Livro "Sucessões e Séries" Teoria e Prática
Ana Alves de Sá & Bento Louro
Escolar Editora, 2009.

2.7 Exercícios Resolvidos

1. Justifique que as seguintes séries são convergentes e calcule as suas somas:

   1 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$; $= \frac{1}{2}$

   2 b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{arctg}(n+3) - \operatorname{arctg}(n))$; $= \frac{5\pi}{4} - \operatorname{atg}(2) - \operatorname{atg}(3)$

   3 c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^{n+1}}\right)$; $= 1$

   4 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg}(n)} - \frac{1}{\operatorname{arctg}(n+1)}\right)$; $= \frac{2}{\pi}$

   5 e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2n-1}} - \frac{1}{2^{3n-2}}\right)$; $= \frac{2}{21}$

   6 f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+7^n}{3^n \cdot 7^n}$; $= 8/3$

   7 g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{2}{5^n} \cdot \frac{3}{6^{n+1}}$; $= \frac{480}{119}$

   8 h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left(\frac{n+2}{n}\right)}{\log(n)\log(n+2)}$. $= \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3}$

2. Justifique que a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{\pi^n}\right)$$

é convergente e calcule a sua soma, sabendo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. $S = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} + \frac{1}{\pi(\pi-1)}$

3. Escreva na forma de fracção as seguintes dízimas periódicas:

   1 a) $0,55555\ldots$; $= 5/9$

   2 b) $0,\overline{34}$; $= 34/99$

   3 c) $1,\overline{345}$; $= \frac{1344}{999}$

   4 d) $0,324\overline{101}$. $= 323777/999000$

4. Determine a natureza das seguintes séries por um critério de comparação.

   1 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{3n^5+2n+1}$; Conv.

   2 b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$; Conv.

   3 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^7+1)}{n^2}$; Conv.

   4 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n}\right)$; Conv.

   5 e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; DIV.

   6 f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2+4}$; Conv.

   7 g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+10\cos(n)}$; Conv.

   8 h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\sqrt{n}}$. DIV.

5. Determine a natureza das seguintes séries: (conv. abs/simples)

   1 a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{n}$; DIV.

   2 b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{e^n+e^{-n}}$; Abs. conv.

   3 c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(3n)}$; Simp. conv

   4 d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}{n}$; abs. conv.

   5 e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{e^{2n+1}}$; abs. conv

   6 f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{n+1}}$. simp. conv.

6. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

   1 a) Estude-a quanto à convergência. simp. conv.

   2 b) Indique uma soma parcial S_n que aproxime a soma da série com um erro inferior a $\frac{1}{1000}$. S_{1000}

   3 c) Indique um majorante do erro que se comete quando se toma S_5 para soma da série. $1/6$

es:

aproxime a
a $\frac{1}{1000}$.
se comete
série.

7. Determine a natureza das seguintes séries usando o Critério ~~da Razão ou o~~ de D'Alembert.

1 a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n\, n!}$; abs. conv.

2 b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\, 2^n}{4\,n^3+1}$; div.

3 c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!-n!}{n!\,(n+1)!}$; abs. conv.

4 d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n+2)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \cdots \cdot (3n+1)}$; abs. conv

5 e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n\,\sqrt{3n+2}}$; abs. conv

6 f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n!}{n!+n^n}$; abs. conv

7 g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2\,n)!+2^n}$; abs. conv

8 h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!+3n}{((n+1)!)^2}$. abs. conv.

8. Determine a natureza das seguintes séries usando o Critério da Raiz ou o da Raiz de Cauchy:

1 a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$; abs. conv.

2 b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$; abs. conv.

3 c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2}-1\right)^n$; abs. conv.

4 d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{n}\right)\right)^n$; abs. conv.

5 e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}+(-1)^n\frac{n}{4n+1}\right)^n$; abs. conv.

6 f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-2}{3n^2}\right)^n$. abs. conv.

9. Determine a natureza das seguintes séries. Em caso de convergência, indique se é simples ou absoluta.

1 a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n^n)}$; simp. conv.

2 b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{\sqrt{n^5+1}}+\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)$; div.

3 c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$; abs. conv.

4 d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)+2^n}{n+5^n}$; abs. conv.

5 e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\,\frac{e^{n+1}}{n^n}$; abs. conv.

6 f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+\frac{1}{n}}{n}$; simp. conv.

7 g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$; abs. conv.

8 h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\sqrt[n]{n}\right)^n$; abs. conv.

9 i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-(-1)^n\,n^2}$; abs. conv.

10 j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n+4}{n+4^n}+\left(\frac{3}{n+2}\right)^{2n}\right)$; abs. conv

11 k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$; div.

12 l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\log(n))^3}$; abs. conv.

13 m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+2} \frac{1}{x^2}\,dx$; abs. conv.

14 n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt[3]{n+1}}$; simp. conv.

15 o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$; abs. conv.

16 p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$; abs. conv.

17 q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\,2^n\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3^n}\right)$; abs. conv.

18 r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\,\frac{n!\,\sqrt{n}}{n^n\,\sqrt{n+1}}$; abs. conv

19 s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}+1)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)$; abs. conv.

20 t) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n!)}$ Div.

Sugestão: Note que $n! < n^n$.

10. Determine a natureza das seguintes séries. Em caso de convergência, indique se é simples ou absoluta.

1 a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\cos(n\,\pi)}{\sqrt{n^3+1}}$; simp. conv.

2 b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3\times 5\times\cdots\times(2\,n+1)}$; abs. conv

3 c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos^2(n)}{\sqrt{n}}$; Div.

4 d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n\,(n+1)!}{(n+1)^n}$; Div.

5 e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$; simp. conv.

6 f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\cos(n)}$; abs. conv.

7 g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n+n^n}$; abs. conv.

8 h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n(-1)^n}{1+2n^3}$; abs. conv.

9 i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!+1}$; abs. conv.

10 j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n!}{(2n)!}-\frac{1}{2^n}\right)$; abs. conv.

11 k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(2n)!}{4^n\,(n!)^2}$; Div.

12 l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^3\log(n)}$; abs. conv.

13 m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n$; Div

14 n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5}\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{n}\right)$. abs. conv.

11. Determine a natureza das seguintes séries. Em caso de convergência, indique se é simples ou absoluta.

1 a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2^n}\right)$; abs. conv.

2 b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n\sqrt{n}+2n^2}$; abs. conv.

3 c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt{n^2-1}}$; simp. conv.

4 d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\log(n)}$; simp. conv.

5 e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+\operatorname{sen}(n)}{\sqrt[3]{n}+1}$; Div.

6 f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}\operatorname{sen}(n^3)}{(3n^2+5)^n}$; abs. conv.

7 g) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n\operatorname{arcsen}\left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)$; simp. conv.

8 h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\times 7\times\cdots\times(3n+1)}{8\times 11\times\cdots\times(3n+5)}$; abs. conv.

9 i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg}(n^3)}{\sqrt{n}+n^2}+\frac{2^n(2n)!}{3^n(2n+1)!}\right)$; abs. conv.

10 j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{n}})}{n+\sqrt{n}}$; abs. conv

11 k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)-(n+2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n+2}\right)\right)$; abs. conv.

12 l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3}{(n+1)!}$; abs. conv.

13 m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}(n)}{n^2}$; abs. conv.

14 n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}$; Div.

15 o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\log 2)^n\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$. abs. conv.

12. 1 a) Estude a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{3^n n!}$. conv.

2 b) Com base na alínea anterior, indique o limite da sucessão $\dfrac{(n+1)^n}{3^n n!}$. zero

13. Estu

a_n

Em

absol

14. Estu

série

Em

absol

15. Seja

que a

$\sum_{n=1}^{\infty} c$

16. Most

conve

17. Consi

a)

b)

18. Seja

se a

$\forall n \in$

abs. Conv

13. Estude a natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ onde

$$a_n = \begin{cases} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}, & \text{se } n = 3k,\ k \in \mathbb{N} \\ \dfrac{1}{n!}, & \text{se } n = 3k+1,\ k \in \mathbb{N}_0 \\ \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^n}, & \text{se } n = 3k+2,\ k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Em caso de convergência, indique se é simples ou absoluta.

DIV

14. Estude, por dois processos distintos, a natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ onde

$$a_n = \begin{cases} \left(\dfrac{n}{2}\right)^2, & \text{se } n \text{ par} \\ \dfrac{(n+1)(n-1)}{2^2}, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Em caso de convergência indique se é simples ou absoluta.

Abs. Conv

15. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ é convergente. Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ é convergente.

Conv

16. Mostre que, se $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$ converge.

17. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ em que

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \dfrac{1}{n^2}, & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$$

a) Mostre que não se pode aplicar o Critério de Leibniz.

b) Mostre que a série é divergente.

18. Seja (a_n) uma sucessão de números reais. Define-se a sucessão (b_n) por $b_{2n-1} = a_n$, $b_{2n} = -a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mostre que

1 a) A série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente se, e só se, $\lim a_n = 0$.

2 b) A série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é absolutamente convergente se, e só se, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

19. Mostre que se (a_n) é uma sucessão decrescente e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\lim(n\,a_n) = 0$.

Sugestão: Relacione a convergência da série com o facto de a sucessão das somas parciais ser uma sucessão de Cauchy (escolha m e n de modo conveniente).

20. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos convergente. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ converge se $p > \dfrac{1}{2}$.

Sugestão: Tenha em consideração a desigualdade $ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

21. Seja a_n uma sucessão de termos positivos tal que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Div

22. Estude a natureza da série $\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{arctg}(v_n)$ onde $v_2 = k > 0$ e $v_{n+1} = v_n \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$, $n \geq 2$.

Conv

23. Considere um triângulo equilátero de lado de comprimento 1. Construa as sucessões de círculos aproximando-se dos vértices do triângulo de modo que cada círculo é tangente aos lados do triângulo e aos círculos que o precedem e o seguem na sucessão. Calcule a soma das áreas dos círculos.

$S = \dfrac{11\pi}{96}$

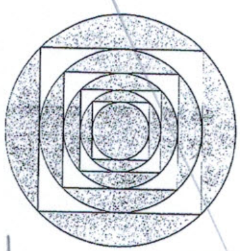
;

$\frac{1}{i+2}\Big)\Big)$;

$\frac{+1)^n}{3^n n!}$.

ue o limite

24. Considere um quadrado inscrito numa circunferência de raio 1. Nesse quadrado inscreva uma circunferência e nela um novo quadrado, e assim sucessivamente, como sugerido pela figura. Calcule a área da região colorida.



$A = 2(\pi - 2)$

25. O triângulo de Sierpinski é a figura geométrica construída do seguinte modo: divide-se um quadrado em quatro quadrados iguais e remove-se o quadrado superior direito. Divide-se da mesma forma cada um dos três quadrados restantes e remove-se o quadrado superior direito de cada um.

Figura

Continuando este processo até ao infinito obtemos uma figura a que se chama triângulo de Sierpinski.

Figura

Suponhamos que o quadrado inicial tem lado de comprimento 1. Qual a área total dos quadrados que foram removidos do quadrado inicial? Que pode concluir sobre a área do triângulo de Sierpinski?

Área dos quadrados removidos = 1
Área do Δ Sierpinski = 0.

1. a)

étrica cons-
uadrado em
uadrado su-
a cada um
o quadrado

to obtemos
Sierpinski.

m lado de
quadrados
' Que pode
rpinski?

