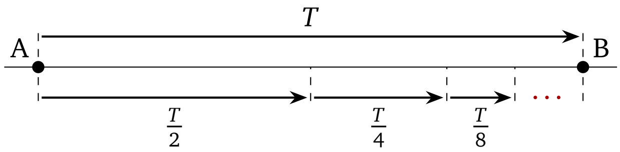
ver também [*Séries numéricas*],

1 Até os gregos enganaram-se, há 2500 anos ...

Dizia Zenão: para percorrer a distância entre A e B num tempo T,



$$T = \frac{T}{2}+\frac{T}{4}+\frac{T}{8}+\cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{T}{2^n}$$

um atleta tem de percorrer metade da distância, em $\frac{T}{2}$,
depois metade da distância que falta, em $\frac{T}{4}$,
e a seguir metade da distância que falta, em $\frac{T}{8}$, ...
Mas T, finito, não pode ser a soma de infinitos termos positivos!?

2 Série numérica

Dada uma sucessão de números reais a_n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq p$ (termo geral da série)

- define-se uma nova sucessão $S_k = a_p + \cdots + a_k = \sum_{n=p}^{k} a_n$, $k \geq p$ (somas parciais)
- cujo limite é a série numérica $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=p}^{k} a_n = \lim_{k\to+\infty} S_k$
- repare-se que $S_{k+1} = \sum_{n=p}^{k+1} a_n S_k + a_{k+1} S_k + a_{k+1}$, ou seja, $a_{k+1} = S_{k+1} - S_k$

Podemos agora resolver o paradoxo de Zenão:

$$\begin{array}{rcl}
2S_k &=& T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \cdots + \frac{T}{2^{k-2}} + \frac{T}{2^{k-1}} \\
S_k &=& \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \cdots + \frac{T}{2^{k-1}} + \frac{T}{2^k} \qquad (k \geq p = 1) \\
S_k = 2S_k - S_k &=& T \qquad\qquad - \frac{T}{2^k} = T\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)
\end{array}$$

portanto, como era de esperar, a série é convergente e tem soma T, pois

$$\frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{T}{2^n} = \lim_{k\to+\infty} S_k = \lim_{k\to+\infty} T\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = T$$

3 Séries divergentes – a série não é uma soma

Uma série diverge se o limite das somas parciais é infinito ou não existe

- se $a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} 1 = \lim_{k\to+\infty} k = +\infty$
- se $a_n = (-1)^n$, $S_1 = -1$, $S_2 = -1+1 = 0$, $S_3 = -1+1-1 = -1$, $S_4 = -1+1-1+1 = 0\ldots$
  a sucessão das somas parciais S_k é periodica, logo $\lim_{k\to+\infty} S_k$ não existe

Atenção: a notação de 'soma infinita' $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$ é enganadora!

- uma 'soma infinita' não é associativa: $-1+1-1+1-1+1-1+\cdots = ?$
  $(-1+1)+(-1+1)+\cdots = 0+0+\cdots = 0$ ou $-1+(1-1)+(1-1)+\cdots = -1+0+0+\cdots = -1$?
  (contudo, se a série converge, a 'soma infinita' é associativa)
- uma 'soma infinita' não é comutativa: um exemplo... brevemente

4 Séries geométricas

A série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ é geométrica se a_n é termo de uma progressão geométrica:

$$\forall n \geq p, a_{n+1} = r a_n \text{ ou } \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \text{ (se } a_n \neq 0\text{), onde } r \text{ (razão) não depende de } n$$

- para $n \geq 0$, $a_{n+p} = r^n a_p$ ou, para $n \geq p$, $a_n = r^{n-p} a_p$
- para $k \geq p$, $S_k = \sum_{n=p}^{k} a_n \Rightarrow r S_k = \sum_{n=p+1}^{k+1} a_n \Rightarrow (1-r) S_k = a_p - a_{k+1} = (1 - r^{k+1-p}) a_p$

