Cálculo I – Agr. 4 (2020/2021)

3.º Teste – 18 Fev 2021 (online)

Resolução:

1. i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$, integral impróprio, de 1.ª espécie no limite superior.

(10 pts)

O integral converge se existir e for finito o limite:

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} \underbrace{\ln x}_{g(x)}\,dx$$

Posso usar a Regra de Barrow (note que $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ é contínua em $[1,+\infty[$).
Logo, f é integrável e primitivável em $[1,t]$, $\forall t>1$.

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\ln x\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{\ln^2 t}{2} - \frac{\ln^2 (1)}{2}\right]$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln^2 t}{2} = +\infty$$

O integral diverge.

$\frac{02}{08}$

1. ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, onde $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}} & \text{se } x \le -2 \\ e^{-x} & \text{se } x > -2 \end{cases}$

(20pts)

Integral impróprio, de 1ª espécie, em ambos os limites de integração.

Este integral converge se e só se os dois integrais seguintes convergirem:

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}}\,dx \quad e \quad \int_{-2}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-2}^{+\infty} e^{-x}\,dx$$

(são integrais impróprios de 1ª espécie)

$f(-2) = \frac{1}{\sqrt{(1+2)^3}} = \frac{1}{3^{3/2}} \neq e^2$

$f(x) = e^{-x}, \ \forall x \in]-2, +\infty]$

$f(x)$ só difere de e^{-x} num só ponto ($x=-2$).

<u>1º Integral</u>

O primeiro integral converge se existir e for finito o limite

$$\lim_{t\to-\infty} \int_t^{-2} (1-x)^{-3/2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \left[- \int_t^{-2} (-1)(1-x)^{-3/2}\,dx \right]$$

Posso usar a Regra de Barrow (note que $f(x) = (1-x)^{-3/2}$ é contínua em $]-\infty, -2]$).

Logo, f é integrável e primitivável em $[t, -2]$ $\forall t < -2$.

$$\lim_{t\to-\infty} \left[- \left[\frac{(1-x)^{-1/2}}{-1/2} \right]_t^{-2} \right] = \lim_{t\to-\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{1-x}} \right]_t^{-2}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{1-(-2)}} - \frac{2}{\sqrt{1-t}} \right] = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{1-t}} \right] =$$

03.
08

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} - \lim_{t\to-\infty} \frac{2}{\sqrt{1-t}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

O 1º integral converge e tem valor $I_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2.º Integral

O segundo integral converge se existir e for finito o limite

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-2}^{t} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[- \int_{-2}^{t} (-1)\, e^{-x}\,dx \right]$$

Posso usar a Regra de Barrow (note que $f(x) = e^{-x}$ é contínua em $[-2, +\infty[$, $\forall t > -2$

Logo, f é integrável e primitivável em $[-2, t]$, $\forall t > -2$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[-e^{-x} \right]_{-2}^{t} = \lim_{t\to+\infty} \left[-e^{t} - (-e^{2}) \right]$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[-e^{t} + e^{2} \right] = +e^{2}$$

O 2.º integral converge e tem valor $I_2 = +e^2$

Por definição,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge e } I = I_1 + I_2$$

$$I = \frac{2\sqrt{3}}{3} + e^2$$

2. a) i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+(-1)^n}{n^3+3n^2+4}$

(50 pts)

Trata-se de uma série de termos não negativos. Vou usar o Critério de Comparação:

Para todo o $n \in \mathbb{N}$ (usando induções óbvias):

$$0 \leq \frac{2n+(-1)^n}{n^3+3n^2+4} \leq \frac{2n+1}{n^3+3n^2+4} \leq \frac{3n}{n^3} \leq \frac{3}{n^2}$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n^2} = 3\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ converge

(Trata-se de uma série de Riemann, $\alpha = 2 > 1$) então a série dada é convergente. A convergência é absoluta porque a respetiva série dos módulos coincide com a série dada. Logo converge também.

$\boxed{\text{RESOLUÇÕES ALTERNATIVAS (indicações):}}$

- Critério do Limite

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2n+(-1)^n}{n^3+3n^2+4}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3+(-1)^n n^2}{n^3+3n^2+4}$$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left[2+\frac{(-1)^n}{n}\right]}{n^3\left[1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^3}\right]} = 2 \in \mathbb{R} \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \text{ conv.}$$

- Provar que ambas as séries convergem

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n^3+3n^2+4} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+3n^2+4}$$

(Crit. Comparação / Crit. Limite) (Crit. Leibniz, série alternada)

concluía-se que a série dada converge e como é de termos não negativos conv. absolutamente.

