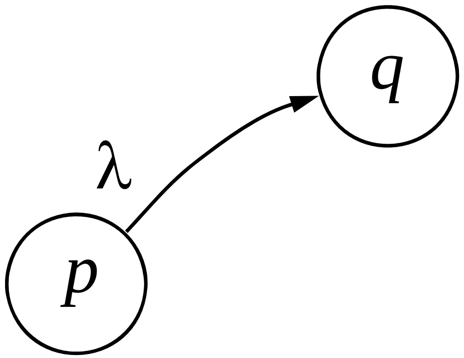
Autómatas finitos no deterministas

Definición formal: Λ

- Aunque no es estrictamente necesario, es conveniente, a veces, considerar la relación Λ (lambda mayúscula) sobre el conjunto de estados, definida de la siguiente manera

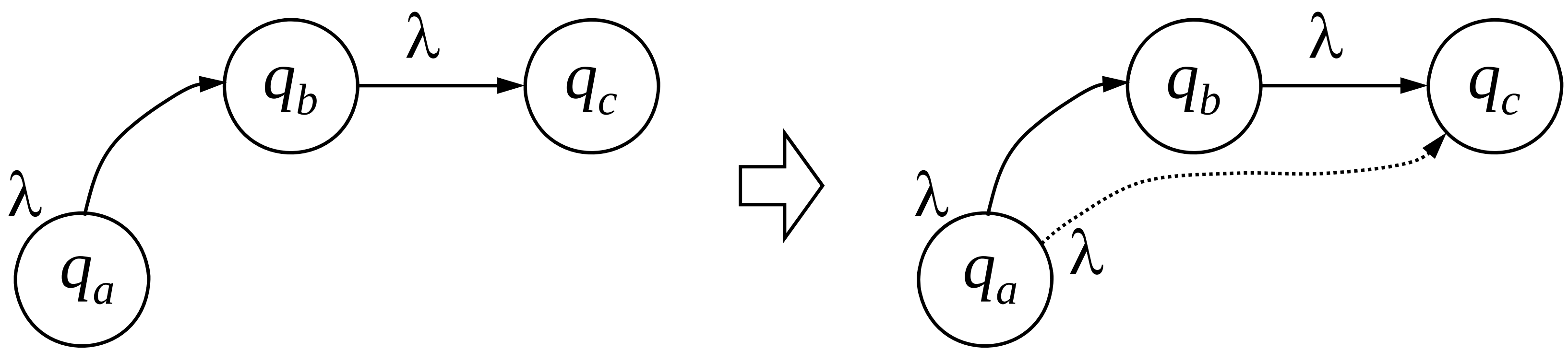
$$\forall p,q \in Q \qquad p \Lambda q \Leftrightarrow (\text{def.})\ \delta(p,\lambda)=q$$

- Gráficamente:



Definición formal: Λ

- Esta relación facilita los desarrollos teóricos y prácticos
- Las transiciones λ mencionadas explícitamente en las transiciones de un autómata, inducen otras:
  - De



  - Que sugieren el interés de Λ^+, **cierre *transitivo* de** Λ, que se define como

$p\Lambda^+q \Leftrightarrow$ "si q es accesible desde p por medio sólo de transiciones con λ, es decir, sin consumir ningún símbolo de entrada "

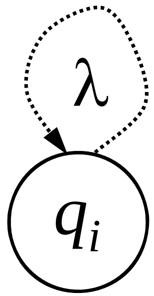
  - Y que se puede calcular de la siguiente forma $\Lambda^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda^i$

Autómatas finitos no deterministas

Definición formal: Λ

- Y, estrictamente hablando, por definición, cualquier autómata permanece en el mismo estado sin consumir símbolos de entrada. Por lo que se cumpliría

  $\forall\ A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ autómata finito y $\forall\ q_i \in Q$



- Que sugiere el interés de Λ^*, **cierre *transitivo* y *reflexivo* de** Λ, que se puede calcular como

$$\Lambda^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Lambda^i$$

- Por conveniencia, si se necesita, se asociará con Λ también el siguiente significado:

$$\forall p \in Q \qquad \Lambda(p)=\{q \in Q \mid p \Lambda q\}=\{q \in Q \mid \delta(p,\lambda)=q\}$$

  - Es decir, $\Lambda(p)$ es el conjunto de estados para los que hay una transición lambda directa desde p.

Representaciones

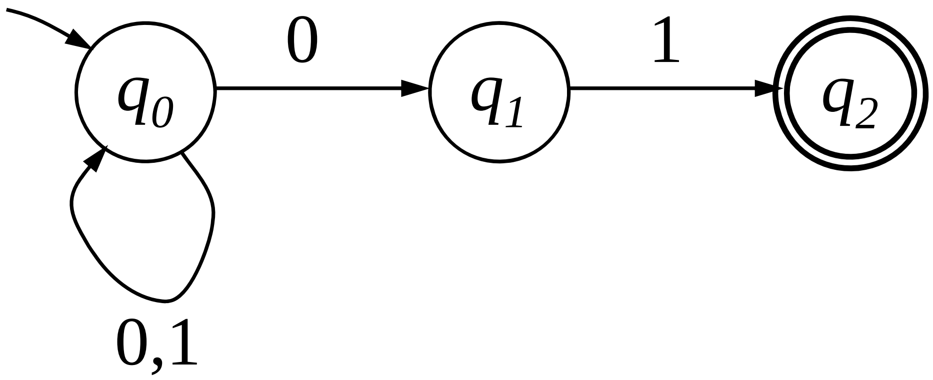
- Para la función de transición de los autómatas finitos no deterministas suelen utilizarse las mismas representaciones que para los deterministas:
  - Tablas de transición
  - Diagramas de transición
- A continuación se muestran algunos ejemplos:

Ejemplo 1

- Considérese el siguiente autómata finito no determinista:

$$A=(Q=\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma=\{0,1\}, \delta, q_0, F=\{q_2\})$$

  - Donde el diagrama de transiciones de δ es el siguiente:



Ejemplo 1

- Que también se puede representar mediante la siguiente tabla de transiciones:

	0	1	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	Φ
q_1	Φ	$\{*q_2\}$	Φ
$*q_2$	Φ	Φ	Φ

- De cuya última columna resulta claro que no hay transiciones λ por lo que

$$\Lambda = \Lambda^+ = \Lambda^* = \mathbf{0}$$

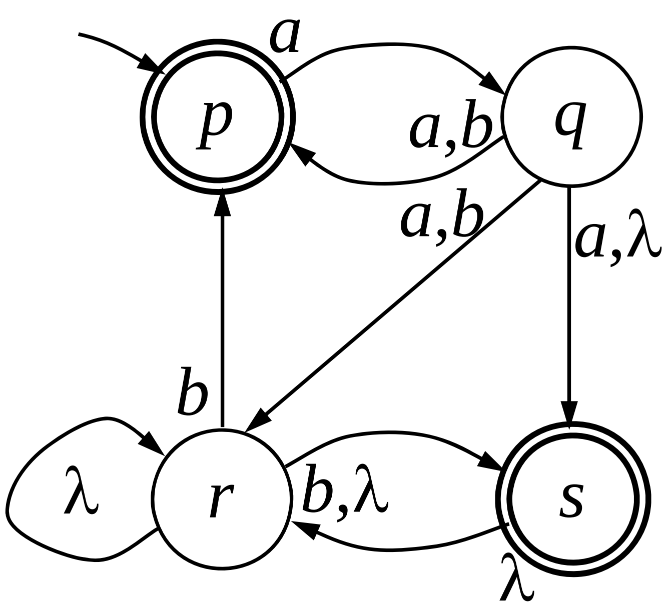
  - Donde **0** representa la matriz que consta sólo de 0's.

Ejemplo 2

- Considérese el siguiente autómata finito no determinista:

$$A=(Q=\{p,q,r,s\}, \Sigma=\{a,b\}, \delta, p, F=\{p,s\})$$

  - Donde el diagrama de transiciones de δ es el siguiente:



Ejemplo 2

- Que también se puede representar mediante la siguiente tabla de transiciones:

	a	b	λ
$\rightarrow *p$	$\{q\}$	Φ	Φ
q	$\{*p, r, *s\}$	$\{*p, r\}$	$\{*s\}$
r	Φ	$\{*p, *s\}$	$\{r, *s\}$
$*s$	Φ	Φ	$\{r\}$

Ejemplo 2

- Y que define la siguiente relación Λ:

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	0	1
r	0	0	1	1
s	0	0	1	0

- Se puede calcular la siguiente relación Λ^+:

Λ^2

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	1	0
r	0	0	1	1
s	0	0	1	1

Λ

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	0	1
r	0	0	1	1
s	0	0	1	0

Ejemplo 2

- Y que define la siguiente relación Λ:

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	0	1
r	0	0	1	1
s	0	0	1	0

- Se puede calcular la siguiente relación Λ^+:

Λ^2

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	1	0
r	0	0	1	1
s	0	0	1	1

$\Lambda \cup \Lambda^2$

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	1	1
r	0	0	1	1
s	0	0	1	1

Ejemplo 2

- Y que define la siguiente relación Λ:

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	0	1
r	0	0	1	1
s	0	0	1	0

- Se puede calcular la siguiente relación Λ^+:

Λ^2

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	1	0
r	0	0	1	1
s	0	0	1	1

Λ^3

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	1	1
r	0	0	1	1
s	0	0	1	1

$\Lambda \cup \Lambda^2 \cup \Lambda^3$

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	1	1
r	0	0	1	1
s	0	0	1	1

Ejemplo 2

- Y que define la siguiente relación Λ:

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	0	1
r	0	0	1	1
s	0	0	1	0

- Se puede calcular la siguiente relación Λ^+:

Λ^2

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	1	0
r	0	0	1	1
s	0	0	1	1

$\Lambda^3 = \Lambda^4$

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	1	1
r	0	0	1	1
s	0	0	1	1

$\Lambda \cup \Lambda^2 \cup \Lambda^3 \cup \Lambda^4$

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	1	1
r	0	0	1	1
s	0	0	1	1

Ejemplo 2

- Y que define la siguiente relación Λ:

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	0	1
r	0	0	1	1
s	0	0	1	0

- Se puede calcular la siguiente relación Λ^+:

Λ^2

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	1	0
r	0	0	1	1
s	0	0	1	1

$\Lambda^3 = \Lambda^4$

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	1	1
r	0	0	1	1
s	0	0	1	1

$$\Rightarrow \Lambda^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda^i$$

$\Lambda \cup \Lambda^2 \cup \Lambda^3 \cup \Lambda^4 = \Lambda^+$

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	1	1
r	0	0	1	1
s	0	0	1	1

Ejemplo 2

- Y que define la siguiente relación Λ:

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	0	1
r	0	0	1	1
s	0	0	1	0

- Se puede calcular la siguiente relación Λ^+ y también Λ^* (donde I representa la matriz identidad cuyos únicos 1's están en la diagonal derecha):

Λ^+

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	1	1
r	0	0	1	1
s	0	0	1	1

$$\Lambda^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Lambda^i = \Lambda^0 \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} \Lambda^i = I \cup \Lambda^+ \Rightarrow$$

Λ^*

	p	q	r	s
p	1	0	0	0
q	0	1	1	1
r	0	0	1	1
s	0	0	1	1

Ejemplo 2

- Y se puede concluir que

$\Lambda(p)=\Phi$, $\Lambda(q)=\{s\}$, $\Lambda(r)=\{r,s\}$, $\Lambda(s)=\{r\}$,

$\Lambda^{+}(p)=\Phi$, $\Lambda^{+}(q)=\{r,s\}$, $\Lambda^{+}(r)=\{r,s\}$, $\Lambda^{+}(s)=\{r,s\}$,

$\Lambda^{*}(p)=\{p\}$, $\Lambda^{*}(q)=\{q,r,s\}$, $\Lambda^{*}(r)=\{r,s\}$, $\Lambda^{*}(r)=\{r,s\}$

Λ

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	0	1
r	0	0	1	1
s	0	0	1	0

Λ^{+}

	p	q	r	s
p	0	0	0	0
q	0	0	1	1
r	0	0	1	1
s	0	0	1	1

Λ^{*}

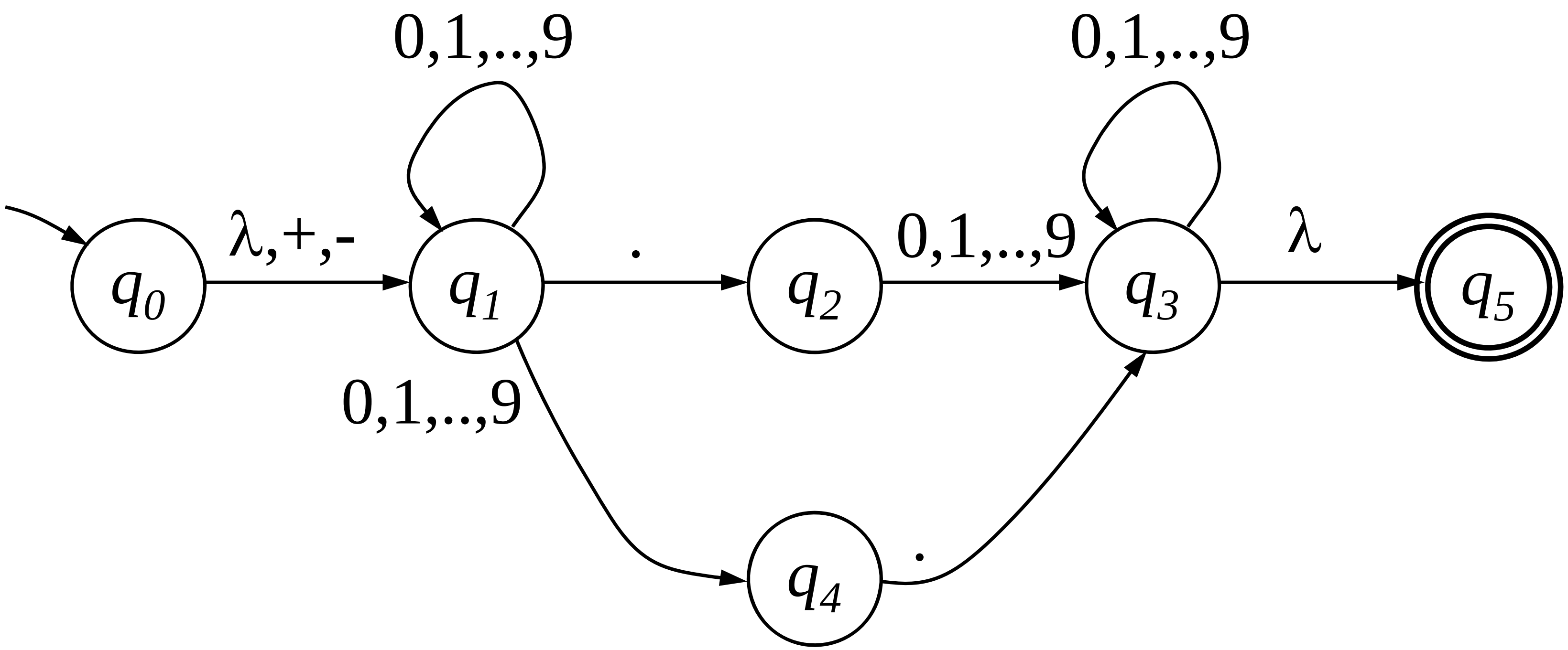
	p	q	r	s
p	1	0	0	0
q	0	1	1	1
r	0	0	1	1
s	0	0	1	1

Ejemplo 3

- Considérese el siguiente autómata finito no determinista:

$$A=(Q=\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \Sigma=\{0,1,...,9,+,-, .\}, \delta, q_0, F=\{q_5\})$$

  - Donde el diagrama de transiciones de δ es el siguiente:



Ejemplo 2

- Que también se puede representar mediante la siguiente tabla de transiciones (obsérvese que se han agrupado en una sola columna varias que serían idénticas; el nombre de la columna acumula todos los nombres como en +,- y 0,1,...,9, la tabla real tiene 14 columnas):

	+,-	0,1,...,9	.	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	Φ	Φ	$\{q_1\}$
q_1	Φ	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$	Φ
q_2	Φ	$\{q_3\}$	Φ	Φ
q_3	Φ	$\{q_3\}$	Φ	$\{*q_5\}$
q_4	Φ	Φ	$\{q_3\}$	Φ
$*q_5$	Φ	Φ	Φ	Φ

Ejemplo 3

- La función de transición define la siguiente matriz Λ que resulta ser también Λ^+, por lo que Λ^* queda como se muestra a continuación:

$\Lambda=\Lambda^+$

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_0	0	1	0	0	0	0
q_1	0	0	0	0	0	0
q_2	0	0	0	0	0	0
q_3	0	0	0	0	0	1
q_4	0	0	0	0	0	0
q_5	0	0	0	0	0	0

Λ^*

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_0	1	1	0	0	0	0
q_1	0	1	0	0	0	0
q_2	0	0	1	0	0	0
q_3	0	0	0	1	0	1
q_4	0	0	0	0	1	0
q_5	0	0	0	0	0	1

Ejemplo 4

- Y concluir que

$\Lambda(q_0)=\Lambda^+(q_0)=\{q_1\}$, $\Lambda^*(q_0)=\{q_0, q_1\}$,

$\Lambda(q_1)=\Lambda^+(q_0)= \Phi$, $\Lambda^*(q_1)=\{q_1\}$,

$\Lambda(q_2)=\Lambda^+(q_2)= \Phi$, $\Lambda^*(q_2)=\{q_2\}$,

$\Lambda(q_3)=\Lambda^+(q_3)=\{q_5\}$, $\Lambda^*(q_3)=\{q_3, q_5\}$,

$\Lambda(q_4)=\Lambda^+(q_4)= \Phi$, $\Lambda^*(q_4)=\{q_4\}$,

$\Lambda(q_5)=\Lambda^+(q_5)= \Phi$, $\Lambda^*(q_5)=\{q_5\}$

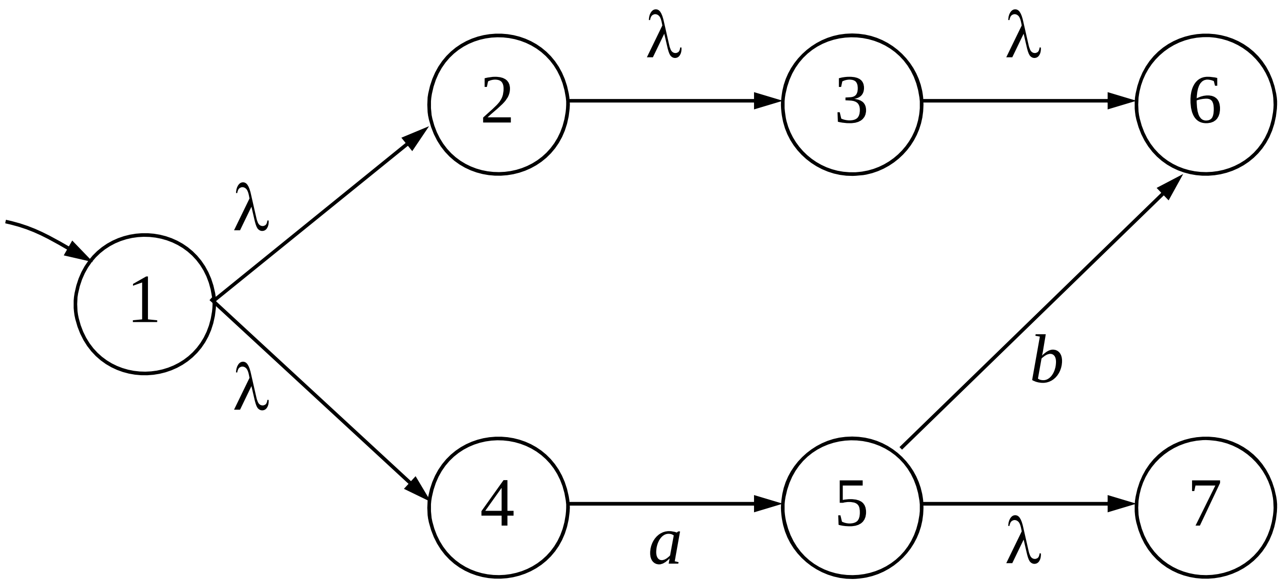
$$\Lambda=\Lambda^+ \quad \begin{array}{c|cccccc} & q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ \hline q_0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ q_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \Lambda^* \quad \begin{array}{c|cccccc} & q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ \hline q_0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ q_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ q_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Ejemplo 4

- Considérese el siguiente autómata finito no determinista:

$$A=(Q=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \Sigma=\{a, b\}, \delta, 1, F=\Phi)$$

  - Donde el diagrama de transiciones de δ es el siguiente:



Ejemplo 4

- Que también se puede representar mediante la siguiente tabla de transiciones:

	a	b	λ
$\rightarrow 1$	Φ	Φ	$\{2,4\}$
2	Φ	Φ	$\{3\}$
3	Φ	Φ	$\{6\}$
4	$\{5\}$	Φ	Φ
5	Φ	$\{6\}$	$\{7\}$
6	Φ	Φ	Φ
7	Φ	Φ	Φ

Ejemplo 4

- La función de transición define la siguiente matriz Λ. También se muestran Λ^2 y Λ^3. Ocurre que $\Lambda^4=\mathbf{0}$.

Λ

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

Λ^2

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

Λ^3

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	1	0	1	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

Ejemplo 4

- Por lo que ya se pueden calcular Λ^+ y Λ^*:

Λ^+

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	0	1	0
2	0	0	1	0	0	1	0
3	0	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

Λ^*

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	0	1	0
2	0	1	1	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	1

Ejemplo 4

- Y concluir que

$\Lambda(1)=\{2,4\}$, $\Lambda(2)=\{3\}$, $\Lambda(3)=\{6\}$, $\Lambda(5)=\{7\}$, $\Lambda(4)=\Lambda(6)=\Lambda(7)=\Phi$,

$\Lambda^+(1)=\{2,3,4,6\}$, $\Lambda^+(2)=\{3,6\}$, $\Lambda^+(3)=\{6\}$, $\Lambda^+(5)=\{7\}$, $\Lambda^+(4)=\Lambda^+(6)=\Lambda^+(7)=\Phi$,

$\Lambda^*(1)=\{1,2,3,4,6\}$, $\Lambda^*(2)=\{2,3,6\}$, $\Lambda^*(3)=\{3,6\}$, $\Lambda^*(4)=\{4\}$, $\Lambda^*(5)=\{5,7\}$, $\Lambda^*(6)=\{6\}$, $\Lambda^*(7)=\{7\}$

Λ	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

Λ^+	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	0	1	0
2	0	0	1	0	0	1	0
3	0	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

Λ^*	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	0	1	0
2	0	1	1	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	1