variedad de ejemplos concretos y desafiantes que ilustran cómo las derivadas se utilizan para comprender el comportamiento de las funciones en diversas situaciones. Desde funciones polinómicas simples hasta funciones trigonométricas y exponenciales más complejas, exploramos cómo las derivadas nos permiten analizar el cambio instantáneo y la pendiente de una curva en cualquier punto.

Además, examinamos cómo las derivadas tienen aplicaciones en el mundo real, desde la física y la ingeniería hasta la economía y las ciencias biológicas. Mostramos cómo las derivadas son una herramienta poderosa para modelar y resolver una amplia gama de problemas prácticos, como la optimización de funciones, la predicción de tendencias y la comprensión de fenómenos naturales y sociales.

Popayán, 3 de octubre de 2024

Índice general

Capítulo 1

Derivadas

El concepto de **derivada de una función** está relacionado a dos problemas que llevan el mismo significado matemático: uno tiene que ver con la pendiente de la recta tangente, y el otro con la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento, de ellos hablaremos más adelante.

Definición 1.1. ***Derivada de una función***

La derivada de una función $f(x)$, es la función definida por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.1}$$

siempre que el límite exista.

Observaciones:

- La notación $f'(x)$ se lee " efe prima de x".
- Existen otras notaciones para la derivada que son: y' que se lee " derivada de y"; $\frac{dy}{dx}$ que se lee "derivada de y respecto a x.
- El proceso de hallar la derivada de una función se denomina diferenciación.

1.1. Tabla de derivadas

A patir de la definición de derivada se pueden deducir algunas reglas generales de derivación, la cuales permiten calcular, de una forma más sencilla, la derivada de ciertas funciones.

Función	Derivada
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln(a)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_b(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x\ln(b)}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \sec^2(x)$
$f(x) = \cot(x)$	$f'(x) = -\csc^2(x)$
$f(x) = \sec(x)$	$f'(x) = \sec(x)\tan(x)$
$f(x) = \csc(x)$	$f'(x) = -\csc(x)\cot(x)$

① $f(x) = x^{10}$

$f'(x) = 10x^9$

② $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$f(x) = x^{-2}$

$f'(x) = -2x^{-2-1}$

$= -2x^{-3}$

$= \frac{-2}{x^3}$

③ $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

luego

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}}$

$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$

1.2. Reglas de derivación

Regla de la Suma(Resta)

Sea $f(x) = g(x) \pm h(x)$,

entonces $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

Ejemplo 1.1. *Sea* $f(x) = x^2 + x + 5$ *entonces,*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)' + (x)' + (5)' \\ &= 2x^1 \quad + 1 \quad + 0 \\ &= 2x \quad + 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1. *Usando las propiedades y reglas de derivación, hallar las siguientes derivadas*

1.) $g(x) = \sin(x) - tan(x) + e^x$ $\rightarrow$ $g'(x) = \cos(x) - \sec^2(x) + e^x$

2.) $f(x) = x^5 + 3x + 5$ $\rightarrow$ $f'(x) = 5x^4 + 3 + 0 = 5x^4 + 3$

Regla constante por una función

Sea $f(x) = Kg(x)$,

entonces $f'(x) = Kg'(x)$.

Ej:

① $f(x) = 3\,\text{sen}(x)$

$f'(x) = 3\cos(x)$

② $f(x) = 3\sqrt{x}$

$f'(x) = 3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$

Ejemplo 1.2. *Sea* $f(x) = 2x^4 - 3\ln(x)$ *entonces,*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2 * 4)x^3 - 3\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 8x^3 - \frac{3}{x} \end{aligned}$$

Ej:

$f(x) = -3x^{-2}$

$f'(x) = 6x^{-3}$

Ejercicio 1.2. *Usando las propiedades y reglas de derivación, hallar las siguientes derivadas*

1.) $g(x) = -2\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^3}$ $\rightarrow$ $g(x) = -2\sqrt{x} + x^{\frac{3}{5}}$

$g'(x) = \cancel{-2}\left(\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}\right) + \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$

2.) $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$

$= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{5\,x^{\frac{2}{5}}}$

Regla del producto

Sea $f(x) = g(x) \cdot h(x)$,

entonces $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Ej:

$f(x) = \sqrt{x}\,\text{sen}(x)$

$f'(x) = (\sqrt{x})'\,\text{sen}(x) + \sqrt{x}\,(\text{sen}(x))'$

$= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\frac{\text{sen}(x)}{1} + \sqrt{x}\cos(x)$

$= \frac{\text{sen}(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos(x)$

Ejemplo 1.3. *Hallar la derivada de la siguiente función* $f(x) = \sqrt{x}(x^2 + 2x)$*, aplicando la regla del producto*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{x}\right)'(x^2+2x) + \sqrt{x}(x^2+2x)' \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x^2+2x) + \sqrt{x}(2x+2) \\ &= \frac{(x^2+2x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}2x + \sqrt{x}2 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.3. *Usando las propiedades y reglas de derivación, hallar las siguientes derivadas*

1.) $f(x) = 16x\left(x + \dfrac{1}{16}\right)$

2.) $g(x) = (-3x+2)\left(\sqrt{x+1}\right)$

3.) $g(x) = \left(\dfrac{7}{4}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{3}{4}\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{1}{x^3} + 4\right)$

$$\begin{aligned} f(x) &= (16x)'\left(x + \frac{1}{16}\right) + 16x\left(x + \frac{1}{16}\right)' \\ &= 16\left(x + \frac{1}{16}\right) + 16x(1) \\ &= 16x + 1 + 16x \\ &= 32x + 1 \end{aligned}$$

Regla del cociente

$$\text{Sea } f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \text{ con } h(x) \neq 0,$$

$$\text{entonces } f'(x) = \frac{g'(x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Ejemplo 1.4. *Hallar la derivada de la siguiente función* $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos(x))'\sin(x) - \cos(x)(\sin(x))'}{(\sin(x))^2} \\ &= \frac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x)}{(\sin(x))^2} \\ &= \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} \\ &= \frac{1}{\sin^2(x)} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.5. *Hallar la derivada de la siguiente función* $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x}{x+2}$, *aplicando la regla del producto*

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x^2-8x)'(x+2) - (x^2-8x)(x+2)'}{(x+2)^2} \\
&= \frac{(2x-8)(x+2) - (x^2-8x)(1)}{(x+2)^2} \\
&= \frac{2x^2 - \cancel{8x} + 4x - 16 - x^2 + \cancel{8x}}{(x+2)^2} \\
&= \frac{x^2 + 4x - 16}{(x+2)^2}
\end{aligned}
$$

Regla de la cadena

$$\text{Sea } f(x) = h(g(x)), \text{ una composición de funciones}$$

$$\text{entonces } f'(x) = h'(g(x))g'(x)$$

Derivada de la función externa, la evaluó en la función Interna. Y se multiplica derivada de la función interna

Ejemplo 1.6. *Hallar la derivada de la siguiente función* $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$, *aplicando la regla del producto*

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x+1}}\,(x^2-2x+1)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x+1}}\,(2x-2) \\
&= \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+1}} \\
&= \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}}
\end{aligned}
$$

1.3. Taller

1.) Definición de derivadas.

a) Usando la definición de derivada, hallar las derivadas de las siguientes funciones:

- $f(x) = 100$
- $f(x) = \frac{1}{3}x$
- $g(x) = -3x + 2$
- $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$
- $h(x) = \frac{1}{2x}$
- $h(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = \sqrt{x+1}$
- $m(x) = x^3 - 8$

2.) Usando las propiedades y reglas de derivación, hallar las siguientes derivadas.

- $f(x) = 100$
- $f(x) = \frac{1}{3}x$
- $g(x) = -3x + 2$
- $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$
- $h(x) = \frac{1}{2x}$
- $f(x) = \sqrt{x+1}$
- $m(x) = x^3 - 8$

3.) Derivada del Producto-(División) de dos funciones.

- Determinar la derivada usando la regla del producto.
  - $$(x^2 + 1)(x^3 - 1)$$
  - $$f(x) = \sqrt{x}(x^2 + 2x)$$
  - $$f(x) = 16x\left(x + \frac{1}{16}\right)$$

- $$g(x) = (-3x+2)\left(\sqrt{x+1}\right)$$
- $$g(x) = \left(\frac{7}{4}\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{4}\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{x^3} + 4\right)$$
- $$s(x) = (x-3)(x+1)(x^2+2)$$

▪ Determinar la derivadas usando la regla del cociente.

