MD — Dúvidas

9 de junho de 2023 16:19

8)

8. Sendo $p(x) = 2x^2 + x$, determine uma fórmula fechada para o cálculo da soma $S_n = \sum_{i=0}^{n} p(i)$ começando por estabelecer uma equação de recorrência apropriada.

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (2i^2 + i) = \sum_{i=0}^{n-1} (2i^2 + i) + (2n^2 + n)$$

(NH) $S_n = S_{n-1} + 2n^2 + n, \; n \geq 1$

$S_0 = 2(0)^2 + 0 = 0$

Resolver esta equação de recorrência.

Equação de recorrência homogénea associada:

(H) $S_n = S_{n-1}$

(i) solução geral de (H): $S_n^{(h)} = c1^n = c$, c - constante

(ii) Solução particular de (NH)

$2n^2 + n$ é um polinómio de grau $j = 2$

1 é raiz característica com multiplicidade $m = 1$

$$S_n^{(p)} = (A_0 + \dots + A_j n^j)\, n^m = (A_0 + A_1 n^1 + A_2 n^2)\, n^1$$

$S_n^{(p)} = A_0 n + A_1 n^2 + A_2 n^3$, A_0, A_1, A_2 - constantes

substituindo em (NH) vem

$$S_n^{(p)} = S_{n-1}^{(p)} + 2n^2 + n \iff$$

$$A_0 n + A_1 n^2 + A_2 n^3 = A_0(n-1) + A_1(n-1)^2 + A_2(n-1)^3 + 2n^2 + n$$

$$\iff \cancel{A_0 n} + \cancel{A_1 n^2} + A_2 n^3 = \cancel{A_0 n} - A_0 + A_1(\cancel{n^2} - 2n + 1) + A_2(n-1)(n^2 - 2n + 1) + 2n^2 + n$$

$$\iff \cancel{A_2 n^3} = -A_0 - 2A_1 n + A_1 + A_2(\cancel{n^3} - 3n^2 + 3n - 1) + 2n^2 + n$$

$$\iff -A_0 - 2A_1 n + A_1 - 3A_2 n^2 + 3A_2 n - A_2 + 2n^2 + n$$

$$\iff (-3A_2 + 2)n^2 + (-2A_1 + 3A_2 + 1)n - A_0 + A_1 - A_2 = 0$$

$-3A_2 + 2 = 0$ $\quad$ ($A_2 = \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow (-3A_2+2)n^2+(-2A_1+3A_2+1)n-A_0+A_1-A_2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3A_2+2=0 \\ -2A_1+3A_2+1=0 \\ -A_0+A_1-A_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2=\frac{2}{3} \\ 2A_1=\overbrace{3\left(\frac{2}{3}\right)+1}^{3} \\ A_0=A_1-\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1=\frac{3}{2} \\ A_0=\frac{3}{2}-\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \Big\{ A_0=\frac{9-4}{6}=\frac{5}{6}$$

$$S_n^{(p)}=\frac{5}{6}n+\frac{3}{2}n^2+\frac{2}{3}n^3$$

(iii) Solução geral da equação (NH):

$$S_n=S_n^{(h)}+S_n^{(p)}=c+\frac{5}{6}n+\frac{3}{2}n^2+\frac{2}{3}n^3$$

(iv) Determinar a constante c:

$S_0=0 \Leftrightarrow c=0$

solução da equação (NH) que verifica $S_0=0$

é

$$S_n=\frac{5}{6}n+\frac{3}{2}n^2+\frac{2}{3}n^3$$

11.c) $a_n^3=a_{n-1}^2, n\geq 2$ $3\neq 2 \Longrightarrow$ aplicar logaritmos

Qual é a base do logaritmo?

condição inicial:

$a_1=2$

substituição: $a_n=2^{b_n} \Updownarrow$

$$\log_2(a_n^3)=\log_2(a_n^2) \Leftrightarrow 3\underbrace{\log_2(a_n)}_{b_n=}=2\underbrace{\log_2(a_n)}_{b_{n-1}=}$$

$b_n=\log_2(a_n)$

$3b_n=2b_{n-1}$ $\rightarrow$ equação de recorrência linear com coeficientes constantes

condição inicial: $b_1=\log_2(a_1) \Leftrightarrow b_1=\log_2(2)$

$\Leftrightarrow b_1=1$

Terminar! No final $a_n=2^{b_n} \Leftrightarrow a_n=2^{\text{sol. } b_n}$

Exemplo: $a_n^3=2a_{n-1}^3+a_{n-2}^3$ $3=3=3 \Longrightarrow$ substituição: $b_n=a_n^3, n\geq 0$ $\Updownarrow$

Exemplo: $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$

$b_n = a_n^3, n \geq 0$

$\Updownarrow$

$a_n = \sqrt[3]{b_n}$,

$n \geq 0$

Depois de obter a solução

$b_n =$ sol.

fazer $a_n = \sqrt[3]{\text{sol}}$.

---

b) $5na_n + 2na_{n-1} = 2a_{n-1}$, $n \geq 3$, com condição inicial $a_2 = -30$;

c) ${a_n}^3 = {a_{n-1}}^2$, $n \geq 2$, $a_1 = 2$ (assume-se que $a_n \geq 0$, para todo o $n \geq 1$.

