② — Em cada uma das alíneas que se seguem determine o domínio de conv. da série considerada indicando os pontos onde a conv. é simples ou absoluta.

Sugestão: Em cada uma das alíneas consideradas utilize o Critério de Cauchy ou o Critério de D'Alembert para determinar um subconjunto do domínio de conv. da série considerada.

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(-4)^n} x^{2n+1}$

Note: Não é uma série de potências na forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x^n - c)^n$, pelo que a abordagem de cálc. do raio não pode ser a mesma.

D'Alembert:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{x^{2(n+1)+1}}{(-4)^{n+1}}\right|}{\left|\frac{x^{2n+1}}{(-4)^n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}} \frac{(-4)^n}{(-4)^{n+1}}\right|$$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^2\, 4^n}{4^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}$$

Se $\frac{x^2}{4} \in [0, 1[$ então a série é abs. conv.

ou seja se $\frac{x^2}{4} < 1 \Leftrightarrow x^2 < 4$

$x \in]-2, 2[$ a série é abs. conv.

- Seja $x = -2$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{(-4)^n} (-2)^{2n+1}}_{a_n}$$

$$a_n = \frac{(-2)^{2n+1}}{(-4)^n} = \frac{(-2)\,(-2)^{2n}}{(-4)^n} = \frac{(-2)\left[(-2)^2\right]^n}{(-4)^n}$$

$$a_n = \frac{(-2)\ \cancel{4^n}}{(-1)^n\ \cancel{4^n}} = \frac{-2}{(-1)^n} = 2\,(-1)^{n+1}$$

A série numérica $\sum_{n=0}^{+\infty} 2\,(-1)^{n+1}$ diverge pela CNC

- Seja $x = 2$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{(-4)^n} (2)^{2n+1}}_{a_n}$$

$$a_n = \frac{2^{2n+1}}{(-4)^n} = \frac{2 \cdot 2^{2n}}{(-1)^n\, 4^n} = \frac{2\ \cancel{4^n}}{(-1)^n\ \cancel{4^n}} = 2\,(-1)^n$$

A série numérica $\sum_{n=0}^{+\infty} 2\,(-1)^n$ diverge pela CNC

O domínio de conv. da série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(-4)^n} x^{2n+1} \quad \text{é} \quad]-2, 2[$$

onde a série conv. absolutamente.

$$\boxed{(b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-5)^n}{n} x^{n+1}}$$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left| \frac{(-5)^{n+1}}{n+1} x^{n+2} \right|}{\left| \frac{(-5)^n}{n} x^{n+1} \right|}$$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-5)^{n+1}}{(-5)^n} \frac{n}{(n+1)} x \right|$$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left| 5x \frac{n}{n+1} \right| = 5|x|$$

Se $5|x| \in [0, 1[$ a série é abs. conv.

$5|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{5}$

a série conv. abs. se $\Big\rangle\ x \in]-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}[$

$\boxed{\text{Seja } x = -\frac{1}{5}}$, obtemos:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-5)^n}{n} \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1}}_{a_n}$$

$$a_n = \frac{(-5)^n}{n} \left(-\frac{1}{5}\right)^n \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$a_n = \frac{\cancel{(-1)^n}\ \cancel{5^n}}{n} \frac{(-1)}{5} \frac{\cancel{(-1)^n}}{\cancel{5^n}} = -\frac{1}{5n}$$, logo $\sum \left(-\frac{1}{5n}\right)$ div.

$\boxed{\text{Seja } x = \frac{1}{5}}$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-5)^n}{n}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}_{a_n}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n \cancel{5^n}}{n} \frac{1}{\cancel{5^n}}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{(-1)^n}{5n}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5n}$ é simp. conv.

Conclusão, o dom. de conv. é:

$$\mathcal{D} = \left]-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$$

simp. conv.

Questão

Exercício 1.5.1 Determine o domínio de convergência das seguintes séries de potências, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{(n-1)!}$

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}x^n$

6. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n!(x-2)^n}{n-1}$

9. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{\ln n}$

10. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}(x-2)^n$

13. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n!+1}$

14. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^6+1}}(1-x)^n$

$\boxed{1.5.1.13}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\,(x-1)^n}{n!+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n, \text{ com } \begin{cases} c = 1 \\ a_n = \dfrac{n!}{n!+1} \end{cases}$$

Raio de convergência:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{n!}{n!+1}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)!+1}} \right|$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,[(n+1)!+1]}{(n+1)!\,[n!+1]}$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)\,n!+1}{n!+1}\right]$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n+1}\left(\frac{(n+1)\,n!}{n!+1} + \frac{1}{n!+1}\right)\right]$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{n!}{n!+1} + \frac{1}{(n+1)(n!+1)}\right]$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n!}}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)(n!+1)}}_{\to 0} = 1$$

$$IC =]R-c, R+c[=]1-1, 1+1[=]0, 2[$$

— Se $x=0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\,(-1)^n}{n!+1} \quad \text{diverge pela CNC}$$

$$u_n = (-1)^n \frac{n!}{n!+1} \quad , n \in \mathbb{N}_0 \text{ , diverge}$$

- A subsucessão de u_n para n ímpar é $\underset{(n\ \text{ímpar})}{v_n} = -\frac{(2n+1)!}{(2n+1)!+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$
- A subsucessão de u_n para n par é $\underset{(n\ \text{ímpar})}{w_n} = \frac{(2n)!}{(2n)!+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +1$

— Se $x=2$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n!+1} \quad \text{diverge pela CNC}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n!+1} = 1 \neq 0$$

Abs. Conv. em $D_C = I_C =]0,2[$

$\boxed{1.5.1.14}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^6+1}} (1-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{n(-1)^n}{\sqrt{n^6+1}}}_{a_n} (x-1)^n$$

$c = 1$

Raio de Conv.

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{n(-1)^n}{\sqrt{n^6+1}}}{\frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^6+1}}} \right|$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\sqrt{(n+1)^6+1}}{(n+1)\sqrt{n^6+1}} = R = \lim \left[\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{(n+1)^6+1}{n^6+1}}}_{\to 1} \right]$$

$R = 1$, $IC =]1-1, 1+1[=]0,2[$

- Se $x = 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^6+1}} \quad \text{que converge}$$

$$0 < \frac{n}{\sqrt{n^6+1}} < \frac{n}{\sqrt{n^6}} = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ conv.

- Se $x = 2$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(-1)^n}{\sqrt{n^6+1}}$ conv. porque a série dos módulos converge

Abs. Conv. em $DC = IC =]0,2[$

Guião

Exercício 1.5.3 Mostre que:

1. se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente num dos extremos do seu domínio de convergência, então também é absolutamente convergente no outro extremo.
2. se o domínio de convergência de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é $]-r, r]$, então a série é simplesmente convergente em $x = r$.

① As séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-r)^n$

têm a mesma série dos módulos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n r^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n (-r)^n|$$

pois $r > 0$.

Como no enunciado se afirma que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ ou a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-r)^n$ converge absolutamente então a série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$ converge. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-r)^n$ convergem absolutamente.

② $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ tem domínio de conv. $DC =]-r, r]$

Então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ converge

e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-r)^n$ diverge.

Como a série dos módulos de ambas é a mesma (ver resolução ①) temos que a série dos módulos de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ é divergente. Na verdade, se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-r)^n$ diverge a sua série dos módulos diverge. //