

# Relatório do Projeto Acerca do Movimento de Projéteis

Dept. de Eletrónica, Telecomunicações e Informática  
Universidade de Aveiro

André Correia, Bruno Oliveira, Carlos Verenzuela



(87818) amcorreia@ua.pt, (113663) brunogoliveira@ua.pt,  
(114597) carlos.verenzuela@ua.pt

19 de outubro de 2023

# Resumo

O tema deste projeto é o estudo do movimento de projéteis, cujos objetivos são a determinação da velocidade inicial de um projétil através de equações de movimento, ou através de experiências laboratoriais – usando sensores de passagem (denominada doravante por Parte A), ou, de um método alternativo, através do uso de um pêndulo balístico (Parte C). Além disto, é apresentada a dependência do alcance de um projétil com o ângulo de lançamento, dada uma velocidade inicial (Parte B).

Existe uma metodologia aplicada para uma correta extração de dados aquando das experiências laboratoriais, que mostrou haver um elevado grau de precisão e exatidão nas medições pela equipa (geralmente com um desvio relativo entre os 91% e os 97%, quando comparado com valores teóricos).

Os objetivos atingidos pelo projeto foram de áreas diversas, tais como a necessidade de haver uma metodologia rígida (bem estruturada e respeitada), o cuidado a ter na extração dos dados (por exemplo, de folhas de papel para o Microsoft Excel), e que um bom projeto se baseia, maioritariamente, em ter os conhecimentos corretos, ao contrário de somente inteligência.

# Índice de Conteúdo

Capítulo 1.....	1
Introdução .....	1
Capítulo 2.....	2
Metodologia .....	2
Capítulo 3.....	9
Análise e Discussão.....	9
Capítulo 4.....	11
Conclusões.....	11
Anexos.....	12
Conteúdo do Excel da Parte A .....	12
Conteúdo do Excel da Parte B.....	13
Conteúdo do Excel da Parte C.....	14

## Índice de Tabelas

Tabela 1 - [Parte A] Medição da Distância Entre os Sensores.....	5
Tabela 2 - [Parte A] Medição do Tempo Entre os Sensores. ....	5
Tabela 3 - [Parte A] Determinação da Velocidade Inicial de Disparo.....	5
Tabela 4 - [Parte B] Medição de Ângulos e Alcances. ....	6
Tabela 5 - [Parte B] Determinação do Melhor Ângulo para o Maior Alcance.....	6
Tabela 6 - [Parte C] Medição da Massa do Projétil e do Pêndulo. ....	7
Tabela 7 - [Parte C] Medição dos Ângulos Obtidos com os Disparos.....	7
Tabela 8 - [Parte C] Medição das Alturas Obtidas com os Disparos. ....	7
Tabela 9 - [Parte C] Comparação dos Valores Obtidos Experimentalmente com os Obtidos Teoricamente. ....	8

## Índice de Equações

Equação 1 - Fórmula para Determinação do Melhor Ângulo ( $\theta_{ymax}$ ) para Atingir o Alcance Máximo através da Velocidade Inicial ( $v_0$ ), das Alturas ( $y_i, y_f$ ) e da Gravidade ( $g$ ). .....	2
Equação 2 - Fórmula para a Determinação da Velocidade Inicial ( $v_0$ ) através das Massas ( $M$ do Pêndulo, e $m$ do projétil), da Altura ( $h$ ) e da Gravidade ( $g$ ). .....	2
Equação 3 - Componentes $x$ e $y$ da Posição de um Projétil através da posição ( $x_0$ e $y_0$ ), velocidade ( $v_0$ ), e ângulo inicial ( $\theta_0$ ), em função do tempo ( $t$ ), e da Gravidade ( $g$ ). .....	2
Equação 4 - Fórmula para a Determinação da Velocidade Inicial ( $v_0$ ) através das Médias da Distância Percorrida ( $L$ ) com a Média dos Tempos ( $T$ ). .....	9
Equação 5 - Fórmula da Incerteza da Medida (Final, $\Delta v$ ), sendo $L$ referente à Distância entre os Sensores, e $T$ referente aos Tempos Medidos – com $v$ sendo a velocidade determinada.....	9
Equação 6 - Fórmula para Obter a Exatidão, utilizando os Ângulos obtidos nas Experiências, com o obtido teoricamente.....	10
Equação 7 – Fórmula para determinar o desvio relativo da velocidade, através dos resultados obtidos nas Partes A e C. ....	10

# Capítulo 1

## Introdução

Os alunos da Unidade Curricular (UC) de Mecânica e Campo Eletromagnético (*MCE*, código 41954) da Licenciatura em Engenharia de Computadores e Informática (*LECI*, código 8316) da Universidade de Aveiro (*UA*) foram propostos ao desenvolvimento de um Projeto cujo tema é Movimento de Projéteis e que consiste em determinar a velocidade inicial do projétil através de equações do movimento, verificar a dependência do alcance com o ângulo de lançamento, e determinar a velocidade inicial do projétil utilizando um pêndulo balístico.