2\. a) ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n\, n!}$ a_n , $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

(50 pts)

A presença do fatorial de n no termo geral de a_n dá a pista para o Critério de D'Alembert (ou critério do quociente). Note $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Calcule-se, então, caso exista o limite:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}\,(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{2^n\, n!}}$$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\; 2^n\; n!}{n^n\; 2^{n+1}\; (n+1)!}$$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{(n+1)^n}{n^n} \; \frac{\cancel{(n+1)}\, n!}{\cancel{(n+1)}\, n!} \; \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}\cdot 2} \right]$$

$$L = \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right]}_{\text{Limite notável}} = \frac{e}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ e>2}}{>} 1$$

Logo, a série diverge.

2\. b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-3)^{n-1}}{2^{2n}} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right]$ é convergente.

(40 pts)

Vou calcular a soma das seguintes séries convergentes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{2^{2n}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right]$$

(geométrica) (Telescópica, redutível ou de Mengoli)

- Soma da série geométrica:

$$\sigma_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \overset{b_1}{\frac{1}{4}} \left(\overset{r}{-\frac{3}{4}}\right)^{n-1}$$

$\frac{1}{4}$: 1.º termo

$-\frac{3}{4}$: razão $r \in]-1,1[$ conv.

$$\sigma_1 = \frac{1.^{\circ}\text{ termo}}{1-r} = \frac{1/4}{1-(-3/4)} = \frac{1/4}{7/4} = \frac{1}{7}$$

- Soma da série de Mengoli:

$$\sigma_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left[\overset{u_n}{\frac{1}{n^2}} - \overset{u_{n+1}}{\frac{1}{(n+1)^2}}\right]}_{a_n} \quad , \quad a_n = u_n - u_{n+1} \text{, com } u_n = \frac{1}{n^2}$$

A sucessão das somas parciais é

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right] \text{, propriedade associativa dos somatórios:}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$S_n = \frac{1}{1} + \boxed{\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \dots - \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}} \to 0 \; - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\sigma_2 = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = 1$$

A série dada tem soma $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ pois:

$$\sigma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[b_n + a_n \right] \quad , \text{ com } b_n = \frac{(-3)^{n-1}}{2^{2n}} \quad \text{e } a_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{1}{7} + 1 = \frac{8}{7}$$

NOTA: O cálculo de σ_2 (soma da série de Mengoli)

podia fazer-se usando a fórmula

$$\sigma_2 = u_1 + u_2 + \dots + u_p - p \lim_{n\to+\infty} u_n \quad , \quad \underline{\underline{p=1}}$$

$$\sigma_2 = u_1 - \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1} - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 1.$$

3. $\alpha > 0$ e $y \in]0,1[$.

(30pts) Mostrar que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{y\to 0^+} \int_y^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & , \alpha \in]0,1[\\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$

caso o limite exista

- Se $\alpha = 1$,

Regra de Barrow pois $\frac{1}{x}$ é contínua em $[y,1]$ $\forall y \in]0,1[$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{y\to 0^+} \int_y^1 \frac{dx}{x} = \lim_{y\to 0^+} \left[\ln x \right]_y^1$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \left[\ln 1 - \ln y \right] = \lim_{y\to 0^+} \left[- \ln y \right] = +\infty$$

$-\infty$

Diverge

- Se $(\alpha \neq 1 \wedge \alpha > 0)$, Regra de Barrow, pois $\frac{1}{x^\alpha}$ contínua em $[y,1], \forall y \in]0,1[$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{y\to 0^+} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_y^1$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \left[\frac{1^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{y^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]$$

$$= \frac{1}{-\alpha+1} \lim_{y\to 0^+} \left[1 - y^{-\alpha+1} \right]$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha}$$

Como $\lim\limits_{y\to 0^+} \underset{\substack{\uparrow \\ y\in]0,1[}}{y^{1-\alpha}} = \begin{cases} 0, \text{ se } 1-\alpha > 0 \ (\Leftrightarrow \alpha < 1) \\ +\infty, \text{ se } 1-\alpha < 0 \ (\Leftrightarrow \alpha > 1) \end{cases}$

Concluo:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} &, \text{ se } \alpha \in]0,1[\\ +\infty &, \text{ se } \alpha > 1. \end{cases}$$

<u>NOTA</u>: A conclusão de que $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$ se $\alpha > 1$ podia tirar-se comparando os limites:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{y\to 0^+} \int_y^1 \frac{dx}{x^\alpha} > \underbrace{\lim_{y\to 0^+} \int_y^1 \frac{dx}{x} = +\infty}_{\text{caso } \alpha = 1}$$

pois $\int_y^1 \frac{dx}{x^\alpha} > \int_y^1 \frac{dx}{x}, \forall y \in]0,1[$.

//