$a_{n-1} =$

d) $a_n = 2(a_{n-1}) + 2(a_{n-2}) + \cdots + 2(a_1 + 2(a_0 + a_0)^2)^2 \ldots)^2)^2$, com $a_0 = 2$ e $a_1 = 2(a_0 + a_0)^2$.

termo anterior

termo anterior

$a_n = 2(a_{n-1} + a_{n-1})^2$

$\Updownarrow$

ordem 1

$\Downarrow$

$a_0 = 2$

$\rightarrow$ $\boxed{a_n = 8a_{n-1}^2, n \geq 1,}$

Resolver de forma semelhante ao 11.c

---

4. Uma experiência é executada lançando-se um dado até que apareçam 2 números pares. Determine uma equação de recorrência para o número de experiências que terminam no n-ésimo lançamento ou antes. $= a_n$

Experiência: 3, 2, 1, 3, 5, 4

Vamos obter uma equação de recorrência para a_n.

(i) número de experiências que terminaram no $(n-1)$-ésimo lançamento ou antes,

(isto é, nº de experiências que terminaram antes do n-ésimo lançamento)

(ii) número de experiências que terminaram no n-ésimo lançamento

— — . .

$\overline{1}$ $\overline{2}$ . . . $\overline{n-2}$ $\overline{n-1}$ $\overline{n}$

nº de possibilidades: $|\{2,4,6\}| = 3$

Saiu um nº par (o 1º par):
- Em $n-1$ lançamentos possíveis;
- número de possibilidades para o nº par que sai: $|\{2,4,6\}|=3$.

E saíram $n-2$ números ímpares:
Nos restantes $n-2$ lançamentos saiu um número ímpar de 3 números ímpares possíveis.

$$a_n = a_{n-1} + \underbrace{3(n-1)}_{\text{primeiro nº par}}\ \overbrace{3^{n-2}}^{n-2 \text{ números ímpares}}\ \underbrace{3}_{2.º \text{ número par}}$$

$$\Leftrightarrow a_n = a_{n-1} + (n-1)3^n, \quad n \geq 2$$

$a_1 = 0$

a_{n-1}: nº de experiências que terminaram antes do n-ésimo lançamento

$(n-1)3^n$: nº de experiências que terminaram no n-ésimo lançamento

12. Seja $h(k, n)$ o número de possibilidades de colocação de k pacientes numa sala de espera com n cadeiras em linha, de tal forma que os pacientes não se sentam em cadeiras vizinhas, deduza uma relação de recorrência para $h(k, n)$.

1 . . . . $n-2$ $n-1$ n

último lugar (cadeira n):

(i) nº de possibilidades de colocação dos K pacientes nas n cadeiras ficando a n-ésima cadeira vazia:

neste caso não é necessário impor nenhuma condição relativamente à penúltima cadeira (pode ficar ocupada ou vazia); logo o nº destas colocações coincide com o nº de colocações dos K pacientes

Logo o nº destas colocações coincide com o nº de colocações dos k pacientes em n−1 cadeiras, que é $h(k, n-1)$.

(ii) nº de possibilidades de colocação dos k pacientes nas n cadeiras ficando a n-ésima cadeira ocupada:

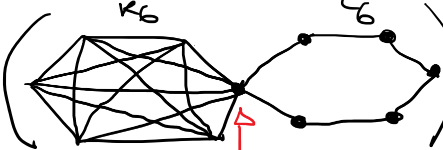
neste caso a cadeira n−1 tem que ficar vazia, não havendo necessidade de impor alguma condição extra sobre a cadeira n−2 (e as anteriores). Logo, o nº destas colocações é

$$k\, h(k-1, n-2)$$

k é o número de pacientes que se podem sentar na última cadeira

Conclusão final: $h(k,n) = k\, h(k-1, n-2) + h(k, n-1)$

33 Grafos

$\tau\Big($  $\Big) = \underbrace{\tau(K_6)}_{\text{Teo. Cayley}} \, \tau(C_6) =$

$\tau(K_6) = 6^{6-2} = 6^4$

$\tau(C_6) = 6$

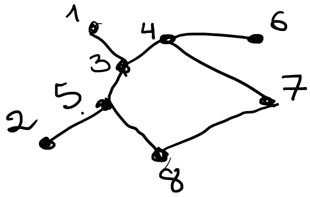
Teo. Cayley: se $n \geq 2$, $\tau(K_n) = n^{n-2}$

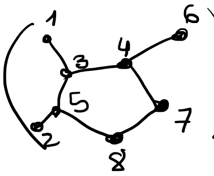
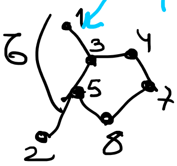
C_6 - ciclo com 6 arestas

$$= 6^4 \times 6 = 6^5$$

32. Determine o número de árvores abrangentes do grafo G, para o qual $V(G) = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ e $E(G) = \{13, 25, 34, 35, 46, 47, 58, 78\}$.

G



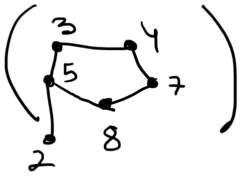
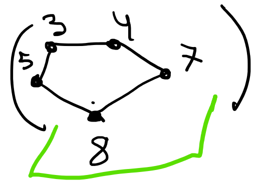
$\tau\Big($  $\Big) \overset{46}{=} \underbrace{\tau\big($  $\big)}_{=1} \; \tau\Big($  $\Big)$

é uma ponte

13 é uma ponte

K_1 é uma

K_1 é uma árvore

$= \underbrace{\tau(\bullet_1)}_{=1}\ \tau\Big($  $\Big)$ $\overset{25 \text{ é uma ponte}}{=}$ $\underbrace{\tau(\bullet_2)}_{=1}\ \tau\Big($  $\Big) = 5$

$= 5$, grafo com 5 arestas