Neste sentido, este documento apresenta os objetivos do Projeto, a metodologia aplicada, detalhes experimentais relevantes, e uma análise dos resultados experimentais pelos autores.

Deste modo, após esta introdução, encontra-se o Capítulo 2 que contempla os materiais utilizados, a indicação das incertezas dos instrumentos, informação sobre precisão e exatidão, cuidados que foram aplicados nas experiências, e detalhes experimentais relevantes. De seguida, o Capítulo 3 apresenta uma análise e discussão dos aspetos mais relevantes acerca das medições experimentais (pelos autores), assim como a apresentação dos cálculos efetuados para este Projeto. Mais ainda, no Capítulo 4, apresenta-se a conclusão deste documento, e deste Projeto. E, por fim, no final deste documento encontram-se anexos relevantes ao Projeto.

## Capítulo 2

# Metodologia

Neste capítulo, serão apresentadas informações relevantes acerca da metodologia aplicada aquando das experiências laboratoriais para uma correta extração de dados.

Assim, começa-se por apresentar cada uma das experiências efetuadas (sobre projéteis), e o seu objetivo:

- Parte A – Determinação da Velocidade Inicial.
- Parte B – Dependência do Alcance com o Ângulo de Disparo.
- Parte C – Método Alternativo para a Determinação da Velocidade Inicial.

Para estas experiências, são usadas as equações abaixo apresentadas:

$$\theta_{y_{max}} = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2g(y_i - y_f)}{v_0^2}}}$$

*Equação 1 - Fórmula para Determinação do Melhor Ângulo ( $\theta_{y_{max}}$ ) para Atingir o Alcance Máximo através da Velocidade Inicial ( $v_0$ ), das Alturas ( $y_i, y_f$ ) e da Gravidade ( $g$ ).*

$$v_0 = \left(\frac{M}{m}\right)\sqrt{2gh}$$

*Equação 2 - Fórmula para a Determinação da Velocidade Inicial ( $v_0$ ) através das Massas ( $M$  do Pêndulo, e  $m$  do projétil), da Altura ( $h$ ) e da Gravidade ( $g$ ).*

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t \cos(\theta_0) \\ y = y_0 + v_0 t \sin(\theta_0) - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

*Equação 3 - Componentes  $x$  e  $y$  da Posição de um Projétil através da posição ( $x_0$  e  $y_0$ ), velocidade ( $v_0$ ), e ângulo inicial ( $\theta_0$ ), em função do tempo ( $t$ ), e da Gravidade ( $g$ ).*

Relativamente à Parte A (ver Figura 1), esta consiste na utilização do seguinte material:

- Lançador de Projéteis.
- Sensores de Passagem.
- Sensor de Impacto.
- Esfera de Ferro.

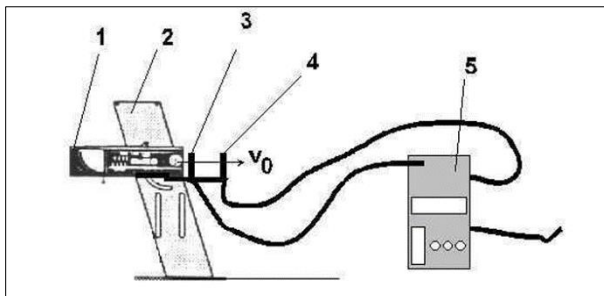


Figura 1<sup>1</sup> - Esquema de Montagem da Parte A.

Relativamente à Parte B (ver Figura 2), esta partilha todo o material anteriormente referido, com exceção dos Sensores de Passagem e de Impacto (sendo este último substituído por uma folha de papel milimétrico com uma folha de papel químico por cima).