RESOLUÇÃO

1. a) Seja a_n o termo geral da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$. Tendo em conta que $n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$ vem

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} \\ &= \frac{A(n+2)+B(n+1)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(A+B)n+2A+B}{(n+1)(n+2)}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

e, portanto,

$$a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

A série dada é telescópica com $\alpha_n = \dfrac{1}{n+1}$ e $k=1$, usando a notação da fórmula (2.1). Neste caso, $\lim \alpha_n = 0$, portanto, podemos concluir que a série converge e, usando a fórmula (2.2), tem soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \alpha_1 = \frac{1}{2}.$$

Em alternativa, podemos escrever a sucessão das somas parciais e calcular o respectivo limite:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ S_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ S_3 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \\ &\vdots \\ S_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Como $\lim S_n = \dfrac{1}{2}$, a série é convergente e a sua soma é $\dfrac{1}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{2}.$$

b) Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{arctg}(n+3)-\operatorname{arctg}(n)) = -\sum_{n=1}^{+\infty}(\operatorname{arctg}(n)-\operatorname{arctg}(n+3))$. É telescópica com $\alpha_n = \operatorname{arctg}(n)$ e $k=3$, usando a notação da fórmula (2.1). Neste caso, $\lim \alpha_n = \frac{\pi}{2}$, portanto, podemos concluir que a série converge e, usando a fórmula (2.2), tem soma

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{arctg}(n)-\operatorname{arctg}(n+3)) = -\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-3\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{4}-\operatorname{arctg}(2)-\operatorname{arctg}(3).$$

Um caminho alternativo para a resolução deste problema é escrever a sucessão das somas parciais e calcular o seu limite:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \operatorname{arctg}(1)-\operatorname{arctg}(4) = \frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}(4)\\
S_2 &= \frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}(4)+\operatorname{arctg}(2)-\operatorname{arctg}(5)\\
S_3 &= \frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}(4)+\operatorname{arctg}(2)-\operatorname{arctg}(5)+\operatorname{arctg}(3)-\operatorname{arctg}(6)\\
S_4 &= \frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}(4)+\operatorname{arctg}(2)-\operatorname{arctg}(5)+\operatorname{arctg}(3)-\operatorname{arctg}(6)+\operatorname{arctg}(4)-\operatorname{arctg}(7)\\
&= \frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}(2)+\operatorname{arctg}(3)-\operatorname{arctg}(5)-\operatorname{arctg}(6)-\operatorname{arctg}(7)\\
&\vdots\\
S_n &= \frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}(2)+\operatorname{arctg}(3)-\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}(n+2)-\operatorname{arctg}(n+3)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Como $\lim S_n = \frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}(2)+\operatorname{arctg}(3)-\frac{3\pi}{2} = -\frac{5\pi}{4}+\operatorname{arctg}(2)+\operatorname{arctg}(3)$ a série é convergente e

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\operatorname{arctg}(n+3)-\operatorname{arctg}(n)) = \frac{5\pi}{4}-\operatorname{arctg}(2)-\operatorname{arctg}(3).$$

c) A série $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e^n}-\frac{1}{e^{n+1}}\right)$ é telescópica, com $\alpha_n = \frac{1}{e^n}$ e $k=1$, usando a notação da fórmula (2.1). Como $\lim \frac{1}{e^n} = 0$, a série é convergente e

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e^n}-\frac{1}{e^{n+1}}\right) = \frac{1}{e^0}-\lim\frac{1}{e^n} = 1.$$

Outro processo para calcular a soma é escrever o termo geral na forma $\frac{1}{e^n}\left(1-\frac{1}{e}\right)$, ficando realçado o facto de esta série ser geométrica de razão $r=\frac{1}{e}$. Como $0<\frac{1}{e}<1$, a série converge e:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e^n}-\frac{1}{e^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^n}\left(1-\frac{1}{e}\right) = \left(1-\frac{1}{e}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^n} = \left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{e}} = 1.$$

d)

e)

d) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\operatorname{arctg}(n)}-\frac{1}{\operatorname{arctg}(n+1)}\right)$ é telescópica, com $\alpha_n=\dfrac{1}{\operatorname{arctg}(n)}$ e $k=1$, usando a notação da fórmula (2.1). Neste caso, $\lim\alpha_n=\dfrac{2}{\pi}$, portanto, podemos concluir que a série converge e, usando a fórmula (2.2), tem soma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\operatorname{arctg}(n)}-\frac{1}{\operatorname{arctg}(n+1)}\right)=\frac{1}{\operatorname{arctg}(1)}-\frac{2}{\pi}=\frac{4}{\pi}-\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

A alternativa seria escrever a sucessão das somas parciais e calcular o seu limite:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{\operatorname{arctg}(1)}-\frac{1}{\operatorname{arctg}(2)}=\frac{4}{\pi}-\frac{1}{\operatorname{arctg}(2)}\\
S_2 &= \frac{4}{\pi}-\frac{1}{\operatorname{arctg}(2)}+\frac{1}{\operatorname{arctg}(2)}-\frac{1}{\operatorname{arctg}(3)}=\frac{4}{\pi}-\frac{1}{\operatorname{arctg}(3)}\\
S_3 &= \frac{4}{\pi}-\frac{1}{\operatorname{arctg}(3)}+\frac{1}{\operatorname{arctg}(3)}-\frac{1}{\operatorname{arctg}(4)}=\frac{4}{\pi}-\frac{1}{\operatorname{arctg}(4)}\\
S_4 &= \frac{4}{\pi}-\frac{1}{\operatorname{arctg}(4)}+\frac{1}{\operatorname{arctg}(4)}-\frac{1}{\operatorname{arctg}(5)}=\frac{4}{\pi}-\frac{1}{\operatorname{arctg}(5)}\\
&\vdots\\
S_n &= \frac{4}{\pi}-\frac{1}{\operatorname{arctg}(n+1)}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Como

$$\lim S_n=\lim\left(\frac{4}{\pi}-\frac{1}{\operatorname{arctg}(n+1)}\right)=\frac{4}{\pi}-\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

a série é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\operatorname{arctg}(n)}-\frac{1}{\operatorname{arctg}(n+1)}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

e) As séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-1}}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n-2}}$ são geométricas. De facto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}\,2^{-1}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n-2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n}\,2^{-2}}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n}}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}$$

A primeira série tem razão $r=\dfrac{1}{4}$ e a segunda tem razão $r=\dfrac{1}{8}$. Como em ambos os casos $|r|<1$, as séries são convergentes e

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-1}}=2\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n-2}}=4\cdot\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{4}{7}$$

Podemos concluir, pelo Teorema 2.2.2, que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}-\frac{1}{2^{3n-2}}\right)$ é convergente e tem soma igual a $\frac{2}{3}-\frac{4}{7}=\frac{2}{21}$.

f) A série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+7^n}{3^n\cdot 7^n}$ pode ser escrita na forma $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{7^n}+\frac{1}{3^n}\right)$. As séries $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{7^n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ são geométricas. A primeira tem razão $r=\frac{1}{7}$ e a segunda tem razão $r=\frac{1}{3}$. Como em ambos os casos $|r|<1$, as séries são convergentes e

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{7^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{7}}=\frac{7}{6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

Podemos concluir, pelo Teorema 2.2.2, que a série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+7^n}{3^n\cdot 7^n}$ é convergente e tem soma igual a $\frac{7}{6}+\frac{3}{2}=\frac{8}{3}$.

g) A série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{n-1}}\cdot\frac{2}{5^n}\cdot\frac{3}{6^{n+1}}$ é geométrica porque

$$\frac{1}{4^{n-1}}\cdot\frac{2}{5^n}\cdot\frac{3}{6^{n+1}}=\frac{6\cdot 4}{4^n\cdot 5^n\cdot 6^n\cdot 6}=\frac{4}{120^n}.$$

Podemos escrever

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{n-1}}\cdot\frac{2}{5^n}\cdot\frac{3}{6^{n+1}}=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{120^n}=4\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{120}}=\frac{480}{119}.$$

h) Das propriedades dos logaritmos resulta a igualdade

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log\left(\frac{n+2}{n}\right)}{\log(n)\log(n+2)}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\log(n)}-\frac{1}{\log(n+2)}\right)$$

ficando assim explícito que a série é telescópica, com $\alpha_n=\frac{1}{\log(n)}$ e $k=2$, usando a notação da fórmula (2.1). A série é convergente porque $\lim\frac{1}{\log(n)}=0$, e

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\log(n)}-\frac{1}{\log(n+2)}\right)=\frac{1}{\log 2}+\frac{1}{\log 3}.$$

2. Efectuando uma reindexação da série, podemos escrever $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Por outro lado,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Sabendo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, então $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$, ou seja,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}.$$

A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\pi^n}$ é convergente por ser geométrica de razão $\frac{1}{\pi}$. Pelo Teorema 2.2.2, a série soma destas duas séries é convergente e temos

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{\pi^n} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\pi^n} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} + \frac{\frac{1}{\pi^2}}{1 - \frac{1}{\pi}} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} + \frac{1}{\pi(\pi - 1)}.$$

3. a) O número racional $0,\overline{5} = 0,55555\ldots$ pode ser escrito na forma de fracção usando as séries geométricas.

$$0,\overline{5} = 0,5 + 0,05 + \ldots = \frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \cdots$$

Temos uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{10}$ e primeiro termo $\frac{5}{10}$. Portanto,

$$0,\overline{5} = \frac{\frac{5}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{9}.$$

b) O número racional $0,\overline{34} = 0,343434\ldots$ pode ser escrito na forma de fracção usando as séries geométricas.

$$0,\overline{34} = 0,34 + 0,0034 + \ldots = \frac{34}{10^2} + \frac{34}{10^4} + \frac{34}{10^6} + \frac{34}{10^8} + \cdots$$

Temos uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{10^2}$ e primeiro termo $\frac{34}{10^2}$. Portanto,

$$0,\overline{34} = \frac{\frac{34}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{34}{99}.$$

c) Podemos escrever o número $1,\overline{345}$ na seguinte forma

$$1,\overline{345} = 1 + 0,345 + 0,000345 + \ldots = 1 + \frac{345}{10^3} + \frac{345}{10^6} + \frac{345}{10^9} + \frac{345}{10^{12}} + \cdots.$$

Depois do primeiro termo, temos uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{10^3}$ e primeiro termo $\frac{345}{10^3}$. Portanto,

$$1,\overline{345} = 1 + \frac{\frac{345}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} = 1 + \frac{345}{999} = \frac{1344}{999}.$$

d) Podemos escrever o número $0,324\overline{101}$ na seguinte forma

$$0,324\overline{101} = 0,324 + 0,000101 + 0,000000101 + \ldots = \frac{324}{10^3} + \frac{101}{10^6} + \frac{101}{10^9} + \frac{101}{10^{12}} + \cdots.$$

Depois do primeiro termo, temos uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{10^3}$ e primeiro termo $\frac{101}{10^6}$. Portanto,

$$0.324\overline{101} = \frac{324}{10^3} + \frac{\frac{101}{10^6}}{1 - \frac{1}{10^3}} = \frac{324}{10^3} + \frac{101}{999000} = \frac{323777}{999000}.$$

4. a) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{3n^5+2n+1}$ é de termos positivos. Estudemos a série por comparação com a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, que é convergente por ser de Dirichlet com $\alpha = 3$:

$$\lim \frac{\dfrac{2n^2-1}{3n^5+2n+1}}{\dfrac{1}{n^3}} = \lim \frac{(2n^2-1)\,n^3}{3n^5+2n+1} = \lim \frac{2n^5-n^3}{3n^5+2n+1} = \frac{2}{3}.$$

Como $\dfrac{2}{3} \in \mathbb{R}^+$, podemos concluir, pelo Corolário 2 do Critério Geral de Comparação, que as séries têm a mesma natureza. Então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{3n^5+2n+1}$ é convergente.

b) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$ é de termos positivos porque $\dfrac{1}{n} \in \,]0,1] \subset \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Vamos estudar a sua natureza por comparação com a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que sabemos ser convergente (é de Dirichlet com $\alpha = 2$). O limite

$$\lim \frac{\left(\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^2}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}\right]^2 = 1$$

pertence a $\mathbb{R}^+$, portanto, pelo Corolário 2 do Critério Geral de Comparação, as duas séries têm a mesma natureza. Podemos concluir que a série dada é convergente.

c) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^7+1)}{n^2}$ é de termos positivos. Estudemos a série por comparação com a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, que é convergente (é de Dirichlet com $\alpha = \dfrac{3}{2}$):

$$\lim \frac{\dfrac{\log(n^7+1)}{n^2}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim \frac{n^{3/2}\log(n^7+1)}{n^2} = \lim \frac{\log(n^7+1)}{n^{1/2}} = 0.$$

Visto que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ é convergente, o facto de este limite ser zero permite-nos concluir, pelo Corolário 3 do Critério Geral de Comparação, que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^7+1)}{n^2}$ é convergente.