Calculando S_k e o seu limite com $k \to +\infty$, a série geométrica de razão r

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n \quad \text{converge se e só se } |r| < 1\text{; se converge,} \quad \sum_{n=p}^{+\infty} a_n = \frac{a_p}{1-r}$$

Exercício: caso convirja, calcula a soma de (a) $\sum_{n=3}^{+\infty} 3^n 4^{1-\frac{n}{2}}$; (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{3n+1}}{3^{2(n+1)}}$

5 Séries redutíveis (ou telescópicas)

Exemplo: (série de Mengoli) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} S_1 &= a_1 = 1 - \tfrac{1}{2} \\ S_2 &= S_1 + a_2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} \\ S_3 &= S_2 + a_3 = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} \\ &\vdots \\ S_k &= S_{k-1} + a_k = 1 - \tfrac{1}{k} + \tfrac{1}{k} - \tfrac{1}{k+1} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k\to+\infty} S_k = \lim_{k\to+\infty} 1 - \frac{1}{k+1} = 1$$

A série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ é redutível se existem u_n e $q \in \mathbb{N}$ tais que $a_n = u_n - u_{n+q}$

Neste caso, para $k \geq p$, $S_k = u_p + \cdots + u_{p+q-1} - (u_{k+1} + \cdots + u_{k+q})$

Observação: nesta expressão de S_k não há simplificações se $k \geq p + q - 1$

6 Um exemplo e alguns exercícios

$\sum_{n=3}^{+\infty} \ln \frac{n+1}{n-1}$ é telescópica, com termo geral $a_n = u_n - u_{n+q}$, $u_n = -\ln(n-1)$, $n \geq p = 3$ e $q = 2$:

$$a_n = \ln \frac{n+1}{n-1} = \ln(n+1) - \ln(n-1) = -\ln(n-1) - \big(-\ln(n+2-1)\big) = u_n - u_{n+2}$$

Sabe-se que S_k é a soma de $q = 2$ termos constantes e de 2 termos dependentes de k

Para encontrar S_k podemos calcular e comparar $S_{p+q} = S_{3+2} = S_5$ e $S_{p+q+1} = S_6$:

$$S_5 = a_3 + a_4 + a_5 = \ln 4 - \ln 2 + \ln 5 - \ln 3 + \ln 6 - \ln 4 = -\ln 2 - \ln 3 + \ln 5 + \ln 6$$
$$S_6 = S_5 + a_6 = -\ln 2 - \ln 3 + \ln 5 + \ln 6 + \ln 7 - \ln 5 = -\ln 2 - \ln 3 + \ln 6 + \ln 7$$

Deduz-se que $S_k = -\ln 2 - \ln 3 + \ln k + \ln(k+1)$ e a série diverge, pois $\lim_{k\to+\infty} S_k = +\infty$

---

1. Justifica que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-9}$ é telescópica e $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{9n^2-4}$ não é telescópica
2. Verifica que $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$, geométrica com razão $r \neq 1$, é telescópica com $u_n = \frac{a_n}{1-r}$ e $q = 1$;

   prova que é telescópica também para $r = 1$.
3. Calcula: (a) $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\cos \frac{8\pi}{2^n} - \cos \frac{\pi}{2^n}\right)$; (b) $\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$; (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \ln \frac{n}{\sqrt{n+1}}$.

7 Um critério de divergência

Condição necessária de convergência: $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n = S \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1} = S - S = 0$$

Critério (divergência): $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n \text{ não é zero ou não existe} \;\Rightarrow\; \sum_{n=p}^{+\infty} a_n \text{ diverge}}$

Atenção! Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, nada se pode concluir ($\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ CONV e $\sum_{n=3}^{+\infty} \ln \frac{n+1}{n-1}$ DIV)

Exercícios: 1. determina a natureza de (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$ e (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{-n}$

2. sabendo que $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n = 1$, com $a_n > 0$, determina a natureza de

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_n}$ (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{a_n}$ (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{1+a_n}{1+a_{n+1}}$ (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(a_n - a_{n+1})$

