Esclarecimento de dúvidas sobre relações/equações de recorrência (1ª parte do capítulo 4)

**A questão** (slide 4 das funções geradoras)

Em problemas de contagem, tipicamente procuramos o número $a_n$ de maneiras de «fazer algo» com $n$ "objetos" (distinguíveis ou indistinguíveis).

Equação (ou relação) de recorrência

Cada termo $a_n$ de uma sucessão $(a_n)_{n\geq 0}$ é descrito em função dos termos anteriores e, eventualmente, de $n$:

(*) $a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k})$,

com $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ e $n \geq k$.

OBS: para definir $a_n$ recuamos até ao termo de ordem $n-k$.
$n-(n-k) = k \Rightarrow$ (*) é uma equação de recorrência de ordem $k$

Exemplos:

1) $a_n^2 = 2a_{n-1}^2$, equação de recorrência não linear de ordem 1

2) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, equação de recorrência linear homogénea de ordem 2

3) $p_n = 2p_{n-1} + 1$, equação de recorrência linear não homogénea de ordem 1

4) $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_n - 2(3^n)$, equação de recorrência linear não homogénea de ordem 3 $(n+3-n=3)$

**A questão** (slide 4 das funções geradoras)

Em problemas de contagem, tipicamente procuramos o número $a_n$ de maneiras de «fazer algo» com $n$ objetos (distinguíveis ou indistinguíveis).

No início do capítulo 4 modelamos problemas de contagem através de uma equação de recorrência (slides 4-6, folha 4 - exercícios 3, 4, 5 e 10; o exercício 12 também é deste tipo mas a sucessão depende de duas variáveis: $h(x,n)$).

Na segunda parte das equações (ou relações) de recorrência resolvemos equações de recorrência lineares com coeficientes constantes através da equação caracteconstantes através da equação característica (slides 13-43 e folha4 - exercícios 6, 7, 8, 9, 10, 13).

**Nota** (slide 12 de equações de recorrência)

Resolver uma relação de recorrência significa determinar todas as suas soluções. Estamos particularmente interessados em descrever as soluções com fórmulas fechadas; ou seja, na forma

$a_n =$ «uma expressão que apenas envolve a variável $n$».

fórmulas não recursivas

OBS:

Uma equação de recorrência linear tem um conjunto infinito de soluções. Para determinar uma destas soluções é necessário termos $k$ condições iniciais que são os primeiros $k$ termos da sucessão, onde $k$ é a ordem da equação de recorrência.

Consideremos o exercício 10 da folha4:

10. Sendo $p_n$ o número de partições de um conjunto de cardinalidade $n$ em dois subconjuntos não vazios, deduza uma equação de recorrência para $p_n$ e encontre a respetiva solução.

Começamos por determinar a equação de recorrência, isto é, vamos "obter $p_n$ em função de termos anteriores e, eventualmente, de $n$."

Seja $Y_n = \{y_1, \dots, y_{n-1}, y_n\}$.

**Exemplo ilustrativo:**
Algumas partições de $Y_4=\{1,2,3,4\}$ em dois subconjuntos:
$\{\{1,2\},\{3,4\}\}$; $\{\{1,2,3\},\{4\}\}$;
$\{\{1\},\{2,3,4\}\}$; $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$.

Voltamos ao conjunto genérico
$Y_n=\{y_1,\dots,y_{n-1},y_n\}$.

$n=1$: $Y_1=\{y_1\} \longrightarrow p_1=0$

$n=2$: $Y_2=\{y_1,y_2\}$ tem uma única partição em dois subconjuntos:
$\{\{y_1\},\{y_2\}\}$. Logo $p_2=1$.

Seja $n\geq 3$ e consideremos o elemento $y_n\in Y_n$. Vamos denotar por $\mathcal{P}_n$ o conjunto das partições de $Y_n$ em dois subconjuntos.
Note-se que $p_n=|\mathcal{P}_n|$, o número de elementos de $\mathcal{P}_n$.

1

(I) Note-se que uma das partições pertencentes a $\mathcal{P}_n$ é da forma
$\{\{y_1,y_2,\dots,y_{n-1}\},\{y_n\}\}$.