Nota: Para o cálculo do limite $\lim \dfrac{\log(n^7+1)}{n^{1/2}}$ usamos a Regra de Cauchy aplicada ao cálculo de

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(x^7+1)}{x^{1/2}}$ onde surge a indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log(x^7+1))'}{(x^{1/2})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{7x^6}{x^7+1}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{14x^6\sqrt{x}}{x^7+1} = 0.$$

d) Comecemos por reescrever o termo geral da série:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+\frac{1}{n}}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{n\left(\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}\right)} = \frac{1}{n\left(\sqrt{\frac{n^2+1}{n}}+\sqrt{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3}}. \end{aligned}$$

Como $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a série é de termos positivos. Comparemos com a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$, que é convergente por ser de Dirichlet com $\alpha = \dfrac{3}{2}$.

O limite

$$\lim \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3}}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3}} = \frac{1}{2}$$

é finito e diferente de zero, pelo que, pelo Corolário 2 do Critério Geral de Comparação, as duas séries têm a mesma natureza, ou seja, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{n}\right)$ é convergente.

e) A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ é de termos positivos. Tendo em conta que

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2} = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}$$

podemos escrever a série na forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}$. Vamos estudar esta série comparando-a com a série harmónica:

$$\lim \frac{\dfrac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}}{\dfrac{1}{n}} = \lim \frac{n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2} = \frac{1}{4}.$$

Como $\frac{1}{4} \in \mathbb{R}^+$, podemos concluir, pelo Corolário 2 do Critério Geral de Comparação, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}$ tem a mesma natureza da série harmónica, pelo que é divergente.

f) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2+4}$ não é de termos positivos. Sabemos que

$$0 < \left|\frac{\cos(n)}{n^2+4}\right| \leq \frac{1}{n^2+4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Vamos estudar a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$ comparando-a com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que sabemos ser convergente (é uma série de Dirichlet com $\alpha = 2$):

$$\lim \frac{\frac{1}{n^2+4}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^2}{n^2+4} = 1.$$

Como $1 \in \mathbb{R}^+$, resulta do Corolário 2 do Critério Geral de Comparação, que as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ têm a mesma natureza. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$ é convergente. Tendo em conta a desigualdade (2.5), podemos concluir, pelo Critério Geral de Comparação, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos(n)}{n^2+4}\right|$ é convergente, isto é, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2+4}$ é absolutamente convergente.

g) Recordando que

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

obtemos

$$n^2 + 10\cos(n) \geq n^2 - 10, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que implica que,

$$n^2 + 10\cos(n) \geq n^2 - 10 > 0, \quad \forall n \geq 4.$$

Consequentemente,

$$0 < \frac{1}{n^2+10\cos(n)} \leq \frac{1}{n^2-10}, \quad \forall n \geq 4.$$

A série $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2-10}$ é de termos positivos e a sua natureza pode ser estudada por comparação com a série $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que sabemos ser convergente. Como

$$\lim \frac{\frac{1}{n^2-10}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^2}{n^2-10} = 1$$

é um número real positivo, as duas séries têm a mesma natureza, pelo que a série $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2-10}$ é convergente.

Pelo Critério Geral de Comparação a série $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2+10\cos(n)}$ é convergente. Esta série difere da série dada apenas num número finito de termos, pelo que tem a mesma natureza da série inicial. Podemos concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+10\cos(n)}$ é convergente.

h) Seja (a_n) o termo geral da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Temos

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{2}{\sqrt{n}}, & \text{se } n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2n-1}}$. É uma série de termos positivos. Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ que é divergente por ser de Dirichlet com $\alpha = \frac{1}{2}$. O limite

$$\lim \frac{\frac{2}{\sqrt{2n-1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{2n-1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

pertence a $\mathbb{R}^+$, portanto, pelo Corolário 2 do Critério Geral de Comparação, as duas séries têm a mesma natureza. Podemos concluir que a série dada é divergente.

5. a) A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{n}$ é alternada. Comecemos por estudar a série dos módulos: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n)}{n}$ comparando-a com a série harmónica:

$$\lim \frac{\frac{\log(n)}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim \log(n) = +\infty.$$

Este resultado permite-nos concluir, pelo Corolário 3 do Critério Geral de Comparação, que a série dos módulos é divergente. Sendo a série inicial alternada vamos aplicar o Critério de Leibniz:

(i) $\lim \frac{\log(n)}{n} = 0$ (basta reparar que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ que se pode levantar usando a Regra de Cauchy: $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$);

(ii) $\frac{\log(n)}{n} > 0$, $\forall n > 1$;

(iii) A função $f(x) = \frac{\log(x)}{x}$ é decrescente, em $]e, +\infty[$. Com efeito, $f'(x) = \frac{1-\log(x)}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x > e$, o que implica que $\left(\frac{\log(n)}{n}\right)$ é decrescente em $\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.

Podemos então concluir que a série alternada é convergente. Como a sua série dos módulos é divergente, a série dada é simplesmente convergente, tendo em conta a Definição 2.4.1.

Nota: As séries $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n)}{n}$ e $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log(n)}{n}$ têm a mesma natureza porque diferem apenas num número finito de termos.

b) A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{e^n + e^{-n}}$ é alternada, dado que $\frac{2}{e^n + e^{-n}} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Comecemos por estudar a série dos módulos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{2}{e^n + e^{-n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n + e^{-n}}.$$

Temos:

$$0 < \frac{2}{e^n + e^{-n}} < \frac{2}{e^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ é geométrica de razão $r = \frac{1}{e}$. É convergente porque $|r| = \frac{1}{e} < 1$. Pelo Teorema 2.2.2, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{e^n}$ também é convergente. Pelo Critério Geral de Comparação, tendo em atenção a desigualdade (2.6), a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2e^n}{e^{2n}+1}$ é convergente. Como esta é a série dos módulos da série dada, podemos concluir, tendo em consideração a Definição 2.4.1, que a série inicial é absolutamente convergente.

c) A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(3n)}$ é alternada porque $a_n = \frac{1}{\log(3n)} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Consideremos a sua série dos módulos, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(3n)}$. Estudemos a convergência desta série comparando-a com a série harmónica:

$$\lim \frac{\frac{1}{\log(3n)}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{\log(3n)} = +\infty.$$

Resulta, pelo Corolário 4 do Critério Geral de Comparação, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(3n)}$ é divergente. Sendo a série inicial alternada vamos aplicar o Critério de Leibniz:

(i) $\lim \frac{1}{\log(3n)} = 0$;

(ii) $\frac{1}{\log(3n)} > 0$, $\forall n \geq 1$;

(iii) A sucessão $(\log(3n))$ é crescente, portanto, $\left(\frac{1}{\log(3n)}\right)$ é uma sucessão decrescente em $\mathbb{N}$.

Podemos então concluir que a série alternada é convergente. Como a sua série dos módulos é divergente, a série dada é simplesmente convergente, tendo em consideração a Definição 2.4.1.

d) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$ é alternada, porque $a_n = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{n} > 0$, $\forall n \geq 1$ (relembre que $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{\pi}{2}$, $\forall n \geq 1$). A série dos módulos é a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$. Consideremos a série convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (é de Dirichlet com $\alpha = 2$). O limite

$$\lim \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{n}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}} = 1$$

é finito e diferente de zero, portanto, pelo Corolário 2 do Critério Geral de Comparação, as duas séries têm a mesma natureza; consequentemente, a série dos módulos é convergente, pelo que, tendo em consideração a Definição 2.4.1, a série dada é absolutamente convergente.

e) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{e^{2n+1}}$ é alternada porque $\dfrac{3^n}{e^{2n+1}} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Estudemos a série dos módulos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{3^n}{e^{2n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{e^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{3}{e^2}\right)^n = \frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{e^2}\right)^n.$$

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{e^2}\right)^n$ é geométrica de razão $r = \dfrac{3}{e^2}$. Como $|r| < 1$, a série é convergente. Sabemos, pelo Teorema 2.2.2, que o produto de uma constante por uma série convergente é convergente, portanto, a série dos módulos é convergente. Então a série dada é absolutamente convergente, novamente tendo em consideração a Definição 2.4.1.

f) Tendo em atenção que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ par} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

podemos escrever a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{n+1}}$ na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

Esta série é alternada. A série dos módulos é a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, que sabemos ser divergente. Estudemos a série dada aplicando o Critério de Leibniz:

(i) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$;

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(iii) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, portanto, a sucessão é decrescente.

Podemos então concluir que a série alternada é convergente. Como a série dos módulos é divergente, concluímos que a série dada é simplesmente convergente.

6. a) A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ é alternada. A série dos módulos: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é a série harmónica que é divergente.

Sendo a série inicial alternada vamos aplicar o Critério de Leibniz:

(i) $\lim \frac{1}{n} = 0$;

(ii) $\frac{1}{n} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(iii) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, portanto, a sucessão é decrescente.

Podemos então concluir que a série alternada é convergente. Como a sua série dos módulos é divergente, a série dada é simplesmente convergente.

b) Sabemos, pelo Corolário do Teorema 2.3.2, que $|S - S_n| \leq a_{n+1}$. É suficiente exigir que $a_{n+1} < \frac{1}{1000}$, isto é, $n > 999$. Portanto, a soma pretendida é S_{1000}.

c) Pelo corolário referido na alínea anterior, $|S - S_5| \leq a_6 = \frac{1}{6}$ e este valor é um majorante do erro.

7. a) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n \, n!}$ é de termos positivos. Sendo (a_n) o termo geral da série, temos:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{\pi^{n+1}\,(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{\pi^n\, n!}} = \lim \frac{(n+1)^{n+1}\pi^n\, n!}{n^n\, \pi^{n+1}\,(n+1)!}$$

$$= \lim \frac{(n+1)(n+1)^n\, n!}{n^n\, \pi\,(n+1)n!} = \lim \frac{1}{\pi}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{e}{\pi}.$$

Como este valor é menor que 1, o Critério de D'Alembert garante que a série é convergente.

b) A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\, 2^n}{4n^3+1}$ é de termos positivos. Sendo (a_n) o termo geral da série, temos:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{(n+1)2^{n+1}}{4(n+1)^3+1}}{\dfrac{n\,2^n}{4n^3+1}} = \lim \frac{(n+1)2^{n+1}\,(4n^3+1)}{n2^n(4(n+1)^3+1)}$$

$$= \lim \frac{2(n+1)(4n^3+1)}{n(4(n+1)^3+1)} = \lim \frac{(n+1)\,(8n^3+2)}{n\,(4n^3+12n^2+12n+5)} = 2$$

Este limite tem um valor maior que 1, portanto, pelo Critério de D'Alembert, a série é divergente.

c) Tendo em atenção que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! - n!}{n!\,(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)n! - n!}{n!\,(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!},$$

seja (a_n) o termo geral da série. Como

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{n+1}{(n+2)!}}{\dfrac{n}{(n+1)!}} = \lim \frac{(n+1)(n+1)!}{n(n+2)!} = \lim \frac{n+1}{n(n+2)} = 0 < 1$$

resulta, pelo Critério de D'Alembert, que a série é convergente.

d) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n+2)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (3n+1)}$ é de termos positivos. Sendo (a_n) o termo geral da série, temos:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n+2)(2n+4)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (3n+1)(3n+4)}}{\dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n+2)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (3n+1)}} = \lim \frac{2n+4}{3n+4} = \frac{2}{3}.$$

Como este valor é menor que 1, podemos concluir, pelo Critério de D'Alembert, que a série é convergente.

e) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n \sqrt{3n+2}}$ é de termos positivos. Sendo (a_n) o termo geral da série, temos:

$$\begin{aligned}
\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim \frac{\dfrac{(n+2)!}{(n+1)^{n+1}\sqrt{3n+5}}}{\dfrac{(n+1)!}{n^n \sqrt{3n+2}}} = \lim \frac{(n+2)!\, n^n \sqrt{3n+2}}{(n+1)!\,(n+1)^{n+1}\sqrt{3n+5}} \\
&= \lim \frac{(n+2)n^n \sqrt{3n+2}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{3n+5}} = \lim \frac{n+2}{n+1}\sqrt{\frac{3n+2}{3n+5}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

Como este valor é menor que 1, o Critério de D'Alembert garante que a série é convergente.

f) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n!}{n! + n^n}$ é de termos positivos. Prova-se por indução que $3^n < n!$, $\forall n \geq 7$, o que implica que

$$\frac{3^n + n!}{n! + n^n} \leq \frac{2\,n!}{n^n}, \quad \forall n \geq 7.$$

Seja (a_n) o termo geral da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,n!}{n^n}$. Pelo Critério de D'Alembert, a série converge pois

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{2\,(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{2\,n!}{n^n}} = \lim \frac{(n+1)!\; n^n}{n!\;(n+1)^{n+1}} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1.$$

Pelo Critério Geral de Comparação, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n!}{n! + n^n}$ é convergente.