Observação: $\int_p^{+\infty} f(x)dx$ converge $\not\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (p.e., $\int_1^{+\infty} x\cos(x^3)dx \cong 0.225686$)

8 Propriedades das séries

- $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=q}^{+\infty} a_n$ têm a mesma natureza para $p, q \in \mathbb{N}_0$ quaisquer
- $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=p}^{+\infty} \alpha a_n$ têm a mesma natureza para qualquer $\alpha \neq 0$ e, caso sejam convergentes, $\sum_{n=p}^{+\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=p}^{+\infty} a_n$

Sejam dadas $S = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ e $T = \sum_{n=p}^{+\infty} b_n$:

- S e T convergem $\Rightarrow \sum_{n=p}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=p}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=p}^{+\infty} b_n, \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (linearidade)
- S converge e T diverge $\Rightarrow \sum_{n=p}^{+\infty} (a_n + b_n)$ diverge
- S e T divergem $\Rightarrow$ nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n=p}^{+\infty} (a_n + b_n)$

Observação: às vezes, neste caso, basta pensar no limite das somas parciais

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left((-1)^n + \left(\tfrac{3}{2}\right)^n\right) = \lim_{k\to+\infty} S_k + T_k = \text{“limitada} + \infty\text{”} = +\infty$$

9 Exercícios

1. Determina a natureza e, em caso de convergência, a soma de

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2+1}{n} - \frac{n^2+n+1}{n+1}\right)$ (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} + 1\right)$ (c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n}$

2. Sabendo que $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(5a_n + \frac{3}{4^n}\right) = 10$, (a) justifica que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge (b) calcula a sua soma

3. Sejam $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ e $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{3^{n-1}} - \frac{n+1}{3^n}\right)$:

   (a) verifica que S e T convergem e calcula as suas somas

   (b) calcula o termo geral de T e deduz a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$

10 Séries de termos não negativos

$\sum\limits_{n=p}^{+\infty} a_n$ é uma série de termos não negativos se $a_n \geq 0$, $n \geq p$

Todavia, as técnicas específicas que serão apresentadas aplicam-se também quando

- $a_n \geq 0$ para algum $q \geq p$, analisando $\sum\limits_{n=q}^{+\infty} a_n$ ou
- $a_n \leq 0$, analisando $\sum\limits_{n=p}^{+\infty} (-a_n)$

Neste caso, a natureza da série caracteriza-se de uma forma mais simples:

- converge se e só se a sucessão das somas parciais é limitada
- senão, diverge para $+\infty$

Exemplo importante: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, chama-se série harmónica de ordem α

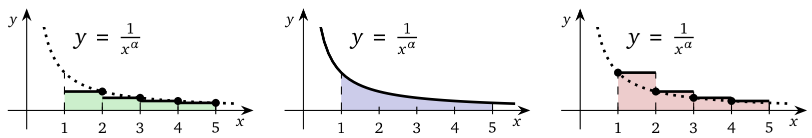
Uma série harmónica converge se e só se tem ordem $\alpha > 1$

11 Critério do integral

Se $f : [p, +\infty[\to \mathbb{R}$ é não negativa e decrescente e $a_n = f(n)$, $\forall n \geq p$,

$$\boxed{\sum_{n=p}^{+\infty} a_n \text{ converge} \iff \int_p^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge.}}$$

Verificação para séries harmónicas de ordem $\alpha \geq 0$: considerem-se as somas parciais



área dos retângulos: $\sum\limits_{n=2}^{k} \frac{1}{n^\alpha}$ $\leq$ área sob a curva: $\int_1^k \frac{1}{x^\alpha} dx$ $\leq$ área dos retângulos: $\sum\limits_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^\alpha}$

assim, a desigualdade $S_k - a_1 \leq \int_1^k \frac{1}{x^\alpha} dx \leq S_{k-1}$ prova o resultado do critério.