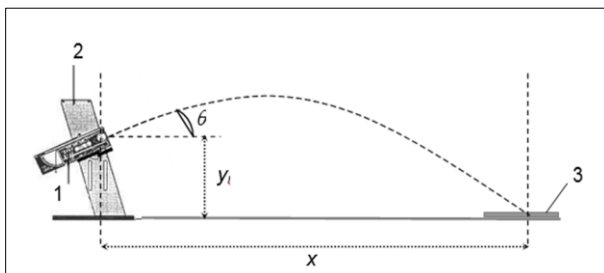


Figura 2<sup>2</sup> - Esquema de Montagem da Parte B.

<sup>1</sup> Figura retirada da página 3 do guião prático, fornecido aos alunos, pelos Professores da UC.

<sup>2</sup> Figura retirada da página 4 do guião prático, fornecido aos alunos, pelos Professores da UC.



Por último, a Parte C (ver Figura 3) consiste no mesmo Lançador de Projéteis e Esfera Plástica, mas agora com um Pêndulo Balístico (montado sobre uma estrutura que contém um medidor de ângulos de disparo).

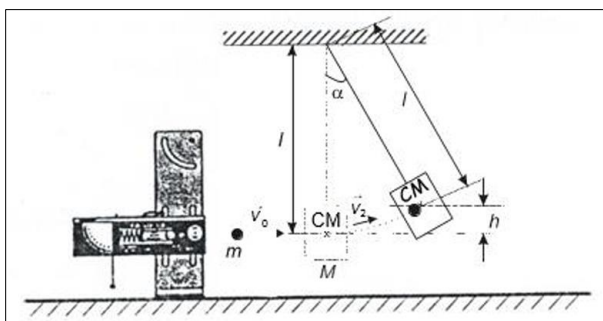


Figura 3<sup>3</sup> - Esquema de Montagem da Parte C.

Estabelecidos os materiais, e as montagens, das três experiências laboratoriais, identificam-se agora em que consistem cada uma das Partes.

Mas, antes de mais, deve ser notado que para todas as experiências neste documento mencionadas (sejam estas disparos oblíquos, ou medições de tamanhos de instrumentos ou distâncias percorridas pelo projétil, entre outras), foram sempre efetuadas, no mínimo, três medições. Além disto, a potência de disparo do Lançador de Projéteis estava sempre na posição de *Short Range* (tiro curto), e o projétil foi sempre o mesmo.

<sup>3</sup> Figura retirada da página 5 do guião prático, fornecido aos alunos, pelos Professores da UC.

Relativamente à Parte A, o objetivo é medição da velocidade inicial de um projétil ao ser disparado por um Lançador de Projéteis. Para isto, respeitando a montagem apresentada na Figura 1, é inicialmente medida a distância entre os sensores de passagem inicial e final (apresentados na Figura 1 com os números 3 e 4, respetivamente). Os resultados podem ser analisados na Tabela 1, todos na unidade de milímetros (mm), onde se pode verificar que o desvio e incerteza máximos é de 0 milímetros.

Distância entre os Sensores (mm)	Incerteza Instrumental (mm)	Média das Distâncias (mm)	Desvio Para a Média (mm)	Incerteza da Medida (mm)
100	1	100	0	1
100				
100				

Tabela 1 - [Parte A] Medição da Distância Entre os Sensores.

De seguida, são efetuadas medições de tempo (todas em segundos) entre o sensor de passagem inicial e o sensor de passagem final, sendo o desvio máximo de  $8.0 \times 10^{-4}$  segundos (ver Tabela 2).

Tempos (s)	Incerteza Instrumental (s)	Média dos Tempos (s)	Desvio Para a Média (s)	Incerteza da Medida (s)
0,0434	1,00E-04	0,043	4,000E-04	8,00E-04
0,0434	1,00E-04		4,000E-04	
0,0422	1,00E-04		8,000E-04	

Tabela 2 - [Parte A] Medição do Tempo Entre os Sensores.

Por fim, é determinada a velocidade inicial de disparo e comparada com os valores obtidos teoricamente (ver Tabela 3, onde os valores estão em metros por segundo, exceto a percentagem da última coluna), onde se verifica uma exatidão de, arredondadamente, 97%.

Velocidade (m/s)	$\Delta v$ (m/s)	Precisão (%)
2,33	7E-02	97,1

Tabela 3 - [Parte A] Determinação da Velocidade Inicial de Disparo.

Relativamente à Parte B, estuda-se a dependência do alcance de um projétil com o ângulo de disparo. Assim, registam-se os alcances do projétil de acordo com o ângulo de lançamento – de relembrar o que o Lançador de Projéteis esteve sempre na posição de *Short Range* (ver Tabela 4, onde o ângulo está em graus e os alcances em metros).