Nota: Duas séries que diferem apenas num número finito de termos têm a mesma natureza.

g) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2\,n)! + 2^n}$ é de termos positivos. Temos a majoração

$$\frac{n!}{(2\,n)! + 2^n} \leq \frac{n!}{(2\,n)!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Estudemos a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2\,n)!}$. Sendo (a_n) o termo geral desta série, temos:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{(n+1)!}{(2\,(n+1))!}}{\dfrac{n!}{(2\,n)!}} = \lim \frac{(n+1)!\,(2\,n)!}{n!\,(2\,(n+1))!} = \lim \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} = 0$$

Como este valor é menor que 1, podemos concluir, pelo Critério de D'Alembert, que a série é convergente. Pelo Critério Geral de Comparação, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2\,n)! + 2^n}$ é convergente.

h) A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! + 3n}{((n+1)!)^2}$ é de termos positivos. Consideremos as séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{((n+1)!)^2}$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{((n+1)!)^2}$. Se estas séries forem convergentes, resulta do Teorema 2.2.2 que a série soma é convergente. Mas

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{(n+1)!}{((n+2)!)^2}}{\dfrac{n!}{((n+1)!)^2}} = \lim \frac{(n+1)!((n+1)!)^2}{n!\,((n+2)!)^2} = \lim \frac{n+1}{(n+2)^2} = 0 < 1,$$

donde concluímos, pelo Critério de D'Alembert, que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente. De modo análogo se conclui que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ é convergente:

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{\dfrac{3(n+1)}{((n+2)!)^2}}{\dfrac{3n}{((n+1)!)^2}} = \lim \frac{(n+1)((n+1)!)^2}{n\,((n+2)!)^2} = \lim \frac{n+1}{n(n+2)^2} = 0 < 1$$

A série em estudo é a série soma sendo, portanto, convergente.

8. a) Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$ e seja (a_n) o seu termo geral. Verifica-se que

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}} = \lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1,$$

portanto, pelo Critério da Raiz de Cauchy, a série dada é convergente.

b) A série $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{n^2}$ é de termos positivos. Temos:

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{1}{e}\right)^{n^2}} = \lim \left(\frac{1}{e}\right)^{n} = 0.$$

Como este valor é menor que 1, o Critério da Raiz de Cauchy garante que a série é convergente.

c) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)^n$ é de termos positivos. Constatamos que:

$$\lim \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)^n} = \lim(\sqrt[n]{2} - 1) = 0,$$

visto que $\lim \sqrt[n]{2} = 1$. Como este valor é menor que 1, o Critério da Raiz de Cauchy permite-nos concluir que a série é convergente.

d) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{n}\right)\right)^n$ é de termos positivos porque $0 < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Aplicando o Critério da Raiz de Cauchy concluímos que a série é convergente. De facto:

$$\lim \sqrt[n]{\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{n}\right)\right)^n} = \lim \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1.$$

e) A série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{n}{4n+1}\right)^n$ é de termos positivos. A sucessão

$$\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{n}{4n+1}\right)^n} = \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{n}{4n+1}$$

tem dois sublimites: $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$. Como o limite superior é menor que 1, resulta, pelo Critério da Raiz que a série é convergente.

f) A série $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-2}{3n^2}\right)^n$ é de termos positivos e difere da série dada apenas num termo. Podemos afirmar que as duas séries têm a mesma natureza. Pelo Critério da Raiz de Cauchy, a série converge porque

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n^2-2}{3n^2}\right)^n} = \lim \frac{n^2-2}{3n^2} = \frac{1}{3} < 1.$$

9. a) A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n^n)}$ é alternada, porque $a_n = \frac{1}{\log(n^n)} > 0$, $\forall n > 2$; o seu termo geral pode escrever-se na forma $\frac{(-1)^n}{n \log(n)}$. Comecemos por estudar a série dos módulos, $\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n \log(n)}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)}$, aplicando o Critério do Integral. Seja $f : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \frac{1}{x \log(x)}$.

(i) f é contínua em $[2, +\infty[$;

(ii) $f(x) > 0$, $\forall x \in [2, +\infty[$;

(iii) f é decrescente em $[2, +\infty[$, pois

$$f'(x) = -\frac{(x \log(x))'}{x^2 \log^2(x)} = -\frac{\log(x) + x\frac{1}{x}}{x^2 \log^2(x)} = -\frac{\log(x) + 1}{x^2 \log^2(x)} < 0, \quad \forall x \in \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[\supset [2, +\infty[.$$

Estamos nas condições de aplicar o Critério do Integral, pelo que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)}$ e o integral $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log(x)}\, dx$ têm a mesma natureza. Estudemos a natureza do integral impróprio. Por definição,

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log(x)}\, dx &= \lim_{x \to +\infty} \int_2^x \frac{\frac{1}{t}}{\log(t)}\, dt = \lim_{x \to +\infty} \Big[\log(\log(t))\Big]_2^x \\ &= \lim_{x \to +\infty} (\log(\log(x)) - \log(\log 2)) = +\infty,\end{aligned}$$

pelo que o integral é divergente. Podemos então concluir que a série dos módulos é divergente. Em consequência, a série em estudo, se for convergente, é simplesmente convergente. Dado que a série é alternada e

(i) $\frac{1}{n \log(n)} > 0$

(ii) $\lim \frac{1}{n \log(n)} = 0$;

(iii) Pelo que foi verificado na condição (iii) do Critério do Integral, a sucessão

$$\left(\frac{1}{n \log(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}}$$

é decrescente.

Resulta do Critério de Leibniz que a série alternada é convergente. Pelo estudo feito sobre a série dos módulos, podemos afirmar que a série é simplesmente convergente, tendo em conta a Definição 2.4.1.

b) Calculemos o limite do termo geral da série:

$$\lim\left(\frac{n^2}{\sqrt{n^5+1}} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right) = \lim \frac{n^2}{\sqrt{n^5+1}} + \lim\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim\sqrt{\frac{n^4}{n^5+1}} + e^2 = e^2.$$

Como o termo geral da série não converge para zero, a série é divergente (ver Teorema 2.2.1).

c) Tendo em atenção que $0 < 1 - \frac{1}{n^2} < 1$, $\forall n \geq 2$, concluímos que $\log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) < 0$, $\forall n \geq 2$. Assim, a série é de termos negativos. Consideremos a série dos módulos

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|\log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Vamos comparar esta série com a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que é convergente por ser de Dirichlet com $\alpha = 2$. O limite

$$\lim \frac{-\log\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^2}} = -\lim\ n^2 \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\lim\ \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = -\log\left(e^{-1}\right) = 1,$$

é finito e diferente de zero, portanto, pelo Corolário 2 do Critério Geral de Comparação, as séries têm a mesma natureza, pelo que a série dos módulos é convergente. Então, pelo Teorema 2.4.1, a série dada é convergente, e a convergência é absoluta (ver a Definição 2.4.1).

d) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)+2^n}{n+5^n}$ é de termos positivos porque $-1 \leq \operatorname{sen}(n) \leq 1$ e $2^n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Além disso, as desigualdades anteriores permitem-nos a seguinte majoração:

$$0 < \frac{\operatorname{sen}(n)+2^n}{n+5^n} < \frac{1+2^n}{5^n} = \frac{1}{5^n} + \frac{2^n}{5^n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{2}{5}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ é convergente por ser geométrica de razão $r = \dfrac{1}{5}$ e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ é convergente por ser geométrica de razão $r = \dfrac{2}{5}$. Então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

é convergente por ser a soma de duas séries convergentes. Pelo Critério Geral de Comparação, a série dada é convergente. Como é série de termos positivos a convergência é absoluta.

e) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{n-1}}{n^n}$ é alternada porque $a_n = \dfrac{e^{n+1}}{n^n} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Comecemos por estudar a série dos módulos, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n-1}}{n^n}$, usando o Critério de D'Alembert:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{e^{n+2}}{(n+1)^{n-1}}}{\dfrac{e^{n+1}}{n^n}} = \lim \frac{e^{n-2}n^n}{e^{n+1}(n+1)^{n-1}} = \lim \frac{e}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 0 \times \frac{1}{e} = 0.$$

Como este valor é menor que 1 podemos concluir que a série dos módulos é convergente. Em consequência, pelo Teorema 2.4.1, a série dada é convergente, e a convergência é absoluta (ver Definição 2.4.1).

f) Para estudar a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \frac{1}{n}}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + \frac{1}{n}}{n}$ vamos começar por reescrever o seu termo geral:

$$\frac{(-1)^n + \dfrac{1}{n}}{n} = (-1)^n \cdot \frac{n+(-1)^n}{n^2}$$

Seja $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n^2}$. É evidente que $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, portanto a série em estudo é alternada. Estudemos a série dos módulos, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n^2}$, por comparação com a série harmónica. O limite

$$\lim \frac{\dfrac{n+(-1)^n}{n^2}}{\dfrac{1}{n}} = \lim \frac{n(n+(-1)^n)}{n^2} = \lim \frac{n+(-1)^n}{n} = 1$$

pertence a $\mathbb{R}^+$, portanto, pelo Corolário 2 do Critério Geral de Comparação, as duas séries têm a mesma natureza. Como a série harmónica é divergente, a série dos módulos é divergente.

Consideremos as séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. Tendo em conta que $\dfrac{(-1)^n + \dfrac{1}{n}}{n} = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ e que as duas séries anteriores são convergentes (a primeira por ser a série harmónica alternada e a segunda por ser de Dirichlet com $\alpha = 2$), a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n + \dfrac{1}{n}}{n}$ é convergente por ser a soma de duas séries convergentes. Pelo estudo feito sobre a série dos módulos, podemos afirmar que a série é simplesmente convergente, de acordo com a Definição 2.4.1.

Nota: O Critério de Leibniz não é aplicável porque a sucessão $\left(\dfrac{n+(-1)^n}{n^2}\right)$ não é monótona (ver Figura 2.6).