Os restantes elementos de $\mathcal{P}_n$ são partições de $Y_n$ em dois são partições de $Y_n$ em dois subconjuntos tais que o subconjunto que contém $y_n$ contém pelo menos outro elemento de

$$Y_{n-1} = \{y_1, \dots, y_{n-1}\}.$$

Podemos considerar que cada uma destas partições de $Y_n$ é obtida a partir de uma partição de $Y_{n-1}$ em dois subconjuntos, inserindo $y_n$ num destes subconjuntos.

Exemplo ilustrativo:

$Y_4 = \{1, 2, 3, 4\}$
$Y_3 = \{1, 2, 3\}$

A partição $\{\{1,3\}, \{2,4\}\}$ de $Y_4$ é obtida da partição $\{\{1,3\}, \{2\}\}$ de $Y_3$, inserindo 4 no subconjunto $\{2\}$.

Note-se que também existe a possibilidade de inserir o 4 no outro subconjunto, $\{1,3\}$, obtendo outra partição de $Y_4$:

$$\{\{1,3,4\}, \{2\}\}.$$

Portanto, cada partição de $Y_{n-1}$ em dois subconjuntos A e B dá origem a duas partições de $Y_n$ em dois subconjuntos, introduzindo $y_n$ em A ou em B.

Conclui-se, assim, que o número de partições de $Y_n$ em dois subconjuntos tais que o subconjunto que contém $y_n$ contém pelo menos outro elemento de

$Y_{n-1}=\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ é o dobro do número de partições de $Y_{n-1}$ em dois subconjuntos, isto é, é igual a

II $$\boxed{2|\mathcal{P}_{n-1}| = 2\,p_{n-1}.}$$

De I e II obtém-se uma equação (ou relação) de recorrência para $p_n$ (recorde-se $p_n = |\mathcal{P}_n|$) :

$$p_n = 2\,p_{n-1} + 1$$

▷ equação de recorrência de ordem 1

Para obter uma solução é necessário uma condição inicial ($p_1=0$ ou, em alternativa, $p_2=1$).

$$\boxed{\begin{array}{l} p_n = 2p_{n-1}+1, \quad n\geq 2 \\ p_1=0 \end{array}}$$

EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA LINEAR NÃO HOMOGÉNEA DE ORDEM 1 $(n-(n-1)=1)$

Vamos resolver a equação de recorrência, isto é, vamos determinar a solução (a fórmula fechada para $p_n$) que satisfaz a condição inicial $p_1=0$.

Vamos aplicar o método da equação característica.

(i) Determinação da solução geral da equação de recorrência homogénea associada a .

$$p_n = 2p_{n-1}+1 \longrightarrow p_n = 2p_{n-1}$$

$$x^n = 2x^{n-1}, \quad x\neq 0$$

menor expoente de $x$: $n-1$

$$x^n - 2x^{n-1} = 0 \Leftrightarrow x^{n-1}(x-2)=0 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \boxed{x-2=0}$$

equação característica

$2 \longrightarrow$ raiz característica com multiplicidade 1.

solução geral da equação de recorrência

$p_n = 2p_{n-1}$ : $\boxed{p_n^{(h)} = c\,2^n, \quad c - \text{constante}}$

(ii) Determinar uma solução particular da equação $p_n = 2p_{n-1} + 1$ (ver ●).

ver slides 36-43

1 é um polinómio de grau $j=0$ (ver caso B no slide 36).

Como 1 não é raiz característica $m=0$ (porque m é a multiplicidade do número 1 enquanto raiz característica.

Uma solução particular da equação $p_n = 2p_{n-1} + 1$ é do tipo

$$\boxed{p_n^{(p)} = (A_0 + A_1 n + \dots + A_j n^j)\, n^m.}$$

Como $j = m = 0$

$\boxed{p_n^{(p)} = A_0.}$ Consideremos $p_n^{(p)} = A$, onde A é uma constante.