Ângulo de Disparo (°)	Alcance (m)	Média de Alcances (m)
30	0,777	0,790
	0,789	
	0,790	
35	0,803	0,802
	0,804	
	0,800	
40	0,812	0,811
	0,813	
	0,807	
43	0,800	0,802
	0,802	
	0,803	

*Tabela 4 - [Parte B] Medição de Ângulos e Alcances.*

De seguida, é medida a altura ‘y’ (identificada a y na Figura 2) – que nas três medições consecutivas obteve sempre o mesmo valor de 0,259 metros. Com isto, obtêm-se os valores apresentados na Tabela 5 (em graus, exceto o último da Precisão), que indicam um ângulo preferencial de, arredondadamente, 39° (marcado como Ângulo Máx. Teórico, na Tabela 5) para atingir o alcance máximo do projétil (Ângulo Máximo Prático, na Tabela 5) – com uma exatidão de, arredondadamente, 91,40%.

Ângulo Máx. T. (°)	Ângulo Máx. P. (°)	Exatidão (%)
35,7	38,8	91,4

*Tabela 5 - [Parte B] Determinação do Melhor Ângulo para o Maior Alcance.*

Relativamente à Parte C, pretende-se apresentar um método alternativo para a determinação da velocidade inicial de um projétil, através de um pêndulo balístico (medição de ângulos, em vez da utilização de sensores de passagem). Para isto, inicialmente são medidas as massas do projétil e do pêndulo (ver Tabela 6, em quilogramas).

Massa da Bola (Kg)	Média da Massa da Bola (Kg)	Massa do Pêndulo (Kg)	Média da Massa do Pêndulo (Kg)
6,32E-02	6,33E-02	2,65E-01	2,64E-01
6,34E-02		2,64E-01	
6,33E-02		2,64E-01	
6,33E-02		2,64E-01	

*Tabela 6 - [Parte C] Medição da Massa do Projétil e do Pêndulo.*

De seguida, é medido o comprimento do pêndulo – que nas três medições consecutivas obteve sempre o mesmo valor de 0,265 metros. Assim, apresentam-se na Tabela 7 as medidas obtidas com os disparos (ângulos em graus).

Ângulo Máximo (º)	Média dos Ângulos (º)	Erro dos Ângulos (º)
16,5	16,6	0,110
17,0		-0,390
17,0		-0,390
16,0		0,610

*Tabela 7 - [Parte C] Medição dos Ângulos Obtidos com os Disparos.*

Associado a estas medições, estão as alturas determinadas, ver Tabela 8 (valores em metros).

Altura (m)	Média das Alturas (m)	Erro das Alturas (m)
0,0109	0,0112	0,000333
0,0116		-0,000333
0,0116		-0,000333
0,0103		0,000980

*Tabela 8 - [Parte C] Medição das Alturas Obtidas com os Disparos.*

Por fim, comparando o valor obtido através da Equação 1, verifica-se que a exatidão obtida foi de, arredondadamente, 95,32%.

Velocidade (m/s)	Velocidade Teórica (m/s)	Desvio Relativo (%)
2,43	2,33	95,3

*Tabela 9 - [Parte C] Comparação dos Valores Obtidos Experimentalmente com os Obtidos Teoricamente.*

Noutro sentido da metodologia aplicada, identificam-se alguns cuidados aplicados durante toda a experiência, pois é de importância garantir a integridade dos dados recolhidos, e, portanto, é de importância uma boa montagem e preparação do equipamento.

Assim, destaca-se que para a Parte A, foi dedicada uma especial atenção à horizontalidade do lançador de projéteis antes de cada lançamento de forma a controlar o ambiente de testes.

Relativamente à Parte B, foi certificado que o alvo (papel milimétrico com papel químico) estava devidamente posicionado para cada iteração do procedimento, tendo sempre dois dos autores envolvidos na recolha de dados e na certificação de que este alvo continuaria na mesma posição depois de mexido. Além disto, deu-se um especial cuidado à medição do ângulo em cada lançamento (pois para cada ângulo, fizeram-se, no mínimo, três medições), tendo em consideração a minimização dos efeitos de paralaxe.

Por fim, na Parte C, o anteriormente mencionado também foi aplicado aquando da observação do ângulo efetuado pelo pêndulo.