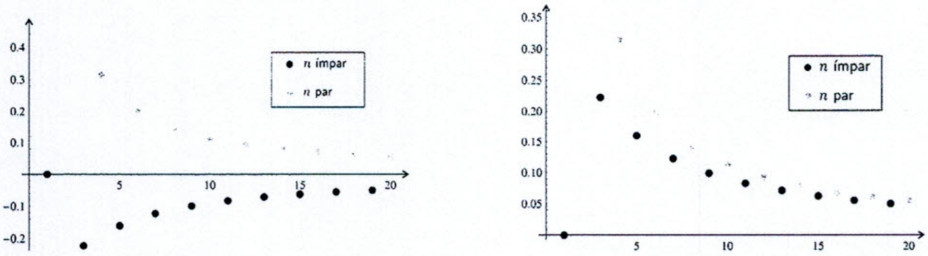


Figura 2.6: As sucessões $(-1)^n \dfrac{n+(-1)^n}{n^2}$ e $\dfrac{n+(-1)^n}{n^2}$.

g) Tendo em atenção que $1 + \dfrac{1}{2^n} > 1$, $\forall n \geq 1$, concluímos que $\log\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right) > 0$, $\forall n \geq 1$. Assim, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)$ é de termos positivos. Comparemos esta série com a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$, que é convergente por ser uma série geométrica de razão $r = \dfrac{1}{2}$. O limite

$$\lim \frac{\log\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)}{\dfrac{1}{2^n}} = \lim\ 2^n \log\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = \lim\ \log\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n} = \log(e) = 1$$

é finito e diferente de zero, portanto, pelo Corolário 2 do Critério Geral de Comparação, as séries têm a mesma natureza, pelo que a série é convergente. Sendo uma série de termos positivos a convergência é absoluta.

h) A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sqrt[n]{n}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$ é alternada. Comecemos por estudar a série dos módulos aplicando o Critério da Raiz de Cauchy:

$$\lim \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n} = \lim\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) = 0$$

visto que $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Como este valor é menor que 1, a série dos módulos é convergente. Resulta, pelo Teorema 2.4.1, que a série dada é convergente, e a convergência é absoluta pela Definição 2.4.1.

i) Para estudar a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{1-(-1)^n\, n^2}$ vamos começar por reescrever o seu termo geral:

$$\frac{(-1)^n}{1-(-1)^n\, n^2} = \frac{1}{(-1)^n - n^2} = \frac{-1}{n^2 + (-1)^{n+1}}$$

Podemos então escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-(-1)^n\, n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2 + (-1)^{n+1}}.$$

Note-se que o termo geral da série é negativo, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Estudemos a série dos módulos, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + (-1)^{n+1}}$, por comparação com a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, que sabemos ser convergente por ser de Dirichlet com $\alpha = 2$. O limite

$$\lim \frac{\dfrac{1}{n^2+(-1)^{n+1}}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^2}{n^2+(-1)^{n+1}} = \lim \frac{1}{1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}} = 1$$

pertence a $\mathbb{R}^+$, portanto, pelo Corolário 2 do Critério Geral de Comparação, as duas séries têm a mesma natureza. Podemos concluir que a série dos módulos é convergente. Portanto, pelo Teorema 2.4.1, a série dada é convergente, e a convergência é absoluta (ver Definição 2.4.1).

j) Consideremos as séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n + 4}{n + 4^n}$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3}{n+2}\right)^{2n}$. A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é de termos positivos; de facto,

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{5}{n+4^n} & \text{se } n \text{ par} \\[2mm] \dfrac{3}{n+4^n} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Verifica-se que $a_n \leq \dfrac{5}{4^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5}{4^n}$ é geométrica convergente porque a razão é $r = \dfrac{1}{4}$. Mas, visto que $a_n \leq \dfrac{5}{4^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Estudemos a série de termos positivos, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, pelo Critério da Raiz de Cauchy.

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{3}{n+2}\right)^{2n}} = \lim \left(\frac{3}{n+2}\right)^2 = 0 < 1,$$

o que implica que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente.

Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes, então a série dada é convergente. Tratando-se de uma série de termos positivos, a série é absolutamente convergente.

k) O termo geral da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ não é um infinitésimo. De facto,

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}.$$

O Teorema 2.2.1 garante agora que a série é divergente.

l) Estudemos a convergência da série $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\log(n))^3}$ usando o Critério do Integral. Seja $f(x) = \frac{1}{x \log^3(x)}$.

Temos:

(i) $f(x) > 0$, $\forall x \geq 2$;

(ii) f é contínua, $\forall x \geq 2$;

(iii) f é decrescente em $[2, +\infty[$; com efeito,

$$f'(x) = -\frac{\log^3(x) + 3x \cdot \frac{1}{x} \log^2(x)}{x^2 \log^6(x)} = -\frac{\log(x) + 3}{x^2 \log^4(x)} < 0, \quad \forall x > 1$$

e, em particular, $f'(x) < 0$, $\forall x \geq 2$.

Então a série numérica $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^3(n)}$ e o integral impróprio de 1ª espécie $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^3(x)}\,dx$ têm a mesma natureza. Mas

$$\begin{aligned}
\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^3(x)}\,dx &= \lim_{x \to +\infty} \int_2^x \frac{1}{t \log^3(t)}\,dt = \lim_{x \to +\infty} \int_2^x \frac{1}{t} (\log(t))^{-3}\,dt \\
&= \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{1}{2 \log^2(t)}\right]_2^x \\
&= \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{2\log^2(x)} + \frac{1}{2\log^2(2)}\right) = \frac{1}{2\log^2(2)},
\end{aligned}$$

ou seja, o integral impróprio é convergente, o mesmo acontecendo à série. Por ser de termos positivos, converge absolutamente.

m) Tendo em conta que se $\dfrac{1}{x^2} > 0$, $\forall x \neq 0$, então o integral é positivo e podemos afirmar que a série é de termos positivos. Como

$$\int_n^{n+2} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_n^{n+2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$$

podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+2} \frac{1}{x^2}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Esta série é telescópica – série da forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n - \alpha_{n+k})$, com $k \in \mathbb{N}$ – em que $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ e $k = 2$. Sabemos que se (α_n) for uma sucessão convergente então a série telescópica converge. Como, neste caso, $\alpha_n \to 0$ podemos afirmar que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$ é convergente. Sendo de termos positivos, converge absolutamente.

n) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + \sqrt[3]{n+1}}$ é alternada. A série dos módulos é a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt[3]{n+1}}$ que podemos comparar com a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ que é divergente por ser de Dirichlet com $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Como o valor do limite

$$\lim \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt[3]{n+1}}}{\dfrac{1}{n^{1/2}}} = \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt[3]{n+1}} = 1$$

pertence a $\mathbb{R}^+$, o Corolário 2 do Critério Geral de Comparação garante que as séries têm a mesma natureza, pelo que podemos concluir que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt[3]{n+1}}$ é divergente.

Estudemos a série alternada aplicando o Critério de Leibniz:

(i) $\displaystyle\lim \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt[3]{n+1}} = 0$;

(ii) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt[3]{n+1}} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(iii) A sucessão $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt[3]{n+1}}\right)$ é decrescente, pois,

$$\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt[3]{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt[3]{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt[3]{n+1} - (\sqrt{n+2} + \sqrt[3]{n+2})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt[3]{n+2})(\sqrt{n+1} + \sqrt[3]{n+1})} < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Estão satisfeitas as condições do critério, portanto, a série é convergente. Como a série dos módulos é divergente, concluímos que a série alternada é simplesmente convergente.

o) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$ é de termos positivos. Vamos estudar esta série comparando-a com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$, que sabemos ser convergente, pois é de Dirichlet com $\alpha = \dfrac{3}{2}$. O limite

$$\lim \frac{\dfrac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim \frac{n^{3/2}}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{2}$$

pertence a $\mathbb{R}^+$. O Corolário 2 do Critério Geral de Comparação garante que as duas séries têm a mesma natureza, portanto, a série dada é convergente. Sendo de termos positivos, a convergência é absoluta.

p) A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ é alternada, porque $1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) > 0$, $\forall n \geq 1$. A série dos módulos é a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$. Como o valor do limite

$$\lim \frac{1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

pertence a $\mathbb{R}^+$, o Corolário 2 do Critério Geral de Comparação garante que as duas séries têm a mesma natureza. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ é convergente por ser de Dirichlet com $\alpha = 2$, a série dos módulos é convergente. Portanto, pelo Teorema 2.4.1, a série dada é convergente, e a convergência é absoluta (ver Definição 2.4.1).

q) A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, 2^n \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$ é alternada, porque $a_n = 2^n \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{3^n}\right) > 0$, $\forall n \geq 1$ (note-se que $0 < \dfrac{1}{3^n} < \dfrac{\pi}{2}$, $\forall n \geq 1$). A série dos módulos é a série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$. Tendo em conta que $\operatorname{sen}(x) \leq x$, $\forall x > 0$, temos

$$2^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3^n}\right) \leq 2^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. É uma série geométrica de razão $r = \dfrac{2}{3}$, portanto, convergente. Pelo Critério Geral de Comparação, a série dos módulos é convergente, pelo que a série dada é absolutamente convergente.

r) A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n!\,\sqrt{n}}{n^n\,\sqrt{n+1}}$ é alternada porque $\dfrac{n!\,\sqrt{n}}{n^n\,\sqrt{n+1}} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Estudemos a natureza da série dos módulos, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,\sqrt{n}}{n^n\,\sqrt{n+1}}$, usando o Critério de D'Alembert. Sendo $a_n = \frac{n!\,\sqrt{n}}{n^n\,\sqrt{n+1}}$:

$$\begin{aligned}
\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim \frac{\dfrac{(n+1)!\,\sqrt{n+1}}{(n+1)^{n+1}\,\sqrt{n+2}}}{\dfrac{n!\,\sqrt{n}}{n^n\,\sqrt{n+1}}} = \lim \frac{(n+1)!\,n^n\,(n+1)}{n!\,(n+1)^{n+1}\,\sqrt{n(n+2)}} \\
&= \lim \frac{(n+1)^2\,n^n}{(n+1)^{n+1}\,\sqrt{n(n+2)}} = \lim \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

Como este valor é menor que 1 podemos concluir que a série é convergente. Como é a série dos módulos da série inicial podemos afirmar que a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!\,\sqrt{n}}{n^n\,\sqrt{n+1}}$ é absoluta.

s) A série $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}+1)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ é de termos positivos porque $0 < \frac{1}{n^2} < \frac{\pi}{2}$. Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, que sabemos ser convergente por se tratar de uma série de Dirichlet com $\alpha = \frac{3}{2}$. O limite

$$\lim \frac{(\sqrt{n}+1)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}} = 1$$

pertence a $\mathbb{R}^+$, portanto, pelo Corolário 2 do Critério Geral de Comparação, as duas séries têm a mesma natureza. Podemos concluir que a série é convergente. Como é de termos positivos, a convergência é absoluta.

t) A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n!)}$ é de termos positivos. Sabendo que $n! < n^n$ e que a função logarítmica é crescente temos

$$0 < \frac{1}{\log(n^n)} = \frac{1}{n\,\log(n)} < \frac{1}{\log(n!)},\quad \forall n \geq 2.$$

Provámos no exercício 9a) que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,\log(n)}$ é divergente. Pelo Critério Geral de Comparação podemos concluir que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n!)}$ é divergente.

10. a) A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\cos(n\,\pi)}{\sqrt{n^3+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n\,\pi)}{\sqrt{n^3+1}}$ é alternada porque $\cos(n\,\pi) = (-1)^n$ e $\frac{n}{\sqrt{n^3+1}} > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Estudemos a série dos módulos, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$, comparando-a com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$, que sabemos ser divergente por ser de Dirichlet com $\alpha = \frac{1}{2}$. O limite

$$\lim \frac{\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}}{\frac{1}{n^{1/2}}} = \lim \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+1}} = 1$$

é finito e diferente de zero, portanto, pelo Corolário 2 do Critério Geral de Comparação, as duas séries têm a mesma natureza. Podemos concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$ é divergente.