Exercício: determina a natureza de (a) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$; (b) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$; (c) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-\pi)^3}$

12 Critério de comparação

Dadas duas sucessões tais que $a_n \geq b_n \geq 0$, $n \geq p \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n \ \text{CONV} \Rightarrow \sum_{n=p}^{+\infty} b_n \ \text{CONV} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=p}^{+\infty} b_n \ \text{DIV} \Rightarrow \sum_{n=p}^{+\infty} a_n \ \text{DIV}$$

Atenção! Se $\sum\limits_{n=p}^{+\infty} a_n$ diverge ou $\sum\limits_{n=p}^{+\infty} b_n$ converge nada se pode concluir

Exercício: determina (se conseguires!) a natureza das seguintes séries

(a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{3 - \cos n}{n^2 - e}$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{3 - \cos n}{n - e}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-1} e^n$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n e^{-n}$

(e) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n + 1}$ (f) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^2 + 1}$ (g) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ (h) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

13 Critério do limite

Se $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$, $n \geq p \in \mathbb{N}_0$, e existe o limite $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$,

$$L \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \text{as séries } \sum_{n=p}^{+\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=p}^{+\infty} b_n \text{ têm a mesma natureza}$$

Exemplo: comparar $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{2n+1}$ com $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+n}{3^n-\ln n}$ com $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^n$

$$L = 0 \text{ e a série } \sum_{n=p}^{+\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \text{a série } \sum_{n=p}^{+\infty} a_n \text{ converge}$$

Exemplo: comparar $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ com $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$

$$L = +\infty \text{ e a série } \sum_{n=p}^{+\infty} b_n \text{ diverge} \Rightarrow \text{a série } \sum_{n=p}^{+\infty} a_n \text{ diverge}$$

Exemplo: comparar $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$ com $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$

$\boxed{\text{nos outros casos, nada se pode concluir}}$

Exemplo: comparar $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ e $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ com $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ e com $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

14 Alguns limites e propriedades de sucessões

- Se $x = x(n) \to 0$ (p.e., $x = \frac{1}{n}$), então $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
- Exponencial: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n+a}\right)^{n+b} = e^x$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}\right)^{n+\gamma} = e^{\alpha-\beta}$ $\forall a, b, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$
- "Hierarquia de infinitos": a notação $a_n \ll b_n$ significa $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty$

$$\log_a n \text{ (com } a > 1) \ll n^p \text{ (com } p > 0) \ll b^n \text{ (com } b > 1) \ll n! \ll n^n$$

- Seja $a_n = f(n)$ para $n \geq p$, com $[p, +\infty[\subseteq D_f$; então

$$f \text{ monótona, limitada ou } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Rightarrow a_n \text{ tem as mesmas propriedades}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \Rightarrow f \text{ tem limite } \ell \text{ ou não tem limite}$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = 0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$
- Logo, se a_n é obtida a partir de logaritmos ou potências de n através de somas, multiplicações, frações e composições, então $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

15 Como usar o critério do limite

No critério do limite compara-se a série $\sum\limits_{n=p}^{+\infty} a_n$ com $\sum\limits_{n=p}^{+\infty} b_n$, que é

1. uma série 'elementar' (quase sempre harmónica) ou
2. uma série mais simples (a analisar com outro critério)

O termo b_n determina-se frequentemente verificando se (e porquê) $a_n \to 0$

Exemplos: destacar os termos que tendem *mais rapidamente* para $+\infty$:

$$a_n = \frac{n^2-7}{2n^4+\ln n} = \frac{n^2}{n^4} \cdot \frac{1-\frac{7}{n^2}}{2+\frac{\ln n}{n^4}} = \frac{1}{n^2} \cdot (\text{limite} \in \mathbb{R}^+) \Rightarrow b_n = \frac{1}{n^2}$$

usar limites notáveis: $a_n = \sqrt{n} \operatorname{sen} \frac{1}{n} = \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (\text{limite} \in \mathbb{R}^+) \Rightarrow b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Exercício: estuda a natureza de (a) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{n-\ln n}{n^2 \ln n}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n-n2^n}{3^n+e^n \ln n}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(\cos \frac{1}{n})$