## Capítulo 3

# Análise e Discussão

Neste capítulo apresentam-se alguns aspetos relevantes para a análise dos resultados obtidos neste projeto, assim como os principais cálculos efetuados – seguindo-se uma lógica baseada em cada uma das Partes (A, B, e C).

Neste sentido, começa-se por destacar que, na Parte A, o cálculo da velocidade inicial com que o projétil é lançado se baseia na Equação 4 (sendo  $\bar{L}$  a média das distâncias, e  $\bar{T}$  a média dos tempos).

$$v_0 = \frac{\bar{L}}{\bar{T}}$$

*Equação 4 - Fórmula para a Determinação da Velocidade Inicial ( $v_0$ ) através das Médias da Distância Percorrida ( $\bar{L}$ ) com a Média dos Tempos ( $\bar{T}$ ).*

Para a realização destes cálculos foram tidos em conta os possíveis erros nas medições, como a Incerteza da Medida da distância (1mm), e a Incerteza da Medida do tempo (8,00E-04s).

Depois calculou-se o  $\nabla v$  através da Equação 5.

$$\Delta v = v \frac{\bar{L} \pm \Delta L}{\bar{T} \pm \Delta T}$$

*Equação 5 - Fórmula da Incerteza da Medida (Final,  $\Delta v$ ), sendo  $L$  referente à Distância entre os Sensores, e  $T$  referente aos Tempos Medidos – com  $v$  sendo a velocidade determinada.*

Relativamente à Parte B, o objetivo é verificar a dependência do alcance com o ângulo de lançamento, onde foram feitas as médias de alcance para cada ângulo. De seguida, foi desenvolvido um gráfico do alcance em função dos ângulos (ver Gráfico presente no Capítulo dos Anexos, no anexo *Conteúdo do Excel para a Parte B*).

Neste sentido, de seguida determinou-se o máximo da função, sendo que para este cálculo igualou-se a derivada da equação do gráfico a zero, determinando o ângulo máximo prático obtido nos lançamentos.

Noutro sentido, para o cálculo do Ângulo Máximo Teórico foi utilizada a Equação 1, onde  $v_0$  representa a velocidade obtida na Parte A (2,33 m/s),  $y_i$  a altura a que o projétil foi disparado (0,259 m) e  $y_f$  a altura do alvo (0 m)

Por fim, foi calculada a diferença entre o ângulo máximo teórico e o ângulo prático que resultou no alcance máximo observado. Esta diferença representa a exatidão da nossa experiência em atingir o ângulo teórico ideal para alcançar a maior distância – cujo resultado é de 91,4%.

$$Exatidão = \left( 1 - \frac{\text{Ângulo Máx. P.} - \text{Ângulo Máx. T.}}{\text{Ângulo Máx. T.}} \right) \times 100$$

*Equação 6 - Fórmula para Obter a Exatidão, utilizando os Ângulos obtidos nas Experiências, com o obtido teoricamente.*

Relativamente à Parte C do Projeto, o objetivo será calcular a velocidade inicial do projétil, contudo, recorrendo a um método alternativo à Parte A. Neste sentido, com base nas medidas efetuadas, foi calculada a velocidade inicial do projétil com o uso da Equação 2, onde  $M$  é a soma da média da massa da bola (0,0632 Kg) com a média da massa do pêndulo (0,264 Kg),  $m$  a média da massa da bola e  $h$  a média das alturas.

É de se destacar que como cada medida foi realizada quatro vezes (nesta parte), foram sempre feitas médias das mesmas, dos ângulos e da altura.

De seguida, foi calculado o desvio relativo da velocidade (a partir da Equação 7) obtida nesta parte (2,43 m/s) em relação à velocidade obtida na parte A (2,33 m/s) da experiência. Isto permite com que possamos avaliar a consistência das medições e o impacto das diferentes variáveis no resultado.

$$Desvio R. = \left( 1 - \frac{\text{Velocidade da Parte A} - \text{Velocidade obtida.}}{\text{Velocidade da Parte A}} \right) \times 100$$

*Equação 7 – Fórmula para determinar o desvio relativo da velocidade, através dos resultados obtidos nas Partes A e C.*

Portanto, após todos os cálculos e procedimentos, determinou-se que o desvio relativo é de 95,3%.

## Capítulo 4

# Conclusões

Este projeto desempenhou um papel essencial no aprofundamento e consolidação dos conhecimentos adquiridos durante as aulas de Mecânica e Campo Eletromagnético. Através desta experiência prática, conseguimos aplicar e melhorar as nossas competências, assimilando conceitos e técnicas relevantes que se podem aplicar em múltiplas áreas da Engenharia de Computadores.