- $$\frac{3x^2}{x+2}$$
- $$f(x) = \frac{x^2+2}{2x}$$
- $$f(x) = \frac{5x^2-1}{\sqrt[3]{x}}$$
- $$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{2x-5}$$
- $$g(x) = \frac{x^2-8x}{x+2}$$
- $$h(x) = \left(\frac{x^6 + \frac{4}{5}x^5}{6x-2}\right)$$
- $$f(x) = \frac{x(\sqrt{x})}{2x^3}$$

4.) Encontrar la derivada de la función:

a) $y = (2x-7)^3$ $\longrightarrow$ $y' = 3(2x-7)^2(2x-7)'$

$= \underbrace{3(2x-7)^2(2)}$

$= 6(2x-7)^2$

b) $f(x) = x^2(x-2)^4$

c) $g(x) = (9t+2)^{\frac{2}{3}}$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2\sqrt{x^4+4}$

e) $h(v) = \left(\frac{1-2v}{1+v}\right)^3$

f) $h(t) = \sqrt{\dfrac{1}{t^2 - 2}}$

g) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

5.) Hallar la derivada de la siguientes funciones(Reducirla hasta su máxima expresión).

- $y = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x^2 + 1}$
- $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x}{1 - x}}$
- $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x + 1}{x}}$

Derivadas logarítmicas(Regla de la cadena)

6.) Encontrar la derivada de la función.

a)
$$f(x) = ln([x^2 + 1][x^3 - 1])$$

b)
$$f(x) = \log(x^2 + 2x - 10)$$

c)
$$f(x) = \left[\log\left(x - \frac{1}{16}x^2\right)\right]^4 \Rightarrow f'(x) = 4\left[\log\left(x - \frac{1}{16}x^2\right)\right]^3 \cdot \left(\log\left(x - \frac{1}{16}x^2\right)\right)'$$

$$= 4\left[\log\left(x - \frac{1}{16}x^2\right)\right]^3 \left(\frac{1}{x - \frac{1}{16}x^2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{16}x^2\right)'$$

$$= 4\left[\log\left(x - \frac{1}{16}x^2\right)\right]^3 \left(\frac{1}{x - \frac{1}{16}x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{16}(2x)\right)$$

d)
$$g(x) = \log(\sqrt{x^2 + 3x - 3})$$

e)
$$g(x) = \left[\log\left(\frac{x - 3}{x^2 + 1}\right)\right]^3$$

7.) Determinar la derivadas usando la regla del cociente.

- $$\frac{3x^2}{x + 2}$$
- $$f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x}$$

- $$f(x) = \frac{5x^2 - 1}{\sqrt[3]{x}}$$
- $$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{2x - 5}$$
- $$g(x) = \frac{x^2 - 8x}{x + 2}$$
- $$h(x) = \left(\frac{x^6 + \frac{4}{5}x^5}{6x - 2}\right)$$
- $$f(x) = \frac{x(\sqrt{x})}{2x^3}$$

8.) Encontrar la derivada de la función:

a) $y = e^{-x^4} + 2^{4x}$

b) $f(x) = e^{(x^3 - x)(7 - x)}$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2 - 3x}$.

9.) Hallar la derivada de la siguientes (funciones exponenciales-Logarítmicas)

- $y = \dfrac{e^x}{\ln(x)}$
- $f(x) = \sqrt{\log_2(xe^{3x})}$
- $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{5x^2}{e^x}}$

Derivadas trigonométricas(Regla de la cadena)

10.) Encontrar la derivada de la función.

a)
$$f(x) = \cos(3x) + 3\sin(x) - \frac{5}{2}\tan(x)$$

b)
$$f(x) = \sec(x^2 + 2x - 10)$$

c)

$$f(x) = \left[\csc\left(x - \frac{1}{16}x^2\right)\right]^4$$

d)

$$g(x) = \cot\left(\sqrt{x^2 + 3x - 3}\right)$$

e)

$$g(x) = \left[\sec\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right)\right]^3$$

f)

$$r(x) = \sec(3x)\cos(3x)$$

g)

$$f(x) = \cos(x)\sin(3 - x)$$

Bibliografía

- Santillana. **Los caminos del saber 8 y 9**
- Carlo B. Allendoerfer **Matematicas Universitarias**.
- Jiménez Murillo J. **Matemáticas para la Computación**