Para calcular A substituimos na equação que obtivemos atrás (ver ●):

$$p_n^{(p)} = 2\,p_{n-1}^{(p)} + 1 \iff A = 2A + 1 \iff$$

$A = -1.$

$A=-1.$

Então $\boxed{a_n^{(p)} = -1.}$

(iii) Determinar a solução geral de $p_n = 2p_{n-1}+1$

$p_n = p_n^{(h)} + p_n^{(p)}$ logo

$\boxed{p_n = c\,2^n - 1,}$ onde $c$ é uma constante é

a solução geral de $p_n = 2p_{n-1}+1.$

(iv) Determinar a solução de $p_n = 2p_{n-1}+1$ que satisfaz a condição inicial $p_1 = 0.$

$$p_1 = 0 \iff 2c-1=0 \iff c=\frac{1}{2}$$

solução:

$$p_n = \frac{1}{2}2^n - 1 \iff p_n = 2^{n-1} - 1, \quad n \geq 1.$$

Conclui-se que, para $n \geq 1$, o número de partições do conjunto $Y_n = \{y_1, \dots, y_n\}$ em dois subconjuntos é

$$2^{n-1} - 1$$

Importante:

1 – Se a equação de recorrência que vamos resolver é uma equação de recorrência linear homogénea passamos do passo (i) para o passo (iv) porque não é necessário calcular uma solução particular.

2 – Se a equação a resolver é uma equação de recorrência linear não homogénea (como no exercício 10), o cálculo das constantes da solução geral $a_n^{(h)}$ da equação de recorrência homogénea associada (obtida no passo (i)) só é efetuada no último passo, depois de determinar uma solução particular, $a_n^{(p)}$ e a solução geral (passos (ii) e (iii)). Se estas constantes forem calculadas logo a seguir ao passo (i) obtemos valores errados.

---

Observação sobre a determinação da solução geral de uma equação de recorrência homogénea

Se $r$ é uma raiz característica com multiplicidade $t$, esta raiz "contribui" para a solução geral com a seguinte expressão

$$\underbrace{(c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \dots + c_{t-1} n^{t-1})}_{\text{polinómio de grau } t-1 \text{ na variável } n} r^n$$

$c_0, \dots, c_{t-1}$ são constantes

A solução geral é a soma destas expressões, considerando todas as raízes características e as respetivas multiplicidades.

Por exemplo, se uma equação de recorrência homogénea tem as raízes características

| | | | contribuição: |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $\longrightarrow$ multiplicidade | $3$ | $\longrightarrow (c_1 + c_2 n + c_3 n^2)(-1)^n$ |
| $1$ | $\longrightarrow$ " | $2$ | $\longrightarrow (c_4 + c_5 n) 1^n$ |
| $5$ | $\longrightarrow$ " | $1$ | $\longrightarrow c_6 5^n$ |

solução geral: $a_n = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2)(-1)^n + (c_4 + c_5 n) + c_6 5^n$

$c_i$ – constante, $1 \leq i \leq 6$

---

observação sobre equações de recorrência não lineares que podem ser resolvidas com os métodos de resolução de equações de recorrência lineares com coficientes constantes:

Algumas equações não lineares podem ser convertidas em equações lineares que podem ser resolvidas através do método da equação característica. Não esquecer, na última parte da resolução, de converter a solução da equação de recorrência linear numa solução da equação de recorrência não linear.

Ver slides 44–49 e exercício 11 da folha 4.

---

Observação relativa à determinação de uma equação de recorrência para um problema de contagem.

Recorrência ⟷ Recursividade

Ideia subjacente:

Cada "passo" é determinado pelos "passos" anteriores.

No exercício 10 fixámos o elemento $y_n$ e dividimos as partições do conjunto $\{y_1, \dots, y_n\}$ em dois subconjuntos em dois casos:

- a partição $\{\{y_1, \dots, y_{n-1}\}, \{y_n\}\}$ — 1 partição
- as restantes partições obtidas por inserir $y_n$ num dos 2 subconjuntos de uma partição de — $2p_{n-1}$ partições

inserir $y_n$ num ... a ...
juntos de uma partição de
$\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ em dos subconjuntos.