Estudemos a série alternada aplicando o Critério de Leibniz:

(i) $\lim \frac{n}{\sqrt{n^3+1}} = 0$;

(ii) $\frac{n}{\sqrt{n^3+1}} > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$;

(iii) Para verificarmos que é uma sucessão decrescente consideremos a função real de variável real $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$. A derivada de f é $f'(x) = \frac{-x^3+2}{2(x^3+1)\sqrt{x^3+1}}$, portanto, $f'(x) < 0, \ \forall x > \sqrt[3]{2}$. Então a sucessão é decrescente em $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Estão reunidas as condições do critério, portanto, podemos concluir que a série alternada é convergente. Como a série dos módulos é divergente, podemos afirmar que a série dada é simplesmente convergente.

b) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$ é de termos positivos. Vamos estudá-la usando o Critério de D'Alembert. Sendo (a_n) o termo geral da série:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{(n+1)!}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)(2n+3)}}{\dfrac{n!}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}} = \lim \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2}$$

Este limite é menor que 1, portanto, pelo Critério de D'Alembert podemos concluir que a série é convergente. A convergência é absoluta por ser de termos positivos.

c) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos^2(n)}{\sqrt{n}}$ é de termos positivos. É válida, em $\mathbb{N}$, a desigualdade

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1+\cos^2(n)}{\sqrt{n}}.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente por ser de Dirichlet com $\alpha = \frac{1}{2}$, o Critério Geral de Comparação permite-nos concluir que a série dada é divergente.

d) A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n\,(n+1)!}{(n+1)^n}$ é de termos positivos. Vamos estudá-la usando o Critério de D'Alembert. Sendo a_n o termo geral da série:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{3^{n+1}\,(n+2)!}{(n+2)^{n+1}}}{\dfrac{3^n\,(n+1)!}{(n+1)^n}} = 3 \lim \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \frac{3}{e}$$

Este limite é maior que 1, portanto, pelo Critério de D'Alembert podemos concluir que a série é divergente.

e) Sabemos que a função $\operatorname{sen}(x)$ é ímpar, portanto, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ é alternada e podemos escrevê-la na forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$. Comecemos por estudar a natureza da série dos módulos, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$, por comparação com a série harmónica. O limite

$$\lim \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}} = 1$$

pertence a $\mathbb{R}^+$. Resulta do Corolário 2 do Critério Geral de Comparação que as duas séries têm a mesma natureza. Podemos concluir que a série dos módulos é divergente.

Estudemos a série alternada aplicando o Critério de Leibniz:

(i) $\lim \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$;

(ii) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right) > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$;

(iii) A sucessão $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ é decrescente e a função seno é crescente em $[0, \frac{\pi}{2}]$, portanto, a sucessão $\left(\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ é decrescente.

Concluímos que a série alternada é convergente. Como a série dos módulos é divergente, a série alternada é simplesmente convergente.

f) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \cos(n)}$ é de termos positivos e é válida, em $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, a desigualdade

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2 + \cos(n)} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2 - 1}.$$

O limite

$$\lim \frac{\dfrac{\sqrt{n}}{n^2 - 1}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim \frac{n^2}{n^2 - 1} = 1$$

é finito e diferente de zero. Como a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ é convergente, por ser de Dirichlet com $\alpha = \dfrac{3}{2}$, o Critério Geral de Comparação garante que a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 - 1}$ é convergente e, portanto, a série inicial é convergente. Como é de termos positivos, a sua convergência é absoluta.

g) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n + n^n}$ é de termos positivos e é válida, em $\mathbb{N}$, a majoração

$$\frac{3^n}{2n + n^n} \leq \frac{3^n}{n^n}.$$

Estudemos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}$ usando o Critério da Raiz de Cauchy. Sendo a_n o termo geral da série:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{3}{n} = 0.$$

Como este limite é menor que 1, a série é convergente. Pelo Critério Geral de Comparação podemos afirmar que a série em estudo é convergente, sendo essa convergência absoluta por ser de termos positivos.

h) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n(-1)^n}{1+2n^3}$ é alternada, visto que o seu termo geral se pode escrever $(-1)^n \frac{n+(-1)^n}{1+2n^3}$.

Comecemos por estudar a natureza da série dos módulos, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+(-1)^n}{1+2n^3}$. O limite

$$\lim \frac{\frac{n+(-1)^n}{1+2n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^3+(-1^n)n^2}{2n^3+1} = \frac{1}{2}$$

é finito e diferente de zero. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, por ser de Dirichlet com $\alpha = 2$, o Corolário 2 do Critério Geral de Comparação permite-nos concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+(-1)^n}{1+2n^3}$ é convergente. Portanto, pelo Teorema 2.4.1, a série alternada é convergente, e a convergência é absoluta (ver Definição 2.4.1).

i) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!+1}$ é de termos positivos e é válida, em $\mathbb{N}$, a majoração

$$\frac{2^n}{n!+1} \leq \frac{2^n}{n!}.$$

Estudemos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ usando o Critério de D'Alembert. Sendo a_n o termo geral da série:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim \frac{2}{n+1} = 0.$$

Este limite tem um valor menor que 1, portanto, pelo Critério de D'Alembert podemos concluir que a série é convergente. Pelo Critério Geral de Comparação podemos afirmar que a série inicial é convergente, sendo essa convergência absoluta por ser de termos positivos.

j) Consideremos as séries $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Vamos estudar a primeira, que é de termos positivos, usando o Critério de D'Alembert. Seja a_n o termo geral da série:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{(n+1)!}{(2n+2)!}}{\dfrac{n!}{(2n)!}} = \lim \frac{(n+1)!(2n)!}{n!(2n+2)!} = \lim \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} = 0.$$

Este limite é menor que 1, portanto, pelo Critério de D'Alembert podemos concluir que a série é convergente. Sendo de termos positivos, a convergência é absoluta.

A segunda série é geométrica de razão $r = \dfrac{1}{2}$, portanto, convergente. Novamente por ser de termos positivos, a convergência é absoluta.

A série dada é a série soma das séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^n}$, pelo que é convergente. A convergência é absoluta (basta ter em conta que $|a-b| \leq |a| + |b|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$).

k) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(2n)!}{4^n\,(n!)^2}$ é de termos positivos. A sua natureza pode ser determinada usando o Critério de D'Alembert. Sendo (a_n) o termo geral da série:

$$\begin{aligned}
\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim \frac{\dfrac{(n+1)(2n+2)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2}}{\dfrac{n(2n)!}{4^n(n!)^2}} = \lim \frac{(n+1)(2n+2)!\,4^n(n!)^2}{n(2n)!\,4^{n+1}((n+1)!)^2} \\
&= \lim \frac{(n+1)(2n+2)(2n+1)}{4\,n(n+1)^2} = \lim \frac{2(n+1)^2(2n+1)}{4\,n(n+1)^2} \\
&= \lim \frac{2n+1}{2n} = 1
\end{aligned}$$

Este limite tem o valor 1, portanto, pelo Critério de D'Alembert nada podemos concluir, mas a sucessão $\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)$ tende para 1 por valores superiores a 1. Portanto, podemos concluir, pelo Critério da Razão, que a série é divergente.

Nota: Podemos também, em alternativa, estudar a série usando o Critério de Raabe (procedimento bastante usual quando o Critério de D'Alembert é inconclusivo). Neste caso,

$$\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim n\left(\frac{2n}{2n+1} - 1\right) = \lim \frac{-n}{2n+1} = -\frac{1}{2}$$

Como este valor é menor que 1 podemos concluir que a série é divergente, como tínhamos visto.

l) O módulo do termo geral da série dada é majorado pelo termo geral da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 \log(n)}$, visto que,

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(n)}{n^3 \log(n)}\right| \leq \frac{1}{n^3 \log(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ é convergente por ser uma série de Dirichlet com $\alpha = 3$ e o limite

$$\lim \frac{\frac{1}{n^3 \log(n)}}{\frac{1}{n^3}} = \lim \frac{1}{\log(n)} = 0$$

o Corolário 3 do Critério Geral de Comparação permite-nos concluir que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 \log(n)}$ é convergente. Consequentemente, a série dos módulos é convergente, sendo a série dada absolutamente convergente.

m) O termo geral da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n$ não é um infinitésimo. De facto,

$$\lim \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = \lim \left(\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(e^{-1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

o que implica que a sucessão de termo geral $(-1)^n \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n$ não tem limite. Do Teorema 2.2.1 resulta que a série é divergente.

n) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5} \cdot \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{n}\right)$ é de termos positivos. Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que sabemos ser convergente por ser de Dirichlet com $\alpha = 2$. O limite

$$\lim \frac{\frac{1}{2n+5} \cdot \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{\frac{1}{2n+5}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

pertence a $\mathbb{R}^+$. Pelo Corolário 2 do Critério Geral de Comparação as séries têm a mesma natureza, portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5} \cdot \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{n}\right)$ é convergente. Como é de termos positivos, a convergência é absoluta.

11. a) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ é de termos positivos porque $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{\pi}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$. Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, que é convergente por ser geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$. O limite

$$\lim \frac{\frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2^n}} = \lim \frac{1}{n} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2^n}} = 0 \times 1 = 0$$

permite-nos concluir que a série em estudo é convergente (ver o Corolário 3 do Critério Geral de Comparação). Como é de termos positivos, a convergência é absoluta.

b)

c)

d)

b) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n\sqrt{n}+2n^2}$ é de termos positivos. Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$, que é convergente por ser de Dirichlet com $\alpha = \dfrac{4}{3}$. O limite

$$\lim \frac{\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n\sqrt{n}+2n^2}}{\dfrac{1}{n^{4/3}}} = \lim \frac{n^2}{n\sqrt{n}+2n^2} = \frac{1}{2}$$

é finito e diferente de zero, portanto, pelo Corolário 2 do Critério Geral de Comparação, as duas séries têm a mesma natureza. Então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n\sqrt{n}+2n^2}$ é convergente. Como é uma série de termos positivos, a convergência é absoluta.

c) A série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt{n^2-1}}$ é alternada porque $\cos(n\,\pi) = (-1)^n$ e $\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} > 0$. Estudemos a série dos módulos, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$, comparando-a com a série harmónica. O limite

$$\lim \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}}{\dfrac{1}{n}} = \lim \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^2-1}} = 1$$

é finito e diferente de zero, portanto, pelo Corolário 2 do Critério Geral de Comparação, as duas séries têm a mesma natureza. Podemos concluir que a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ é divergente. Estudemos a série alternada aplicando o Critério de Leibniz:

(i) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} = 0$;

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$;

(iii) Para verificarmos que é uma sucessão decrescente consideremos a função real de variável real $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. A sua derivada é $f'(x) = -\dfrac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$, portanto, $f'(x) < 0,\ \forall x > 1$. Então a sucessão é decrescente em $\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Estão reunidas as condições de aplicação do critério, portanto, a série alternada é convergente. Como a série dos módulos é divergente, a série dada é simplesmente convergente.

d) A série $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\log(n)}$ difere da série dada apenas num termo, portanto, têm ambas a mesma natureza. É alternada, porque $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\log(n)} > 0,\ \forall n > 2$. Comecemos por estudar a série dos módulos

$\sum_{n=3}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\,\log(n)}\right| = \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\,\log(n)}$. Dado o limite

$$\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n}\log(n)}}{\frac{1}{n^{3/4}}} = \lim \frac{n^{3/4}}{\sqrt{n}\log(n)} = \lim \frac{n^{1/4}}{\log(n)} = +\infty$$

e o facto de a série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$ ser divergente, porque é de Dirichlet com $\alpha = \frac{3}{4}$, podemos concluir, pelo Corolário 4 do Critério Geral de Comparação, que a série dos módulos é divergente. Em consequência, a série em estudo, se for convergente, será simplesmente convergente. Dado que a série é alternada, verifiquemos se estamos nas condições do Critério de Leibniz:

(i) $\frac{1}{\sqrt{n}\,\log(n)} > 0$

(ii) $\lim \frac{1}{\sqrt{n}\,\log(n)} = 0$;

(iii) Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\,\log(x)}$. Esta função é decrescente em $[2, +\infty[$, pois

$$f'(x) = -\frac{(\sqrt{x}\,\log(x))'}{x\,\log^2(x)} = -\frac{2+\log(x)}{2x\sqrt{x}\log^2(x)} < 0, \quad \forall x \in [2, +\infty[.$$

Então a sucessão

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}\,\log(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}$$

é decrescente.

