Inicialmente é necessário estudar bem o conceito de supremo de um ~~conceito~~ conjunto majorável:

1.2 Conceitos de Supremo e Ínfimo

Ver no Guião 1 de Cálculo I pag. 04-05

Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Diz-se que A é um conjunto ***majorado*** se

$$\exists M \in \mathbb{R} : a \leq M,\ \forall a \in A,$$

$$\text{(existe } M \in \mathbb{R} \text{ tal que } a \leq M, \text{ qualquer que seja } a \in A)$$

onde M é um majorante de A.

Ao menor dos majorantes dá-se a designação de ***supremo*** de A, i.e., $s \in \mathbb{R}$ diz-se o ***supremo*** de A, $\sup A$, se as duas condições são satisfeitas:

- $\forall a \in A,\ a \leq s$ (s é majorante de A);
- $\forall \varepsilon > 0, \exists b \in A :\ s - \varepsilon < b$ (s é o menor dos majorantes de A).

DOC. JSE 24 MAR 2019 12h25

Diz-se que A é um conjunto ***minorado*** se

$$\exists m \in \mathbb{R} : m \leq a,\ \forall a \in A,$$

$$\text{(existe } m \in \mathbb{R} \text{ tal que } a \geq m, \text{ qualquer que seja } a \in A)$$

01/07

onde m é um minorante de A.
Ao maior dos minorantes dá-se a designação de ***ínfimo*** de A, i.e., $i \in \mathbb{R}$ diz-se o ***ínfimo*** de A, $\inf A$, se as duas condições são satisfeitas:

- $\forall a \in A,\ i \leq a$ (i é minorante de A);
- $\forall \varepsilon > 0, \exists b \in A :\ b < i + \varepsilon$ (i é o maior minorante de A).

1.2.1 Axioma do Supremo

Considere-se o conjunto dos números racionais cujo quadrado é menor do que 2:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}.$$

No universo $\mathbb{R}$ o conjunto A tem supremo, $\sup A = \sqrt{2}$, contudo, como $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, no universo $\mathbb{Q}$ o conjunto A não tem supremo.

Traduzimos este resultado dizendo que o conjunto dos números reais é **completo** e o conjunto dos números racionais é **incompleto**.

Axioma 1.1. ***Axioma do Supremo:*** Qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ majorado (resp. minorado) tem supremo (resp. ínfimo) em $\mathbb{R}$.

Sejam $s = \sup A$ e $i = \inf A$. Se $s \in A$, s diz-se **máximo** de A; se $i \in A$, i diz-se **mínimo** de A.

Exemplo 1.9. Seja $A =]-\sqrt{3}, 4] \cup \{3\pi\}$.

O supremo de A é 3π e como o supremo pertence a A, 3π é máximo do conjunto A.

Ver Guião de Cálculo II pag 03

Definição 1.2. *Sejam* $(f_n)_n$ *uma sucessão de funções definidas em* $D \subseteq \mathbb{R}$ *e* $f : D \to \mathbb{R}$. *Diz-se que*

- $(f_n)_n$ ***converge pontualmente*** *para a função* f *em* D *se*

$$\forall x \in D, f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

À função f *chamamos limite pontual de* $(f_n)_n$ *em* D.

- $(f_n)_n$ ***converge uniformemente*** *para a função* f *em* D *se a sucessão numérica de termo geral*

$$M_n = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$$

é um infinitésimo, isto é,

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in D\}\right] = 0$$

Nos exemplos vistos, a sucessão $(f_n)_n$ converge pontualmente para a função f e a sucessão $(g_n)_n$ converge uniformemente para a função g.
Repare-se que no caso de $(f_n)_n$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n \text{ se } 0 \le x < 1 \\ 0 \text{ se } x = 1 \end{cases}$$

Ver esta passagem explicada na pag. seguinte

temos

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \quad \text{, para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

que não é um infinitésimo pois $\lim M_n = 1$ (logo $\lim M_n \neq 0$).
Considerando agora a sucessão $(g_n)_n$,

03/07

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

Como a sucessão $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ converge para 0, a sucessão $(M_n)_n$ é um infinitésimo e portanto a sucessão $(g_n)_n$ converge uniformemente para a função $g(x) = 0$, $x \in [0,1]$.