16 Série alternadas e critério de Leibniz

A série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ é alternada se $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ para $n \geq p$ ou, equivalentemente, se

$a_n = (-1)^n u_n$ (ou $a_n = (-1)^{n+1} u_n$) com $u_n > 0$ (sendo então $u_n = |a_n|$)

Atenção! $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n-2)}{n^2-10}$ é alternada para $n \geq 4$; $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen} n}{n}$ não é alternada

Critério de Leibniz: se $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ é alternada e $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, então

a sucessão $|a_n|$ é decrescente $\Rightarrow$ a série é convergente

Exemplo: as séries harmónicas *alternadas* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ convergem para $\alpha > 0$

Exercício: verifica que convergem (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(-2)^n}$; (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$

Desafio: verifica que não se pode aplicar o critério de Leibniz e determina natureza (e soma, se possível) de (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2+(-1)^n}{(-2)^n}$; (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n}$

17 Convergência absoluta e simples

A série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ de *termos quaisquer*

- converge absolutamente se $\sum_{n=p}^{+\infty} |a_n|$ converge; neste caso $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ converge:

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \text{ logo } \sum_{n=p}^{+\infty} |a_n| \text{ CONV} \Rightarrow \sum_{n=p}^{+\infty} (a_n + |a_n|) \text{ CONV} \Rightarrow \sum_{n=p}^{+\infty} a_n = \sum_{n=p}^{+\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=p}^{+\infty} |a_n|$$

- converge simplesmente se $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=p}^{+\infty} |a_n|$ diverge

Exemplo: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ conv. absolutamente; $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ conv. simplesmente

Atenção: não existem critérios de convergência simples!!
Em particular, o critério de Leibniz só prova a convergência!

Exercício: determina a natureza (conv. simples ou absoluta ou div.) de

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$ (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-e)^{-n}}{1+e^{-n}}$ (c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-e)^n}{1+e^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+2\cos n}{n^2 \ln n}$

18 Critérios de convergência absoluta

Se existe o limite

- $L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (critério da **raiz**/de Cauchy) ou
- $L = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, com $a_n \neq 0$ para $n \geq p$ (critério da **razão**/de d'Alembert)

$L < 1 \Rightarrow$ a série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ converge absolutamente

$L > 1 \Rightarrow$ a série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ diverge (entende-se que $+\infty > 1$)

$L = 1 \Rightarrow$ nada se pode concluir sobre a natureza da série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$

Exercício: estuda a natureza das seguintes séries

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$ (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^n}{e^{n^2}}$ (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!n^n}$

19 Critérios de convergência absoluta: observações

- O critério da raiz aplica-se a "fatoriais", usando a fórmula de Stirling:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}} = 1 \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

- Pela relação entre os dois limites, o critério da raiz é mais *poderoso*:

$$L_{\text{razão}} = 1 \implies L_{\text{raiz}} = 1 \qquad \nexists L_{\text{raiz}} \implies \nexists L_{\text{razão}}$$

$$L_{\text{raiz}} = 1 \implies L_{\text{razão}} = 1 \text{ ou } \nexists L_{\text{razão}} \qquad \nexists L_{\text{razão}} \implies L_{\text{raiz}} \text{ pode existir}$$

Exemplo: determina a natureza de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2+(-1)^n}{(-2)^n}$

- Os critérios *falham* se $\sum_{n=p}^{+\infty} |a_n|$ é comparável com uma série harmónica!
- Os critérios *falham* se a série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ é simplesmente convergente!
- Pode ser útil estudar uma série mais *simples* (obtida por comparação)

Exemplo: determina a natureza de (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!-2n^n}{4^n+n^4}$ (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+(-3)^n}{n!\cos(n\pi)}$

20 Exercícios

1. Verifica que $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$ para qualquer $b > 1$ e que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.
2. Estuda a natureza das séries