Como estamos nas condições do Critério de Leibniz, podemos concluir que a série alternada é convergente. Pelo estudo feito sobre a série dos módulos, podemos afirmar que a série é simplesmente convergente.

e) A série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+\text{sen}(n)}{\sqrt[3]{n}+1}$ é de termos positivos. É válida, em $\mathbb{N}$, a desigualdade

$$0 < \frac{3}{\sqrt[3]{n}+1} \leq \frac{4+\text{sen}(n)}{\sqrt[3]{n}+1}.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ é divergente por ser de Dirichlet com $\alpha = \frac{1}{3}$ e o limite

$$\lim \frac{\frac{3}{\sqrt[3]{n}+1}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim \frac{3\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}+1} = 3$$

é finito e diferente de zero, o Corolário 2 do Critério Geral de Comparação, permite-nos concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{n}+1}$ é divergente. O mesmo critério assegura que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+\text{sen}(n)}{\sqrt[3]{n}+1}$ é divergente.

f)

g)

f) Como a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}\,\mathrm{sen}(n^3)}{(3n^2+5)^n}$ não é de termos positivos, estudemos a série dos módulos. É válida, em $\mathbb{N}$, a desigualdade

$$0 \le \left| \frac{n^{2n}\,\mathrm{sen}(n^3)}{(3n^2+5)^n} \right| \le \frac{n^{2n}}{(3n^2+5)^n}.$$

O limite

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(3n^2+5)^n}} = \lim \frac{n^2}{3n^2+5} = \frac{1}{3}$$

é menor que 1, portanto, pelo Critério da Raiz de Cauchy concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(3n^2+5)^n}$ é convergente e, pelo Critério Geral de Comparação, o mesmo acontece à série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^{2n}\,\mathrm{sen}(n^3)}{(3n^2+5)^n} \right|$. A convergência da série dada é absoluta visto que a série dos módulos é convergente (ver a Definição 2.4.1).

g) A série $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \mathrm{arcsen}\left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)$ é alternada, porque $a_n = \mathrm{arcsen}\left(\frac{n-1}{n^2+1}\right) > 0$, visto que $0 < \frac{n-1}{n^2+1} < 1$, $\forall n > 2$. Comecemos por estudar a série dos módulos $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \mathrm{arcsen}\left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)$. O limite

$$\lim \frac{\mathrm{arcsen}\left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)}{\frac{n-1}{n^2+1}} = 1$$

e a série $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+1}$ é divergente (basta compará-la com a série harmónica). Podemos então concluir que a série dos módulos é divergente. Em consequência, a série em estudo, se for convergente, é simplesmente convergente. Dado que a série é alternada, verifiquemos se estamos nas condições do Critério de Leibniz.

(i) $\mathrm{arcsen}\left(\frac{n-1}{n^2+1}\right) > 0, \ \forall n > 2$;

(ii) $\lim \mathrm{arcsen}\left(\frac{n-1}{n^2+1}\right) = 0$;

(iii) Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \mathrm{arcsen}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$. Esta função é decrescente em $[3, +\infty[$, pois

$$f'(x) = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+x^2+2x}} < 0, \quad \forall x \in [3, +\infty[.$$

Então a sucessão

$$\left(\mathrm{arcsen}\left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}}$$

é decrescente.

Como estamos nas condições do Critério de Leibniz, podemos concluir que a série alternada é convergente. Pelo estudo feito sobre a série dos módulos, resulta que a série é simplesmente convergente.

h) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \times 7 \times \cdots \times (3n+1)}{8 \times 11 \times \cdots \times (3n+5)}$ é de termos positivos. Vamos estudá-la usando o Critério de D'Alembert. Sendo (a_n) o termo geral da série:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{4 \times 7 \times \cdots \times (3n+1)(3n+4)}{8 \times 11 \times \cdots \times (3n+5)(3n+8)}}{\dfrac{4 \times 7 \times \cdots \times (3n+1)}{8 \times 11 \times \cdots \times (3n+5)}} = \lim \frac{3n+4}{3n+8} = 1.$$

Este limite tem o valor 1, portanto, pelo Critério de D'Alembert nada podemos concluir. Vamos estudar a série usando o Critério de Raabe (procedimento bastante usual quando o Critério de D'Alembert é inconclusivo). Neste caso,

$$\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim n\left(\frac{3n+8}{3n+4} - 1\right) = \lim \frac{4n}{3n+4} = \frac{4}{3}.$$

Como este valor é maior que 1 podemos concluir que a série é convergente. A convergência é absoluta por se tratar de uma série de termos positivos.

i) Consideremos as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^3)}{\sqrt{n}+n^2}$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (2n)!}{3^n (2n+1)!}$. A primeira é de termos positivos cuja natureza se pode determinar por comparação com a série de Dirichlet $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que sabemos ser convergente. Com efeito, o limite

$$\lim \frac{\dfrac{\operatorname{arctg}(n^3)}{\sqrt{n}+n^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^2}{\sqrt{n}+n^2} \operatorname{arctg}(n^3) = \frac{\pi}{2}$$

é finito e diferente de zero, pelo que, pelo Corolário 2 do Critério Geral de Comparação, as duas séries têm a mesma natureza. Então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^3)}{\sqrt{n}+n^2}$ é convergente. Por ser de termos positivos, a convergência é absoluta.

A segunda série é de termos positivos. Vamos estudá-la usando o Critério de D'Alembert. Seja a_n o termo geral da série:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{2^{n+1}(2n+2)!}{3^{n+1}(2n+3)!}}{\dfrac{2^n(2n)!}{3^n(2n+1)!}} = \lim \frac{2^{n+1}(2n+2)!\,3^n(2n+1)!}{2^n(2n)!\,3^{n+1}(2n+3)!} = \lim \frac{2(2n+1)}{3(2n+3)} = \frac{2}{3}$$

Este limite é menor que 1, portanto, pelo Critério de D'Alembert, podemos concluir que a série é convergente. Sendo uma série de termos positivos, a convergência é absoluta.

A série dada é a série soma das séries estudadas pelo que é convergente. A convergência é absoluta visto que é de termos positivos.

j) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n+\sqrt{n}}$ é de termos positivos, pois $0 < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \dfrac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Comparemos esta série com a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, que sabemos ser convergente por ser de Dirichlet com $\alpha = \dfrac{3}{2}$. O limite

$$\lim \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n+\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n+\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n\sqrt{n}}} = \lim \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{n}{n+\sqrt{n}} = 1$$

é finito e diferente de zero, pelo que, pelo Corolário 2 do Critério Geral de Comparação, as duas séries têm a mesma natureza. Então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{n}})}{n+\sqrt{n}}$ é convergente. Por ser uma série de termos positivos, a convergência é absoluta.

k) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) - (n+2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n+2}\right)\right)$ é telescópica. Podemos escrever a sucessão das somas parciais:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \operatorname{sen}(1) - 3\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\right)\\
S_2 &= \operatorname{sen}(1) - 3\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) - 4\operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}\right)\\
S_3 &= \operatorname{sen}(1) - 3\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) - 4\operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}\right) + 3\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\right) - 5\operatorname{sen}\left(\frac{1}{5}\right)\\
&= \operatorname{sen}(1) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) - 4\operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}\right) - 5\operatorname{sen}\left(\frac{1}{5}\right)\\
S_4 &= \operatorname{sen}(1) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) - 4\operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}\right) - 5\operatorname{sen}\left(\frac{1}{5}\right) + 4\operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}\right) - 6\operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\right)\\
&= \operatorname{sen}(1) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) - 5\operatorname{sen}\left(\frac{1}{5}\right) - 6\operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\right)\\
&\;\vdots\\
S_n &= \operatorname{sen}(1) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) - (n+1)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n+1}\right) - (n+2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n+2}\right)\\
&\;\vdots
\end{aligned}$$

Como

$$\lim\, n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}} = 1$$

temos

$$\lim S_n = \operatorname{sen}(1) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) - 2$$

A série é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right)-(n+2)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n+2}\right)\right)=\mathrm{sen}(1)+2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\right)-2.$$

Para saber se a convergência é absoluta vamos estudar o sinal do termo geral. Para isso vamos provar que a sucessão de termo geral $n\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ é crescente. Seja $f(x)=x\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x\geq 1$. Temos $f'(x)=\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ e, portanto, $f'(x)=0\Leftrightarrow \mathrm{tg}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$. Mas esta equação não tem zeros. De facto, $\mathrm{tg}\left(\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{x}$, $\forall x\geq 1$. Então $f'(x)>0$, $\forall x\geq 1$, o que implica que f é crescente. Como $f(n)=n\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, podemos concluir que a sucessão é crescente e, portanto, a série é de termos negativos. Visto que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}-a_n$, a série dada é absolutamente convergente.

l) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3}{(n+1)!}$ é de termos positivos. Temos a seguinte desigualdade

$$0<\frac{2^n+3}{(n+1)!}\leq 2\frac{2^n}{(n+1)!},\ \forall n\geq 2.$$

A natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$ pode ser determinada usando o Critério de D'Alembert. Sendo a_n o termo geral da série:

$$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+2)!}}{\dfrac{2^n}{(n+1)!}}=\lim\frac{2}{n+2}=0.$$

Este limite é menor que 1, portanto, pelo Critério de D'Alembert podemos concluir que a série é convergente. Pelo Critério Geral de Comparação podemos afirmar que a série em estudo é convergente, sendo essa convergência absoluta por ser de termos positivos.

m) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}(n+1)-\mathrm{arctg}(n)}{n^2}$ é de termos positivos, pois a função $\mathrm{arctg}(x)$ é crescente. Comparemos esta série com a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, que sabemos ser convergente por ser de Dirichlet com $\alpha=2$. Pelo Corolário 3 do Critério Geral de Comparação, face ao valor do limite

$$\lim\frac{\dfrac{\mathrm{arctg}(n+1)-\mathrm{arctg}(n)}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim\left(\mathrm{arctg}(n+1)-\mathrm{arctg}(n)\right)=0,$$

podemos concluir, por estarmos a comparar com uma série convergente, que a série em estudo é convergente. Por ser uma série de termos positivos, a convergência é absoluta.

n) O termo geral da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n \operatorname{sen}(\frac{1}{n})}$ não é um infinitésimo. De facto,

$$\lim \frac{\log(n)}{n \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)} = \lim \log(n) \cdot \frac{\dfrac{1}{n}}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)} = +\infty.$$

Portanto, pelo Teorema 2.2.1, a série diverge.

o) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\log 2)^n \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ é de termos positivos porque $\dfrac{n+1}{n} > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\log 2)^n$, que sabemos ser convergente por ser geométrica de razão $0 < r = \log 2 < 1$. O limite

$$\lim \frac{(\log 2)^n \log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)}{(\log 2)^n} = \lim \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$$

permite-nos concluir, pelo Corolário 3 do Critério Geral de Comparação, que a série em estudo é convergente por estarmos a comparar com uma série convergente. Como é de termos positivos, a convergência é absoluta.

12. a) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{3^n n!}$ é de termos positivos. Vamos estudá-la usando o Critério de D'Alembert. Sendo a_n o termo geral da série:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{(n+2)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}}{\dfrac{(n+1)^n}{3^n n!}} = \frac{1}{3} \lim \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = \frac{e}{3}.$$

Este limite é menor que 1, portanto, pelo Critério de D'Alembert, a série converge.

b) Na alínea anterior ficou provado que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{3^n n!}$ é convergente, o que implica, pelo Teorema 2.2.1, que o seu termo geral é um infinitésimo. Portanto, $\lim \dfrac{(n+1)^n}{3^n n!} = 0$.

