DOC. JSE, $\frac{01}{2019}\Big|\frac{MAR}{13h30}$ 01/02

Vou dar indicaçõs para deduzirem a fórmula do binómio de Newton a partir da série de Taylor.

Seja $f(x) = (x+a)^3$, sendo $a \in \mathbb{R}$,

Calculo $T_0^m(f(x))$ sendo $m \geqslant 3$, ou seja o polinómio de MacLaurin para $f(x)$ de grau $m = 3, 4, 5, \dots$

$$T_0^m(f(x)) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k$$

$$T_0^m(f(x)) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m$$

$f(x) = (x+a)^3 \Rightarrow f(0) = a^3$

$f'(x) = 3(x+a)^2 \Rightarrow f'(0) = 3a^2$

$f''(x) = 6(x+a) \Rightarrow f''(0) = 6a$

$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(0) = 6$

$f^{(k)}(x) = 0 \Rightarrow f^{(k)}(0) = 0$, para $k > 3$

$$T_0^m(f(x)) = a^3 + 3a^2x + \frac{6ax^2}{2!} + \frac{6x^3}{3!} + \frac{0}{4!}x^4 + \dots + \frac{0}{m!}x^m$$

$$T_0^m(f(x)) = (x+a)^3 = \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}x^k a^{3-k}$$

Generalizando,

$$f(x) = (x+a)^n \quad , \ a \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}$$

$$T_0^n(f(x)) = (x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

que é a fórmula do binómio de Newton.

Exercício 2.4.2 Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem 7 da função seno permite aproximar os valores desta função, no intervalo $[-1,1]$, com erro inferior a $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$.

Fórmula de Taylor para $f(x) = \sin x$, grau $n = 7$, em torno de $c = 0$

$$\sin x = \underbrace{\sum_{n=0}^{7} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{T_0^7(\sin x)} + \underbrace{\frac{f^{(8)}(\xi)}{(n+1)!} x^8}_{R_0^7(\sin x)}$$

ξ entre 0 e x.

$$\left|\sin x - T_0^7(\sin x)\right| = \left| \frac{f^{(8)}(\xi)}{(n+1)!} x^8 \right|$$

$f^{(8)}(x) = \sin x = f(x)$ [confirme!]

Como $|x| < 1$ e $|f^{(8)}(\xi)| = |\sin(\xi)| \leq 1$

concluo

$$\left|\sin x - T_0^7(\sin(x))\right| \leq \frac{1}{8!} |1|^8 = \frac{1}{8!}$$

$$\left|\sin x - T_0^7(\sin(x))\right| \leq \frac{1}{40320} \leq \frac{1}{20000} = \frac{10^{-4}}{2}$$

Nota: O polinómio não era pedido mas é fácil de encontrar

$$T_0^7(\sin x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$\boxed{\text{Exercício}}$

Usando o resto de Lagrange, determine um majorante para o erro absoluto cometido na aproximação de sin(3) quando se usa o polinómio de Taylor de ordem $n=5$ em torno do ponto $a=\pi$.

Fórmula de Taylor com resto de Lagrange para $f(x) = \sin x$, de ordem $n=5$ em torno de $a=\pi$:

$$f(x) = T_{\pi}^{5}(f(x)) + R_{\pi}^{5}(f(x))$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{5} \frac{f^{(k)}(\pi)}{k!}(x-\pi)^k + \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x-\pi)^6,$$

$\xi \in]3, \pi[$

Para $x=3$ obtemos:

$$\left| f(3) - \sum_{k=0}^{5} \frac{f^{(k)}(\pi)}{k!}(3-\pi)^k \right| \leq \left| \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(3-\pi)^6 \right|$$

É este o erro absoluto da aproximação referida no enunciado e que pretendemos majorar. Por derivação sucessiva concluía-se que

$$f^{(6)}(\xi) = -\sin \xi$$

Portanto,

$$\left|\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(3-\pi)^6\right| = \frac{|\sin \xi|}{720}(\pi-3)^6$$

$$= \frac{|\sin \xi|}{720}(3.14159\ldots-3)^6$$

$$= \frac{|\sin \xi|}{720}(0.14159\ldots)^6$$

$\boxed{1.^{\text{o}}\ \text{Majorante}}$

Vou obter uma majorante fácil partindo dos factos $\begin{cases} |\sin \xi| \leq 1 \\ 0.14159\ldots < 0.15 = \frac{15}{100} \end{cases}$

$$\left|\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(3-\pi)^6\right| \leq \frac{1}{720}\left(\frac{15}{100}\right)^6 = \frac{15^6}{720}\times 10^{-12}$$

$$\left|\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(3-\pi)^6\right| \leq 0.1582\ldots \times 10^{-7} \leq \boxed{\underbrace{0.16\times 10^{-7}}_{M_1}}$$

O majorante $M_1 = 0.16\times10^{-7}$ resolvia o exercício e garantia 7 cdc pois $M_1 \leq 0.5\times10^{-7}$.

$\boxed{2.^{\text{o}}\ \text{Majorante}}$

Vou obter um majorante "mais fino" (sharp bound) apertando as margens da majoração. Para isso usarei alguma análise extra.

Como $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$,

obtemos

$$\sin\left(\xi - \pi\right) = \sin \xi \cos(-\pi) + \sin(-\pi) \cos \xi$$

$$\sin\left(\xi - \pi\right) = -\sin \xi$$

$$|\sin \xi| = |\sin(\xi - \pi)| = \sin(\pi - \xi) = \sin\theta, \quad \theta = \pi - \xi$$

uma vez que $\xi \in]3, \pi[$, teremos $\theta = \pi - \xi \in]0, \pi - 3[$

Sabemos também que $\sin\theta \leq \theta$, pois $\theta > 0$.

Assim, podemos obter novo majorante

$$\left| \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} (3-\pi)^6 \right| \leq \frac{\theta}{720} (0.14159\ldots)^6$$

Mas $\theta \in]0, 0.14159\ldots[$, pelo que

$$\left| \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} (3-\pi)^6 \right| \leq \frac{(0.14159\ldots)^7}{720} \leq \frac{(0.1416)^7}{720}$$

$$\left| \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} (3-\pi)^6 \right| \leq 0.1585\ldots \times 10^{-9} \leq \underbrace{\boxed{0.16 \times 10^{-9}}}_{M_2}$$

$M_2 = 0.16 \times 10^{-9}$ garantia 9 cdc.

<u>Nota</u>: Evitei usar o cálculo "exato" de $\sin 3 = 0.141120081\ldots$ para me colocar na posição de resolver o exercício só com contas da 4ª classe.

$\boxed{\text{Anexo}}$

Cálculo de $T_\pi^5(f(3))$:

$$T_\pi^5(f(3)) = f(\pi) + f'(\pi)(3-\pi)^1 + f''(\pi)\frac{(3-\pi)^2}{2} + f'''(\pi)\frac{(3-\pi)^3}{3!} + \dots$$

$$\dots + f^{IV}(\pi)\frac{(3-\pi)^4}{4!} + f^{V}(\pi)\frac{(3-\pi)^5}{5!}$$

$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow f(\pi) = \sin\pi = 0$

$f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow f'(\pi) = \cos\pi = -1$

$f''(x) = -\sin x \quad \Rightarrow f''(\pi) = -\sin\pi = 0$

$f'''(x) = -\cos x \quad \Rightarrow f'''(\pi) = -\cos\pi = 1$

$f^{IV}(x) = \sin x \quad \Rightarrow f^{IV}(\pi) = \sin\pi = 0$

$f^{V}(x) = \cos x \quad \Rightarrow f^{V}(\pi) = \cos\pi = -1$

$$T_\pi^5(f(3)) = 0 - (3-\pi)^1 + 0 + \frac{(3-\pi)^3}{3!} + 0 - \frac{(3-\pi)^5}{5!}$$

$$T_\pi^5(f(3)) = (\pi-3) - \frac{(\pi-3)^3}{6} + \frac{(\pi-3)^5}{120}$$

No MatLab (para ter aproximações com 16 dígitos):

$$\left.\begin{array}{l} T_\pi^5(f(3)) = \underline{0.141\ 120\ 008}\ 286\ 193\dots \\ \sin(3) = \underline{0.141\ 120\ 008}\ 059\ 867\dots \end{array}\right\rangle\ 9\,\text{cdc}$$

$$|T_\pi^5(f(3)) - \sin(3)| = 0.226\dots\times10^{-9} \le M_2 = 0.16\dots\times10^{-9}.$$

//