É importante referir que havendo convergência uniforme num conjunto D também há convergência pontual nesse mesmo conjunto.
A convergência uniforme é mais "forte" que a convergência pontual em dois sentidos: por um lado, é mais difícil uma sucessão de funções convergir uniformemente do que pontualmente; por outro lado, a convergência uniforme traz consigo propriedades que não são possíveis de obter com a convergência pontual. Algumas dessas propriedades são apresentadas no teorema seguinte.

Teorema 1.1. *Seja* $(f_n)_n$ *uma sucessão de funções contínuas em* $[a, b]$. *Suponha-se que* $(f_n)_n$ *converge uniformemente para* f *em* $[a, b]$. *Então:*

1. f *é contínua em* $[a, b]$;
2. f *é integrável em* $[a, b]$ *e tem-se*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

3. *se as funções* f_n *têm derivadas contínuas em* $[a, b]$ *e a sucessão* (f_n') *converge uniformemente em* $[a, b]$, *então* f *é diferenciável neste intervalo e*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

As propriedades anteriores podem ser utilizadas como critérios para mostrar que uma sucessão não é uniformemente convergente. Por exemplo, se f_n é contínua para todo o n mas f não é contínua, então a sucessão $(f_n)_n$ não pode ser uniformemente convergente para f.

$$f_n(x) = x^n \ , \ x \in [0,1] \ , \ n \in \mathbb{N}$$

$$f_n(x) \xrightarrow{\not p} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1[\\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Vou designar por $d_n(x)$ a distância entre $f_n(x)$ e $f(x)$ para $x \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$

$$d_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n - 0 = x^n & \text{se } x \in [0,1[\\ 1 - 1 = 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ vamos calcular o contra-domínio de $d_n(x)$ que designaremos por CD_{d_n}.

04/07

— Se $n = 1$,

$$d_1(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1[\\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases} \Rightarrow CD_{d_1} = [0,1[$$

— Se $n = 2$

$$d_2(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [0,1[\\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases} \Rightarrow CD_{d_2} = [0,1[$$

⋮

— Se $n = 50$

$$d_{50}(x) = \begin{cases} x^{50} & \text{se } x \in [0,1[\\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases} \Rightarrow CD_{d_{50}} = [0,1[$$

⋮ (indução sobre n)

— Se $n \in \mathbb{N}$

$$d_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{se } x \in [0,1[\\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases} \Rightarrow CD_{d_{50}} = [0,1[$$

Defino agora a sucessão de números reais $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termo geral

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} \overbrace{|f_n(x) - f(x)|}^{d_n(x)}$$

$$M_n = \sup\{d_n(x) \, , x\in[0,1]\}$$

$$M_n = \sup CD_{d_n}$$

$$M_n = \sup\, [0,1[\quad , \text{ para todo } n\in\mathbb{N}$$

05/07

$$M_n = 1$$

Então, M_n é uma sucessão constante e igual a 1.

Ora,

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq 0$$

Concluo que $f_n(x)$ não converge uniformemente para $f(x)$.

Vamos agora usar o mesmo processo para tratar o caso

$$g_n(x) = \frac{x}{n} \quad , x \in [0,1] \quad , n \in \mathbb{N}$$

$$g_n(x) \xrightarrow{p} g(x) = 0 \quad , x \in [0,1]$$

$$d_n(x) = \left| g_n(x) - g(x) \right| = \left| \frac{x}{n} - 0 \right| = \frac{x}{n}$$

— Se $n=1$

$$d_1(x) = \frac{x}{1} = x \quad , \quad CD_{d_1} = [0,1]$$

— Se $n=2$

$$d_2(x) = \frac{x}{2} \quad , \quad CD_{d_2} = \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

06/07

⋮

— Se $n=50$

$$d_{50}(x) = \frac{x}{50} \quad , \quad CD_{d_{50}} = \left[0, \frac{1}{50}\right]$$

⋮ (indução sobre n)

— Se $n \in \mathbb{N}$

$$d_n(x) = \frac{x}{n} \Rightarrow CD_{d_n} = \left[0, \frac{1}{n}\right]$$

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} |g_n(x) - g(x)|$$

$$M_n = \sup \{ d_n(x) \ , x \in [0,1] \}$$

$$M_n = \sup CD d_n$$

$$M_n = \sup \left[0, \frac{1}{n}\right] = \max \left[0, \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n}$$

$$M_n = \frac{1}{n}$$

Ora, M_n e' um infinitésimo

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

07/07

Concluo que $g_n(x) \xrightarrow{u} g(x)$, ou seja, $g_n(x)$ converge uniformemente para $g(x)$.

//