$2p_{n-1}$ partições

$$p_n = 2p_{n-1} + 1$$

No exercício 3 para obtermos uma equação de recorrência consideramos as possibilidades para o último passo do Pedro ao subir os n degraus.

Último passo:

(i) sobe 1 degrau:
existem $a_{n-1}$ maneiras de subir os n degraus terminando com um passo em que sobe um degrau;

(ii) sobe 2 degraus:
existem $a_{n-2}$ ...

(iii) sobe 3 degraus
existem $a_{n-3}$ ...

Portanto, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

($n \geq 4$, porque para $n=4$ temos
$a_4 = a_3 + a_2 + a_1$ → 1.º termo da sucessão

No Exercício 5 também consideramos o último elemento da sequência.

Seja $S_n$ o conjunto de sequências binárias de comprimento $n$ que têm 3 zeros consecutivos.

Casos a analisar:

(i) o último elemento é 1: $\underbrace{\_\ \_\ \cdots\ \_}_{\text{sequência pertencente a } S_{n-1}}\ \underset{n}{1}$ (posições $1\ 2\ \ldots\ n-1\ n$)

número destas sequências: $|S_{n-1}| = a_{n-1}$

(ii) o último elemento é 0. Temos vários casos a analisar:

(1) sequências que terminam em 10

$\underbrace{\underset{1}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \cdots\ \underset{n-2}{\_}}_{\text{sequência pertencente a } S_{n-2}}\ \underset{n-1}{1}\ \underset{n}{0}$

número destas sequências: $|S_{n-2}| = a_{n-2}$

(2) sequências que terminam em 100:

$\underbrace{\underset{1}{\_}\ \cdots\ \underset{n-3}{\_}}_{\text{sequência pertencente a } S_{n-3}}\ \underset{n-2}{1}\ \underset{n-1}{0}\ \underset{n}{0}$

número destas sequências: $|S_{n-3}| = a_{n-3}$

(3) sequências que terminam em 000

$$\underbrace{\underset{1}{\_} \ \cdots \ \underset{n-3}{\_}}_{\text{sequência binária de comprimento } n-3} \ \underset{n-2}{0} \ \underset{n-1}{0} \ \underset{n}{0}$$

sequência binária de comprimento $n-3$

número destas sequências: $2^{n-3}$

Temos $a_{n-2} + a_{n-3} + 2^{n-3}$ sequências binárias de comprimento $n$ com 3 zeros consecutivos, que terminam em 0.

Equação de recorrência:

$$a_n = \underbrace{a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}}_{\text{são necessárias 3 condições iniciais.}} + 2^{n-3}$$

são necessárias 3 condições iniciais.

---

Sugestões de leitura

- Apontamentos das aulas, slides e folhas de exercício

Textos de apoio disponibilizados na página de e-learning

Texto de Apoio da UC "Matemática Discreta" – texto disponibilizado pelo Prof. Dirk, capítulo a capítulo.

Os capítulo 1, 2, 3, 4 e 5 (parte I) do texto de apoio.

pelo Prof. Dink, capítulo a capítulo.

Os capítulo 1, 2, 3, 4 e 5 (parte I) do texto de apoio.

Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos, D. Cardoso, J. Szymanski, M. Rostami - livro do Prof. Domingos Cardoso (e 2 co-autores). Alguns capítulos são baseados em textos que a Prof. Domingos escreveu para esta disciplina

~~Noções de lógica matemática, Domingos M. Cardoso, M. Paula Carvalho - versão revista em março de [illegible]~~

Estudo Autónomo: um objeto de aprendizagem ativa, A. Jorge Neves, M. Paula Carvalho - Matemática Disc

Inclui resoluções detalhadas de exercícios de vários capítulos, que saíram nos testes de um ano letivo anterior.

Estes 3 textos abordam os tópicos estudados em vários capítulos da Matemática discreta e incluem muitos exemplos e exercícios. Além disso o 1.º e o 3.º texto e muitos capítulos do 2.º texto foram escritos para a Matemática Discreta