

# Exercícios sobre Sucessões de Funções 01

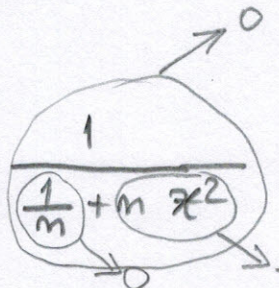
## Exercício ①

Sejam  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de funções definidas em  $]0, 1]$  por  $f_n(x) = \frac{n}{1+n^2 x^2}$  para todo  $0 < n \in \mathbb{N}$ , e  $f$  a função definida em  $]0, 1]$  por  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ .

a) Obtenha a expressão analítica de  $f(x)$

$$\mathcal{D} = ]0, 1]$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x), \quad \forall x \in \mathcal{D}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1+n^2 x^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + n x^2} = 0$$


$$f: ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$x \quad \curvearrowright \quad f(x) = 0$

b) A sucessão  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente?

Vou usar a definição de conv. unif.

Calcule-se

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathcal{D}} |f_n(x) - f(x)|$$



$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in ]0,1[} \left| \frac{n}{1+n^2 x^2} - 0 \right|$$

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in ]0,1[} \frac{n}{1+n^2 x^2}$$

Seja agora  $\varepsilon \in ]0,1[$ . Defino a sucessão

$$d_n(x) = \left| \frac{n}{1+n^2 x^2} - 0 \right| = \frac{n}{1+n^2 x^2}, \quad x \in [\varepsilon, 1]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{D_{d_n}(x)}$

$$d_n(x) = \frac{n}{1+n^2 x^2} \geq \frac{n}{1+n^2 \varepsilon^2}$$

Ora,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_n(x) \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\overset{d_n(\varepsilon)}{n}}{1+n^2 \varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (n) = +\infty$$

Isto ajuda a verificar que

$$\sup_{x \in ]0,1[} \frac{n}{1+n^2 x^2} = n$$

Pelo que

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in ]0,1[} \frac{n}{1+n^2 x^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n) = +\infty$$

Como  $L \neq 0$  então a convergência

$f_n(x) \xrightarrow{p} f(x)=0$  não é uniforme.



c) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) \right)$

$L_1$   $L_2$

Se a convergência for uniforme garantirá-se que  $L_1 = L_2$  (Note que 0 é ponto de acumulação de  $]0,1[$ ).

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (0) = 0$$

$$L_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{n}{1+n^2 x^2} \right)$$

$$L_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n) = +\infty$$

d) O que pode concluir a partir da alínea c) ?  $[(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ conv. unif. em } ]0,1[ ]?$

Na verdade, a partir da alínea c) temos  $L_1 \neq L_2$ . Basta isto

para concluir que a sucessão  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  não converge uniformemente.

Ou seja, a análise da alínea b) não era necessária para provar que a conv. não é uniforme.



Exercício (2)

Repita o Exercício (1) para a  
sucessão de funções definidas em  
 $]0, 1]$  por  $g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ .