

## SÉRIES DE POTÊNCIAS

Determinações do Domínio, Intervalo e Raio de Conv.

Para cada uma das séries seguintes determine:

- O centro ( $c$ ) da série;
- O termo geral ( $a_m$ ) dos coeficientes da série;
- O raio ( $R$ ) de convergência;
- O intervalo de convergência ( $I$ );
- O domínio de convergência ( $D$ )  
(indicando os pontos onde a conv.  
é simples ou absoluta).

(A) 
$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{m+1} \cdot 3^m} x^m$$

Solução:  
 $c = 0, a_m = \frac{1}{\sqrt{m+1} \cdot 3^m}$   
 $R = 3, I = ]-3, 3[$   
 $D = [-3, 3[$  conv. abs.  
 ↑  
 nimp. conv.       $x \neq -3$

SLIDE #109.a)

(B) 
$$\sum_{m=0}^{+\infty} 3^m (x+5)^m$$

$c = -5, a_m = 3^m$   
 $R = \frac{1}{3}, I = ]-\frac{16}{3}, -\frac{14}{3}[$   
 $D = I$  conv. abs.

(C) 
$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{g^{m+1} m^2} (x-3)^m$$

$c = 3, a_m = \frac{2}{g^{m+1} m^2}$   
 $R = g, I = ]-6, 12[$   
 $D = [-6, 12]$  de conv. abs.

D) 
$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m-1}{m^{2m}} x^m$$

#109.b)

E) 
$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{3^m}{m 2^{m+2}} (x-1)^m$$

F) 
$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(2m)!}{m!} x^m$$

G) 
$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\ln m}{m} (x+2)^m$$

#109.e)

H) 
$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m 6^m} (3x-2)^m$$

(Sugestão:  $z = 3x$ )

Solve de pol.  $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m 6^m} (z-z)^m$

#109.d)

I) 
$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln m} x^{3m}$$

(Sugestão:  $z = x^3$ )

Solve de pol.  $\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln m} z^m$

$C = 0, a_m = \frac{m-1}{m^{2m}}$

$R = +\infty, I = R$

$D = R, \text{conv. abs.}$

$C = 1, a_m = \frac{3^m}{m 2^{m+2}}$

$R = \frac{2}{3}, I = ]-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}[$

$D = I, \text{conv. abs.}$

$C = 0, a_m = \frac{(2m)!}{m!}$

$R = 0, I = \{0\}$

$D = \{0\}, \text{conv. abs.}$

$C = -2, a_m = \frac{\ln m}{m}$

$R = 1, I = ]-3, -1[$

$D = [-3, -1[, \text{conv. abs.}$   
conv. simples

$C_z = 0, a_m = \frac{(-1)^m}{m 6^m}$

$R_z = 6, I_z = ]-4, 8[$

$D_z = ]-4, 8]$

$D_x = ]-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}[$

$C_z = 0, a_m = \frac{1}{\ln m}$

$R_z = 1, I_z = ]-1, 1[$

$D_z = [-1, 1[$

$D_x = [-1, 1[$

Ca'lculo II - Aula P(10-11)  
12 de Março de 2007

Exemplos e Exercícios

Séries de Potências

Determinação do Domínio, Intervalo e Raio da Conv.

(págs. 94 - 105) **213**

**4.4**

Resultado Fundamental:

Convencionando  $\frac{1}{+\infty} = 0$  e que  $\frac{1}{0} = +\infty$  podemos afirmar que o raio de conv.  $R$  de uma série de potências que satisfaz a condições  $a_m \neq 0$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$  pode ser dado por

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

$$\text{ou } R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[m]{|a_n|}}$$

(sempre que exista)

**Exercícios 2.4**

1. — Em cada uma das alíneas que se seguem determine o domínio de Conv. S da série considerada indicando os pontos onde a conv. é simples ou absoluta.

Háde 105  
a) (a)

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{m+1}} \cdot 3^m x^m$$

Calcule-se;

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{1}{\sqrt{m+n+1}} \cdot 3^m \right|}{\left| \frac{1}{\sqrt{m+2}} \cdot 3^{m+1} \right|}$$

como  $\frac{1}{\sqrt{m+1} \cdot 3^m} \neq 0$   
 $\forall m \in \mathbb{N}$

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sqrt{m+2} \cdot 3^{m+1}}{\sqrt{m+1} \cdot 3^m} \right|$$

$$R = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{m+2}{m+1}} \cdot 3 = 3$$

Logo a série converge absolutamente no intervalo  $]-3, 3[$

Para  $x = 3$ , temos

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{m+1}} 3^m \quad \text{que diverge}$$

Para  $x = -3$ , temos

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{m+1}} 3^m (-3)^m$$

$$\boxed{(-3)^m = (-1)^m \cdot 3^m}$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\sqrt{m+1}} 3^m$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\sqrt{m+1}}$$

A soma dos módulos diverge, mas pelo Crit. de Leibniz (alternada,  $\frac{1}{\sqrt{m+1}}$  decrescente e  $\frac{1}{\sqrt{m+1}} \rightarrow 0$ ) se verifica que é convergente. Logo para  $x = -3$  é simp. conv.

$$\mathcal{D} = [-3, 3[$$

↑  
Simp.  
Conv.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$$

S109  
a)

b)  $\sum_{m=0}^{+\infty} 3^m (x+5)^m$

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Série de potências centrada em  $c = -5$

com  $a_m = 3^m \neq 0$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ .

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|3^n|}{|3^{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

A série é abs. conv. em  $I = \left[-5 - \frac{1}{3}, -5 + \frac{1}{3}\right]$

$$I = \left[-\frac{15}{3} - \frac{1}{3}, -\frac{15}{3} + \frac{1}{3}\right] = \left[-\frac{16}{3}, -\frac{14}{3}\right]$$

— Seja  $x = -\frac{16}{3}$ , obtemos a série numérica  
 $\sum_{m=0}^{+\infty} 3^m \left(-\frac{16}{3} + 5\right)^m$

com  $-\frac{16}{3} + 5 = -\frac{16}{3} + \frac{15}{3} = -\frac{1}{3}$ , obtemos

$$\sum_{m=0}^{+\infty} 3^m \left(-\frac{1}{3}\right)^m = \sum_{m=0}^{+\infty} 3^m \frac{(-1)^m}{3^m} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m$$

dev.

— Seja  $x = -\frac{14}{3}$ , como  $-\frac{14}{3} + 5 = -\frac{14}{3} + \frac{15}{3} = \frac{1}{3}$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} 3^m \left(\frac{1}{3}\right)^m = \sum_{m=0}^{+\infty} (1)$$

dev.

$$D = \left[-\frac{16}{3}, \frac{14}{3}\right] \text{ de conv. abs.}$$

Slide  
105  
b)

$$\textcircled{c} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{q^{m+1} m^2} (x-3)^m$$

Série de potências centrada em  $c=3$   
com  $a_m = \frac{2}{q^{m+1} m^2} \neq 0$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ .

O Raio R pode ser obtido por

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{2}{q^{m+1} m^2} \right|}{\left| \frac{2}{q^{m+2} (m+1)^2} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{m+2} (m+1)^2}{q^{m+1} m^2}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} q \left( \frac{m+1}{m} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} q \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^2 = q$$

Conv. Absoluta em  $]3-9, 3+9[ = ]-6, 12[$

Seja  $x = -6$ , obtemos

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{q^{m+1} m^2} (-9)^m = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{q^{m+1} m^2} (-1)^m q^m$$

$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{q} \frac{(-1)^m}{m^2}$  que conv. abs. porque  $\sum \frac{1}{m^2}$  conv.

Seja  $x = 12$ , obtemos

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{q^{m+1} m^2} (12-3)^m = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{q^{m+1} m^2} q^m$$

$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{q m^2}$  conv. abs. porque  $\sum \frac{1}{m^2}$  conv.  
 $D = [-6, 12]$  de conv. abs.

$$\frac{S109}{b)} \quad \textcircled{d} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n^{2n}} x^n$$

Série de pot. centrada na origem com  $a_n = \frac{n-1}{n^{2n}}$  que se anula para  $n=1$ .

Consideramos a série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n^{2n}} x^n \text{ também centrada na}$$

origem e com  $a_n = \frac{n-1}{n^{2n}} \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_2$

Calcular-se:

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{n-1}{n^{2n}} \right|}{\left| \frac{n}{(n+1)^{2(n+1)}} \right|}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1) (n+1)^{2(n+1)}}{n \cdot n^{2n}}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n+1)^{2n+2}}{n^{2n}}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n+1)^{2n} \cdot (n+1)^2}{n^{2n}}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{2n} \cdot (n+1)^2$$

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n} \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^2 \cdot (n+1)^2$$

$\downarrow$        $\downarrow$        $\downarrow$   
 ①      12      +∞

$R = +\infty$ , A série conv. abs.  
em todo o R.

S109  
f)

$$\textcircled{e} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{3^m}{m 2^{m+2}} (-1)^m$$

Série de pot. centrada em  $c=1$ ,

com  $a_m = \frac{3^m}{m 2^{m+2}} \neq 0$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$

$$R = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{3^m}{m 2^{m+2}} \right|}{\left| \frac{3^{m+1}}{(m+1) 2^{m+3}} \right|} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{3^m (m+1) 2^{m+2}}{3^{m+1} m 2^{m+3}}$$

$$R = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{2(m+1)}{3m} = \frac{2}{3}$$

Conv. abs. em  $\left[ 1 - \frac{2}{3}, 1 + \frac{2}{3} \right]$

" em  $\left[ -\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right]$

Seja  $\alpha = -\frac{1}{3}$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{3^m}{m 2^{m+2}} \left( -\frac{1}{3} - 1 \right)^m = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{3^m}{m 2^{m+2}} \left( -\frac{4}{3} \right)^m$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{3^m}{m 2^{m+2}} (-1)^m \left( \frac{4}{3} \right)^m = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{4^m}{m 2^{m+2}} (-1)^m$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{4^m}{4m 2^m} (-1)^m = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2^m}{4m} (-1)^m$$

div. pela CNC  
pois  $\frac{2^m}{4m} \rightarrow +\infty$

Desta  $x = \frac{5}{3}$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{3^m}{m 2^{m+2}} \left(\frac{5}{3} - 1\right)^m$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{3^m}{m 2^{m+2}} \frac{2^m}{3^m}$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2^m}{m 2^m \cdot 4} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m} \text{ div.}$$

$\mathcal{D} = ]-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}[$  de conv. abs.