Relativamente aos resultados obtidos nas experiências das Partes A,B, e C, estes autores conseguiram devidamente determinar a velocidade inicial de um projétil através do uso de equações de movimento com o suporte de sensores de movimento, ou, alternativamente, determinar este mesmo valor através do uso de um pêndulo balístico, assim como, verificar a dependência do alcance com o ângulo de lançamento.

Noutro sentido, deve ser destacado que foi identificada como uma das maiores fontes de erro, os cálculos efetuados pelos autores, assim como a recolha de dados para o Excel e a troca indevida de unidades de medida / grandeza.



## Anexos

### Conteúdo do Excel da Parte A

Distância entre os Sensores (mm)	Incerteza Instrumental (mm)	Média das Distâncias (mm)	Desvio Para a Média (mm)	Incerteza da Medida (mm)
100	1	100	0	1
100				
100				

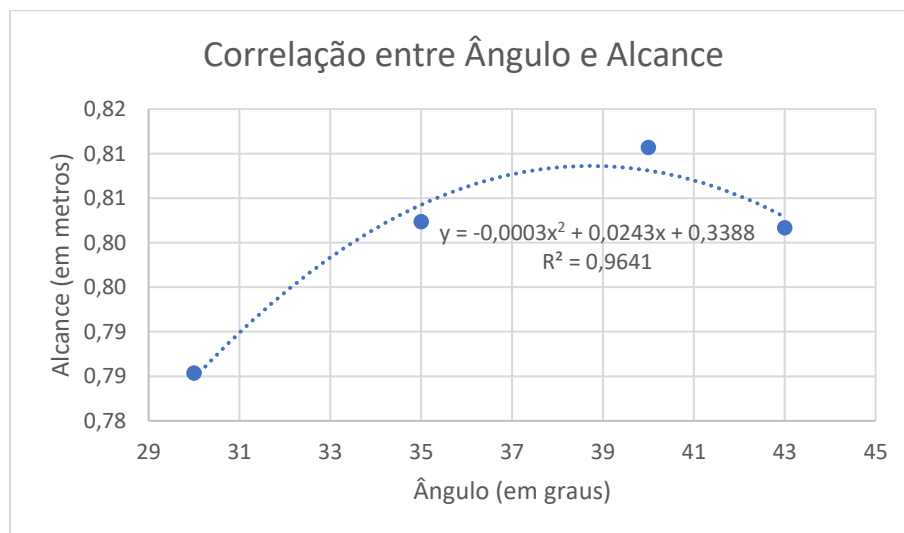
Tempos (s)	Incerteza Instrumental (s)	Média dos Tempos (s)	Desvio Para a Média (s)	Incerteza da Medida (s)
0,0434	1,00E-04	0,043	4,000E-04	8,00E-04
0,0434	1,00E-04		4,000E-04	
0,0422	1,00E-04		8,000E-04	

Velocidade (m/s)	$\Delta v$ (m/s)	Precisão (%)
2,33	7E-02	97,1

## Conteúdo do Excel da Parte B

Ângulo de Disparo (º)	Alcance (m)	Média de Alcances (m)
30	0,777	0,790
	0,789	
	0,790	
35	0,803	0,802
	0,804	
	0,800	
40	0,812	0,811
	0,813	
	0,807	
43	0,800	0,802
	0,802	
	0,803	

Ângulo Máx. T. (º)	Ângulo Máx. P. (º)	Exatidão (%)
35,7	38,8	91,4



## Conteúdo do Excel da Parte C

Massa da Bola (Kg)	Média da Massa da Bola (Kg)	Massa do Pêndulo (Kg)	Média da Massa do Pêndulo (Kg)
6,32E-02	6,33E-02	2,65E-01	2,64E-01
6,34E-02		2,64E-01	
6,33E-02		2,64E-01	
6,33E-02		2,64E-01	

Ângulo Máximo (º)	Média dos Ângulos (º)	Erro dos Ângulos (º)
16,5	16,6	0,110
17,0		-0,390
17,0		-0,390
16,0		0,610

Altura (m)	Média das Alturas (m)	Erro das Alturas (m)
0,0109	0,0112	0,000333
0,0116		-0,000333
0,0116		-0,000333
0,0103		0,000980

Velocidade (m/s)	Velocidade Teórica (m/s)	Desvio Relativo (%)
2,43	2,33	95,3