

Interpolación espacio-temporal usando funciones de base radial

Carlos E. Melo

Received: date / Accepted: date

Resumen En el contexto de los interpoladores locales, se sabe que las funciones de base radial (RBF) reducen el tiempo computacional al usar un subconjunto de los datos para fines de predicción. En este trabajo se propone un nuevo método de interpolación espacio-temporal utilizando funciones de base radial con tendencia (STIRBFs) que permite modelar variables aleatorias continuas espaciales. La tendencia se modela con variables mixtas, entre las que podemos tener las coordenadas espacio-temporales y variables categóricas. Con el fin de evaluar la eficiencia del método propuesto, se lleva a cabo un estudio de simulación para una variedad de escenarios prácticos considerando seis funciones de base radial. Finalmente, el método propuesto se ilustra con una aplicación para la predicción de temperatura media mensual de la Tierra en Croacia 2008, seleccionando los parámetros de suavizado y robustez por validación cruzada.

Palabras clave Predicción espacio-temporal · Modelado de tendencia · Funciones de base radial · Parámetros de suavizado y robustez · Modelos de funciones aleatorias

1. Introducción

En las últimas décadas ha habido un enorme crecimiento de los modelos y técnicas para la realización del análisis de datos espacio-temporal. En Cressie & Huang (1999), Christakos (2000), Myers et al. (2002), Mateu et al. (2003), Kolovos et al. (2004), Banerjee et al. (2004), Sahu & Mardia (2005), Chen et al. (2006) y Gneiting et al. (2007), entre otros, se puede encontrar un resumen de las principales técnicas para modelos espacio-temporales, junto con numerosas aplicaciones prácticas para una variedad de fenómenos naturales. Por ejemplo, se encuentran estudios de: contaminación del aire (De Cesare et al. 1997, 2001, Şen, Altunkaynak & Özger 2006), precipitación Yavuz & Erdogan (2012), temperatura

Carlos E. Melo
Facultad de Ingeniería, Universidad Distrital Francisco José de Caldas
E-mail: cmelo@udistrital.edu.co

terrestre Perčec Tadić (2010), Hengl et al. (2012), hidrología (Rouhani & Hall 1989, Rouhani & Myers 1990), ecología (Bellier et al. 2007, Planque et al. 2007), monitoreo y seguimiento de población de la fauna silvestre Kondoh et al. (2011), medicina en el estudio de imágenes del cerebro (Ye 2008, Ye et al. 2011) y análisis económico de los precios inmobiliarios Chica et al. (2007).

Las mediciones de contaminación del aire, precipitación y temperatura terrestre a menudo se observan a diario en más de un centenar de lugares en el mundo y los datos de los últimos años suelen estar disponibles, sumado a esto, la disponibilidad de información de imágenes de satélite y el software diseñado para el análisis (estadístico y geográfico), motivan el estudio del problema en el presente artículo. Los métodos geoestadísticos espacio-temporales, sin embargo, requieren de conjuntos de datos grandes, que complican su manipulación por el tiempo de procesamiento y por la difícil tarea de adaptarse a modelos realistas y complejos.

Por otro lado, las funciones de base radial tales como la multicuadrática (MQ) o spline completamente regularizado (CRS, por sus siglas en inglés) son útiles en la construcción de modelos digitales de elevación (DEM, por sus siglas en inglés), como se muestra en Mitášová & Hofierka (1993). Una variación de la función multicuadrática se llama la multicuadrática inversa (IMQ, por sus siglas en inglés), introducida por Hardy & Gopfert (1975). En Späth (1969) se describe un método que permite evitar puntos de inflexión y contiene splines cúbicos como un caso especial, utilizando interpolación spline cúbica y exponencial (EXP). Más tarde, la spline capa delgada (TPS, por sus siglas en inglés) se introdujo en el diseño geométrico por Duchon (1976) y la aproximación Gaussiana (GAU) utilizada por Schagen (1979) se presenta como una variante popular de la TPS. (Mitáš & Mitášová 1988, Mitášová & Hofierka 1993, Mitášová & Mitáš 1993) desarrollan la formulación del spline con tensión (ST) e implementan un algoritmo de segmentación con un tamaño flexible en la superposición del vecindario. Por último, en Melo et al. (2017) se propone un nuevo método espacial considerando funciones de base radial con tendencia basada en distancias.

En este artículo, se propone un nuevo método llamado interpolación espacio-temporal usando funciones de base radial (spatio-temporal interpolation using radial based functions, STIRBFs). El método propuesto considera principalmente la interpolación espacio-temporal de las funciones de base radial en un modelo métrico espacio-temporal, con tendencia, la cual se obtiene a partir de las variables explicativas mixtas.

Especialmente, en el análisis de datos espacio-temporal, a menudo se tiene que lidiar con variables de diversa naturaleza que están asociadas con la variable respuesta: las variables categóricas y binarias tales como el tipo de suelo o estación del año, y las variables continuas (por ejemplo, las coordenadas espaciales o la precipitación). El objetivo aquí es presentar un enfoque unificado que utiliza las RBFs (radial based functions) en tales contextos espacio-temporales donde las variables explicativas son de naturaleza mixta.

En la interpolación espacio-temporal desarrollada, se usa un enlace entre splines y kriging, el cual fue llamado equivalentemente “cercano” Cressie (1989) porque el TPS corresponde a una covarianza generalizada específica, mientras que el estimador kriging y el interpolador RBF sólo requieren el uso de un kernel con propiedades adecuadas como la de ser definida positiva. En general, esto permite adaptar la función kernel a un conjunto de datos particular Cressie (1989), Myers (1992). La mayor diferencia es que en los splines, el parámetro de suavizamiento

es establecido por el usuario, mientras en el caso de kriging, el suavizamiento se determina de forma objetiva.

El plan del artículo es el siguiente: en la Sección 2 se desarrolla la propuesta metodológica; se construyen las RBFs espacio-temporales a partir de la tendencia local, se describen algunas RBFs y se presenta una aproximación de la interpolación spline para el modelo propuesto utilizando el método kriging. La Sección 3 presenta un estudio de simulación basado en algunos modelos spline espacio-temporales. En la Sección 4 se ilustra la metodología propuesta con una aplicación de la temperatura media mensual en Croacia, donde se incorpora la tendencia a partir de las coordenadas espacio-temporales, distancia al mar, elevación y estación climática del año. El artículo termina con algunas conclusiones.

2. Modelo espacio-temporal con tendencia local

Sea $\{Z(\mathbf{s}, t), \mathbf{s} \in D, t \in T\}$ un proceso espacio-temporal aleatorio, donde \mathbf{s} varía sobre un conjunto dado $D \subseteq \mathbb{R}^d$ y $T \subseteq \mathbb{Z}$ ó \mathbb{R} , de manera que los modelos desarrollados son adecuados tanto para tiempo-discreto como para tiempo-continuo. Sin pérdida de generalidad, se toma $T \subseteq \mathbb{R}$. Supóngase que este proceso se observó en un conjunto de localizaciones espacio-temporales $\{(\mathbf{s}_1, t_1), \dots, (\mathbf{s}_n, t_n)\} \in D \times T$ obteniendo un conjunto de valores $\{Z(\mathbf{s}_1, t_1), \dots, Z(\mathbf{s}_n, t_n)\}$.

Supóngase que el proceso estocástico espacio-temporal, $Z(\mathbf{s}_i, t_i)$, sigue un modelo de función aleatoria, que puede descomponerse como

$$Z(\mathbf{s}_i, t_i) = \mu(\mathbf{s}_i, t_i) + \varepsilon(\mathbf{s}_i, t_i) \quad (\mathbf{s}_i, t_i) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \quad (1)$$

con $i = 1, \dots, n$ y donde $\mu(\mathbf{s}_i, t_i) = E[Z(\mathbf{s}_i, t_i)]$ es una función determinística asociada con la tendencia y $\varepsilon(\mathbf{s}_i, t_i)$ es un proceso estocástico de media cero y variograma $2\gamma(\cdot, \cdot)$. Este proceso caracteriza la dependencia espacio-temporal y modeliza las fluctuaciones espacio-temporales de $Z(\mathbf{s}_i, t_i)$ alrededor de su media $\mu(\mathbf{s}_i, t_i)$. La tendencia espacial está formada por las variables categóricas, continuas y binarias, y se modela como

$$\mu(\mathbf{s}_i, t_i) = \theta_0 + v'(\mathbf{s}_i, t_i)\boldsymbol{\theta} \quad (2)$$

donde $v(\mathbf{s}_i, t_i) = (v_1(\mathbf{s}_i, t_i), \dots, v_p(\mathbf{s}_i, t_i))'$ es un vector que contiene variables explicativas asociadas a la localización espacio-temporal (\mathbf{s}_i, t_i) , θ_0 es el parámetro desconocido asociado al intercepto y $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$ es un vector de parámetros desconocidos.

En forma matricial el modelo (1), se puede expresar como:

$$\mathbf{Z}_{st} = \mathbf{1}\theta_0 + V\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}_{st} \quad (3)$$

donde $\mathbf{Z}_{st} = (Z(\mathbf{s}_1, t_1), \dots, Z(\mathbf{s}_n, t_n))'$, $\mathbf{1}$ es un vector de dimensión $n \times 1$ asociado al intercepto, $V = (V_1, \dots, V_p)$ es la matriz de diseño de dimensión $n \times p$ con p variables explicativas $V_j = (v_j(\mathbf{s}_1, t_1), \dots, v_j(\mathbf{s}_n, t_n))'$ de dimensión $n \times 1$, $j = 1, \dots, p$; además, $\boldsymbol{\varepsilon}_{st} = (\varepsilon(\mathbf{s}_1, t_1), \dots, \varepsilon(\mathbf{s}_n, t_n))'$.

Con el fin de dar el mismo peso a las coordenadas espacio-temporales (w_x, w_y, t) , estas se estandarizan (w_x^z, w_y^z, t^z) , para luego construir las distancias espacio-temporales, las cuales están dadas por

$$\delta_{ij} = \sqrt{(w_x^z - w_{x_{i'}}^z)^2 + (w_y^z - w_{y_{i'}}^z)^2 + (t_i^z - t_{i'}^z)^2} \quad (4)$$

2.1. Tendencia basada en distancias con funciones de base radial

En la interpolación espacio-temporal, existen métodos que no requieren un modelo de dependencia espacio-temporal, como el variograma o covariograma, éstos se llaman deterministas y son los que interesan en esta subsección. El modelo (1) utilizando un formato de RBFs se puede expresar en forma general por

$$Z(\mathbf{s}_i, t_i) = g(\mathbf{s}_i, t_i) + \varepsilon(\mathbf{s}_i, t_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

donde $g(\mathbf{s}_i, t_i)$ es una función de valor real, dada por

$$g(\mathbf{s}_i, t_i) = \sum_{l=0}^k \nu_l X_l(\mathbf{s}_i, t_i) + \sum_{i'=1}^n \omega_{i'} \phi(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_{i'}, t_i - t_{i'}), \quad i = 1, \dots, n$$

o en forma matricial,

$$\mathbf{g}_{st} = \mathbf{X}_{st} \boldsymbol{\nu}_{st} + \boldsymbol{\Phi}_{st} \boldsymbol{\omega}_{st} \quad (6)$$

donde $\mathbf{g}_{st} = (g(\mathbf{s}_1, t_1), \dots, g(\mathbf{s}_n, t_n))'$, $\mathbf{X}_{st} = (\mathbf{1}, X) = (\mathbf{1}, X_1, \dots, X_k)$ es una matriz $n \times (k+1)$ con elementos $\mathbf{1}$ y $X_l = (x_l(\mathbf{s}_1, t_1), \dots, x_l(\mathbf{s}_n, t_n))'$, $l = 1, \dots, k$; $\boldsymbol{\nu}_{st} = (\nu_0, \dots, \nu_k)'$ donde cada ν_l corresponde al l -ésimo coeficiente del modelo de tendencia; $\boldsymbol{\Phi}_{st}$ es una matriz $n \times n$ con elementos $\phi(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j, t_i - t_j)$, los cuales son funciones de base radial, es decir funciones escalares de la distancia Euclidiana entre las coordenadas espacio-temporales (\mathbf{s}_i, t_i) y (\mathbf{s}_j, t_j) ; finalmente, $\boldsymbol{\omega}_{st} = (\omega_1, \dots, \omega_n)'$, con ω_i un peso desconocido.

Los parámetros $\boldsymbol{\nu}_{st}$ y $\boldsymbol{\omega}_{st}$ pueden ser estimados por mínimos cuadrados penalizados, minimizando la siguiente expresión

$$\sum_{i=1}^n [Z(\mathbf{s}_i, t_i) - g(\mathbf{s}_i, t_i)]^2 + \rho \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} J_m(\kappa(\mathbf{s}, t)) d(\mathbf{s}, t) \quad (7)$$

donde $J_m(\kappa(\mathbf{s}, t))$ es una medida de la rugosidad de la función spline κ (definida en términos de las m -ésimas derivadas de κ) y $\rho > 0$ actúa como un parámetro de suavizamiento.

La expresión (7) se puede expresar al hacer los respectivos reemplazos como

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\nu}_{st}, \boldsymbol{\omega}_{st}) &= (\mathbf{Z}_{st} - \mathbf{X}_{st} \boldsymbol{\nu}_{st} - \boldsymbol{\Phi}_{st} \boldsymbol{\omega}_{st})' (\mathbf{Z}_{st} - \mathbf{X}_{st} \boldsymbol{\nu}_{st} - \boldsymbol{\Phi}_{st} \boldsymbol{\omega}_{st}) \\ &\quad + \rho \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} [\kappa''(\mathbf{s}, t)]^2 d(\mathbf{s}, t) \\ &= (\mathbf{Z}_{st} - \mathbf{X}_{st} \boldsymbol{\nu}_{st} - \boldsymbol{\Phi}_{st} \boldsymbol{\omega}_{st})' (\mathbf{Z}_{st} - \mathbf{X}_{st} \boldsymbol{\nu}_{st} - \boldsymbol{\Phi}_{st} \boldsymbol{\omega}_{st}) + \rho \boldsymbol{\omega}_{st}' \boldsymbol{\Phi}_{st} \boldsymbol{\omega}_{st} \end{aligned}$$

donde $\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} [\kappa''(\mathbf{s}, t)]^2 d(\mathbf{s}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \kappa''(\mathbf{s}, t) [\kappa''(\mathbf{s}, t)]^t d\mathbf{s} = \boldsymbol{\omega}_{st}^t \boldsymbol{\Phi}_{st} \boldsymbol{\omega}_{st}$, con

$$\begin{aligned} \kappa''(\mathbf{s}, t) &= \sum_{i'=1}^n \omega_{i'} \phi''((\mathbf{s}, t) - (\mathbf{s}_{i'}, t_{i'})) = [\phi''(\mathbf{s}, t)]^t \boldsymbol{\omega}_{s,t}, \\ \boldsymbol{\Phi}_{st} &= \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} \phi''(\mathbf{s}, t) [\phi''(\mathbf{s}, t)]^t d(\mathbf{s}, t) \quad \text{y} \\ \phi''(\mathbf{s}, t) &= (\phi''((\mathbf{s}, t) - (\mathbf{s}_1, t_1)), \dots, \phi''((\mathbf{s}, t) - (\mathbf{s}_n, t_n)))^t \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\nu}_{st}, \boldsymbol{\omega}_{st}) &= (\mathbf{Z}_{st} - \mathbf{X}_{st} \boldsymbol{\nu}_{st} - \boldsymbol{\Phi}_{st} \boldsymbol{\omega}_{st})' (\mathbf{Z}_{st} - \mathbf{X}_{st} \boldsymbol{\nu}_{st} - \boldsymbol{\Phi}_{st} \boldsymbol{\omega}_{st}) + \rho \boldsymbol{\omega}_{st}' \boldsymbol{\Phi}_{st} \boldsymbol{\omega}_{st} \\ &= \mathbf{Z}_{st}' \mathbf{Z}_{st} - 2 \mathbf{Z}_{st}' \mathbf{X}_{st} \boldsymbol{\nu}_{st} - 2 \mathbf{Z}_{st}' \boldsymbol{\Phi}_{st} \boldsymbol{\omega}_{st} + \boldsymbol{\nu}_{st}' \mathbf{X}_{st}' \mathbf{X}_{st} \boldsymbol{\nu}_{st} \\ &\quad + 2 \boldsymbol{\omega}_{st}' \boldsymbol{\Phi}_{st}' \mathbf{X}_{st} \boldsymbol{\nu}_{st} + \boldsymbol{\omega}_{st}' \boldsymbol{\Phi}_{st}' \boldsymbol{\Phi}_{st} \boldsymbol{\omega}_{st} + \rho \boldsymbol{\omega}_{st}' \boldsymbol{\Phi}_{st} \boldsymbol{\omega}_{st} \end{aligned}$$

Al derivar parcialmente con respecto a los vectores $\boldsymbol{\nu}_{st}$ y $\boldsymbol{\omega}_{st}$ e igualar a cero, se encuentra que

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\boldsymbol{\nu}_{st}, \boldsymbol{\omega}_{st})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{st}} &= -2 \mathbf{Z}_{st}' \mathbf{X} + 2 \boldsymbol{\nu}_{st}' \mathbf{X}_{st}' \mathbf{X}_{st} + 2 \boldsymbol{\omega}_{st}' \boldsymbol{\Phi}_{st}' \mathbf{X}_{st} = 0 \\ \mathbf{X}_{st} \boldsymbol{\nu}_{st} + \boldsymbol{\Phi}_{st} \boldsymbol{\omega}_{st} &= \mathbf{Z}_{st} \quad (8) \\ \frac{\partial L(\boldsymbol{\nu}_{st}, \boldsymbol{\omega}_{st})}{\partial \boldsymbol{\omega}_{st}} &= -2 \mathbf{Z}_{st}' \boldsymbol{\Phi}_{st} + 2 \boldsymbol{\nu}_{st}' \mathbf{X}_{st}' \boldsymbol{\Phi}_{st} + 2 \boldsymbol{\omega}_{st}' \boldsymbol{\Phi}_{st}' \boldsymbol{\Phi}_{st} + 2 \rho \boldsymbol{\omega}_{st}' \boldsymbol{\Phi}_{st} = 0 \\ \mathbf{X}_{st} \boldsymbol{\nu}_{st} + (\boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I) \boldsymbol{\omega}_{st} &= \mathbf{Z}_{st} \quad (9) \end{aligned}$$

donde I es la matriz identidad de orden $n \times n$ y ρ puede ser interpretado como ruido blanco agregado a las varianzas en las localizaciones de los datos, pero no a la varianza en la localización de predicción Wackernagel (2003).

Noté aquí, que si $\boldsymbol{\Phi}_{st}$ es definida positiva entonces hay unicidad de los coeficientes en el interpolador $\hat{g}(\mathbf{s}_i, t_i)$. El problema es cómo construir una forma funcional $\phi(\mathbf{s}_i, t_i)$ con la condición apropiada de definida positiva. Con el fin de generalizar los interpoladores, es necesario considerar las formas más generales de las matrices definidas positivas.

Definición 1 Sean $\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_k$ funciones linealmente independientes de valor-real definidas sobre $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ y sea $\boldsymbol{\Phi}_{st}$ una matriz simétrica real. Luego, $\boldsymbol{\Phi}_{st}$ es definida positiva con respecto a $\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_k$ si y sólo si para todos los conjuntos de puntos $(\mathbf{s}_1, t_1), \dots, (\mathbf{s}_n, t_n)$ en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ se tiene que $\sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n q_i q_{i'} \phi(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_{i'}, t_i - t_{i'}) \geq 0$ para todo q_i ($i = 1, \dots, n$), donde q_i es un escalar (diferente de cero), y tales que $\sum_{i'=1}^n X_l(\mathbf{s}_{i'}) q_{i'} = 0$ para $l = 1, \dots, k$.

Como por la definición 1, $\boldsymbol{\Phi}_{st}$ es definida positiva, entonces $\boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I$ es invertible y así (9) se puede escribir como:

$$\boldsymbol{\omega}_{st} = (\boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I)^{-1} (\mathbf{Z}_{st} - \mathbf{X}_{st} \boldsymbol{\nu}_{st}) \quad (10)$$

Reemplazando (10) en (8) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{st}\boldsymbol{\nu}_{st} + \boldsymbol{\Phi}_{st}(\boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I)^{-1}(\mathbf{Z}_{st} - \mathbf{X}_{st}\boldsymbol{\nu}_{st}) &= \mathbf{Z}_{st} \\ \left[I - \boldsymbol{\Phi}_{st}(\boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I)^{-1} \right] \mathbf{X}_{st}\boldsymbol{\nu}_{st} &= \left[I - \boldsymbol{\Phi}_{st}(\boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I)^{-1} \right] \mathbf{Z}_{st} \end{aligned} \quad (11)$$

Observe que

$$\left[I - \boldsymbol{\Phi}_{st}(\boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I)^{-1} \right] = \left(I + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\Phi}_{st} \right)^{-1} = \rho(\boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I)^{-1} \quad (12)$$

Premultiplicando por \mathbf{X}'_{st} la expresión (11) y al reemplazar por (12), se encuentra que

$$\hat{\boldsymbol{\nu}}_{st} = \left[\mathbf{X}'_{st}(\boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I)^{-1} \mathbf{X}_{st} \right]^{-1} \mathbf{X}'_{st}(\boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I)^{-1} \mathbf{Z}_{st} \quad (13)$$

y reemplazando (13) en (10), se encuentra finalmente que

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{st} = (\boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I)^{-1} \{ I - \mathbf{X}_{st} \left[\mathbf{X}'_{st}(\boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I)^{-1} \mathbf{X}_{st} \right]^{-1} \mathbf{X}'_{st}(\boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I)^{-1} \} \mathbf{Z}_{st} \quad (14)$$

Alternativamente, al premultiplicar por \mathbf{X}'_{st} a (14), se obtiene

$$\mathbf{X}'_{st}\boldsymbol{\omega}_{st} = \mathbf{0}$$

y al combinarlo con el sistema (9), se encuentra que $(\boldsymbol{\omega}_{st}, \boldsymbol{\nu}_{st})$ son la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I & \mathbf{X}_{st} \\ \mathbf{X}'_{st} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_{st} \\ \boldsymbol{\nu}_{st} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{st} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Si no hay tendencia, \mathbf{X}_{st} se convierte en un vector de unos y $\boldsymbol{\nu}_{st}$ en un parámetro de sesgo. En el caso de trabajar con el anterior sistema, es necesario considerar la proposición 1.

Proposición 1 Sea $\boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I$ definida positiva y todos los conjuntos de puntos $(\mathbf{s}_1, t_1), \dots, (\mathbf{s}_n, t_n)$ en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, luego la matriz

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I & \mathbf{X}_{st} \\ \mathbf{X}'_{st} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

es no singular.

Demostración Supóngase por contradicción que la matriz es singular. Entonces, existe un vector $(U'_1 \ U'_2)'$ no idénticamente cero tal que

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I & \mathbf{X}_{st} \\ \mathbf{X}'_{st} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $(\boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I)U_1 + \mathbf{X}_{st}U_2 = \mathbf{0}$ y $\mathbf{X}'_{st}U_1 = \mathbf{0}$ con $U_1 \neq \mathbf{0}$ y $U_2 \neq \mathbf{0}$. Claramente, $\mathbf{X}'_{st}U_1 = \mathbf{0}$ implica $U'_1\mathbf{X}_{st} = \mathbf{0}$, y por lo tanto, $U'_1\mathbf{X}_{st}U_2 = \mathbf{0}$, lo cual implica que $U'_1(\boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I)U_1 + U'_1\mathbf{X}_{st}U_2 = U'_1(\boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I)U_1 = \mathbf{0}$ lo cual contradice el carácter de definido positivo de $(\boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I)$ a menos que U_1 sea un vector cero. Si U_1 es el vector cero, entonces $(\boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I)U_1 = \mathbf{0}$ y de aquí, $(\boldsymbol{\Phi}_{st} + \rho I)U_1 + \mathbf{X}'_{st}U_2 = \mathbf{X}'_{st}U_2 = \mathbf{0}$, pero las funciones matriciales escalares (\mathbf{X}_{st} esta asociada a la tendencia) son linealmente independientes, y así, $\mathbf{X}'_{st}U_2 = \mathbf{0}$ implica que $U_2 = \mathbf{0}$. Dado que U_1 y U_2 son vectores cero, la matriz original debe ser no singular.

Ahora, el variograma además de ser un medio para caracterizar la estructura espacio-temporal, se utiliza en kriging para asignar ponderaciones a las observaciones y predecir el valor de alguna variable en las localizaciones no muestreadas (\mathbf{s}_i, t_i) , o donde hay un interés en predecir en un soporte diferente o cuadrícula Lloyd (2010). Para utilizar el variograma en kriging, se le debe ajustar a éste un modelo matemático, de tal manera que los coeficientes puedan luego utilizarse en el sistema de ecuaciones kriging. En este artículo, se trabaja con el modelo métrico espacio-temporal, este tiene covarianza estacionaria y anisotropía geométrica en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Por lo tanto, una métrica en el espacio-tiempo que utiliza directamente modelos isotrópicos se define como

$$C_{st}(\delta_s, \delta_t) = C(\delta_{st}^2) = C(q_1^2 \delta_s^2 + q_2^2 \delta_t^2) \quad (15)$$

donde $\delta_{st}^2 = q_1^2 \delta_s^2 + q_2^2 \delta_t^2$, $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ son las constantes que definen la métrica espacio-temporal, δ_s y δ_t son las usuales distancias Euclidianas en espacio y tiempo, respectivamente. Este modelo supone la misma estructura de dependencia en el espacio-tiempo, y sólo permite cambios en el rango de las dos funciones de covarianza. Algunas aplicaciones de este modelo se pueden encontrar en Armstrong & Hubert (1993) y Snepvangers & Huisman (2003).

Algunas RBFs espacio-temporales consideradas en esta investigación se presentan en la Tabla 1. El parámetro de suavizamiento óptimo η , el cual es de libre elección, se encuentra al minimizar la raíz del cuadrado medio del error de predicción (RMSPE, por sus siglas en inglés) haciendo uso de la validación cruzada. Algunas descripciones adicionales de RBFs y sus relaciones con los splines y kriging se pueden encontrar en (Bishop 1995, p. 164), (Chilès & Delfiner 1999, pag. 272) y Cressie (1993).

Tabla 1 Formas funcionales de algunas RBFs espacio-temporales

RBF	Forma funcional	RBF	Forma funcional
EXP	$\phi(\delta_{st}) = e^{-\eta \delta_{st}}, \quad \eta \neq 0$	GAU	$\phi(\delta_{st}) = e^{-\eta \delta_{st}^2}, \quad \eta \neq 0$
MQ	$\phi(\delta_{st}) = \sqrt{\eta^2 + \delta_{st}^2}, \quad \eta \neq 0$	IMQ	$\phi(\delta_{st}) = 1 / \sqrt{\eta^2 + \delta_{st}^2}, \quad \eta \neq 0$
RBF	Forma funcional		
TPS	$\phi(\delta_{st}) = \begin{cases} (\eta \cdot \delta_{st})^2 \log(\eta \cdot \delta_{st}) & \text{si } \delta_{st} \neq 0, \eta > 0 \\ 0 & \text{si } \delta_{st} = 0 \end{cases}$		
CRS	$\phi(\delta_{st}) = \begin{cases} \ln(\eta \cdot \delta_{st}/2)^2 + E_1(\eta \cdot \delta_{st}/2) + C_E & \text{si } \delta_{st} \neq 0, \eta > 0 \\ 0 & \text{si } \delta_{st} = 0 \end{cases}$ <p>donde \ln es el logaritmo natural, $E_1(x)$ es la función integral exponencial y C_E es la constante de Euler.</p>		
ST	$\phi(\delta_{st}) = \begin{cases} \ln(\eta \cdot \delta_{st}/2) + K_0(\eta \cdot \delta_{st}) + C_E & \text{si } \delta_{st} \neq 0 \\ 0 & \text{si } \delta_{st} = 0 \end{cases}$ <p>donde $K_0(x)$ es la función modificada de Bessel.</p>		

2.2. Predicción espacio-temporal usando funciones de base radial con tendencia

Una vez se han estimado los parámetros ν_{st} y ω_{st} , se pueden discutir las técnicas espacio-temporales para predecir el valor en una determinada localización, (\mathbf{s}_0, t_0) , a partir de las observaciones más cercanas y donde se han observado un conjunto de variables explicativas mixtas. Para conseguirlo, se utiliza la relación del método kriging universal con los splines establecida en (Cressie 1993, pag. 180), con la finalidad de construir a partir de la tendencia las predicciones espacio-temporales.

Ahora, las variables explicativas mixtas para un nuevo individuo están dadas por; $\mathbf{x}_{st}(\mathbf{s}_0, t_0) = (x_1(\mathbf{s}_0, t_0), \dots, x_k(\mathbf{s}_0, t_0))'$. Y con las coordenadas espacio-temporales se pueden calcular las distancias entre el nuevo individuo y cada uno de los individuos involucrados en el modelo (1). Luego, el siguiente objetivo es predecir el valor de $Z(\mathbf{s}_0, t_0)$ basado en un conjunto de observaciones \mathbf{Z}_{st} . Para ello, el predictor de la STIRBF está dado por

$$\hat{Z}(\mathbf{s}_0, t_0) = \hat{g}(\mathbf{s}_0, t_0) = \sum_{r=1}^{n_h} \varphi_r Z(\mathbf{s}_r, t_r) = \boldsymbol{\varphi}_{st}' \mathbf{Z}_{st} \quad (16)$$

sujeto a

$$\sum_{r=1}^{n_h} \varphi_r x_l(\mathbf{s}_r, t_r) = \boldsymbol{\varphi}_{st}' \mathbf{X}_l = x_l(\mathbf{s}_0, t_0), \quad l = 0, \dots, k$$

donde $\boldsymbol{\varphi}_{st} = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n_h})'$, $\mathbf{Z}_{st} = (Z(\mathbf{s}_1, t_1), \dots, Z(\mathbf{s}_{n_h}, t_{n_h}))'$ y $\mathbf{X}_l = (x_l(\mathbf{s}_1, t_1), \dots, x_l(\mathbf{s}_{n_h}, t_{n_h}))'$.

El error esperado es igual a cero

$$E(\hat{Z}(\mathbf{s}_0, t_0) - Z(\mathbf{s}_0, t_0)) = 0$$

y el error cuadrático medio de la predicción del krigeado, σ_K^2 , al utilizar la aproximación con funciones de base radial esta dado por

$$\begin{aligned} \sigma_K^2(\mathbf{s}, t) &= E\left\{\left[\hat{Z}(\mathbf{s}_0, t_0) - Z(\mathbf{s}_0, t_0)\right]^2\right\} \\ &\cong \sum_{r=1}^{n_h} \sum_{r'=1}^{n_h} \varphi_r \varphi_{r'} \phi(\mathbf{s}_r - \mathbf{s}_{r'}, t_r - t_{r'}) - 2 \sum_{r=1}^{n_h} \varphi_r \phi(\mathbf{s}_r - \mathbf{s}_0, t_r - t_0) \\ &\cong \boldsymbol{\varphi}_{st}' \boldsymbol{\Phi}_{st} \boldsymbol{\varphi}_{st} - 2 \boldsymbol{\varphi}_{st}' \boldsymbol{\phi}_0 \end{aligned} \quad (17)$$

donde $\boldsymbol{\phi}_0 = (\phi(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0, t_1 - t_0), \dots, \phi(\mathbf{s}_{n_h} - \mathbf{s}_0, t_{n_h} - t_0))'$ y $\boldsymbol{\Phi}_{st}$ es una matriz $n_h \times n_h$ con elementos $\phi(\mathbf{s}_r - \mathbf{s}_{r'}, t_r - t_{r'})$, $r, r' = 1, \dots, n_h$. Además, $\boldsymbol{\phi}_0$ corresponde al vector de función de base radial evaluado entre los vecinos y el punto donde se quiere predecir, es decir $\phi(\mathbf{s}_r - \mathbf{s}_0, t_r - t_0)$.

Los pesos se determinan minimizando la siguiente expresión penalizada

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\varphi}_{st}, \boldsymbol{\alpha}_{st}) &= \sum_{r=1}^{n_h} \sum_{r'=1}^{n_h} \varphi_i \varphi_j \phi(\mathbf{s}_r - \mathbf{s}_{r'}, t_r - t_{r'}) - 2 \sum_{r=1}^{n_h} \varphi_r \phi(\mathbf{s}_r - \mathbf{s}_0, t_r - t_0) \\ &\quad + \rho \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} J_m(\kappa(\mathbf{s}, t)) d(\mathbf{s}, t) + 2 \sum_{l=0}^k \alpha_l \left(\sum_{r=1}^{n_h} \varphi_r x_l(\mathbf{s}_r, t_r) - x_l(\mathbf{s}_0, t_0) \right) \end{aligned}$$

donde $\alpha_{st} = (\gamma_0, \dots, \gamma_k)'$ es el vector de $(k+1)$ multiplicadores de Lagrange asociados con la restricción de inesgamiento.

En la forma matricial, la expresión anterior se convierte en

$$l(\varphi_{st}, \alpha_{st}) = \varphi'_{st} (\Phi_{st} + \rho I) \varphi_{st} - 2\varphi'_{st} \phi_0 + 2\alpha'_{st} (X'_{st} \varphi_{st} - x_{st}(s_0, t_0))$$

donde X_{st} fue definida en (6) usando unicamente las n_h observaciones, I es la matriz identidad $n_h \times n_h$, $\alpha_{st} = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)^t$ es el vector $k+1$ de multiplicadores de Lagrange asociado con la restricción por inesgamiento y $x_{st}(s_0, t_0) = (x_0(s_0, t_0), \dots, x_k(s_0, t_0))'$.

Después de diferenciar con respecto a φ_{st} y γ_{st} , igualando el resultado a cero y realizando algunos procedimientos algebraicos, el siguiente sistema matricial se encuentra

$$\begin{pmatrix} \Phi_{st} + \rho I & X_{st} \\ X'_{st} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{st} \\ \alpha_{st} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ x_{st}(s_0, t_0) \end{pmatrix} \quad (18)$$

Resolviendo el sistema, los coeficientes para φ_{st} y α_{st} están dadas por

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}'_{st} &= \{\phi_0 + X_{st} [X'_{st} (\Phi_{st} + \rho I)^{-1} X_{st}]^{-1} [x_{st}(s_0, t_0) \\ &\quad - X'_{st} (\Phi_{st} + \rho I)^{-1} \phi_0]\}' (\Phi_{st} + \rho I)^{-1} \\ \hat{\alpha}_{st} &= - [X'_{st} (\Phi_{st} + \rho I)^{-1} X_{st}]^{-1} [x_{st}(s_0, t_0) - X'_{st} (\Phi_{st} + \rho I)^{-1} \phi_0] \end{aligned} \quad (19)$$

Por otro lado, para obtener una expresión aproximada del error cuadrático de la predicción, se premultiplica la parte superior de (18) por φ'_{st} y se encuentra que $\varphi'_{st} (\Phi_{st} + \rho I) \varphi_{st} + \varphi'_{st} X_{st} \alpha_{st} = \varphi'_{st} \phi_0$, éste término se reemplaza en la expresión (17) y se llega a

$$\begin{aligned} \sigma_K^2(s_0, t_0) &\cong -\varphi'_{st} \Phi_{st} \varphi_{st} + 2\varphi'_{st} \phi_0 \\ &\cong -\varphi'_{st} \phi_0 + \rho \varphi'_{st} \varphi_{st} + \varphi'_{st} X_{st} \alpha_{st} + 2\varphi'_{st} \phi_0 \\ &\cong \varphi'_{st} \phi_0 + \rho \varphi'_{st} \varphi_{st} + x'_{st}(s_0, t_0) \alpha_{st} \end{aligned}$$

donde $X'_{st} \varphi_{st} = x_{st}(s_0, t_0)$.

Una vez estimados φ_{st} y α_{st} en (19), una expresión aproximada del error cuadrático de la predicción estimado se puede escribir como

$$\hat{\sigma}_K^2(s_0, t_0) \cong \sum_{r=1}^{n_h} \hat{\varphi}_r \phi(s_r - s_0, t_r - t_0) + \rho \sum_{r=1}^{n_h} \hat{\varphi}_r^2 + \sum_{l=0}^k \hat{\alpha}_l x_l(s_0, t_0) \quad (20)$$

Si queremos evaluar o comparar los ajustes entre STIRBFs, se recomienda utilizar la validación cruzada. Este criterio ahora se presenta.

2.3. Validación Cruzada

La validación cruzada es una técnica que permite evaluar la capacidad predictiva del modelo seleccionado. en esta investigación se considera la raíz de cuadrado medio del error de predicción (RMSPE, por sus siglas en inglés) como estadístico para evaluar el método STIRBFs, específicamente se considera la validación cruzada leave-one-out (LOOCV, por sus siglas en inglés), la cual

consiste en excluir la observación de uno de los n puntos muestrales (por lo general asociados a un vecindario), y con los $n - 1$ valores restantes y la función de base radial con sus parámetros η y ρ , predecir vía splines el valor de la variable en estudio en la ubicación del punto que se excluyó. Si la función de base radial presenta un buen funcionamiento, entonces la diferencia entre el valor observado y el valor predicho debe ser pequeña y se podrá producir el mapa. Este procedimiento se realiza en forma secuencial con cada uno de los puntos muestrales y así se obtienen los n errores de predicción. Entonces el conjunto de predicciones se puede resumir por alguna medida de precisión en la predicción. Tal idea se remonta por lo menos a (Mosteller & Wallace 1963, Stone 1974). La expresión para el RMSPE esta dada por

$$\text{RMSPE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left(\hat{Z}_{[i]}(\mathbf{s}_i, t_i) - Z(\mathbf{s}_i, t_i) \right)^2}{n}} \quad (21)$$

donde $\hat{Z}_{[i]}(\mathbf{s}_i, t_i)$ es el valor de la predicción obtenido a partir de la validación cruzada, y $Z(\mathbf{s}_i, t_i)$ es el valor muestreado en la localización (\mathbf{s}_i, t_i) . Si todo va bien, el RMSPE debe ser lo más pequeño posible (cercano a cero).

Finalmente, el procedimiento se puede resumir de la siguiente manera:

1. Establecer la tendencia espacio-temporal local a partir de las variables explicativas, definida en (6) por \mathbf{X}_{st} .
2. Optimizar los parámetros η y ρ del interpolador espacio-temporal con tendencia usando funciones de base radial por medio de la LOOCV a partir de la expresión (21), y el uso de (19) en diferentes vecindades de una magnitud predeterminada. El tamaño del vecindario, n_h , también se puede elegir dentro del proceso de optimización.
3. Hacer predicciones en puntos muestreados y no muestreados para generar el mapa de predicción utilizando el método STIRBFs, es decir, por medio de $\hat{Z}(\mathbf{s}_0) = \hat{\boldsymbol{\varphi}}^t \mathbf{Z}_s^*$.

3. Experimentos simulados

Esta sección describe un estudio de simulación llevado a cabo para evaluar la eficiencia del método propuesto en diferentes condiciones asociadas con los parámetros de suavizado y las funciones de base radial. Los escenarios están diseñados teniendo en cuenta lo propuesto en Wand (2000) con algunas modificaciones al espacio tiempo. . En particular, se estudian los efectos de: (i) nivel de ruido, (ii) densidad de diseño, (iii) grado de variación espacio-temporal y (iv) función de varianza. Estas configuraciones y escenarios se presentan en la Tabla 2.

Este estudio considera las simulaciones en tres dimensiones (w_x, w_y, t) , además una variable aleatoria binomial $V_1 \sim Bi(n, 0.4)$, tamaños de muestra $n = 150$ y $n = 250$ asociados a 25 puntos del espacio en cada uno de los casos y 6 y 10 puntos en el tiempo, respectivamente, tamaños de vecindario $n_h = 8, 32$, parámetros de suavizamiento $\eta = 0.01, 0.1$ y $j = 1, 3$ en el factor de varianza. Adicionalmente, se asume una variable nominal asociada a tres regiones específicas

Tabla 2 Escenarios considerados en los experimentos simulados espacio-temporales

Factor	Forma genérica
Nivel de ruido	$z_j(\mathbf{s}_i, t_i) = \beta_0 + \beta_1 V_i + \beta_2 D_{i2} + \beta_3 D_{i3} + \beta_4 t_i + f(w_{x_i}) + f(w_{y_i}) + f(t_i) + f(w_{x_i})f(w_{y_i})$ $+ f(w_{x_i})f(t_i) + f(w_{y_i})f(t_i) + \sigma_j \varepsilon(\mathbf{s}_i, t_i)$ donde $\sigma_j = 0,02 + 0,04(j-1)^2$
Densidad de diseño	$z_j(\mathbf{s}_i, t_i) = \beta_0 + \beta_1 V_i + \beta_2 D_{i2} + \beta_3 D_{i3} + \beta_4 t_i + f(X_{ji}) + f(Y_{ji}) + f(T_{ji}) + f(X_{ji})f(Y_{ji})$ $+ f(X_{ji})f(T_{ji}) + f(Y_{ji})f(T_{ji}) + \sigma \varepsilon(\mathbf{s}_i, t_i)$ donde $\sigma = 0,1$, $X_{ji} = F_j^{-1}(X_i)$, $Y_{ji} = F_j^{-1}(Y_i)$, $T_{ji} = F_j^{-1}(T_i)$ con $T_i = t_i/t_{max}$, $t_{max} = 6,10$
Variación espacio temporal	$z_j(\mathbf{s}_i, t_i) = \beta_0 + \beta_1 V_i + \beta_2 D_{i2} + \beta_3 D_{i3} + \beta_4 t_i + f(w_{x_i}) + f(w_{y_i}) + f(t_i) + f(w_{x_i})f(w_{y_i})$ $+ f(w_{x_i})f(t_i) + f(w_{y_i})f(t_i) + \sigma \varepsilon(\mathbf{s}_i, t_i)$ donde $\sigma = 0,2$, $f_j(l_i) = \sqrt{l_i(1-l_i)} \sin \left[\frac{2\pi \left\{ 1 + 2^{(9-4j)/5} \right\}}{l_i + 2^{(9-4j)/5}} \right]$
Función de varianza	$z_j(\mathbf{s}_i, t_i) = \beta_0 + \beta_1 V_i + \beta_2 D_{i2} + \beta_3 D_{i3} + \beta_4 t_i + f(w_{x_i}) + f(w_{y_i}) + f(w_{x_i})f(w_{y_i})$ $+ \sqrt{\varsigma_1 + \varsigma_2 + \varsigma_3 + \varsigma_1 \varsigma_2 + \varsigma_1 \varsigma_3 + \varsigma_2 \varsigma_3} \varepsilon(\mathbf{s}_i, t_i)$ donde $\varsigma_1 = v_j(w_{x_i})$, $\varsigma_2 = v_j(w_{y_i})$, $\varsigma_3 = v_j(t_i)$, $v_j(l_i) = \{0,15 [1 + 0,4(2j-7)(l_i-0,5)]\}^2$
Los supuestos y otras elecciones	
$V_i \sim Bernoulli(0,4)$; $\varepsilon(\mathbf{s}_i, t_i) \stackrel{iid}{\sim} N(0,1)$; $n = 150$ (25 puntos en el espacio y 6 puntos en el tiempo) y $n = 250$ (25 puntos en el espacio y 10 puntos en el tiempo); F_j es la <i>Beta</i> $\left(\frac{j+4}{5}, \frac{11-j}{5}\right)$; $j = 1, 3$; $f(l_i) = 1,5 f_1\left(\frac{l_i-0,5}{0,15}\right) - f_1\left(\frac{l_i-0,8}{0,04}\right)$; $f_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$; $X_i, Y_i, T_i \stackrel{iid}{\sim} Uniform(0,1)$; $l_i = w_{x_i}, w_{y_i}, t_i$; $i = 1, \dots, n$	

en el cuadrado de longitud uno, como se muestra en la Figura 1. Dado que hay tres regiones, se consideran sólo dos variables dummy (D_2 y D_3) para evitar problemas de singularidad. Además, $\varepsilon(\mathbf{s}_i, t_i)$ se construye asumiendo un campo aleatorio Gaussiano, para un modelo espacio-temporal no separable asociado con una pepita $\tau^2 = 1$ y media 0. Para los parámetros de tendencia, se asume los siguientes valores $\beta_0 = 10$, $\beta_1 = -4$, $\beta_2 = 2$ y $\beta_3 = -4$, con w_{x_i} y w_{y_i} asociados a las coordenadas espaciales, y t_i asociado al tiempo, donde i es la i -ésima observación simulada. En la Tabla 3, se presentan los escenarios simulados. Se utilizan las funciones *rbfST*, *rbfST.tcv* y *criterioST.cv* de la librería *geosptdb* del programa R (Melo & Melo 2015). El método se prueba con 6 RBFs (MQ, TPS, CRS, ST, EXP y GAU), considerando el modelo métrico dado en (15) con $q_1 = q_2 = 1$. Un total de 96 escenarios fueron simulados, y para cada uno de ellos, el proceso de simulación se repitió 100 veces.

Para cada conjunto de datos simulados, se evaluó la calidad del ajuste con el RMSPE obtenido mediante el método de LOOCV. Los resultados se muestran en las Tablas 4 y 5. Inicialmente se consideró usar un parámetro positivo para ρ , pero los valores de RMSPE no mostraron diferencias significativas a los obtenidos con $\rho = 0$; en particular, cuando las funciones de base radial: multicuadrática, exponencial, completamente regularizada y Gaussiana fueron utilizadas.

Las Tablas 4 y 5 muestran los valores promedio de RMSPE obtenidos de 100 simulaciones por caso y para los 96 casos descritos en la Tabla 3. El método STIRBFs trabaja bien para vecindarios grandes, indicando una ganancia (o decrecimiento) de los valores promedio de RMSPE cuando $n_h = 32$ con respecto a $n_h = 8$. En relación al parámetro η , se encuentra para $\eta = 0,1$ valores promedio de RMSPE mayores que cuando $\eta = 0,01$. Considerando el parámetro j , se tiene que en los escenarios *nivel de ruido* y *densidad de diseño* no hay una diferencia significativa de los valores promedio del RMSPE entre $j = 1$ y $j = 3$. Sin embargo, para los escenarios *variación espacio-temporal* y *función de varianza* no sucede lo

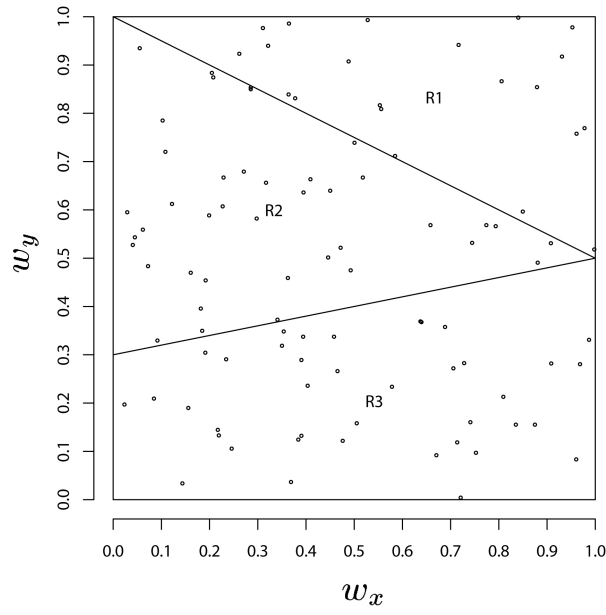


Figura 1 Localización de los puntos de muestreo y regiones asociadas a la definición de la variable nominal

Tabla 3 Escenarios espacio-temporales simulados (los números naturales en las últimas seis columnas corresponden al escenario)

Parámetros del modelo			n	Función de base radial					
η	j	n_h		MQ	TPS	CRS	ST	EXP	GAU
0.01	1	8	150	1	17	33	49	65	81
			250	2	18	34	50	66	82
		32	150	3	19	35	51	67	83
			250	4	20	36	52	68	84
	3	8	150	5	21	37	53	69	85
			250	6	22	38	54	70	86
		32	150	7	23	39	55	71	87
			250	8	24	40	56	72	88
0.1	1	8	150	9	25	41	57	73	89
			250	10	26	42	58	74	90
		32	150	11	27	43	59	75	91
			250	12	28	44	60	76	92
	3	8	150	13	29	45	61	77	93
			250	14	30	46	62	78	94
		32	150	15	31	47	63	79	95
			250	16	32	48	64	80	96

mismo, ya que los valores promedio de RMSPE son superiores para $j = 3$ con respecto a cuando $j = 1$. Adicionalmente, se resalta que los valores promedio de RMSPE disminuyen a medida que aumenta el tamaño muestral n .

Tabla 4 Promedios de RMSPEs bajo el método STIRBF en los escenarios espacio-temporales presentados en la Tabla 3 (casos nivel de ruido y densidad de diseño)

Parámetro			n	Nivel de ruido						Densidad de diseño					
η	j	n_h		MQ	TPS	CRS	ST	EXP	GAU	MQ	TPS	CRS	ST	EXP	GAU
0.01	1	8	150	1.66	1.67	1.77	1.66	1.66	2.00	1.68	1.69	1.81	1.68	1.68	2.03
			250	1.47	1.48	1.54	1.48	1.47	1.52	1.49	1.49	1.57	1.49	1.49	1.53
		32	150	1.53	1.61	1.88	1.60	1.53	1.72	1.55	1.63	1.94	1.62	1.55	1.75
			250	1.46	1.48	1.75	1.47	1.46	1.58	1.47	1.48	1.80	1.47	1.47	1.58
	3	8	150	1.66	1.67	1.78	1.67	1.66	2.01	1.66	1.67	1.78	1.66	1.66	2.02
			250	1.48	1.49	1.55	1.49	1.48	1.53	1.47	1.47	1.54	1.47	1.47	1.51
		32	150	1.54	1.62	1.89	1.60	1.54	1.73	1.53	1.61	1.91	1.60	1.53	1.74
			250	1.46	1.48	1.76	1.48	1.47	1.58	1.45	1.46	1.76	1.46	1.45	1.57
0.1	1	8	150	1.65	1.67	1.74	1.67	1.66	2.00	1.67	1.69	1.76	1.69	1.68	2.03
			250	1.47	1.48	1.50	1.48	1.47	1.53	1.48	1.49	1.51	1.49	1.49	1.53
		32	150	1.53	1.61	1.65	1.61	1.53	2.81	1.55	1.63	1.67	1.63	1.55	2.85
			250	1.45	1.48	1.59	1.48	1.46	1.89	1.46	1.48	1.59	1.48	1.47	1.90
	3	8	150	1.66	1.67	1.75	1.67	1.66	2.01	1.65	1.67	1.75	1.67	1.66	2.02
			250	1.48	1.49	1.50	1.49	1.48	1.54	1.46	1.47	1.49	1.47	1.47	1.51
		32	150	1.54	1.62	1.65	1.62	1.54	2.82	1.53	1.61	1.65	1.61	1.53	2.84
			250	1.46	1.48	1.59	1.48	1.47	1.89	1.44	1.46	1.57	1.46	1.45	1.89

Tabla 5 Promedios de RMSPEs bajo el método de STIRBF de los escenarios espacio-temporales presentados en la Tabla 3 (casos variación espacio-temporal y función de varianza)

Parámetro			n	Variación espacio-temporal						Función de varianza					
η	j	n_h		MQ	TPS	CRS	ST	EXP	GAU	MQ	TPS	CRS	ST	EXP	GAU
0.01	1	8	150	1.66	1.67	1.77	1.67	1.66	2.02	1.66	1.67	1.78	1.67	1.66	2.02
			250	1.46	1.47	1.53	1.47	1.46	1.52	1.48	1.49	1.55	1.49	1.48	1.53
		32	150	1.53	1.62	1.90	1.60	1.53	1.73	1.54	1.62	1.89	1.60	1.54	1.73
			250	1.46	1.47	1.76	1.47	1.46	1.57	1.47	1.48	1.76	1.48	1.47	1.58
	3	8	150	1.81	1.82	1.96	1.81	1.81	2.23	1.66	1.67	1.78	1.67	1.66	2.02
			250	1.61	1.61	1.71	1.61	1.61	1.67	1.48	1.48	1.55	1.48	1.48	1.53
		32	150	1.66	1.75	2.15	1.73	1.66	1.89	1.54	1.62	1.89	1.60	1.54	1.73
			250	1.58	1.60	1.97	1.59	1.58	1.68	1.46	1.48	1.76	1.47	1.46	1.58
0.1	1	8	150	1.65	1.67	1.75	1.67	1.66	2.01	1.66	1.67	1.75	1.67	1.66	2.02
			250	1.46	1.47	1.49	1.47	1.46	1.52	1.48	1.49	1.50	1.49	1.48	1.54
		32	150	1.53	1.62	1.66	1.62	1.53	2.84	1.54	1.62	1.66	1.62	1.54	2.83
			250	1.45	1.47	1.58	1.47	1.46	1.90	1.46	1.48	1.59	1.48	1.47	1.90
	3	8	150	1.80	1.82	1.91	1.82	1.81	2.23	1.65	1.67	1.75	1.67	1.66	2.02
			250	1.60	1.61	1.63	1.61	1.61	1.67	1.47	1.48	1.50	1.48	1.48	1.53
		32	150	1.66	1.75	1.77	1.75	1.66	3.13	1.54	1.62	1.65	1.62	1.54	2.83
			250	1.57	1.60	1.67	1.60	1.58	2.05	1.46	1.48	1.59	1.48	1.46	1.90

Analizando las formas genéricas, los valores promedio de RMSPE mas altos corresponden a el caso *variación espacio temporal*; mientras que *nivel de ruido*, *densidad de diseño* y *función de varianza* tienen valores promedio de RMSPE similares. En términos de las funciones analizadas se encuentra para todos los escenarios, que las funciones MQ y EXP producen valores promedio de RMSPE bajos, mientras la CRS y GAU muestran valores mas altos.

En las Figuras 2 y 3, se muestra en los boxplot el comportamiento de los valores promedio de RMSPE, para las muestras espacio temporales con 6 y 10 puntos en el tiempo respectivamente. En general, para los diferentes escenarios y RBFs se

presenta un menor valor promedio de RMSPE, cuando $n_h = 32$ con respecto a $n_h = 8$, excepto en la RBF CRS con $j = 1$ y $t = 6$, al igual que para $t = 10$ independientemente de j , lo mismo sucede con la función GAU cuando $\eta = 0,1$ y $t = 6$, como con $t = 10$ independientemente de j . En términos de la variabilidad es similar en todos los escenarios, excepto en el caso *nivel de ruido* con $j = 3$.

Analizando la Figura 2, observamos lo siguiente: i) en el escenario *nivel de ruido*, encontramos menos variabilidad cuando $j = 1$ y los valores promedio de RMSPE fueron menores con respecto a $j = 3$; ii) en el caso *densidad de diseño*, las diferentes RBFs no fueron afectadas por el valor de j para la variabilidad, y en general los valores promedio de RMSPE fueron más pequeños con $n_h = 32$ excepto en la CRS y en la GAU, las cuales muestran un comportamiento diferente cuando $\eta = 0,1$; iii) bajo el escenario *variación espacial*, en general los valores promedio de RMSPE son mas grandes que en los demás escenarios bajo cualquier RBF y los valores promedio de RMSPE fueron más pequeños con $n_h = 32$ excepto en la CRS para $\eta = 0,01$ y $j = 1$, como en la GAU con $\eta = 0,1$; y iv) para el caso *función de varianza*, se presenta una gran variabilidad en general al compararlo con los escenarios anteriores y el comportamiento de las RBFs: CRS y GAU es como en los escenarios *nivel de ruido* y *variación espacial*.

De acuerdo con la Figura 3, observamos que: i) cuando se considera *nivel de ruido*, hay mayor variabilidad con $j = 3$, aumentando ligeramente los valores promedio de RMSPE, siendo la función de menor variabilidad la CRS y en general los valores promedio de RMSPE fueron más pequeños con $n_h = 32$ excepto en las funciones CRS y GAU; ii) en el caso *densidad de diseño*, los valores promedio de RMSPE fueron más pequeños con $n_h = 32$ excepto en las funciones CRS y GAU; iii) para el escenario *variación espacial*, en general los valores promedio de RMSPE son mas grandes con respecto a los demás escenarios, bajo cualquier RBF y como en el caso anterior los promedios de RMSPE fueron más pequeños con $n_h = 32$ excepto en las funciones CRS y GAU; y iv) escenario *función de varianza*, en general se observa una mayor variabilidad en relación a los demás escenarios, con el mismo comportamiento de las funciones CRS y GAU ya mencionado previamente, resaltando en este caso un comportamiento similar en los promedios y variabilidad del RMSPE en las funciones TPS y ST.

En términos generales, el método STIRBFs fue lo suficientemente robusto frente a diferentes tamaños de muestra porque las variabilidades fueron similares y homogéneas en todos los escenarios analizados.

4. Aplicación

Se analiza la temperatura media mensual terrestre en Croacia a partir de 154 estaciones meteorológicas, medida desde enero hasta diciembre en el 2008. Esta información es tomada de <http://spatial-analyst.net/book/HRclim2008> y esta fue proporcionada por Melita Perčec Tadić, de la Organización Meteorológica y de Servicios Hidrológicos Croatas Hengl (2009). Croacia es un país relativamente pequeño, pero cuenta con varias regiones de clima diferente que son el resultado de su posición específica en el mar Adriático y de la topografía muy diversa que va desde las llanuras en el este, a través de una zona central montañosa que separa el territorio continental de la parte marítima del país. La región de estudio se caracteriza por una amplia gama de características topográficas y climáticas, lo que

permite evaluar correctamente la metodología propuesta, ya que las temperaturas medias de la tierra en tal región se ven fuertemente influenciadas por la topografía.

En la mayoría de las estaciones meteorológicas, la temperatura se mide tres veces al día, a las 7 am, 1 pm y 9 pm Hengl et al. (2012). La media de la temperatura diaria (ΔT en un día) se calcula como un promedio ponderado de acuerdo a la siguiente expresión

$$\Delta T = \frac{T_{(7am)} + T_{(1pm)} + 2 \cdot T_{(9pm)}}{4} \quad (22)$$

Luego la temperatura media mensual se obtiene de la media diaria mencionada anteriormente, teniendo en cuenta que se dispone una composición de imágenes (MODIS con 1 km de resolución, cada 8 días, dispuestas al público) de la temperatura media diaria, es decir, de 3 a 4 registros mensuales. Las mediciones de temperatura se recogen automáticamente en 154 estaciones meteorológicas, tres de estas no tenían registros disponibles para unos meses, entonces en algunos meses se considero sólo 151 datos y con esta información se procedió a calcular los valores de la temperatura media mensual. La distribución espacial de las estaciones no es optima (Zaninovic et al. 2008, Perčec Tadić 2010), hay un cierto submuestreo a mayor altitud y en áreas con menor densidad de población; por razones prácticas, las zonas con mayor densidad de población se les dio prioridad. Por lo tanto, se podría esperar que la precisión de la cartografía sea menor a mayor altitud y en las tierras altas Hengl (2009).

En la Figura 4 se muestra; (a) las localizaciones espaciales (w_x, w_y) de 154 estaciones meteorológicas ¹. (b) el modelo digital de elevación (DEM, en metros), (c) la distancia topográfica ponderada desde la línea de costa (DSEA, en km), (d) el índice de humedad topográfica (TWI). Para la interpolación espacio-temporal, tanto las coordenadas espaciales como el tiempo se estandarizaron para dar igual peso a todas las dimensiones y calcular las distancias entre observaciones. Pero la tendencia espacio temporal local \mathbf{X}_{st} dada por (6) en el método STIRBFs se puede establecer sin estandarizar las variables espacio-temporales.

La optimización de los parámetros de suavizamiento η y ρ se realiza a partir de los datos previamente descritos. Para esto, se trabaja con la función *graph.rbfsT()* de la librería *geosptdb* desarrollada por Melo & Melo (2015), esta función se evalúa en las funciones de base radial espacio tiempo mencionadas en la Tabla 1, encontrando uno de los mejores ajustes en la función *TPS*, con parámetros $\eta = 0,14$ y $\rho = 0,01$ se obtiene un $RMSPE = 2,198$. Esta función trabaja internamente con las funciones *rbfsT.cv()* y *rbfsT.cv1()*, las cuales emplean *optimize()* para un parámetro y *bobyqa()* para los dos parámetros η y ρ . En la optimización no se utilizó la función *optim()*, descrita en Mittelhammer et al. (2000) ya que demandaba más tiempo que *optimize()*. Para optimizar los dos parámetros es necesario que *eta.opt=TRUE* y *rho.opt=TRUE* así se obtendrá un gráfico tipo lattice (la Figura 6, muestra el comportamiento del RMSPE en la función de base radial espacio tiempo TPS para una combinación de η y ρ).

¹ Las coordenadas espaciales w_x y w_y , se obtienen a partir de una transformación de coordenadas geográficas (latitud y longitud) a un sistema de coordenadas cartesianas

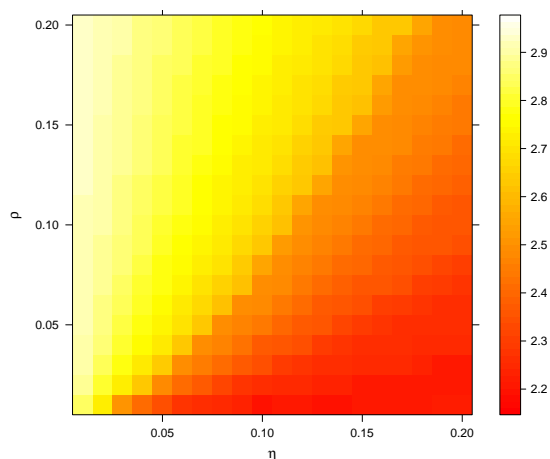


Figura 5 Lattice de optimización para el RMSPE cuando varían η y ρ en la función de base radial TPS

El método LOOCV fue utilizado para comprobar el rendimiento de los seis modelos de esta aplicación. La Tabla 6 muestra los valores de RMSPE para los resultados de interpolación en las seis funciones de base radial espacio-temporales y las RBFs que producen los valores más pequeños de RMSPE son TPS y ST.

Tabla 6 RMSPE de algunas STIRBFs para la temperatura media mensual en Croacia 2008 con LOOCV

	MQ	TPS	CRS	ST	EXP	GAU
η	0.001	0.337	0.142	0.003	0.200	0.200
ρ	0.015	0.021	0.000	0.000	0.050	0.002
RMSPE	2.421	2.238	2.272	2.247	2.256	2.269

Los datos y el shapefile son precargados, seguidamente se genera una grilla de 25000 puntos dentro de la región analizada, con el fin de generar predicciones de la temperatura media terrestre para los 12 meses del 2008. Esta grilla es obtenida usando la función *spsample()* del paquete *sp*. Las predicciones son generadas con la función *rbfST()*, esta requiere el valor de los parámetros η y ρ (anteriormente se explico la forma de obtenerlos), la formula que define la tendencia: $z \sim 1$ para casos sin tendencia y $z \sim x + y$ para tendencia lineal (para el caso se considero, $MTEMP \sim x + y + dem + dsea + twi + t$ con MTEMP “temperatura media terrestre mensual”, “x” y “y” coordenadas espaciales, “dem”, “dsea” y “twi” ya definidas anteriormente y “t” el tiempo), las coordenadas de los puntos muestreados *coordinates*, las coordenadas o tendencia de los nuevos puntos *newdata*, el número de vecinos *n.neigh* (se considero igual a 40), y el tipo de función de base radial *func*. Estas predicciones son luego convertidas a un objeto de clase *SpatialPixelsDataFrame* y *sp*, con la instrucción *coordinates()*, del paquete *sp*, y finalmente para la RBF espacio-temporal TPS con la función *spplot()* se obtiene el

mapa de las predicciones para la variable analizada en cada mes del 2008, el cual se muestra en las Figura 6.

5. Conclusiones

El método STIRBFs tiene la ventaja de trabajar con variables mixtas en la tendencia y no requiere la estimación de un variograma espacio-temporal, que generalmente exige demasiado tiempo de cálculo. Esto puede ser relevante en muchas disciplinas de geociencias y áreas ambientales donde las investigaciones suelen tener covariables regionalizadas mixtas.

El método propuesto analizado mediante una estructura de krigeado considerando la tendencia, presenta un buen funcionamiento al trabajar con vecindarios grandes, indicando en general que se tendrá un menor error asociado a un RMSPE más pequeño.

En una variedad de estudios, la detección de variabilidad entre regiones es una tarea bastante difícil, por lo cual se espera que el método STIRBFs propuesto sea útil ya que no desprecia la información existente y permite trabajar con datos faltantes. Aunque la correlación entre las variables explicativas y la variable respuesta pueda ser baja, el punto clave en el método propuesto es la correlación espacio-temporal entre estas, siendo unicamente necesario la estimación de los parámetros η , ρ y si el usuario lo desea n_h . Dichos parámetros, se pueden estimar fácilmente por medio de la librería *geosptdb* en poco tiempo.

Referencias

- Armstrong, M., C. G. & Hubert, P. (1993), 'Kriging the rainfall in lesotho. en geostatistics tróia '92', *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht* **2**, 661–672.
- Banerjee, S., Carlin, B. P. & Gelfand, A. E. (2004), *Hierarchical Modeling and Analysis for Spatial Data.*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton-Florida.
- Bellier, E., Planque, B. & Petitgas, P. (2007), 'Historical fluctuations in spawning location of anchovy (*engraulis encrasicolus*) and sardine (*sardina pilchardus*) in the bay of biscay during 1967-73 and 2000-2004', *Fisheries Oceanography* **16**(1), 1–15.
- Bishop, C. M. (1995), *Neural Networks for Pattern Recognition*, Oxford Press, Oxford.
- Chen, L., Fuentes, M. & Davis, J. M. (2006), 'Spatial temporal statistical modelling and prediction of environmental processes', *En Hierarchical Modelling for the Environmental Sciences, Oxford Univ. Press* pp. 121–144.
- Chica, J., Cano, R. & Chica, M. (2007), 'Modelo hedónico espacio-temporal y análisis variográfico del precio de la vivienda', *GeoFocus* **7**, 56–72.
- Chilès, J. P. & Delfiner, P. (1999), *Geostatistics: modeling spatial uncertainty*, John Wiley & Sons, New York.
- Christakos, G. (2000), *Modern spatiotemporal geostatistics*, Oxford University Press, Oxford.
- Cressie, N. (1989), 'Geostatistics.', *The American Statistician* **43**, 197–202.

- Cressie, N. (1993), *Statistics for Spatial Data*, Revised Edition. John Wiley & Sons Inc., New York.
- Cressie, N. & Huang, H. C. (1999), ‘Classes of nonseparable, spatio-temporal stationary covariance functions’, *Journal of the American Statistical Association* **94**, 1330–1340.
- Özgen et al.
- Şen, Z., Altunkaynak, A. & Özger, M. (2006), ‘Space-time interpolation by combining air pollution and meteorologic variables’, *Pure and Applied Geophysics* **163**, 1435–1451.
- De Cesare, L., Myers, D. E. & Posa, D. (1997), Spatial temporal modeling of so₂ in the milan district, Technical report, En Geostatistics Wollongong **96**, 2, 1031–1042, Kluwer Academic Publ., Dordrecht.
- De Cesare, L., Myers, D. E. & Posa, D. (2001), ‘Estimating and modeling space-time correlation structures’, *Statistics and Probability Letters* **51**, 9–14.
- Duchon, J. (1976), ‘Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces’, *Rairo Analyse Numerique* **10**, 5–12.
- Gneiting, T., Genton, M. G. & Guttorp, P. (2007), *Statistical Methods for Spatio-Temporal Systems*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton-Florida, chapter Geostatistical space-time models, stationarity, separability and full symmetry, pp. 151–175.
- Hardy, R. & Gopfert, W. (1975), ‘Least squares prediction of gravity anomalies, geoidal undulations, and detections of the vertical with multiquadric harmonic functions’, *Geophysical Research Letters* **2**, 423–426.
- Hengl, T. (2009), *A Practical Guide to Geostatistical Mapping*, 2nd edn, University of Amsterdam, Amsterdam.
- URL:** <http://spatial-analyst.net/book/>
- Hengl, T., Heuvelink Gerard, B. M., Perčec Tadić, M. & Pebesma, E. J. (2012), ‘Spatio-temporal prediction of daily temperatures using time-series of MODIS LST images’, *Theoretical and Applied Climatology* **107**, 1–2, 265–277.
- Kolovos, A., Christakos, G., Hristopulos, D. T. & Serre, M. L. (2004), ‘Methods for generating non-separable spatiotemporal covariance models with potential environmental applications’, *Advances in Water Resources* **27**, 815–830.
- Kondoh, H., Koizumi, T. & Ikeda, K. (2011), ‘A geostatistical approach to spatial density distributions of sika deer (*Cervus nippon*)’, *Journal of Forest Research* pp. 1–8.
- Lloyd, C. D. (2010), *Local Models for Spatial Analysis*, second edn, Taylor & Francis Group, Boca Raton-Florida.
- Mateu, J., Montes, F. & Fuentes, M. (2003), ‘Recent advances in space-time statistics with applications to atmospheric data: An overview’, *Journal of Geophysical Research* **108**, (D24).
- Melo, C. E., Melo, O. O. & Mateu, J. (2017), ‘A distance-based model for spatial prediction using radial basis functions’, *ASTA Advances in Statistical Analysis* .
- URL:** <https://doi.org/10.1007/s10182-017-0305-4>
- Melo, C. & Melo, O. (2015), *geosptdb: Spatio-Temporal; Inverse Distance Weighting and Radial Basis Functions with Distance-Based Regression*. R package version 0.5-0.
- URL:** [geosptdb.r-forge.r-project.org/](https://github.com/CarlosE-Melo/geosptdb.r-forge.r-project.org/)
- Mitáš, L. & Mitášová, H. (1988), ‘General variational approach to the interpolation problem’, *Computers and Mathematics with Applications* **16**, 983–992.

- Mitášová, H. & Hofierka, J. (1993), 'Interpolation by regularized spline with tension: II. Application to terrain modeling and surface geometry analysis', *Mathematical Geology* **25**, 657–669.
- Mitášová, H. & Mitáš, L. (1993), 'Interpolation by regularized spline with tension: I. Theory and implementation', *Mathematical Geology* **25**, 641–655.
- Mittelhammer, R., Judge, G. & Miller, D. (2000), *Econometric Foundations*, New York.
- Mosteller, F. & Wallace, D. L. (1963), 'Inference in an authorship problem', *Journal of the American Statistical Association* **58**(302), 275–309.
- Myers, D. (1992), 'Kriging, cokriging, radial basic functions and the role of positive definiteness', *Computers Mathematical Application* **24**, 139–148.
- Myers, D., De Iaco, S., Posa, D. & De Cesare, L. (2002), 'Space-time radial basis functions', *Computers and Mathematics with Applications* **43**, 539–549.
- Perčec Tadić, M. (2010), 'Gridded croatian climatology for 1961-1990', *Theoretical and Applied Climatology* pp. 1434–4483.
- Planque, B., Bellier, E. & Lazure, P. (2007), 'Modelling potential spawning habitat of sardine (*sardina pilchardus*) and anchovy (*engraulis encrasicolus*) in the bay of biscay', *Fisheries Oceanography* **16**(1), 16–30.
- Rouhani, S. & Hall, T. J. (1989), Space-time kriging of groundwater data, Technical report, En Geostatistics, 2, 639-650, Kluwer Academic Publ., Dordrecht.
- Rouhani, S. & Myers, D. E. (1990), 'Problems in space-time kriging of hydrogeological data', *Mathematical Geology* **22**, 611–623.
- Sahu, S. K. & Mardia, K. V. (2005), Recent trends in modeling spatio-temporal data, in 'In Proceedings of the special meeting on Statistics and Environment, Messina, Italy'.
- Schagen, I. P. (1979), 'Interpolation in two dimensions: a new technique', *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications* **23**, 53–59.
- Snepvangers, J.J.J.C., H. G. & Huisman, J. (2003), 'Soil water content interpolation using spatio-temporal kriging with external drift', *Geoderma* **112**, 253–271.
- Späth, H. (1969), 'Exponential spline interpolation', *Computing* **4**, 225–233.
- Stone, M. (1974), 'Cross-Validatory Choice and Assessment of Statistical Predictions', *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* **36**(2), 111–147.
- Wackernagel, H. (2003), *Multivariate Geostatistics: An Introduction with applications*, Third Completely Revised Edition. Springer-Verlag, New York.
- Wand, M. (2000), 'A comparison of regression spline smoothing procedures', *Computational Statistics* **15**, 443–462.
- Yavuz, H. & Erdogan, S. (2012), 'Spatial analysis of monthly and annual precipitation trends in Turkey', *Water Resources Management* **26**(3), 609–621.
- Ye, J. (2008), Geostatistical methods for spatio-temporal analysis of fMRI data, PhD thesis, Department of Statistics, University of Georgia.
- Ye, J., Lazar, N. & Li, Y. (2011), 'Sparse geostatistical analysis in clustering fMRI time series', *Journal of Neuroscience Methods* **199**(2), 336–345.
- Zaninovic, K., Gajic-Capka, M. & Percec-Tadic, M. (2008), Klimatski atlas Hrvatske, climate atlas of Croatia 1961, 1990, 1971 2000., Technical report, Meteorological and Hydrological Service Republic of Croatia, Zagreb.

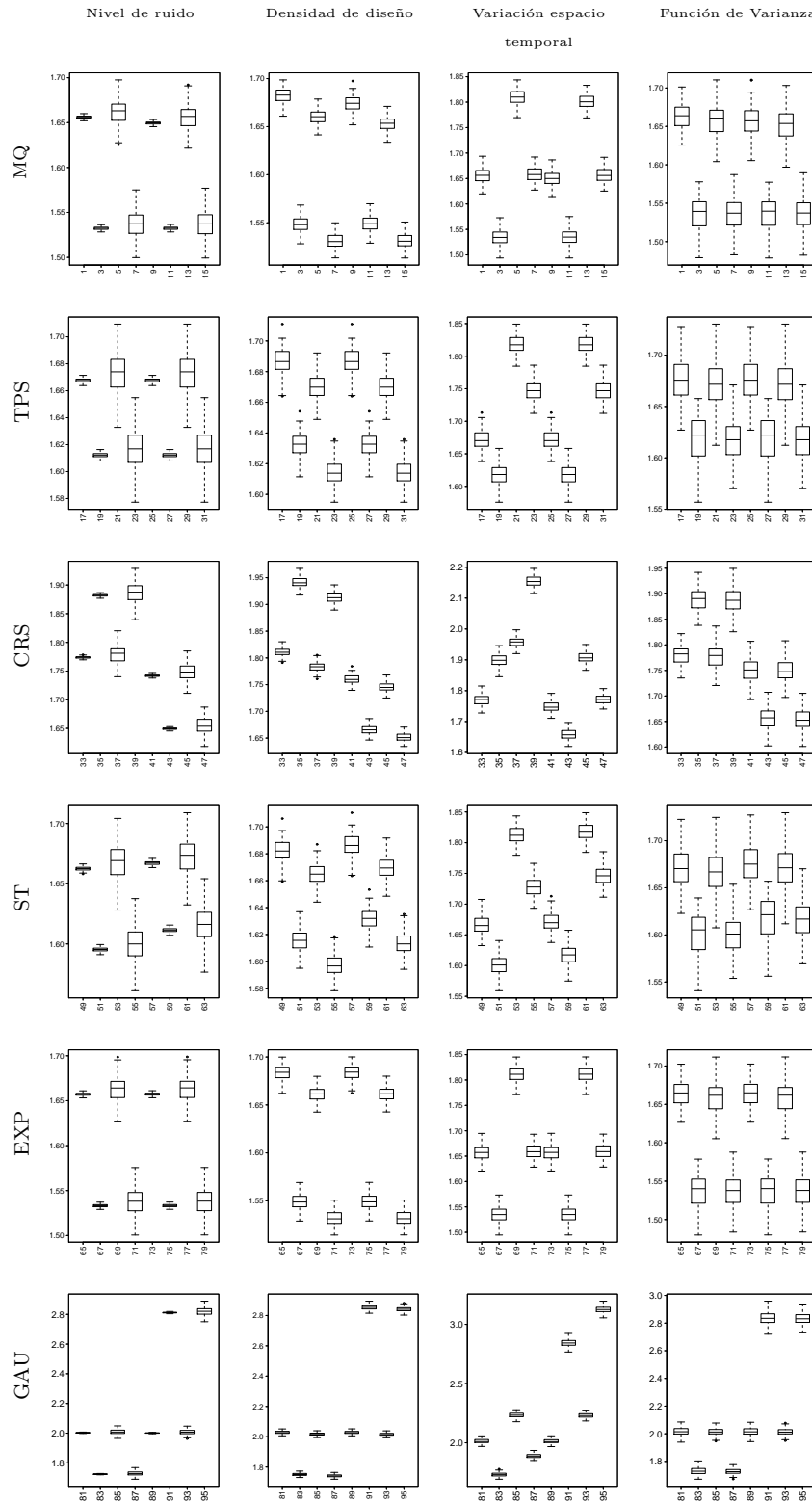
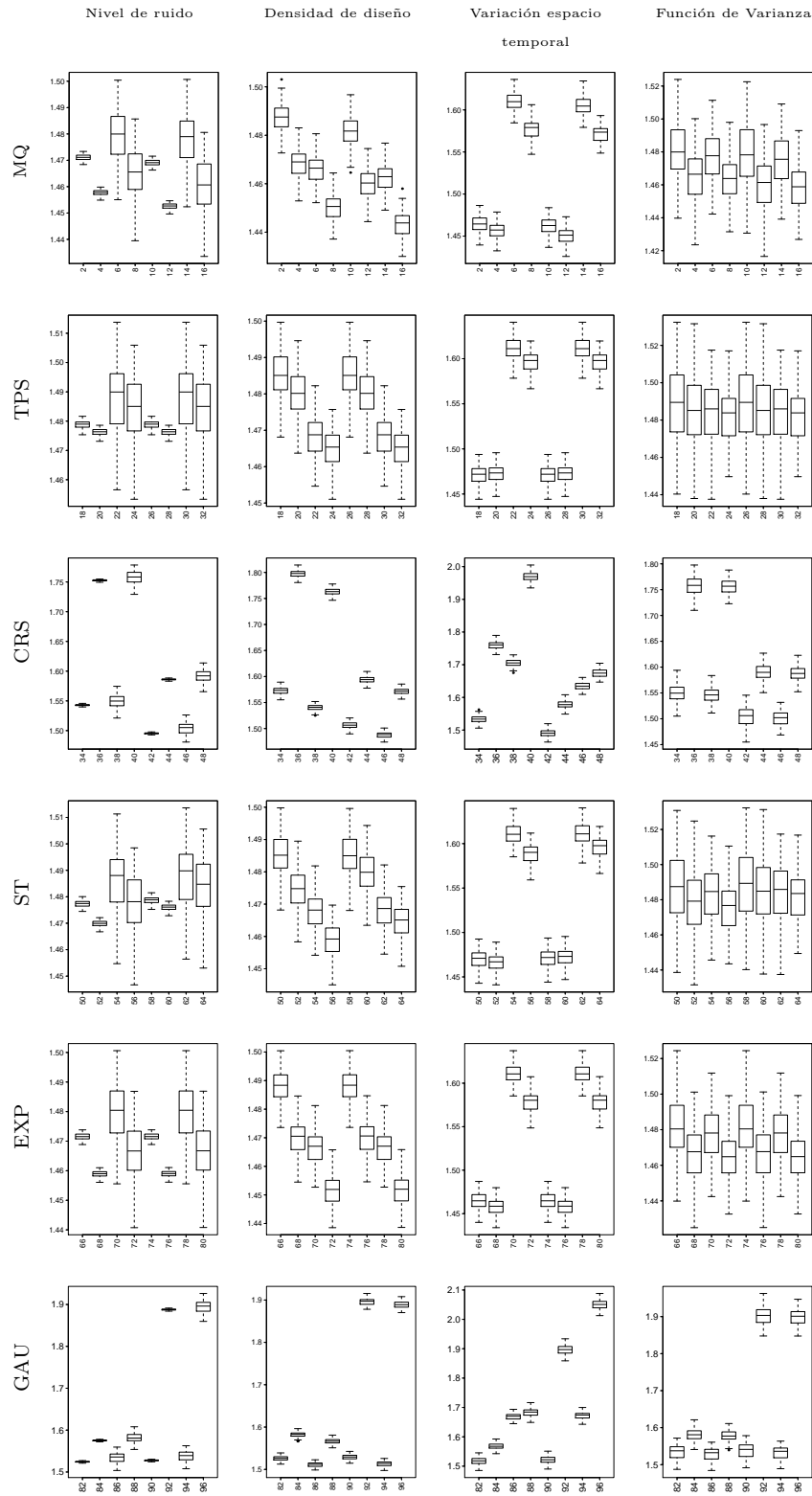


Figura 2 RMSPE para los escenarios espacio-temporales simulados con 6 tiempos



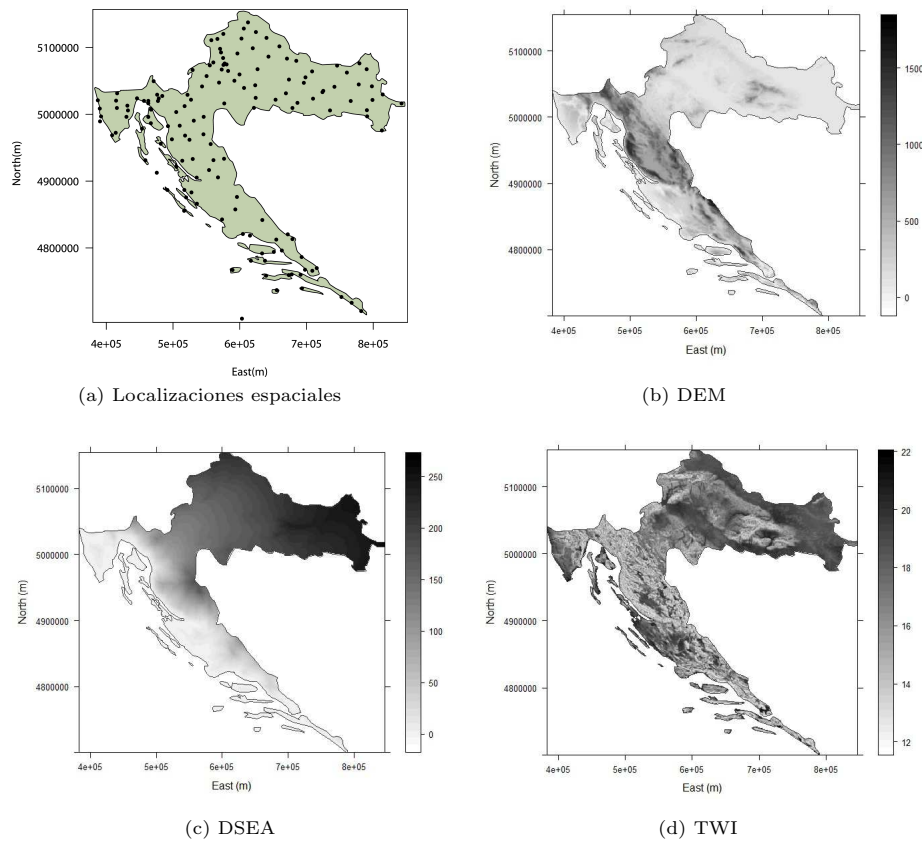


Figura 4 Localizaciones espaciales de las estaciones meteorológicas en Croacia y predictores estáticos topográficos: Modelo Digital de Elevación (DEM, en metros), la distancia topográfica ponderada desde la línea de costa (DSEA, en km) y el índice de humedad topográfica (TWI)

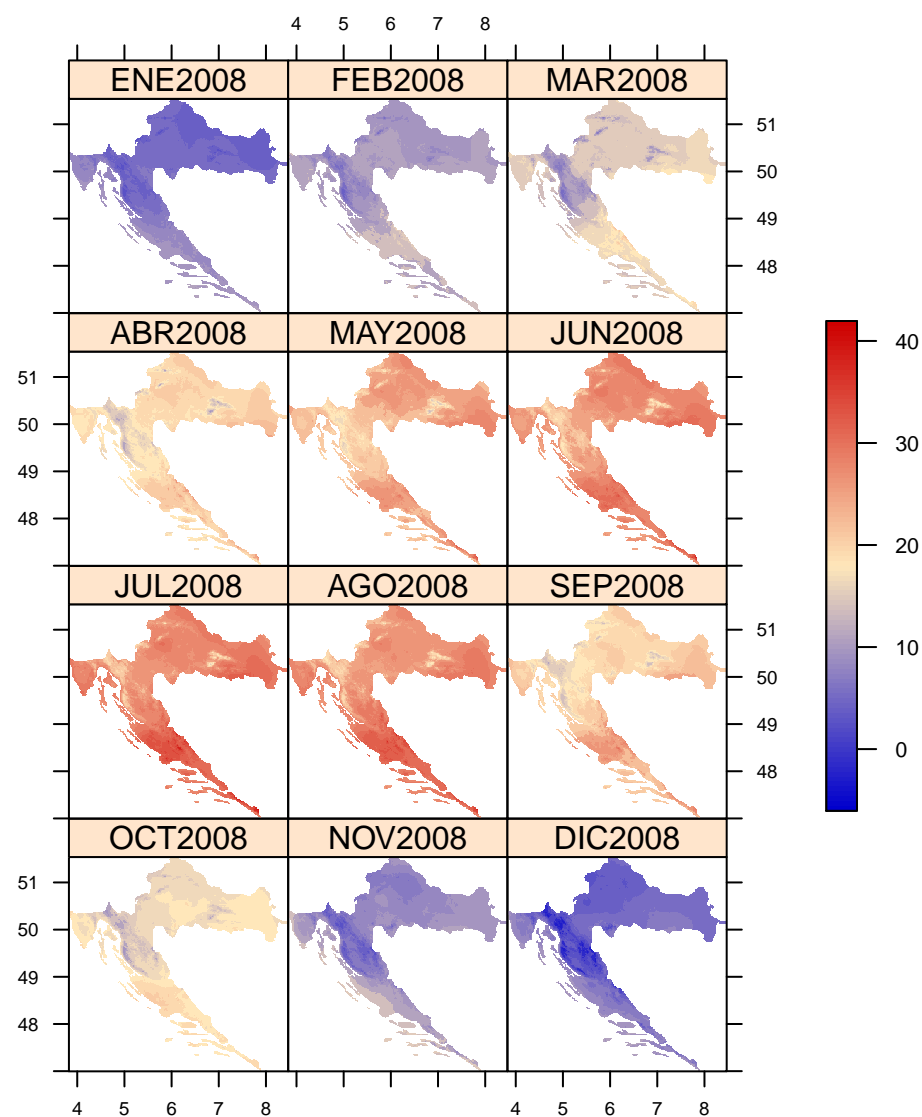


Figura 6 Mapas de predicción de la temperatura media mensual 2008 de la tierra en Croacia bajo el método STIRBFs TPS (unidades de las coordenadas este y norte en 100.000 metros)