S109 0)  $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(2m)!}{m!} x^m$

Série de pot. centrada na origem  
com  $a_m = \frac{(2m)!}{m!} \neq 0$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$

Calcular-se:

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{(2n)!}{n!} \right|}{\left| \frac{[2(n+1)]!}{(n+1)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)! (2n)!}{n! [2(n+1)]!}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) n! (2n)!}{n! (2n+2) (2n+1) \cancel{(2n)!}}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} = 0$$

$$\mathcal{D} = \{0\} //$$

$$\frac{S109}{d)} \quad \textcircled{g} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} (x+2)^n$$

Série de pot. centrada em  $c = -2$   
 com  $a_n = \frac{\ln n}{n} = 0$  para  $n = 1$

Considerarei

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} (x+2)^n \text{ centrada em } c = -2$$

com  $a_n = \frac{\ln n}{n} \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$

Calculo:

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{\ln n}{n} \right|}{\left| \frac{\ln(n+1)}{n+1} \right|}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \ln n}{n \ln(n+1)}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 1$$

$\downarrow$        $\downarrow$

, pela regra Cauchy  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = 1$

$$R = 1$$

Conv. absoluta em  $]-2-1, -2+1[$

$]-3, -1[$

$$\boxed{x = -3}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} (-3+2)^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} (-1)^n$$

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\ln m}{m} (-1)^m$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$$

para  $x \in [3, +\infty)$

$\frac{\ln m}{m}$  decrece

$$\frac{\ln m}{m} \rightarrow 0$$

Leibniz

para  
concluir

que:  
é conv.

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\ln m}{m} (-1)^m \text{ (alternada)}$$

Mas a srie dos módulos div.  
portanto temos conv. simples se  $x = -3$

$$x = -1$$

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\ln m}{m} (-1+2)^m = \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\ln m}{m} \text{ div.}$$

Comparar com  $\sum \frac{1}{m}$  div.

Logo  $D = [-3, -1[$

↑  
conv.  
simples

$$\text{S109} \quad h) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n 6^n} (3x-2)^n$$

Usarei a mudança de variável  $z = 3x$   
para obter a série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n 6^n} (z-2)^n$$

que é uma série de potências centrada  
em  $c=2$ , com  $a_n = \frac{(-1)^n}{n 6^n} \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Calculo:

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{(-1)^n}{n 6^n} \right|}{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) 6^{n+1}} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n (n+1) 6^{n+1}}{(-1)^{n+1} n 6^n}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \cdot 6}{m} = 6 //$$

Logo a série converge absolutamente  
para  $z \in ]2-6, 2+6[$

$$z \in ]-4, 8[ \quad (-6) = (1)^6 6^6$$

Desta  $z = -4$ , obtemos:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n 6^n} (-4-2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n 6^n} (-6)^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n 6^n} (-1)^n 6^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ do } v,$$

Seja  $z = 8$ , obtemos:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m 6^m} (8-2)^m = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m 6^m} 6^m \\ = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m}$$

Nimp. conv.

Logo a série  $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m 6^m} (z-2)^m$

tem Domínio de conv.  $D_z = ]-4, 8]$

↑  
Nimp. conv.

Vindo que a série

$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m 6^m} (3x-2)^m$  tem Domínio

de conv.  $D_x = ]-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}]$

↑  
Nimp. conv.

i)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} x^{3n}$

Usarei a mudança de variável  $z = x^3$   
para obter a série

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} z^n$  que é uma série de pot.

centrada na origem, com  $a_n = \frac{1}{\ln n} \neq 0$ , then.

Calculo

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{1}{\ln n} \right|}{\left| \frac{1}{\ln(n+1)} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$$

Então, a série  $\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln m} z^m$  conv.  
absolutamente em  $\mathbb{C} - [-1, 1]$

Seja  $z = -1$ , obtemos

$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\ln m}$  que é uma série alternada  
com  $\frac{1}{\ln m}$  decrescente e  $\frac{1}{\ln m} \rightarrow 0$

Logo por Leibniz é conv., mas

$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln m}$  div. (compare com  $\sum \frac{1}{m}$  que div.)

pelo que para  $z = -1$  temos: conv., p/ls.  
simples.

Seja  $z = 1$ , obtemos

$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln m}$  que já vimos que div.

Assim, o domínio de conv. abs.

$$\mathcal{D}_z = [-1, 1]$$

Então

$$\mathcal{D}_z = [-1, 1] \quad \text{pois } z = x^3$$