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{e^{n^2}}$ (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n^n-n!}$ (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!n^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n-1)!}$

   (e) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\left(1+\frac{1}{\ln n}\right)}}$; (f) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3-2n}{3n-2}\right)^n$; (g) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!+\operatorname{arctg} n}$; (h) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$
3. Mostra que a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n!}$ converge e calcula a sua soma.
4. Estuda a natureza de: (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{2n^n}$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2^n n!}{2n^n}\right)^n$; (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n n!}{2n^n}}$
5. Sabe-se que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0.2021$, com $a_n \geq 0$ para $n \in \mathbb{N}$: calcula $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[2022]{a_n}$.
6. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S \in \mathbb{R}$ com $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Estuda a natureza de

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + a_{n+1})(a_n - a_{n+1})$, (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S+\operatorname{sen} a_n}{2+\cos a_n}$, (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Sa_n}{S+a_n}$.
7. Sabendo que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, com $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, estuda a natureza de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

21 Mais exercícios

1. Sabendo que $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e que $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3}{2}$, determina a natureza (divergente, absoluta ou simplesmente convergente) das seguintes séries: (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$; (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n a_n$.
2. Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge simplesmente, mostra que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^n$ converge absolutamente; se $a_n \neq 0$, prova que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{|a_n|}$ diverge.
3. Considera $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, convergente, e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, divergente, com a_n e b_n positivos.

   (a) Determina a natureza de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{a_n}$. (b) O $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n}$ pode ser zero?
4. Sabe-se que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5}{3}$, onde $a_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Justifica que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{5a_n}$ converge. (b) Justifica que $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

   (c) Estuda a natureza de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln a_n}{n}$. (d) Analisa a natureza de $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n (a_n - 6)$.

22 Ainda mais exercícios!

5. Não há nenhuma maneira geral de deduzir a natureza de uma série a partir da natureza das séries dos factores do seu termo geral: determina a natureza das séries de termos gerais a_n, b_n e $c_n = a_n b_n$.

(a) $a_n = \frac{1}{n^2},\ b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ (b) $a_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n,\ b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ (c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}},\ b_n = \frac{1}{n}$

(d) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\ b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ (e) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n,\ b_n = \left(\frac{5}{2}\right)^n$ (f) $a_n = \frac{1}{n},\ b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

6. Seja S a série de termo geral $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}$.
   (a) Verifica que o módulo do termo geral é $v_n = |u_n| = \frac{n+(-1)^n}{n^2}$.
   (b) Pode aplicar-se o critério da raiz ou o da razão?
   (c) Mostra que S não é absolutamente convergente.
   (d) Pode aplicar-se o critério de Leibniz?
   (e) Prova que S é simplesmente convergente.

23 O teorema de Riemann (não faz parte do programa)

Quando converge, uma 'soma de infinitos termos' é *associativa* (slide 3); nesse caso,

$$a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots \text{ é } \textit{comutativa} \iff \sum_{n=p}^{+\infty} a_n \text{ converge absolutamente}$$

Em particular, a convergência simples tem uma consequência surpreendente...

Teorema (de Riemann): dada uma série simplesmente convergente,
é possível alterar a ordem dos seus termos para obter

- uma série convergente para qualquer número real ou
- uma série divergente para $+\infty$, para $-\infty$ ou sem limite

Exemplo: $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge simplesmente (prova-se que $S = \ln 2$);

mudando a ordem de $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots$
da seguinte forma: um índice ímpar, dois pares, um ímpar, dois pares... tem-se

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_4 + a_3 + a_6 + a_8 + a_5 + a_{10} + a_{12} + \cdots &= \underbrace{1 - \tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{4} + \underbrace{\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}} - \tfrac{1}{8} + \underbrace{\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10}} - \tfrac{1}{12} + \cdots \\ &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} + \cdots = \tfrac{1}{2} S \end{aligned}$$

24 Soluções dos exercícios

Brevemente...