13. Estudemos a natureza da série dos módulos, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, pelo Critério da Raiz. Temos

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n, & \text{se } n = 3k,\ k \in \mathbb{N} \\ \sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}, & \text{se } n = 3k+1,\ k \in \mathbb{N}_0 \\ \sqrt[n]{\left|\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^n}\right|} = \dfrac{1}{n+1}, & \text{se } n = 3k+2,\ k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Os sublimites de $\sqrt[n]{|a_n|}$ são $\dfrac{1}{e}$ e 0, portanto, $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{e}$. Como este valor é menor que 1 podemos afirmar, pelo Critério da Raiz, que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente. Consequentemente, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

14. Um primeiro processo é analisar o termo geral da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Verifica-se que $\lim a_{2n} = \lim a_{2n+1} = +\infty$, isto é, $\lim a_n = +\infty$. Portanto, pelo Teorema 2.2.1, a série diverge.

Outro processo para estudar a natureza desta série:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{n+2}{n}, & \text{se } n \text{ par} \\ \dfrac{n+1}{n-1}, & \text{se } n \text{ ímpar, } n > 1 \end{cases}$$

Verifica-se que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, portanto, pelo Critério da Razão, a série diverge.

15. Se (a_n) é uma sucessão de termos positivos tal que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$ é convergente então a sucessão (a_n) é limitada. Podemos prová-lo por redução ao absurdo: se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não fosse limitada então $\lim\, na_n$ não seria zero e, nesse caso, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$ não seria convergente. Resulta, do facto de (a_n) ser limitada,

$$\lim \frac{a_n^2}{na_n} = \lim \frac{a_n}{n} = 0.$$

Resulta do Corolário 3 do Critério Geral de Comparação, dada a convergência da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$, que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ é convergente. Como é de termos positivos, a convergência é absoluta.

16. Como a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, $\lim a_n = 0$. Por hipótese, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pelo que $\log(1 + a_n) > 0$. Temos, assim, duas séries de termos positivos. O limite

$$\lim \frac{\log(1 + a_n)}{a_n} = 1$$

é finito e diferente de zero, portanto, pelo Crolário 2 do Critério Geral de Comparação, as duas séries têm a mesma natureza. Como a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$ também converge.

Nota: O limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x}$ é uma indeterminação $\dfrac{0}{0}$. Aplicando a Regra de Cauchy obtemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\log(1+x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

2.7. Exe
port
17. a)
b)
18. a)
b)

portanto, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$, o que implica que $\lim \dfrac{\log(1+a_n)}{a_n} = 1$.

17. a) A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ é alternada. Não se pode aplicar o Critério de Leibniz porque a sucessão (a_n) não é decrescente. De facto, se n é par,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - n - 1}{n^2(n+1)} > 0.$$

b) Demonstremos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ é divergente. Se for convergente, pelo Teorema 2.2.4, qualquer série que dela se obtenha por associação dos seus termos também é convergente. Consideremos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, sendo (b_n) a sucessão definida por

$$b_n = a_{2n-1} - a_{2n} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{(2n)^2} = \frac{(2n)^2 - 2n + 1}{(2n)^2(2n-1)} = \frac{4n^2 - 2n + 1}{4n^2(2n-1)}.$$

O limite

$$\lim \frac{\dfrac{4n^2 - 2n + 1}{4n^2(2n-1)}}{\dfrac{1}{n}} = \lim \frac{4n^2 - 2n + 1}{4n(2n-1)} = \frac{1}{2}$$

é finito e diferente de zero, portanto, pelo Corolário 2 do Critério Geral de Comparação, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ tem a mesma natureza da série harmónica, pelo que é divergente. Mas a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ é, como vimos, obtida por associação dos termos da série dada, pelo que esta é divergente.

18. a) Suponhamos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente. Então o seu termo geral é um infinitésimo, o que implica que todas as suas subsucessões têm limite zero. Assim, $\lim b_{2n-1} = 0$, isto é, $\lim a_n = 0$.

Seja $\lim a_n = 0$ e (S_n) a sucessão das somas parciais da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Temos $S_{2n} = 0$ e $S_{2n-1} = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $\lim a_n = 0$ podemos concluir que $\lim S_n = 0$. Mas, por definição, se a sucessão das somas parciais de uma série tem limite finito a série converge. Portanto, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente.

b) Sejam S_n e S_n^* os termos gerais das sucessões das somas parciais das séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, respectivamente. Temos

$$\begin{aligned}
S_1 &= |b_1| = |a_1| = S_1^* \\
S_2 &= |b_1| + |b_2| = |a_1| + |a_1| = 2S_1^* \\
S_3 &= |b_1| + |b_2| + |b_3| = |a_1| + |a_1| + |a_2| = S_1^* + S_2^*
\end{aligned}$$

$$S_4 = |b_1| + |b_2| + |b_3| + |b_4| = |a_1| + |a_1| + |a_2| + |a_2| = 2S_2^*$$

$$S_5 = |b_1| + |b_2| + |b_3| + |b_4| + |b_5| = |a_1| + |a_1| + |a_2| + |a_2| + |a_3| = S_2^* + S_3^*$$

$$\vdots$$

ou seja,

$$S_{2n} = 2S_n^* \quad \text{e} \quad S_{2n-1} = S_n^* + S_{n+1}^*.$$

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge absolutamente, então existem, finitos e iguais, os limites $\lim S_{2n}$ e $\lim S_{2n+1}$.

Mas $\lim S_n^* = \frac{1}{2} \lim S_{2n}$, portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

Reciprocamente, se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, então $\lim S_n^*$ existe e é finito, o que implica que $\lim S_{2n+1} = \lim(S_n^* + S_{n+1}^*) = \lim 2S_n^* = \lim S_{2n}$, e concluímos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge absolutamente.

19. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente então a sucessão das suas somas parciais, (S_n), é uma sucessão convergente, o que implica que todas as suas subsucessões são convergentes e têm o mesmo limite. Sendo a sucessão (a_n) decrescente, temos

$$S_{2n} - S_n = a_{2n} + \cdots + a_{n+1} \geq a_{2n} + \cdots + a_{2n} = na_{2n}.$$

e como $\lim (S_{2n} - S_n) = 0$ e $a_n \geq 0$ concluímos que $\lim\, na_{2n} = 0$, o que implica que $\lim\, 2na_{2n} = 0$.

Analogamente,

$$S_{2n+1} - S_{n+1} = a_{2n+1} + \cdots + a_{n+2} \geq a_{2n+1} + \cdots + a_{2n+1} = n\, a_{2n+1}.$$

Como $\lim (S_{2n+1} - S_{n+1}) = 0$ e $a_n \geq 0$, concluímos que $\lim n\, a_{2n+1} = 0$, o que implica que $\lim (2n+1)a_{2n+1} = 0$ porque $\lim a_n = 0$, pois por hipótese, a série é convergente.

Ficou provado que a subsucessão dos termos de ordem par de $(n\, a_n)$ tem o mesmo limite da sua subsucessão dos termos de ordem ímpar, sendo esse limite zero. Então $\lim n\, a_n = 0$.

20. Tendo em consideração a desigualdade $ab \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$, $\forall\, a,\, b \in \mathbb{R}$ e que a sucessão (a_n) é de termos positivos, temos

$$0 \leq \frac{1}{n^p}\sqrt{a_n} \leq \frac{\frac{1}{n^{2p}} + a_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^{2p}} + a_n\right).$$

Por hipótese, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e se $p > \dfrac{1}{2}$ então $2p > 1$, o que implica que a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{2p}}$ é convergente. A série soma destas duas séries é convergente e dada a desigualdade anterior, podemos concluir, pelo Critério Geral de Comparação, a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{a_n}}{n^p}$.

21. Consideremos a seguinte reindexação da série harmónica: $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$. Então

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Pelo Corolário 5 do Critério Geral de Comparação podemos concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

22. Pode provar-se por indução que a sucessão (v_n) é uma sucessão de termos positivos. Aplicando o Critério de D'Alembert constatamos que a série $\sum_{n=2}^{\infty} v_n$ é convergente porque

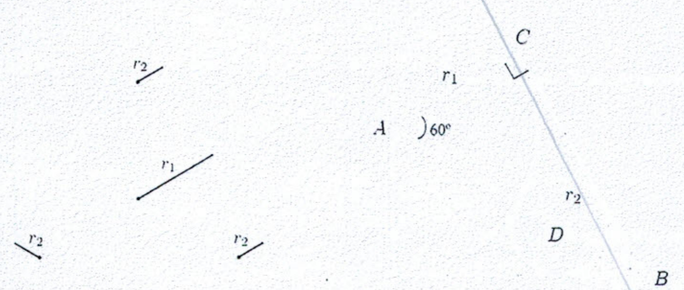
$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = 0 < 1.$$

Além disso,

$$\lim \frac{\operatorname{arctg}(v_n)}{v_n} = 1$$

o que implica, pelo Corolário 2 do Critério Geral de Comparação, que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{arctg}(v_n)$ é convergente.

23. A soma das áreas dos círculos é dada pela série $\pi r_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} 3\pi r_n^2$, onde r_1 é o raio da maior circunferência, r_2 é o raio das circunferências que lhe são tangentes, etc.



Precisamos da expressão de r_n em função de r_1. O ângulo $\angle BAC$ mede $60°$ e $\cos 60° = \frac{r_1}{|AB|}$, portanto, $\frac{1}{2} = \frac{r_1}{|AB|}$. Do mesmo modo, $\frac{1}{2} = \frac{r_2}{|DB|}$. Então $|AB| = 2r_1$ e $|DB| = 2r_2$. Em consequência, temos a igualdade $2r_1 = r_1 + r_2 + 2r_2$, de onde se conclui que $r_2 = \frac{1}{3}r_1$. De modo análogo, podemos mostrar que $r_3 = \frac{1}{3}r_2 = \frac{1}{9}r_1$ e, mais geralmente, $r_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} r_1$, $n > 2$.

A série toma agora a forma

$$\pi r_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} 3\pi r_n^2 = \pi r_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} 3\pi \left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)^2 r_1^2 = \pi r_1^2 \left(1 + 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{9^{n-1}}\right) = \frac{11}{8}\pi r_1^2.$$

Qual o valor de r_1? Tendo em conta que $|BC| = \frac{1}{2}$, $|AB| = 2r_1$ e que $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{|BC|}{|AB|}$ temos $r_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Finalmente, a área dos círculos é

$$\pi r_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} 3\pi r_n^2 = \frac{11\pi}{96}.$$

24. A área da região colorida pode ser escrita como

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - B_n)$$

onde A_n é a área do círculo e B_n a área do quadrado inscrito nesse círculo. Seja r_n o raio do enésimo círculo e l_n o comprimento do lado do quadrado inscrito.

$2r_n$

l_n

Resulta do Teorema de Pitágoras que $l_n^2 + l_n^2 = (2r_n)^2$, ou seja, $l_n^2 = 2r_n^2$. Podemos escrever a série na forma

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} (\pi r_n^2 - l_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (\pi - 2)\, r_n^2.$$

Qual a relação entre r_1 e r_n? Sabemos que $2r_2 = l_1$, isto é, $4r_2^2 = l_1^2$. Como $l_1^2 = 2r_1^2$, temos que $r_2^2 = \frac{1}{2} r_1^2$. Podemos induzir que $r_n^2 = \frac{1}{2^{n-1}} r_1^2$. Assim,

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} (\pi - 2)\, r_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\pi - 2)\, \frac{1}{2^{n-1}} r_1^2 = 2(\pi - 2)\, r_1^2.$$

Como $r_1 = 1$ concluímos que $A = 2(\pi - 2)$.

25. Vejamos numa tabela os números da construção do triângulo de Sierpinski.

Número de quadrados	Número de quadrados removidos	Comprimento das arestas	Área de cada quadrado	Área dos quadrados removidos
1	0	1	1	0
3	1	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$
3^2	3	$\frac{1}{2^2}$	$\left(\frac{1}{2^2}\right)^2$	$3 \times \left(\frac{1}{2^2}\right)^2$
3^3	3^2	$\frac{1}{2^3}$	$\left(\frac{1}{2^3}\right)^2$	$3^2 \times \left(\frac{1}{2^3}\right)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Então a área total dos quadrados removidos é a soma da série geométrica

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1$$

Como o quadrado inicial tem área 1, concluímos que a área do triângulo de Sierpinski é zero.