Exercícios sobre Sucessões de Funções

Exercício ①

Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções definidas em $]0,1]$ por $f_n(x)=\frac{n}{1+n^2x^2}$, para todo o $n\in\mathbb{N}$, e f a função definida em $]0,1]$ por $f(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

a) Obtenha a expressão analítica de $f(x)$

$\mathcal{D}=]0,1]$

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \quad , \forall x\in\mathcal{D}$$

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{1+n^2x^2}=\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}+\underbrace{n\,x^2}_{\to+\infty}}}_{\to 0}=0$$

$$\begin{aligned} f:]0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)=0 \end{aligned}$$

b) A sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente?

Vou usar a definição de conv. unif.

Calcule-se

$$L=\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathcal{D}}|f_n(x)-f(x)|$$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in]0,1]} \left| \frac{n}{1+n^2x^2} - 0 \right|$$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in]0,1]} \frac{n}{1+n^2x^2}$$

Seja agora $\varepsilon \in]0,1[$. Defino a sucessão

$$d_n(x) = \left| \frac{n}{1+n^2x^2} - 0 \right| = \frac{n}{1+n^2x^2} \;,\; \underbrace{x\in[\varepsilon,1]}_{D_{d_n(x)}}$$

$$d_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2} \geqslant \frac{n}{1+n^2\varepsilon^2}$$

Ora,

$$\lim_{\varepsilon\to0} d_n(x) \geqslant \lim_{\varepsilon\to0} \overbrace{\frac{n}{1+n^2\varepsilon^2}}^{d_n(\varepsilon)} = \lim(n) = +\infty$$

Isto ajuda a verificar que

$$\sup_{x\in]0,1]} \frac{n}{1+n^2x^2} = n$$

Pelo que

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in]0,1]} \frac{n}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to+\infty}(n) = +\infty$$

Como $L \neq 0$ então a convergência

$f_n(x) \xrightarrow[p]{} f(x)=0$ não é uniforme.

c) Calcule $\underbrace{\lim_{x \to 0^+} f(x)}_{L_1}$ e $\underbrace{\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to 0^+} f_n(x) \right)}_{L_2}$

Se a convergência fosse uniforme garantia-se que $L_1 = L_2$ (Note que 0 é ponto de acumulação de $]0,1]$).

$$L_1 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (0) = 0$$

$$L_2 = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to 0^+} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to 0^+} \frac{n}{1+n^2 x^2} \right)$$

$$L_2 = \lim_{n \to +\infty} (n) = +\infty$$

d) O que pode concluir a partir da alínea c) ? [$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ conv. unif. em $]0,1]$?]

Na verdade, a partir da alínea c) temos $L_1 \neq L_2$. Basta isto para concluir que a sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge uniformemente. Ou seja, a análise da alínea b) não era necessária para provar que a conv. não é uniforme.

Exercício ②

Repita o Exercício ① para a sucessão de funções definidas em $]0,1]$ por $g_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.